



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN  
INGENIERIA

FACULTAD DE INGENIERIA

**CONTROL POR RETROALIMENTACIÓN DE  
SALIDA PARA SISTEMAS CON  
INCERTIDUMBRES USANDO OBSERVADORES  
VÍA MODOS DESLIZANTES DE ORDEN  
SUPERIOR**

**T E S I S**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**DOCTORA EN INGENIERÍA**

DOCTORADO EN INGENIERÍA ELÉCTRICA - CONTROL

P R E S E N T A :

**DOLORES ALEJANDRA FERREIRA DE LOZA**

TUTOR:

**DR. LEONID FRIDMAN**

**2010**



## **JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez

Secretario: Dr. Luis Agustín Álvarez Icaza Longoría

Vocal: Dr. Leonid Fridman

1<sup>er</sup> suplente: Dr. Francisco Javier Bejarano Rodríguez

2<sup>o</sup> suplente: Dr. Héctor Benítez Pérez

## **Lugar donde se realizó la tesis:**

Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ingeniería,  
México D.F.

## **TUTOR DE TESIS:**

---

Dr. Leonid Fridman

## RESUMEN DEL TRABAJO

En este trabajo se aborda el problema del control robusto por realimentación de salida de sistemas con entradas desconocidas. Se desarrollan estrategias de control para la compensación exacta de incertidumbres y perturbaciones. Dichas estrategias están basadas en la estimación en tiempo finito de los estados y las entradas desconocidas usando observadores vía modos deslizantes de orden superior. Se estudian dos casos principales: cuando las entradas desconocidas están acopladas a la señal de control y cuando se presentan también incertidumbres desacopladas. El desempeño de las estrategias de control es estimado en términos de las cotas superiores de los ruidos determinísticos, del tiempo de muestreo y del tiempo de ejecución. Basándose en estas estimaciones, el diseñador puede seleccionar la estrategia más adecuada para el sistema particular con el que trabaje.

---

---

# Dedicatoria

---

*A Imelda de Loza,  
con admiración y cariño*

---

---

## Agradecimientos

---

*Al Dr. Leonid Fridman por la dirección del trabajo. A los miembros del jurado por sus comentarios y apoyo. Al Dr. Francisco Bejarano por haber codirigido el trabajo de tesis. Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología.*

---

---

# Índice general

---

## Capítulo

<b>1. Introducción</b>	1
1.1. Motivación . . . . .	1
1.2. Metodología . . . . .	4
1.3. Contribución . . . . .	4
1.4. Estructura de la tesis . . . . .	5
<b>2. Observación por modos deslizantes de orden superior</b>	6
2.1. Sistema lineal invariante en el tiempo con entradas desconocidas . . . . .	6
2.2. Acotamiento del Error . . . . .	8
2.3. Algoritmo para recuperar el estado . . . . .	8
2.4. Observación del estado . . . . .	12
2.5. Identificación de la entrada desconocida . . . . .	13
2.6. Precisión de los procesos de observación e identificación . . . . .	14
2.7. Ejemplo . . . . .	18

2.8. Conclusiones . . . . .	20
<b>3. Compensación de incertidumbres acopladas</b>	<b>22</b>
3.1. Control Robusto por Realimentación de Salida . . . . .	23
3.2. Control por Modos Deslizantes Integrales por Salida . . . . .	25
3.3. Comparación de los controladores . . . . .	26
3.4. Resultados experimentales en un Péndulo Invertido Rotatorio . . . . .	27
3.5. Aplicación. Linealización vía compensación de incertidumbres . . . . .	32
3.6. Conclusiones . . . . .	40
<b>4. Control de sistemas con incertidumbres desacopladas</b>	<b>42</b>
4.1. Compensación de las incertidumbres no acopladas . . . . .	44
4.2. Compensación anidada de incertidumbres no acopladas . . . . .	49
4.3. Error de estabilización . . . . .	54
4.4. Ejemplo . . . . .	55
4.5. Conclusiones . . . . .	58
<b>5. Conclusiones</b>	<b>60</b>
<b>Apéndice</b>	
<b>A. Lista de símbolos</b>	<b>62</b>
<b>B. Conceptos de sistemas multivariables</b>	<b>65</b>
<b>C. Publicaciones</b>	<b>67</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>69</b>

# Capítulo 1

---

---

## Introducción

---

### 1.1 Motivación

El control de los sistemas con incertidumbres y sujetos a perturbaciones es uno de los problemas principales de la teoría de control. Las incertidumbres en el modelo pueden causar inestabilidad en el sistema en lazo cerrado. Existen varios métodos de control que buscan garantizar la estabilidad del sistema de lazo cerrado en presencia de incertidumbres [Kha02]. Por otro lado, las perturbaciones, consideradas como señales exógenas, pueden limitar el desempeño del control.

Una de las estrategias más efectivas para abordar este tipo de sistemas es el control por modos deslizantes [Utk92]. Los modos deslizantes son una técnica robusta que soporta perturbaciones externas e incertidumbres en el modelo que satisfagan las condiciones de acoplamiento. Esto ocurre cuando las perturbaciones y/o las variaciones en los parámetros se encuentran implícitas en los canales de entrada, por ejemplo en el caso de los **sistemas completamente actuados**.

No obstante, existen inconvenientes en la implementación del control por modos deslizantes. Uno de estos inconvenientes son las oscilaciones de alta frecuencia comúnmente conocidas como *chattering* debidas a la imposibilidad de los actuadores para



conmutar a una frecuencia infinita; este efecto puede llegar a ser muy dañino para el sistema. Otro inconveniente reside en la necesidad de conocer el estado completo. Además, los modos deslizantes no son robustos a las perturbaciones que no cumplen la condición de acoplamiento, entre otros inconvenientes.

Cuando no se cuenta con todo el estado y el sistema está sujeto a incertidumbres es menester aplicar un observador robusto que garantice la convergencia de los estados en presencia de entradas desconocidas. En los últimos años se ha prestado gran atención a la observación de este tipo de sistemas y existen varias alternativas. Por ejemplo, los observadores de alta ganancia. Estos, sin embargo, no llegan a ser exactos y presentan el llamado efecto de pico durante el transitorio del observador.

Los observadores basados en modos deslizantes son ampliamente utilizados debido a sus características de robustez con respecto a incertidumbres y a la posibilidad de identificar las incertidumbres a través de la inyección de salida equivalente (ver los capítulos correspondientes en [ES98] y [UGS99]). Esta metodología asegura, teóricamente, convergencia en tiempo finito del estado, no obstante, se requiere el filtrado del control equivalente en cada paso para su realización. Recientemente se han desarrollado algoritmos de observación basados en modos deslizantes de orden superior (MDOS), los cuales reconstruyen exactamente el estado e identifican las perturbaciones en tiempo finito para sistemas fuertemente observables (ver [DFL] y [BFP07a]). Este tipo de observadores usan diferenciación por modos deslizantes de orden superior [Lev03]. Los algoritmos de control por salida presentados aquí se basan en este tipo de observadores. En particular, en [BF09] se propone el esquema de observación con la mejor precisión posible en la estimación del estado y la identificación de las entradas desconocidas [Lev08].

Con respecto al problema de los sistemas con incertidumbres y perturbaciones no acopladas, existe un gran interés para diseñar controles robustos ante este tipo de perturbaciones. Las perturbaciones no acopladas están presentes en los **sistemas subactuados** (es decir, aquellos sistemas que tienen menos actuadores que grados de libertad). En la

práctica muchos sistemas son subactuados, por ejemplo, barcos, vehículos submarinos y robots bípedos entre otros [FL02]. Por otro lado, existen razones (costo y peso de los actuadores, por ejemplo), para diseñar un sistema subactuado o bien, un sistema puede volverse subactuado debido a la ocurrencia de fallas en sus actuadores.

Para garantizar robustez ante las perturbaciones no acopladas se han desarrollado estrategias basadas en la combinación de métodos de control robusto [SD93], [DS93, PSJ03, Cho03, Cho08, CX04] en los que se desconoce la forma de perturbación pero se asume que se conoce una cota de la misma. En [Cho08] se propone un método de diseño usando una superficie de switcheo  $H_2$  basada en desigualdades matriciales lineales. En En [CF06] se propone un método que combina control  $H_\infty$  y modos deslizantes integrales. La idea principal es encontrar una matriz de ganancia que minimice los efectos de las perturbaciones no acopladas garantizando que no son amplificadas. Técnicas basadas en *backstepping*, en las que se busca extender la condición de acoplamiento para las perturbaciones no acopladas, son propuestas en [FK96, FG98, PCE09]. En [EF08] un esquema de control por bloques usando modos deslizantes cuasi-continuos de orden superior garantiza el seguimiento exacto en tiempo finito. Otra filosofía de control de sistemas con perturbaciones no acopladas es reproducir y cancelar los efectos causados por las perturbaciones externas. En [MST03],[LS00] han sido propuestas algunas técnicas que asumen que la entrada desconocida es sinusoidal con una frecuencia fija. Sin embargo, en la mayoría de los problemas de control, la forma y frecuencia de la señal son irregulares.

El presente trabajo se basa en la identificación, teóricamente exacta y en tiempo finito, de las perturbaciones, las cuales se inyectan a través del control para compensar sus efectos en el sistema.

## 1.2 Metodología

En este trabajo se usa un observador algebraico basado en modos deslizantes de orden superior [BF09] para reconstruir el vector de estado y las perturbaciones (acopladas y no acopladas) en tiempo finito.

Se estudian estrategias de compensación de perturbaciones acopladas y no acopladas.

Para las perturbaciones acopladas se presentan dos casos principales: compensación continua con inyección de la señal identificada en la ley de control y compensación discontinua usando modos deslizantes integrales basados en los estados estimados.

Se aplica el método para compensar la diferencia entre un sistema no lineal y su modelo lineal.

Respecto a las incertidumbres **desacopladas**, se diseña una ley de control basada en modos deslizantes robusta a las incertidumbres desacopladas. Este control se basa en los estados estimados y la señal identificada de las perturbaciones y sus derivadas sucesivas.

## 1.3 Contribución

Las estrategias abordadas pueden clasificarse de la siguiente manera:

- Compensación de perturbaciones acopladas.
  - Control continuo por retroalimentación de salida con compensación de entradas desconocidas basado en las estimaciones exactas del estado y la señal desconocida. Este control garantiza robustez y evita el *chattering*.
  - Compensación de entradas desconocidas vía modos deslizantes integrales usando los estimados exactos de los estados. Este control es insensible a perturbaciones pero puede presentar *chattering*.
  - Criterio de selección del controlador más adecuado para sistemas con perturbaciones acopladas, considerando una estimación de la precisión debi-

da a la discretización, a constantes de tiempo en los actuadores y a las cotas de los ruidos determinísticos.

- Se usa una estrategia de linealización por salida para compensar la diferencia entre el sistema no lineal real y su modelo lineal.
- Compensación de perturbaciones no acopladas. Se analiza una metodología para compensar las perturbaciones no acopladas basada en los estados observados y la señal identificada. Las perturbaciones no acopladas son compensadas a través de la superficie deslizante. Se muestra que a través del diseño anidado de la superficie es posible estabilizar una parte de la dinámica subactuada.

Para cada estrategia se analiza el error de estabilización debido a que la estimación del estado y las perturbaciones no son exactas y están afectadas por las características del sistema (constantes de tiempo, cotas de ruidos, etc.).

### 1.4 Estructura de la tesis

En el Capítulo 2 se resume el funcionamiento del observador algebraico basado en el MDOS. Se discute la precisión de los procesos de observación y de identificación. En el Capítulo 3 se describen dos metodologías de control por salida con compensación de incertidumbres acopladas y se da un criterio de selección basado en el análisis de la precisión de los controladores tomando en cuenta la discretización del observador, de la identificación y del actuador, se sugiere una estrategia para la elección del controlador. Se presentan resultados experimentales con el péndulo de Furuta. Además, se presenta un ejemplo en el que se linealiza una planta al compensar la diferencia entre una planta no lineal y su modelo lineal. En el Capítulo 4 se presenta una técnica que identifica y compensa las perturbaciones no acopladas, compensando total o parcialmente la dinámica subactuada del sistema a través de la superficie deslizante dependiendo de las características del sistema. Finalmente se presentan las conclusiones.

## Capítulo 2

---

---

# Observación por modos deslizantes de orden superior

---

En este capítulo se presenta un observador algebraico para sistemas con entradas desconocidas basado en modos deslizantes de orden superior (ver [BF09]). Con este esquema de observación se obtiene la mejor precisión posible en presencia de ruidos determinísticos acotados, tanto en la estimación del estado, como en la identificación de las entradas desconocidas, comparada con otros esquemas de observación basados en modos deslizantes de orden superior.

El nivel de precisión alcanzable queda determinado por la *suavidad* de las perturbaciones, el tiempo de muestreo y la cota de los ruidos determinísticos presentes en el sistema.

### 2.1 Sistema lineal invariante en el tiempo con entradas desconocidas

Considere un sistema lineal invariante en el tiempo sujeto a los efectos de entradas desconocidas (LITED)

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Dw(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  ( $1 \leq p < n$ ) son el vector de estados, el control y la salida del sistema respectivamente. Las entradas desconocidas son representadas por el vector de funciones  $w(t) \in \mathbb{R}^q$ . El rango  $(C) = p$ , rango  $(B) = m$  y rango  $(D) = q$ . Se asume que el sistema cumple las siguientes condiciones:

**S1** El sistema es fuertemente observable [Hau83], i.e. la triada  $(A, C, D)$  no tiene ceros invariantes (véase B.2).

**S2** Existe una constante  $w^+$  tal que  $\|w(t)\| \leq w^+$ .

**S3**  $w(t)$  tiene  $\alpha + 1$  derivadas sucesivas acotadas por la misma constante  $w^+$ , i.e.  $\|w^{(\alpha+1)}(t)\| \leq w^+$  para todo  $t \geq 0$ .

La suposición **S1** implica que a partir de los valores de la salida podemos estimar lo que sucede con la dinámica del estado. Si el sistema  $(A, C, D)$  tuviera ceros invariantes, entonces, existirían una condición inicial  $x(0)$  y una entrada desconocida  $w(t)$ , tales que la salida del sistema se hiciera cero ( $y(t) = 0$ ), mientras que el estado fuera diferente de cero ( $x(t) \neq 0$ ) para  $t \geq 0$ , es decir que sería imposible realizar la estimación del estado a partir de la salida del sistema. Una definición formal de observabilidad fuerte puede consultarse en el Apéndice **B**.

La suposición **S2** acota el tamaño de la perturbación que actúa sobre el sistema y la suposición **S3** permite utilizar un diferenciador de un orden mayor al requerido para estimar el estado e identificar la entrada desconocida que, como se verá más adelante, trae consigo beneficios en la precisión total del sistema.

El diseño del observador se divide en dos etapas: primero se acota el error de estimación usando un observador tipo Luenberger, esto es necesario porque el diferenciador vía MDOS solo tiene convergencia local. Posteriormente, se usa un diferenciador por modos deslizantes de orden superior para reconstruir el estado.

