



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA

**ANÁLISIS ELECTRODINÁMICO DE ARREGLOS
REFLECTIVOS FINITOS BASADOS EN
APERTURAS ANULARES CON STUBS**

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

DOCTOR EN INGENIERÍA

(INGENIERÍA ELÉCTRICA)

P R E S E N T A :

JESÚS RODRÍGUEZ ZAMUDIO

TUTOR:

DR. OLEKSANDR MARTYNYUK

2010



JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Pablo Roberto Pérez Alcázar

Secretario: Dr. Gabriel Eduardo Sandoval Romero

Vocal: Dr. Oleksandr Martynyuk

1er. Suplente: Dr. Carlos Rivera Rivera

2do. Suplente: Dr. Jorge Rodríguez Cuevas

Lugar donde se realizó la tesis:

CIUDAD UNIVERSITARIA

TUTOR DE TESIS

DR. OLEKSANDR MARTYNYUK

*Gloria, Honor y Alabanza.
Al señor Jesucristo:
el Alfa y la Omega,
el principio y el fin,
el primero y el último.*

*En memoria de mi amado padre,
Maurilio Rodríguez García.
“Genio y figura...”.*

Reconocimientos:

A mi madre Agustina Zamudio González, por todo el amor, el cariño, la comprensión y el apoyo incondicional que me has brindado todo este tiempo. ¡Mil gracias Mama!

Al Dr. Oleksandr Martynyuk, por su guía y enseñanza, y sobre todo por su paciencia y amistad durante estos últimos años. ¡Muchas gracias Doctor!

A cada uno de los integrantes del jurado: Dr. Pablo Roberto Pérez Alcázar, Dr. Gabriel Eduardo Sandoval Romero, Dr. Oleksandr Martynyuk, Dr. Carlos Rivera Rivera y Dr. Jorge Rodríguez Cuevas, por sus atinados comentarios y observaciones en la revisión de este trabajo. ¡Gracias Doctores!

Una especial distinción al Dr. Volodymyr Svyryd, por su interés y apoyo en este proyecto. Deseamos su pronta recuperación. ¡Ánimo Doctor!

A mis amigos: Dr. Ismael Martínez, Dr. Jorge Rodríguez y M.I. Domingo Mendoza por la valiosa ayuda brindada en las diferentes etapas de este proyecto. ¡Gracias amigos!

A mi querida Liz, por ser como eres y aceptarme como soy, por los hermosos momentos que hemos compartido y por todo el cariño y amor que me has demostrado. ¡Te amo de aquí al infinito y más allá...!

A Apolo González y Apolo González Jr., por la ayuda brindada en la etapa de fabricación del prototipo. ¡Gracias!

Al Dr. Michael Pascoe Chalke, por su apoyo, compañía y amistad a lo largo de nuestro vía crucis. ¡Gracias Michael!

A la UNAM, por abrirme sus puertas desde antes de decir mis primeras palabras y demostrarme a través del tiempo que es nuestra máxima casa de estudios. ¡Goya, Goya!, ¡Cachún, Cachún, ra, ra!, ¡Cachún, Cachún, ra, ra! ¡Goya, Universidad!

Finalmente, agradezco a los programas/proyectos: DGEP-SPI/PB/0635/2005, INTTELMEX, PAPIIT-IN1042063, CONACYT-79832 y PAPIIT-IN103709-3 por el apoyo económico brindado en el desarrollo de este trabajo de investigación.

A las personas que de una u otra forma contribuyeron en alcanzar esta meta:

Francisco Rodríguez y Lilia Román, Alicia Rodríguez y Fam., Thalía Rodríguez y Fam., Georgina Rodríguez y Fam., Refugio Zamudio y David Montoya, Juana Zamudio, Josefina Zamudio y Anselmo Hernández, Josefa Zamudio y Fam., María Zamudio y Fam., María Eugenia Grimaldi y Fam., Esther Grimaldi y Fam., Lucía Grimaldi y Fam., Alfonso Grimaldi y Fam., Arnulfo Reyes y María del Carmen Carreño, Teresa Valdés y Fam., Héctor Landeros y Fam., Edmundo Pavón y Fam., Luis Fernando Castro y Fam., Jose.na Espinal y Fam., Guille, Jorge Isaac y David Rodríguez; Salvador Zamora, Javier López, Ricardo Mota, Lourdes y Rosalba Martínez, y en especial a Maribel Miranda†

¡Gracias!

Índice general

Introducción	1
1. Estado del Arte de los Arreglos Reflectivos	5
1.1. Introducción	5
1.2. El arreglo reflectivo	5
1.3. Métodos de análisis electromagnéticos	9
1.4. Conclusiones	12
2. Desarrollo del Modelo Matemático para el Arreglo Reflectivo Finito basado en Aperturas Anulares con Stubs	14
2.1. Introducción	14
2.2. Principio de operación del arreglo reflectivo	15
2.3. Modelo matemático para el arreglo reflectivo finito	21
2.3.1. Ecuación integro-diferencial para el campo eléctrico tangencial desconocido E_{τ}^{sd}	23
2.3.2. Expresión para la admitancia mutua	28
2.3.3. Ecuación integro-diferencial para el campo eléctrico tangencial desconocido E_{τ}^{cd}	32
2.4. Conclusiones	37
3. Características de Radiación del Arreglo Reflectivo Finito basado en Aperturas Anulares con Stubs	40
3.1. Introducción	40
3.2. Optimización del elemento del arreglo reflectivo	40
3.3. Características de radiación del arreglo reflectivo finito	44
3.4. Conclusiones	52
4. Verificación Experimental del Modelo Matemático Desarrollado	54
4.1. Introducción	54
4.2. Diseño de los arreglos reflectivos	54
4.3. Construcción de los arreglos reflectivos	59
4.4. Resultados de la verificación experimental	62
4.5. Conclusiones	66
Conclusiones	68
A. Derivación de la Transformada de Fourier Bidimensional de los Campos Magnéticos y Eléctricos	71

B. Cálculo de la Admitancia Mutua	75
B.1. Producto entre las funciones que definen el campo en las aperturas anulares	75
B.2. Producto entre las funciones que definen el campo en los stubs	80
B.3. Producto entre las funciones que definen los campos en las aperturas anulares y en los stubs	85
C. Diagramas de las Antenas tipo Corneta	86
Publicaciones	88
Bibliografía	117

Introducción

Actualmente es posible observar un fuerte interés en la investigación de la tecnología de antenas de arreglos de fase para aplicaciones en telecomunicaciones y radar a frecuencias de microondas. Una alternativa para obtener arreglos de fase ligeros y de bajo costo es el desarrollo de arreglos reflectivos pasivos. Un arreglo reflectivo está compuesto por múltiples elementos reflectores que proveen una fase prediseñada para formar un haz enfocado, cuando es iluminado por un alimentador. Los arreglos reflectivos son fabricados sobre un sustrato dieléctrico plano utilizando la tecnología de circuito impreso y ofrecen la posibilidad del redireccionamiento del haz como en los arreglos de fase. El mecanismo de alimentación, tal y como en una antena de reflector, elimina la complejidad y las pérdidas de la red de alimentación usada en los arreglos planos, proporcionando así una mayor eficiencia.

Un aspecto importante en el diseño del arreglo reflectivo es el desarrollo de un modelo matemático para predecir con exactitud las características de radiación del arreglo. La mayoría de las investigaciones teóricas y experimentales de los arreglos de fase están basadas en el análisis de arreglos de dimensiones infinitas, en donde se emplea el teorema de Floquet para simplificar el análisis al trabajar con una sola celda periódica unitaria. Sin embargo, estos modelos y las aproximaciones empleadas en dichos análisis tienden a ser inapropiadas para los arreglos reflectivos prácticos de dimensiones medianas y pequeñas, sobre todo en el caso de un arreglo reflectivo cuyos elementos son distintamente configurados y por lo tanto, el elemento del arreglo reflectivo no puede considerarse como la celda periódica de la estructura.

En arreglos con un fuerte acoplamiento electromagnético, el comportamiento de los elementos en el borde del arreglo difiere del comportamiento obtenido mediante el modelo del arreglo infinito. En el caso de los arreglos finitos, las características de reflexión de los elementos del borde dependen de su posición relativa en el arreglo. Como consecuencia del truncamiento de la estructura periódica infinita, las distribuciones del campo en cada elemento son diferentes y es necesario entonces considerar el problema en su totalidad al calcular los campos individuales en cada elemento del arreglo.

Con base en lo anterior, se plantean los objetivos del presente trabajo:

- El desarrollo del modelo matemático que permita analizar numéricamente la dispersión de las ondas electromagnéticas incidentes sobre el arreglo periódico, tomando en consideración el fuerte acoplamiento mutuo entre los elementos distintamente configurados del arreglo de extensión finita.
- El desarrollo del modelo matemático, en conjunto con los modelos del arreglo periódico infinito, que permita la optimización de los arreglos de fase para asegurar un amplio sector de exploración, bajas pérdidas de inserción, una elevada eficiencia de la apertura y una alta ganancia.
- La verificación experimental del modelo matemático desarrollado mediante la construcción de antenas de dimensiones pequeñas.

La presente tesis está dividida en cuatro capítulos. En el primer capítulo se analiza el estado del arte de los arreglos reflectivos y de los métodos de análisis electromagnéticos. En el segundo capítulo se presenta el desarrollo del modelo matemático del arreglo reflectivo finito, basado en aperturas anulares con "stubs" (secciones de línea de transmisión terminadas en circuito abierto o corto) controlados por diodos p-i-n. En el tercer capítulo se presentan las características de radiación de los arreglos reflectivos diseñados a partir de la optimización del elemento del arreglo. En el cuarto capítulo se presenta la verificación experimental del modelo matemático desarrollado y finalmente se presentan las conclusiones de este trabajo.

Resumen

En este trabajo se presenta el análisis electrodinámico de arreglos reflectivos finitos basados en aperturas anulares con stubs, controlados por diodos p-i-n. Se desarrolló un modelo matemático para predecir las características de exploración del arreglo reflectivo finito de aperturas anulares con stubs, considerando pantallas conductoras infinitesimalmente delgadas. El modelo matemático desarrollado toma en consideración el acoplamiento mutuo entre los elementos distintamente configurados del arreglo reflectivo. Se calcularon las características de radiación del arreglo reflectivo de 289 elementos de geometría optimizada. De acuerdo con las características simuladas, el arreglo optimizado mostró un eficiente redireccionamiento de la onda incidente para ángulos de elevación de hasta 30 grados con una eficiencia de la apertura mayor a 0.22. Las características obtenidas con el modelo del arreglo finito desarrollado fueron comparadas con las características calculadas con el modelo del arreglo infinito. Como resultado, se probó que el modelo matemático del arreglo infinito puede predecir el posible sector de exploración del arreglo, mientras que el modelo matemático del arreglo finito es necesario para obtener las características de radiación del arreglo. La verificación experimental del modelo matemático desarrollado fue llevada a cabo mediante la construcción de arreglos reflectivos de dimensiones pequeñas, configurados para redireccionar el lóbulo principal en las direcciones determinadas por distintos ángulos de elevación. Los resultados obtenidos de las simulaciones presentan una buena coincidencia con los datos experimentales.

Abstract

This work presents the electromagnetic analysis for the finite reflectarray based on ring slot resonators with stubs controlled by p-i-n diodes. A full-wave mathematical model was developed to analyze the radiation characteristics of a finite reflectarray based on ring slot resonators with stubs perforated in an infinite perfectly conductive plane of negligible thickness. The developed mathematical model takes into account the electromagnetic coupling between the differently configured reflectarray elements. The scanning characteristics of the finite 289-element reflectarray with optimized elements were calculated. According to the simulated characteristics, the optimized reflectarray provides electronic scanning in the XOZ -plane for elevation angles up to 30 degrees with a total aperture efficiency better than 0.22. The characteristics obtained with the developed mathematical model were compared with the simulated characteristics obtained with the mathematical model of the infinite array. As a result, it was proven that the infinite mathematical model is able to predict the possible scanning sector of the array, meanwhile the mathematical model of the finite array is necessary to obtain the radiation characteristics of the array. To validate experimentally the developed mathematical model, small-sized finite reflectarrays configured to form the main lobe in the direction determined by different reflection elevation angles were fabricated. Good coincidence between calculated and measured results was observed.

Capítulo 1

Estado del Arte de los Arreglos Reflectivos

1.1 Introducción

En los últimos años se ha observado un creciente interés en la investigación de arreglos de fase ligeros y de bajo costo para aplicaciones de telecomunicaciones y radar a frecuencias de microondas. Los arreglos de fase activos pueden lograr la exploración del espacio circundante en un amplio sector de ángulos, sin embargo, se vuelven incosteables debido al complicado sistema de distribución y a los costosos módulos de amplificación.

Un método prometedor para obtener arreglos de fase de bajo costo y diseño simple es el desarrollo de arreglos reflectivos pasivos planos operando a frecuencias de ondas milimétricas. En estas frecuencias debe ponerse especial atención en la reducción de las pérdidas de inserción del arreglo de fase pasivo. Por lo tanto, debe realizarse una cuidadosa selección de la estructura del arreglo reflectivo.

1.2. El arreglo reflectivo

Un arreglo reflectivo típico de microcinta consiste de múltiples elementos reflectivos colocados sobre una superficie plana y de una antena alimentadora, como se muestra en la Fig. 1.1 (a). La antena alimentadora ilumina a los elementos de arreglo reflectivo, los cuales introducen un desplazamiento de fase requerido en la onda reflejada para redirigirla en la dirección deseada, tal y como se ilustra en la Fig. 1.1 (b). Esta operación es similar a la del reflector parabólico que utiliza su superficie curva para formar un frente de onda plano cuando una antena alimentadora es colocada en su foco.

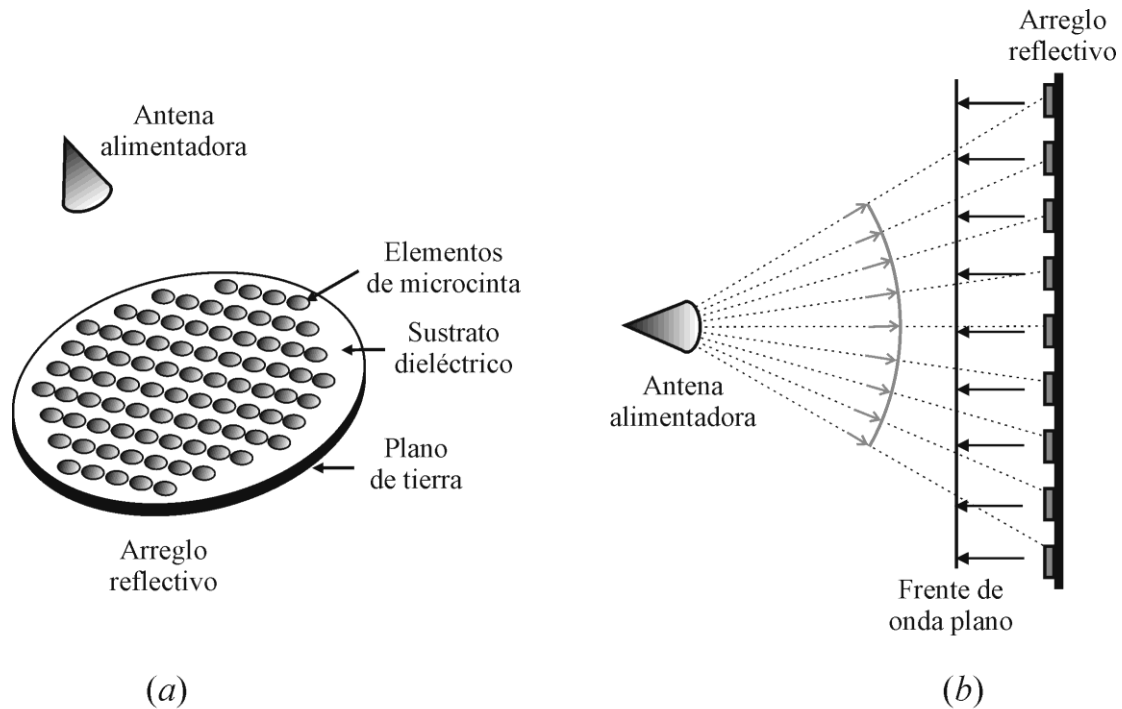


Figura 1.1: (a) Geometría del arreglo reflectivo y (b) formación del frente de onda plano.

Los arreglos reflectivos combinan algunas de las características más importantes de la antena de reflector parabólico tradicional y de la tecnología del arreglo de fase. Una ventaja del arreglo reflectivo sobre el arreglo de fase convencional es la ausencia de circuitos divisores de potencia, obteniéndose así bajas pérdidas de inserción. Tampoco es necesaria la complicada red de distribución de altas pérdidas, ni los costosos módulos de transmisión/recepción (T/R) del arreglo de fase. De las ventajas del arreglo reflectivo en comparación con el reflector parabólico, se pueden mencionar las siguientes [1]: La superficie plana del arreglo reflectivo permite un mecanismo de despliegue mucho más simple sobre un vehículo espacial, agregando muy poco peso y volumen a la estructura total. Por otra parte, el haz principal del arreglo reflectivo puede ser redireccionado en un sector más amplio del espacio circundante. Otra ventaja es la alta confiabilidad que presenta el arreglo reflectivo, ya que el mal funcionamiento de algunos elementos no representará un impacto significativo en el desempeño de la antena con miles de elementos, debido al aislamiento entre ellos. Además, el costo de fabricación del arreglo reflectivo de microcinta, cuando es producido en grandes cantidades, resulta ser bajo, ya que puede emplearse un proceso de ataque químico simple y económico para su fabricación.

Se han desarrollado diferentes métodos de defasamiento para los elementos del arreglo reflectivo. Como resultado, se han implementado arreglos reflectivos usando parches de microcinta con stubs de diversas longitudes [2-4] (Fig. 1.2 (a)). Sin embargo, se sabe que el nivel de polarización cruzada se degrada debido a la radiación espuria producida por los stubs.

Otra técnica es utilizar dipolos impresos de tamaño variable [5], (Fig. 1.2 (b)), y parches de microcinta de distintas dimensiones [6], (Fig. 1.2 (c)). En estos casos, el arreglo reflectivo es más sensible a las tolerancias de fabricación y a las variaciones en la frecuencia, debido al súbito comportamiento del desplazamiento de fase en términos de la dimensión del elemento y de la frecuencia.

Un método alternativo consiste en la implementación de un arreglo reflectivo con elementos idénticos que presentan diversas rotaciones angulares [7,8], (Fig. 1.2 (d)). En este método, el desplazamiento de fase introducido en la onda reflejada es determinado únicamente por la posición angular del elemento reflectivo. La rotación mecánica de este elemento da lugar a un desplazamiento de fase adicional introducido en la onda reflejada. Estos arreglos presentan un mejor desempeño en términos del nivel de la polarización cruzada y de los lóbulos laterales que los métodos anteriores.

Desafortunadamente, la velocidad de la rotación mecánica no es suficiente para una amplia gama de usos. Por lo tanto, se propuso una simulación electrónica de la rotación mecánica dando como resultado el arreglo reflectivo espirafase [9].

Con el uso del principio espirafase es posible obtener arreglos reflectivos de exploración rápida. La principal ventaja del arreglo reflectivo espirafase consiste en el hecho de que el elemento reflectivo se combina naturalmente con el desplazador de fase. Consecuentemente, se evita el uso de los desplazadores de fase reflectivos convencionales basados en líneas de transmisión de baja impedancia y altas pérdidas.

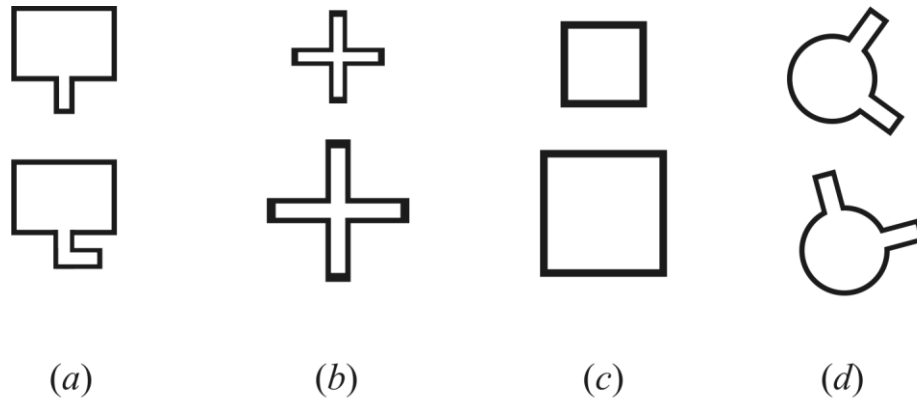


Figura 1.2: Elementos del arreglo reflectivo: (a) parches de microcinta con stubs de diversas longitudes, (b) dipolos impresos de tamaño variable, (c) parches de microcinta de distintas dimensiones y (d) elementos idénticos con diversas rotaciones angulares.

Inicialmente, esta técnica fue propuesta para el arreglo espirafase basado en dipolos de media onda [10] y en elementos espirales [11]. Sin embargo, los arreglos espirafase basados en elementos espirales no son capaces de asegurar la transformación óptima de las impedancias del diodo p-i-n, ni de lograr una amplia banda de operación. Como resultado, el nivel de la polarización cruzada se incrementa rápidamente y el elemento trabaja en una banda de frecuencias relativamente estrecha.

Más adelante, fue propuesto y analizado un arreglo reflectivo tipo espirafase con elementos basados en resonadores de apertura anular con stubs [12]. Fue comprobado que este tipo de elementos asegura la transformación óptima de las impedancias del diodo p-i-n, dando como resultado la supresión de las pérdidas de inserción en los diodos. En un trabajo reciente, una tecnología especial fue propuesta [13] para fabricar los circuitos de polarización de bajas pérdidas para este tipo de elementos.

No obstante, el progreso en el proceso de diseño depende en gran medida del modelo matemático utilizado para predecir y optimizar los parámetros del arreglo reflectivo. De esta forma, es necesario desarrollar un modelo matemático adecuado para reducir el tiempo y el costo necesario en el proceso de diseño. Para desarrollar el modelo matemático adecuado debe considerarse el siguiente hecho básico: El fuerte acoplamiento electromagnético que existe entre

los elementos de arreglo tiene un impacto considerable en las características del arreglo. Por lo tanto, la interacción electromagnética debe considerarse para predecir el comportamiento del arreglo reflectivo.

Una de las técnicas eficaces que toma en consideración el acoplamiento mutuo en grandes arreglos es el método del arreglo periódico infinito. Según este método, la ventaja de la periodicidad es explotada y solamente es analizada una celda periódica unitaria. Sin embargo, en un arreglo reflectivo, cada elemento es reconfigurado para introducir el desplazamiento de fase requerido en la onda reflejada. Por lo tanto, el elemento del arreglo reflectivo no puede considerarse como la celda periódica de la estructura.

El modelo matemático desarrollado en [14] considera el acoplamiento electromagnético entre los elementos distintamente configurados en un arreglo reflectivo periódico infinito. Con este modelo es posible calcular los parámetros del arreglo reflectivo infinito para diversos ángulos de exploración, considerando el acoplamiento mutuo en un ambiente de elementos adyacentes distintamente configurados. El modelo del arreglo infinito puede utilizarse para la optimización inicial del elemento del arreglo reflectivo, ya que no requiere de considerable tiempo de procesamiento. Sin embargo, este modelo no puede predecir los efectos en el borde del arreglo, ya que está enfocado en un arreglo infinito. Además, el modelo del arreglo infinito no puede estimar con exactitud algunas de las características importantes de los arreglos finitos prácticos como son: el patrón de radiación, la ganancia, el ancho del haz y los niveles de los lóbulos laterales y de los lóbulos de difracción. Entonces, es necesario desarrollar un modelo matemático apropiado que analice estas características. Aunque este modelo requiere de un considerable tiempo de procesamiento y es inadecuado para el proceso de optimización, es extremadamente útil en la etapa final del diseño.

1.3. Métodos de análisis electromagnéticos

Para desarrollar el modelo matemático del arreglo reflectivo finito, es necesario seleccionar adecuadamente el método de análisis electromagnético. Existen diversas técnicas como: el

Método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo, el Método de Elemento Finito y el Método de Momentos, entre otras.

El Método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo [15,16] está basado en la aproximación de las ecuaciones de Maxwell mediante ecuaciones en diferencias. El algoritmo basado en este método es muy flexible y fácil de implementar, debido a que no requiere de la formulación de ecuaciones integrales. Además, pueden tratarse problemas de dispersión relativamente complejos sin la necesidad de técnicas de inversión matricial. El método es conceptualmente simple de implementar en estructuras complicadas, conductoras o dieléctricas, no homogéneas. Sin embargo, una de las desventajas del método es que su exactitud y estabilidad dependen de la malla utilizada en la discretización del objeto. Además, el tiempo de ejecución del programa puede ser muy grande dependiendo de la geometría de la estructura [17].

El Método de Elemento Finito [18] es utilizado principalmente en la solución de problemas de frontera gobernadas por ecuaciones diferenciales. Esta técnica discretiza la región, sobre la cual están definidas las ecuaciones diferenciales, en formas geométricas simples denominadas elementos finitos. Las propiedades materiales y las relaciones que gobiernan a dichos elementos se expresan en función de los valores desconocidos en los nodos de los elementos [19]. A pesar de que representa una técnica numérica poderosa para tratar problemas que involucran geometrías complejas y medios no homogéneos, las principales desventajas de este método son el tiempo requerido para el análisis y la dificultad de su implementación en problemas de dispersión en regiones abiertas [17].

El Método de Momentos [20] es un procedimiento general para resolver ecuaciones diferenciales e integrales. Este método aplica técnicas residuales ponderadas para reducir una ecuación integral a una ecuación matricial. La solución de la ecuación matricial normalmente se lleva a cabo mediante técnicas de inversión, de eliminación o iterativas. El método se ha aplicado con éxito a un gran variedad de problemas electromagnéticos tales como radiación de elementos y arreglos, problemas de dispersión y patrones de radiación de antenas, entre otros. Inclusive, ha sido aplicado a problemas de regiones cerradas, como guías de onda y cavidades, con buenos

resultados. Además, los tiempos de procesamiento para el análisis son relativamente bajos. Cabe mencionar que este método presenta una aplicación limitada en problemas de radiación y dispersión de estructuras de grandes dimensiones eléctricas. Esto debido al excesivo costo de almacenaje, inversión y cómputo de matrices de gran tamaño [17].

Con base en la descripción de los métodos mencionados, se observa que el Método de Momentos es la técnica numérica más adecuada para resolver el problema de las condiciones de frontera del arreglo reflectivo de dimensiones finitas.

Entonces, se definen los objetivos de este trabajo de investigación:

- El desarrollo del modelo matemático que permita analizar numéricamente la dispersión de las ondas electromagnéticas incidentes sobre el arreglo periódico, tomando en consideración el fuerte acoplamiento mutuo entre los elementos distintamente configurados del arreglo de extensión finita.
- El desarrollo del modelo matemático que, en conjunto con el modelo del arreglo infinito previamente desarrollado [14], permita la optimización de los arreglos de fase para asegurar un amplio sector de exploración, bajas pérdidas de inserción, una elevada eficiencia de la apertura y una alta ganancia.
- La verificación experimental del modelo matemático desarrollado mediante la construcción de antenas de dimensiones pequeñas.

Con base en los objetivos anteriores, la metodología a seguir es la siguiente:

1. Debido a que entre los elementos del arreglo existe una fuerte interacción electromagnética, el modelo matemático adecuado se construirá basándose en la teoría electromagnética.
2. Al tratarse de una estructura de dimensión finita, es necesario considerar el problema en su totalidad al resolver los campos individuales en cada elemento, formulando las ecuaciones integrales que relacionen las componentes de los campos sobre el arreglo.

3. La solución a dichas ecuaciones integrales será tratada mediante la formulación del Método de Momentos en el dominio espectral, el cual permite reducir una ecuación integral a un sistema de ecuaciones lineales de dominio finito que puede ser resuelto numéricamente.
4. Obtención de las características de exploración del arreglo optimizado mediante la programación del modelo matemático desarrollado.
5. Comparación de los resultados del arreglo finito con los resultados obtenidos del arreglo infinito para comprobar el modelo matemático desarrollado.
6. Construcción de arreglos reflectivos de dimensiones pequeñas para validar el modelo matemático desarrollado.

1.4. Conclusiones

1. A la fecha existe un gran interés en la investigación y desarrollo de arreglos de fase de bajo costo y diseño simple, para aplicaciones de radar y telecomunicaciones.
2. Una alternativa atractiva para obtener este tipo de arreglos de fase es el desarrollo de arreglos reflectivos pasivos planos operando a frecuencias de microondas.
3. Los arreglos reflectivos tipo espirafase, basados en aperturas anulares con stubs, representan una técnica efectiva de desplazamiento de fase que ofrece un buen desempeño.
4. Con el modelo del arreglo infinito es posible calcular los parámetros del arreglo reflectivo para diversos ángulos de exploración, además de optimizar la geometría del elemento del arreglo. Sin embargo, este modelo no puede predecir los efectos en el borde del arreglo ni puede estimar con exactitud algunas de las características importantes de los arreglos finitos prácticos como: el patrón de radiación, la ganancia, el ancho del haz, los niveles de los lóbulos laterales, etc.

5. Por lo tanto, se propone el desarrollo de un modelo matemático adecuado que analice las características de dispersión del arreglo reflectivo de dimensiones finitas.

6. Con base en la descripción de las ventajas y desventajas de diferentes métodos de análisis electromagnéticos, se empleará el Método de Momentos en el dominio espectral para resolver las ecuaciones integrales obtenidas a partir de la formulación de las condiciones de frontera del arreglo reflectivo finito.

Capítulo 2

Desarrollo del Modelo Matemático para el Arreglo Reflectivo Finito basado en Aperturas Anulares con Stubs

2.1. Introducción

La propuesta de desarrollar el modelo matemático para el arreglo reflectivo finito basado en aperturas anulares con stubs, tiene como propósito el estimar las características de exploración del arreglo.

Este modelo permitirá el análisis numérico de la dispersión de las ondas electromagnéticas incidentes sobre el arreglo reflectivo, tomando en consideración el fuerte acoplamiento mutuo entre los elementos distintamente configurados del arreglo de dimensión finita. Con la optimización de los arreglos reflectivos se buscará asegurar un amplio sector de exploración, un gran ancho de banda y un alto coeficiente de conversión.

Debido a que entre los elementos del arreglo existe una fuerte interacción electromagnética, el modelo matemático se construirá basándose en la teoría electromagnética. Para el caso del análisis electrodinámico del arreglo reflectivo, al tratarse de una estructura de extensión finita, es necesario considerar el problema en su totalidad al resolver los campos individuales en cada elemento, formulando las ecuaciones integrales que relacionen las componentes de los campos sobre el arreglo.

La solución a dichas ecuaciones integrales será tratada mediante la formulación del Método de Momentos en el dominio espectral, el cual permite reducir una ecuación integral a un sistema de ecuaciones lineales de dominio finito que puede ser resuelto numéricamente por medios directos o iterativos.

2.2. Principio de operación del arreglo reflectivo

El arreglo reflectivo se muestra en la Fig. 2.1(a). Este arreglo reflectivo consiste de múltiples elementos de apertura colocados en los nodos de una malla rectangular de periodicidad invariable b_x y b_y a lo largo de las direcciones x y y , respectivamente, y situados a una distancia d sobre una pantalla de metal.

La geometría del elemento desplazador se muestra en la Fig. 2.1(b). Este elemento contiene un resonador de apertura anular A con ocho stubs radiales inductivos ($s_1, s_2, s_3, \dots, s_8$). Los radios interno y externo de la apertura anular son r_1 y r_2 , respectivamente. El ángulo entre dos stubs adyacentes es 45° . La longitud y el grosor de los stubs radiales son l_s y h_s , respectivamente. Los diodos p-i-n de control ($d_1, d_2, d_3, \dots, d_8$) son conectados en paralelo con los stubs radiales. En cualquier instante, dos de los stubs, cuya diferencia en posición angular sea de 180° , contienen diodos apagados; entretanto, los otros seis stubs contienen diodos encendidos.

Asuma que una onda de polarización circular de frecuencia ω se propaga hacia el arreglo en la dirección negativa de z . En este análisis se considera la variación armónica en el tiempo $e^{j\omega t}$ y por simplicidad se suprime en la notación. El vector del campo eléctrico de la onda incidente puede escribirse como:

$$\vec{E}_i = E_0 (\vec{a}_x - j\vec{a}_y) e^{jk_0 z}, \quad (2.1)$$

donde E_0 es la magnitud compleja de la onda incidente, a_x y a_y son los vectores unitarios en las direcciones x y y , respectivamente, $k_0 = \omega \sqrt{(\epsilon_0 \mu_0)}$ es el número de onda, ϵ_0 y μ_0 son la permitividad y la permeabilidad del espacio libre, respectivamente, y $j = \sqrt{-1}$.

Inicialmente, los stubs con los diodos apagados s_2 y s_6 se sitúan paralelos al eje UU' mientras que el resto de los stubs contienen diodos encendidos. Este elemento del arreglo provee dos diferentes coeficientes de reflexión, Γ_{\parallel} y Γ_{\perp} , para las dos ondas de polarización lineal con

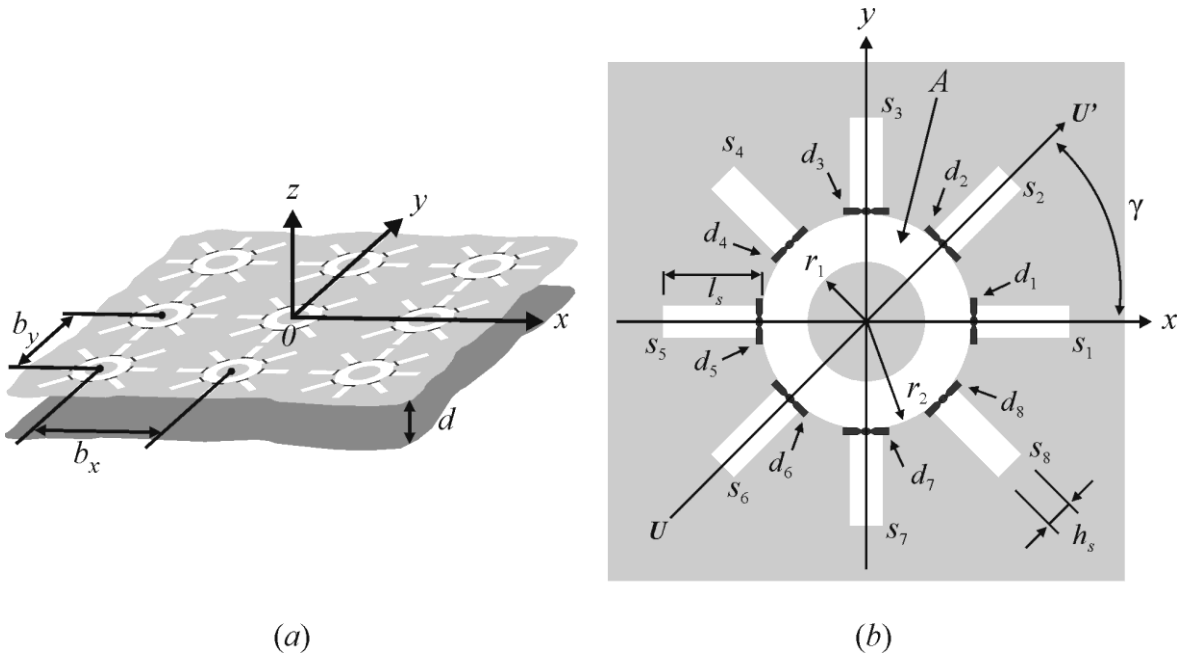


Figura 2.1: (a) Arreglo reflectivo basado en aperturas anulares con stubs y (b) elemento del arreglo reflectivo.

vectores del campo eléctrico paralelo y ortogonal al eje UU' , respectivamente.

El campo eléctrico de la onda reflejada puede ser expresado como la suma de dos ondas de polarización circular que se propagan en la dirección positiva de z [1]:

$$\vec{E}_r = 0.5E_0e^{j2\gamma}(\Gamma_{\parallel} - \Gamma_{\perp})(\vec{a}_x + j\vec{a}_y)e^{-jk_0z} + 0.5E_0(\Gamma_{\parallel} + \Gamma_{\perp})(\vec{a}_x - j\vec{a}_y)e^{-jk_0z}, \quad (2.2)$$

donde γ es el ángulo entre el eje UU' y el eje x .

El primer término de la suma en (2.2) es una onda de polarización circular con la misma dirección de rotación que el vector E_i . La fase de esta onda depende de la posición angular γ de los stubs con los diodos apagados. Este término será llamado la "onda controlada". El segundo término es una onda de polarización circular con la dirección de rotación opuesta al vector E_i . La fase de esta onda no depende de la posición angular de los stubs con los diodos apagados. Este término será llamado la "onda no controlada". Entonces, cuando la siguiente condición se cumple:

$$\Gamma_{\parallel} = -\Gamma_{\perp}, \quad (2.3)$$

la onda no controlada es suprimida y es posible controlar la fase de la onda reflejada de polarización circular. Las ecuaciones (2.2) y (2.3) expresan el principio de polarización de cambio de fase [2]. De acuerdo con este principio, la variación de la posición angular de los stubs con los diodos apagados por un ángulo γ conduce a un desplazamiento de fase de 2γ en la onda reflejada de polarización circular.

La componente de polarización lineal de la onda incidente (2.1) paralela al eje UU' no excita un campo electromagnético considerable en los stubs s_2 y s_6 . Los otros stubs ($s_1, s_3, s_4, s_5, s_7, s_8$) están en corto circuito por los diodos encendidos. Por lo tanto, para esta componente de la onda incidente, el arreglo reflectivo es equivalente a la superficie selectiva de frecuencia (*SSF*) basada en resonadores de aperturas anulares situada sobre el plano de metal. Cuando el perímetro del resonador de apertura anular es aproximadamente igual a la longitud de onda λ , ocurre una resonancia en paralelo. Esta *SSF* es transparente a la componente de la onda incidente paralela al eje UU' . Sin embargo, con la pantalla de metal situada a una distancia $\lambda/4$, la componente paralela es reflejada por el arreglo con un coeficiente de reflexión Γ_{\parallel} aproximadamente igual a 1 en la frecuencia de la resonancia en paralelo.

Por otro lado, los stubs s_2 y s_6 son excitados por la componente de polarización lineal de la onda incidente ortogonal al eje UU' . El circuito equivalente para este caso es un circuito resonante serie formado por la capacitancia de los diodos apagados y la inductancia de la parte exterior de metal del resonador de aperturas anulares. A la frecuencia de resonancia, la componente ortogonal de la onda incidente es reflejada por el arreglo con un coeficiente de reflexión Γ_{\perp} aproximadamente igual a -1. Por lo tanto, un desplazamiento de fase diferencial de 180° aparece entre las componentes ortogonales de la onda reflejada produciendo un desplazamiento de fase de 2γ en la onda reflejada de polarización circular. Por consiguiente, se puede introducir un desplazamiento de fase de $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ ó 270° en la onda reflejada de polarización circular al apagar los diodos en los stubs (s_1, s_5), (s_2, s_6), (s_3, s_7) o (s_4, s_8),

respectivamente. Así, el arreglo reflectivo puede ser considerado como un desplazador de fase de dos bits que controla la fase de la onda reflejada.

Si consideramos una posición angular uniforme de los stubs "excitados" (stubs con diodos apagados), el arreglo reflectivo infinito puede analizarse como una estructura periódica usando el teorema de Floquet. De esta forma, el elemento del arreglo reflectivo puede ser considerado como una celda unitaria de esta estructura periódica. Para este caso, un cambio de fase constante se introduce en la onda reflejada. La onda plana incidente de polarización circular es reflejada en la dirección determinada por el ángulo de reflexión especular natural.