## 2.2 Acotamiento del Error

Se contruye un observador de Luenberger

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \tilde{y}(t)), \quad (2.2)$$

donde  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$  es el estado estimado,  $\tilde{y}(t) = C\tilde{x}(t)$  es la salida del observador y la ganancia  $L$  debe ser diseñada tal que la matriz  $\tilde{A} := (A - LC)$  sea Hurwitz. Sea el error de estimación

$$e(t) := x(t) - \tilde{x}(t) \quad (2.3)$$

de las ecuaciones (2.1) y (2.2) se tiene la dinámica del error

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t) + Dw(t) \quad (2.4)$$

Debido a que se satisface la suposición **S2**, el error  $e(t)$  tiene una norma acotada, es decir, que existen constantes  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 > 0$  tales que

$$\|e(t)\| < \varepsilon_1 \exp(-\varepsilon_2 t) \|e(0)\| + \varepsilon_3 w^+ \quad (2.5)$$

De la desigualdad anterior, se puede afirmar que dada una constante  $e^+ > \varepsilon_3 w^+$  se tiene

$$\|e(t)\| < e^+ \text{ para todo } t > -\frac{1}{\varepsilon_2} \ln \frac{e^+ - \varepsilon_3 w^+}{\varepsilon_1 \|e(0)\|}$$

Lo anterior significa que el error de estimación estará acotado por  $e^+$  y permanecerá así para todo tiempo futuro. De esta manera se satisface el requisito para aplicar el diferenciador basado en modos deslizantes de orden superior [Lev03].

## 2.3 Algoritmo para recuperar el estado

La idea principal del observador consiste en reconstruir el estado a partir de una combinación lineal de la salida del sistema y sus derivadas consecutivas. No obstante,

dado que el sistema esta afectado por entradas desconocidas, es menester desacoplar las entradas desconocidas de las derivadas de la salida.

Para un sistema fuertemente observable (2.1), el siguiente algoritmo, inspirado en los trabajos de [Mol76], permite encontrar en un número finito de pasos  $k$  un vector formado por la multiplicación de la matriz de observabilidad fuerte y el error de estado. A partir de dicho vector puede recuperarse de forma algebraica el error de estado  $e(t)$  y a partir de este el estado  $x(t)$  del sistema.

0. Se define la matriz  $M_1 := C$ .

1. Se deriva una combinación lineal de la salida  $y_e(t) = Ce(t)$ , de tal modo que la derivada de esta combinación no esté afectada por las entradas desconocidas, i.e.

$$\frac{d}{dt} (M_1 D)^\perp y_e(t) = (M_1 D)^\perp C \tilde{A} e(t)$$

se construye el vector extendido

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} (M_1 D)^\perp y_e(t) \\ y_e(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} (M_1 D)^\perp C \tilde{A} \\ C \end{bmatrix}}_{M_2} e(t)$$

la expresión anterior se manipula de tal modo que el operador diferencial afecte a todos los términos del vector extendido. Se define la matriz  $J_1 = (M_1 D)^\perp$  y se obtiene la siguiente ecuación

$$M_2 e(t) = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_e(t) \\ y_e^{[1]}(t) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

donde  $I_p \in \mathbb{R}^p$  es una matriz identidad e  $y_e^{[i]}(t) = \int_0^t \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{i-1}} y_e(\tau_i) d\tau_i \cdots d\tau_2 d\tau_1$  es el  $i$ -ésimo antidiferenciador de  $y_e(t)$ .

2. Se deriva una combinación lineal del vector  $M_2 e(t)$ , de tal modo que la derivada no sea afectada explícitamente por las entradas desconocidas. Después se



forma un vector extendido con el vector resultante y con la salida  $y_e(t)$ . Se tiene

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} (M_2 D)^\perp M_2 e(t) \\ y_e(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} (M_2 D)^\perp M_2 \tilde{A} \\ C \end{bmatrix}}_{M_3} e(t) \quad (2.7)$$

se define  $J_2 = (M_2 D)^\perp \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}$  y, si el operador diferencial es extraído de la expresión anterior, se tiene

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} (M_2 B)^\perp M_2 e(t) \\ y_e^{[1]} \end{bmatrix} = M_3 e(t)$$

Usando la ecuación previa, el vector  $M_3 e(t)$  se puede representar como la segunda derivada de una función conocida. Entonces, de la expresión anterior y de (2.7), extrayendo el operador de diferenciación de la ecuación se obtiene

$$M_3 e(t) = \frac{d^2}{dt^2} \begin{bmatrix} J_2 & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_e \\ y_e^{[1]} \\ y_e^{[2]} \end{bmatrix}$$

De este modo, si se requiere reconstruir el término  $M_3 e(t)$ , se puede hacer a partir de la ecuación anterior aplicando un diferenciador de segundo orden, en lugar de reconstruirlo a partir de las ecuaciones (2.6) y (2.7) y diferenciar dos veces.

- j. El paso  $j - \text{ésimo}$  puede ser sintetizado de la siguiente manera: derivar una combinación de los elementos del vector  $M_{j-1} e(t)$  que no sea afectada por las entradas desconocidas, esto es,  $\frac{d}{dt} (M_{j-1} D)^\perp M_{j-1} e(t) = (M_{j-1} D)^\perp M_{j-1} \tilde{A} e(t)$ .

Entonces, formar el vector extendido

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} (M_{j-1} D)^\perp M_{j-1} e(t) \\ y_e(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} (M_{j-1} D)^\perp M_{j-1} \tilde{A} \\ C \end{bmatrix}}_{M_j} e(t) \quad (2.8)$$

manipulando la expresión anterior para extraer el operador diferencial, se cumple

$$M_j e(t) = \frac{d^{j-1}}{dt^{j-1}} \begin{bmatrix} J_{j-1} & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_e(t) \\ \vdots \\ y_e^{[j-1]}(t) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$\text{donde } J_{j-1} = (M_{j-1} D)^\perp \begin{bmatrix} J_{j-2} & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}.$$

Este procedimiento continua hasta que, bajo la suposición **S1**, se encuentra una matriz  $M_k$  ( $k \leq n$ ), generada recursivamente por (2.9), que satisface la condición de rango  $(M_k) = n$  (véase [Mol76]). Esto implica que la ecuación algebraica

$$\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \begin{bmatrix} J_{k-1} & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_e(t) \\ \vdots \\ y_e^{[k-1]}(t) \end{bmatrix} = M_k e(t)$$

tiene una solución única para  $e(t)$ . Tal solución podría ser encontrada premultiplicando ambos lados de la ecuación anterior por la matriz  $M_k^+ := (M_k^T M_k)^{-1} M_k^T$ . Esto es

$$e(t) = M_k^+ \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \begin{bmatrix} J_{k-1} & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} Y^{[k-1]} \quad (2.10)$$

$$\text{donde } Y^{[k-1]} = \begin{bmatrix} (y_e(t))^T & \dots & (y_e^{[k-1]}(t))^T \end{bmatrix}^T.$$

A partir de la ecuación anterior puede reconstruirse el vector de error  $e(t)$  y, a partir de éste, puede reconstruirse el estado  $x(t)$ . Esto se lleva a cabo mediante la combinación lineal de la salida  $y_e$  y sus  $(k - 1)$  derivadas.

Bajo la suposición de *suavidad* de las entradas desconocidas **S3**, se puede diseñar un diferenciador por modos deslizantes de orden  $(\alpha + k - 1)$  -ésimo, el cuál es el diferenciador de más alto orden que puede ser construido dada **S3**. Antes, es necesario definir

$$\Theta(t) = M_k^+ \begin{bmatrix} J_{k-1} & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} Y^{[k-1]}.$$

El diferenciador por *MDOS* está dado por

$$\begin{aligned} \dot{z}_0(t) &= -\lambda_0^{\frac{1}{i+1}} \Lambda \Psi^{\frac{i}{i+1}} (z_0(t) - \Theta(t)) + z_1(t) \\ \dot{z}_1(t) &= -\lambda_1 \Lambda^{\frac{1}{i}} \Psi^{\frac{i-1}{i}} (z_1(t) - \dot{z}_0(t)) + z_2(t) \\ &\vdots \\ \dot{z}_{i-1}(t) &= -\lambda_{i-1} \Lambda^{\frac{1}{2}} \Psi^{\frac{1}{2}} (z_{i-1}(t) - \dot{z}_{i-2}(t)) + z_i(t) \\ \dot{z}_i(t) &= -\lambda_i \Lambda \Psi^0 (z_i(t) - \dot{z}_{i-1}(t)) \end{aligned} \tag{2.11}$$

donde  $i = \alpha + k - 1$  es el orden del diferenciador y  $z_i(t), \Theta(t) \in \mathbb{R}^n, \lambda_i, \Lambda \in \mathbb{R}$ . Considerando las variables  $\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \dots & \sigma_n \end{bmatrix}^T, \beta \in \mathbb{R}$ , el vector de funciones  $\Psi^\beta(\sigma) \in \mathbb{R}^n$  se define como

$$\Psi^\beta(\sigma) = \begin{bmatrix} |\sigma_1|^\beta \operatorname{sgn}(\sigma_1) & \dots & |\sigma_n|^\beta \operatorname{sgn}(\sigma_n) \end{bmatrix}^T$$

Los valores de las constantes  $\lambda_i$  se calculan como se muestra en [Lev03],  $\Lambda$  es la constante de Lipschitz de la función  $\Theta^{(\alpha+k)}(t)$ , la cual puede ser calculada de la siguiente manera: partiendo del hecho que  $\Theta^{(k-1)}(t) = e(t)$  permanece acotada por (2.5), la siguiente derivada  $\Theta^{(k)}(t) = \dot{e}(t)$  también estará acotada  $\|\dot{e}(t)\| \leq \|\tilde{A}\| e^+ + \|B\| w^+$ . En general  $e^{(\alpha+1)}(t)$  puede ser representada como una combinación líneal de  $\{e^{(k)}, e^{(k+1)}, \dots, e^{(\alpha)}, \dot{w}, \dots, w^{(\alpha+1)}\}$  y puede comprobarse que

$$\Lambda \geq \|\tilde{A}\|^{(\alpha)} e^+ + \sum_{i=0}^{\alpha-1} \|\tilde{A}\|^i \|B\| w^+ \tag{2.12}$$

## 2.4 Observación del estado

En [Lev03] se muestra que con la elección adecuada de las constantes  $\lambda_i$ , existe un tiempo finito  $T$  tal que la igualdad  $z_i(t) = \frac{d^i}{dt^i} \Theta(t)$  se alcanza para cada  $i = 0, \dots, \alpha +$

$k - 1$ .

El vector  $e(t)$  puede ser reconstruido desde la dinámica deslizante de orden  $(k - 1)$ -ésimo. De este modo, se cumple la identidad  $z_{k-1}(t) = e(t)$ , y consecuentemente se define

$$\hat{x}(t) := z_{k-1}(t) + \tilde{x}(t) \text{ para todo } t \geq T \quad (2.13)$$

donde  $\hat{x}$  representa el valor estimado de  $x$ . Por lo tanto, la identidad  $\hat{x}(t) \equiv x(t)$  se satisface para todo  $t \geq T$ .

## 2.5 Identificación de la entrada desconocida

En esta sección se describe el procedimiento para identificar la entrada desconocida  $w(t)$ . Considere la dinámica del error del sistema (2.4), el vector  $\dot{e}(t)$  puede ser recuperado usando el diferenciador (2.11). Es decir, que para todo tiempo  $t \geq T$  se satisface  $z_k(t) = \dot{e}(t)$ , y despejando se tiene

$$\hat{w}(t) = -D^+ \left( \tilde{A}z_{k-1}(t) - z_k(t) \right) \quad (2.14)$$

Más adelante, en el Capítulo 4, será necesario contar no solo con la señal identificada  $\hat{w}(t)$  sino también con sus derivadas consecutivas  $\hat{w}^\alpha$ , por esta razón, en los siguientes párrafos se resume la manera de estimarlas.

### Identificación de las derivadas sucesivas de la entrada desconocida

Bajo la suposición  $SI$  y de la ecuación (2.14) pueden ser identificadas las derivadas sucesivas de  $\hat{w}(t)$ , ...,  $\hat{w}^{(\alpha)}(t)$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{w}} &= -B^+ [(A - LC)z_k(t) - z_{k+1}(t)] \\ \ddot{\hat{w}} &= -B^+ [(A - LC)z_{k+1}(t) - z_{k+2}(t)] \\ &\dots \\ \hat{w}^{(\alpha)} &= -B^+ [(A - LC)z_{k+\alpha-2}(t) - z_{k+\alpha-1}(t)] \end{aligned}$$

## 2.6 Precisión de los procesos de observación e identificación

Suponiendo que se desea realizar el proceso de observación con un tiempo de muestreo  $\delta$ , y que también está presente una señal de ruido determinístico  $n(t)$  (la cual es una función medible en el sentido de Lebesgue con una magnitud máxima de  $\nu$ ) en el sistema. Sea

$$\tilde{\Theta}(t) = \Theta(t) + n(t), \quad \|\Theta^{(i+1)}(t)\| < \Lambda, \quad \|n(t)\| \leq \nu \quad (2.15)$$

donde  $\tilde{\Theta}(t)$  es la señal medida en línea. Se sigue del Teorema 7 de [Lev03], que el error causado por el tiempo de muestreo  $\delta < 1$  en ausencia de ruidos, para un diferenciador MDOS de  $i$  –ésimo orden, es

$$\|\Theta^{(j)}(t) - z_j(t)\| \leq O(\delta^{i-j+1}) \text{ para } j = 0, \dots, i \quad (2.16)$$

Ahora, del Teorema 6 de [Lev03], el error del diferenciador MDOS provocado por una señal de ruido determinístico es

$$\|\Theta^{(j)}(t) - z_j(t)\| \leq O(\nu^{\frac{i-j+1}{i+1}}) \text{ para } j = 0, \dots, i \quad (2.17)$$

En este caso, se trabaja con un diferenciador MDOS de  $(\alpha + k - 1)$  –ésimo orden. Para recuperar el estado estimado es necesario diferenciar  $(k - 1)$ –veces. De las expresiones (2.16) y (2.17) se sigue que el error de observación provocado por el tiempo de muestreo  $\delta$  es  $O(\delta^{(\alpha+1)})$ , mientras que el error de observación causado por el ruido determinístico es  $O(\nu^{\frac{\alpha+1}{\alpha+k}})$ .

De la ecuación (2.14) se sigue que  $k$  diferenciaciones son necesarias para identificar la entrada desconocida. Por consiguiente, de la ecuación (2.16) el error de identificación causado por el tiempo de muestreo es  $O(\delta^\alpha)$ , y el error provocado por la señal de ruido determinístico (2.17) es  $O\left(\nu^{\frac{\alpha}{\alpha+k}}\right)$ .

En la siguiente proposición se analiza el efecto total de los errores provocados por el tiempo de muestreo y los ruidos determinísticos.

**Proposición 1.** *Si se asume  $\delta \leq k_\delta \Delta$ , y  $\nu \leq k_\nu \Delta^{i+1}$  con  $k_\delta, k_\nu, \Delta$  constantes positivas e  $i = \alpha + k - 1$ . Entonces, después de un tiempo finito  $T$ , los errores de observación e identificación serán respectivamente  $O(\Delta^{\alpha+1})$  y  $O(\Delta^\alpha)$ .*

*Demostración.* Se sigue del Teorema 3.1 de [AL09]. De este modo, si  $\Theta(t)$  es la señal que va a ser diferenciada, y esta afectada por ruidos (2.15), donde  $\tilde{\Theta}(t)$  es la señal medida en línea, entonces, de acuerdo con el citado teorema, usando el diferenciador (2.11) de orden  $i = \alpha + k - 1$ , se tienen las siguientes estimaciones después de un tiempo finito:

$$\|\Theta^{(j)}(t) - z_j(t)\| \leq O(\Delta^{i-j+1}) \text{ para } j = 0, 1, \dots, i$$

De este modo, de (2.10) y (2.13) se tiene que

$$\begin{aligned} \|x(t) - \hat{x}(t)\| &= \|\Theta^{(k-1)}(t) - z_{k-1}(t)\| \\ &\leq O(\Delta^{i-k+2}) = O(\Delta^{\alpha+1}) \end{aligned}$$

En el caso del error de identificación, se obtiene de la ecuación (2.14) que

$$\begin{aligned} \|w(t) - \hat{w}(t)\| &\leq \|B^+\| \|A - LC\| \|\Theta^{(k-1)}(t) - z_{k-1}(t)\| + \|B^+\| \|\Theta^k(t) - z_k(t)\| \\ &\leq O(\Delta^{\alpha+1}) + O(\Delta^\alpha) \leq O(\Delta^\alpha) \end{aligned}$$

□

La Tabla 2.3 resume los errores de observación e identificación cuando la entrada desconocida  $w(t)$  satisface la suposición **S3**. Entonces, un diferenciador de orden  $(\alpha + k - 1)$  -ésimo es aplicado para mejorar la precisión.

De la tabla anterior, se puede deducir que la precisión de las derivadas consecutivas de la entrada desconocida puede calcularse a partir de la precisión de la señal identificada  $\hat{w}$  como se muestra en la Tabla 2.2.

Cuadro 2.1: Precisión debida al tiempo de muestreo y al ruido acotado.

Error	Tiempo de muestreo $\delta$	Cota del ruido $\nu$	Efecto total $\Delta$
Observación	$O(\delta^{\alpha+1})$	$O\left(\nu^{\frac{\alpha+1}{\alpha+k}}\right)$	$O(\Delta^{\alpha+1})$
Identificación	$O(\delta^\alpha)$	$O\left(\nu^{\frac{\alpha}{\alpha+k}}\right)$	$O(\Delta^\alpha)$
Diferenciador MDOS	$O(\delta)$	$O\left(\nu^{\frac{1}{\alpha+k}}\right)$	$O(\Delta)$

Aquí cabe resaltar que, el observador presentado en este capítulo tiene precisión asintótica en presencia de ruidos determinísticos acotados. Dicha precisión es la mejor precisión posible (vease [Kol62], [Lev08]).

### **Comparación con otros observadores basados en modos deslizantes de orden superior**

Recientemente, se han desarrollado observadores para sistemas con entradas desconocidas basados en modos deslizantes de orden superior. En particular, los observadores presentados en [BFP07a], [BF06] y [LFD08], trabajan bajo las mismas suposiciones **S1** y **S2**, convergen al estimado del estado y de la entrada desconocida en un tiempo finito y se basan en el diferenciador por modos deslizantes de orden superior

Es preciso señalar que, el observador presentado en este capítulo, alcanza la mejor precisión posible entre estos observadores, debido principalmente a el proceso de desacoplamiento de las perturbaciones. De este modo, es posible usar un diferenciador por MDOS de orden  $k - \text{ésimo}$  para recuperar tanto el estado como las entradas desconocidas; en lugar de aplicar  $k - \text{veces}$  un diferenciador por MDOS de primer orden para recuperar lo mismo. La ventaja principal de esto, es evitar que los errores de un primer proceso de diferenciación por MDOS se inyecten como ruidos de entrada en un segundo proceso de diferenciación.

En el caso de el observador jerárquico basado en *Super - Twisting* (ST) [BFP07a],

## Observación por modos deslizantes de orden superior

Cuadro 2.2: Precisión de las derivadas consecutivas de la entrada desconocida.

Error de Identificación	Tiempo de muestreo $\delta$	Cota del ruido $\nu$	Efecto total $\Delta$
$\hat{w}^{(1)}$	$O(\delta^{\alpha-1})$	$O\left(\nu^{\frac{\alpha-1}{\alpha+k}}\right)$	$O(\Delta^{\alpha-1})$
$\hat{w}^{(2)}$	$O(\delta^{\alpha-2})$	$O\left(\nu^{\frac{\alpha-2}{\alpha+k}}\right)$	$O(\Delta^{\alpha-2})$
...	...	...	...
$\hat{w}^{(\alpha)}$	$O(\delta)$	$O\left(\nu^{\frac{1}{\alpha+k}}\right)$	$O(\Delta)$

se utiliza un esquema de diferenciación paso a paso, en el que un diferenciador basado en ST [Lev98] ( i.e. un diferenciador por MDOS de 1<sup>er</sup> orden) se utiliza para recuperar los renglones del vector  $e(t)$ . De este modo, es necesario diferenciar  $(k - 1)$  veces. Después de la primer diferenciación usando el diferenciador basado en ST, a partir de la ecuación (2.16) se puede comprobar que el error causado por el tiempo de muestreo  $\delta$  será  $O(\delta)$ . Este error será reflejado como un ruido de salida en la siguiente aplicación del diferenciador ST. Esto implica que después de la segunda aplicación del diferenciador ST, a partir de (2.17) se obtiene un error de  $O(\sqrt{\delta})$ . De este modo, al aplicar recursivamente la ecuación (2.17), después de  $(k - 1)$  diferenciaciones con el diferenciador ST se tiene un error de estimación de estado de  $O(\delta^{\frac{1}{2^{k-2}}})$ . Ahora, para la identificación de la entrada desconocida será necesario diferenciar una vez más, i.e. el diferenciador ST se aplica  $k$  veces sucesivamente, de (2.17) se puede calcular que el error se incrementará a  $O(\delta^{\frac{1}{2^{k-1}}})$ .

En el caso del diferenciador paso a paso dado en el trabajo [BF06] el error será el mismo que el del esquema discutido previamente.

Ahora, considerando el observador propuesto en [LFD08], para este esquema son necesarias dos etapas de diferenciación para recuperar el vector  $e(t)$ . Primero, se aplica un diferenciador por MDOS de  $(r - 1)$  –ésimo, donde  $r$  es la coordenada de mayor orden del vector de grado relativo; se sigue de la ecuación (2.16) que el error será  $O(\delta)$ . Después de esto, se realiza una diferenciación paso a paso usando un diferenciador ST



para lograr la observación de todo el estado, de la ecuación (2.17) se puede comprobar que en este caso, el error total de observación será  $O\left(\delta^{\frac{1}{2^k-r}}\right)$ .

La Tabla 2.3 resume las precisiones de los observadores por MDOS.

Cuadro 2.3: Precisión debida al tiempo de muestreo de diversos observadores por MDOS.

Error	Observador algebraico [BF09]	Observador jerárquico [BFP07a]	Observador paso a paso [BF06]	Observador [LFD08]
Observación	$O(\delta^2)$	$O(\delta^{\frac{1}{2^k-2}})$	$O(\delta^{\frac{1}{2^k-2}})$	$O\left(\delta^{\frac{1}{2^k-r}}\right)$
Identificación	$O(\delta)$	$O(\delta^{\frac{1}{2^k-1}})$	$O(\delta^{\frac{1}{2^k-1}})$	$O(\delta^{\frac{1}{2^k-r+1}})$

## 2.7 Ejemplo

Se presenta un ejemplo académico para mostrar la viabilidad del observador. Sea el sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,1 & 0,25 \\ 0 & 0,1 & 0,25 & 0 \\ 0 & -1 & 0,25 & 0 \\ 0,1 & 0,25 & 0 & -0,5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} w \quad (2.18)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x \quad (2.19)$$

donde la entrada desconocida es  $w = 0,2 \sin(3t) + 0,1$  con un ruido determinístico  $n(t) = 0,01 \sin(50t)$ .

*Diseño del observador.* Se puede comprobar que el sistema (2.18)-(2.19) no tiene ceros invariantes. Existen dos formas para hacerlo: a partir de la matriz de Rosenbrock

(B.2) verificando que el rango de la matriz sea completo (ver Apéndice B ) o bien aplicando directamente el algoritmo introducido en la sección 2.3, en un numero finito  $k \leq n$  se encontrará una matriz  $M_k$  de rango  $n$ .

El observador tipo Luenberger se diseña tal que la matriz  $A - LC$  tenga el conjunto de eigenvalores dado por  $\{-1, -6, -0,175, -0,2\}$  . Para la terna  $(A, C, D)$ , se tiene que el  $k = 2$ , i.e. es necesario derivar una vez para reconstruir el estado  $x$ , y para identificar la entrada desconocida  $w$  hay que derivar una vez más. Las matrices  $M_j, J_j, j = 1, \dots, k$  son

$$M_1 = C \qquad M_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0 & -1,2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0,97 & 0 & 0 & 0 & 0,245 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para recuperar el estado e identificar la perturbación basta con un observador por modos deslizantes de orden dos. No obstante, como la perturbación  $w(t)$  es suave, el orden del diferenciador puede aumentarse. Para este ejemplo se comparan los resultados usando un diferenciador de 2<sup>o</sup> y 3<sup>er</sup> orden.

Se presentan los resultados de las simulaciones para un paso de integración de  $\delta = 1(ms)$ . La Fig. 2.1 muestra el estimado del estado  $x_4$  en la primera fila y su respectiva amplificación en la fila inferior considerando respectivamente en A y B un diferenciador MDOS de tercer orden y un diferenciador MDOS de segundo orden. El estimado del estado basado en el diferenciador de más alto orden es el que tiene mejor precisión tal

## Observación por modos deslizantes de orden superior

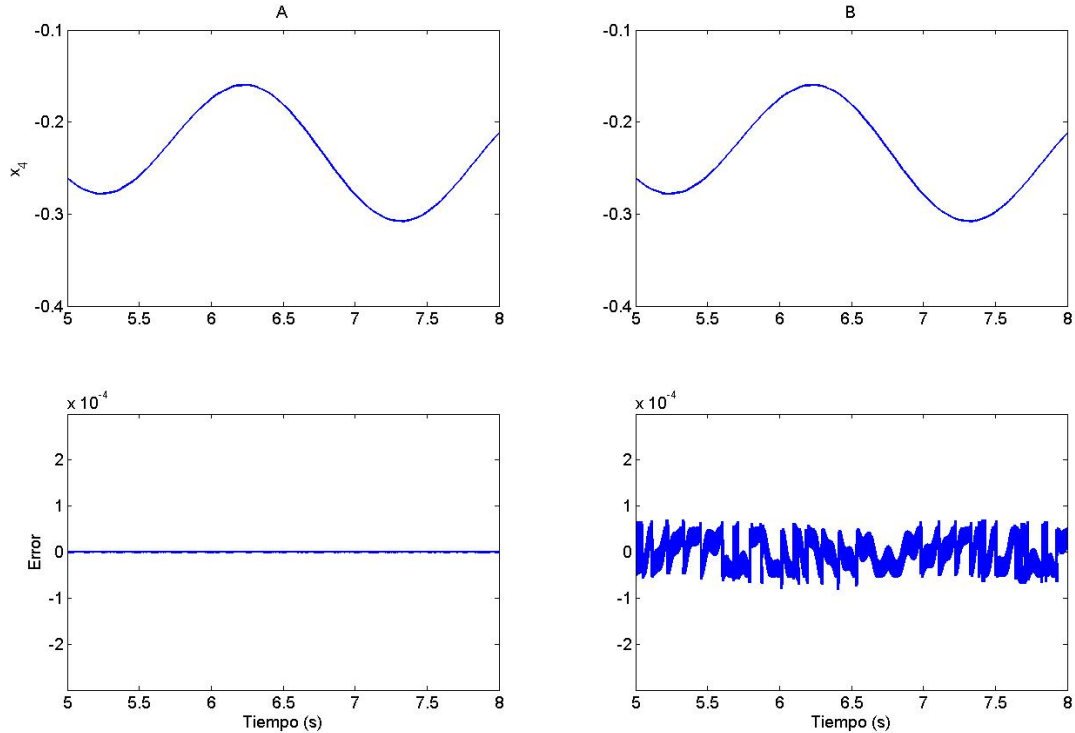


Figura 2.1: Estado  $x_4$  y su estimado. A. Usando un diferenciador de  $3^{er}$  orden con una precisión de  $O(\delta^4)$ ; B. usando un diferenciador de  $2^{o}$  orden con una precisión de  $O(\delta^3)$ . En el renglón inferior se aprecia que la precisión se incrementa con el orden del diferenciador.

como se esperaba. Las precisiones para la señal identificada son del orden de  $O(\delta^3)$  y  $O(\delta^2)$  para los casos A y B respectivamente.

## 2.8 Conclusiones

En este capítulo se describió el funcionamiento del observador algebraico por MDOS [BF09]. Con este observador es posible obtener el estimado de los estados y la identificación de las entradas desconocidas. Estos resultados son la base para las técnicas de control que se introducen en los siguientes capítulos.

Se realizó un análisis de la precisión de los algoritmo de observación e identificación de las perturbaciones (y sus derivadas consecutivas) en términos del tiempo de muestreo,

## Observación por modos deslizantes de orden superior

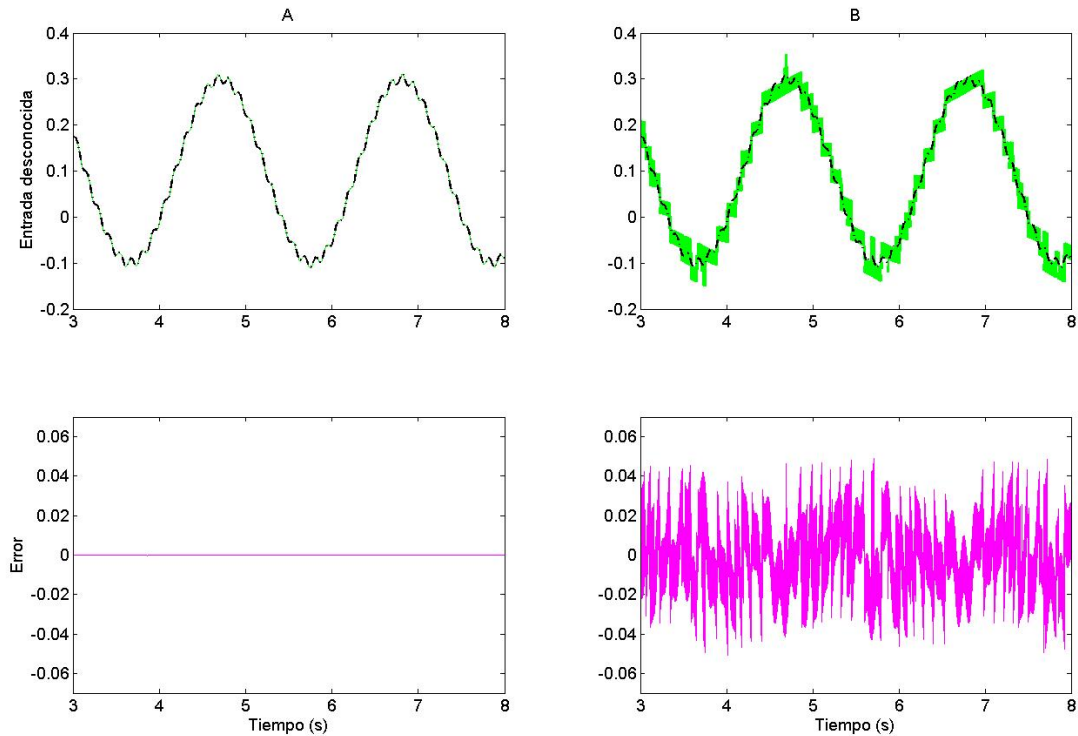


Figura 2.2: Entrada desconocida  $w(t)$  y su estimado. A. Usando un diferenciador de 3<sup>er</sup> orden; B. usando un diferenciador de 2<sup>o</sup> orden. Aunque se logra recuperar la señal original en ambos casos, la precisión se incrementa al usar un diferenciador de mayor orden.

de las restricciones físicas de los actuadores y de las cotas superiores de los ruidos determinísticos presentes en el sistema.

Se comparó el desempeño del observador algebraico introducido aquí, con respecto a otros observadores basados en MDOS publicados recientemente.