Ahora, asumiendo que una onda plana de polarización circular, que incide normalmente al arreglo, debe reflejarse en la dirección determinada por el ángulo de elevación θ_0 y el ángulo de acimut ϕ_0 . Para este caso, dos elementos del arreglo deben proporcionar desplazamientos de fase progresivos ψ_x y ψ_y en la onda reflejada en las direcciones x y y , respectivamente. Estos desplazamientos de fase pueden calcularse como:

$$\begin{aligned}\psi_x &= -k_0 b_x \sin \theta_0 \cos \phi_0 \\ \psi_y &= -k_0 b_y \sin \theta_0 \sin \phi_0.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Entonces, la diferencia entre las posiciones angulares de los stubs excitados para dos elementos del arreglo en las direcciones x y y ($\Delta\gamma_x$ y $\Delta\gamma_y$, respectivamente) deben establecerse como:

$$\begin{aligned}\Delta\gamma_x &= 0.5\psi_x = -0.5k_0 b_x \sin \theta_0 \cos \phi_0 \\ \Delta\gamma_y &= 0.5\psi_y = -0.5k_0 b_y \sin \theta_0 \sin \phi_0.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Sin embargo, las posiciones angulares reales de los stubs excitados en los elementos deben corregirse tomando en consideración los valores discretos de los elementos desplazadores de fase digitales.

Las posiciones angulares no uniformes de los stubs excitados a lo largo del arreglo destruyen la periodicidad. No obstante, este arreglo puede analizarse como una estructura periódica con una celda "grande" que contiene N_x y N_y elementos del arreglo en las direcciones x y y , respectivamente, cuando esta celda grande se repite periódicamente en las direcciones x y y .

Tomando en consideración la naturaleza digital de los elementos desplazadores de fase, la diferencia entre las posiciones angulares de los stubs excitados para dos elementos del arreglo en las direcciones x y y debe establecerse como:

$$\begin{aligned}\Delta\gamma_x &= \pi M_x/N_x \quad (N_x = 1, 2, \dots, \quad M_x = 1, 2, \dots, N_x - 1) \\ \Delta\gamma_y &= \pi M_y/N_y \quad (N_y = 1, 2, \dots, \quad M_y = 1, 2, \dots, N_y - 1),\end{aligned}\tag{2.6}$$

donde $2M_x$ y $2M_y$ son las fases introducidas por la celda grande de $N_x N_y$ elementos, a lo largo de las direcciones x y y , respectivamente.

Por citar un ejemplo, el arreglo reflectivo configurado para introducir un cambio de fase linealmente distribuido de 90° por elemento en la dirección x y de 180° por elemento en la dirección y se muestra en la Fig. 2.2. Para este caso, la celda periódica contiene ocho elementos ($N_x=4; N_y=2; M_x=M_y=1$) y esta celda grande se repite periódicamente en las direcciones x y y .

De esta forma, el arreglo reflectivo infinito puede analizarse como una estructura periódica infinita usando el teorema de Floquet. Según el teorema de Floquet, el campo electromagnético sobre el arreglo reflectivo se representa como una suma de modos Floquet u ondas planas. La condición (2.6) asegura que dos de los modos Floquet son ondas planas que viajan en la dirección determinada por el ángulo de elevación θ_0 y el ángulo de acimut φ_0 . Entonces, el arreglo reflectivo puede ser considerado como un convertidor multimodal que transforma una onda plana, normalmente incidente de polarización circular, en una onda plana reflejada que se propaga en una dirección deseada.

La eficiencia de esta conversión es afectada principalmente por tres factores. La onda plana incidente de polarización circular no sólo se convierte en la onda plana reflejada que viaja en la dirección deseada, sino que se convierte parcialmente en ondas planas reflejadas que se propagan en direcciones no deseadas. También, las pérdidas de inserción en los diodos p-i-n conducen a la dispersión parcial de la onda incidente. Finalmente, los desplazadores de fase digitales producen errores de fase que reducen la conversión.

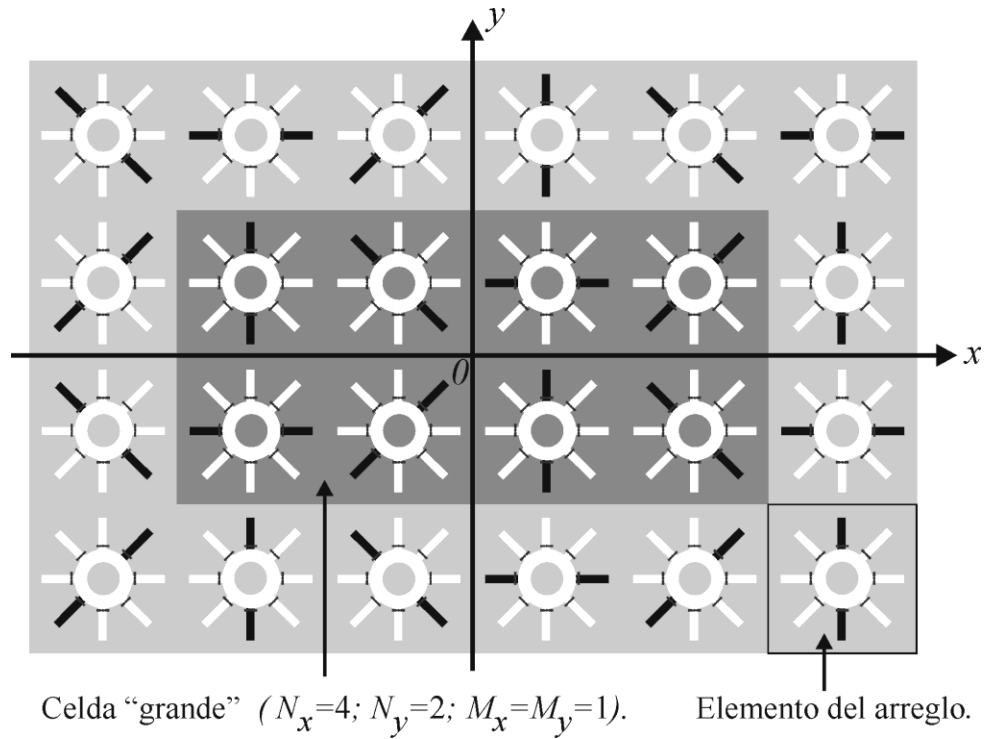


Figura 2.2: Arreglo reflectivo con celda periódica grande que contiene 8 elementos del arreglo. Los stubs excitados se muestran en negro.

Para medir la eficiencia de la conversión de los modos del arreglo reflectivo infinito, es posible definir un coeficiente de conversión. Este coeficiente de conversión L_C puede calcularse como la relación entre la densidad de potencia de la onda plana reflejada, que viaja en la dirección deseada, y la densidad de potencia de la onda plana incidente de polarización circular:

$$L_C = \frac{Y_{m_1} |R_{m_1}|^2 + Y_{m_2} |R_{m_2}|^2}{2Y_1 |A_1|^2}, \quad (2.7)$$

donde A_1 y Y_1 son la magnitud y la admitancia del modo Floquet incidente, Y_m es la admitancia modal Floquet, R_m es la magnitud del modo Floquet reflejado y m_1 y m_2 son los índices de los dos modos Floquet reflejados (uno TE y otro TM) que se propagan en la dirección deseada. El modelo matemático para el arreglo infinito, considerando una celda grande, antes mencionado fue desarrollado en [3].

Con este modelo matemático es posible llevar a cabo la predicción de las características de exploración del arreglo reflectivo infinito. Sin embargo, al igual que la mayoría de las investigaciones teóricas y experimentales de arreglos reflectivos, se enfoca en el análisis de un arreglo infinito. No obstante, estos modelos y las aproximaciones involucradas en dichos análisis tienden a ser inexactos para arreglos reflectivos finitos prácticos de tamaño pequeño y mediano.

En arreglos con un fuerte acoplamiento electromagnético, el comportamiento de los elementos en el borde del arreglo difiere del comportamiento predicho por el modelo del arreglo infinito. En el caso de arreglos finitos, las características de reflexión de los elementos en el borde dependen de su posición relativa en el arreglo [4]. De tal forma que las distribuciones del campo en cada elemento son diferentes, como consecuencia del truncamiento de la estructura periódica infinita. Por consiguiente, es necesario considerar el problema completo al calcular los campos individuales en cada elemento del arreglo. Por lo tanto, se ha desarrollado un modelo matemático para predecir las características de radiación del arreglo reflectivo finito, basado en resonadores de aperturas anulares con stubs radiales controlados por diodos p-i-n.

2.3. Modelo matemático para el arreglo reflectivo finito

Considere un arreglo reflectivo finito de elementos con la geometría previamente descrita (Fig. 2.3). Los elementos de este arreglo reflectivo son perforados en un plano conductor infinito, de espesor despreciable, situado a una distancia d sobre de una pantalla de metal.

El arreglo reflectivo finito contiene $M=K_x K_y$ elementos, donde K_x es el número de elementos en la dirección x y K_y el número de elementos en la dirección y . Un alimentador tipo corneta, de diámetro D_h y longitud L_h , situado a una altura h_f sobre el centro del arreglo, es utilizado para formar la onda incidente de polarización circular que excitará a los elementos del arreglo.

Para simplificar el análisis, el arreglo reflectivo finito es dividido en dos regiones: región I, la cual es la región del espacio libre ($z>0$) y región II, la cual es el espacio entre el plano conductor infinito y la pantalla de metal ($-d\leq z<0$).

Asumiendo que una onda esférica generada por el alimentador viaja hacia el arreglo finito, entonces dicha onda excita el campo eléctrico tangencial E_τ en los elementos. El campo eléctrico tangencial desconocido, E_τ , puede representarse como:

$$\vec{E}_\tau = \vec{E}_\tau^{sd} + \vec{E}_\tau^{cd}, \quad (2.8)$$

donde E_τ^{sd} es el campo eléctrico tangencial que aparece considerando que la onda incidente excita el arreglo reflectivo sin diodos, mientras que E_τ^{cd} es el campo eléctrico tangencial que existe debido a las corrientes eléctricas que fluyen a través de los diodos.

De acuerdo con los teoremas de equivalencia y de la imagen, aplicados en la región I, el campo electromagnético reflejado en el punto de observación $Q(R_o, \theta_o, \varphi_o)$, en la zona lejana, puede calcularse como la suma de dos componentes. La primera componente es el campo electromagnético radiado por la imagen del alimentador.

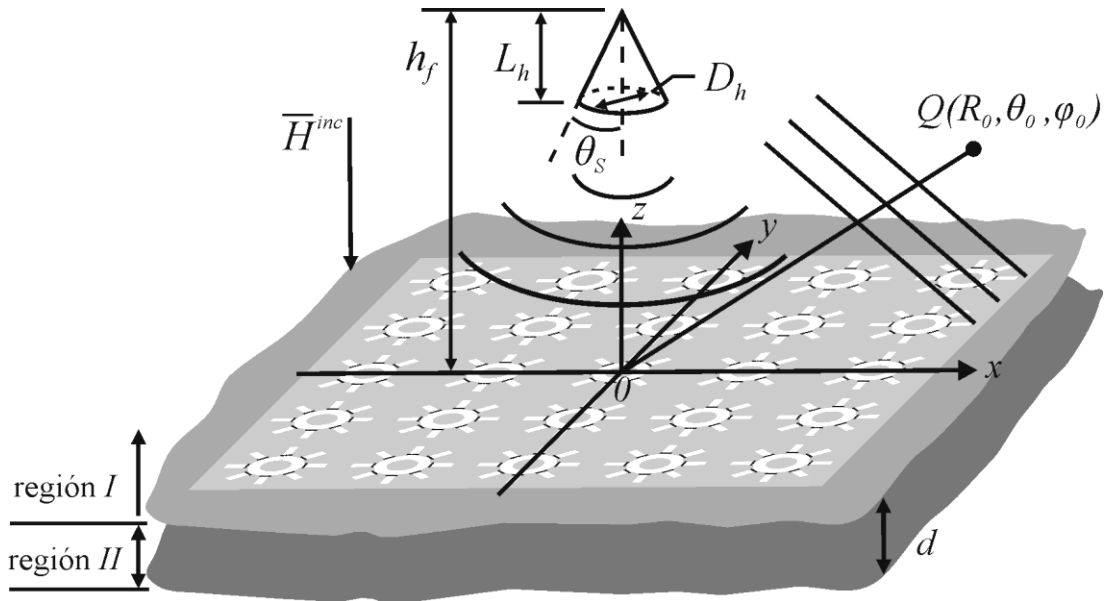


Figura 2.3: Geometría del arreglo reflectivo finito.

La segunda componente es producida por el campo eléctrico tangencial E_τ excitado en los elementos. Esta componente puede calcularse como la radiación de las corrientes magnéticas superficiales equivalentes situadas en el plano $z=0$. La densidad de corriente magnética superficial equivalente \vec{M} puede representarse en términos del campo eléctrico tangencial E_τ como sigue:

$$\vec{M} = \vec{M}^{sd} + \vec{M}^{cd} = -\vec{a}_z \times \vec{E}_\tau = -\vec{a}_z \times (\vec{E}_\tau^{sd} + \vec{E}_\tau^{cd}), \quad (2.9)$$

donde M^{sd} y M^{cd} son las densidades de corriente magnética superficial correspondientes a los campos eléctricos tangenciales desconocidos E_τ^{sd} y E_τ^{cd} , respectivamente. Por consiguiente, es necesario calcular el campo eléctrico tangencial E_τ con el propósito de obtener el campo electromagnético reflejado en cualquier punto en la zona lejana.

2.3.1. Ecuación integro-diferencial para el campo eléctrico tangencial desconocido E_τ^{sd}

El campo eléctrico tangencial E_τ^{sd} para un total de M elementos puede expresarse como sigue:

$$\vec{E}_\tau^{sd} = \sum_{m=1}^M \vec{E}_\tau^{sd}_m, \quad (2.10)$$

donde $E_\tau^{sd}_m$ es el campo eléctrico tangencial desconocido en la apertura del m -ésimo elemento.

Aplicando el principio de equivalencia, el campo eléctrico tangencial desconocido en el m -ésimo elemento es reemplazado por una corriente magnética superficial equivalente sobre el plano conductor. La densidad de corriente magnética superficial total puede definirse como:

$$\vec{M}^{sd} = -\vec{a}_z \times \vec{E}_\tau^{sd}. \quad (2.11)$$

La ecuación integro-diferencial con respecto al campo eléctrico tangencial desconocido puede obtenerse al aplicar la condición de continuidad para el campo magnético tangencial sobre las aperturas de los M elementos en el plano $z=0$:

$$\vec{H}_\tau^I(x, y) = \vec{H}_\tau^{II}(x, y), \quad (2.12)$$

donde $H_{\tau}^I(x,y)$ y $H_{\tau}^{II}(x,y)$ son los campos magnéticos tangenciales en el plano $z=0$ en la región I y la región II, respectivamente. El principio de equivalencia es usado para calcular H_{τ}^I y H_{τ}^{II} .

Usando el principio de la imagen en la región I, el plano conductor puede ser removido. Como resultado, las densidades de corriente magnética equivalente se duplican (Fig. 2.4). El principio de la imagen debe aplicarse al alimentador, introduciendo una imagen del alimentador debajo del plano conductor.

De esta forma, el campo magnético en la región I es el resultado de la suma de tres componentes:

$$\vec{H}^I(x, y, z) = \vec{H}^{inc}(x, y, z) + \vec{H}^{imagen}(x, y, z) + \vec{H}^{rad}(x, y, z), \quad (2.13)$$

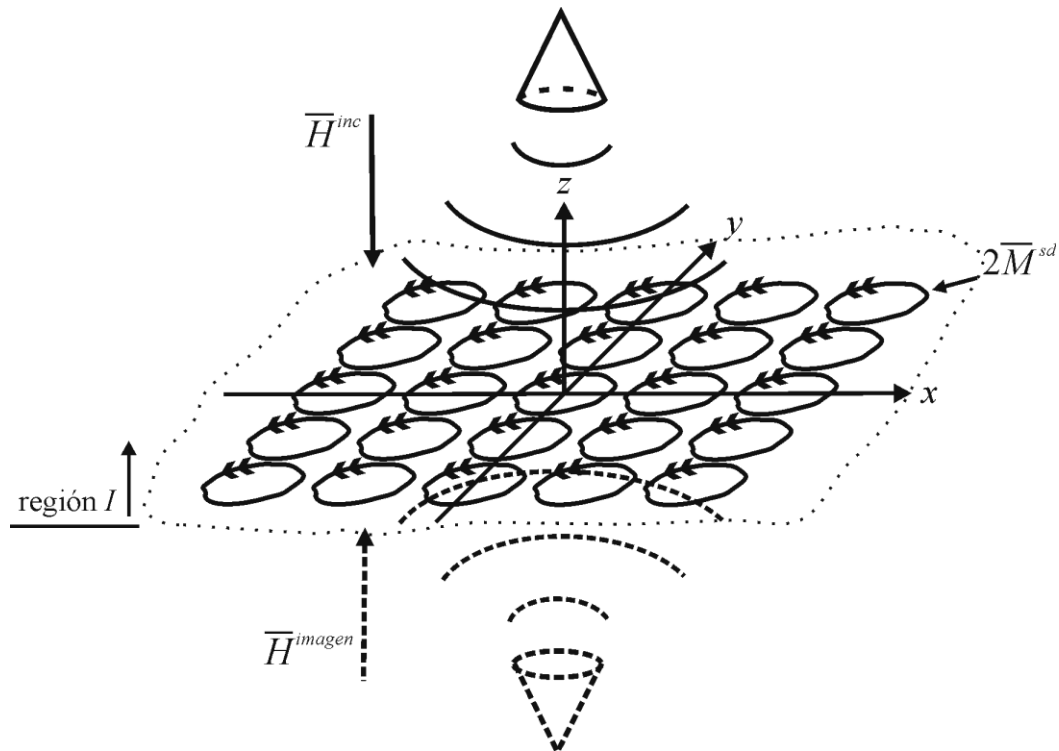


Figura 2.4: Densidades de corriente magnética equivalente en la región I.

donde H^{inc} es el campo magnético producido por el alimentador, H^{imagen} es el campo magnético producido por la imagen del alimentador y H^{rad} es el campo magnético producido por la radiación de las densidades de corriente magnética equivalente.

El campo magnético H^{rad} se expresa como [5]:

$$\vec{H}^{rad} = -\frac{j\omega}{k_0^2} (k_0^2 \vec{F}^I + \nabla \nabla \cdot \vec{F}^I), \quad (2.14)$$

donde F^I es el potencial vectorial magnético definido por:

$$\vec{F}^I = 2\varepsilon_0 \int_S \vec{M}^{sd}(r) \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-jk_0 R}}{R} dS', \quad (2.15)$$

donde $R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}$ es la distancia entre el punto de observación $r(x,y,z)$ y el punto de integración $r'(x',y',0)$ y S' es la superficie total de todas las aperturas.

En el plano de los elementos ($z=0$), el campo magnético tangencial incidente H_τ^{inc} es igual al campo magnético tangencial producido por la imagen del alimentador H_τ^{imagen} , de tal forma que el campo magnético tangencial total en la región I en $z=0^+$ es:

$$\vec{H}_\tau^I(x, y) = 2\vec{H}_\tau^{inc}(x, y) + \vec{H}_\tau^{rad}(x, y), \quad (2.16)$$

donde H_τ^{rad} es la componente tangencial del campo magnético $H^{rad}(x,y)$.

Por otro lado, el campo magnético en la región II en $z=0^-$ es:

$$\vec{H}^{II}(x, y) = \frac{-j\omega}{k_0^2} (k_0^2 \vec{F}^{II} + \nabla \nabla \cdot \vec{F}^{II}), \quad (2.17)$$

donde el potencial vectorial magnético F^{II} está definido como:

$$\vec{F}^{II} = -2\varepsilon_0 \int_S \vec{M}^{sd}(r) \frac{1}{4\pi} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jk_0 R_q}}{R_q} dS', \quad (2.18)$$

donde $R_q' = \sqrt{((x-x')^2 + (y-y')^2 + (2qd)^2)}$.

El término de sumatoria en (2.18) toma en consideración las contribuciones del infinito número de imágenes de las corrientes magnéticas superficiales producidas por los planos conductores paralelos [6].

Para determinar la ecuación integro-diferencial para la corriente magnética superficial desconocida M^{sd} , se establece la continuidad del campo magnético tangencial en la superficie de las M aperturas. Sustituyendo (2.18) en (2.17) y tomando en consideración solo la componente tangencial del campo magnético $H^H(x,y)$, el campo magnético tangencial H_τ^H es calculado. De la misma manera, usando las expresiones (2.15), (2.14) y (2.16), el campo magnético tangencial H_τ^I puede obtenerse. Entonces, de (2.12) la ecuación integro-diferencial se define como:

$$2\vec{H}_\tau^{inc}(x,y) = \frac{j\omega\epsilon_0}{\pi k_0^2} (k_0^2 + \nabla\nabla) \int_{S'} \vec{M}^{sd}(r) \sum_{q=0}^{\infty} \frac{e^{-jk_0 R_q'}}{R_q'} dS'. \quad (2.19)$$

Cabe hacer notar que la ecuación integro-diferencial en (2.19) es válida únicamente en las aperturas de los elementos.

Según el Método de Momentos de Galerkin, la solución de la ecuación integro-diferencial requiere de la expansión de la densidad de corriente magnética superficial en términos de N funciones base (o de expansión). Estas funciones base $\{\Psi_n\}$ son elegidas como los modos de la guía de onda coaxial con stubs rectangulares, que tienen la misma sección transversal que la apertura del elemento. La densidad de corriente magnética superficial en la m -ésima apertura M_m^{sd} es expresada por un juego de funciones de expansión $\{\Psi_n\}$, como resultado, la densidad de corriente magnética superficial total puede escribirse como:

$$\vec{M}^{sd} = \sum_{m=1}^M \vec{M}_m^{sd} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M A_{n,m}^{sd} \vec{\Psi}_n(x-x_m, y-y_m) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M A_{n,m}^{sd} \vec{\Psi}_n^m(x,y), \quad (2.20)$$

donde $A_{n,m}^{sd}$ es la magnitud de la n -ésima función de expansión en la m -ésima apertura; x_m y y_m son las coordenadas del centro de la m -ésima apertura con respecto al origen;

$\Psi_n^m(x,y)=\Psi_n(x-x_m, y-y_m)$ es la n -ésima función de expansión que toma en consideración las coordenadas del m -ésimo elemento.

Sustituyendo (2.20) en (2.19) resulta:

$$2\vec{H}_\tau^{inc}(x,y) = \frac{j\omega\varepsilon_0}{\pi k_0^2} (k_0^2 + \nabla\nabla) \int_{S'} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M A_{n,m}^{sd} \vec{\Psi}_n^m(x',y) \sum_{q=0}^{\infty} \frac{e^{-jk_0 R_q}}{R_q} dS', x, y), \quad (2.21)$$

El juego de funciones de peso (o probatorias) son elegidas idénticas al juego de funciones base. Tomando el producto escalar de la ecuación (2.21) con el juego de funciones de peso $\{\Psi_l\}$ se obtiene el siguiente sistema de MN ecuaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} [B^1] \\ [B^2] \\ \dots \\ [B^l] \\ \dots \\ [B^N] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [Y_{1,1}] & [Y_{1,2}] & \dots & [Y_{1,n}] & \dots & [Y_{1,N}] \\ [Y_{2,1}] & [Y_{2,2}] & \dots & [Y_{2,n}] & \dots & [Y_{2,N}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [Y_{l,1}] & [Y_{l,2}] & \dots & [Y_{l,n}] & \dots & [Y_{l,N}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [Y_{N,1}] & [Y_{N,2}] & \dots & [Y_{N,n}] & \dots & [Y_{N,N}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [A_{sd}^1] \\ [A_{sd}^2] \\ \dots \\ [A_{sd}^n] \\ \dots \\ [A_{sd}^N] \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

$[B^l]$ es un vector de tamaño M que toma en consideración la distribución del campo magnético incidente producido por el alimentador:

$$[B^l] = [B_{l,1} \ B_{l,2} \ \dots \ B_{l,k} \ \dots \ B_{l,M}]^T, \quad (2.23)$$

donde T denota la transposición de la matriz. El elemento del vector, $B_{l,k}$, se expresa en la forma siguiente:

$$B_{l,k} = 2 \int_{S_k} \vec{\Psi}_l^k(x,y) \cdot \vec{H}_\tau^{inc}(x,y) dS_k, \quad (2.24)$$

donde $\Psi_l^k(x,y)$ es la l -ésima función de expansión que toma en consideración las coordenadas del k -ésimo elemento y S_k es la superficie de la apertura del k -ésimo elemento.

$[Y_{l,n}]$ es la matriz cuadrada de admitancias mutuas de orden M que expresa el acoplamiento electromagnético entre la l -ésima y la n -ésima densidades de corriente magnética superficial a lo largo del arreglo. El k,m -ésimo elemento de la matriz $[Y_{l,n}]$ se denota como $Y_{l,n}^{k,m}$. Este elemento expresa la admitancia mutua entre la k -ésima y la m -ésima aperturas considerando la l -ésima y la n -ésima densidades de corriente magnética superficial en cada apertura, respectivamente, y puede determinarse mediante:

$$Y_{l,n}^{k,m} = \frac{j\omega\epsilon_0}{\pi k_0^2} \int_{S_k} \vec{\Psi}_l^k(x, y) \cdot (k_0^2 + \nabla\nabla) \int_{S'} \vec{\Psi}_n^m(x', y') \sum_{q=0}^{\infty} \frac{e^{-jk_0 R_q}}{R_q} dS' dS_k. \quad (2.25)$$

$[A_{sd}^n]$ es un vector de tamaño M que contiene las magnitudes desconocidas de la n -ésima densidad de corriente magnética superficial en la m -ésima apertura:

$$[A_{sd}^n] = \left[\begin{array}{cccccc} A_{n,1}^{sd} & A_{n,2}^{sd} & \dots & A_{n,m}^{sd} & \dots & A_{n,M}^{sd} \end{array} \right]^T. \quad (2.26)$$

El sistema de ecuaciones lineales (2.22) puede escribirse en forma de ecuación matricial como sigue:

$$[B] = [Y][A_{sd}]. \quad (2.27)$$

De esta manera, es posible expresar las magnitudes desconocidas A_{sd}^n como una función lineal de las admitancias mutuas $Y_{l,n}^{k,m}$ de la siguiente forma:

$$[A_{sd}] = [Y]^{-1} [B]. \quad (2.28)$$

2.3.2. Expresión para la admitancia mutua

La ecuación (2.25) representa una integración cuádruple cuya solución numérica es engorrosa. Por consiguiente, las integrales se simplificaron usando un método similar al descrito en [7]. Reescribiendo (2.25) en términos de los campos eléctricos y magnéticos:

$$\begin{aligned} Y_{l,n}^{k,m} &= \int_{S_k} \vec{\Psi}_l^k(x, y) \cdot \vec{H}_{n,m}(x, y) dS_k \\ &= \int_{S_k} \left(\vec{E}_{l,k}(x, y) \times \vec{a}_z \right) \cdot \vec{H}_{n,m}(x, y) dS_k, \end{aligned} \quad (2.29)$$

donde $H_{n,m}(x,y)$ es el campo magnético producido por la densidad de corriente magnética superficial $\Psi_n^m(x',y')$ en la m -ésima apertura, definido como:

$$\vec{H}_{n,m}(x,y) = \frac{j\omega\varepsilon_0}{\pi k_0^2} (k_0^2 + \nabla\nabla) \int_S \vec{\Psi}_n^m(x',y') \sum_{q=0}^{\infty} \frac{e^{-jk_0 R_q}}{R_q} dS'. \quad (2.30)$$

Es posible expandir la integral de superficie en (2.29) al plano $z=0$ debido a que las funciones base Ψ_n^m son no nulas sobre la superficie de la m -ésima apertura. De esta manera, pueden asumirse límites de integración infinitos en (2.29).

Aplicando el Teorema de Parseval en (2.29) se obtiene:

$$Y_{l,n}^{k,m} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\vec{E}_{l,k}^*(k_x, k_y) \times \vec{a}_z \right) \cdot \vec{H}_{n,m}(k_x, k_y) dk_x dk_y, \quad (2.31)$$

donde $E_{l,k}^*$ y $H_{n,m}$ son las transformadas de Fourier de los campos eléctricos y magnéticos, respectivamente. k_x y k_y son las frecuencias espaciales (números de onda) a lo largo de las direcciones x y y , respectivamente.

Encontrando las transformadas de Fourier bidimensional de los campos eléctricos y magnéticos, y realizando la manipulación matemática correspondiente (ver Apéndice A), la ecuación (2.31) se convierte en:

$$Y_{l,n}^{k,m} = \frac{k_0^2}{4\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \left\{ Y^{TM}(\beta) \left[\tilde{\Psi}_{n_x}^m(\alpha, \beta) \sin \alpha - \tilde{\Psi}_{n_y}^m(\alpha, \beta) \cos \alpha \right] \right. \\ \cdot \left[\tilde{\Psi}_{l_x}^k(\alpha, -\beta) \sin \alpha - \tilde{\Psi}_{l_y}^k(\alpha, -\beta) \cos \alpha \right] \\ + Y^{TE}(\beta) \left[\tilde{\Psi}_{n_x}^m(\alpha, \beta) \cos \alpha + \tilde{\Psi}_{n_y}^m(\alpha, \beta) \sin \alpha \right] \\ \cdot \left[\tilde{\Psi}_{l_x}^k(\alpha, -\beta) \cos \alpha + \tilde{\Psi}_{l_y}^k(\alpha, -\beta) \sin \alpha \right] \left. \right\} \beta d\alpha d\beta, \quad (2.32)$$

donde Ψ_{nx}^m y Ψ_{ny}^m son las componentes en x y y de la transformada de Fourier de la densidad de corriente magnética superficial para la m -ésima apertura. De la misma manera Ψ_{lx}^k y Ψ_{ly}^k son las componentes en x y y de la transformada de Fourier de la densidad de corriente magnética superficial para la k -ésima apertura. α y β , definidas en el Apéndice A, son las variables angulares y radiales de la transformada de Fourier, respectivamente. $Y^{TM}(\beta)$ y $Y^{TE}(\beta)$ son las admitancias equivalentes TM y TE , respectivamente, definidas como sigue:

$$\begin{aligned} Y^{TM}(\beta) &= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \left[1 - j \cot \left(dk_0 \sqrt{1 - \beta^2} \right) \right] \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ Y^{TE}(\beta) &= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \left[1 - j \cot \left(dk_0 \sqrt{1 - \beta^2} \right) \right] \sqrt{1 - \beta^2}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Para las aperturas anulares, cuyas distribuciones del campo son equivalentes a los modos de la guía de onda coaxial, la integración sobre α en la ecuación (2.32) puede evaluarse en términos de las funciones de Bessel. De esta forma, la expresión de la admitancia mutua entre las funciones que determinan el campo en las aperturas anulares se reduce a una sola integración sobre β (ver Apéndice B).

La expresión (2.32) para la admitancia mutua corresponde al caso en el que la región II está rellena con dieléctrico uniforme de permitividad ε_0 . Sin embargo, el análisis de las admitancias TE y TM (2.33) permite extender este modelo matemático para los elementos del arreglo impresos sobre un sustrato dieléctrico multicapa.

De hecho, la aplicación del teorema de Parseval en (2.29) conlleva a la expresión del acoplamiento mutuo en términos de las ondas planas TE y TM que existen sobre y debajo del plano de los elementos. Sobre el arreglo se tiene la región I ilimitada, correspondiente al espacio libre. Por consiguiente, la relación entre el campo magnético y el campo eléctrico en el plano ($z=0^+$), o admitancias de entrada $y_{in}^{TE}(z=0^+)$ y $y_{in}^{TM}(z=0^+)$ para las ondas planas TE o TM , respectivamente, son exactamente iguales a las admitancias de onda del modo correspondiente:

$$\begin{aligned} y_{in}^{TE}(z=0^+) &= y_0^{TE} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \sqrt{1 - \beta^2} \\ y_{in}^{TM}(z=0^+) &= y_0^{TM} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

donde y_0^{TE} y y_0^{TM} son las admitancias de onda en el espacio libre para las ondas planas TE y TM , respectivamente.

Debajo del arreglo, la región II está limitada por la pantalla de metal situada a la distancia d del plano de los elementos. Por lo tanto, las admitancias de entrada en el plano ($z=0^-$) para las ondas planas TE o TM pueden expresarse como:

$$\begin{aligned} y_{in}^{TE}(z=0^-) &= -jy_0^{TE} \cot\left(dk_0\sqrt{1-\beta^2}\right) \\ y_{in}^{TM}(z=0^-) &= -jy_0^{TM} \cot\left(dk_0\sqrt{1-\beta^2}\right). \end{aligned} \quad (2.35)$$

De esta manera, es posible observar que la admitancia TE equivalente, $Y^{TE}(\beta)$, y la admitancia TM equivalente, $Y^{TM}(\beta)$, en (2.33) pueden ser calculadas como la suma de las admitancias de entrada (2.34) y (2.35) calculadas para la región I y región II, respectivamente:

$$\begin{aligned} Y^{TE}(\beta) &= y_{in}^{TE}(z=0^+) + y_{in}^{TE}(z=0^-) \\ Y^{TM}(\beta) &= y_{in}^{TM}(z=0^+) + y_{in}^{TM}(z=0^-). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Este procedimiento puede extenderse al caso del arreglo impreso en un sustrato dieléctrico multicapa usando el circuito equivalente de líneas de transmisión, tal y como se indica en [8-10]. De esta forma, las admitancias equivalentes $Y^{TE}(\beta)$ y $Y^{TM}(\beta)$ para la estructura multicapa se obtienen como la suma de las admitancias de entrada mostradas en la Fig. 2.5.

Las integrales en (2.32) que representan la admitancia mutua $Y_{l,n}^{k,m}$ pueden calcularse numéricamente (Apéndice B). Es necesario elegir cuidadosamente el límite superior de integración para asegurar la convergencia del resultado. Además, las integrales en (2.32) presentan polos a lo largo del eje β . Para el caso de una capa de sustrato dieléctrico sin pérdidas, aparecerán polos de onda superficial adicionales. Estos polos fueron evaluados como se indica en [11,12].

Con las admitancias mutuas $Y_{l,n}^{k,m}$ calculadas, es posible resolver la ecuación (2.28) con respecto a las magnitudes desconocidas $A_{n,m}^{sd}$ y obtener el campo eléctrico tangencial en el plano de las aperturas.

2.3.3. Ecuación integro-diferencial para el campo eléctrico tangencial desconocido E_{τ}^{cd}

El campo eléctrico tangencial E_{τ}^{cd} , debido a las corrientes eléctricas que fluyen por los diodos, para los M elementos puede escribirse como sigue:

$$\vec{E}_{\tau}^{cd} = \sum_{m=1}^M \vec{E}_{\tau m}^{cd}, \quad (2.37)$$

donde $E_{\tau m}^{cd}$ es el campo eléctrico tangencial desconocido en la apertura del m -ésimo elemento.

La densidad de corriente magnética superficial total puede definirse como:

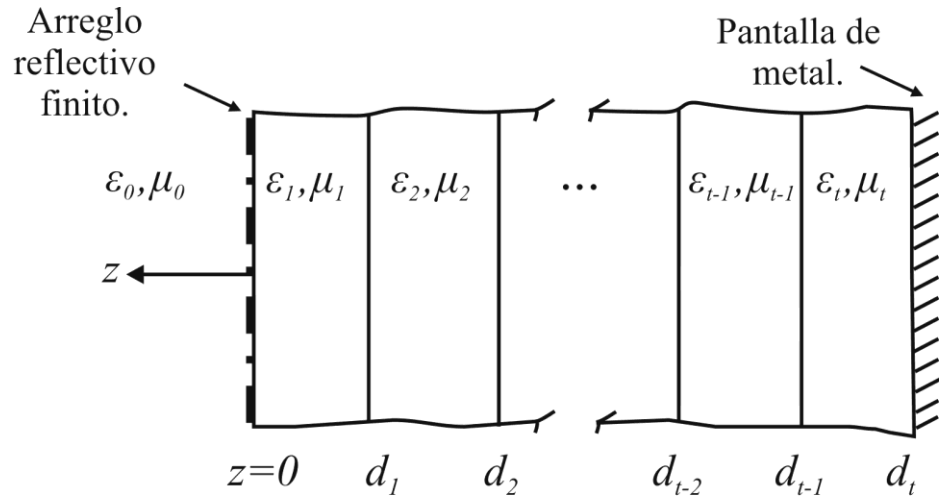
$$\vec{M}^{cd} = -\vec{a}_z \times \vec{E}_{\tau}^{cd}. \quad (2.38)$$

La ecuación integro-diferencial con respecto al campo eléctrico tangencial desconocido E_{τ}^{cd} puede obtenerse al aplicar la condición de continuidad para el campo magnético tangencial sobre la superficie de la apertura con diodos.

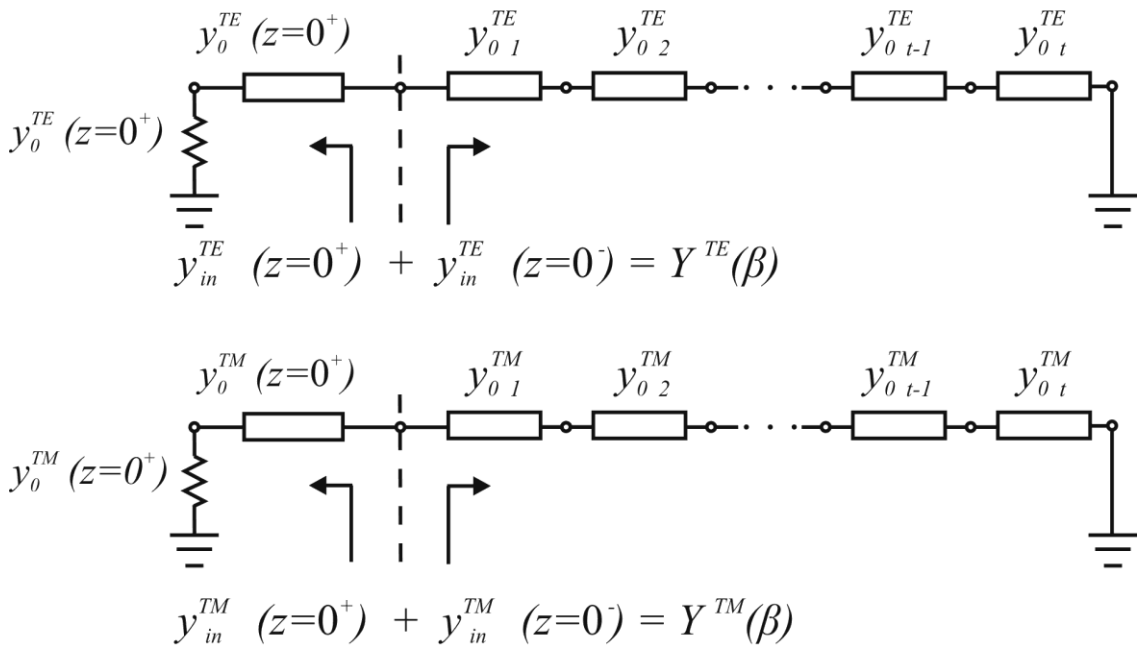
Debe considerarse que el campo magnético no es continuo en la región donde las corrientes fluyen por los diodos:

$$\sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^P \vec{J}_m^p = \vec{a}_z \times \left(\vec{H}_{\tau}^I(x, y) - \vec{H}_{\tau}^{II}(x, y) \right), \quad (2.39)$$

donde J_m^p es la densidad de corriente eléctrica superficial en el p -ésimo diodo del m -ésimo elemento y P es el número total de diodos en el elemento.



(a)



(b)

Figura 2.5: (a) Sección transversal del arreglo reflectivo finito con t capas dieléctricas y (b) el circuito equivalente de líneas de transmisión.