## Capítulo 3

---

---

### Compensación de incertidumbres acopladas

---

En este capítulo se proponen dos metodologías para el control de sistemas que están sujetos a incertidumbres y perturbaciones acopladas a la señal de control y cuando solo se conoce la salida del sistema. El objetivo es diseñar un control robusto que compense los efectos de las perturbaciones en los sistemas. Se abordan dos filosofías diferentes:

- Compensación vía un controlador por modos deslizantes integrales basado en el estado estimado, el cuál por su naturaleza discontinua puede presentar el efecto de *chattering*.
- Compensación usando un control continuo por retroalimentación de salida basado en la estimación de los estados y de las perturbaciones.

Se estima la precisión de cada metodología en términos del tiempo de muestreo, el ancho de banda de los actuadores y las cotas de los ruidos determinísticos presentes en el sistema. Con base en estas estimaciones se propone un criterio para auxiliar al diseñador en la selección del esquema de control.

Se presentan los resultados experimentales en un péndulo invertido y se compara el desempeño de ambas metodologías de acuerdo con el criterio propuesto.

Adicionalmente se presenta como aplicación en la linealización de una planta para

la generación de oscilaciones.

Sea un sistema lineal invariante en el tiempo sujeto a los efectos de entradas desconocidas LITED

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Dw(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  ( $1 \leq p < n$ ) son el vector de estados, el control y la salida del sistema respectivamente. Las perturbaciones e incertidumbres son tratadas como entradas desconocidas y se representan por el vector de funciones  $w(t) \in \mathbb{R}^q$ . El rango  $(C) = p$  y rango  $(B) = m$ .

El sistema cumple con **S1**, **S2** y **S3**, es decir que el sistema es fuertemente observable y se encuentra sujeto a perturbaciones *suaves* por lo que es posible diseñar un observador como el presentado en el Capítulo 2 de tal modo que se cuente con un estimado exacto del estado  $\hat{x}(t) \equiv x(t)$  y las perturbaciones  $\hat{w}(t) \equiv w(t)$  para todo  $t \geq T$ . Se asume además que

**S4** El par  $(A, B)$  es controlable.

**S5**  $\text{span}\{B\} \subset \text{span}\{B\}$ .

Se propone una ley de control robusta para el sistema (3.1) de la forma

$$u(t) = u_0(t) + u_1(t)\tag{3.2}$$

donde  $u_0(t)$  es un control para el sistema nominal (i.e.,  $w(t) = 0$ ) y  $u_1(t)$  es un compensador de las entradas desconocidas  $w(t)$ .

### **3.1 Control Robusto por Realimentación de Salida**

Para el control robusto por realimentación de salida (CORRS), de la ley de control (3.2) se tiene que  $u_0(t)$  se diseña para estabilizar el sistema nominal, i.e., el sistema sin

entradas desconocidas,

$$\dot{x}_0(t) = Ax_0(t) + Bu_0(t) \quad (3.3)$$

donde  $u_0(t) = -Kx_0(t)$  es una ley de control estabilizante para el sistema nominal, y puede ser diseñada usando cualquier estrategia de control de tal modo que la matriz  $(A - BK)$  sea Hurwitz.

Ahora dado que **S5** se satisface, entonces  $\exists G \in \mathbb{R}^{m \times q}$  tal que  $D = BG$ , y se propone el compensador de la forma  $u_1(t) = -G\hat{w}(t)$ , donde  $\hat{w}(t)$  es la señal identificada de las entradas desconocidas definida en (2.14).

Asumiendo que teóricamente la observación y la identificación son exactas, las igualdades  $\hat{x}(t) \equiv x(t)$  y  $\hat{w}(t) \equiv w(t)$  se sostienen después de un tiempo finito. En ese caso la ley de control

$$u(t) = -K\hat{x}(t) - G\hat{w}(t) \quad \forall t \geq T \quad (3.4)$$

que se aplica al sistema (3.1) conduce a la siguiente dinámica de lazo cerrado:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) \quad (3.5)$$

Esto significa que la ley de control continua (3.4) compensa de manera exacta las perturbaciones acopladas y, para condiciones iniciales idénticas, las soluciones para los sistemas (3.1) y (3.3) coinciden.

### **Precisión del CORRS**

Teóricamente, las perturbaciones son compensadas exactamente en tiempo finito, sin embargo, la discretización y los ruidos acotados presentes en los procesos de observación e identificación afectan la precisión de la estabilización. Considerando los errores de observación e identificación discutidos en el capítulo anterior (ver Tabla 2.3) se tiene que son  $O(\Delta^{\alpha+1})$  y  $O(\Delta^\alpha)$  respectivamente. Más aun, la constante de tiempo del actuador  $\mu$ , causará un error adicional de  $O(\mu)$  (ver por ejemplo, [Utk92] y [Fri02]).

Tomando en cuenta lo anterior, el estimado del error de estabilización para el controlador CORRS es

$$\epsilon = O(\mu) + O(\Delta^{\alpha+1}) + O(\Delta^\alpha). \quad (3.6)$$

Formalmente la precisión total del sistema es la correlación entre las diferentes precisiones de cada etapa involucrada en el proceso total de control. Sin embargo, desde un punto de vista práctico, el peor valor predominará sobre los otros.

### 3.2 Control por Modos Deslizantes Integrales por Salida

En esta sección se propone un control por modos deslizantes integrales por salida (MDIS). Es decir, la aplicación de los Modos Deslizantes Integrales (ver, [UGS99]) usando los estados estimados mediante el observador por MDOS. Partiendo de un control de la forma (3.2), donde  $u_0(t)$  es nuevamente el control nominal para el sistema sin entradas desconocidas (3.3) con  $u_0(t) = -Kx(t)$ .

Ahora, el control  $u_1(t)$  debe ser diseñado para rechazar la entrada desconocida  $w(t)$  en la superficie deslizante  $\{x : s(t) = 0\}$ . Primero se define la función  $s(t)$  como

$$s(t) = s_0(t) + \zeta(t), \quad (3.7)$$

donde  $s(t), s_0(t), \zeta(t) \in \mathbb{R}^m$  y  $s_0(t) = B^+x(t)$  (con  $B^+ = (B^T B)^{-1} B^T$ ) y la parte integral  $\zeta(t)$  es seleccionada tal que  $x(t) = x_0(t)$  para todo  $t \in [T, \infty)$ . En otras palabras, una vez que el observador converge, es decir, a partir de  $t = T$  los estados del sistema pertenecen a la superficie deslizante, donde el control por modos deslizantes equivalente  $u_{eq}(t)$  compensará las entradas desconocidas, esto es, se desea que  $u_{eq}(t) = -Gw(t)$ . Para lograr este propósito,  $\zeta(t)$  se determina a partir de la siguiente ecuación

$$\dot{\zeta}(t) = -B^+(Ax(t) + Bu_0(t)),$$

con  $\zeta(t_0) = -B^+s(x(t_0))$ . La superficie deslizante toma la forma

$$s(t) = B^+ \left[ x(t) - x(t_0) - \int_{t_0}^t [Ax(\tau) + Bu_0(\tau)] d\tau \right], \quad \forall t_0 \geq T$$



El compensador  $u_1(t)$  tiene la forma de un control discontinuo unitario  $u_1(t) = -\rho \frac{s(t)}{\|s(t)\|}$ . Tal que la superficie deslizante  $s(t)$  es atractiva desde el instante inicial  $t_0$  si  $\rho > w^+ \geq \|w(t)\|$ . Finalmente, la ley de control (3.2) queda como,

$$u(t) = -Kx(t) - \rho \frac{s(t)}{\|s(t)\|} \quad (3.8)$$

Nuevamente, en el caso ideal, las trayectorias del sistema (3.1) con  $u(t)$  diseñado como en (3.8) convergerán con las del sistema nominal (3.3).

### **Precisión del control MDIS**

Como se vió, cuando los procesos de observación, identificación y control son ideales, ambos controladores, CORRS y MDIS, tendrán resultados idénticos. No obstante, en el caso práctico, los errores que aparecen en el sistema de control deben ser tomados en cuenta. En el caso del controlador MDIS el error total es la suma de los errores de observación y control, i.e.,

$$\epsilon = O(\mu) + O(\Delta^{a+1}). \quad (3.9)$$

Aquí cabe la misma aclaración que en la precisión del CORRS, es decir, desde un punto de vista práctico, se considera que el error mayor predominará sobre los otros sin considerar correlación entre ellos.

### **3.3 Comparación de los controladores**

Analizando ahora la precisión de los procedimientos de observación e identificación vía el observador por MDOS, en conjunto con los errores provocados por ambos controladores. CORRS (3.6) y MDIS (3.9). Cabe recordar que se está usando el observador por MDOS con la mejor precisión posible y que se usa un diferenciador  $(\alpha + k - 1)$ -ésimo orden. Para la observación es necesario diferenciar  $(k - 1)$ -veces, mientras que para la identificación será necesario hacerlo  $k - veces$ . Se consideran los casos siguientes:

- I.  $O(\Delta^\alpha) \ll O(\mu)$ , i.e., el error de ejecución del controlador es mayor que el del proceso de identificación. En este caso, será más conveniente usar la metodología CORRS para evitar el *chattering*.
- II.  $O(\Delta^{\alpha+1}) \ll O(\mu) \ll O(\Delta^\alpha)$ , i.e., el error provocado por la frecuencia del actuador es menor que el error de identificación. En este caso, dado que la estrategia CORRS está determinada principalmente por el error de identificación, la estrategia discontinua MDIS ofrecerá una mejor solución para un sistema tolerante al *chattering* con frecuencias de oscilación de  $O(\frac{1}{\mu})$  [Boi09].
- III.  $O(\mu) \ll O(\Delta^{\alpha+1})$ , i.e., el error provocado por la frecuencia de operación del actuador es mucho menor que el error de observación. Sin embargo, la precisión del MDIS no será mejor que la de CORRS, ya que el *chattering* del MDIS puede amplificar los ruidos de observación debidos a altas frecuencias (see, e.g., [Boi09]).

### 3.4 Resultados experimentales en un Péndulo Invertido Rotatorio

Se presentan ahora los resultados experimentales en un sistema de péndulo invertido rotatorio como el representado en la Fig. 3.1. Este sistema consiste en un brazo en forma de L conectado con el yugo del motor DC girando alrededor de  $\pm 180^\circ$ . Al final de este brazo, se encuentra un péndulo suspendido. El modelo no lineal del sistema puede consultarse en [Qua]. El hardware del experimento incluye una PC equipada con una plataforma de adquisición y control en tiempo real dSPACE con un tiempo de adquisición e integración mínimo de  $20\mu s$ . Las posiciones angulares del brazo L y el péndulo  $x_1, x_2$ , son medidas mediante dos encoders con una resolución de 1024 y 1000 pulsos por giro, respectivamente; el ancho de banda de la etapa de potencia del motor es de alrededor de  $12(KHz)$ , es decir que  $\mu \approx 80(\mu s)$ . Las ecuaciones del sistema en variables de estado, con  $x_3 = \dot{x}_1$ , y  $x_4 = \dot{x}_2$ , linealizado alrededor del punto de equilibrio

$$x = \begin{bmatrix} r & \pi & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ son}$$

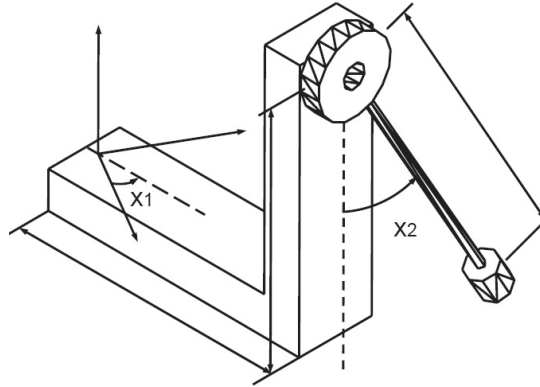


Figura 3.1: Péndulo Invertido Rotatorio

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_3(t), & \dot{x}_2(t) &= x_4(t) \\ \dot{x}_3(t) &= 82,94x_2(t) - 1,31x_3(t) + 46,75(u(t) + w(t)) \\ \dot{x}_4(t) &= 56,81x_2(t) - 0,37x_3(t) + 46,75(u(t) + w(t)) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Un diferenciador basado en MDOS de segundo orden es diseñado (i.e.  $\alpha = 1$ ,) con una ganancia  $\Lambda = \begin{bmatrix} 50 & 50 & 500 & 200 \end{bmatrix}^T$ . El estado se recupera a través de la 1ª derivada (i.e.  $k = 2$ ). El control nominal está dado con  $K = \begin{bmatrix} 3,16 & -73,92 & 2,19 & -12,48 \end{bmatrix}$ . La ganancia del observador de Luenberger  $L$  se diseña tal que los eigenvalores de la matriz  $\tilde{A}$  se localicen en  $\begin{bmatrix} -2 & -3 & -4 & -5 \end{bmatrix}$ .

Primero se presentan los resultados del experimento para mostrar el efecto de la compensación cuando se utiliza la estrategia CORRS. Se sumó una señal senoidal al voltaje del motor como perturbación. El tiempo de muestreo fue  $\delta = 20\mu s$  y el tiempo de ejecución del actuador  $\mu = 400\mu s$ . En la Fig. 3.2 se muestra la posición angular del péndulo  $x_2$  en el recuadro superior y la señal identificada de las entradas desconocidas  $\hat{w}$  en el recuadro inferior. Como puede apreciarse, la  $\hat{w}(t)$  consiste en la señal de voltaje

que se le sumó al motor, así como de las perturbaciones desconocidas del sistema. Se observa que para  $t = 0$  to  $t \approx 5s$ , el control nominal actúa sobre el sistema sin añadir la compensación (i.e.  $u(t) = -Kx(t)$ ); from  $t \approx 5(s)$ , una señal senoidal es sumada al voltaje del motor; en  $t \approx 10s$ , se aprecia el efecto de la compensación al agregar la señal identificada al control (i.e.,  $u(t) = -Kx(t) - G\hat{w}(t)$ ) mejorándose el desempeño considerablemente. Puede verse que, gracias al control con compensación, el sistema mantiene sus propiedades robustas con respecto a perturbaciones acopladas.

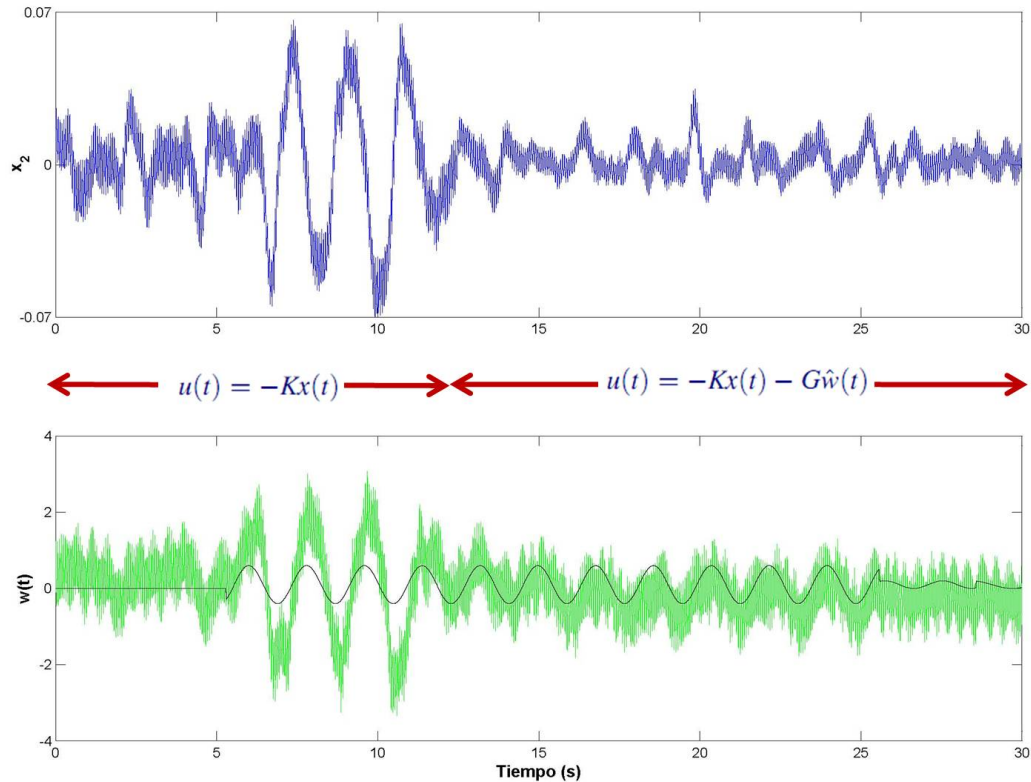


Figura 3.2: Efecto de la perturbación  $w(t)$  (abajo) en la posición angular del péndulo  $x_2(t)$  [rad] (arriba). De  $0 \leq t < 10$  sin compensación ( $u_1 = 0$ ), y a partir de  $t \approx 10$  con  $u_1(t) = -G\hat{w}(t)$

Ahora, se muestra el resultado de tres experimentos diferentes para los cuales se usaron distintos pares de valores para el tiempo de muestreo y de ejecución del actuador

Cuadro 3.1: Desempeño del sistema para 3 pares de tiempos de ejecución y muestreo

	$(\mu s)$	CORRS	MDISC
<i>I.</i>	$\delta = 20$ $\mu = 300$	Compensa con mejor precisión que el MDISC	Peor desempeño que el CORRS
<i>II.</i>	$\delta = 500$ $\mu = 83$	Pobre precisión en la identificación lo que implica un error en la compensación	Sensible solamente a la exactitud de la observación
<i>III.</i>	$\delta = 1000$ $\mu = 83$	Su eficiencia es dominada por la exactitud en la identificación	El error del control se incrementa con el <i>chattering</i>

$\delta$  y  $\mu$ , los cuales corresponden a los tres casos principales analizados en la Sección 3.3. La Fig. 3.3 muestra la posición del péndulo  $x_2$  usando ambas metodologías. La columna de la izquierda muestra la posición del péndulo usando CORRS; la columna derecha muestra la posición del péndulo cuando el control discontinuo MDIS. Cada renglón muestra los resultados para cada caso discutido en la sección anterior. En la Tabla 3.1 se resumen los resultados con respecto a los tiempos de muestreo y de ejecución.

Finalmente, se realizó un experimento para corroborar los efectos de en la precisión del sistema al aumentar el grado del diferenciador. La Fig. 3.4 ilustra en ambos casos la estrategia de control es MDIS con  $\delta = 500(\mu s)$  y  $\mu = 80(\mu s)$ . La Fig. 3.4.A muestra la posición del péndulo  $x_2$  cuando MDIS se diseña basado en la estimación del estado vía un observador por MDOS de primer orden (i.e.  $j = 1$  en la ecuación (2.11)); por otro lado, la Fig. 3.4.B muestra la estabilización de  $x_2$  vía MDIS usando un observador por MDOS de 2º orden. La precisión es claramente mejorada al incrementar el orden del diferenciador MDOS.

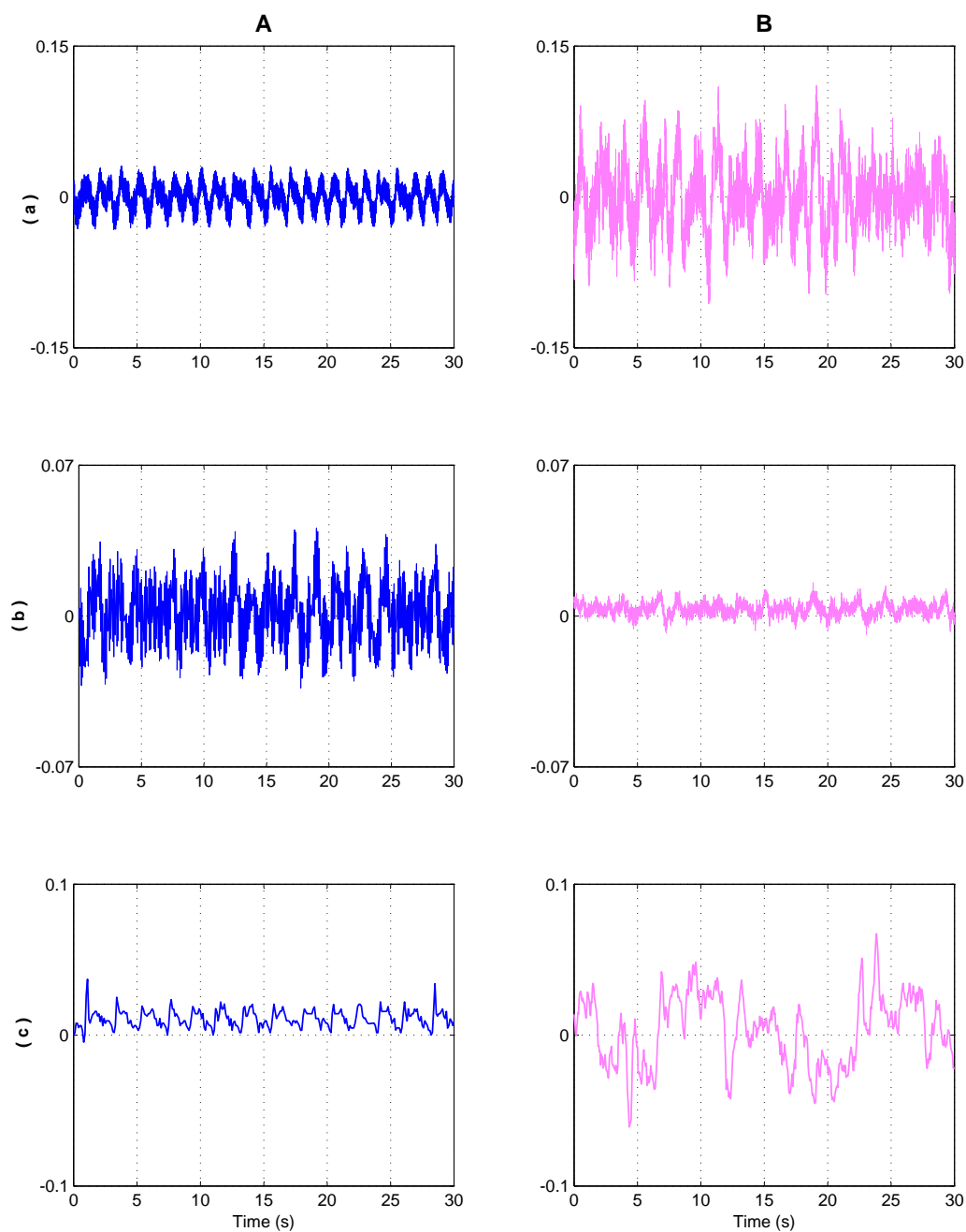


Figura 3.3: Comparación de la posición  $x_2$  [rad] usando CORRS y MDIS para tres pares de valores de  $(\delta, \mu)$ . Caso I, (a)  $\delta = 20(\mu s)$ ,  $h = 300(\mu s)$ ; caso II, (b)  $\delta = 500(\mu s)$ ,  $h = 83(\mu s)$ ; caso III (c)  $\delta = 1000(\mu s)$ ,  $h = 83(\mu s)$

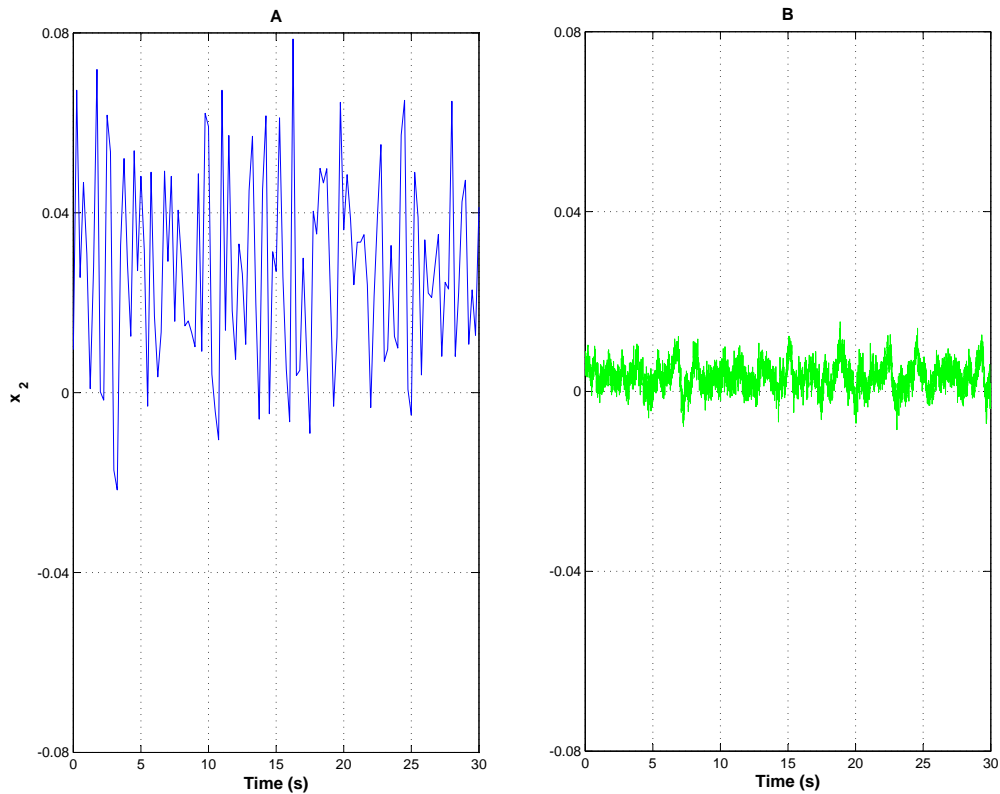


Figura 3.4: Precisión de  $x_2$ [rad] usando MDIS aplicando: A. un diferenciador de 1er orden y B. un diferenciador de 2o orden.

### 3.5 Aplicación. Linealización vía compensación de incertidumbres

En esta sección se usa un control por compensación de incertidumbres acopladas para aproximar la respuesta de un sistema no lineal a la de un modelo linealizado. Esto con el fin de robustificar las oscilaciones generadas en un sistema mediante un controlador de estructura variable.

La generación de oscilaciones periódicas usando controladores vía modos deslizantes de segundo orden ha sido estudiada en los trabajos de [ABFI09a]-[ABFI09b]. La idea es generar oscilaciones periódicas de baja frecuencia y amplitud grande al contrario de las oscilaciones de alta frecuencia conocidas como *chattering* que ocurren cuando se

usan controladores de estructura variable.

La estimación de la amplitud y frecuencia de las oscilaciones se basan en el método de la Función Descriptiva (FD) (ver p.e. [Kha02]). El método de la FD está sujeto a suposiciones estrictas con respecto a la dinámica de la planta. En primer lugar, asume que el modelo de la planta puede separarse en una parte lineal y una no lineal donde los términos no lineales son de estructura conocida. Por otro lado, en el análisis de la oscilación solo se considera la frecuencia fundamental, sin tomar en cuenta las armónicas que pueden estar presentes, esta aproximación es válida en tanto que la planta tenga propiedades de filtro paso bajas.

Para el caso particular de generación de oscilaciones, que es el que atañe a éste ejemplo, se supone que las únicas no linealidades presentes en el sistema son las que se introducen con el controlador de estructura variable y que el modelo de la planta es completamente lineal. No obstante, en cualquier sistema mecánico están presentes fuerzas de fricción, zonas muertas, vibraciones, entre otras, que pueden hacer que el sistema en lazo cerrado carezca de robustez. El objetivo del control por compensación es eliminar estas perturbaciones y de este modo compensar la diferencia entre la planta no lineal y un modelo linealizado de la misma.

Sea el sistema no lineal

$$\dot{x}(t) = f(x) + B(u(t) + g(t)) \quad (3.11)$$

$$y_1(t) = Cx$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado,  $u \in \mathbb{R}^m$  es el vector de entradas;  $g(t) \in \mathbb{R}^m$  contiene las incertidumbres del sistema y  $y_1(t) \in \mathbb{R}$  es la salida. Linealizando el sistema (3.11) alrededor del punto de equilibrio  $x^*$  se tiene

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(u(t) + w(t)) \quad (3.12)$$

$$y_1(t) = Cx \quad (3.13)$$



Donde  $w(t)$  representa las incertidumbres y no linealidades de la planta. Las matrices  $A, B, C$  son conocidas.

Se considera que el sistema satisface la suposición de observabilidad fuerte **S1**, de controlabilidad **S4** y además, la condición de acoplamiento **S5** se reescribe como:

- $w(t)$  es una función absolutamente continua, existe una constante  $w^+$  tal que  $\|w(t)\| \leq w^+$  y  $\|w(t)\| \leq w^+$  para todo  $t \geq 0$ .

Se busca entonces proponer un control que compense los efectos de las incertidumbres y no no linealidades  $w(t)$ , una vez que se logrará, mediante el análisis de la FD se determinan los parámetros del controlador de estructura variable. Se propone como control

$$u(t) = u_\ell(t) + u_r(t) \quad \forall t \geq T \quad (3.14)$$

donde  $u_\ell(t)$  es un control linealizante tal que (3.12) se transforme en el sistema lineal nominal (es decir, sin perturbaciones y/o entradas desconocidas) y  $u_r(t)$  es un control que realiza una tarea específica sobre el sistema linealizado. El término  $u_\ell(t)$  será diseñado para compensar la diferencia entre el sistema real y el sistema linealizado. El cual es de la misma forma que (3.4), es decir

$$u_\ell(t) = -Kx(t) - \hat{w}(t) \quad (3.15)$$

donde la matriz  $K$  es una ganancia estabilizante del sistema nominal y  $\hat{w}(t)$  es el estimado de las incertidumbres. En el caso ideal,  $\hat{w}(t) \equiv w(t)$  después de un tiempo finito. De este modo, al aplicar el control  $u_\ell(t)$  al sistema (3.12) se tiene la siguiente dinámica

$$\dot{x}(t) = \hat{A}x(t) + Bu_r(t) \quad (3.16)$$

donde  $\hat{A} := (A - BK)$  es Hurwitz. Se tiene entonces que el control (3.15) compensa exactamente las no linealidades (acopladas) y estabiliza el sistema (3.12).

## **Generación robusta de oscilaciones**

Sea el sistema linealizado

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \hat{A}x(t) + Bu_r(t) \\ y_1(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y_1 \in \mathbb{R}, \quad (3.17)$$

donde la señal de control

$$u_r(t) = -c_1 \operatorname{sgn}(y) - c_2 \operatorname{sgn}(\dot{y}) \quad (3.18)$$

es un controlador de dos relevadores, el cual exita el movimiento periódico en el sistema lineal. Los escalares  $c_1$  y  $c_2$  son diseñados tal que la salida del sistema tenga un movimiento periódico estable de frecuencia y amplitud deseadas.

El diagrama de lazo cerrado de la planta linealizada y el controlador de dos relevadores se muestra en la Fig. 3.5. Los valores de parámetros  $c_1$  y  $c_2$  en (3.18) generan un movimiento oscilatorio (ciclo límite) a la salida  $y(t)$  de frecuencia  $\Omega$  y amplitud  $A_1$ . Estos parámetros son calculados usando el método de la función descriptiva que se describe a continuación.