La ecuación integro-diferencial fue formulada utilizando un procedimiento matemático similar al descrito en la sección 2.3.1. En este caso, debe tomarse en consideración que la excitación inicial es debida a las corrientes que fluyen por los diodos y no debida al alimentador tipo corneta. De esta forma, excluyendo los campos magnéticos tangenciales producidos por el alimentador y la imagen del alimentador, $2H_\tau^{inc}$ de H_τ^I (2.16), la ecuación integro-diferencial se obtiene como sigue:

$$-\sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^P \frac{I_m^p}{\delta} \vec{a}_{op} = \vec{a}_z \times \left[\frac{j\omega\epsilon_0}{\pi k_0^2} (k_0^2 + \nabla\nabla) \int_{S'} \vec{M}^{cd}(r) \sum_{q=0}^{\infty} \frac{e^{-jk_0 R_q}}{R_q} dS' \right], \quad (2.40)$$

donde I_m^p es la corriente eléctrica que fluye por el p -ésimo diodo en el m -ésimo elemento, δ es el grosor del diodo y \vec{a}_{op} es el vector unitario paralelo al p -ésimo diodo. La geometría del stub con diodo se muestra en la Fig. 2.6. El diodo es modelado como una impedancia Z_d con terminales de conductor eléctrico perfecto (PEC).

Usando el mismo sistema de funciones de expansión $\{\Psi_n\}$ que en (2.20), la densidad de corriente magnética superficial total M^{cd} se expresa de la siguiente forma:

$$\vec{M}^{cd} = \sum_{m=1}^M \vec{M}_m^{cd} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M A_{n,m}^{cd} \vec{\Psi}_n(x - x_m, y - y_m) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M A_{n,m}^{cd} \vec{\Psi}_n^m(x, y), \quad (2.41)$$

donde M_m^{cd} es la densidad de corriente magnética superficial en el m -ésimo elemento y $A_{n,m}^{cd}$ es la magnitud de la n -ésima función de expansión en la m -ésima apertura.

La sustitución de (2.41) en (2.40) y la aplicación del Método de Momentos de Galerkin conllevan al siguiente sistema de MN ecuaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} [D^1] \\ [D^2] \\ \dots \\ [D^l] \\ \dots \\ [D^N] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I^1] \\ [I^2] \\ \dots \\ [I^m] \\ \dots \\ [I^M] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [Y_{1,1}] & [Y_{1,2}] & \dots & [Y_{1,n}] & \dots & [Y_{1,N}] \\ [Y_{2,1}] & [Y_{2,2}] & \dots & [Y_{2,n}] & \dots & [Y_{2,N}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [Y_{l,1}] & [Y_{l,2}] & \dots & [Y_{l,n}] & \dots & [Y_{l,N}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [Y_{N,1}] & [Y_{N,2}] & \dots & [Y_{N,n}] & \dots & [Y_{N,N}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [A_{cd}^1] \\ [A_{cd}^2] \\ \dots \\ [A_{cd}^n] \\ \dots \\ [A_{cd}^N] \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

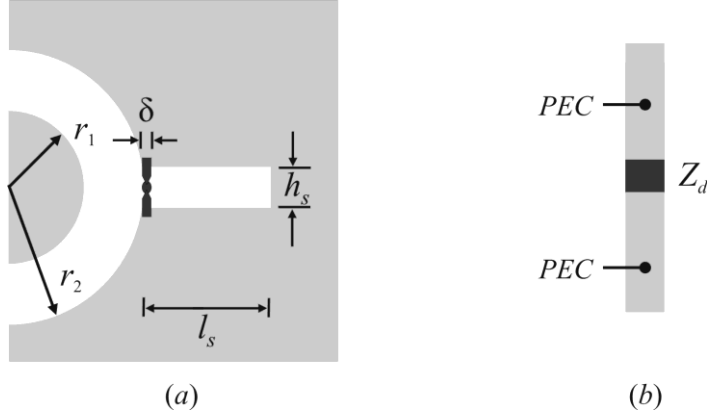


Figura 2.6: (a) Geometría del stub con diodo y (b) modelo del diodo.

$[D^l]$ es una matriz rectangular de tamaño $M \times MP$ que depende del campo eléctrico tangencial en el p -ésimo diodo del k -ésimo elemento:

$$[D^l] = \begin{bmatrix} [D_{1,l}^p] & [0] & \dots & [0] & \dots & [0] \\ [0] & [D_{2,l}^p] & \dots & [0] & \dots & [0] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [0] & [0] & \dots & [D_{k,l}^p] & \dots & [0] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [0] & [0] & \dots & [0] & \dots & [D_{M,l}^p] \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

El k -ésimo vector de tamaño P de la matriz $[D^l]$ se denota como $D_{k,l}^p$ y puede obtenerse como:

$$D_{k,l}^p = \int_{S_p} \frac{1}{\delta} \vec{\Psi}_l^k(x, y) \times \vec{a}_z \cdot \vec{a}_{op} dS_p, \quad (2.44)$$

donde S_p es la superficie del diodo.

$[I^m]$ es un vector de tamaño P que contiene las corrientes eléctricas desconocidas que fluyen por el p -ésimo diodo del m -ésimo elemento:

$$[I^m] = \begin{bmatrix} I_m^1 & I_m^2 & \dots & I_m^p & \dots & I_m^P \end{bmatrix}^T. \quad (2.45)$$

$[A_{cd}^n]$ es un vector de tamaño M que contiene las magnitudes desconocidas de la n -ésima densidad de corriente magnética superficial en la m -ésima apertura:

$$[A_{cd}^n] = \left[A_{n,1}^{cd} \quad A_{n,2}^{cd} \quad \dots \quad A_{n,m}^{cd} \quad \dots \quad A_{n,M}^{cd} \right]^T. \quad (2.46)$$

El sistema de ecuaciones lineales (2.42) puede escribirse en forma de ecuación matricial como sigue:

$$[D] [I] = [Y] [A_{cd}]. \quad (2.47)$$

De esta forma, las magnitudes desconocidas $A_{n,m}^{cd}$ pueden expresarse en función de las corrientes desconocidas I_m^p :

$$[A_{cd}] = [Y]^{-1} [D] [I]. \quad (2.48)$$

Debido a que las corrientes I_m^p son desconocidas, es necesario obtener ecuaciones adicionales para resolver (2.40). Por lo tanto, asumiendo que el tamaño del diodo es despreciable con respecto a la longitud de onda, puede aplicarse la ley de Ohm a cada diodo para calcular las corrientes desconocidas I_m^p . Como resultado, se obtiene un sistema de MP ecuaciones:

$$-\int_{T_1}^{T_2} \vec{E}_\tau \cdot \vec{a}_{op} dl = -\int_{T_1}^{T_2} \left(\vec{E}_\tau^{sd} + \vec{E}_\tau^{cd} \right) \cdot \vec{a}_{op} dl = \frac{I_m^p}{Y_{m,p}^d}; \quad (2.49)$$

$m = 1, 2, \dots, M; \quad p = 1, 2, \dots, P,$

donde $Y_{m,p}^d$ es la admitancia del p -ésimo diodo en el m -ésimo elemento y T_1 - T_2 es la trayectoria directa del diodo correspondiente.

Sustituyendo (2.20) y (2.41) en (2.49) conlleva al sistema de MP ecuaciones lineales:

$$-\sum_{n=1}^N \left(A_{n,m}^{sd} + A_{n,m}^{cd} \right) \int_{T_1}^{T_2} \left(\vec{\Psi}_n^m \times \vec{a}_z \right) \cdot \vec{a}_{op} dl = \frac{I_m^p}{Y_{m,p}^d}; \quad (2.50)$$

$m = 1, 2, \dots, M; \quad p = 1, 2, \dots, P.$

Los sistemas de ecuaciones lineales (2.50) y (2.48) fueron resueltos simultáneamente para calcular los coeficientes $A^{cd}_{n,m}$. Ahora es posible determinar el campo eléctrico tangencial total E_τ en el plano de las aperturas usando (2.41), (2.20) y (2.9). Con E_τ conocido es posible calcular el campo electromagnético en la zona lejana.

Entonces, el campo electromagnético reflejado en la zona lejana puede obtenerse como la suma del campo electromagnético producido por la radiación de las densidades de corriente magnética superficial equivalente y el campo electromagnético radiado por la imagen del alimentador. El algoritmo del modelo matemático desarrollado se muestra en la Fig. 2.7.

2.4. Conclusiones

1. Se desarrolló el modelo matemático para el arreglo reflectivo finito de M aperturas anulares, con P stubs por elemento, considerando pantallas conductoras infinitesimalmente delgadas, para analizar la dispersión de una onda electromagnética que incide sobre la estructura. El modelo desarrollado toma en consideración el acoplamiento mutuo entre los M elementos distintamente configurados del arreglo.
2. Aplicando las condiciones de frontera para el campo electromagnético, el modelo matemático fue expresado en forma de dos sistemas de M ecuaciones integrales con respecto al campo eléctrico desconocido en las aperturas de los M elementos reflectores. Ambos sistemas de M ecuaciones integrales fueron completados con las MP condiciones de frontera en los M elementos de aperturas anulares con stubs, formuladas utilizando la ley de Ohm.
3. Los dos sistemas de M ecuaciones integrales fueron resueltos en conjunto con las MP condiciones de frontera aplicadas para los elementos conmutadores utilizando la formulación del Método de Momentos en el dominio espectral. Como resultado es posible determinar las características del campo electromagnético reflejado por el arreglo de dimensiones finitas.

4. La expresión integral cuádruple para la admitancia mutua entre los M elementos del arreglo fue reducida a una integral doble en el dominio espectral para simplificar la dificultad de su solución.

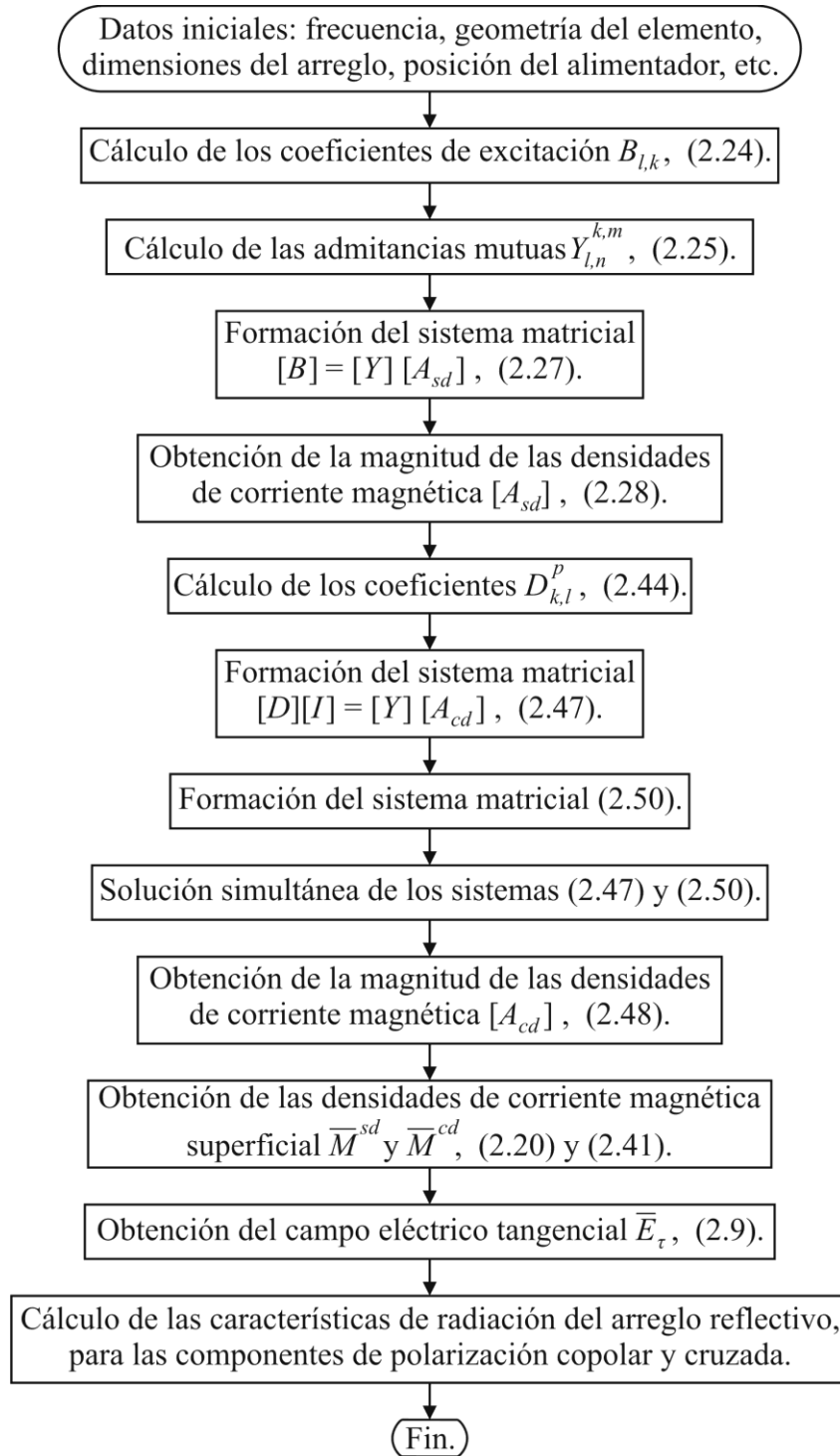


Figura 2.7: Algoritmo del modelo matemático para el arreglo reflectivo finito.

Capítulo 3

Características de Radiación del Arreglo Reflectivo Finito basado en Aperturas Anulares con Stubs

3.1. Introducción

Utilizando el modelo matemático desarrollado en el capítulo anterior, se simularon las características de radiación de un arreglo reflectivo de 17×17 elementos de aperturas anulares con stubs. El arreglo reflectivo fue configurado para asegurar distintos ángulos de elevación θ_0 de la onda de polarización circular incidente a la frecuencia central de 30 GHz. El modelo del arreglo reflectivo infinito [1], fue utilizado para optimizar la geometría del elemento del arreglo, con el propósito de obtener una ancha banda de operación y un amplio sector de exploración alrededor de la frecuencia central.

3.2. Optimización del elemento del arreglo reflectivo

Con el propósito de reducir el número de diodos p-i-n, se consideró una estructura particular de la celda pequeña con cuatro diodos instalados en los stubs con posiciones angulares de 0° , 90° , 225° y 315° . Los otros cuatro stubs se establecieron en cortocircuito con cortos de metal. Una resistencia de 2Ω fue considerada como el modelo para el diodo encendido, entretanto una conexión en paralelo de una resistencia de $7k\Omega$ y una capacitancia de $0.035pF$ fue usada para simular el diodo apagado.

La geometría del elemento del arreglo fue optimizada para minimizar las pérdidas de inserción en los diodos p-i-n y para aumentar la magnitud de la onda controlada de la ecuación (2.2) a la frecuencia de 30GHz . Como resultado, la geometría de la celda pequeña ha sido definida como sigue: $b_x=b_y= 6mm$, $r_1=1.3mm$, $r_2=1.8mm$, $l_s= 0.72mm$, $h_s= 0.252mm$ y $d=2.55mm$.

Se consideró que todos los elementos fueron impresos sobre un sustrato dieléctrico con un permitividad relativa de 2.56 y espesor de 0.127mm.

Para evaluar las características de exploración del arreglo, se investigaron seis configuraciones del arreglo reflectivo diseñado que proporcionan diferentes ángulos de elevación θ_0 (0° , 15° , 24.6° , 30° , 35° y 38°) a la frecuencia de 30 GHz. Los parámetros de estas configuraciones se muestran en la tabla 3.1. Asumiendo una exploración en el plano XOZ , la diferencia entre las posiciones angulares en la dirección y ($\Delta\gamma_y$) se establece en 0° .

Los estados de los diodos p-i-n en la celda periódica grande fueron calculados según (2.5) y (2.6) para obtener los diferentes ángulos de elevación θ_0 . Las correspondientes configuraciones de la celda grande se muestran en la Fig. 3.1.

La configuración I ($\theta_0 = 0^\circ$) corresponde a la polarización uniforme de los diodos, Fig. 3.1(a). Entonces, un cambio de fase constante es introducido en la onda reflejada y la onda plana normalmente incidente de polarización circular se refleja en la dirección z .

Tabla 3.1
Configuraciones del arreglo reflectivo diseñado que proporcionan diferentes ángulos de elevación θ_0 a 30GHz .

Configuración	θ_0 (grados)	N_x	M_x	$\Delta\gamma_x$ (grados)
I	0	1	1	0
II	15	13	2	27.7
III	24.6	4	1	45
IV	30	10	3	54
V	35	29	10	62.1
VI	38	27	10	66.7

La configuración II ($\theta_0 = 15^\circ$) requiere $\Delta\gamma_x = 2\pi/13 = 27.7^\circ$, entonces las posiciones de los stubs excitados en los trece elementos a lo largo de la dirección x en la celda grande deben establecerse cercanas a $0^\circ, 27.7^\circ, 55.4^\circ, 83.1^\circ, 110.8^\circ, 138.5^\circ, 166.2^\circ, 193.9^\circ, 221.6^\circ, 249.3^\circ, 277^\circ, 304.7^\circ$ y 332.4° . Estos valores son aproximados por $0^\circ, 45^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ, 180^\circ, 225^\circ, 270^\circ, 270^\circ, 315^\circ$ y 315° , respectivamente, debido a los valores discretos del desplazador de fase digital, Fig. 3.1(b). La configuración III ($\theta_0 = 24.6^\circ$) requiere $\Delta\gamma_x = \pi/4 = 45^\circ$, por consiguiente las posiciones de los stubs excitados en los cuatro elementos a lo largo de la dirección x en la celda grande deben establecerse en $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ y 135° . Para este caso podemos obtener un desplazamiento de fase exacto por el desplazador de fase digital, Fig. 3.1(c).

Entonces, el coeficiente de conversión (2.7) fue simulado. Los resultados de la simulación numérica se muestran en la Fig. 3.2.

La configuración I asegura un coeficiente de conversión mayor a -2 dB en el rango de frecuencias de 28.5 a 32.5 GHz. La configuración II muestra la degradación del coeficiente de conversión debido a los errores de fase introducidos por el desplazador de fase de dos bits. Sin embargo, el coeficiente de la conversión es mayor a -2 dB en el rango de frecuencias de 29.14 a 31.9 GHz. La configuración III revela una mejora en el coeficiente de conversión debido a los cambios de fase exactos proporcionados en este caso en particular. La configuración IV ($\theta_0 = 30^\circ$) muestra un coeficiente de conversión mayor a -2 dB en el rango de frecuencias de 29.5 a 30.5 GHz.

Las configuraciones V ($\theta_0 = 35^\circ$) y VI ($\theta_0 = 38^\circ$) presentan una reducción del coeficiente de conversión. El acoplamiento mutuo, los errores de fase y el incremento en el ángulo de elevación contribuyen al decremento del coeficiente de conversión. Según los resultados obtenidos usando el modelo del arreglo infinito, el arreglo reflectivo muestra un redireccionamiento eficaz de la onda incidente para ángulos de hasta 30° con un coeficiente de conversión mayor a -2 dB.

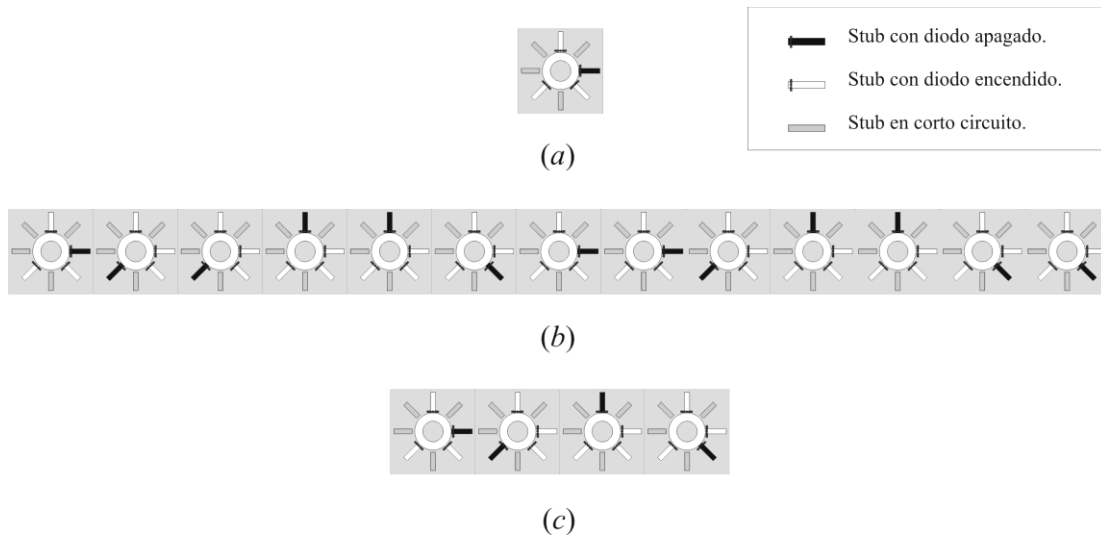


Figura 3.1: Estados de los diodos p-i-n en la celda periódica grande para tres configuraciones del arreglo reflectivo.

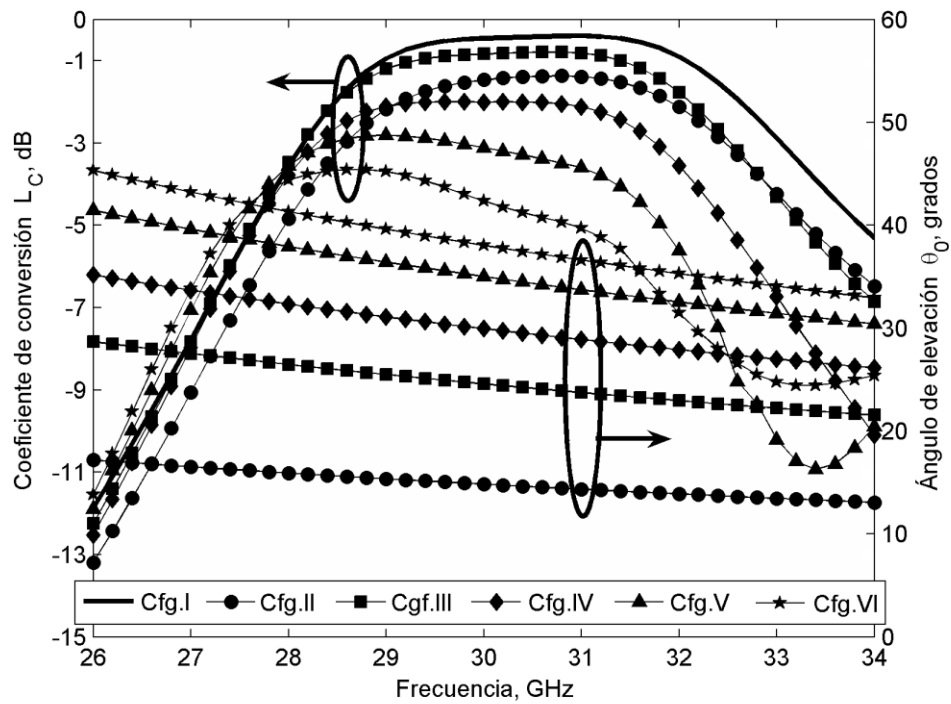


Figura 3.2: Coeficiente de conversión y ángulo de elevación para seis configuraciones del arreglo reflectivo.

3.3. Características de radiación del arreglo reflectivo finito

Las características de radiación del arreglo reflectivo de 17×17 elementos de geometría optimizada fueron simuladas usando el modelo matemático desarrollado. El arreglo reflectivo fue iluminado por un alimentador tipo corneta excitado por el modo TE_{11} de polarización circular. El diámetro y longitud del alimentador fueron 2 y 4cm, respectivamente. El alimentador se colocó a la distancia $h_f = 12.48\text{cm}$ sobre el centro del arreglo. El campo radiado del alimentador tipo corneta fue calculado tal y como se indica en [2].

El arreglo reflectivo fue configurado para formar el lóbulo principal en la dirección determinada por distintos ángulos de elevación θ_0 , definiendo $\varphi_0 = 0$ (asumiendo una exploración en el plano XOZ a la frecuencia de 30 GHz). Una simple relación trigonométrica [3] fue usada para calcular los desplazamientos de fase requeridos con el propósito de asegurar una distribución de fase lineal en la onda reflejada. Cuando el desplazamiento de fase introducido por cada elemento es conocido, es posible determinar qué diodo tiene que ser apagado en cada elemento.

Para asegurar la convergencia de los resultados, el número de funciones de expansión N tomado en consideración durante la simulación del arreglo reflectivo fue igual a 19 en cada elemento. El campo electromagnético radiado por el arreglo en la zona lejana fue calculado utilizando el modelo matemático previamente descrito. Entonces, la ganancia y la eficiencia de la apertura del arreglo reflectivo fueron calculados.

La ganancia del arreglo reflectivo G fue estimada al comparar el máximo del campo radiado del alimentador $E_{max\ alim}$ y el máximo del campo radiado del arreglo reflectivo $E_{max\ arr}$. Asumiendo la ausencia de pérdidas de disipación en el alimentador, la ganancia del arreglo reflectivo puede calcularse como:

$$G = G_{alim} \left(\frac{E_{m\acute{a}x\ arr}}{E_{m\acute{a}x\ alim}} \right)^2, \quad (3.1)$$

donde G_{alim} es la ganancia del alimentador calculada como se indica en [2]. La eficiencia de la apertura del arreglo se expresa como sigue:

$$\varepsilon_{ap} = \frac{\lambda^2}{4\pi A_f} G, \quad (3.2)$$

donde A_f es el área física del arreglo.

La dependencia de la eficiencia de la apertura ε_{ap} con el ángulo de elevación θ_0 se presenta en la Fig. 3.3. En la misma figura se muestra por conveniencia la ganancia del arreglo reflectivo $G(\theta_0)$. De acuerdo con los resultados presentados en la Fig. 3.3, la máxima eficiencia de la apertura corresponde al ángulo de elevación θ_0 igual a 0° . En este caso la eficiencia de la apertura es 0.37.

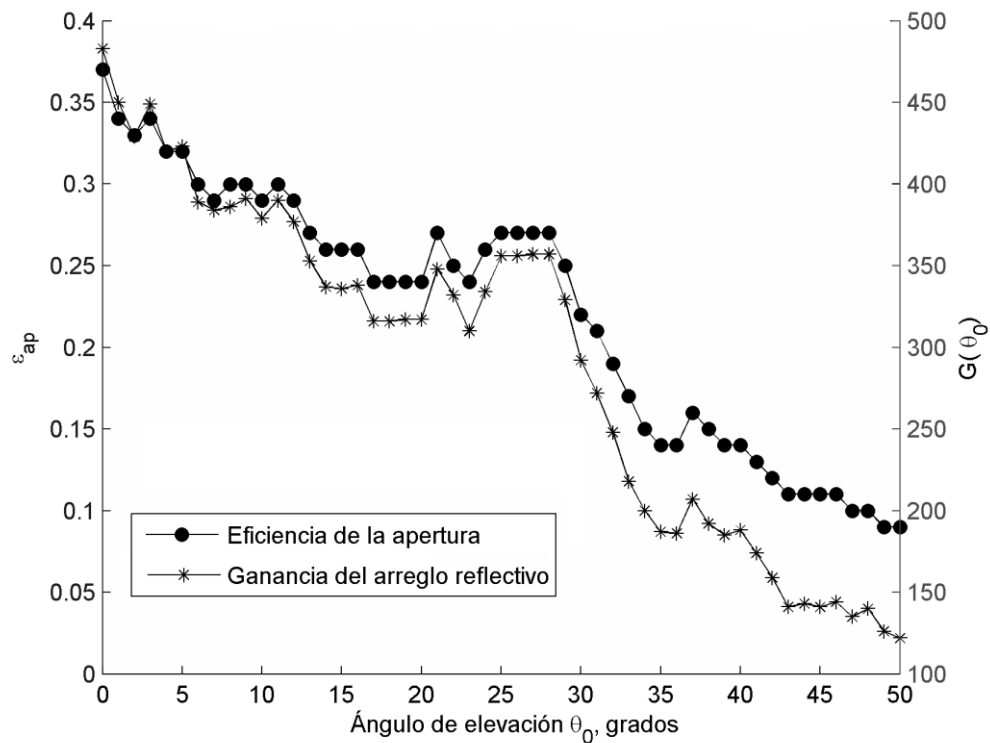


Figura 3.3: Eficiencia de la apertura y ganancia del arreglo reflectivo finito.

En general, la eficiencia de la apertura del arreglo reflectivo es afectada principalmente por cuatro factores: 1) la no uniformidad de la distribución de amplitud sobre la superficie del arreglo (eficiencia de iluminación), 2) la pérdida de potencia debida a la radiación del alimentador no interceptada por la superficie del arreglo (eficiencia de desbordamiento), 3) las pérdidas de inserción debidas a la no idealidad de los diodos p-i-n y 4) los errores de fase introducidos por los desplazadores de fase de dos bits. De esta forma, la eficiencia total de la apertura puede ser obtenida mediante el producto de los factores mencionados.

La diferencia entre la eficiencia de la apertura simulada (0.37) y la eficiencia de la apertura teórica (0.5) puede explicarse a partir de las características de reflexión de los elementos del arreglo. Los elementos en el borde del arreglo iluminados por las ondas incidentes inclinadas no presentan el mismo comportamiento que los elementos centrales alimentados por ondas incidentes cuasi-normales. El efecto recíproco puede observarse en la Fig. 3.2, donde se muestra la degradación del coeficiente de conversión con el aumento del ángulo de elevación θ_o en el caso del modelo del arreglo infinito.

El mismo efecto se observa para el arreglo finito en la Fig. 3.3. Al aumentar el ángulo de elevación θ_o , disminuye la eficiencia de la apertura del arreglo. Además, la optimización del elemento del arreglo se realizó considerando un ambiente periódico infinito. De esta forma, los elementos en el borde de la estructura presentan un comportamiento lejano al óptimo, debido el cambio sustancial en las condiciones de frontera. Más aún, el desempeño de los elementos fue optimizado para una onda incidente de polarización circular. Sin embargo, el alimentador tipo corneta utilizado en las simulaciones proporciona una iluminación de polarización elíptica cuya relación axial es de 2.5 dB para el borde del arreglo. Este hecho conlleva a un mayor deterioro del desempeño de los elementos situados en el borde del arreglo.

La influencia del primer y segundo factor pueden estimarse de la misma manera como se realiza para las antenas de reflector. Según [4], la degradación de la eficiencia de la apertura, debida a la distribución de amplitud no uniforme y a los fenómenos de desbordamiento, dependen del valor del ángulo medio del reflector θ_s y del patrón del alimentador. Para nuestro

caso el ángulo medio del reflector es igual a 22° , mientras que el ancho del haz de potencia media del alimentador es igual a 33.4° . Por lo tanto, los valores calculados para la eficiencia de iluminación y la eficiencia de desbordamiento son iguales a 0.97 y 0.73, respectivamente.

La pérdida de potencia debida a la no idealidad de los diodos p-i-n es aproximadamente 0.5 dB y la degradación de la eficiencia de la apertura debida a los errores de fase introducidos por el desplazador de fase de dos bits es 0.92 dB según [5]. De esta manera, la eficiencia total de la apertura ε_{ap} es igual a 0.5.

La degradación de la ganancia del arreglo reflectivo L_G en función del ángulo de elevación θ_0 puede estimarse como la relación entre la ganancia del arreglo reflectivo $G(\theta_0)$ en la dirección determinada por el ángulo de elevación θ_0 y la ganancia del arreglo reflectivo G_0 en la dirección perpendicular al plano del arreglo reflectivo considerando diodos p-i-n sin pérdidas:

$$L_G = \frac{G(\theta_0)}{G_0}. \quad (3.3)$$

La degradación de la ganancia del arreglo reflectivo finito en función del ángulo de elevación θ_0 se muestra en la Fig. 3.4. De acuerdo con esta figura, el arreglo reflectivo simulado es todavía eficiente para ángulos de elevación de hasta 30° . Para este caso, la eficiencia de la apertura se degrada 2.25 dB comparada con el caso de θ_0 igual a 0° . El coeficiente de conversión L_C para varias configuraciones del arreglo reflectivo infinito a la frecuencia de 30 GHz se muestra en la misma figura. Las seis configuraciones previamente investigadas son marcadas en la figura. Cabe hacer notar que la degradación de la ganancia del arreglo reflectivo finito es similar a la reducción del coeficiente de conversión en el caso del arreglo reflectivo infinito.

Para el ángulo de elevación θ_0 igual a 24.6° , se puede observar que el modelo del arreglo infinito predice un mejor desempeño que el modelo del arreglo finito. Sin embargo, para este caso en particular, la celda grande contiene cuatro celdas pequeñas y la diferencia de fase entre los elementos adyacentes debe fijarse en 90° según (2.4). Así, los desplazadores de fase de dos

bits proporcionan los cambios de fase exactos y el coeficiente de conversión correspondiente presenta casi 1 dB de mejora.

Las Fig. 3.5 - 3.9 ilustran la simulación de los patrones de radiación $F(\theta, \varphi)$ del arreglo reflectivo finito para diferentes ángulos de elevación θ_0 . En la Fig. 3.5 se muestra la característica de radiación para el ángulo de elevación θ_0 igual a 0° . La forma del lóbulo principal es bien definida y el nivel de los lóbulos laterales está por debajo de -18 dB. La ganancia del arreglo reflectivo es de 26.8 dBi. La Fig. 3.6 corresponde al ángulo de elevación θ_0 igual a 20° . En este caso, el nivel de los lóbulos laterales está por debajo de -13 dB y la ganancia del arreglo reflectivo disminuye a 25 dBi. El patrón de radiación para el ángulo de elevación θ_0 igual a 30° se muestra en la Fig. 3.7. Como es de esperarse, el nivel de los lóbulos laterales aumentó (-13.6 dB) mientras que la ganancia del arreglo reflectivo disminuyó (24.6 dBi).

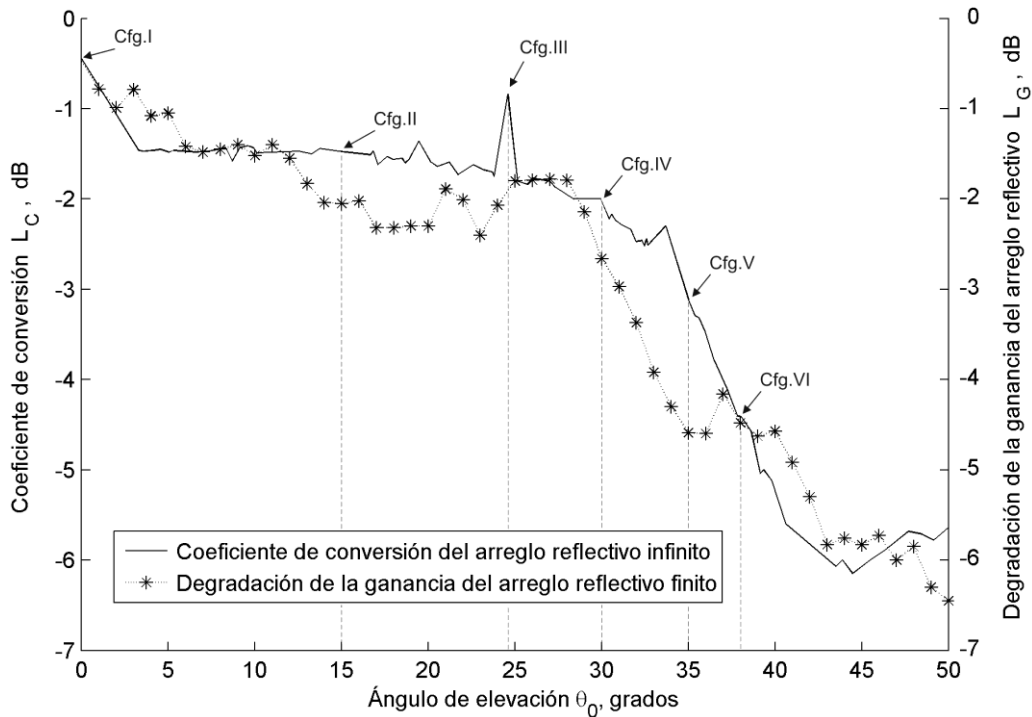


Figura 3.4: Comparación entre el coeficiente de conversión del modelo del arreglo infinito y la degradación de la ganancia calculada por el modelo del arreglo finito a la frecuencia de 30 GHz.

Con la distancia de 0.6λ o 6mm entre los elementos, el máximo del lóbulo de difracción aparece en el espacio visible para ángulos de elevación θ_0 mayores a 42° . Sin embargo, la degradación drástica de la eficiencia de la apertura calculada por el modelo del arreglo infinito comienza para ángulos de reflexión mayores a 34° .

Los cálculos del modelo del arreglo finito predicen la degradación de la eficiencia de la apertura para ángulos de elevación mayores a 30° . Debe tenerse en cuenta que en el caso del arreglo lineal, equidistante y excitado uniformemente, el primer lóbulo de difracción aparece parcialmente en el espacio visible cuando la distancia b_x, b_y entre los elementos está dada por:

$$\begin{aligned} \frac{K_x - 1}{K_x} \frac{\lambda}{1 + |\sin \theta_0|} < b_x < \frac{\lambda}{1 + |\sin \theta_0|} \\ \frac{K_y - 1}{K_y} \frac{\lambda}{1 + |\sin \theta_0|} < b_y < \frac{\lambda}{1 + |\sin \theta_0|}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

En el caso del arreglo de 289 elementos iluminado uniformemente, el lóbulo de difracción debe aparecer parcialmente para ángulos de elevación θ_0 mayores a 34.5° . La aparición del lóbulo de difracción en el espacio visible, a medida que el ángulo de elevación θ_0 aumenta, puede observarse en la Fig. 3.8 ($\theta_0 = 35^\circ$). Adicionalmente, puede observarse en las Fig. 3.6 - 3.9 ($\theta_0 = 45^\circ$) que la magnitud y el número de los lóbulos laterales aumentan para ángulos de elevación mayores a 35° . El análisis de la polarización de la onda reflejada revela que el incremento en la magnitud de los lóbulos laterales es debido a la radiación de la polarización cruzada. Así, el incremento de los lóbulos laterales puede explicarse debido al incremento de la magnitud de la onda no controlada de la ecuación (2.2).

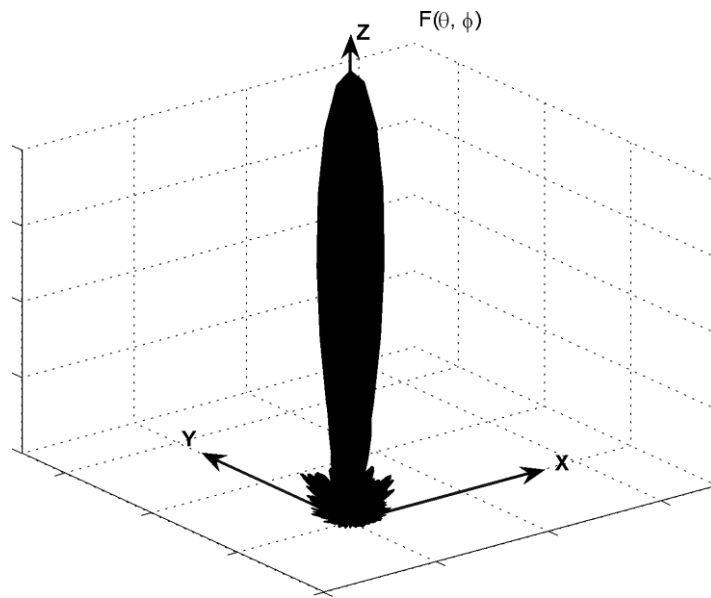


Figura 3.5: Patrón de radiación del arreglo reflectivo finito para el ángulo de elevación $\theta_0=0^\circ$ ($\phi_0=0^\circ$) a la frecuencia de 30GHz . $\varepsilon_{ap} = 0.37$, $G = 483$.