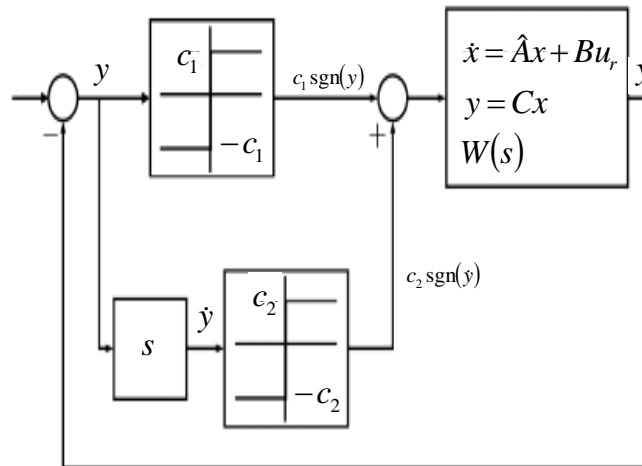


Figura 3.5: Sistema con dos relevadores.

### **Función descriptiva del controlador con doble relevador**

Sea el sistema linealizado (3.17) el cual puede ser representado como una función de transferencia dada por

$$W(s) = C(sI - \hat{A})^{-1}B.$$

La FD "N" del controlador de estructura variable (3.18) se define como la primera armónica de la señal periódica de control dividida por la amplitud de la salida  $y_1(t)$  [Ath75]:

$$N = \frac{\omega}{\pi A_1} \int_0^{2\pi/\omega} u_r(t) \sen \omega t dt + j \frac{\omega}{\pi A_1} \int_0^{2\pi/\omega} u_r(t) \cos \omega t dt \quad (3.19)$$

donde  $A_1$  es la amplitud de la entrada a la no linealidad ( $y_1(t)$ ) y  $\omega$  es la frecuencia de la salida  $y_1(t)$ . Sin embargo, el control (3.18) puede ser analizado como la conexión en paralelo de dos relevadores ideales, donde la entrada al primer relevador es la variable deslizante y la entrada al segundo relevador es la derivada de la variable deslizante como se muestra en la Fig. 3.5. La FD del primer relevador es:

$$N_1 = \frac{4c_1}{\pi A_1},$$

y para el segundo relevador es:

$$N_2 = \frac{4c_2}{\pi A_2},$$

donde  $A_2$  es la amplitud de  $dy_1/dt$ . Ahora, tomando en cuenta la relación entre  $y_1$  y  $dy_1/dt$  en el dominio de Laplace, tenemos que la relación entre las amplitudes  $A_1$  y  $A_2$  es tal que

$$A_2 = A_1 \Omega$$

donde  $\Omega$  es la frecuencia de la oscilación. Usando la notación del control (3.18) es posible reescribir la ecuación (3.19) como:

$$N = N_1 + sN_2 = \frac{4c_1}{\pi A_1} + j\Omega \frac{4c_2}{\pi A_2} = \frac{4}{\pi A_1} (c_1 + jc_2), \quad (3.20)$$

donde  $s = j\Omega$ . Nótese que la FD del algoritmo (3.18) depende únicamente del valor de la amplitud. Esto sugiere encontrar los parámetros del ciclo límite a través de la ecuación

de balance armónico [Ath75]:

$$W(j\Omega) = -\frac{1}{N(A_1)}, \quad (3.21)$$

donde  $W(j\Omega)$  es la respuesta característica de la frecuencia compleja (véase diagrama de Nyquist) de la planta. El lado derecho de la ecuación anterior esta dado por

$$-\frac{1}{N(A_1)} = \pi A_1 \frac{-c_1 + jc_2}{4(c_1^2 + c_2^2)}. \quad (3.22)$$

La ecuación (3.21) es equivalente a la condición de respuesta en frecuencia del sistema de lazo abierto al intersecar el eje real en el punto  $(-1, j0)$ . La ilustración gráfica de la técnica para resolver la ecuación (3.21) se presenta en la Fig.3.5 . La función  $-1/N(A_1)$  es una línea recta cuya pendiente depende de la razón  $c_2/c_1$ . El punto de intersección de esta función y de la gráfica de Nyquist  $W(j\Omega)$  da la solución del problema de oscilación. Los pasos para sintonizar  $c_1$  y  $c_2$  se listan a continuación

- a) Identificar el cuadrante en la traza de Nyquist donde se localiza la frecuencia de oscilación deseada, esto es,  $\Omega$  puede pertenecer a cualquiera de los siguientes conjuntos:

$$Q_1 = \{\omega \in \mathbb{R} : \text{Re}\{W(j\omega)\} > 0, \text{Im}\{W(j\omega)\} \geq 0\}$$

$$Q_2 = \{\omega \in \mathbb{R} : \text{Re}\{W(j\omega)\} \leq 0, \text{Im}\{W(j\omega)\} \geq 0\}$$

$$Q_3 = \{\omega \in \mathbb{R} : \text{Re}\{W(j\omega)\} \leq 0, \text{Im}\{W(j\omega)\} < 0\}$$

$$Q_4 = \{\omega \in \mathbb{R} : \text{Re}\{W(j\omega)\} > 0, \text{Im}\{W(j\omega)\} < 0\}.$$

- b) La frecuencia de las oscilaciones depende solamente de la razón  $\xi = c_2/c_1$ .

$$\xi = \frac{c_2}{c_1} = -\frac{\text{Im}\{W(j\Omega)\}}{\text{Re}\{W(j\Omega)\}}. \quad (3.23)$$

La amplitud de las oscilaciones esta dada por:

$$A_1 = \frac{4}{\pi} |W(j\Omega)| \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad (3.24)$$

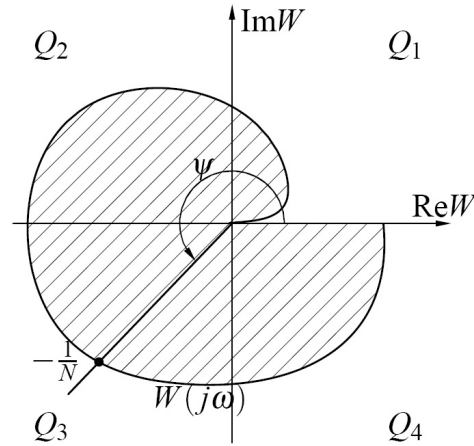


Figura 3.6: Ejemplo de gráfica de Nyquist del sistema en lazo abierto  $W(j\omega)$  con dos relevadores.

resolviendo para  $c_1$  y  $c_2$  se tiene

$$c_1 = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \frac{A_1}{|W(j\Omega)|} \left( \sqrt{1 + \xi^2} \right)^{-1} & \text{si } \Omega \in Q_2 \cup Q_3 \\ -\frac{\pi}{4} \frac{A_1}{|W(j\Omega)|} \left( \sqrt{1 + \xi^2} \right)^{-1} & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.25)$$

$$c_2 = \xi \cdot c_1. \quad (3.26)$$

Se desea tener la estabilización orbital de la articulación subactuada, en este caso el péndulo de Furuta presentado en la Sección 3.4. Considerando el modelo lineal (3.10) y como salida  $y_1(t) = x_2(t)$

Los parámetros  $c_1$  y  $c_2$  del controlador de doble relevador (3.18) se calcularon a partir de (3.25) y (3.26) con

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 147,8 & -333,6 & -101,5 & -583,9 \\ 41,7 & -919,0 & 28,7 & -164,9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 46,75 \\ -13,20 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T.$$

En la Tabla I se muestran las frecuencias ( $\Omega^r$ ) y amplitudes ( $A_1^r$ ) obtenidas en simulación usando los valores de  $c_1$  y  $c_2$  calculados por medio del método de la función descriptiva

presentado en esta sección. Note que es posible obtener una solución en cada cuadrante donde cruce la gráfica de Nyquist de  $W(s)$ .

La ganancia de estabilización es  $K = [-3,1623, 73,9276, -2,1985, 12,4888]$ ,  $G = 1$ . La Fig. 3.7 muestran los resultados experimentales para una oscilación de  $A_1 = 0,08$   $\Omega = 8 \left(\frac{rad}{sec}\right)$ . La gráfica superior se obtuvo sin compensar las no linealidades y perturbaciones del sistema. Adicionalmente se sumó una señal de voltaje al motor como perturbación externa de  $0,4 \sin(4t) + 0,5$ . El cuadro inferior de la Fig.3.7 muestra el la posición del péndulo cuando se llevó a cabo la linealización por compensación de incertidumbres. Aunque en ambos casos se aprecia que la frecuencia principal de oscilación es aproximadamente la estimada por el método de generación de oscilaciones, en la inferior se aprecia que la señal experimental se aproxima más a la estimada por la teoría. **Precisión** Tomando en cuenta los errores causados por la discretización y

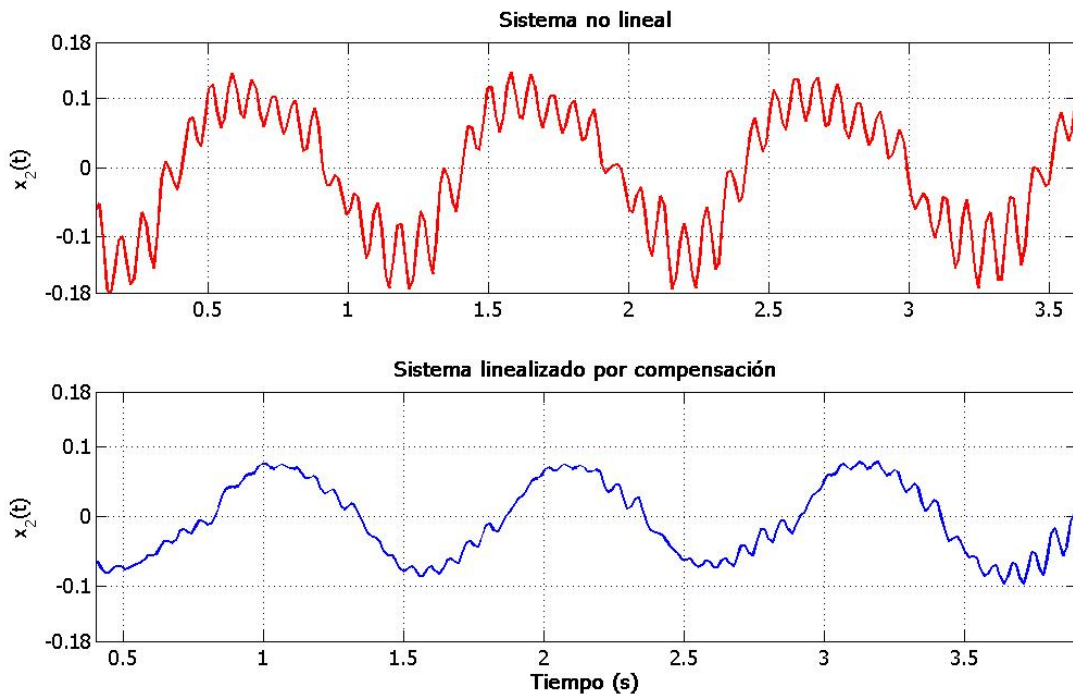


Figura 3.7: Movimiento periódico de la articulación subactuada  $q_2$  sin compensar (arriba) y compensado (abajo).

los ruidos determinísticos presentes en el sistema, así como el error provocado por la

Cuadro 3.2: Cálculo de los valores de  $c_1$  y  $c_2$  para diversas frecuencias y amplitudes deseadas.

$\Omega$	$A_1$	Cuadrante	$c_1$	$c_2$	$\Omega^r$	$A_1^r$
0.5	0.5	$Q_4$	-0.114	-0.29	0.36	0.4
1.0	0.3	$Q_3$	-0.333	0.333	1.04	0.28
2.0	0.2	$Q_2$	0.0444	0.3110	1.79	0.04
2.5	0.1	$Q_1$	0.211	-0.741	2.2	0.1

constante de tiempo de los actuadores, se tiene que el error debido a dichos efectos es  $\epsilon = O(\mu) + O(\Delta^{\alpha+1}) + O(\Delta^\alpha)$ .

### 3.6 Conclusiones

Con el observador basado en MDOS del Capítulo 2, el cual provee la observación del estado y la identificación de las entradas desconocidas, de manera teóricamente exacta y en un tiempo finito. Partiendo de la estimación en tiempo finito del estado y de las perturbaciones se plantearon dos técnicas para el rechazo de las perturbaciones acopladas. Una es la compensación de este tipo de señales desconocidas usando sus valores identificados, la otra técnica se basa en el rechazo de las incertidumbres mediante un control deslizante por salida basado en los valores observados del estado.

Las aportaciones de este capítulo se resumen como:

- Se propusieron dos técnicas control por salida robustas con respecto a las perturbaciones acopladas:
  - Control continuo por compensación basado en la observación del estado y la identificación de las entradas desconocidas (CORRS).
  - Control por modos deslizantes integrales por salida basado en los estados estimados (MDIS).

- Se propuso una metodología de selección para implementar el controlador más apropiado de acuerdo a las restricciones del sistema tales como el tiempo de muestreo, la constante de tiempo de los actuadores y los ruidos acotados del sistema.
- Se presentó una aplicación para linealización por compensación de incertidumbres. Esta técnica garantiza una mejor aproximación en la generación de oscilaciones al eliminar las diferencias entre la planta no lineal real y el modelo ideal usado para calcular la amplitud y frecuencia de la oscilación. Se presentaron resultados experimentales que corroboran la viabilidad del método.



# Capítulo 4

---

---

## Control de sistemas con incertidumbres desacopladas

---

Este capítulo aborda la regulación de sistemas lineales invariantes en el tiempo sujetos a los efectos de perturbaciones no acopladas. Se presenta una técnica de control por compensación para regular la dinámica subactuada. La viabilidad de este esquema se muestra mediante simulaciones.

Se propone un control por modos deslizantes basado en la estimación de los estados y en la identificación de las incertidumbres no acopladas y sus derivadas. Para llevar a cabo este control:

- Se diseña una superficie deslizante tal que el movimiento del sistema sobre la misma cumpla con las especificaciones deseadas, i.e. la compensación, teóricamente exacta, de las incertidumbres desacopladas y la regulación de la dinámica subactuada.
- Se diseña una ley de control discontinua tal que el estado del sistema sea llevado a la superficie y permanezca ahí para todo tiempo futuro a pesar de las perturbaciones e incertidumbres.

Sea el sistema LITED

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Dw(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{4.1}$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  ( $1 \leq p < n$ ) son el vector de estados, el control y la salida del sistema respectivamente. Las entradas desconocidas son representadas por el vector de funciones  $w(t) \in \mathbb{R}^q$ . El  $\text{rango}(C) = p$ ,  $\text{rango}(B) = m$  y  $\text{rango}(D) = q$ .

Para el sistema anterior se satisfacen las suposiciones **S1**, **S2**, **S3** y **S4**. Es decir es fuertemente observable (ver B.2), las perturbaciones a las que se encuentra sometido son suaves y es posible diseñar una ley de control.

Dada una matriz  $\mathcal{T}_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\mathcal{T}_1 = \begin{bmatrix} B^\perp \\ B^+ \end{bmatrix}$$

tal que

$$\mathcal{T}_1 B = \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix}\tag{4.2}$$

donde  $I_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$ . Al hacer una transformación de coordenadas  $x \leftrightarrow \mathcal{T}x$ , los estados se particionan de tal modo que  $x = \begin{bmatrix} x_1 & \eta_1 \end{bmatrix}^T$ . Aplicando la transformación al sistema (4.1) se tiene

$$\dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + B_1 \eta_1(t) + D_1 w(t)\tag{4.3}$$

$$\dot{\eta}_1(t) = E_1 x_1(t) + F_1 \eta_1(t) + H_1 w(t) + u(t)\tag{4.4}$$

donde  $x_1 \in \mathbb{R}^{n-m}$ ,  $\eta_1 \in \mathbb{R}^m$ ,  $D_1 \in \mathbb{R}^{(n-m) \times q}$ ,  $H_1 \in \mathbb{R}^{m \times q}$ .