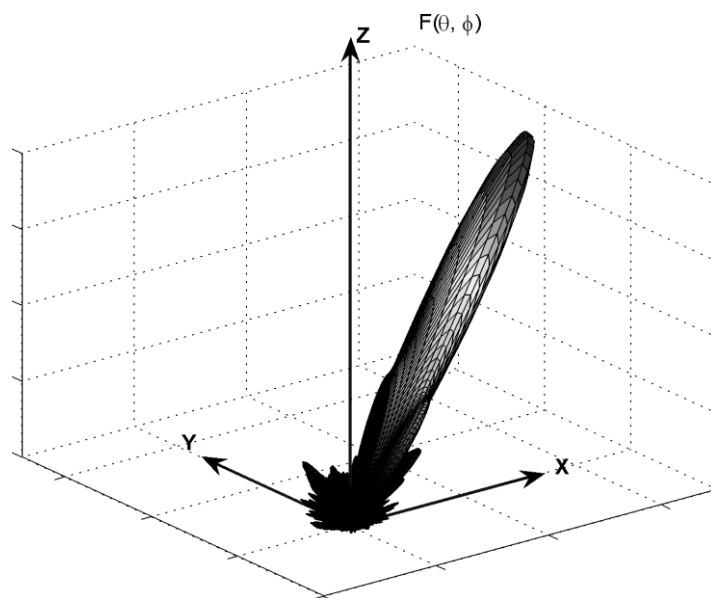


Figura 3.6: Patrón de radiación del arreglo reflectivo finito para el ángulo de elevación $\theta_0 = 20^\circ$ ($\phi_0=0^\circ$) a la frecuencia de 30GHz . $\varepsilon_{ap} = 0.24$, $G = 317$.

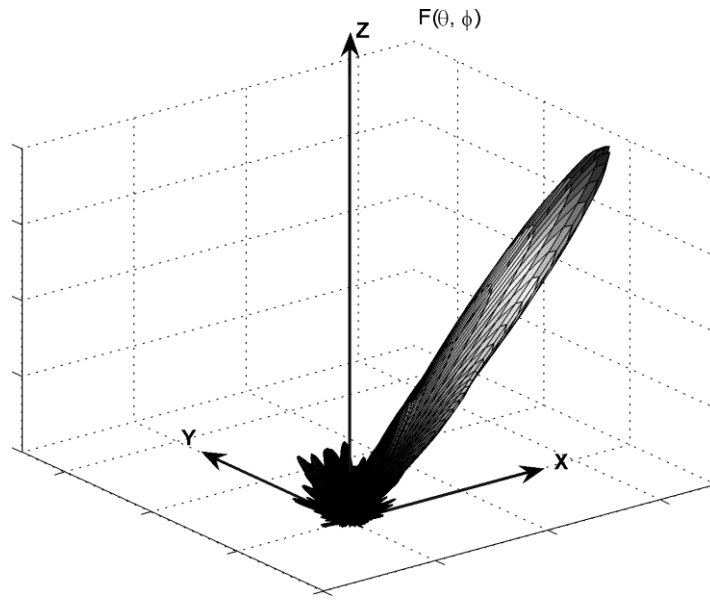


Figura 3.7: Patrón de radiación del arreglo reflectivo finito para el ángulo de elevación $\theta_0 = 30^\circ$ ($\phi_0=0^\circ$) a la frecuencia de 30GHz . $\varepsilon_{ap} = 0.22$, $G = 292$.

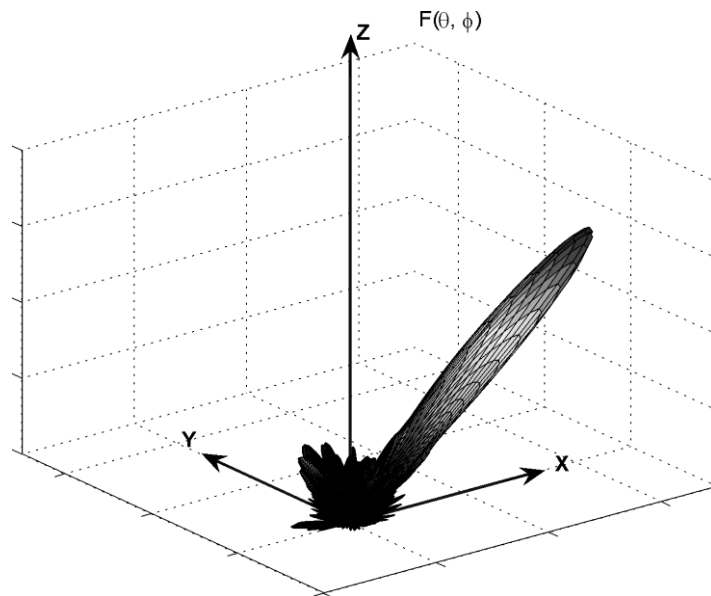


Figura 3.8: Patrón de radiación del arreglo reflectivo finito para el ángulo de elevación $\theta_0 = 35^\circ$ ($\phi_0=0^\circ$) a la frecuencia de 30GHz . $\varepsilon_{ap} = 0.14$, $G = 187$.

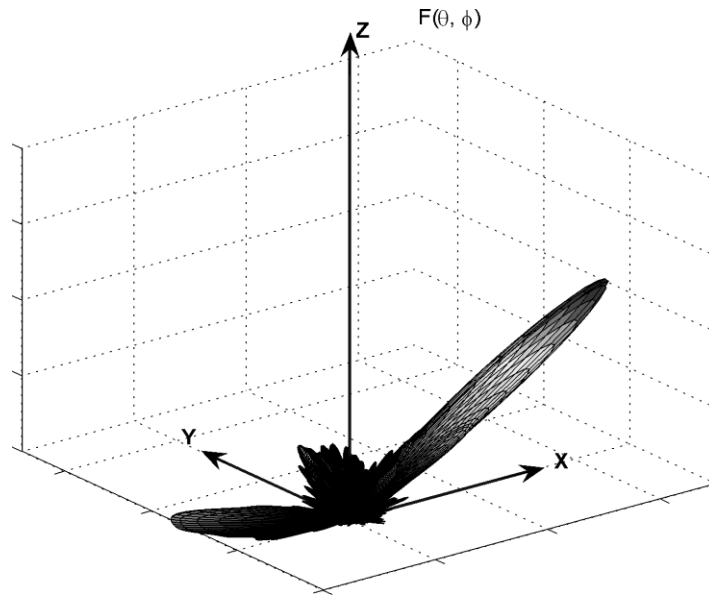


Figura 3.9: Patrón de radiación del arreglo reflectivo finito para el ángulo de elevación $\theta_0=45^\circ$ ($\phi_0=0^\circ$) a la frecuencia de 30GHz . $\varepsilon_{ap} = 0.11$, $G = 141$.

3.4. Conclusiones

1. Se utilizó el modelo matemático del arreglo infinito para optimizar la geometría del elemento, con el propósito de minimizar las pérdidas de inserción en los diodos p-i-n y para incrementar la magnitud de la onda controlada a la frecuencia central de 30 GHz. El elemento optimizado mostró un eficiente redireccionamiento de la onda incidente para ángulos de elevación de hasta 30° con un coeficiente de conversión mayor a -2 dB.

2. Con el modelo matemático del arreglo finito desarrollado se calcularon las características de radiación del arreglo reflectivo de 289 elementos de geometría optimizada. Al controlar el encendido y apagado de los diodos se lograron ángulos de elevación θ_0 de 0° , 20° , 30° , 35° y 45° . El arreglo mostró valores de eficiencia de la apertura de 37, 24, 22, 14 y 11%, correspondientes al apuntamiento del lóbulo principal en los ángulos de elevación θ_0 de 0° , 20° , 30° , 35° y 45° , respectivamente. Para ángulos mayores a 35° se observa la degradación del

lóbulo principal y el crecimiento de los lóbulos secundarios, lo cual se traduce en distorsiones de la onda reflejada.

3. Las características obtenidas con el modelo matemático desarrollado fueron comparadas con las características calculadas con el modelo matemático del arreglo infinito. Como resultado, se probó que el modelo matemático del arreglo infinito puede predecir el posible sector de exploración del arreglo, mientras que el modelo matemático del arreglo finito es necesario para obtener las características de radiación del arreglo.

Capítulo 4

Verificación Experimental del Modelo Matemático Desarrollado

4.1. Introducción

Para verificar experimentalmente el modelo del arreglo finito desarrollado, se construyeron los arreglos reflectivos configurados para formar el lóbulo principal en la dirección determinada por distintos ángulos de elevación θ_0 a la frecuencia de 36.5 GHz. Los resultados de las mediciones fueron comparados con los valores simulados por medio del modelo matemático desarrollado.

4.2. Diseño de los arreglos reflectivos

Los arreglos reflectivos diseñados constan de un total de 277 elementos de geometría optimizada, formando un área circular con el propósito de aprovechar al máximo la radiación del alimentador tipo corneta. Para evitar cualquier obstáculo en el redireccionamiento de la onda incidente, se consideró una alimentación *offset* con el centro de fase situado en la posición (x_f, y_f, h_f) con respecto al centro del arreglo reflectivo. La posición del alimentador produce un ángulo de incidencia θ_i de 22.21° al centro del arreglo. El diámetro y longitud del alimentador fueron consideradas idénticas a las utilizadas en la sección 3.3. La Fig. 4.1 muestra el esquema del arreglo reflectivo con alimentador *offset*.

La Fig. 4.2 muestra la relación entre los sistemas de coordenadas asociados al alimentador *offset* (x', y', z') y al arreglo reflectivo (x, y, z) . Es necesario definir los campos incidentes en la superficie del arreglo en el sistema de referencia (x, y, z) , mediante el cambio del sistema de coordenadas de los campos vectoriales radiados por el alimentador definidos en el sistema

(x',y',z') . En la misma figura es posible apreciar como el sistema (x',y',z') presenta un giro θ_i sobre el eje x' con respecto al sistema (x,y,z) .

La expresión matricial que transforma un vector expresado en el sistema (x',y',z') al sistema (x,y,z) está dado por:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_i & \sin \theta_i \\ 0 & -\sin \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

donde θ_i se define como:

$$\theta_i = \arctan \left(\frac{|y_f|}{h_f} \right). \quad (4.2)$$

Este cambio de sistema de referencia también se tomó en consideración en el análisis de la imagen del alimentador.

Con el propósito de facilitar la construcción de los arreglos reflectivos, se consideró un corto de metal en sustitución del diodo encendido. Además, los stubs con diodos apagados fueron considerados como stubs abiertos. La geometría del elemento del arreglo fue optimizada a la frecuencia de 36.5GHz mediante el modelo del arreglo infinito [1], definiéndose las siguientes dimensiones: $b_x=b_y= 4.6\text{mm}$, $r_1= 1.1\text{mm}$, $r_2= 1.4\text{mm}$, $l_s= 0.74\text{mm}$, $h_s= 0.26\text{mm}$ y $d= 2.85\text{mm}$.

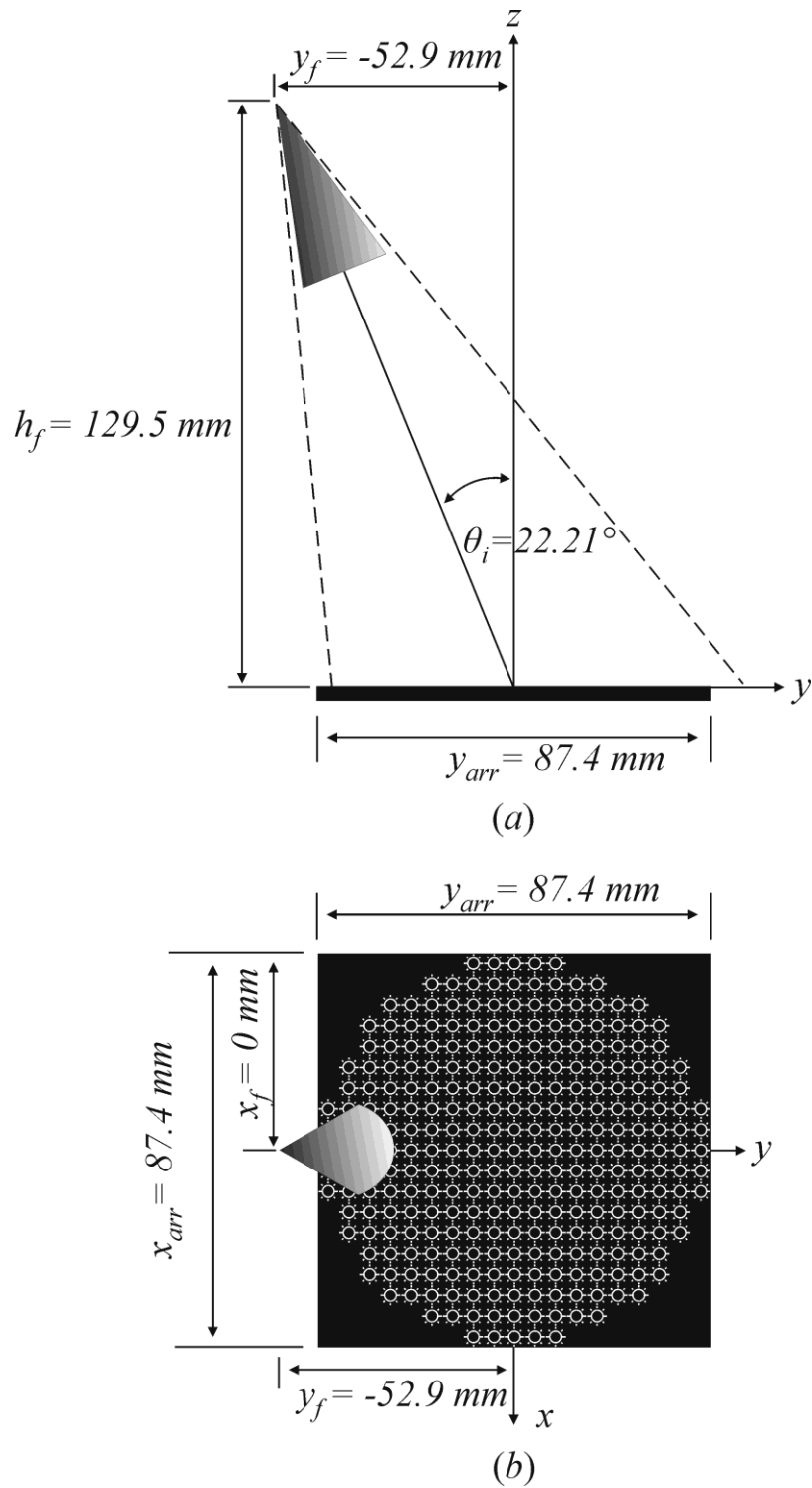


Figura 4.1: Esquema del arreglo reflectivo con alimentación *offset*. (a) vista lateral y (b) vista desde arriba.

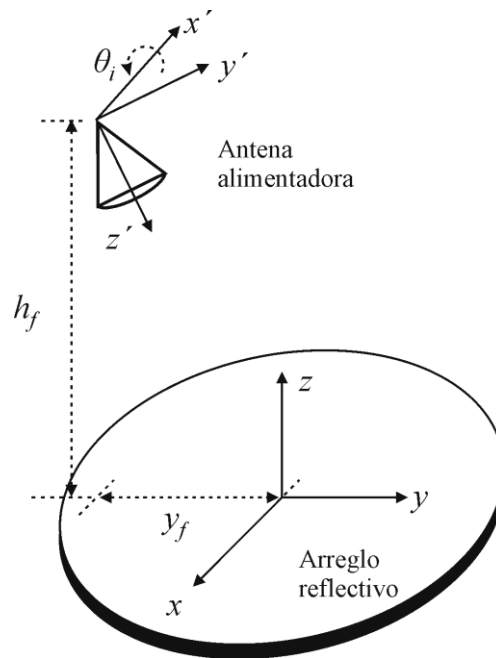


Figura 4.2: Sistemas de coordenadas del alimentador (x', y', z') y del arreglo reflectivo (x, y, z) .

Se consideró que todos los elementos fueron impresos sobre un sustrato dieléctrico con permitividad relativa de 2.9 y espesor de 0.025mm. Determinando el desplazamiento de fase introducido por cada elemento del arreglo para redireccionar el haz principal en las direcciones determinadas por los ángulos $\theta_0 = 0^\circ, 20^\circ$ y 30° , definiendo ($\phi_0 = 90^\circ$), se generaron las máscaras de tres diferentes arreglos reflectivos.

Las máscaras de los arreglos diseñados para formar el lóbulo principal en las direcciones determinadas por los ángulos $\theta_0 = 0^\circ, 20^\circ$ y 30° se muestran en las Fig. 4.3 - 4.5. El plano conductor de metal está representado en color negro, mientras que las aperturas se muestran en color blanco. La escala de las máscaras mostradas es 1:1.

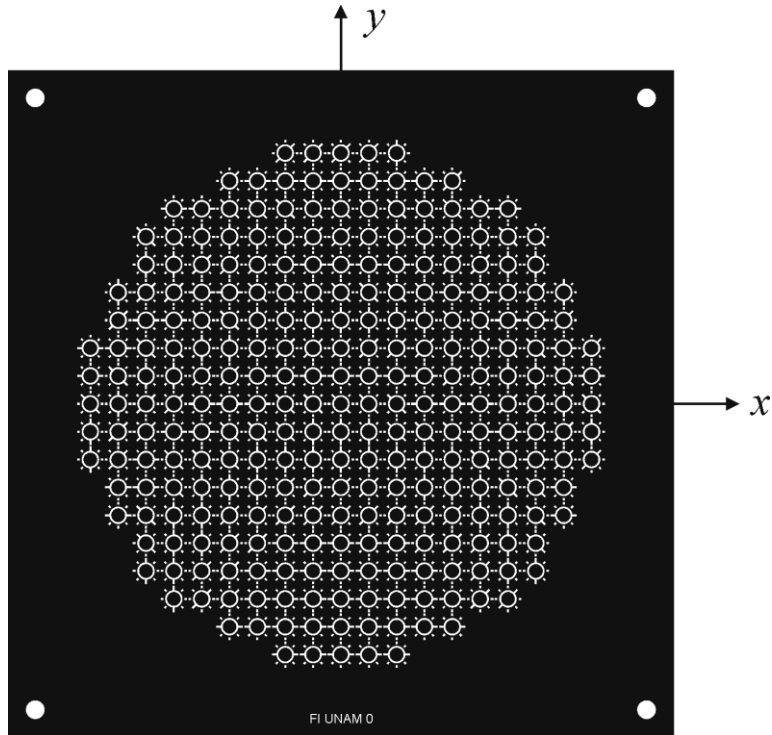


Figura 4.3: Máscara del arreglo reflectivo finito correspondiente al ángulo de elevación $\theta_0=0^\circ$.

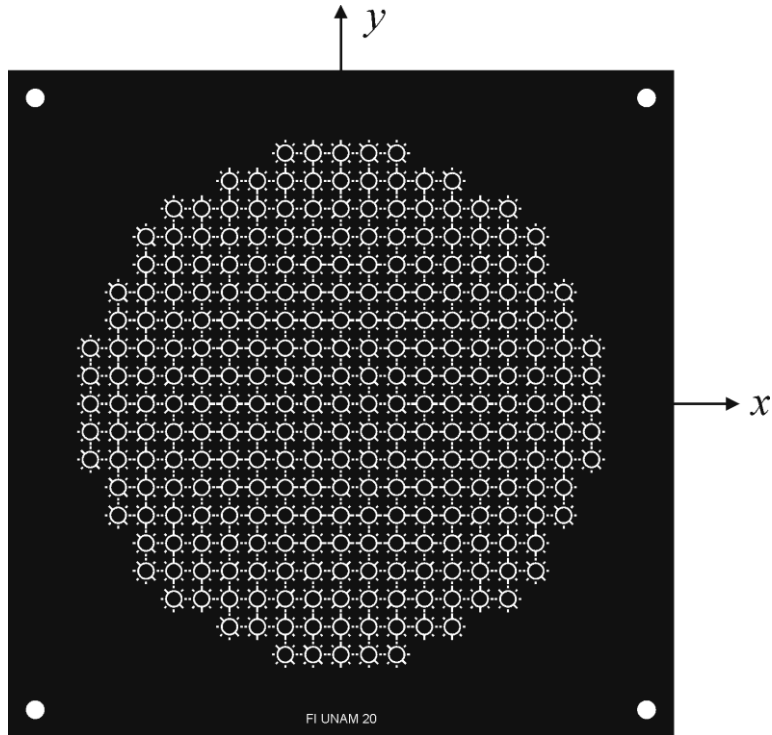


Figura 4.4: Máscara del arreglo reflectivo finito correspondiente al ángulo de elevación $\theta_0=20^\circ$.

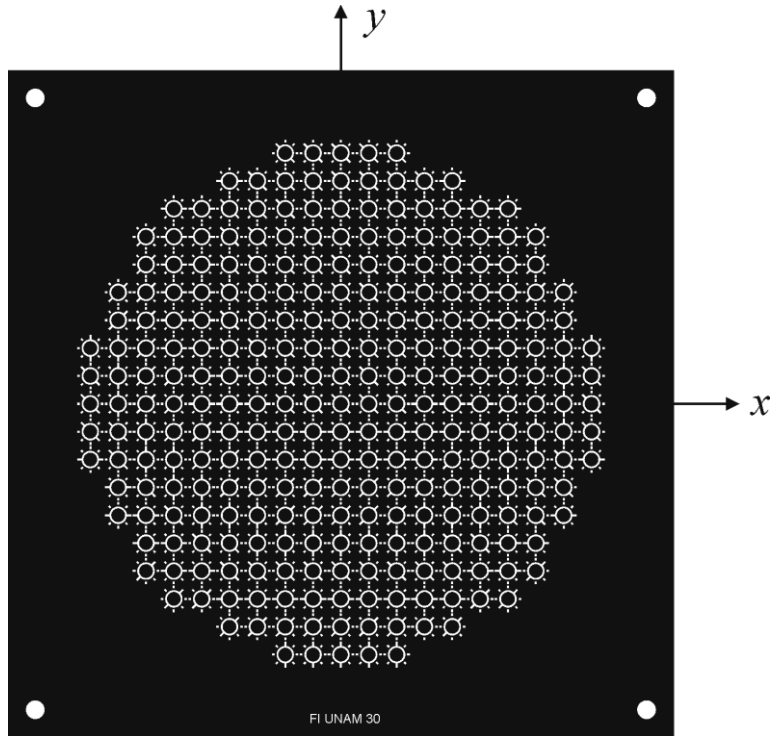


Figura 4.5: Máscara del arreglo reflectivo finito correspondiente al ángulo de elevación $\theta_0=30^\circ$.

4.3. Construcción de los arreglos reflectivos

Con las máscaras de las Fig. 4.3 - 4.5 se fabricaron los arreglos reflectivos mediante la técnica de fotolitografía. Todos los elementos fueron impresos sobre el sustrato dieléctrico Rogers ULTRALAM[®] 3850 con permitividad relativa de 2.9 y espesor de 0.025mm. La Fig. 4.6 muestra la sección de uno de los arreglos fabricados. En la Fig. 4.7(a) se observan las zonas de cobre removidas durante el proceso químico, así como las zonas de sobre ataque producido al *fotoresist*. El sobre ataque lateral del *fotoresist* modificó aproximadamente $50\mu\text{m}$ las dimensiones optimizadas del elemento. En la Fig. 4.7(b) se observa la geometría del elemento después de remover la capa de *fotoresist*.

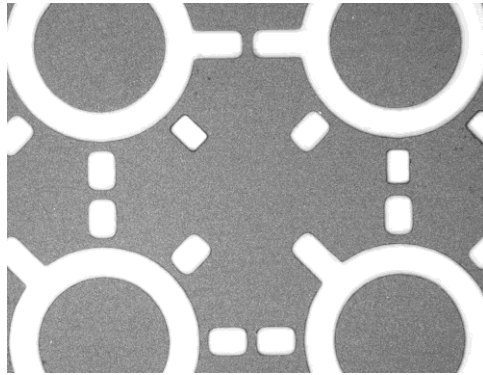


Figura 4.6: Sección de un arreglo reflectivo fabricado mediante fotolitografía.

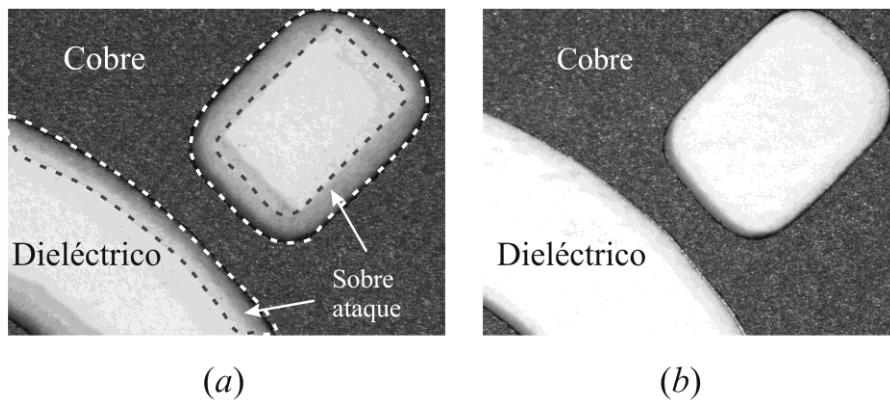


Figura 4.7: Imagen del elemento reflectivo fabricado: (a) zonas de sobre ataque del *fotoresist* y (b) después de la remoción del *fotoresist*.

Una imagen de los arreglos reflectivos fabricados de 277 elementos de apertura anular con stubs se muestra en la Fig. 4.8. Para iluminar el arreglo reflectivo y medir sus características de radiación, se construyeron dos antenas tipo corneta. Los diagramas de las cornetas se muestran en el Apéndice C. La corneta alimentadora fue diseñada para incrementar la eficiencia de iluminación, mientras que la corneta receptora fue diseñada para lograr una suficiente directividad a la frecuencia de 36.5 GHz. En la Fig. 4.9 se muestra el prototipo ensamblado del arreglo reflectivo con alimentación *offset*.

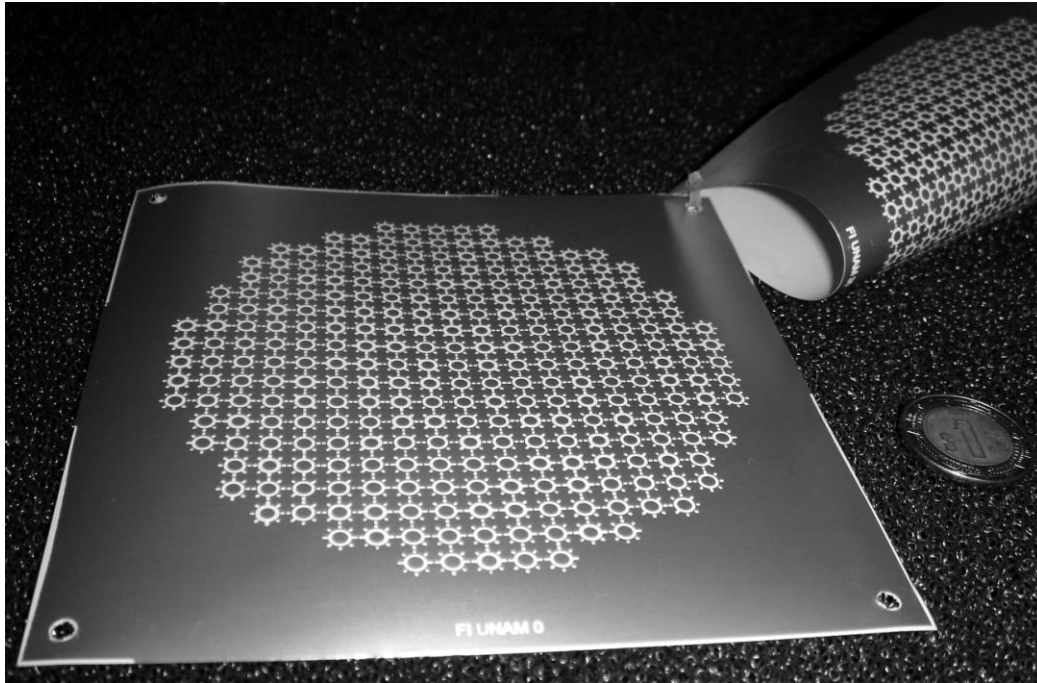


Figura 4.8: Imagen de los arreglos reflectivos fabricados.

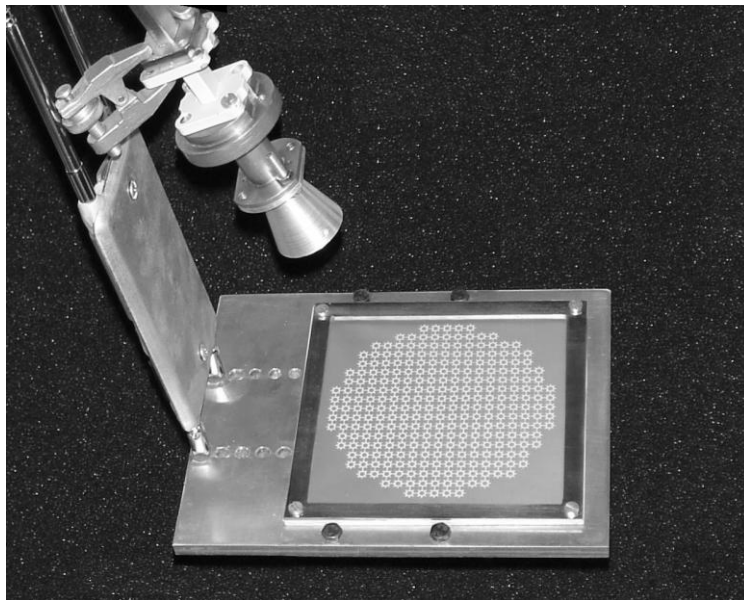


Figura 4.9: Imagen del prototipo del arreglo reflectivo.

4.4. Resultados de la verificación experimental

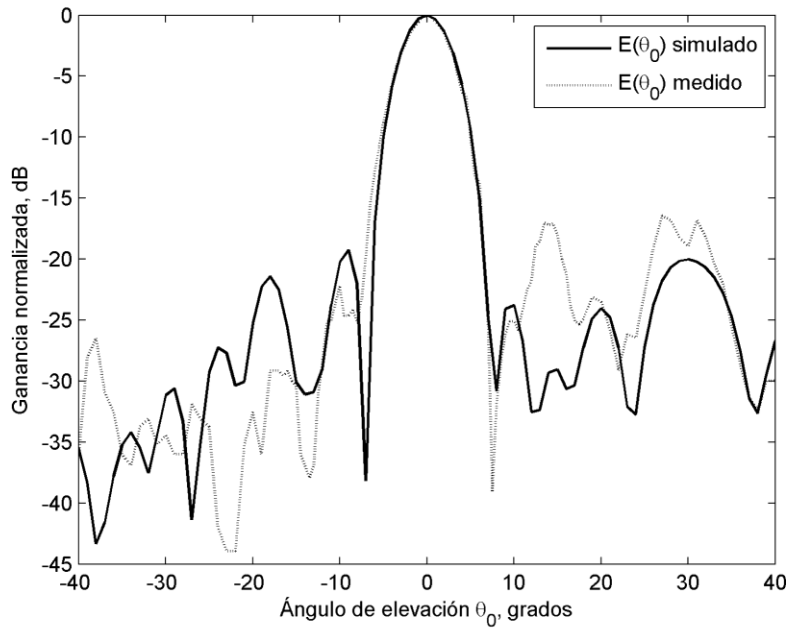
El modelo matemático del arreglo finito ha sido verificado al comparar los patrones de radiación en la zona lejana, obtenidos mediante simulación y medición, de tres diferentes arreglos reflectivos. La región de la zona lejana se calculó mediante la expresión:

$$R_{lejana} \geq \frac{2D^2}{\lambda}, \quad (4.3)$$

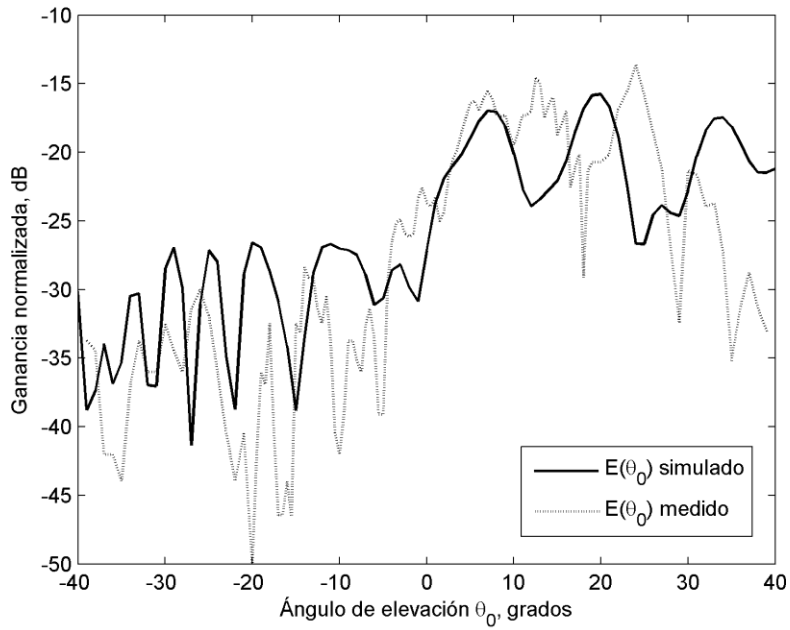
donde D es la dimensión máxima del arreglo. Para este caso, la región de la zona lejana se encuentra a partir de 1.85m.

El prototipo fue montado sobre una mesa con la corneta receptora a la distancia de 2.1m. Con el propósito de disminuir las reflexiones producidas por la mesa y los cables del analizador de redes, se cubrió la zona de trabajo con material absorbente.

Las Fig. 4.10 - 4.12 muestran la comparación de los patrones de ganancia normalizada, medidos y simulados, de tres diferentes arreglos reflectivos finitos diseñados para formar el lóbulo principal en las direcciones determinadas por los ángulos $\theta_0 = 0^\circ, 20^\circ$ y 30° a la frecuencia de 36.5 GHz . De acuerdo con las Fig. 4.10 - 4.12, los resultados obtenidos de las simulaciones presentan una buena coincidencia con los datos experimentales para el caso del lóbulo principal. Las diferencias en los niveles de los lóbulos laterales, para ambas componentes de polarización, son atribuidas principalmente a los errores de fase introducidos por los desplazadores de fase de dos bits, al desempeño de los elementos en el borde del arreglo y a la dificultad para medir con precisión bajos niveles de polarización. Esto último se atribuye a la medición de las características de radiación del arreglo reflectivo en ausencia de una cámara anecoica.

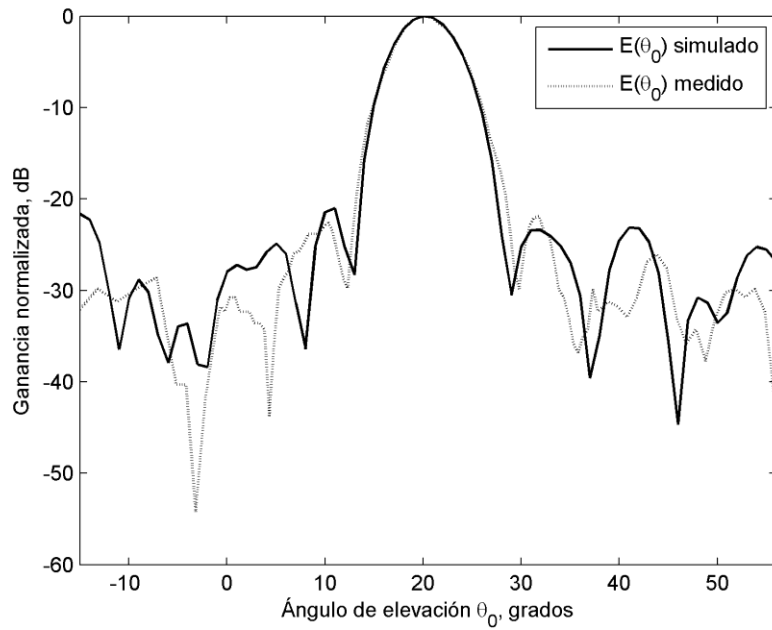


(a)

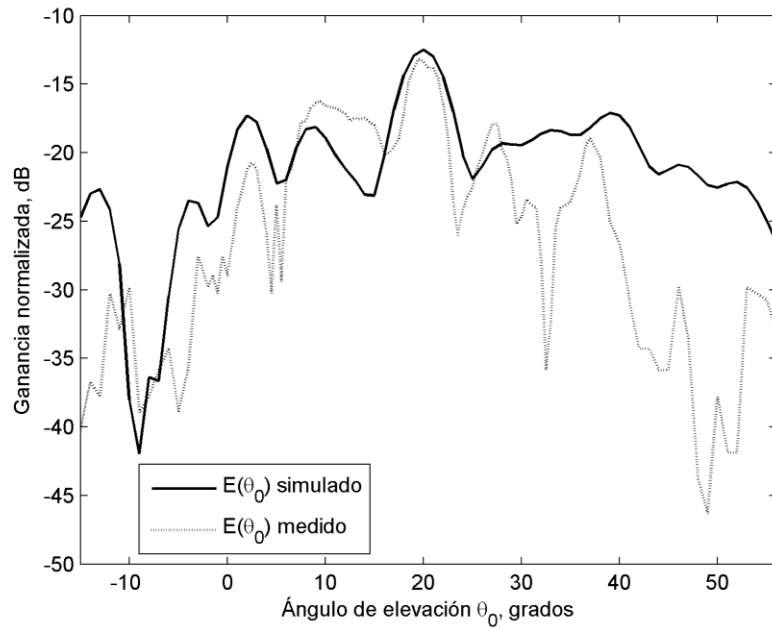


(b)

Figura 4.10: Patrón de ganancia normalizada del arreglo reflectivo finito para el ángulo ($\theta_0=0^\circ$, $\varphi_0=90^\circ$) a la frecuencia de 36.5 GHz: (a) polarización copolar y (b) polarización cruzada.

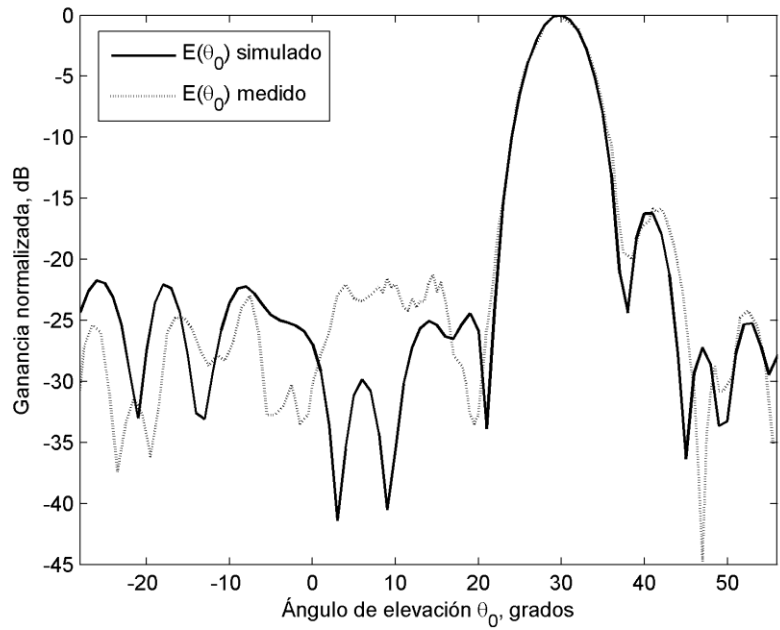


(a)

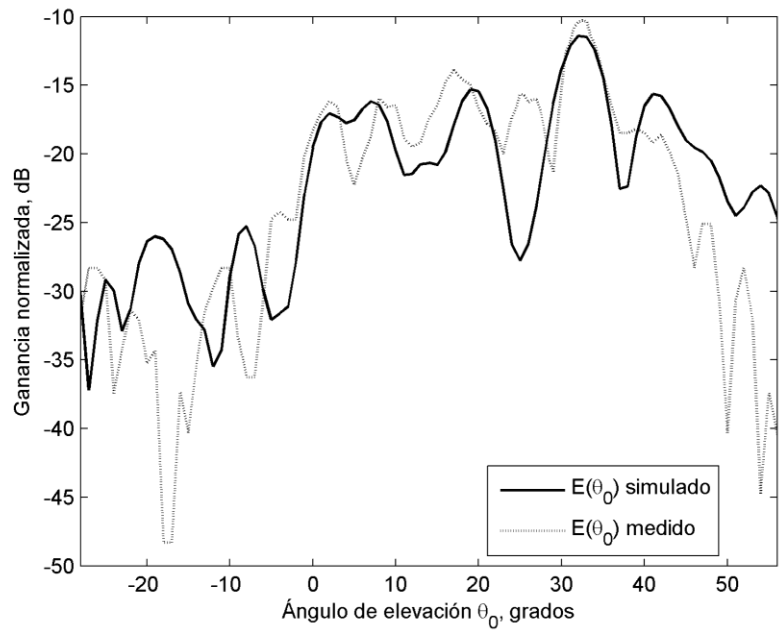


(b)

Figura 4.11: Patrón de ganancia normalizada del arreglo reflectivo finito para el ángulo ($\theta_0=20^\circ$, $\phi_0=90^\circ$) a la frecuencia de 36.5 GHz: (a) polarización copolar y (b) polarización cruzada.