El objetivo es diseñar un control que regule los estados no actuados (4.3), (o una parte de ellos), en presencia de perturbaciones no acopladas. Usando el observador por MDOS del Capítulo 2 y, después de un tiempo finito, se cuenta con los valores estimados

del estado así como de las entradas desconocidas y sus derivadas sucesivas hasta el orden  $\hat{w}^{(\alpha)}$ , es decir que para todo  $t > T$  se cuenta con

$$[\hat{x}(t), \hat{w}(t), \hat{w}^{(1)}(t), \dots, \hat{w}^{(\alpha)}] \quad (4.5)$$

De las Tablas 2.2 y 2.3 se puede ver que el error de estimación correspondiente es

$$[O(\delta^{\alpha+1}), O(\delta^\alpha), O(\delta^{\alpha-1}), \dots, O(\delta)] \quad (4.6)$$

A partir de (4.5) se puede construir la ley de control deseada.

Se propone como función de conmutación

$$s(t) = Kx_1(t) + \eta_1(t) + g(\hat{w}) \quad (4.7)$$

donde  $s \in \mathbb{R}^m$  es la superficie deslizante, la matriz  $K \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$  será diseñada tal que, en la superficie deslizante  $s = 0$ , se obtenga el desempeño deseado del sistema de orden reducido. El término  $g(\hat{w})$  será diseñado para compensar las perturbaciones no acopladas.

La ley de control es diseñada para alcanzar la superficie deslizante  $s = 0$

$$u(t) = -\rho(x) \frac{s(t)}{\|s(t)\|}, \quad (4.8)$$

## 4.1 Compensación de las incertidumbres no acopladas

Del subsistema (4.3) se aprecia que  $\eta_1(t)$  puede usarse como control para compensar las perturbaciones no acopladas que entran por el canal  $D_1$ , y estabilizar la coordenada  $x_1(t)$ . Para lograrlo se requiere que

- el par  $(A_1, B_1)$  sea controlable y
- las perturbaciones se encuentren acopladas al control  $\eta_1(t)$ .

Como el par  $(A, B)$  es controlable, puede mostrarse que el par  $(A_1, B_1)$  también es controlable. Considerando el sistema en forma regular y asumiendo que el rango  $B = m$ , se sigue que

$$\begin{aligned} \text{rango} \begin{bmatrix} sI - A & B \end{bmatrix} &= \text{rango} \left[ \begin{array}{cc|c} sI - A_1 & -B_1 & 0 \\ -E_1 & sI - F_1 & I_m \end{array} \right] \\ &= \text{rank} \begin{bmatrix} sI - A_1 & -B_1 \end{bmatrix} + m \text{ para toda } s \in \mathbb{C} \end{aligned} \quad (4.9)$$

esto implica que,

$$\text{rango} \begin{bmatrix} sI - A & B \end{bmatrix} = n \text{ si y solo si } \text{rango} \begin{bmatrix} sI - A_1 & -B_1 \end{bmatrix} = n - m$$

de donde el par  $(A, B)$  es controlable, si y solo si, el par  $(A_1, B_1)$  también es controlable.

Ahora, para que sea posible compensar las perturbaciones del subsistema (4.3), estas deben de estar acopladas al control  $\eta_1(t)$ , es decir que tiene que satisfacerse la condición

$$\text{span} \{D_1\} \subset \text{span} \{B_1\} \quad (4.10)$$

La ecuación que representa el movimiento de los estados cuando se encuentran confinados a la superficie deslizante se obtiene de  $s(t) \equiv 0$ . Es decir, cuando el sistema alcanza la superficie deslizante se tiene que

$$\eta_1(t) = -Kx_1(t) - g(\hat{w}) \quad (4.11)$$

$$\dot{x}_1(t) = (A_1 - B_1K)x_1(t) - B_1g(\hat{w}) + D_1w(t) \quad (4.12)$$

Debido a que el subsistema (4.3) es controlable, es posible diseñar la ganancia  $K$  tal que la matriz  $A_s \triangleq (A_1 - B_1K)$  tenga eigenvalores estables. Diseñando el compensador  $g(\hat{w}) = \Gamma_1\hat{w}(t)$ , donde la matriz de ganancias  $\Gamma_1 \in \mathbb{R}^{m \times q}$  es seleccionada de modo que

1

$$B_1 \Gamma_1 = D_1 \quad (4.13)$$

La dinámica reducida (4.12) queda como

$$\dot{x}_1(t) = (A_1 - B_1 K) x_1(t) + D_1 (w(t) - \hat{w}(t))$$

y en el caso ideal, cuando  $\hat{w}(t) \equiv w(t)$

$$\dot{x}_1(t) = A_s x_1(t) \quad (4.14)$$

Debido a que los eigenvalores de  $A_s$  tienen parte real negativa, la ecuación (4.14) es exponencialmente estable. Esto es, las incertidumbres no acopladas presentes en la coordenada  $x_1(t)$  son compensadas y las trayectorias son estabilizadas.

Las trayectorias del estado  $x_1(t)$  convergerán exponencialmente, es decir, existen constantes  $a_1, b_1 > 0$  tales que

$$\|x_1(t)\| \leq a_1 \|x_1(0)\| \exp^{-b_1 t} \quad \forall t > t_\sigma$$

La coordenada  $\eta_1(t)$  estará acotada cuando el sistema llegue a la superficie deslizando. Esto puede verse claramente al obtener la norma de la ecuación (4.11)

$$\|\eta_1(t)\| \leq \|K\| \|x_1(t)\| + \|\Gamma_1\| w^+ \quad \forall t > t_\sigma \quad (4.15)$$

### **Dinámica del modo deslizando**

Ahora, hay que garantizar que la ley de control (4.8) induce un movimiento deslizando a pesar de la presencia de incertidumbres no acopladas. A partir de la ecuación (4.7), se tiene que la derivada en el tiempo de  $s(t)$  está dada por

$$\dot{s}(t) = \Phi x(t) + (K D_1 + H_1) w(t) + \Gamma \hat{w}^{(1)}(t) + u(t) \quad (4.16)$$

---

<sup>1</sup> En particular, cuando el rango( $B_1$ ) =  $n - m$ , la matriz  $\Gamma_1 = B_1^+ D_1$ , donde  $B_1^+$  es la pseudoinversa por la derecha de  $B_1$ , esto es  $B_1^+ = B_1^T (B_1 B_1^T)^{-1}$ .

donde la matriz  $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times n}$  está definida como  $\Phi := \begin{bmatrix} KA_1 + E_1 & KB_1 + F_1 \end{bmatrix} \mathcal{T}_1$ .  
Elijiendo como candidata de Lyapunov  $V(s) = \frac{s^T(t)s(t)}{2}$  y tomando su derivada en el tiempo

$$\begin{aligned} \dot{V}(s) &= s^T(t) \left( \Phi x(t) + (KD_1 + H_1)w(t) + \Gamma_1 \hat{w}^{(1)}(t) - \rho(x) \frac{s(t)}{\|s(t)\|} \right) \\ &\leq -\|s(t)\| (\rho(x) - \|\Phi\| \|x(t)\| - \phi) \end{aligned} \quad (4.17)$$

la ganancia escalar  $\rho(x)$  satisface la condición

$$\rho(x) - \|\Phi\| \|x\| - \phi \geq \zeta > 0 \quad (4.18)$$

donde  $\zeta > 0$  es una constante y  $\phi := \|(KD_1 + H_1)\| w^+ + \|\Gamma\| w^+$ ,  $\rho(x) > \|\Phi\| \|x(t)\| + \phi + \zeta$ .

Combinando ambas desigualdades (4.17) y (4.18), se sigue que la derivada de la candidata de Lyapunov satisface  $\dot{V}(s) \leq -\zeta V^{\frac{1}{2}}$ . Entonces, la ganancia  $\rho(x)$  inducirá un movimiento deslizante.

### **Ejemplo 1**

Sea el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_a(t) &= x_b(t) \\ \dot{x}_b(t) &= x_c(t) + w(t) \\ \dot{x}_c(t) &= u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} x_a & x_c \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (4.19)$$

El sistema (4.19) es controlable y fuertemente observable. La perturbación  $w(t) = \sin(2t) + 0,5$ . Al aplicar la transformación (4.2) se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_1} x_1(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B_1} \eta_1(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{D_1} w(t) \\ \dot{\eta}_1(t) &= u(t) \end{aligned} \quad (4.20)$$

del sistema anterior se observa que las incertidumbres desacopladas pueden ser compensadas a través de la superficie deslizante ( $\text{span } D_1 \subset \text{span } B_1$ ). La ganancia del control por modos deslizantes (4.18) es  $\rho(x) = 20 \|x(t)\| + 2$ . La superficie tiene la forma

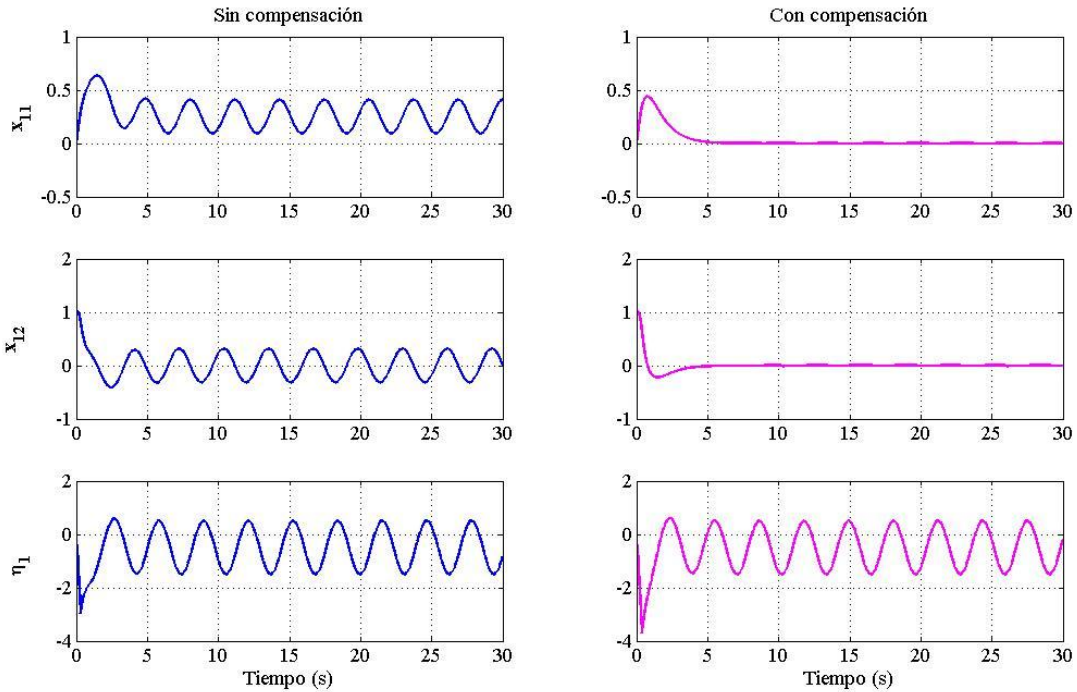


Figura 4.1: La columna de la izquierda muestra el estado sin compensación y la columna de la derecha los estados cuando se compensan totalmente las perturbaciones no acopladas.

$s(t) = x_1(t) + K\eta_1(t) + \Gamma_1\hat{w}(t)$ , donde  $\Gamma_1 = 1$  y la matriz  $K$  es tal que la dinámica subactuada tenga un par de eigenvalores en  $\{-1, -2\}$ . La Fig. (4.2) muestra los estados del sistema, la columna (A) muestra los resultados cuando no hay compensación a través de la superficie (i.e.  $s(t) = x_1(t) + K\eta_1(t)$ ) y los efectos de la perturbación están presentes en todo el estado. La columna (B) muestra los resultados cuando compensación de las incertidumbres no acopladas es realizada a través de la superficie deslizante, como resultado  $x_1 = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \end{bmatrix}^T$  es compensada y estabilizada, mientras que las trayectorias del estado  $\eta_1(t)$  permanecen acotadas. Ahora, para el ejemplo anterior, si se considera

que la perturbación afecta al estado  $x_a(t)$ , es decir

$$\begin{aligned}\dot{x}_a(t) &= x_b(t) + w(t) \\ \dot{x}_b(t) &= x_c(t) \\ \dot{x}_c(t) &= u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} x_a & x_c \end{bmatrix}^T\end{aligned}\tag{4.21}$$

El sistema sigue siendo fuertemente observable, al aplicar la transformación (4.2) se tiene que

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_1} x_1(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B_1} \eta_1(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{D_1} w(t) \\ \dot{\eta}_1(t) &= u(t)\end{aligned}\tag{4.22}$$

se aprecia que no se satisface la propiedad  $\text{span}\{D_1\} \subset \text{span}\{B_1\}$ . En este caso no sería posible compensar la totalidad de la dinámica subactuada, no obstante, es posible compensar al menos una parte de los efectos de las incertidumbres no acopladas como se describe en la siguiente sección.

## 4.2 Compensación anidada de incertidumbres no acopladas

En esta sección se presenta una estrategia para abordar el caso general de los sistemas que no satisfacen la suposición de acoplamiento  $\text{span}\{D_1\} \subset \text{span}\{B_1\}$ . Considérese ahora el subsistema subactuado (4.3) que se reescribe a continuación

$$\dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + B_1 \eta_1(t) + D_1 w(t)\tag{4.23}$$

a su vez, éste puede transformarse en dos subsistemas conectados entre sí. Asumiendo el rango  $(B_1) = m_1$ , donde  $m_1 \leq m$ , existe una transformación invertible  $\mathcal{T}_2 \in$



$\mathbb{R}^{(n-m-m_1) \times (n-m_1)}$  tal que

$$\mathcal{T}_2 B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{m_1} \end{bmatrix}$$

Aplicando la transformación de coordenadas  $\mathcal{T}_2 x_1 = \begin{bmatrix} x_2^T & \eta_2^T \end{bmatrix}^T$  al subsistema (4.23), se tiene que

$$\dot{x}_2(t) = A_2 x_2(t) + B_2 \eta_2(t) + D_2 w(t) \quad (4.24)$$

$$\dot{\eta}_2(t) = E_2 x_2(t) + F_2 \eta_2(t) + H_2 w(t) + \mathcal{B}_1 \eta_1(t) \quad (4.25)$$

donde  $x_2 \in \mathbb{R}^{n-m-m_1}$ ,  $\eta_2 \in \mathbb{R}^{m_1}$ ,  $\mathcal{B}_1 = \begin{bmatrix} I_{m_1} & 0_{m-m_1} \end{bmatrix}$ . El par  $(A_2, B_2)$  es controlable y puede mostrarse de manera semejante a (4.9).

Si el nuevo subsistema (4.24) satisface la condición de acoplamiento

$$\text{span} \{D_2\} \subset \text{span} \{B_2\} \quad (4.26)$$

entonces, existe una matriz  $\Gamma_2$  tal que  $B_2 \Gamma_2 = D_2$ .