(a)



(b)

Figura 4.12: Patrón de ganancia normalizada del arreglo reflectivo finito para el ángulo ($\theta_0=30^\circ$, $\varphi_0=90^\circ$) a la frecuencia de 36.5 GHz: (a) polarización copolar y (b) polarización cruzada.

Los valores simulados y medidos de la eficiencia de la apertura y de la ganancia de los arreglos reflectivos diseñados para los ángulos de elevación $\theta_0 = 0^\circ, 20^\circ$ y 30° se presentan en la tabla 4.1. Las diferencias entre la eficiencia de la apertura medida experimentalmente con la simulada mediante el modelo matemático, se atribuyen principalmente a las tolerancias del proceso de fabricación del arreglo reflectivo. El efecto similar se presenta para la ganancia del arreglo. La ganancia máxima fue calculada basándose en el área física del arreglo reflectivo.

Tabla 4.1

Valores de la eficiencia de la apertura y de la ganancia de los arreglos reflectivos que proporcionan diferentes ángulos de elevación θ_0 a 36.5 GHz .

θ_0 (grados)	ε_{ap}		$G(\theta_0)$		
	Simulada	Medida	Máxima	Simulada	Medida
0	0.47	0.41	1090	513	445
20	0.44	0.39	1090	451	431
30	0.39	0.28	1090	409	303

4.5. Conclusiones

1. La verificación experimental del modelo matemático desarrollado fue llevada a cabo mediante la construcción de los arreglos reflectivos configurados para redireccionar el lóbulo principal en las direcciones determinadas por distintos ángulos de elevación θ_0 .
2. La comparación de los patrones de radiación en la zona lejana, obtenidos mediante la simulación y la medición de tres diferentes arreglos reflectivos, presentó una buena coincidencia para el lóbulo principal.

3. Los arreglos reflectivos diseñados para apuntar el lóbulo principal en los ángulos de elevación θ_0 de 0° , 20° y 30° presentan una eficiencia de la apertura del 41, 39 y 28%, respectivamente.

4. Finalmente, se puede concluir que el modelo matemático del arreglo finito desarrollado es adecuado para el análisis y la caracterización de arreglos reflectivos finitos basados en aperturas anulares con stubs.

Conclusiones

En este trabajo se presentó el análisis electrodinámico de arreglos reflectivos finitos basados en aperturas anulares con stubs. El objetivo principal es el desarrollo de un modelo matemático, a partir de la teoría electromagnética, que permita predecir las características de exploración del arreglo reflectivo finito de elementos distintamente configurados.

Las conclusiones principales se enumeran a continuación:

1. En la actualidad existe un gran interés en la investigación y desarrollo de arreglos de fase ligeros y de bajo costo, para aplicaciones de radar y telecomunicaciones. Una alternativa atractiva para obtener este tipo de arreglos es el desarrollo de arreglos reflectivos pasivos planos operando a frecuencias de microondas. Los arreglos reflectivos tipo espirafase, basados en aperturas anulares con stubs, representan una técnica eficaz de desplazamiento de fase.
2. El modelo del arreglo infinito permite optimizar la geometría del elemento del arreglo y calcular los parámetros del arreglo reflectivo para asegurar diversos ángulos de exploración. Sin embargo, este modelo no puede estimar con exactitud algunas de las características importantes de los arreglos finitos prácticos como: el patrón de radiación, la ganancia, el ancho del haz, etc.
3. El desarrollo del modelo matemático para el arreglo reflectivo finito de M aperturas anulares, con P stubs por elemento, considerando pantallas conductoras infinitesimalmente delgadas permite analizar la dispersión de una onda electromagnética que incide sobre la estructura. El modelo desarrollado toma en consideración el acoplamiento mutuo entre los M elementos distintamente configurados del arreglo reflectivo.
4. Al aplicar las condiciones de frontera para el campo electromagnético, el modelo matemático fue expresado en forma de dos sistemas de M ecuaciones integrales con respecto al campo eléctrico desconocido en las aperturas de los M elementos. Ambos sistemas fueron completados con las MP condiciones de frontera en los M elementos formuladas utilizando la ley de Ohm. Los dos sistemas de M ecuaciones integrales fueron resueltos en conjunto con las MP condiciones de frontera aplicadas para los elementos conmutadores, utilizando la formulación del Método de Momentos en el dominio espectral. La expresión integral cuádruple que estima la

interconexión electromagnética entre los M elementos del arreglo fue reducida a una integral doble en el dominio espectral con el propósito de simplificar su solución.

5. Con el uso del modelo matemático del arreglo infinito se optimizó la geometría del elemento del arreglo, con el propósito de minimizar las pérdidas de inserción en los diodos p-i-n y para incrementar la magnitud de la onda controlada a la frecuencia de 30 GHz. El elemento optimizado mostró un eficiente redireccionamiento de la onda incidente para ángulos de elevación de hasta 30° con un coeficiente de conversión mayor a -2 dB. Con el modelo matemático del arreglo finito desarrollado se calcularon las características de radiación del arreglo reflectivo de 289 elementos de geometría optimizada. Al controlar el encendido y apagado de los diodos se logró redireccionar el lóbulo principal en distintos ángulos de elevación θ_o . El arreglo mostró valores de la eficiencia de la apertura de 37, 24, 22, 14 y 11 %, correspondientes al apuntamiento del lóbulo principal en los ángulos de elevación θ_o de 0° , 20° , 30° , 35° y 45° , respectivamente.

6. Las características obtenidas con el modelo del arreglo finito desarrollado fueron comparadas con las características calculadas con el modelo del arreglo infinito (Fig. 3.4). Como resultado, se probó que el modelo matemático del arreglo infinito puede predecir el posible sector de exploración del arreglo (Fig. 3.2), mientras que el modelo matemático del arreglo finito es necesario para obtener las características de radiación del arreglo (Fig. 3.5 - 3.9).

7. El modelo matemático del arreglo finito desarrollado fue verificado experimentalmente mediante la construcción de arreglos reflectivos con elementos de conmutación ideales, configurados para redireccionar el lóbulo principal en distintos ángulos de elevación θ_o a la frecuencia de 36.5 GHz. La comparación entre los valores simulados y los valores medidos de los patrones de radiación en la zona lejana presentó una buena coincidencia para el lóbulo principal. Los arreglos reflectivos diseñados mostraron valores de la eficiencia de la apertura del 41, 39 y 28, correspondientes al redireccionamiento del lóbulo principal en los ángulos de elevación θ_o de 0° , 20° y 30° , respectivamente.

8. Los resultados principales del modelo del arreglo finito desarrollado en este trabajo, fueron presentados en dos congresos internacionales, de los cuales se desprenden dos trabajos en extenso [1-2]; y se publicó un artículo en revista internacional indexada [3].

Apéndice A

Derivación de la Transformada de Fourier Bidimensional de los Campos Magnéticos y Eléctricos

De la ecuación (2.30), el campo magnético producido por la densidad de corriente magnética superficial en la m -ésima apertura puede definirse como:

$$\vec{H}_{n,m}(x, y) = \frac{j\omega\epsilon_0}{\pi k_0^2} (k_0^2 + \nabla\nabla) \int_S \vec{\Psi}_n^m(x', y) \sum_{q=0}^{\infty} \frac{e^{-jk_0 R_q}}{R_q} dS'. \quad (\text{A.1})$$

Las funciones base Ψ_n^m son no nulas únicamente en la superficie de la m -ésima apertura. Entonces, es posible cambiar los límites de integración en (A.1):

$$\vec{H}_{n,m}(x, y) = \frac{j\omega\epsilon_0}{\pi k_0^2} (k_0^2 + \nabla\nabla) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\Psi}_n^m(x', y) \sum_{q=0}^{\infty} \frac{e^{-jk_0 R_q}}{R_q} dx'dy'. \quad (\text{A.2})$$

Para calcular la transformada de Fourier bidimensional, la integral en (A.2) puede expresarse como la convolución bidimensional de dos funciones u y v , tal y como se muestra:

$$\begin{aligned} \vec{R}(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\Psi}_n^m(x', y) \sum_{q=0}^{\infty} \frac{e^{-jk_0 \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (2qd)^2}}}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (2qd)^2}} dx'dy' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{u}(x', y) v(x-x', y-y') dx'dy', \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

donde

$$\vec{u}(x', y) = \vec{\Psi}_n^m(x', y), \quad (\text{A.4})$$

y

$$v(x, y) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{e^{-jk_0 \sqrt{x^2 + y^2 + (2qd)^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2 + (2qd)^2}}. \quad (\text{A.5})$$

Según el teorema de la convolución bidimensional, la transformada de Fourier bidimensional de la convolución de dos funciones es el producto de sus transformadas de Fourier:

$$\mathcal{F} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{u}(x', y) v(x - x', y - y) dx' dy' \right] = \vec{U}(k_x, k_y) V(k_x, k_y), \quad (\text{A.6})$$

donde $U(k_x, k_y)$ y $V(k_x, k_y)$ son las transformadas de Fourier bidimensional de las funciones $u(x', y)$ y $v(x, y)$, respectivamente y \mathcal{F} es el símbolo de la transformada de Fourier bidimensional.

De esta forma, la transformada de Fourier bidimensional de la integral en (A.3) puede obtenerse como:

$$\mathcal{F} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\Psi}_n^m(x', y) \sum_{q=0}^{\infty} \frac{e^{-jk_0 R'_q}}{R'_q} dx' dy' \right] = \vec{U}(k_x, k_y) V(k_x, k_y). \quad (\text{A.7})$$

La transformada de Fourier $V(k_x, k_y)$ es calculada como sigue:

$$V(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{e^{-jk_0 \sqrt{x^2 + y^2 + (2qd)^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2 + (2qd)^2}} e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} dx dy. \quad (\text{A.8})$$

Usando la siguiente integral de transformación [1]:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\tau \sqrt{x^2 + \sigma^2}}}{\sqrt{x^2 + \sigma^2}} \cos xy \, dx = K_0 \left[\sigma \sqrt{\tau^2 + y^2} \right];$$

para $y > 0$, $\text{Re } \sigma > 0$, $\text{Re } \tau > 0$, (A.9)

donde K_0 es la función de Bessel modificada del segundo tipo, la integración con respecto a la variable x en (A.8) puede ser obtenida mediante:

$$V(k_x, k_y) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} e^{-jk_y y} K_0 \left[\sqrt{y^2 + (2qd)^2} \sqrt{k_x^2 - k_0^2} \right] dy. \quad (\text{A.10})$$

Tomando en consideración la siguiente integral de transformación [1]:

$$\int_0^{\infty} K_0 \left[\sigma \sqrt{\tau^2 + y^2} \right] \cos xy \, dy = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{y^2 + \sigma^2}} e^{-\tau \sqrt{y^2 + \sigma^2}};$$

para $y > 0$, $\text{Re } \sigma > 0$, $\text{Re } \tau > 0$, (A.11)

la expresión (A.10) es reducida a:

$$V(k_x, k_y) = \frac{2\pi}{\sqrt{k_y^2 + k_x^2 - k_0^2}} \sum_{q=0}^{\infty} e^{-2qd\sqrt{k_y^2 + k_x^2 - k_0^2}}. \quad (\text{A.12})$$

Haciendo uso de las propiedades de la progresión geométrica en (A.12) conlleva a:

$$\begin{aligned} V(k_x, k_y) &= \frac{2\pi}{\sqrt{k_y^2 + k_x^2 - k_0^2}} \frac{1}{1 - e^{-2d\sqrt{k_y^2 + k_x^2 - k_0^2}}} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{k_y^2 + k_x^2 - k_0^2}} \frac{e^{d\sqrt{k_y^2 + k_x^2 - k_0^2}}}{\sinh\left(d\sqrt{k_y^2 + k_x^2 - k_0^2}\right)}. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Aplicando un cambio de variables tal que:

$$\begin{aligned} k_x &= k_0\beta \cos \alpha \\ k_y &= k_0\beta \sin \alpha, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

la transformada de Fourier bidimensional $V(k_x, k_y)$ es determinada como:

$$\begin{aligned} V(k_x, k_y) &= \frac{-\pi}{k_0\sqrt{1-\beta^2}} \frac{e^{jdk_0\sqrt{1-\beta^2}}}{\sin\left(dk_0\sqrt{1-\beta^2}\right)} \\ &= \frac{-\pi}{k_0\sqrt{1-\beta^2}} \left[1 - j \cot\left(dk_0\sqrt{1-\beta^2}\right)\right]. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Definiendo $\Psi_n^m(k_x, k_y) = U(k_x, k_y)$, es posible calcular la transformada de Fourier de la divergencia de $R(x, y)$ como sigue:

$$\mathcal{F}\left(\nabla \cdot \vec{R}\right) = \left[jk_x \tilde{\Psi}_{n_x}^m(k_x, k_y) + jk_y \tilde{\Psi}_{n_y}^m(k_x, k_y)\right] V(k_x, k_y), \quad (\text{A.16})$$

donde $\Psi_{n_x}^m$ y $\Psi_{n_y}^m$ son las componentes en x y y de $\Psi_n^m(k_x, k_y)$.

Calculando la transformada de Fourier de $\nabla \nabla \cdot R(x, y)$ conlleva al siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\nabla \nabla \cdot \vec{R}\right) &= \left[-k_x^2 \tilde{\Psi}_{n_x}^m(k_x, k_y) - k_x k_y \tilde{\Psi}_{n_y}^m(k_x, k_y)\right] V(k_x, k_y) \vec{a}_x \\ &\quad + \left[-k_x k_y \tilde{\Psi}_{n_x}^m(k_x, k_y) - k_y^2 \tilde{\Psi}_{n_y}^m(k_x, k_y)\right] V(k_x, k_y) \vec{a}_y. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Entonces, la transformada de Fourier bidimensional del campo magnético está dada por:

$$\vec{\widetilde{H}}_{n,m}(k_x, k_y) = \frac{j\omega\varepsilon_0}{\pi k_0^2} \begin{bmatrix} k_0^2 \left[\widetilde{\Psi}_{n_x}^m(k_x, k_y) \vec{a}_x + \widetilde{\Psi}_{n_y}^m(k_x, k_y) \vec{a}_y \right] V(k_x, k_y) \\ + \left[-k_x^2 \widetilde{\Psi}_{n_x}^m(k_x, k_y) - k_x k_y \widetilde{\Psi}_{n_y}^m(k_x, k_y) \right] V(k_x, k_y) \vec{a}_x \\ + \left[-k_x k_y \widetilde{\Psi}_{n_x}^m(k_x, k_y) - k_y^2 \widetilde{\Psi}_{n_y}^m(k_x, k_y) \right] V(k_x, k_y) \vec{a}_y \end{bmatrix}. \quad (\text{A.18})$$

Definiendo $\Psi_l^k(k_x, k_y)$ como la transformada de Fourier de $(E_{l,k}(x, y) \times a_z)$ y $k_x^2 + k_y^2 = k_0^2 \beta$, el producto entre Ψ_l^k y $H_{n,m}$ da como resultado:

$$\vec{\widetilde{\Psi}}_l^k(k_x, k_y) \cdot \vec{\widetilde{H}}_{n,m}(k_x, k_y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta^2} \left[k_y \widetilde{\Psi}_{n_x}^m(k_x, k_y) - k_x \widetilde{\Psi}_{n_y}^m(k_x, k_y) \right] \\ \cdot \left[k_y \widetilde{\Psi}_l^k(-k_x, -k_y) - k_x \widetilde{\Psi}_l^k(-k_x, -k_y) \right] \\ + \frac{1-\beta^2}{\beta^2} \left[k_x \widetilde{\Psi}_{n_x}^m(k_x, k_y) + k_y \widetilde{\Psi}_{n_y}^m(k_x, k_y) \right] \\ \cdot \left[k_x \widetilde{\Psi}_l^k(-k_x, -k_y) + k_y \widetilde{\Psi}_l^k(-k_x, -k_y) \right] \end{bmatrix} \frac{j\omega\varepsilon_0}{\pi k_0^2} V(k_x, k_y). \quad (\text{A.19})$$

Finalmente, sustituyendo (A.14), (A.15) y (A.19) en (2.31), y realizando la correspondiente manipulación matemática, conlleva a la expresión para la admitancia mutua:

$$Y_{l,n}^{k,m} = \frac{k_0^2}{4\pi^2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left[1 - j \cot \left(dk_0 \sqrt{1 - \beta^2} \right) \right] \\ \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left[\widetilde{\Psi}_{n_x}^m(\alpha, \beta) \sin \alpha - \widetilde{\Psi}_{n_y}^m(\alpha, \beta) \cos \alpha \right] \right. \\ \cdot \left[\widetilde{\Psi}_l^k(\alpha, -\beta) \sin \alpha - \widetilde{\Psi}_l^k(\alpha, -\beta) \cos \alpha \right] \\ + \sqrt{1 - \beta^2} \left[\widetilde{\Psi}_{n_x}^m(\alpha, \beta) \cos \alpha + \widetilde{\Psi}_{n_y}^m(\alpha, \beta) \sin \alpha \right] \\ \cdot \left. \left[\widetilde{\Psi}_l^k(\alpha, -\beta) \cos \alpha + \widetilde{\Psi}_l^k(\alpha, -\beta) \sin \alpha \right] \right\} \beta \, d\alpha \, d\beta. \quad (\text{A.20})$$

Apéndice B

Cálculo de la Admitancia Mutua

Para evaluar numéricamente la expresión (2.32), es necesario definir los productos entre las componentes de la transformada de Fourier de las densidades de corriente magnética superficial de la m -ésima y k -ésima aperturas anulares con stubs, $(\Psi_{n x}^m, \Psi_{n y}^m)$ y $(\Psi_{l x}^k, \Psi_{l y}^k)$, respectivamente. Las distribuciones del campo en la apertura anular y en los stubs, son equivalentes a los modos de la guía de onda coaxial y a la guía de onda rectangular, respectivamente. Entonces, se definen a continuación los productos entre las funciones que definen el campo en las aperturas anulares y en los stubs.

B.1. Producto entre las funciones que definen el campo en las aperturas anulares

La geometría de dos aperturas anulares se muestra en la Fig. B.1. La distribución del campo magnético en la apertura anular, en coordenadas cilíndricas, está dada por los modos de la guía de onda coaxial:

$$H_z(\rho, \phi) = \sum_{u=0}^{\infty} A_1^u [J_u(k_c \rho) - N_u(k_c \rho) E_u] \frac{1}{\sqrt{\pi(1 + \delta_{0u})}} \cos u\phi + \sum_{u=0}^{\infty} A_2^u [J_u(k_c \rho) - N_u(k_c \rho) E_u] \frac{1}{\sqrt{\pi(1 + \delta_{0u})}} \sin u\phi, \quad (\text{B.1})$$

donde $A_{1,2}$ son constantes de normalización, k_c es el número de onda de corte, $J_u(x)$ y $N_u(x)$ son las funciones de Bessel y de Neumann, respectivamente. La función E_u está definida por:

$$E_u = \frac{J_u'(k_c r_1)}{N_u'(k_c r_1)}, \quad (\text{B.2})$$

donde $J_u'(x)$ y $N_u'(x)$ son las derivadas con respecto al argumento de las funciones $J_u(x)$ y $N_u(x)$, respectivamente. La delta de Kronecker, δ_{0u} , es igual a 1 para $u=0$.

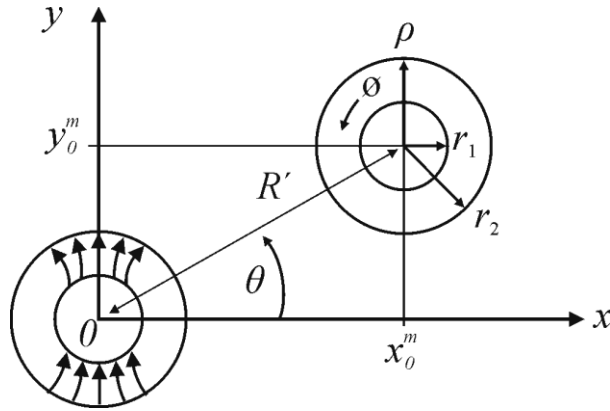


Figura B.1: Geometría y distribución del campo entre dos aperturas anulares.

El campo eléctrico tangencial en la apertura anular se puede determinar a partir de la siguiente transformación:

$$\vec{E}_\tau(\rho, \phi) = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} H_z \vec{a}_\rho + \frac{\partial}{\partial \rho} H_z \vec{a}_\phi, \quad (\text{B.3})$$

sustituyendo (B.1) en (B.3) y realizando las correspondientes operaciones, las componentes del campo eléctrico tangencial son de la forma:

$$\begin{aligned} \vec{E}_\tau(\rho, \phi) = & \left\{ \sum_{u=0}^{\infty} \frac{-1}{\rho} A_1^u [J_u(k_c \rho) - N_u(k_c \rho) E_u] \frac{1}{\sqrt{\pi(1 + \delta_{0u})}} (-u) \sin u\phi \right. \\ & \left. - \sum_{u=0}^{\infty} \frac{1}{\rho} A_2^u [J_u(k_c \rho) - N_u(k_c \rho) E_u] \frac{1}{\sqrt{\pi(1 + \delta_{0u})}} u \cos u\phi \right\} \vec{a}_\rho \\ & + \left\{ \sum_{u=0}^{\infty} A_1^u k_c [J_u'(k_c \rho) - N_u'(k_c \rho) E_u] \frac{1}{\sqrt{\pi(1 + \delta_{0u})}} \cos u\phi \right. \\ & \left. + \sum_{u=1}^{\infty} A_2^u k_c [J_u'(k_c \rho) - N_u'(k_c \rho) E_u] \frac{1}{\sqrt{\pi(1 + \delta_{0u})}} \sin u\phi \right\} \vec{a}_\phi. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Definiendo la función

$$Z_u(k_c \rho) = \left[\frac{J_u(k_c \rho) - N_u(k_c \rho) E_u}{\sqrt{\pi(1 + \delta_{0u})}} \right], \quad (\text{B.5})$$

se puede reescribir (B.4) como:

$$\begin{aligned} \vec{E}_\tau(\rho, \phi) = & \left\{ \sum_{u=0}^{\infty} \frac{u}{\rho} A_1^u Z_u(k_c \rho) \sin u\phi - \sum_{u=0}^{\infty} \frac{u}{\rho} A_2^u Z_u(k_c \rho) \cos u\phi \right\} \vec{a}_\rho \\ & + \left\{ \sum_{u=0}^{\infty} k_c A_1^u Z_u(k_c \rho) \cos u\phi + \sum_{u=1}^{\infty} k_c A_2^u Z_u(k_c \rho) \sin u\phi \right\} \vec{a}_\phi. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Para evaluar la admitancia mutua es necesario obtener la densidad corriente magnética y determinar su transformada de Fourier.

De (B.6), la corriente magnética superficial se define como:

$$\begin{aligned} \vec{M} = \vec{E}_\tau \times \vec{a}_z = & \left\{ \sum_{u=0}^{\infty} k_c A_1^u Z_u(k_c \rho) \cos u\phi + \sum_{u=1}^{\infty} k_c A_2^u Z_u(k_c \rho) \sin u\phi \right\} \vec{a}_\rho \\ & + \left\{ \sum_{u=0}^{\infty} \frac{u}{\rho} A_2^u Z_u(k_c \rho) \cos u\phi - \sum_{u=0}^{\infty} \frac{u}{\rho} A_1^u Z_u(k_c \rho) \sin u\phi \right\} \vec{a}_\phi, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

mientras que las componentes en x y y de la densidad de corriente magnética superficial se pueden obtener mediante:

$$\begin{aligned} \Psi_x &= \vec{M}_\rho \cos \phi - \vec{M}_\phi \sin \phi \\ \Psi_y &= \vec{M}_\rho \sin \phi + \vec{M}_\phi \cos \phi. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Entonces, la transformada de Fourier de cada componente es determinada por medio de:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_x &= \iint_{-\infty}^{\infty} \Psi_x(x', y') e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy \\ \tilde{\Psi}_y &= \iint_{-\infty}^{\infty} \Psi_y(x', y') e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy, \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

donde $x' = x - x_0$ y $y' = y - y_0$.

Sustituyendo (B.8) en (B.9) y aplicando el cambio de variables (A.14) se obtienen:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}_x(\alpha, \beta) &= e^{-j(k_x x_0 + k_y y_0)} \sum_{u=0}^{\infty} \frac{2\pi}{k_0 \beta j^{u+1}} \left\{ u \sin \alpha (A_2^u \cos u\alpha - A_1^u \sin u\alpha) [J_u(k_0 \beta \rho) Z_u(k_c \rho)] \Big|_{r_1}^{r_2} \right. \\
&\quad \left. - \cos \alpha (A_1^u \cos u\alpha + A_2^u \sin u\alpha) \left[\frac{\rho}{k_0^2 \beta^2 - k_c^2} \begin{pmatrix} k_0^2 \beta^2 k_c J_u(k_0 \beta \rho) Z_u(k_c \rho) \\ -k_c^2 k_0 \beta J_u'(k_0 \beta \rho) Z_u(k_c \rho) \end{pmatrix} \right] \Big|_{r_1}^{r_2} \right\} \\
\tilde{\Psi}_y(\alpha, \beta) &= e^{-j(k_x x_0 + k_y y_0)} \sum_{u=0}^{\infty} \frac{2\pi}{k_0 \beta j^{u+1}} \left\{ u \cos \alpha (A_1^u \sin u\alpha - A_2^u \cos u\alpha) [J_u(k_0 \beta \rho) Z_u(k_c \rho)] \Big|_{r_1}^{r_2} \right. \\
&\quad \left. - \sin \alpha (A_2^u \sin u\alpha + A_1^u \cos u\alpha) \left[\frac{\rho}{k_0^2 \beta^2 - k_c^2} \begin{pmatrix} k_0^2 \beta^2 k_c J_u(k_0 \beta \rho) Z_u(k_c \rho) \\ -k_c^2 k_0 \beta J_u'(k_0 \beta \rho) Z_u(k_c \rho) \end{pmatrix} \right] \Big|_{r_1}^{r_2} \right\}. \quad (\text{B.10})
\end{aligned}$$

Reescribiendo (B.10) de tal manera que:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}_x(\alpha, \beta) &= e^{-j(k_x x_0 + k_y y_0)} \sum_{u=0}^{\infty} [K(\alpha, \beta) \sin \alpha - L(\alpha, \beta) \cos \alpha] \\
\tilde{\Psi}_y(\alpha, \beta) &= -e^{-j(k_x x_0 + k_y y_0)} \sum_{u=0}^{\infty} [K(\alpha, \beta) \cos \alpha + L(\alpha, \beta) \sin \alpha], \quad (\text{B.11})
\end{aligned}$$

donde $K(\alpha, \beta)$ y $L(\alpha, \beta)$ están definidas por medio de:

$$K(\alpha, \beta) = \frac{2\pi u}{k_0 \beta j^{u+1}} (A_2^u \cos u\alpha - A_1^u \sin u\alpha) [J_u(k_0 \beta \rho) Z_u(k_c \rho)] \Big|_{r_1}^{r_2}, \quad (\text{B.12})$$

y

$$L(\alpha, \beta) = \frac{2\pi}{k_0 \beta j^{u+1}} (A_2^u \sin u\alpha + A_1^u \cos u\alpha) \left[\frac{\rho}{k_0^2 \beta^2 - k_c^2} \begin{pmatrix} k_0^2 \beta^2 k_c J_u(k_0 \beta \rho) Z_u(k_c \rho) \\ -k_c^2 k_0 \beta J_u'(k_0 \beta \rho) Z_u(k_c \rho) \end{pmatrix} \right] \Big|_{r_1}^{r_2}. \quad (\text{B.13})$$

Ahora bien, el producto entre las componentes x y y de la transformada de Fourier para los modos TM en la ecuación (2.32) está definido como:

$$\begin{aligned}
& \left[\tilde{\Psi}_{n_x}^m(\alpha, \beta) \sin \alpha - \tilde{\Psi}_{n_y}^m(\alpha, \beta) \cos \alpha \right] \cdot \left[\tilde{\Psi}_{l_x}^k(\alpha, -\beta) \sin \alpha - \tilde{\Psi}_{l_y}^k(\alpha, -\beta) \cos \alpha \right] \\
&= \tilde{\Psi}_{n_x}^m(\alpha, \beta) \tilde{\Psi}_{l_x}^k(\alpha, -\beta) \sin^2 \alpha + \tilde{\Psi}_{n_y}^m(\alpha, \beta) \tilde{\Psi}_{l_y}^k(\alpha, -\beta) \cos^2 \alpha \\
&\quad - \tilde{\Psi}_{n_x}^m(\alpha, \beta) \tilde{\Psi}_{l_y}^k(\alpha, -\beta) \sin \alpha \cos \alpha - \tilde{\Psi}_{n_y}^m(\alpha, \beta) \tilde{\Psi}_{l_x}^k(\alpha, -\beta) \sin \alpha \cos \alpha, \quad (\text{B.14})
\end{aligned}$$

donde $\Psi_{n_x}^m$ y $\Psi_{n_y}^m$ son las componentes de la m -ésima apertura, mientras que $\Psi_{l_x}^k$ y $\Psi_{l_y}^k$ son las componentes de la k -ésima apertura.

Sustituyendo (B.11) en (B.14) y simplificando se tiene:

$$K^m(\alpha, \beta) K^k(\alpha, \beta) e^{-jk_0\beta[(x_0^m - x_0^k) \cos \alpha + (y_0^m - y_0^k) \sin \alpha]}, \quad (\text{B.15})$$

definiendo $(x_0^m - x_0^k) = R' \cos \theta$, $(y_0^m - y_0^k) = R' \sin \theta$ y sustituyendo en (B.15) conlleva a:

$$K^m(\alpha, \beta) K^k(\alpha, \beta) e^{-jk_0\beta R' \cos(\alpha - \theta)}. \quad (\text{B.16})$$

Para las aperturas anulares cuyas distribuciones de campo son equivalentes a los modos de la guía de onda coaxial, la integración sobre α puede evaluarse en términos de las funciones de Bessel.

Integrando (B.16) sobre α

$$\int_0^{2\pi} \sum_{u=0}^{\infty} K^m(\alpha, \beta) K^k(\alpha, \beta) e^{-jk_0\beta R' \cos(\alpha - \theta)} d\alpha, \quad (\text{B.17})$$

se obtiene:

$$\sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} I_1 [(W_{2m}^u W_{2k}^v + W_{1m}^u W_{1k}^v) \cos(u - v) \theta + (W_{2m}^u W_{1k}^v + W_{1m}^u W_{2k}^v) \sin(u - v) \theta] \\ + I_2 [(W_{2m}^u W_{2k}^v - W_{1m}^u W_{1k}^v) \cos(u + v) \theta - (W_{2m}^u W_{1k}^v + W_{1m}^u W_{2k}^v) \sin(u + v) \theta] \end{array} \right\}, \quad (\text{B.18})$$

donde

$$I_1 = \frac{\pi}{j^{u-v}} J_{u-v}(k_0\beta R') \quad (\text{B.19})$$

$$I_2 = \frac{\pi}{j^{u+v}} J_{u+v}(k_0\beta R') \quad (\text{B.20})$$

$$W_{pr}^q = \frac{2\pi q}{k_0\beta j^{q+1}} A_{pr}^q [J_q(k_0\beta\rho) Z_q(k_{cr}\rho)]|_{r_1}^{r_2}, \quad (\text{B.21})$$

con $p=1,2$, $q=u,v$ y $r=m,k$; de tal manera que únicamente queda la integración sobre β de la ecuación

(B.18).

El producto entre las componentes para los modos TE en la ecuación (2.32), está definido por:

$$\begin{aligned} & \left[\tilde{\Psi}_l^k(\alpha, -\beta) \cos \alpha + \tilde{\Psi}_l^k(\alpha, -\beta) \sin \alpha \right] \cdot \left[\tilde{\Psi}_n^m(\alpha, \beta) \cos \alpha + \tilde{\Psi}_n^m(\alpha, \beta) \sin \alpha \right] \\ = & \tilde{\Psi}_x^m(\alpha, \beta) \tilde{\Psi}_x^k(\alpha, -\beta) \cos^2 \alpha + \tilde{\Psi}_y^m(\alpha, \beta) \tilde{\Psi}_y^k(\alpha, -\beta) \sin^2 \alpha \\ & + \tilde{\Psi}_x^m(\alpha, \beta) \tilde{\Psi}_y^k(\alpha, -\beta) \sin \alpha \cos \alpha + \tilde{\Psi}_y^m(\alpha, \beta) \tilde{\Psi}_x^k(\alpha, -\beta) \sin \alpha \cos \alpha, \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

cuya simplificación conlleva a la siguiente integral:

$$\int_0^{2\pi} \sum_{u=0}^{\infty} L^m(\alpha, \beta) L^k(\alpha, \beta) e^{-jk_0 \beta R \cos(\alpha - \theta)} d\alpha, \quad (\text{B.23})$$

evaluando (B.23) sobre α da como resultado:

$$\sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \left\{ \begin{aligned} & I_1 [(C_{2m}^u C_{2k}^v + C_{1m}^u C_{1k}^v) \cos(u-v)\theta + (C_{2m}^u C_{1k}^v - C_{1m}^u C_{2k}^v) \sin(u-v)\theta] \\ & + I_2 [(C_{1m}^u C_{1k}^v - C_{2m}^u C_{2k}^v) \cos(u+v)\theta + (C_{2m}^u C_{1k}^v + C_{1m}^u C_{2k}^v) \sin(u+v)\theta] \end{aligned} \right\}, \quad (\text{B.24})$$

donde

$$C_{pr}^q = \frac{2\pi}{k_0 \beta j^{q+1}} A_{pr}^q \left[\frac{\rho}{k_0^2 \beta^2 - k_{cr}^2} (k_0^2 \beta^2 k_{cr} J_q(k_0 \beta \rho) Z_q(k_{cr} \rho) - k_{cr}^2 k_0 \beta J_q'(k_0 \beta \rho) Z_q(k_{cr} \rho)) \right] \Big|_{r_1}^{r_2}. \quad (\text{B.25})$$

con $p=1,2$, $q=u,v$ y $r=m,k$; quedando finalmente la integración sobre β de la ecuación (B.24).

Para el caso de los productos entre las funciones que definen el campo en las aperturas anulares y en los stubs, tal simplificación no puede llevarse a cabo, por lo tanto es necesario resolver la integral doble.

B.2. Producto entre las funciones que definen el campo en los stubs

La geometría del stub se muestra en la Fig. B.2. El campo magnético en el stub está definido por:

$$\begin{aligned} H_z(x, y) = & \sum_{u=0}^{\infty} B_1^u \cos[p_1^u(x - l_s)] \cos(k_y 1y) \frac{1}{\sqrt{h_s(1 + \delta_{0u})}} \\ & + \sum_{u=0}^{\infty} B_2^u \cos[p_2^u(x - l_s)] \sin(k_y 2y) \frac{1}{\sqrt{h_s}}, \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

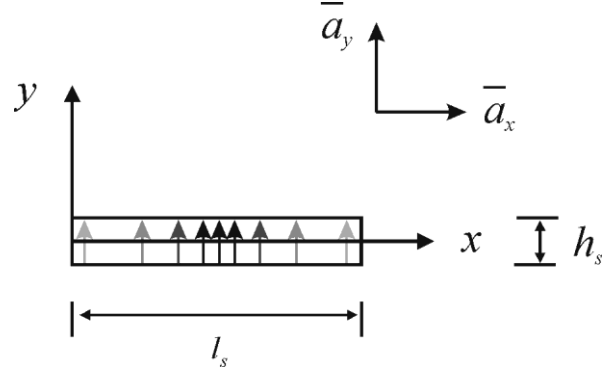


Figura B.2: Geometría y distribución del campo en el stub.

donde $B_{1,2}$ son constantes de normalización y

$$p_p^u = \sqrt{k_c^2 - k_{yp}^2} \quad (\text{B.27})$$

$$k_{y1} = \frac{\pi u}{h_s} \quad (\text{B.28})$$

$$k_{y2} = \frac{\pi + 2\pi u}{2h_s} \quad (\text{B.29})$$

El campo eléctrico tangencial en el stub se puede determinar a partir de la siguiente transformación:

$$\vec{E}_\tau(x, y) = -\frac{\partial}{\partial y} H_z \vec{a}_x + \frac{\partial}{\partial x} H_z \vec{a}_y, \quad (\text{B.30})$$

sustituyendo (B.26) en (B.30) y realizando las correspondientes operaciones, las componentes del campo eléctrico tangencial son de la forma:

$$\vec{E}_\tau(x, y) = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{u=0}^{\infty} B_1^u \cos[p_1^u(x - l_s)] k_{y1} \sin(k_{y1}y) \frac{1}{\sqrt{h_s(1+\delta_{0u})}} \\ - \sum_{u=0}^{\infty} B_2^u \cos[p_2^u(x - l_s)] k_{y2} \cos(k_{y2}y) \frac{1}{\sqrt{h_s}} \end{array} \right\} \vec{a}_x - \left\{ \begin{array}{l} \sum_{u=0}^{\infty} B_1^u p_1^u \sin[p_1^u(x - l_s)] \cos(k_{y1}y) \frac{1}{\sqrt{h_s(1+\delta_{0u})}} \\ + \sum_{u=0}^{\infty} B_2^u p_2^u \cos[p_2^u(x - l_s)] \sin(k_{y2}y) \frac{1}{\sqrt{h_s}} \end{array} \right\} \vec{a}_y. \quad (\text{B.31})$$

La distribución del campo magnético en el stub puede ser aproximada tomando en consideración únicamente el primer término de la suma ($u=0$) en (B.26), lo cual simplificaría en gran manera el cálculo del acoplamiento mutuo. Entonces, reescribiendo (B.26) se tiene:

$$H_z(x, y)|_{u=0} = \frac{B_1^0 \cos [p_1^0 (x - l_s)]}{\sqrt{2h_s}}, \quad (\text{B.32})$$

y por lo tanto, (B.30) se reduce a:

$$\begin{aligned} \vec{E}_\tau(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} H_z(x, y) \vec{a}_y \\ &= \frac{-B_1^0 p_1^0 \sin [p_1^0 (x - l_s)]}{\sqrt{2h_s}} \vec{a}_y. \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

De esta forma, la expresión para la densidad de la corriente magnética en el stub es:

$$\vec{M} = \vec{E}_\tau \times \vec{a}_z = \frac{-B_1^0 p_1^0 \sin [p_1^0 (x - l_s)]}{\sqrt{2h_s}} \vec{a}_x. \quad (\text{B.34})$$

Para obtener la transformada de Fourier de la densidad de corriente magnética en el stub, se aplica la siguiente integral:

$$\tilde{\Psi}_1(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{M}(x, y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dx dy. \quad (\text{B.35})$$

Al existir un desplazamiento en el eje x con respecto al centro de la apertura anular (Fig. B.3), se definen las nuevas coordenadas:

$$\begin{aligned} y' &= y \\ x' &= x + r_2, \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

y se introduce el término $e^{-jk_x r_2}$, lo cual resulta en la siguiente expresión para la transformada de Fourier de la densidad de corriente magnética:

$$\tilde{\Psi}_2(\alpha, \beta) = \tilde{\Psi}_1(\alpha, \beta) e^{-jk_0 \beta r_2 \cos \alpha}. \quad (\text{B.37})$$

Cada uno de los stubs está colocado de forma radial, espaciado ϕ_s grados, lo cual implica un cambio en los ejes coordenados (Fig. B.4) de tal manera que:

$$\tilde{\Psi}_3(\alpha, \beta) = \tilde{\Psi}_2(\alpha - \phi_s, \beta), \quad (\text{B.38})$$

y definiéndose los vectores unitarios de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \vec{a}_{x'} &= \vec{a}_x \cos \phi_s + \vec{a}_y \sin \phi_s \\ \vec{a}_{y'} &= \vec{a}_y \cos \phi_s - \vec{a}_x \sin \phi_s. \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

Ahora, tomando en consideración una posible traslación del origen (x_0, y_0) , se tiene:

$$\tilde{\Psi}(\alpha, \beta) = \tilde{\Psi}_3(\alpha, \beta) e^{-j(k_x x_0 + k_y y_0)}. \quad (\text{B.40})$$

Las componentes en x y y de la transformada de Fourier para la corriente magnética en el stub están definidas por:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_x &= \tilde{\Psi}(\alpha, \beta) \vec{a}_{x'} = \tilde{\Psi}(\alpha, \beta) \cos \phi_s \\ \tilde{\Psi}_y &= \tilde{\Psi}(\alpha, \beta) \vec{a}_{y'} = \tilde{\Psi}(\alpha, \beta) \sin \phi_s, \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

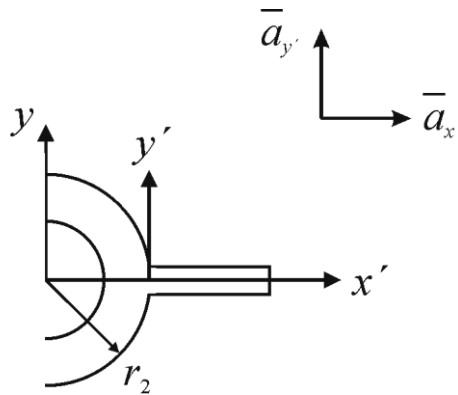


Figura B.3: Desplazamiento en el eje x .

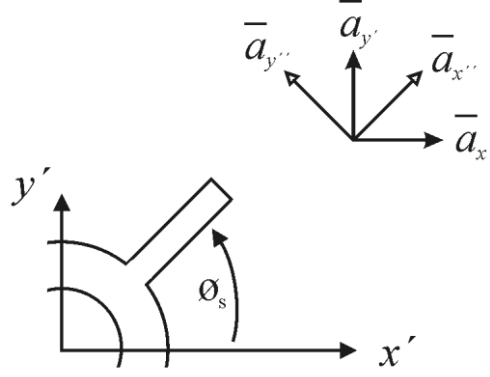


Figura B.4: Giro de los ejes coordenados y de los vectores unitarios.

donde $\Psi(\alpha, \beta)$ es de la forma:

$$\sum_{s=1}^S \frac{-e^{-jk_0\beta[x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha + r_2 \cos(\alpha - \phi_s)]}}{\sqrt{2h_s} k_0 \beta \sin(\alpha - \phi_s) \left[k_0^2 \beta^2 \cos^2(\alpha - \phi_s) - (p_1^0)^2 \right]} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 2jp_1^0 B_1^0 \sin(h_s k_0 \beta \sin(\alpha - \phi_s)) \\ \cdot [k_0 \beta \cos(\alpha - \phi_s) \sin(p_1^0 l_s) + jp_1^0 (\cos(p_1^0 l_s) - e^{-jk_0 \beta l \cos(\alpha - \phi_s)})] \end{array} \right\}, \quad (\text{B.42})$$

y S es el número total de stubs por elemento.

El producto entre las componentes x y y de la transformada de Fourier para la corriente magnética en los stubs de la m -ésima y la k -ésima aperturas, para los modos TM , resulta en la siguiente integral doble:

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \sum_{s=1}^S \sum_{t=1}^S \left\{ \begin{array}{l} F_s^m \sin(\alpha - \phi_s^m) e^{-jk_0 \beta r_2 \cos(\alpha - \phi_s^m)} \\ \cdot F_t^k \sin(\alpha - \phi_t^k) e^{jk_0 \beta r_2 \cos(\alpha - \phi_t^k)} \end{array} \right\} e^{-jk_0 \beta R \cos(\alpha - \theta)} \beta \, d\alpha \, d\beta, \quad (\text{B.43})$$

mientras que los modos TE presentan la siguiente integral doble:

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \sum_{s=1}^S \sum_{t=1}^S \left\{ \begin{array}{l} F_s^m \cos(\alpha - \phi_s^m) e^{-jk_0 \beta r_2 \cos(\alpha - \phi_s^m)} \\ \cdot F_t^k \cos(\alpha - \phi_t^k) e^{jk_0 \beta r_2 \cos(\alpha - \phi_t^k)} \end{array} \right\} e^{-jk_0 \beta R \cos(\alpha - \theta)} \beta \, d\alpha \, d\beta, \quad (\text{B.44})$$

donde

$$F_w^r = \frac{2jp_{1r}^0 B_{1r}^0 \sin(h_s k_0 \beta \sin(\alpha - \phi_w^r))}{\sqrt{2h_s k_0 \beta \sin(\alpha - \phi_w^r)} \left[k_0^2 \beta^2 \cos^2(\alpha - \phi_w^r) - (p_{1r}^0)^2 \right]} \cdot \left[k_0 \beta \cos(\alpha - \phi_w^r) \sin(p_{1r}^0 l_s) + jp_{1r}^0 \left(\cos(p_{1r}^0 l_s) - e^{-jk_0 \beta l \cos(\alpha - \phi_w^r)} \right) \right], \quad (\text{B.45})$$

con $w=s, t$ y $r=m, k$.

B.3. Producto entre las funciones que definen los campos en las aperturas anulares y en los stubs

Reescribiendo las componentes en x y y de la transformada de Fourier de la corriente magnética para la apertura anular (B.11):

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{x_\alpha} &= e^{-j(k_x x_0 + k_y y_0)} \sum_{u=0}^{\infty} [K(\alpha, \beta) \sin \alpha - L(\alpha, \beta) \cos \alpha] \\ \tilde{\Psi}_{y_\alpha} &= -e^{-j(k_x x_0 + k_y y_0)} \sum_{u=0}^{\infty} [K(\alpha, \beta) \cos \alpha + L(\alpha, \beta) \sin \alpha], \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

y para los stubs (B.41):

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{x_s} &= e^{-jk_0 \beta [x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha + r_2 \cos(\alpha - \phi_s)]} \sum_{s=1}^N F(\alpha, \beta) \cos \phi_s \\ \tilde{\Psi}_{y_s} &= e^{-jk_0 \beta [x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha + r_2 \cos(\alpha - \phi_s)]} \sum_{s=1}^N F(\alpha, \beta) \sin \phi_s. \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

El producto entre las funciones que definen los campos en las aperturas anulares y en los stubs del m -

ésimo y el k -ésimo elemento para los modos TM se reduce a la integral doble:

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \sum_{s=1}^S \sum_{u=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} K^m F^k \sin(\alpha - \phi_s^k) e^{jk_0 \beta r_2 \cos(\alpha - \phi_s^k)} \\ + K^k F^m \sin(\alpha - \phi_s^m) e^{-jk_0 \beta r_2 \cos(\alpha - \phi_s^m)} \end{array} \right\} e^{-jk_0 \beta R \cos(\alpha - \theta)} \beta \, d\alpha \, d\beta, \quad (\text{B.48})$$

mientras que el producto para los modos TE resulta en la siguiente integral doble:

$$- \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \sum_{s=1}^S \sum_{u=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} L^m F^k \cos(\alpha - \phi_s^k) e^{jk_0 \beta r_2 \cos(\alpha - \phi_s^k)} \\ + L^k F^m \cos(\alpha - \phi_s^m) e^{-jk_0 \beta r_2 \cos(\alpha - \phi_s^m)} \end{array} \right\} e^{-jk_0 \beta R \cos(\alpha - \theta)} \beta \, d\alpha \, d\beta. \quad (\text{B.49})$$

Apéndice C

Diagramas de las Antenas tipo Corneta

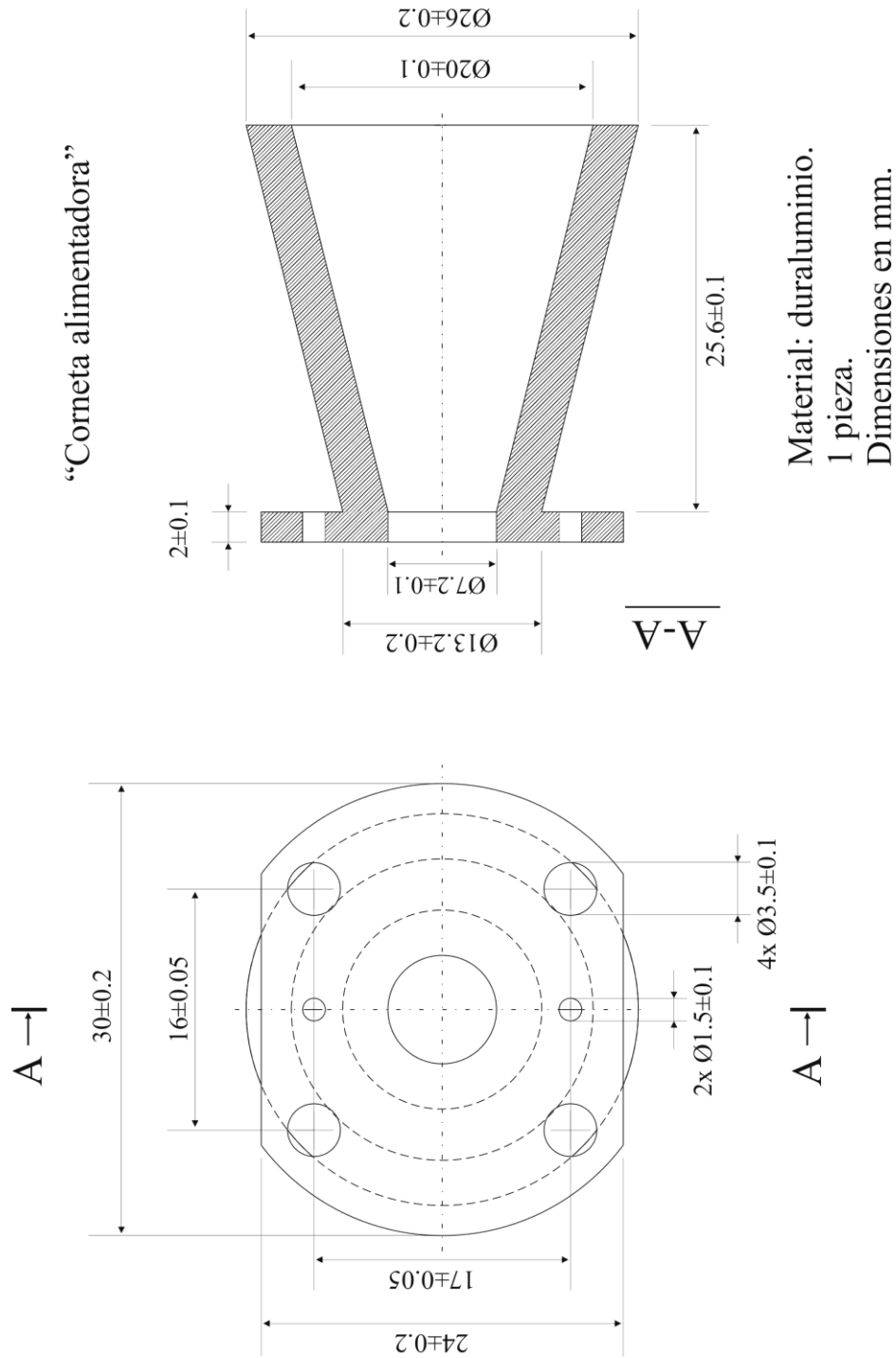


Figura C.1: Diagrama de la corneta alimentadora.

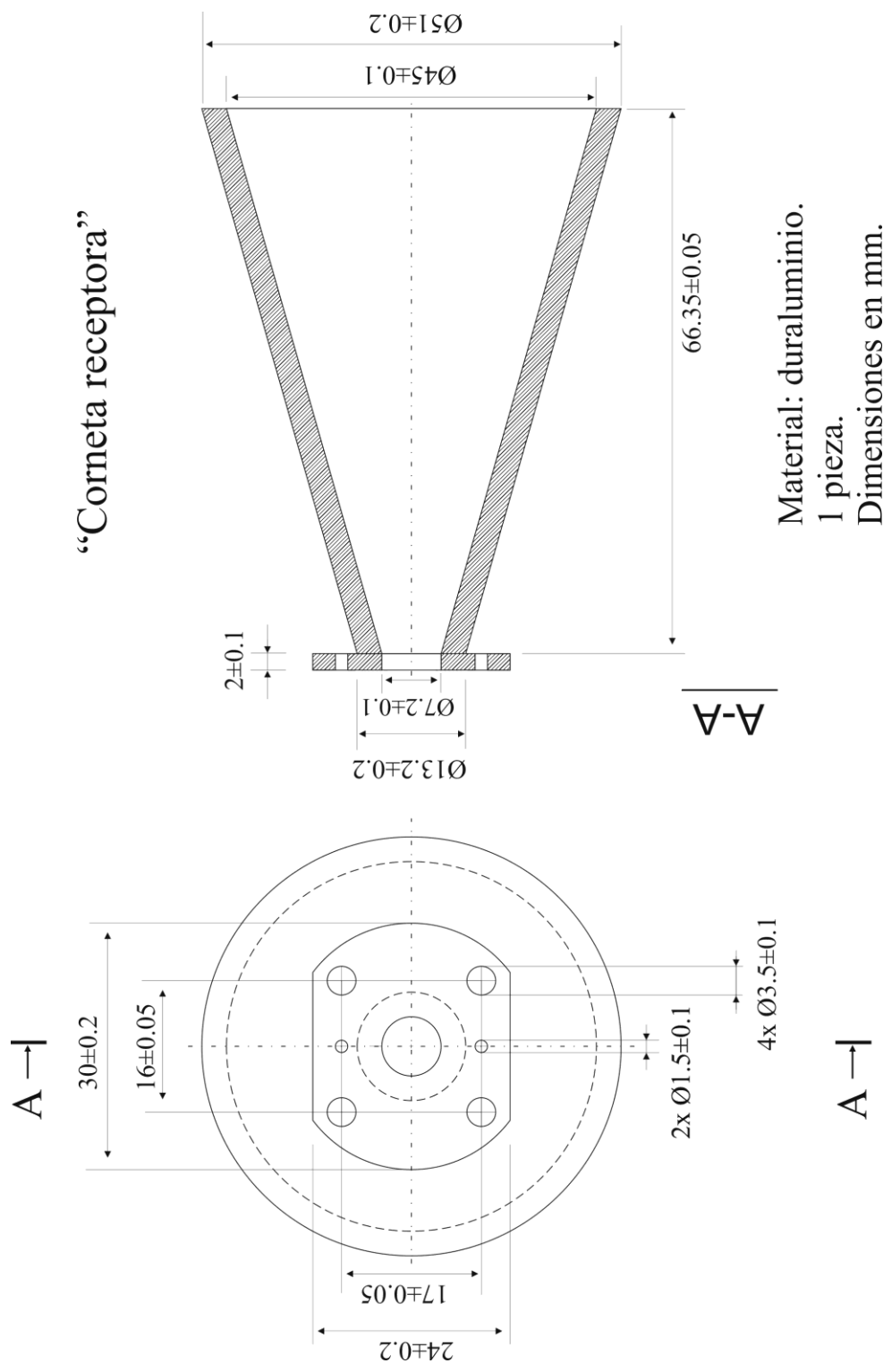


Figura C.2: Diagrama de la corneta receptora.

Publicaciones

POLARIZATION PHASE SHIFTERS AND SPIRAPHASE-TYPE PHASED ARRAYS

A.E. Martynyuk, J. Rodriguez-Zamudio

DIT, DIE, Facultad de Ingeniería, UNAM, Cd Universitaria, Coyoacan, C.P. 04510, Mexico, D.F., Mexico,
Tel. 52-55-56223140, E-mail alxmart@yahoo.com

Introduction - Nowadays we can observe a growing interest on low-cost passive phased arrays for telecommunication and radar applications. However, the commercial implementation of the passive phased arrays is delayed due to the unavailability of the efficient and low-cost phase shifters. In this paper we are considering the polarization principle of phase changing to design and fabricate low-loss waveguide phase shifters for Ka and X bands. Also the characteristics of the spiraphase-type phased array based on the same phase shifting elements are simulated in order to prove the possibility of wide-angle scanning.

Principle of operation - The polarization principle of phase changing had been proposed by Fox in the late 40s [1] and in the 70s Phelan [2] had built a spiraphase phased array antenna using the same approach. This principle can be demonstrated for the reflective phase shifter. The main element of this phase shifter is the control section (Fig. 1). One can consider this control section as a section of a circular waveguide terminated in a short circuit with the control diaphragm installed in its cross section. The control diaphragm for the two-bit phase shifter is shown in Fig. 1. This control diaphragm is the system of connected slot resonators, which consists of a ring slot l with an average length equal to the wavelength λ and inductive radial stubs 2,3,4,5. The angle between the nearest stubs is 45° . The switching diodes 6,7,8,9 are connected in parallel to the inductive stubs. At each moment of time three diodes are switched-on and one diode is switched-off.

Now assume that the diode 6 is switched-off. The control section provides two different reflection coefficients Γ_{\perp} and Γ_{\parallel} for two orthogonal linearly polarized waves with the electric field vectors parallel to the axis PP' and QQ' , respectively, due to the different DC bias applied across the switching diodes.

It was shown for the case of the incident circularly polarized wave (CPW) that the optimum condition fulfills when $\Gamma_{\parallel} = -\Gamma_{\perp}$ [3]. For this case, the reflected wave is a CPW with the same rotation of the electric field vector as the incident wave. Furthermore, the phase of the reflected wave is equal to 2γ , where γ is the angular position of the stub with the switched-off diode. Thus, according to the polarization principle of phase changing, the control section must provide an additional differential phase shift of π between two orthogonal components of the reflected wave.

Assume that the diode 6 is switched-off. For the vertical component of the incident CPW this control diaphragm is equivalent to the ring slot resonator, because inductive stubs 3,4,5 are shorted by the switched-on diodes and stub 2 is not excited by this component. Therefore, when

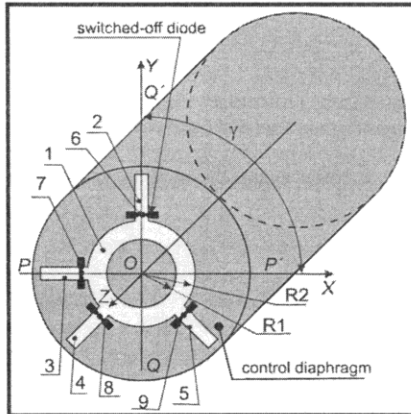


Fig. 1 Waveguide polarization phase shifter

the frequency of the exciting field is equal to the resonant frequency of the ring slot resonator, this diaphragm is transparent for the vertically polarized component. The no-load condition is obtained in the plane of control diaphragm by placing a metal wall at a distance $\lambda/4$ from the control diaphragm. So, the vertical component of the incident wave is reflected by the control section with the reflection coefficient that is close to 1.

The horizontal component of the incident CPW excites stub 2. The capacitance of the switched-off diode 6 forms the series resonant circuit together with the inductance of the outer metal ring. When the frequency of the incident wave is equal to the resonant frequency of the series resonant circuit, the horizontal component of the incident wave is reflected by the control diaphragm with the reflection coefficient that is close to -1. Thus, an additional phase shift of π is provided between the orthogonal components of the reflected wave. Now we can switch off the diode 7 and switch on the diode number 6. This commutation provides an additional phase shift of 90° in the reflected wave. So, the proper commutation of diodes leads to the additional phase shifts of $0, 90, 180$ and 270° in the reflected CPW.

Technology of fabrication - The challenging problem is the design and fabrication of the bias circuits. Two different technologies had been used to fabricate bias circuits for Ka and X-band two-bit phase shifters.

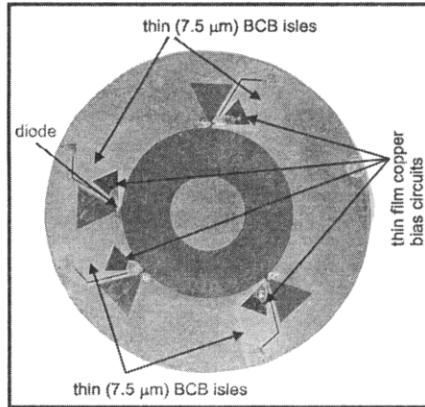


Fig. 2 Fabricated control diaphragm for the X-band phase shifter (p-i-n diodes installed)

The first technology was proposed by V. Skachko and it was used to fabricate Ka-band phase shifter. This technology employs a thick metal plate as a substrate and thin SiO₂-Cu dielectric-metal layers to form bias circuits. This approach ensures a significant suppression of insertion loss in the bias circuits, however, precise mechanical processing of thick metal substrates is needed to obtain the geometry of the diaphragm.

The second approach [4] uses a standard Rogers substrate instead of a thick metal plate to eliminate the mechanical processing and benzocyclobutene (BCB) photo-definable resin as a dielectric to form bias circuits. The proposed technology does not require a mechanical processing step, and permits the drastic reduction of fabrication costs while ensuring low-loss operation. The fabricated control diaphragm for the X-band 2-bit phase shifter is shown in Fig.2.

The X-band phase fabricated on a standard 5880 Rogers substrate had demonstrated the insertion loss level less than 0.5 dB (Fig. 3) in the frequency band from 9.8 to 11.4 GHz with peak phase errors less than 11°.

Experimental results - The Ka-band phase shifter fabricated on a thick metal substrate had demonstrated the insertion loss level less than 1 dB in the frequency band from

29.5 to 32GHz. The measured switching time of 50ns had been achieved and the peak phase errors of 15° were obtained.

Simulation of the spiraphase array – Reflective phased arrays based on circular waveguide are bulky. They are characterized by a reduced scanning sector. Therefore, we investigate the possibility to use an open spiraphase-type phase array. In other words, we arrange the control diaphragms in one plane without the usage of circular waveguides (Fig. 4). A strong mutual coupling exists among the open phase shifters. Thus, a full-wave mathematical model had been developed for this phased array.

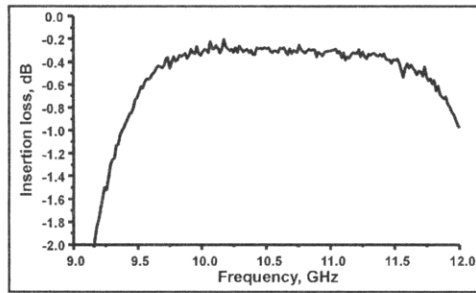


Fig. 3 Measured loss of the X-band two-bit phase shifter

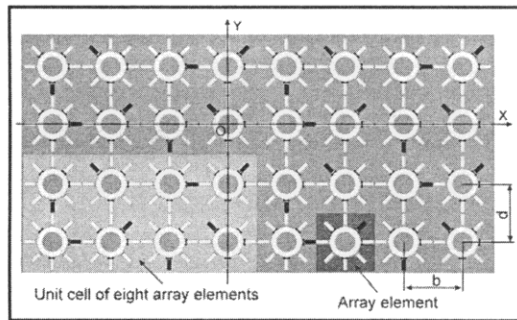


Fig.4 Spiraphase-type phased array with periodic cell that contains 8 array elements. The “excited” stubs are shown in black.

If the angular positions of the “excited” stubs are the same for all the array elements, the infinite phased array can be analyzed as the periodic structure using the theorem of Floquet. The phased array element can be considered as a unit cell of this periodic structure. For this case the constant phase shift is introduced into the reflected wave. The incident plane CPW is reflected in the direction determined by the natural specular reflection angle.

Now assume that scanning in the plane XOZ is required. For this case, one needs to ensure the introduction of the linearly distributed phase shift in the incident plane CPW along the x-direction. Thus, the angular position of the “excited” stub must change from element to element. Different angular positions of the “excited” stubs destroy the periodicity of the array. However, this array can be treated as a periodic structure with a rectangular unit cell that contains M adjacent array elements in the x-direction when this unit cell is repeated periodically in the x-direction. According to

Floquet’s theorem, the electromagnetic field above the reflective phased array is presented as a sum of Floquet modes or plane waves. We have many propagating Floquet modes due to the large dimensions of the unit cell. Each of these modes is a plane wave traveling in the certain direction. Among all this plane waves, only two Floquet modes are traveling to the direction determined by the angular positions of the “excited” stubs.

The spiraphase array configured to introduce a linearly-distributed phase shift of 90° per element in x -direction and 180° per element in y -direction is shown in Fig. 4. For this case the periodic cell contains 8 (4×2) array elements.

Thus, the array can be considered as a multimode converter that transforms the normally-incident plane CPW into the plane wave traveling in the "desired" direction. The efficiency of the conversion is affected mainly by three factors: 1) the incident CPW is not only converted into the plane wave traveling in the "desired" direction, but is partially converted in plane waves propagating in undesired directions; 2) the insertion loss that exists in diodes leads to the partial dissipation of the incident wave; 3) phase errors in the digital phase shifters.

So, it is possible to define a conversion coefficient to measure the efficiency of the mode conversion. This conversion coefficient can be calculated as the ratio between the power density of the reflected plane wave traveling in the desired direction and the power density of the incident plane CPW.

The conversion coefficient for spiraphase-type phased array with two-bit phase shifters have been simulated. The geometry of the array element has been optimized in order to minimize the dissipative loss in the diodes at the central frequency of 10GHz. As a result, the element dimensions b and d were set to 18.5mm. The inner and outer radii of the ring slot R_1 and R_2 were 3.9mm and 6mm, respectively; the length of stubs was 2.9 mm and the width of stubs was 1.1 mm. It has been considered that all elements were printed on a dielectric substrate with a relative permittivity of 2.2 and thickness of 0.4mm. The distance between the substrate and the metal screen has been set to 10.6mm. Diodes had been installed at the stubs with angular positions of $0, 45, 225$ and 270° . Other four stubs are short-circuited with the metal shorts.

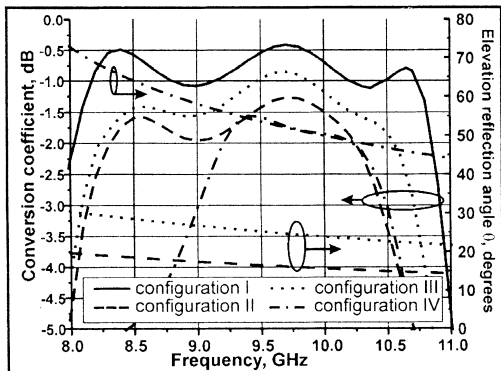


Fig. 5 Conversion coefficient and reflection elevation angle for four different configurations of spiraphase array

The conversion coefficient (Fig.5) had been simulated for the four different configurations of the spiraphase phased array and the normal incidence of the CPW. The configuration_I corresponds to the uniform biasing. Thus, the incident CPW is reflected in z -direction. Simulated conversion coefficient is better than -1.1 dB in the frequency range from 8.2 to 10.8GHz. Then the array had been reconfigured to provide the reflection elevation angle θ equal to 16° and the reflection azimuth angle φ equal to 0° at the frequency of 10GHz (configuration_II). The periodic cell for this case contains six array elements arranged along the x -direction. The conversion coefficient degrades due to the phase errors introduced by the two-bit phase shifters. However, the conversion coefficient is better than -2 dB in the frequency range from 8.3 to 10.2 GHz. Note, that the reflection elevation angle is function of frequency. The configuration_III provides the reflection angles θ, φ equal to 24° and 0° at 10 GHz. The unit cell for this case contains four array elements arranged along the x -direction. The improvement in the conversion coefficient is due to the exact phase shifts provided in this particular case. The configuration_IV corresponds to the reflection angles θ, φ equal to 50° and 45° ($f=10$ GHz) and the periodic cell contains 9 (3×3) elements. For these relatively large reflection elevation angles the conversion coefficient is better than -2dB in the frequency band from 9.2 to 10.3GHz.

Conclusions- The application of the polarization principle of phase changing permits to design low-loss phase shifters operating at microwave frequencies with the total loss less than 1dB at Ka band and less than 0.5 dB at X-band. The spiraphase-type arrays based on the proposed phase shifting element demonstrate the wide-angle scanning combined with the acceptable conversion characteristics.

References

1. A.Fox, "An adjustable waveguide phase changer," *PIRE*, vol. 35, no. 12, pp. 1489-1498, Dec. 1947.
2. H.R. Phelan, "Spiraphase reflectarray for multitarget radar," *Microwave J.*, vol. 20, pp. 67-73, July 1977.
3. A.E. Martynyuk, N.A. Martynyuk, S.N. Khotiaintsev, and V.S. Vountesmeri, "Millimeter-wave amplitude-phase modulator," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. 45, No 6, pp. 911 - 917, 1997
4. A. E. Martynyuk, A. Martinez-Lopez, J. I. Martinez Lopez, "Two-bit X-band reflective waveguide phase shifter with BCB-based Bias Circuits", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* Vol. 54, No12, pp. 4056-4061, 2006

Analysis of a Spiraphase-Type Reflectarray: Comparison Between Finite and Infinite Models

J. RODRIGUEZ-ZAMUDIO,¹ J. I. MARTINEZ-LOPEZ,¹
J. RODRIGUEZ-CUEVAS,¹ and A. E. MARTYNYUK¹

¹Division of Ingeniería Eléctrica (DIE), Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), Ciudad Universitaria, Coyoacán, Mexico City, Mexico

Abstract A full-wave mathematical model was developed to analyze the radiation characteristics of a spiraphase-type finite reflectarray based on ring slot resonators with stubs controlled by p-i-n diodes. The scanning characteristics of the finite 289-element reflectarray with optimized elements were calculated. According to the simulated characteristics, the optimized reflectarray provides electronic scanning in the XOZ-plane for elevation angles up to 30° with a total aperture efficiency better than 0.22. The characteristics obtained with the developed mathematical model were compared with the simulated characteristics obtained with the mathematical model of the infinite array.

Keywords finite reflectarray, infinite reflectarray, phased arrays, ring slot resonator, spiraphase array, electromagnetic coupling

1. Introduction

In recent years, the increase in telecommunication and radar applications at microwave frequencies has motivated a growing interest in the investigation of lightweight, low-cost phased arrays. One of the problems that can be resolved with the help of phased-array radar is the collision avoidance for the unmanned automatic helicopters. For this application, a fast beam steering must be combined with light weight and low cost. A promising method to obtain a lightweight, low-cost phased array is the development of the planar passive reflectarray operating at millimeter-wave frequencies. At these frequencies, special attention should be paid to the reduction of the insertion loss in the passive phased array. Thus, a careful selection of the reflectarray structure must be made.

A typical reflectarray consists of multiple reflective elements implemented over a flat surface. The array elements introduce a required phase shift into the reflected wave redirecting this wave in the desired direction.

Different phasing methods have been developed for the elements of the reflectarray. As a result, reflectarrays have been implemented using microstrip patches with open stubs of different lengths (Munson et al., 1987; Huang, 1991; Chang & Huang, 1992), printed dipoles of variable size (Kelkar, 1991), and microstrip patches of different dimensions (Poza & Metzler, 1993). An alternative approach consists of the implementation of a

Received 24 October 2008; accepted 25 March 2009.

Address correspondence to A. E. Martynyuk, DIT, DIE, Facultad de Ingeniería, UNAM, Cd. Universitaria, Coyoacán, Mexico, D.F., C.P. 04510, Mexico. E-mail: alxmart@yahoo.com

reflectarray with elements having different angular rotations (Huang, 1995; Huang & Pogorzelski, 1998). In this method, the phase shift introduced in the reflected wave is determined only by the angular position of the reflective element. The mechanical rotation of this element results in an additional phase shift introduced into the reflected wave.

Unfortunately, the velocity of the mechanical rotation is not sufficient for a wide range of applications. Thus, an electronic simulation of the mechanical rotation was proposed, resulting in the spiraphase reflectarray (Phelan, 1976). With the use of the spiraphase principle, it is possible to achieve fast scanning reflectarrays. The main advantage of the spiraphase reflectarray consists of the fact that, in this array, the reflective element is naturally combined with the phase shifter. As a result, the usage of the conventional reflective phase shifters based on the low-impedance high-loss transmission lines is avoided.

Initially, this technique was proposed for the spiraphase array based on half-wave dipoles (Phelan, 1977) and spiral elements (Wang, 1983). Later, a spiraphase-type reflectarray with elements based on ring slot resonators with stubs was proposed and analyzed (Martynyuk et al., 2003). It was proved that this type of element ensures optimal transformation of the p-i-n diode impedances, resulting in the suppression of the insertion loss in the diodes. In a recent work, a special technology was proposed (Martynyuk et al., 2006) to fabricate low-loss bias circuits for this type of element.

However, the progress in the design process strongly depends on the mathematical model used both to predict the parameters of the reflectarray and to optimize it. So, it is necessary to develop an adequate mathematical model to reduce the time and cost necessary for the design process. The following basic fact must be taken into account to develop the adequate mathematical model: The strong electromagnetic coupling that exists between the array elements has a considerable impact on the array characteristics. So, the electromagnetic interaction must be considered to predict the behavior of the reflectarray.

One of the effective methods that takes into account mutual coupling in the large arrays is an infinite periodic array approach. According to this approach, the advantage of the periodicity is exploited and only one periodic unit cell is analyzed. However, in a reflectarray, each element is properly reconfigured to introduce the required phase shift into the reflected wave. Thus, the reflectarray element cannot be considered as the periodic cell of the structure.

The full-wave mathematical model developed in Martynyuk et al. (2004) takes into account the electromagnetic coupling between the differently configured elements in an infinite periodic reflectarray. With this model, it is possible to calculate the parameters of the infinite reflectarray for different scanning angles considering the mutual coupling in the ambient of differently configured adjacent elements. The infinite model can be used for the initial optimization of the reflectarray element because it does not require considerable computation power. Nevertheless, this model cannot predict the edge effects because it is focused on an infinite array. Furthermore, the infinite model fails to accurately estimate some of the important characteristics of the practical finite arrays such as radiation pattern, directivity gain, beamwidth, side lobes, and grating lobes levels. Thus, it is necessary to develop a proper mathematical model that analyzes these characteristics. Even though this model requires a considerable computational power and is unsuitable for the optimization process, it is extremely useful at the final stage of the design.

This article presents a full-wave mathematical model for a finite reflectarray based on ring slot resonators with radial stubs controlled by p-i-n diodes. With the help of the infinite array model, the geometry of the array element was optimized in order to fulfill the strict requirements that exist for the insertion loss. Then, the scanning characteristics

of a finite 289-element reflectarray with optimized elements were calculated. With the developed mathematical model, these characteristics were compared with the simulated characteristics calculated with the mathematical model of the infinite array. As a result, it was established that a correspondence exists between the finite model and infinite model with the unit cell that contains various differently configured reflectarray elements.

2. Principle of Operation

The reflectarray is shown in Figure 1(a). This reflectarray consists of multiple slot elements placed at the nodes of a rectangular grid with invariant periodicity b_x and b_y along the x - and y -directions, respectively, and situated at a distance d over a metal screen.

The geometry of a single element is shown in Figure 1(b). This element contains a ring slot resonator A with eight inductive radial stubs ($s_1, s_2, s_3, \dots, s_8$). The inner and the outer radiuses of the ring slot are r_1 and r_2 , respectively. The angle between two adjacent stubs is 45° . The length and the width of the radial stubs are l and h , respectively. Control p-i-n diodes ($d_1, d_2, d_3, \dots, d_8$) are connected in parallel with the radial stubs. At any moment, two of the stubs whose angular positions differ by 180° contain switched-off diodes, meanwhile the other six stubs contain switched-on diodes.

Assume that a normally incident circularly polarized plane wave of frequency ω propagates toward the array in the negative z -direction. In this article, a time harmonic variation of $e^{j\omega t}$ is being considered and suppressed throughout. The electric field vector of the incident wave can be written as

$$\vec{E}_i = E_0(\vec{a}_x - j\vec{a}_y)e^{jk_0z}, \tag{1}$$

where E_0 is the magnitude of the incident wave, \vec{a}_x and \vec{a}_y are the unit vectors in the x - and y -directions, respectively, $k_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ is the wavenumber, ϵ_0 and μ_0 are the permittivity and the permeability of free space, respectively, and $j = \sqrt{-1}$.

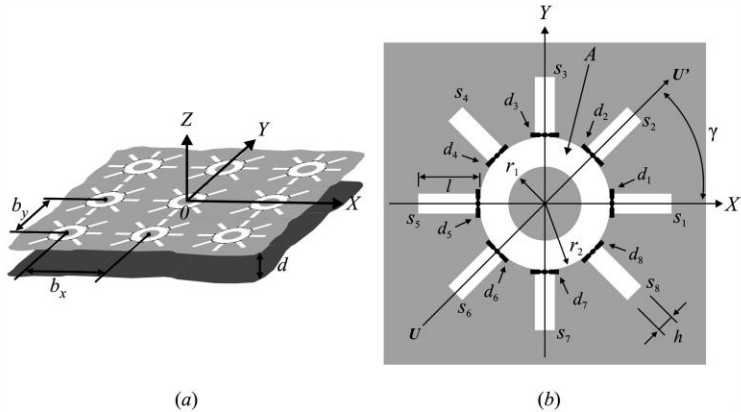


Figure 1. (a) Reflectarray based on ring slot resonators with stubs and (b) single element of the reflectarray.

Initially, the stubs with switched-off diodes s_2 and s_6 are located parallel to the axis UU' , meanwhile the rest of the stubs contain the switched-on diodes. This array element provides two different reflection coefficients Γ_{\parallel} and Γ_{\perp} for the two linearly polarized waves with the electric field vectors parallel and orthogonal to the axis UU' , respectively.

The electric field of the reflected wave can be expressed as the sum of two circularly polarized waves (CPWs) that propagates in the positive z -direction as (Wang, 1983):

$$\begin{aligned} \vec{E}_r = & 0.5E_0e^{j2\gamma}(\Gamma_{\parallel} - \Gamma_{\perp})(\vec{a}_x + j\vec{a}_y)e^{-jk_0z} \\ & + 0.5E_0(\Gamma_{\parallel} + \Gamma_{\perp})(\vec{a}_x - j\vec{a}_y)e^{-jk_0z}, \end{aligned} \quad (2)$$

where γ is the angle between the axis UU' and the axis X .

The first component of the sum in Eq. (2) is a CPW with the same direction of rotation as vector \vec{E}_i . The phase of this wave depends on the angular position γ of the stubs with the switched-off diodes. This component can be named the ‘‘controlled wave.’’ The second component is a CPW with the direction of rotation opposite to that of vector \vec{E}_i . The phase of this wave does not depend on the angular position of the stubs with the switched-off diodes. This component can be named the ‘‘uncontrolled wave.’’ Then, when the following condition is fulfilled:

$$\Gamma_{\parallel} = -\Gamma_{\perp}, \quad (3)$$

the uncontrolled wave is suppressed, and it is possible to control the phase of the reflected CPW. Equations (2) and (3) express the polarization principle of phase changing (Fox, 1947). According to this principle, the variation of the angular position of the stubs with the switched-off diodes by an angle γ leads to a phase change of 2γ in the reflected CPW.

The linearly polarized component of the incident wave in Eq. (1) that is parallel to the axis UU' does not excite a considerable electromagnetic field in the stubs s_2 and s_6 . The other stubs ($s_1, s_3, s_4, s_5, s_7, s_8$) are short-circuited by the switched-on diodes. Therefore, for this component of the incident wave, the reflectarray is equivalent to the frequency selective surface (FSS) based on ring slot resonators situated over a metal screen. When the average perimeter of the ring slot is approximately equal to the wavelength λ , a parallel resonance occurs. This FSS becomes transparent for the incident wave that is parallel to the axis UU' . However, with the metal screen situated approximately at the distance $\lambda/4$, the parallel component is reflected by the array with reflection coefficient Γ_{\parallel} , approximately equal to 1 at the frequency of the parallel resonance.

In contrast, stubs s_2 and s_6 are excited by the linearly polarized component of the incident wave orthogonal to the axis UU' . The equivalent circuit for this case is a series resonant circuit formed by the capacitance of the switched-off diodes and the inductance of the outer conductive part of the ring slot resonator. At the resonant frequency, the orthogonal component of the incident wave is reflected by the array with a reflection coefficient Γ_{\perp} approximately equal to -1 . Therefore, a differential phase shift of 180° appears between the orthogonal components of the reflected wave leading to the phase change of 2γ in the reflected CPW. Thus, an additional phase shift of 0° , 90° , 180° , or 270° is provided to the reflected CPW by switching off the pairs of stubs (s_1, s_5), (s_2, s_6), (s_3, s_7), or (s_4, s_8), respectively. Then, the reflectarray element behaves as a two-bit digital phase shifter that controls the phase of the reflected wave.

2.1. Optimization of the Array Element Using the Infinite Array Model

If one considers a uniform angular position of the “excited” stubs (stubs with switched-off diodes), the infinite reflectarray can be analyzed as a periodic structure using Floquet’s theorem. Then, the reflectarray element can be considered as a unit cell of this periodic structure. For this case, a constant phase shift is introduced into the reflected wave. The incident circularly polarized plane wave is reflected in the direction determined by the natural specular reflection angle.

Now, assume that a normally incident circularly polarized plane wave moving toward the array must be reflected in the direction determined by the reflection elevation angle θ_0 and the reflection azimuth angle φ_0 . For this case, any two adjacent array elements must provide incremental phase shifts ψ_x and ψ_y to the reflected wave in the x - and y -directions, respectively. These phase increments can be calculated as

$$\begin{aligned}\psi_x &= -k_0 b_x \sin \theta_0 \cos \varphi_0, \\ \psi_y &= -k_0 b_y \sin \theta_0 \sin \varphi_0.\end{aligned}\quad (4)$$

Then, the difference between the angular positions of the excited stubs for any two adjacent array elements in the x - and y -directions must be set to

$$\begin{aligned}\Delta\gamma_x &= 0.5\psi_x = -0.5k_0 b_x \sin \theta_0 \cos \varphi_0, \\ \Delta\gamma_y &= 0.5\psi_y = -0.5k_0 b_y \sin \theta_0 \sin \varphi_0.\end{aligned}\quad (5)$$

However, the real angular positions of the excited stubs in the elements should be corrected, taking into account the discrete values of the digital phase shifting elements.

Nonuniform angular positions of the excited stubs along the array destroy the periodicity. Nevertheless, this array can be treated as a periodic structure with a “large” cell that contains N_x and N_y adjacent array elements in the x - and y -directions, respectively, when this large cell repeats periodically in the x - and y -directions. Now taking into account the digital nature of the phase shifting elements, the difference between the angular positions of the excited stubs for any two adjacent array elements in the x - and y -directions must be close to

$$\begin{aligned}\Delta\gamma_x &= \pi M_x / N_x & (N_x = 1, 2, \dots, \quad M_x = 0, 1, \dots, \quad N_x - 1), \\ \Delta\gamma_y &= \pi M_y / N_y & (N_y = 1, 2, \dots, \quad M_y = 0, 1, \dots, \quad N_y - 1),\end{aligned}\quad (6)$$

where M_x and M_y are the total number of 2π for phase shifts introduced by the large cell that contains $N_x N_y$ array elements into the reflected wave along the x - and y -directions, respectively.

For example, the reflectarray configured to introduce a linearly distributed phase shift of 90° per element in the x -direction and 180° per element in the y -direction is shown in Figure 2. For this case, the periodic cell contains eight array elements ($N_x = 4$; $N_y = 2$; $M_x = M_y = 1$), and this large cell repeats periodically in the x - and y -directions.

Thus, the infinite reflectarray can be analyzed as an infinite periodic structure using Floquet’s theorem. According to Floquet’s theorem, the electromagnetic field above the reflectarray is presented as a sum of Floquet modes or plane waves. The condition in Eq. (6) ensures that two of the Floquet modes are plane waves traveling in the direction

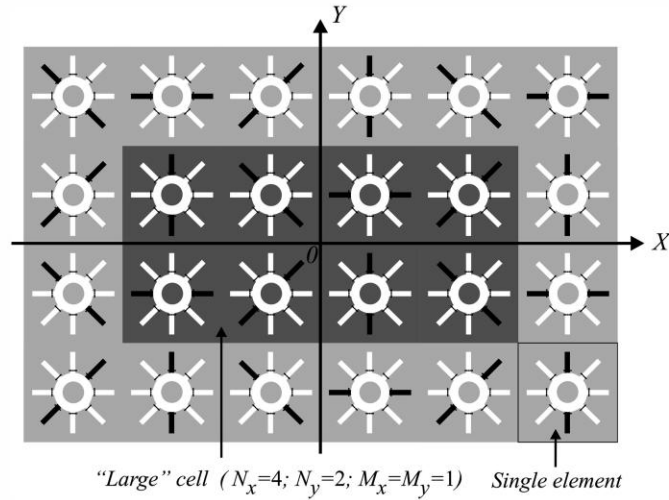


Figure 2. Reflectarray with periodic large cell that contains eight array elements. The excited stubs are shown in black.

determined by the reflection elevation angle θ_0 and the reflection azimuth angle φ_0 . Thus, the reflectarray can be considered as a multimode converter that transforms a normally incident circularly polarized plane wave into a reflected plane wave propagating in a desired direction. The efficiency of the conversion is affected mainly by three factors. The incident circularly polarized plane wave is not only converted into the reflected plane wave traveling in the desired direction, but is partially converted in reflected plane waves propagating in undesired directions. Also, the insertion loss in p-i-n diodes leads to the partial dissipation of the incident wave. Finally, the digital phase shifters produce phase errors that reduce the conversion.

To measure the efficiency of the mode conversion of the infinite reflectarray, it is possible to define a conversion coefficient. This conversion coefficient L_C can be calculated as the ratio between the power density of the reflected plane wave traveling in the desired direction and the power density of the incident circularly polarized plane wave:

$$L_C = \frac{Y_{m1}|R_{m1}|^2 + Y_{m2}|R_{m2}|^2}{2Y_1|A_1|^2}, \quad (7)$$

where A_1 and Y_1 are the magnitude and the admittance of the incident Floquet mode, Y_m is the Floquet modal admittance, R_m is the magnitude of the reflected Floquet mode, and $m1$ and $m2$ are the indices of the two reflected Floquet modes (one TE and one TM) propagating in the desired direction. The above-mentioned mathematical model for the infinite array with a large cell was developed in Martynyuk et al. (2004). We have used this model to optimize the array element.

In order to reduce the number of p-i-n diodes, a particular conformation of the “small” cell with four diodes installed at the stubs with angular positions of 0° , 90° , 225° , and 315° is considered. The other four stubs were short-circuited with metal shorts. A resistance of 2Ω was considered as the model for the switched-on diode, meanwhile a parallel connection of a resistance of $7 \text{ k}\Omega$ and a capacitance of 0.035 pF was used to simulate the switched-off diode.

The geometry of the array element was optimized both to minimize the insertion loss in the p-i-n diodes and to increase the magnitude of the controlled wave at the central frequency of 30 GHz. As a result, the geometry of the small cell has been defined as follows: $b_x = b_y = 6 \text{ mm}$, $r_1 = 1.3 \text{ mm}$, $r_2 = 1.8 \text{ mm}$, $l = 0.72 \text{ mm}$, $h = 0.252 \text{ mm}$, and $d = 2.55 \text{ mm}$. It was considered that all elements were printed on a dielectric substrate with a relative permittivity of 2.56 and thickness of 0.127 mm.

To evaluate the scanning characteristics of the array, six configurations of the designed reflectarray that provide different reflection elevation angles θ_0 (0° , 15° , 24.6° , 30° , 35° , and 38°) at 30 GHz were investigated. The parameters of these configurations are shown in Table 1. As we assume scanning in XOZ -plane, the difference between angular positions in the y -direction, $\Delta\gamma_y$, is set to 0.

The states of the p-i-n diodes in the periodic large cell were calculated according to Eqs. (5) and (6) to obtain different reflection elevation angles θ_0 . The corresponding large cell configurations are shown in Figure 3. Configuration I ($\theta_0 = 0^\circ$) corresponds to the uniform biasing (Figure 3(a)). Thus, a constant phase shift is introduced into the reflected wave, and the normally incident circularly polarized plane wave is reflected in the z -direction. Configuration II ($\theta_0 = 15^\circ$) requires a $\Delta\gamma_x = \pi/13 = 27.7^\circ$, then the positions of the excited stubs in the 13 elements along the x -direction in the large cell must be close to 0° , 27.7° , 55.4° , 83.1° , 110.8° , 138.5° , 166.2° , 193.9° , 221.6° , 249.3° , 277° , 304.7° , and 332.4° . These values are approximated by 0° , 45° , 45° , 90° , 90° , 135° , 180° , 180° , 225° , 270° , 270° , 315° , and 315° , respectively, due to the discrete values of the digital phase shifter (Figure 3(b)). Configuration III ($\theta_0 = 24.6^\circ$) requires a $\Delta\gamma_x = \pi/4 = 45^\circ$; therefore, the positions of the excited stubs in the four elements along the x -direction in the large cell must be set to 0° , 45° , 90° , and 135° . For this case, we can obtain exact phase shifts by the digital phase shifter (Figure 3(c)).

Then, the conversion coefficient in Eq. (7) was simulated. The results of the numerical simulations are shown in Figure 4.

Table 1
Configurations of the designed reflectarray
to provide different reflection elevation angles θ_0
at frequency of 30 GHz

Configuration	θ_0 ($^\circ$)	N_x	M_x	$\Delta\gamma_x$ ($^\circ$)
I	0	1	1	0
II	15	13	2	27.7
III	24.6	4	1	45
IV	30	10	3	54
V	35	29	10	62.1
VI	38	27	10	66.7

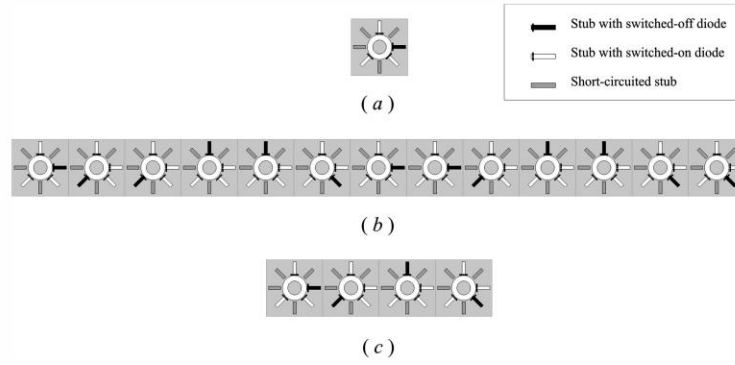


Figure 3. The states of the p-i-n diodes in the periodic large cell for three configurations of the reflectarray.

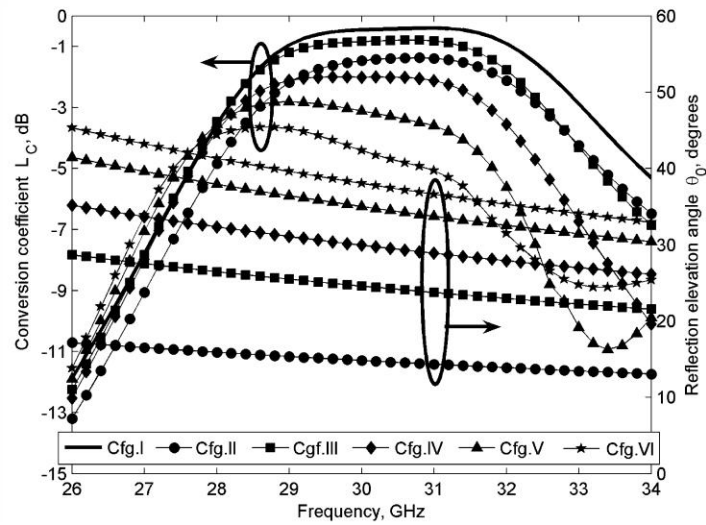


Figure 4. Conversion coefficient and reflection elevation angles for six configurations of the reflectarray.

Configuration I ensures a conversion coefficient better than -2 dB in the frequency range from 28.5 to 32.5 GHz. Configuration II demonstrates the degradation of the conversion coefficient due to the phase errors introduced by the two-bit phase shifters. However, the conversion coefficient is better than -2 dB in the frequency range from 29.14 to 31.9 GHz. Configuration III reveals an improvement in the conversion coefficient due to the exact phase shifts provided in this particular case. Configuration IV ($\theta_0 = 30^\circ$) shows a conversion coefficient better than -2 dB in the frequency band from 29.5 to 30.5 GHz. Configurations V ($\theta_0 = 35^\circ$) and VI ($\theta_0 = 38^\circ$) present a reduction of the conversion coefficient. Mutual coupling, phase errors, and the further increase of the reflection elevation angle contribute to the decrement of the conversion coefficient. According to the results obtained using the infinite model, the reflectarray demonstrates an effective redirection of the incident wave for angles up to 30° with a conversion coefficient better than -2 dB.

The prediction of the scanning characteristics of the infinite reflectarray was achieved using the mathematical model described in Martynyuk et al. (2004). However, as with most of the theoretical and experimental investigations of phased arrays, it is focused in the analysis of an infinite array. Nevertheless, these models and the approaches involved in such analyses tend to be inaccurate for practical medium- and small-sized finite reflectarrays.

In arrays with a strong electromagnetic coupling, the behavior of the elements on the edge of the array differs from the behavior predicted by the infinite array model. In the case of finite arrays, the characteristics of the reflection of the edge elements depend on their relative position in the array (Craeye et al., 2004). Thus, as consequence of the truncation of the infinite periodic structure, the field distributions in each element are different. Therefore, it is necessary to consider the whole problem by calculating the individual fields in each array element. Thus, we have developed a full-wave mathematical model in order to predict the radiation characteristics of a finite reflectarray based on ring slot resonators with radial stubs controlled by p-i-n diodes.

3. Mathematical Model for the Finite Array

Consider a finite reflectarray of the previously described geometry (Figure 5). The elements of this reflectarray are perforated in an infinite perfectly conductive plane of negligible thickness situated at a distance d over a metal screen. The finite reflectarray contains $M = K_x K_y$ elements, where K_x is the number of elements in the x -direction, and K_y the number of elements in the y -direction. A conical horn above the array center is used to form the incident CPW that excites the array elements. To simplify the analysis, the finite reflectarray is divided in two regions: region I, which is the free-space region ($z > 0$) and region II, which is the space between the infinite perfectly conductive plane and the metal screen ($-d \leq z < 0$).

Assume that a spherical wave generated by the horn travels toward the finite array. This wave excites the tangential electric field \vec{E}_τ in the elements. The unknown tangential electric field \vec{E}_τ can be represented as

$$\vec{E}_\tau = \vec{E}_\tau^{sd} + \vec{E}_\tau^{cd}, \quad (8)$$

where \vec{E}_τ^{sd} is the tangential electric field that appears, considering that the incident wave excites the reflectarray without diodes, while \vec{E}_τ^{cd} is the tangential electric field that exists due the electric currents that flow across the diodes.

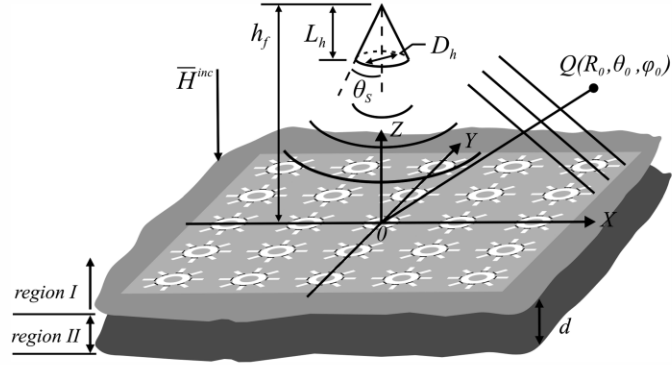


Figure 5. Geometry of the finite reflectarray.

According to the equivalence and image principles applied in region I, the reflected electromagnetic field at the observation point $Q(R_0, \theta_0, \varphi_0)$ in the far-field region can be calculated as the sum of two components. The first component is the electromagnetic field radiated by the image of the horn. The second component is produced by the tangential electric field \vec{E}_τ excited in the elements. This component can be calculated as the radiation of equivalent surface magnetic currents situated at the plane $z = 0$. The equivalent surface magnetic current density \vec{M} can be represented in terms of the tangential electric field \vec{E}_τ as follows:

$$\vec{M} = (\vec{M}^{sd} + \vec{M}^{cd}) = -\vec{a}_z \times \vec{E}_\tau = -\vec{a}_z \times (\vec{E}_\tau^{sd} + \vec{E}_\tau^{cd}), \quad (9)$$

where \vec{M}^{sd} and \vec{M}^{cd} are the surface magnetic current densities corresponding to the unknown tangential electric fields \vec{E}_τ^{sd} and \vec{E}_τ^{cd} , respectively. Therefore, it is necessary to calculate the tangential electric field \vec{E}_τ in order to obtain the reflected electromagnetic field at any point in the far-field region.

3.1. Integro-Differential Equation for the Unknown Tangential Electric Field \vec{E}_τ^{sd}

Applying the equivalence principle, the unknown tangential electric field in the m th element is replaced by an equivalent surface magnetic current above the conductive plane. The total surface magnetic current density can be defined as

$$\vec{M}^{sd} = -\vec{a}_z \times \vec{E}_\tau^{sd}. \quad (10)$$

The integro-differential equation with respect to the unknown tangential electric field \vec{E}_τ^{sd} can be obtained by applying the continuity condition for the tangential magnetic field over the apertures of all the M elements at the plane $z = 0$:

$$\vec{H}_\tau^I(x, y) = \vec{H}_\tau^{II}(x, y), \quad (11)$$

where $\vec{H}_t^I(x, y)$ and $\vec{H}_t^{II}(x, y)$ are the tangential magnetic fields at the plane $z = 0$ in the regions I and II, respectively. To calculate \vec{H}_t^I and \vec{H}_t^{II} , the equivalence principle is used.

Using the image principle at region I, the conductive plane can be removed. As a result, the equivalent magnetic current densities are doubled (Figure 6). The image principle must be applied to the horn, introducing an image of the horn below the conductive plane. Thus, the magnetic field in region I is presented as a sum of three components:

$$\vec{H}^1(x, y, z) = \vec{H}^{inc}(x, y, z) + \vec{H}^{image}(x, y, z) + \vec{H}^{rad}(x, y, z), \quad (12)$$

where \vec{H}^{inc} is the magnetic field produced by the horn, \vec{H}^{image} is the magnetic field produced by the image of the horn, and \vec{H}^{rad} is the magnetic field produced due to the radiation of the equivalent magnetic current densities.

The magnetic field \vec{H}^{rad} is expressed as follows (Balanis, 2005):

$$\vec{H}^{rad} = -\frac{j\omega}{k_0^2} (k_0^2 \vec{F}^1 + \nabla \nabla \cdot \vec{F}^1), \quad (13)$$

where \vec{F}^1 is the magnetic vector potential given by

$$\vec{F}^1 = 2\epsilon_0 \int_{S'} \vec{M}^{sd}(r') \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-jk_0 R}}{R} dS', \quad (14)$$

where $R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2}$ is the distance between the observation point $r(x, y, z)$ and the source point $r'(x', y', 0)$, and S' is the total surface of all apertures.

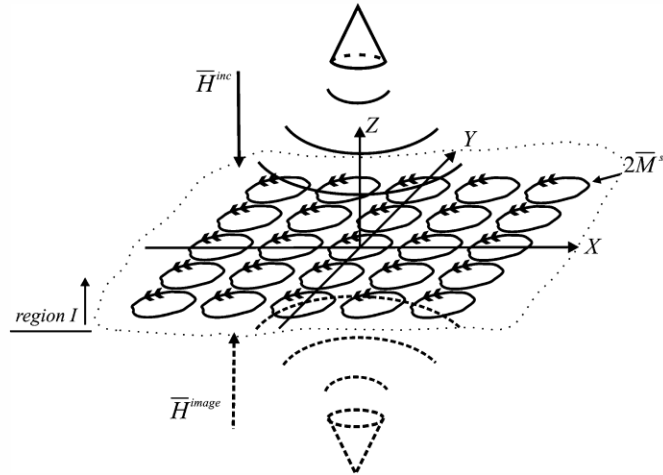


Figure 6. Equivalent surface magnetic currents at region I.

At the plane of the elements ($z = 0$), the incident tangential magnetic field \vec{H}_τ^{inc} is equal to the tangential magnetic field produced by the image of the horn \vec{H}_τ^{image} , so the total tangential magnetic field in region I at $z = 0^+$ is

$$\vec{H}_\tau^I(x, y) = 2\vec{H}_\tau^{inc}(x, y) + \vec{H}_\tau^{rad}(x, y), \quad (15)$$

where $\vec{H}_\tau^{rad}(x, y)$ is the tangential component of the magnetic field $\vec{H}^{rad}(x, y)$.

On the other hand, the magnetic field in region II at $z = 0^-$ is given by

$$\vec{H}^{II}(x, y) = -\frac{j\omega}{k_0^2}(\nabla \cdot \vec{F}^{II} + \nabla \nabla \cdot \vec{F}^{II}), \quad (16)$$

where the magnetic vector potential \vec{F}^{II} is defined as

$$\vec{F}^{II} = -2\varepsilon_0 \int_{S'} \vec{M}^{sd}(r') \frac{1}{4\pi} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jk_0 R'_q}}{R'_q} dS', \quad (17)$$

where $R'_q = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (2qd)^2}$.

The summation term in Eq. (17) takes into account the contributions from the infinite number of images of the surface magnetic currents produced by the parallel conductive planes (Rahmat-Samii, 1978).

To establish the integro-differential equation for the unknown surface magnetic current density \vec{M}^{sd} , the continuity of the tangential magnetic field is imposed at the surface of the M apertures. Substituting Eq. (17) into Eq. (16), and taking into account only the tangential component of the magnetic field $\vec{H}^{II}(x, y)$, the tangential magnetic field \vec{H}_τ^{II} is calculated. In the same manner, using the expressions in Eqs. (13)–(15), the tangential magnetic field \vec{H}_τ^I can be obtained. Then, from Eq. (11), the integro-differential equation is defined as

$$2\vec{H}_\tau^{inc}(x, y) = \frac{j\omega\varepsilon_0}{\pi k_0^2} (k_0^2 + \nabla \nabla) \int_{S'} \vec{M}^{sd}(r') \sum_{q=0}^{\infty} \frac{e^{-jk_0 R'_q}}{R'_q} dS'. \quad (18)$$

Note that the integro-differential equation in Eq. (18) is valid only at the apertures of the elements.

Equation (18) was reduced to system of linear equations using Galerkin's method. Vector expansion functions $\{\vec{\Psi}_n\}$ ($n = 1, 2, \dots, N$) were used as the basis and weighting functions. These vector functions were chosen as the eigenmodes of the coaxial waveguide with rectangular stubs, which has the same cross-section as the aperture of the element.

Then, the system of linear equations can be written in a matrix equation form as follows:

$$[B] = [Y][A_{sd}], \quad (19)$$

where $[B]$ is an excitation vector that takes into account the distribution of the incident magnetic field produced by the horn, $[A_{sd}]$ are the magnitudes of the vector functions that expands the unknown surface magnetic current density \vec{M}^{sd} , and $[Y]$ is the mutual admittance square matrix of order MN that express the electromagnetic coupling between the array elements. The matrix element $Y_{k,l,m,n}$ expresses the mutual admittance

between the k th and the m th apertures, considering the l th and the n th surface magnetic current densities in each aperture, respectively, and can be determined as

$$Y_{k,l,m,n} = \frac{j\omega\epsilon_0}{\pi k_0^2} \int_{S_k} \vec{\Psi}_l^k(x, y) \cdot (k_0^2 + \nabla\nabla) \int_{S'} \vec{\Psi}_n^m(x', y') \sum_{q=0}^{\infty} \frac{e^{-jk_0 R'_q}}{R'_q} dS' dS_k; \quad (20)$$

$$m = 1, 2, \dots, M; \quad n = 1, 2, \dots, N; \quad k = 1, 2, \dots, M; \quad l = 1, 2, \dots, N;$$

where $\vec{\Psi}_n^m(x, y)$ and $\vec{\Psi}_l^k(x, y)$ are the n th and l th vector expansion functions for the m th and k th element, respectively, and S_k is the surface of the k th aperture element.

The mutual admittance represents a quadruple integration; thus, the numerical calculation becomes cumbersome. Therefore, the integrals were simplified using a method similar to that described in Bailey (1996).

With the mutual admittance calculated, it is possible to solve Eq. (20) with respect to the unknown magnitudes A_{sd} and to obtain the tangential electric field \vec{E}_τ^{sd} in the plane of the apertures.

3.2. Integro-Differential Equation for the Unknown Tangential Electric Field \vec{E}_τ^{cd}

The total surface magnetic current density can be defined as

$$\vec{M}^{cd} = -\vec{a}_z \times \vec{E}_\tau^{cd}. \quad (21)$$

The integro-differential equation with respect to the unknown tangential electric field \vec{E}_τ^{cd} can be obtained by applying the continuity condition for the tangential magnetic field across the surface of the aperture with diodes. It must be considered that the magnetic field is not continuous in the region where currents flow across the diodes:

$$\sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^P \vec{J}_m^p = \vec{a}_z \times (\vec{H}_\tau^1(x, y) - \vec{H}_\tau^{\text{II}}(x, y)), \quad (22)$$

where \vec{J}_m^p is the surface electric current density at the p th diode in the m th element, and P is the total number of diodes at the element.

The integro-differential equation was formulated using a mathematical approach similar to the one described in the previous section. In this case, one must take into account that the initial excitation is due to the currents that flow across the diodes and not due to the feeding horn. Thus, excluding the tangential magnetic fields produced by the horn and the image of the horn, $2\vec{H}_\tau^{\text{inc}}$ from \vec{H}_τ^1 in Eq. (15), the integro-differential equation is obtained as follows:

$$-\sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^P \frac{I_m^p}{\delta} \vec{a}_{op} = \vec{a}_z \times \left[\frac{j\omega\epsilon_0}{\pi k_0^2} (k_0^2 + \nabla\nabla) \int_{S'} \vec{M}^{cd}(r') \sum_{q=0}^{\infty} \frac{e^{-jk_0 R'_q}}{R'_q} dS' \right], \quad (23)$$

where I_m^p is the electric current that flows across the p th diode in the m th element, δ is the width of the diode, and \vec{a}_{op} is the unit vector parallel to the p th diode. The geometry

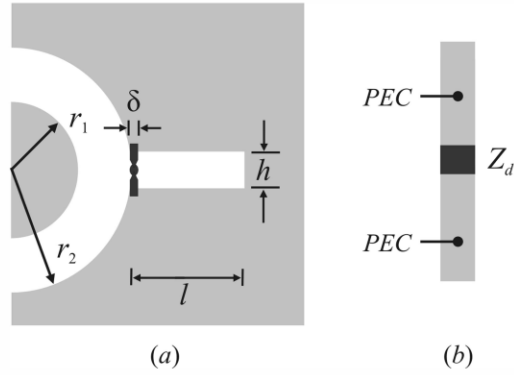


Figure 7. (a) Geometry of the stub with diode and (b) diode model.

of the stub with diode is shown in Figure 7. The diode is modeled as an impedance Z_d with terminals of a perfectly electric conductor (PEC).

Due to the fact that currents I_m^p are unknown, additional equations are needed to solve Eq. (23). Thus, assuming that the size of the diode is negligible with respect to the wavelength, Ohm's law can be applied to each diode to calculate the unknown currents I_m^p . As a result, a system of MP equations is obtained:

$$-\int_{T_1}^{T_2} \vec{E}_\tau \cdot \vec{a}_{op} dl = -\int_{T_1}^{T_2} (\vec{E}_\tau^{sd} + \vec{E}_\tau^{cd}) \cdot \vec{a}_{op} dl = \frac{I_m^p}{Y_{m,p}^d}; \quad (24)$$

$$m = 1, 2, \dots, M; \quad p = 1, 2, \dots, P;$$

where $Y_{m,p}^d$ is the admittance of the p th diode in the m th element, and $T_1 - T_2$ is the direct path across the corresponding diode.

Both Eqs. (24) and (23) were reduced to systems of linear equations using Galerkin's method and were solved simultaneously to calculate the tangential electric field \vec{E}_τ^{cd} in the plane of the apertures. With the total tangential electric field \vec{E}_τ known, it is possible to calculate the electromagnetic field in the far-field region.

Then, the reflected electromagnetic field in the far-field region can be obtained as the sum of the electromagnetic field produced by the radiation of equivalent magnetic surface current densities and the electromagnetic field radiated by the image of the horn.

4. Results of the Numerical Simulation

The radiation characteristics of a 17×17 -element reflectarray were simulated using the developed mathematical model. The geometry of the array element was the same as in the infinite array discussed in Section 2. The reflectarray was illuminated by a conical horn excited by a circularly polarized TE_{11} mode. The diameter D_h and the length L_h of the horn were 2 and 4 cm, respectively. The horn was placed at the distance $h_f = 12.48$ cm

above the array center. The radiated field of the conical horn was calculated as indicated in Choung (1984).

Then, the reflectarray was configured to form the main lobe in the direction determined by different reflection elevation angles θ_0 , setting $\varphi_0 = 0^\circ$ (assuming the scanning in the XOZ -plane at the frequency of 30 GHz). A simple trigonometric relation (Han & Chang, 2003) was used to calculate the required phase shifts introduced by the array elements to ensure a linearly distributed phase shift in the reflected wave. When the required phase shift introduced by each element is known, it is possible to determine the diode that has to be switched-off in each element.

The electromagnetic field radiated by the array in the far-field region was calculated using the previously described mathematical model. Then, the reflectarray gain and the aperture efficiency were calculated.

The aperture efficiency of the array was expressed as follows:

$$\varepsilon_{ap} = \frac{\lambda^2}{4\pi A_f} G, \tag{25}$$

where A_f is the physical area of the array, and G is the reflectarray gain.

The dependence of the aperture efficiency ε_{ap} on the reflection elevation angle θ_0 is presented in Figure 8. Also, in the same figure, the reflectarray gain $G(\theta_0)$ is shown for convenience.

According to the results presented in Figure 8, the maximum aperture efficiency corresponds to the reflection elevation angle θ_0 equal to 0° . In this case, the aperture efficiency is 0.37. In general, the aperture efficiency of the reflectarray is mainly affected

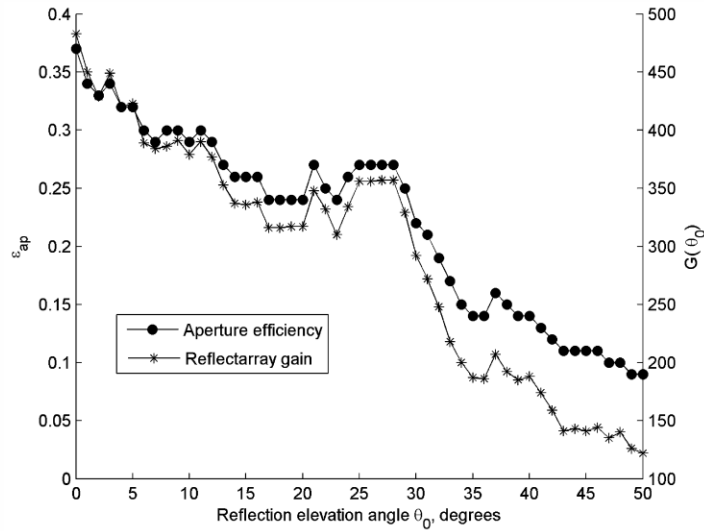


Figure 8. Aperture efficiency and gain of the finite reflectarray at the frequency of 30 GHz.

by four factors: (1) the nonuniformity of the amplitude distribution over the array surface (taper efficiency), (2) the power loss due to radiation from the feed not intercepted by the surface of the array (spillover efficiency), (3) the insertion loss due to the nonideality of the p-i-n diodes, and (4) the phase errors introduced by two-bit phase shifters. Thus, the overall aperture efficiency can be obtained by the product of the above-mentioned factors.

The influence of the first and second factors can be estimated in the same manner as it is performed for the reflector antennas. According to Balanis (2005), the degradation of the aperture efficiency due to the nonuniform amplitude distribution and spillover phenomena depends on the value of reflector half-angle θ_S and the feed pattern. For our case, the reflector half-angle is equal to 22° , meanwhile the half-power beamwidth of the horn is equal to 33.4° . Thus, the calculated values for taper efficiency and spillover efficiency are equal to 0.97 and 0.73, respectively.

The power loss due to the non-ideality of the p-i-n diodes is approximately 0.5 dB, and the degradation of aperture efficiency because of the phase errors introduced by the two-bit phase shifters is estimated as 0.92 dB according to Smith and Guo (1983). Thus, the overall calculated aperture efficiency ε_{ap} is equal to 0.5. The difference between simulated aperture efficiency (0.37) and theoretical aperture efficiency (0.5) can be explained by the reflection characteristics of the array elements. The elements on the edge of the array illuminated by the inclined incident waves do not demonstrate the same behavior as the central elements fed by the quasi-normally incident waves. The reciprocal effect can be observed in Figure 4 as the reduction of the conversion coefficient with the increasing of the reflection elevation angle θ_0 in the case of infinite array model. The same effect is observed for the finite array in Figure 8. One can observe that, as the reflection elevation angle θ_0 increases, the aperture efficiency of the array decreases. Also, the optimization of the array element was performed considering an infinite periodic environment. Thus, the elements on the edge of the structure demonstrate a behavior far from optimum because of the substantial change in the boundary conditions. Furthermore, the performance of the elements was optimized for the incident wave of circular polarization. However, the horn feed used in the simulations provides an elliptical polarization illumination with axial ratio of 2.5 dB for the edge of the array. This fact leads to the further deterioration of the performance for the edge elements.

The degradation of the reflectarray gain L_G as a function of the reflection elevation angle θ_0 was estimated as the ratio between the gain of the reflectarray $G(\theta_0)$ in the direction determined by the reflection elevation angle θ_0 and the gain of the reflectarray G_0 in the direction perpendicular to the reflectarray plane considering lossless p-i-n diodes:

$$L_G = \frac{G(\theta_0)}{G_0}. \quad (26)$$

The degradation of the finite reflectarray gain as function of reflection elevation angle θ_0 is shown in Figure 9. According to Figure 9, the simulated reflectarray is still efficient for reflection elevation angles up to 30° . For this case, the aperture efficiency degrades 2.25 dB as compared with the case of θ_0 equal to 0° . The conversion coefficient L_C for various configurations of the infinite reflectarray at 30 GHz is shown at the same figure. The six configurations investigated in Section 2 are marked in the figure. Note that the degradation of the reflectarray gain is similar to the reduction of the conversion coefficient in the case of infinite array.

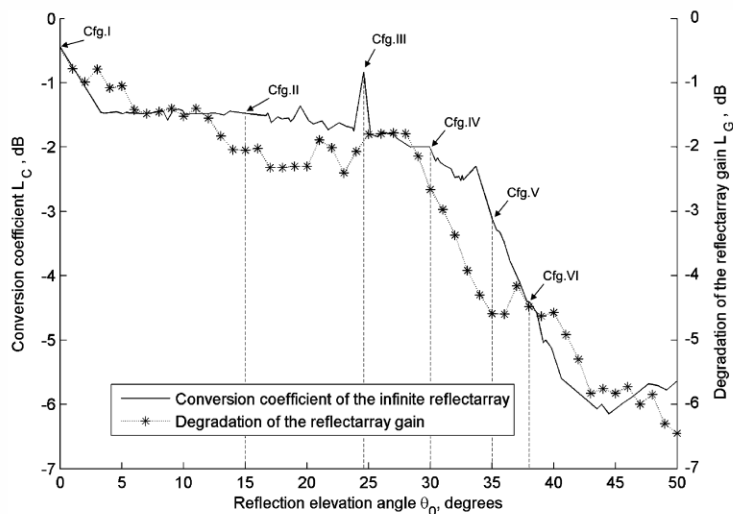


Figure 9. Comparison between the conversion coefficient of the infinite array model and the degradation of the reflectarray gain calculated by the finite array model at the frequency of 30 GHz.

For the reflection elevation angle θ_0 equal to 24.6° , we can observe that the model of infinite array predicts better performance than the finite model. However, for this particular case, the large cell contains four small cells, and the phase difference between the adjacent elements must be set to 90° according to Eq. (4). Thus, two-bit phase shifters provide the exact phase shifts, and the corresponding conversion coefficient demonstrate nearly a 1-dB improvement.

Figure 10 illustrates the simulated radiations pattern $F(\theta, \varphi)$ of the finite reflectarray for different reflection elevation angles θ_0 . In Figure 10(a), the radiation characteristic is shown for the reflection elevation angle θ_0 equal to 0° . The shape of the main lobe is well formed, and the side lobe level is below -18 dB. The reflectarray gain is 26.8 dB_i. Figure 10(b) corresponds to the reflection elevation angle θ_0 equal to 20° . In this case, the side lobe level is below -13 dB, and the reflectarray gain decreased to 25 dB_i. The radiation pattern for the reflection elevation angle θ_0 equal to 30° is shown in Figure 10(c). As could be expected, the side lobe level increases (-13.6 dB), meanwhile the gain of the reflectarray decreases (24.6 dB_i).

With the distance of 0.6λ , or 6 mm, between the elements, the maximum of the grating lobe appears at the visible space for the reflection elevation angles θ_0 greater than 42° . However, the drastic degradation of the aperture efficiency predicted by the model of the infinite array starts for the reflection elevation angles θ_0 greater than 34° .

The calculations according to the model of the finite array predict the degradation of the aperture efficiency for reflection elevation angles greater than 30° . It should be taken into account that, for the case of a uniformly excited equidistant linear array, the first grating lobe partially appears in the visible space when the distance b_x , b_y between

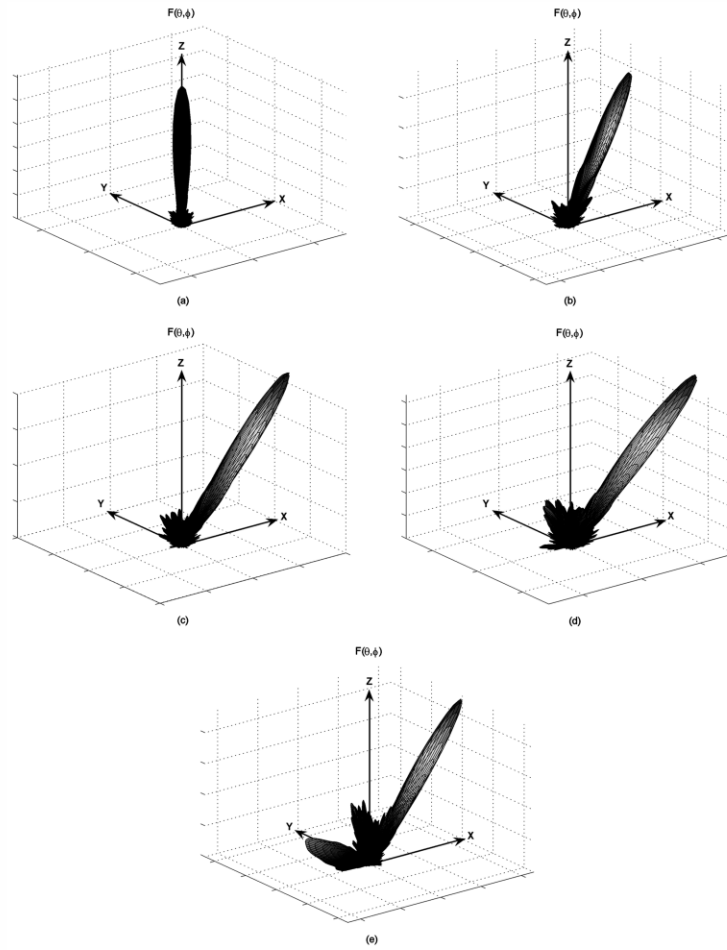


Figure 10. Radiation patterns of the finite reflectarray for different reflection elevation angles θ_0 ($\phi_0 = 0$) at the frequency of 30 GHz: (a) $\theta_0 = 0^\circ$, $\varepsilon_{ap} = 0.37$, $G = 483$; (b) $\theta_0 = 20^\circ$, $\varepsilon_{ap} = 0.24$, $G = 317$; (c) $\theta_0 = 30^\circ$, $\varepsilon_{ap} = 0.22$, $G = 292$; (d) $\theta_0 = 35^\circ$, $\varepsilon_{ap} = 0.14$, $G = 187$; and (e) $\theta_0 = 45^\circ$, $\varepsilon_{ap} = 0.11$, $G = 141$.

the elements is given by

$$\begin{aligned} \frac{K_x - 1}{K_x} \frac{\lambda}{1 + |\sin \theta_0|} < b_x < \frac{\lambda}{1 + |\sin \theta_0|}, \\ \frac{K_y - 1}{K_y} \frac{\lambda}{1 + |\sin \theta_0|} < b_y < \frac{\lambda}{1 + |\sin \theta_0|}. \end{aligned} \quad (27)$$

In the case of the 289-element uniformly illuminated array, the grating lobe should partially appear for reflection elevation angles θ_0 greater than 34.5° . The appearance of the grating lobe at the visible space as the reflection elevation angle θ_0 increases can be observed in Figure 10(d) ($\theta_0 = 35^\circ$). Additionally, it can be observed in Figures 10(d) and 10(e) ($\theta_0 = 45^\circ$) that the magnitude and the number of side lobes increase for reflection elevation angles greater than 35° . Analysis of the polarization of the reflected wave reveals that the increment of the magnitude of the side lobes is due to the cross-polarization radiation. Thus, the increase of the side lobes can be explained from the increment of the magnitude of the uncontrolled wave from Eq. (2).

5. Conclusions

A full-wave mathematical model was developed in order to predict the radiation characteristics of a spiraphase-type finite reflectarray based on ring slot resonators with radial stubs controlled by p-i-n diodes. Radiation characteristics of the 289-element phased array were calculated using the developed mathematical model. According to the simulated characteristics, the optimized reflectarray provides electronic scanning in the XOZ -plane for scanning angles up to 30° with total aperture efficiency better than 0.22. The characteristics obtained with the developed mathematical model were compared with the simulated characteristics calculated with the mathematical model of the infinite array. As a result, it was proven that the infinite mathematical model is able to predict the possible scanning sector of the array, meanwhile the mathematical model of the finite array is necessary to obtain the radiation characteristics of the array.

References

- Bailey, M. C. 1996. *Closed-form evaluation of mutual coupling in a planar array of circular apertures*. Report No. TP-3552, NASA.
- Balanis, C. A. 2005. *Antenna theory: Analysis and design*, 3rd ed. Hoboken, NJ: Wiley Interscience.
- Chang, D. C., & M. C. Huang. 1992. Microstrip reflectarray antenna with offset feed. *Electron. Lett.* 28:1489–1491.
- Choung, Y. H. 1984. Sum and tracking radiation patterns of a conical horn. *IEEE Trans. Antennas Propagat.* AP-32:1288–1291.
- Craeye, C. A., G. Tijhuis, & D. H. Schaubert. 2004. An efficient MoM formulation for finite-by-infinite arrays of two-dimensional antennas arranged in a three-dimensional structure. *IEEE Trans. Antennas Propagat.* AP-52:271–282.
- Fox, A. 1947. An adjustable waveguide phase changer. *Proc. PIRE* 35:1489–1498.
- Han, C., & K. Chang. 2003. Ka-band reflectarray using ring elements. *Electron. Lett.* 39:491–493.
- Huang, J. 1991. Microstrip reflectarray. *Proceedings of the IEEE International Symposium on Antennas Propagation*, Ontario, Canada, June, 612–615.
- Huang, J. 1995. Bandwidth study of microstrip reflectarray and a novel phased reflectarray concept. *Proceedings of the IEEE International Symposium Antennas Propagation*, Newport Beach, CA, June, 582–585.

- Huang, J., & R. J. Pogorzelski. 1998. A Ka-band microstrip reflectarray with elements having variable rotation angles. *IEEE Trans. Antennas Propagat.* AP-46:650–656.
- Kelkar, A. 1991. FLAPS: Conformal phased reflecting surfaces. *Proceedings of the IEEE National Radar Conference*, Los Angeles, CA, March, 58–62.
- Martynyuk, A. E., A. G. Martinez-Lopez, & J. I. M. Lopez. 2006. Two-bit X-band reflective waveguide phase shifter with BCB-based bias circuits. *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* MTT-54:4056–4061.
- Martynyuk, A. E., J. I. Martinez Lopez, & N. A. Martynyuk. 2003. Reflective passive phased array with open polarization phase shifters. *IEEE International Symposium on Phased Array Systems and Technology*, Boston, MA, October, 482–487.
- Martynyuk, A. E., J. I. Martinez Lopez, & N. A. Martynyuk. 2004. Spiraphase-type reflectarrays based on loaded ring slot resonators. *IEEE Trans. Antennas Propagat.* AP-52:142–153.
- Munson, R. E., H. Haddad, & J. Hanlen. 1987. *Microstrip reflectarray antenna for satellite communication RCS enhancement or reduction*. U.S. Patent No. 4684952.
- Phelan, H. R. 1976. Spiraphase—a new, low cost phase array. Part I. Theory concepts. *Microw. J.* 19:41–44.
- Phelan, H. R. 1977. Spiraphase reflectarray for multitarget radar. *Microw. J.* 20:67–73.
- Pozar, D. M., & T. A. Metzler. 1993. Analysis of a reflectarray antenna using microstrip patches of variable size. *Electron. Lett.* 29:657–658.
- Rahmat-Samii, Y. 1978. Electromagnetic pulse coupling through an aperture into a two-parallel-plate region. *IEEE Trans. EMC EMC-20:436–442*.
- Smith, M. S., & Y. C. Guo. 1983. A comparison of methods for randomizing phase quantization errors in phased arrays. *IEEE Trans. Antennas Propagat.* AP-45:821–828.
- Wang, J. J. J. 1983. Characteristic of a new class of diode-switched integrated antenna phase shifter. *IEEE Trans. Antennas Propagat.* AP-31:156–159.

Reflectarray Based on Three-Bit Spatial Phase Shifters: Mathematical Model and Technology of Fabrication

Alexander E. Martynyuk^{#1}, Jesus Rodriguez Zamudio^{#2}, Ninel A. Martynyuk^{#3}

[#]*Division de Ingenieria Electrica, Facultad de Ingenieria, Universidad Nacional Autonoma de Mexico
DIT, DIE, F. de Ingenieria, UNAM, Cd Universitaria, Coyoacan, Mexico, D.F, Mexico*

¹alxmart@yahoo.com

²jesusdod@yahoo.com

³ninel_mart@yahoo.com

Abstract— The reflectarray based on three-bit spatial phase shifters is analyzed. A full-wave mathematical model was developed for the analysis of the array. This mathematical model was used to design and to optimize the reflectarray for the central frequency of 20 GHz. It is demonstrated that this reflectarray can reflect an incident circularly-polarized wave in the directions determined by the elevation angles up to 38° in a frequency band from 18.3 to 20.5 GHz. Also, the technological aspects of the reflectarray fabrication are discussed.

I. INTRODUCTION

Reconfigurable reflectarrays are considered as an interesting solution that improves the key parameters of the modern communication and radar systems [1,2]. The main advantage of the passive reflectarray over other types of antennas with electronic steering is a simple design and relatively low cost. However, the main difficulty that delays the design and implementation of the passive reflectarrays with electronic scanning is the absence of the low-cost low-loss phase shifters integrated with the reflectarray elements.

Up-to-date two basic approaches have been used to design the phase shifting elements in the reflectarrays [3]. According to the first approach, a reflective phase shifter is connected to the reflectarray element through specially provided electromagnetic coupling [4]. The main advantage of this method consists in the possibility to divide the design of reflective phase shifting element in two relatively independent parts: design of the phase shifter and design of the reflectarray element. Thus, standard phase shifters such as a loaded-line phase shifter or a switched-line phase shifter can be used in this case and a state-of-art performance is obtained in a relatively short period of time [5]. However, at the present time the standard phase shifters based on relatively low-impedance lines such as a microstrip line or a coplanar waveguide demonstrate an elevated level of insertion loss due to the considerable insertion loss in these transmission lines. With special measures the insertion loss level in the coplanar waveguide can be reduced to 0.15dB/cm at the X-band frequencies [5]. As a result, a standard phase shifters, including those based on quasi-ideal MEMS switches, are characterized by a significant level of insertion loss.

According to the second approach, electronically reconfigurable elements are used [6,7]. These elements can be treated as reflective elements combined with phase shifters or spatial phase shifters. In this case, the electronic switches are introduced directly in the reflectarray element permitting fast reconfiguration of the element structure. As a result of electronic tuning, the reconfigurable element reflects the incident wave with the required phase and ensures the electronic scanning. Potentially, the reconfigurable elements ensure a lower level of insertion loss as compared with elements connected to the standard phase shifters due to the absence of the dissipative transmission lines. However, in this case, special attention should be paid to the mathematical modeling and optimization of the element because the mutual coupling between the pair of two adjacent elements depends on the actual state (or geometry) of these elements.

Different designs of electronically reconfigurable elements have been used. An effective technique was proposed in [8] resulting in a reflectarray with mechanically-reconfigurable elements. It was suggested that a mechanical rotation of the spiral reflectarray element on the angle γ leads to the phase shift 2γ the reflected circularly polarized wave (CPW). Later, the spiraphase array with spiral electronically-reconfigurable elements was introduced by Phelan [9]. The main idea of the spiraphase technique is the usage of electronic simulation of mechanical rotation. Thus, the commutation of the switches is equivalent to the mechanical rotation of the element in the spiraphase array.

The above-mention ideas have been widely used in the recent times. A reflectarray based on microstrip patches having different angular rotations was presented in [10]. It was demonstrated in [11] that spiraphase-type reflectarrays with shorted ring slots ensure wide-angle scanning in a 17% frequency band. Later, the reflectarray based on the dual structure (metal rings with two gaps) was investigated and fabricated [12]. Different spiraphase-type elements have been analyzed in [13]. The spiraphase-type elements that can ensure the operation of the reflectarray in more than 2:1 band were investigated in [14]. The interesting ideas about transmission-type spiraphase arrays that permit to increase

significantly the bandwidth of the array were expressed in [15].

However, despite of the significant progress in the spiraphase techniques, various problems had been detected. Initially, it was stressed that the classical spiraphase element based on spiral elements can not ensure the optimum transformation of the p-i-n diode impedances and wide-band operation [16]. As a result, a cross-polarization radiation increases rapidly and the element operates in a relatively narrow frequency band. Also, the design of the biasing circuits becomes a problem because in the real array it is necessary to bias hundreds of switches situated in a one plane. The conventional bias circuits operate in a narrow frequency band and demonstrate poor decoupling between microwave signals and control voltages that results in the increasing of insertion loss and degradation of the radiation characteristics.

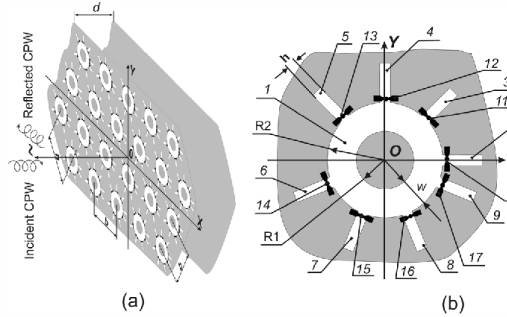


Fig. 1 (a) A spiraphase-type reflectarray (b) Three-bit spatial phase shifter

In this work, the spiraphase-type array with elements based on a ring slot resonator with radial stubs is analyzed. This element is equivalent to the three-bit spatial phase shifter for the incident CPW. Also, a new fabrication technology that ensures wide-band high-quality bias circuits is proposed.

II. PRINCIPLE OF OPERATION

A spiraphase-type reflectarray based on three-bit spatial phase shifters is shown in Fig. 1 (a). This array can be considered as an array of slot resonators arranged in an equilateral triangular grid with a period b and situated at a distance d over a metal screen.

A single element of the array is shown in Fig. 1 (b). This element can be considered as a system of slot resonators, which consists of a ring slot l and eight radial stubs $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ and 9 that form with the x -axis the angles $0, 45, 90, 135, 202.5, 247.5, 292.5$ and 337.5 degrees, respectively. The switching diodes $10, 11, 12, 13, 14, 15, 16$ and 17 are connected in parallel to the radial stubs. At each moment of time one diode is switched-off and other seven diodes are switched-on.

Now assume that in a certain moment of time the diode 10 installed in the stub 2 is switched-off. For the incident wave of the horizontal polarization the element shown in Fig. 2 is

equivalent to the ring slot resonator because this wave cannot excite the stub 10 due to the boundary conditions and the other seven stubs are shorted by the switched-on diodes. Thus, the array of the elements is equivalent to the frequency selective surface (FSS) based on the ring slot resonators. When the perimeter of the ring slot resonator is approximately equal to the wavelength λ , this FSS is transparent for the incident horizontally-polarized wave at the resonant frequency ω_p . With the metal screen situated at the distance $\lambda/4$, the array of described elements ensures the reflection coefficient Γ_{\perp} that is approximately equal to 1 for the incident horizontally-polarized wave.

However, the vertically-polarized wave excites stub 10. The inductance L_s of the outer wall of the ring slot together with the capacitance of the switched-off diode forms a series resonant circuit. Thus, for the incident wave of vertical polarization the array is equivalent to the series resonant circuit. At the series resonant frequency ω_s the reflection coefficient Γ_{\parallel} for the incident wave of horizontal polarization is approximately equal to -1.

Thus, due to the different states of the diodes, the reflective element provides different reflection coefficients Γ_{\parallel} and Γ_{\perp} between two reflected linearly-polarized waves with polarization planes orthogonal and parallel to the stub with the switched-off diode, respectively.

Now assume that a circularly-polarized (CP) plane wave travels in the negative z direction as it is shown in Fig. 1 and all the array elements are configured in the same manner with the switched-off diode installed in the horizontal stub. The electric field of the incident CPW can be expressed as follows:

$$\vec{E}_i = E_0 (\vec{a}_x + j\vec{a}_y) e^{jkz}, \quad (1)$$

where E_0 is the magnitude of the incident wave, \vec{a}_x and \vec{a}_y are the unit vectors in x and y directions, respectively; k is the wavenumber and $j = \sqrt{-1}$.

According to [16] and [17], the electric field vector \vec{E}_r of the reflected wave can be presented as a sum of two components:

$$\vec{E}_r = 0.5E_0 e^{2j\gamma} (\Gamma_{\perp} - \Gamma_{\parallel}) (\vec{a}_x - j\vec{a}_y) e^{-jkz} + 0.5E_0 (\Gamma_{\perp} + \Gamma_{\parallel}) (\vec{a}_x + j\vec{a}_y) e^{-jkz} \quad (2)$$

where γ is the angle between the OX axis and the stub where the switched-off diode is installed.

The first component of (2) is a CPW with the same direction of rotation as vector \vec{E}_i , which is the incident wave. The phase of this "controlled" wave depends on the angular position of the stub with the switched-off diode. The

second component is an “undesired” wave with uncontrolled phase. To suppress this “undesired” wave, it is necessary to ensure the following condition:

$$\Gamma_{\perp} = -\Gamma_{\parallel}. \quad (3)$$

Condition (3) expresses the polarization principle of phase changing. The reflective element has to ensure a differential phase shift of π between two orthogonal linearly-polarized components of the reflected circularly-polarized wave.

When condition (3) is fulfilled, the switching of the diodes leads to the simulation of mechanical rotation of the element on the angles 0, 22.5, 45, 67.5, 90, 112.5, 135, and 157.5 degrees. Thus, the array of uniformly-loaded elements can be treated as spatial three-bit reflective phase shifter for the normally-incident circularly polarized plane wave.

As it was shown, the reflective optimized element provides a differential phase shift of π between two reflected linearly-polarized waves with polarization planes parallel and orthogonal to the stub with the switched-off diode, respectively. However, according to (3), the reflection coefficients Γ_{\parallel} and Γ_{\perp} need to have the same magnitudes. In the case of real p-i-n diodes the magnitudes of the reflection coefficients are less than 1 due to the dissipative loss in the non-ideal diodes. Therefore, one needs to ensure the optimum transformation of the p-i-n diodes impedances in order to obtain the same magnitudes of Γ_{\parallel} and Γ_{\perp} . The described reflective element provides this optimum transformation of the impedances. Meanwhile the period b of the array is constant, the increment of the ring slot width w leads to the increasing of the inductance L_s that forms series resonant circuit. Thus, the magnitude of the reflection coefficient Γ_{\parallel} increases. At the same time, the increasing of the ring slot width w results in the decrement of the magnitude of the reflection coefficient Γ_{\perp} . Thus, the equal magnitudes of the reflection coefficients Γ_{\parallel} and Γ_{\perp} can be obtained with the help of optimization of ring slot width w .

The principle of operation of the described three-bit reflective spatial phase shifter is simple. However, a strong mutual coupling exists between the adjacent elements of the array. Furthermore, this mutual coupling strongly depends on the current state of the adjacent phase shifters. Thus, a full-wave mathematical model had been developed to predict adequately the reflectarray characteristics.

III. MATHEMATICAL MODEL

The reflectarray is analyzed as an infinite periodic structure using the Floquet’s theorem. The three-bit spatial phase shifters are situated at the nodes of an equilateral triangular lattice with a period b (Fig. 3). The “small” cell of the array contains only one spatial phase shifter.

Now assume that the normally incident right-hand CPW travelling towards the array needs to be redirected in the

desired direction determined by the reflection elevation angle θ_0 and reflection azimuth angle φ_0 . To do this, we have to ensure incremental phase shifts ψ_{η} and ψ_{σ} between adjacent elements in the η and σ directions (Fig. 3), respectively.

Thus, the difference between the angular positions of the stubs with switched-off diodes for two small adjacent cells in the η and σ directions ($\Delta\gamma_{\eta}$ and $\Delta\gamma_{\sigma}$, respectively) in the ideal case must be set to:

$$\begin{aligned} \Delta\gamma_{\eta} &= \psi_{\eta}/2 = -bk \sin \theta_0 \cos \varphi_0/2 \\ \Delta\gamma_{\sigma} &= \psi_{\sigma}/2 = -bk \sin \theta_0 \cos(\varphi_0 - \pi/3)/2 \end{aligned} \quad (4)$$

However, for the three-bit digital spatial phase shifter the differences in the angular positions $\Delta\gamma_{\eta}$ and $\Delta\gamma_{\sigma}$ calculated according to (4) must be approximated by the nearest possible angle. Nevertheless, the nonuniform angular positions of the elements destroy the periodicity of the array. However, the reflective array can be converted into a periodic structure with a “large” periodic cell that contains N_{η} and N_{σ} adjacent “small” cells in the η and σ directions, respectively, when this “large” cell repeats periodically in the η and σ directions.

For this case, the reflectarray can be analyzed as an infinite periodic structure with a “large” periodic cell. According to Floquet’s theorem, the reflected electromagnetic field above this reflectarray is presented as a sum of Floquet modes or plane waves. Many of these Floquet modes are propagating plane waves in different directions due to the considerable size of the “large” cell. Furthermore, an approximate fulfilment of the condition (4) ensures that two of the reflected Floquet modes (one TE and one TM) are plane waves propagating in the desired direction.

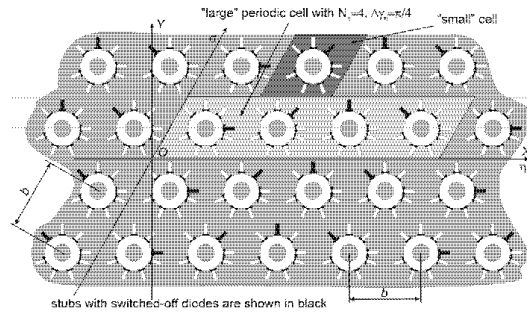


Fig. 2. Geometry of the reflectarray for $N_{\eta} = 4$, $N_{\sigma} = 1$, $\Delta\gamma_{\eta} = \pi/4$, and $\Delta\gamma_{\sigma} = 0$

Thus, one can consider the infinite reflective array as a converter that transforms an incident CPW (two incident Floquet modes) into an elliptically polarized reflected plane wave (two reflected Floquet modes) traveling in the desired direction. To evaluate the efficiency of this conversion, a conversion coefficient L_c can be defined [11] as a ratio

between the power density of the “desired” Floquet modes and the power density of the incident Floquet modes.

A system of integral equations was formulated and resolved using the method of moments in the same manner as it was done in [17] in order to calculate the conversion coefficient L_c .

IV. RESULTS OF NUMERICAL SIMULATIONS

A developed full-wave mathematical model was used to optimize the three-bit spatial phase shifter for the operation at the central frequency of 20 GHz. The optimization goal was to ensure the differential phase shift of π in the wide frequency band and to achieve the equal magnitudes of the reflection coefficients Γ_{II} and Γ_I with the aim to suppress the cross-polar undesired component.

As a result, the geometry of the array was determined as follows: the equilateral triangular lattice size b was equal to 9.9 mm, the inner radius of the ring slot $R1$ was 2.35 mm and the outer radius $R2$ was 3.15mm. The length of the stub ℓ was set to 1.25 mm and the height of the stub h was determined as 0.54 mm. A dielectric substrate of relative permittivity ϵ_r of 2.2 and thickness of 0.127mm was considered. The distance d between the metal screen and the substrate with printed elements was 2.97 mm. The parameters of the HPND4038 diode were used in the simulations.

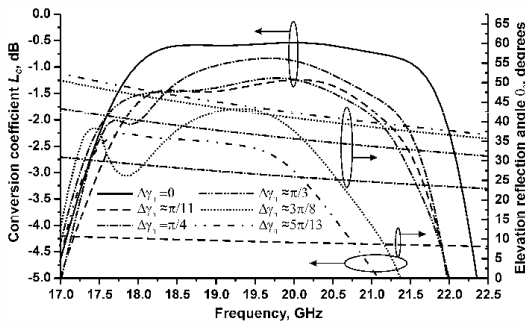


Fig.3. Reflection characteristics (conversion coefficient L_c y reflection elevation angle θ_0) for the different configurations of the reflectarray.

Then the scattering of the normally-incident circularly-polarized wave on the above-mentioned infinite reflectarray was simulated. The simulations were performed for the different $\Delta\gamma_\eta$, meanwhile the $\Delta\gamma_\sigma$ was always set to 0. This situation corresponds to the scanning in the plane $\varphi_0 = 150$ degrees. The simulated reflection characteristics of the reflectarray are presented in Fig. 3.

For the case of uniform loading (all switched-off diodes are installed in the horizontally-oriented stubs), the reflectarray converts the normally incident CPW into the normally reflected CPW with the same direction of rotation of the electric field vector. This conversion is better than -1dB in the frequency band from 18 to 21.5GHz. The conversion loss in

the center of the band exists due to the insertion loss in the p-i-n diodes. At the edge of the band the conversion coefficient degrades rapidly because it is difficult to maintain a differential phase shift of π between the reflection coefficients in the wide frequency band.

However, the operational band reduces significantly for the case of non-uniform angular positions of the stubs with the switched-off diodes. For example, when the reflectarray is configured to ensure the reflection elevation angle θ_0 of 8 degrees at the frequency of 20 GHz ($\Delta\gamma_\eta$ must be equal to $\pi/11$ for this case), the conversion coefficient is better than -1.5 dB in the frequency band from 18.2 to 20.7 GHz. The reduction of the frequency band can be explained from various reasons. First of all, the new configuration of the reflectarray leads to the new mutual coupling between the array elements. Thus, the optimum achieved for the uniform angular positions of the switched-off diodes is not valid for this case. Furthermore, due to the digital nature of the spatial phase shifter, it is impossible to ensure the exact condition $\Delta\gamma_\eta = \pi/11$. As a result, the phase errors appear and the conversion coefficient decreases. Note, that the reflection elevation angle θ_0 is a function of frequency in the spiraphase-type phased array because the phase shift introduced by the elements is frequency independent.

The interesting case occurs when the reflectarray is reconfigured to ensure the reflection elevation angle θ_0 equal to 26 degrees at the frequency of 20GHz. According to (4) the $\Delta\gamma_\eta$ is equal to $\pi/4$ and the three-bit spatial phase shifters are able to provide the exact phase shift. At the Fig.3 one can observe the 0.3dB improvement in the calculated conversion coefficient.

According to the simulation results, the efficiency of the reflectarray decreases rapidly for the reflection elevation angles θ_0 larger than 40 degrees. In this case the reflectarray is close to the regime when the first grating lobe appears in the visible space. However, the analysis of the Fig. 3 permits to get a conclusion that an optimized reflectarray ensures the reflection elevation angles up to 38 degrees with moderate conversion coefficients better than 1.5dB in a frequency band from 18.3 to 20.5 GHz.

V. TECHNOLOGY OF FABRICATION

In the case of the passive phased arrays special attention should be paid to the suppression of the insertion loss in the bias circuits of phase shifters.

In the previous works, the authors had fabricated the Ka-band reflectarray module with low-loss phase shifters based on circular waveguides operating at Ka band. Low insertion loss was ensured due to the usage of the special technology proposed by Skachko [18]. According to this technology, a thick polished copper plate was used as a substrate. Thin SiO_2 -Cu dielectric-metal layers were deposited on the substrate surface in order to form bias circuits. This approach

ensures a significant suppression of insertion loss in the bias circuits. However, a precise mechanical processing for thick metal substrates such as electroerosion technique is needed to obtain the geometry of the diaphragm. Thus, the fabrication costs of this diaphragm are high.

So, an original technology is proposed to fabricate low-loss bias circuits. According to this technology, the array elements are printed on the standard Rogers 5880 substrate. Then the benzocyclobutene (BCB) isles are patterned on the top of copper cladding (Fig 4). The thickness of the BCB film is $5\ \mu\text{m}$. At the next step the copper conductors are formed above the BCB isles. Finally, beam lead p-i-n diodes are installed. The dielectric properties of the BCB combined with BCB film thickness permit to fabricate the microstrip lines of extremely-low characteristic impedance.

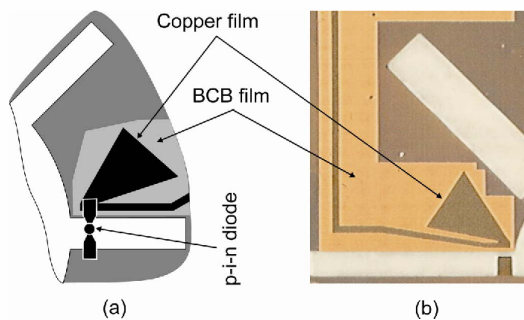


Fig. 4 A proposed technology for the fabrication of bias circuits (a) General concept (b) Fabricated circuit without p-i-n diode installed.

It was experimentally proven [19,20] that these bias circuits based on these extremely-low impedance lines demonstrate extremely low-loss wideband operation. For example, the fabricated 2-bit X-band phase shifter based on p-i-n diodes demonstrated insertion loss level less than 0.4 dB in the frequency band from 9.8 to 11.4 GHz for all four phase states of the phase shifter.

VI. CONCLUSIONS

The reflectarray based on the three-bit spatial phase shifters situated at the nodes of equilateral triangular grid had been analyzed using the developed full-wave mathematical model. This full-wave model permits to simulate the reflectarray operation taking into account the mutual coupling between differently-reconfigured elements.

The optimized reflectarray can redirect the incident CPW in the directions determined by the reflection elevation angles up to 38 degrees with a conversion loss less than 1.5 dB in the frequency band from 18.3 to 20.5 GHz.

The original technology for the fabrication of reflectarray was proposed to reduce insertion loss in the bias circuits.

ACKNOWLEDGMENT

This work was partially supported by CONACYT 79832 project and PAPIIT IN1042063 project.

REFERENCES

- [1] S.V. Hum, M. Okoniewski, and R.J. Davies, "Modelling and design of electronically tunable reflectarrays," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Vol. 55, no.8, pp. 2200-2210, Aug. 2007.
- [2] J. Huang, and J.A. Encinar, *Reflectarray antennas*, Wiley-IEEE Press, 2007.
- [3] R. Sorrentino, "Reconfigurable reflectarrays based on RF MEMS technology," *Microwaves, Radar and Remote Sensing Symposium, MRRS 2008*, pp. 16-21, Sept. 2008.
- [4] E. Carrasco, M. Barba and J.A. Encinar, "Reflectarray element based on aperture-coupled patches with slots and lines of variable length," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Vol. 55, no. 3, Part 2, pp. 820-825, March 2007.
- [5] J. Hayden and G. Rebeiz, "Very low-loss distributed X-band and Ka-band MEMS phase shifters using metal-air-metal capacitors," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 51, no.1, pp. 309-314, Jan. 2003.
- [6] Wenfei Hu, R. Cahill, J.A. Encinar, R. Dikie, H. Gamble, and V. Fusco, "Design and measurement of reconfigurable millimeter wave reflectarray cells with nematic liquid crystals," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Vol. 56, no.10, pp. 3112-3117, Oct. 2008.
- [7] H. Legay, B. Pinte, M. Charrier, A. Ziari, E. Girard, and R. Gillard, "A steerable reflectarray antenna with MEMS controls," *IEEE International Symposium on Phased Array Systems and Technology*, pp. 494-499, Oct. 2003.
- [8] A.E. Marston, "Antenna having beam control members consisting of array of spiral elements," US Patent 30450237, Jul. 17, 1962.
- [9] H.R. Phelan, "Spiraphase reflectarray for multitarget radar," *Microwave J.*, vol. 20, pp. 67-73, July 1977.
- [10] J. Huang and R. J. Pogorzelski, "A Ka-band microstrip reflectarray with elements having variable rotation angles," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 46, pp. 650-656, May 1998.
- [11] A. E. Martynyuk and J.I. M. Lopez, "Reflective antenna arrays based on shorted ring slots," *IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Dig.*, Phoenix, AZ, June 2001, pp. 1379-1382, 1998.
- [12] C. Han and K. Chang, "Ka-band reflectarray using ring elements," *Electron. Lett.*, vol. 39, pp. 491-493, Mar. 2003.
- [13] B. Subbarao, V. Srinivasan, V.F. Fusco, R. Cahill, "Element suitability for circularly polarised phase agile reflectarray applications," *Microwaves, Antennas and Propagation, IEE Proceedings*, Vol. 151, Issue 4, pp. 287 - 292.
- [14] A.E. Martynyuk, J.I. Martinez-Lopez, J. Rogriguez-Cuevas, Y. K. Sydoruk, "Wideband reflective array based on loaded metal rings," *IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Dig.*, Long Beach, CA, June 2005, pp. 573-576.
- [15] A. Kasyanov, "Flat spiraphase focusing lens," *European Microwave Conference*, Vol. 3, Oct. 2005.
- [16] J. J. Wang, "Characteristics of a new class of diode-switched integrated antenna phase shifter," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 31, pp.156-159, Jan. 1983.
- [17] A.E. Martynyuk, J.I. Martinez Lopez, N.A. Martynyuk, "Spiraphase-type reflectarrays based on loaded ring slot resonators," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Volume: 52, Issue: 1, pp. 142 - 153, Jan. 2004.
- [18] A. V. Chenakin, A. E. Martynyuk, and V. I. Skachko, "A new hybrid technology for millimeter-wave integrated circuits," in *IEEE MTT-S Int. Symp. Dig.*, Denver, CO, Jun. 1997, vol. 2, pp. 921-924.
- [19] Martynyuk, A.E., Martinez-Lopez, A.G., and Martinez-Lopez, J.I.: '2 bit X-band reflective waveguide phase shifter with BCB based bias circuits,' *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, 2006, 54, (12), pp. 4056-4061.
- [20] A.G. Martinez-Lopez, J. Rodriguez-Cuevas, J.I. Martinez-Lopez, and A.E. Martynyuk, "X-band circular waveguide switch with polarisation diversity", *Electron. Lett.*, Vol.44, no 20, pp. 1201-1202, Sept. 2008.

Bibliografía

Capítulo 1

- [1] J. Huang, "Capabilities of printed reflectarray antennas," *IEEE symposium on Phased Array System and Technology*, Boston, Massachusetts, Oct. 1996, pp. 131--134.
- [2] R. E. Munson, H. A. Haddad, and J. W. Hanlen, "Microstrip reflectarray for satellite communication and RCS enhancement and reduction," U.S. patent 4684952, Washington, D.C., Agos. 1987.
- [3] J. Huang, "Microstrip reflectarray," IEEE AP-S/URSI symposium, London, Canada, Junio 1991, pp. 612-615.
- [4] D. C. Chang and M. C. Huang, "Multiple polarization microstrip reflectarray antenna with high efficiency and low cross-polarization," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. 43, Agos. 1995, pp. 829-834.
- [5] A. Kelkar, "FLAPS: conformal phased reflecting surfaces," *Proc. IEEE National Radar Conf.*, Los Angeles, California, Marzo 1991, pp. 58-62.
- [6] D. M. Pozar and T. A. Metzler, "Analysis of a reflectarray antenna using microstrip patches of variable size," *Electr. Lett.*, Vol. 29, Abril 1993, pp. 657-658.
- [7] J. Huang, "Bandwidth study of microstrip reflectarray and a novel phased reflectarray concept," IEEE AP-S/URSI symposium, Newport Beach, California, Vol. 49, Junio 1995, pp. 582-585.
- [8] J. Huang and R. J. Pogorzelski, "A Ka-band microstrip reflectarray with elements having variable rotation angles," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. 46, Mayo 1998, pp. 650-656.
- [9] H. R. Phelan, "Spiraphase - a new, low cost phase array. Part I. Theory concepts," *Microwave J.*, Vol. 19, Dic. 1976, pp 41-44.

- [10] H. R. Phelan, "Spiraphase reflectarray for multitarget radar," *Microwave J.*, Vol. 20, Julio 1977, pp. 67-73.
- [11] J. J. J. Wang, "Characteristic of a new class of diode-switched integrated antenna phase shifter," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. 31, Enero 1983, pp. 156-159.
- [12] A. E. Martynyuk, J. I. Martinez Lopez, and N. A. Martynyuk, "Reflective passive phased array with open polarization phase shifters," *IEEE International Symposium on Phased Array Systems and Technology*, Boston, MA, Oct. 14-17. 2003, pp. 482-487.
- [13] A. E. Martynyuk, A. G. Martinez-Lopez, and J. I. M. Lopez, "Two-bit X-band reflective waveguide phase shifter with BCB-based bias circuits," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, Vol. 54, Dic. 2006, pp. 4056-4061.
- [14] A. E. Martynyuk, J. I. M. Lopez, and N. A. Martynyuk, "Spiraphase-type reflectarrays based on loaded ring slot resonators," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. 52, No. 1, Enero 2004, pp. 142-153.
- [15] K. S. Yee, "Numerical solution of initial boundary-value problems involving Maxwell's equations in isotropic media," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. 14, Mayo 1966, pp. 302-307.
- [16] A. Taflove and M. E. Brodwin, "Numerical solution of steady-state electromagnetic scattering problems using the time-dependent Maxwell's equations," *IEEE Micro. Theo. Tech.*, Vol. 23, Agos. 1975, pp. 623-630.
- [17] M. N. O. Sadiku, *Numerical techniques in Electromagnetics*. CRC Press, Inc., 2001.
- [18] R. Courant, "Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations," *Bull. Am. Math. Soc.*, Vol. 49, 1943, pp. 1-23.
- [19] M. N. O. Sadiku, "A simple introduction to finite element analysis of electromagnetic problems," *IEEE Trans. Educ.*, Vol. 32, No. 2, Mayo 1989, pp. 85-93.
- [20] R. F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*. Malabar, FL: Krieger, 1968.

Capítulo 2

- [1] J. J. J. Wang, "Characteristic of a new class of diode-switched integrated antenna phase shifter," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. 31, Enero 1983, pp. 156-159.
- [2] A. Fox, "An adjustable waveguide phase changer," *Proc. PIRE*, Vol. 35, Dic. 1947, pp. 1489-1498.
- [3] A. E. Martynyuk, J. I. M. Lopez, and N. A. Martynyuk, "Spiraphase-type reflectarrays based on loaded ring slot resonators," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. 52, No. 1, Ene. 2004, pp. 142-153.
- [4] C. A. Craeye, G. Tijhuis, and D. H. Schaubert, "An efficient MoM formulation for finite-by-infinite arrays of two-dimensional antennas arranged in a three-dimensional structure," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. 52, 2004, pp. 271-282.
- [5] C. A. Balanis. *Antenna theory: Analysis and design*, 3rd ed. Hoboken, NJ: Wiley Interscience, 2005.
- [6] Y. Rahmat-Samii, "Electromagnetic pulse coupling through an aperture into a two-parallel-plate region," *IEEE Trans. EMC*, Vol. 20, 1978, pp. 436-442.
- [7] M. C. Bailey, "Closed-form evaluation of mutual coupling in a planar array of circular apertures," Report No. TP-3552, NASA. 1996.
- [8] C. - C. Chen, "Transmission through a conducting screen perforated periodically with apertures," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 18, 1970, pp. 627-632.
- [9] F. J. Villegas, Y. Rahmat-Samii, and D. R. Jackson. "A hybrid MoM solution of scattering from finite arrays of cylindrical cavities in a ground plane," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. 51, 2003, pp. 2369-2380.

[10] J. L. Tsalamengas, and E. C. Pitsavos, "Diffraction of plane waves by a finite array of dielectric-loaded cavity-backed slots on a common ground plane for oblique incidence and arbitrary polarization," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Vol. 52, 2004, pp. 1070-1079.

[11] M. C. Bailey, and C. T. Swift, "Input admittance of a circular waveguide aperture covered by a dielectric slab," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Vol. 16, 1968, pp. 386-391.

[12] P. D. Patel, and M. C. Bailey, "Effects of high-order mode coupling in dielectric covered finite array of dissimilar rectangular waveguides," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Vol. 45, 1997, pp. 1749-1757.

Capítulo 3

[1] A. E. Martynyuk, J. I. M. Lopez, and N. A. Martynyuk, "Spiraphase-type reflectarrays based on loaded ring slot resonators," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Vol. 52, No. 1, Ene. 2004, pp. 142-153.

[2] Y. H. Choung, "Sum and tracking radiation patterns of a conical horn," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Vol. 32, 1984, pp. 1288-1291.

[3] C. Han, and K. Chang. "Ka - band reflectarray using ring elements," *Electron. Lett.*, Vol. 39, 2003, pp. 491-493.

[4] C. A. Balanis. *Antenna theory: Analysis and design*, 3rd ed. Hoboken, NJ: Wiley Interscience, 2005.

[5] M. S. Smith, and Y. C. Guo. "A comparison of methods for randomizing phase quantization errors in phased arrays," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Vol. 45, 1983, pp. 821-828.

Capítulo 4

[1] A. E. Martynyuk, J. I. M. Lopez, and N. A. Martynyuk, "Spiraphase-type reflectarrays based on loaded ring slot resonators," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. 52, No. 1, Enero 2004, pp. 142—153

Conclusiones

[1] A.E. Martynyuk and J. Rodriguez-Zamudio, "Polarization Phase Shifters and Spiraphase-type Phased Arrays," MSMW'07 Symposium Proceedings. Kharkov, Ukraine, Junio 25-30. 2007.

[2] A.E. Martynyuk, J. Rodriguez-Zamudio and N.A. Martynyuk, "Reflectarray Based on Three-Bit Spatial Phase Shifters: Mathematical Model and Technology of Fabrication," EuCAP'09. Berlin, Germany, Marzo 23-27. 2009

[3] J. Rodriguez-Zamudio, J. I. Martinez-Lopez, J. Rodriguez-Cuevas and A. E. Martynyuk, "Analysis of a Spiraphase-type Reflectarray: Comparison Between Finite and Infinite Models," *Electromagnetics*, Vol. 29, No. 6, Agos. 2009, pp. 463 - 482.

Apéndice A

[1] Tables of Integral Transforms, McGraw-Hill, New York, Vol. 1, 1954, pp. 17-56.