Para compensar los efectos de las perturbaciones y estabilizar la coordenada  $x_2(t)$ , la variable  $\eta_2(t)$  puede ser utilizada como control. Diseñando

$$\eta_2(t) = -K_2 x_2(t) - \Gamma_2 \hat{w}(t)$$

como control para estabilizar la coordenada  $x_2(t)$ , tal que cuando  $\hat{w}(t) \equiv w(t)$

$$\dot{x}_2(t) = (A_2 - B_2 K_2) x_2(t)$$

donde la ganancia  $K_2$  es tal que la matriz  $A_2 - B_2 K_2$  es Hurwitz. Con este objetivo se define la variable auxiliar

$$\xi_2(t) = \eta_2(t) + K_2 x_2(t) + \Gamma_2 \hat{w}(t). \quad (4.27)$$

Del subsistema (4.24) y (4.25) se tiene

$$\dot{x}_2(t) = A_{2s} x_2(t) + B_2 \xi_2(t) + D_2 (w(t) - \hat{w}(t)) \quad (4.28)$$

$$\dot{\xi}_2(t) = \bar{E}_2 x_2(t) + \bar{F}_2 \xi_2(t) + H_2 w(t) - F_2 \Gamma_2 \hat{w}(t) + \Gamma_2 \dot{\hat{w}}(t) + \mathcal{B}_1 \eta_1(t)$$

donde  $A_{2s} = A_2 - B_2K_2$ ,  $\bar{E}_2 = E_2 - F_2K_2 - K_2A_{2s}$ ,  $\bar{F}_2 = F_2 + K_2B_2$ . En el caso ideal, cuando  $\hat{w}(t) \equiv w(t)$  y  $D_2(w(t) - \hat{w}(t)) = 0$ , se tiene

$$\begin{aligned}\dot{x}_2(t) &= A_{2s}x_2(t) + B_2\xi_2(t) \\ \dot{\xi}_2(t) &= \bar{E}_2x_2(t) + \bar{F}_2\xi_2(t) + \bar{H}_2\hat{w}(t) + \Gamma_2\dot{\hat{w}}(t) + \mathcal{B}_1\eta_1(t)\end{aligned}\tag{4.29}$$

donde  $\bar{H}_2 = H_2 - F_2\Gamma_2$ . Ahora, se diseña un control a través de  $\eta_1(t)$  para estabilizar el sistema auxiliar (4.29).

### **Estabilización del sistema $x_2(t)$ , $\xi_2(t)$**

Considérese una función candidata de Lyapunov  $V(x_2, \xi_2) = x_2^T(t)Px_2(t) + \xi_2^T(t)\xi_2(t)$ , donde  $P$  es una matriz simétrica positiva definida que satisface la ecuación  $PA_{2s} + A_{2s}^TP = -I$ . Se tiene

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= -x_2^T(t)x_2(t) \\ &+ 2\xi_2^T(t)\left(\bar{E}_2 + B_2^TP\right)x_2(t) + \bar{F}_2\xi_2(t) + \bar{H}_2\hat{w}(t) + \Gamma_2\dot{\hat{w}}(t) + \mathcal{B}_1\eta_1(t)\end{aligned}$$

tal que diseñando

$$\eta_1(t) = -\mathcal{B}_1^+\left(\bar{E}_2 + B_2^TP\right)x_2(t) + \left(\bar{F}_2 + I\right)\xi_2(t) + \bar{H}_2\hat{w}(t) + \Gamma_2\dot{\hat{w}}(t)\tag{4.30}$$

la derivada de la función de Lyapunov es  $\dot{V} \leq -\|x_2(t)\|^2 - \|\xi_2(t)\|^2$ . En el caso ideal las coordenadas  $x_2(t)$ ,  $\xi_2(t)$  serán exponencialmente estables. Finalmente, la coordenada  $x_2(t)$  es exponencialmente estable, i.e. existen las constantes  $a_2, b_2 > 0$  tales que

$$\|x_2(t)\| \leq a_2 \|x_2(0)\| \exp^{-b_2 t} \quad \forall t > t_\sigma$$

y las trayectorias restantes del estado permanecerán acotadas  $\forall t > t_\sigma$ . De (4.30) se tiene

$$\begin{aligned}\|\eta_2(t)\| &\leq \|K_2x_2(t)\| + \|\Gamma_2\| w^+ \\ \|\eta_1(t)\| &\leq \|\Phi_2x_1\| + \|\Gamma_2 + H_2\| w^+\end{aligned}$$

La superficie deslizando

$$s(t) = \Phi_2x_1(t) + \eta_1(t) + \mathcal{B}_1^+\bar{H}_2\hat{w}(t) + \mathcal{B}_1^+\Gamma_2\dot{\hat{w}}(t)$$

donde  $\Phi_2 = \mathcal{B}_1^+ \left[ (\bar{E}_2 + B_2^T P) + (\bar{F}_2 + I) K_2 \quad \bar{F}_2 + I \right] \mathcal{T}_2$ . La dinámica del modo deslizante es

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= \Phi_2 \dot{x}_1(t) + \dot{\eta}_1(t) + \mathcal{B}_1^+ \bar{H}_2 \hat{w}^{(1)}(t) + \mathcal{B}_1^+ \Gamma_2 \hat{w}^{(2)}(t) \\ &= \varphi x(t) + \bar{D}_1 w(t) + \mathcal{B}_1^+ \bar{H}_2 \hat{w}^{(1)}(t) + \mathcal{B}_1^+ \Gamma_2 \hat{w}^{(2)}(t) + u(t) \end{aligned}$$

con  $\varphi = \left[ \Phi_2 A_1 + E_1 \quad \Phi_2 B_1 + F_1 \right] \mathcal{T}_1$ ,  $\bar{D}_1 = \Phi_2 D_1 + H_1$ . Eligiendo  $V = \frac{s^T(t)s(t)}{2}$  y diferenciando, se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(s) &= s^T(t) (\varphi x(t) + \bar{D}_1 w(t) + \mathcal{B}_1^+ \bar{H}_2 \hat{w}^{(1)}(t) + \mathcal{B}_1^+ \Gamma_2 \hat{w}^{(2)}(t) + u(t)) \\ &\leq \|s^T(t)\| (\|\varphi x(t) + \bar{D}_1 w(t) + \mathcal{B}_1^+ \bar{H}_2 \hat{w}^{(1)}(t) + \mathcal{B}_1^+ \Gamma_2 \hat{w}^{(2)}(t) - \rho(x)\|) \\ \rho(x) &\geq \|\varphi x(t)\| + \|\bar{\Gamma}_2\| w^+ + \zeta \end{aligned}$$

donde  $\bar{\Gamma}_2 = \left[ \bar{D}_1 \quad \bar{H}_2 \quad \Gamma_2 \right] y \zeta > 0$ .

### **Estabilización de la coordenada $x_\ell(t)$**

En caso de que no se satisfaga  $\text{span}\{D_2\} \subset \text{span}\{B_2\}$ , el procedimiento de regularización puede ser iterado hasta que para algún  $\ell > 1$ , la coordenada  $x_\ell(t)$  sea compensada y estabilizada, i.e. hasta que la condición

$$\text{span}\{D_\ell\} \subset \text{span}\{B_\ell\} \tag{4.31}$$

se satisface. Si el rango  $(B_{(\ell-1)}) = m_\ell$ , existe una transformación no singular  $\mathcal{T}_\ell \in \mathbb{R}^{(n-m_{\ell-1}) \times (n-m_{(\ell-1)})}$  tal que

$$\mathcal{T}_\ell B_{(\ell-1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{m_\ell} \end{bmatrix}$$

Aplicando la transformación de estados  $\mathcal{T}_\ell x_{(\ell-1)} = \left[ x_\ell(t) \quad \eta_\ell(t) \right]^T$  al subsistema (4.24) se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{x}_\ell(t) &= A_\ell x_\ell(t) + B_\ell \eta_\ell(t) + D_\ell w(t) \\ \dot{\eta}_\ell(t) &= E_\ell x_\ell(t) + F_\ell \eta_\ell(t) + H_\ell w(t) + \mathcal{B}_{(\ell-1)} \eta_{(\ell-1)}(t) \end{aligned}$$

con  $\mathcal{B}_{(\ell-1)} = \begin{bmatrix} I_{m_\ell} & 0_{m-m_1-\dots-m_\ell} \end{bmatrix}$  y el par  $(A_\ell, B_\ell)$  controlable. Si se satisface la condición de acoplamiento (4.31) entonces existe una matriz  $\Gamma_\ell$  tal que  $B_\ell \Gamma_\ell = D_\ell$ .

Después de las  $\ell$  - transformaciones realizadas, el sistema original (4.1) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \dot{x}_\ell(t) &= A_\ell x_\ell(t) + D_\ell w(t) + B_\ell \eta_\ell(t) \\ \dot{\eta}_\ell(t) &= E_\ell x_\ell(t) + F_\ell \eta_\ell(t) + H_\ell w(t) + \mathcal{B}_{(\ell-1)} \eta_{(\ell-1)}(t) \\ &\vdots \\ \dot{\eta}_2(t) &= E_2 x_2(t) + F_2 \eta_2(t) + H_2 w(t) + \mathcal{B}_1 \eta_1(t) \\ \dot{\eta}_1(t) &= E_1 x_1(t) + F_1 \eta_1(t) + H_1 w(t) + u(t) \end{aligned}$$

donde  $\eta_1 \in \mathbb{R}^m$ ,  $\eta_2 \in \mathbb{R}^{m_1}$  ...  $\eta_\ell \in \mathbb{R}^{m_{\ell-1}}$ ,  $x_\ell \in \mathbb{R}^{n-m-\dots-m_{\ell-1}}$ .

Primero se diseña  $\eta_\ell(t)$  para compensar y estabilizar el sistema  $x_\ell(t)$ . Es decir, si

$$\eta_\ell(t) = -K_\ell x_\ell(t) - \Gamma_\ell \hat{w}(t)$$

donde  $K_\ell$  es diseñada tal que  $(A_\ell - B_\ell K_\ell)$  sea Hurwitz. Cuando  $\hat{w}(t) \equiv w(t)$

$$\dot{x}_2(t) = (A_2 - B_2 K_2) x_2(t)$$

Con este objetivo se define la variable auxiliar

$$\xi_\ell(t) = \eta_\ell(t) + K_\ell x_\ell(t) + \Gamma_\ell \hat{w}(t). \quad (4.32)$$

Del subsistema (4.24) y (4.25) se tiene, tal que

$$\dot{x}_\ell(t) = A_{\ell s} x_\ell(t) + B_\ell \xi_\ell(t) \quad (4.33)$$

$$\dot{\xi}_\ell(t) = \bar{E}_\ell x_\ell(t) + \bar{F}_\ell \xi_\ell(t) + H_\ell w(t) + \Gamma_\ell \dot{\hat{w}}(t) + \mathcal{B}_\ell \eta_{\ell-1}(t) \quad (4.34)$$

donde  $A_{\ell s} = A_\ell - B_\ell K_\ell$ ,  $\bar{E}_\ell = E_\ell - F_\ell K_\ell - K_\ell A_{\ell s}$ ,  $\bar{F}_\ell = F_\ell + K_\ell B_\ell$ .

Ahora, se propone la función candidata de Lyapunov  $V(x_\ell, \xi_\ell) = x_\ell^T(t)P x_\ell(t) + \xi_\ell^T(t)\xi_\ell(t)$ , con  $P > 0$  que satisface la ecuación  $PA_{\ell s} + A_{\ell s}^T P = -I$  y se diseña el pseudo-control  $\eta_{\ell-1}(t)$  como una combinación lineal de las señales  $\{x_\ell, \eta_\ell, \hat{w}, \hat{w}^{(1)}\}$ .

Posteriormente, se propone un sistema auxiliar  $(\eta_{(\ell-1)}(t), \xi_{\ell-1}(t))$  y se diseña el control  $\eta_{\ell-2}(t)$ . El procedimiento se repite  $(\ell - 1) - veces$  para encontrar la superficie deslizante  $s(t)$  que será una combinación lineal de las señales  $\{x_\ell, \eta_\ell, \dots, \eta_1, \hat{w}, \dots, \hat{w}^{(\ell)}\}$ .

Finalmente, para  $t > t_\sigma$ , el sistema total será estabilizado. La coordenada  $x_\ell(t)$  compensada y las trayectorias de los demás estados  $\{\eta_{\ell-1}, \eta_{\ell-2}, \dots, \eta_1\}$  permanecerán acotadas.

Es claro, que para que este control pueda realizarse, es menester que la perturbación sea lo suficientemente suave, es decir  $\alpha \geq \ell$ .

### 4.3 Error de estabilización

Teóricamente, las perturbaciones son compensadas exactamente y el estado  $x_\ell(t)$  converge exponencialmente. No obstante, existe un error debido a la discretización y a ruidos determinísticos (Sección 2.6). Este error se incrementa al aumentar el orden de la derivada de la perturbación necesaria para el diseño del control. Aunado a esto, la constante de tiempo de los actuadores  $\mu$  provoca un error de  $O(\mu)$  ([Fri02]). Por lo que, la estabilización de la coordenada  $x_\ell(t)$  vía compensación anidada será

$$\dot{x}_\ell(t) = A_{s_\ell} x_\ell(t) + \varepsilon \tag{4.35}$$

donde la matriz  $A_{s_\ell}$  es Hurwitz y  $\varepsilon = O(\mu) + O(\delta^{\alpha-\ell})$ . Por lo tanto, no es posible estabilizar el origen, pero se puede alcanzar una estabilidad práctica, garantizando que el estado llega a una región últimamente acotada (véase Apéndice2). El tamaño de dicha región depende de las constantes de tiempo del sistema (actuadores, discretización, ruidos determinísticos). En la medida de lo posible, esta cota puede ser mejorada reduciendo  $\mu, \delta$  o bien incrementando el orden del diferenciador.

### Ejemplo 2

Retomando el ejemplo anterior, para el sistema (4.21). Aplicando la transformación  $x_1(t) = \begin{bmatrix} x_2(t) & \eta_2(t) \end{bmatrix}^T$  se tiene que

$$\dot{x}_2(t) = \eta_2(t) + w(t)$$

$$\dot{\eta}_2(t) = \eta_1(t)$$

La variable  $\eta_2(t)$  puede usarse como control. Con la variable auxiliar  $\xi_2(t) = \eta_2(t) + \hat{w}(t) + x_2(t)$ , se tiene

$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) + \xi_2(t)$$

$$\dot{\xi}_2(t) = -x_2(t) + \xi_2(t) + \dot{\hat{w}}(t) + \eta_2(t)$$

tomando como candidata de Lyapunov a  $V = \frac{x_2^2 + \xi_2^2}{2}$ , with  $\eta_1(t) = -2\xi_2 - \dot{\hat{w}}(t)$ ,  $\dot{V} \leq 0$  es garantizada.

$$\dot{V} = -x_2(t) + \xi_2(t) (\xi_2(t) + \hat{w}^{(1)}(t) + \eta_1(t))$$

el sistema  $x_2(t)$ ,  $\xi_2(t)$  converge exponencialmente a cero. La superficie deslizante queda como

$$\begin{aligned} s(t) &= \eta_1(t) + 2\xi_2(t) + \hat{w}(t)^{(1)} \\ &= \eta_1(t) + 2(\eta_2(t) + \hat{w}(t) + x_2(t)) + \hat{w}^{(1)}(t) \\ &= 2x_1(t) + \eta_1(t) + 2\hat{w}(t) + \hat{w}^{(1)}(t) \end{aligned}$$

## 4.4 Ejemplo

Considérese ahora el sistema de péndulo invertido rotatorio descrito en la Sección 3.4. En este caso se consideran perturbaciones no acopladas, p.e. fricción en el péndulo, variación en los parámetros, etc. La matriz de entrada de las perturbaciones esta dada

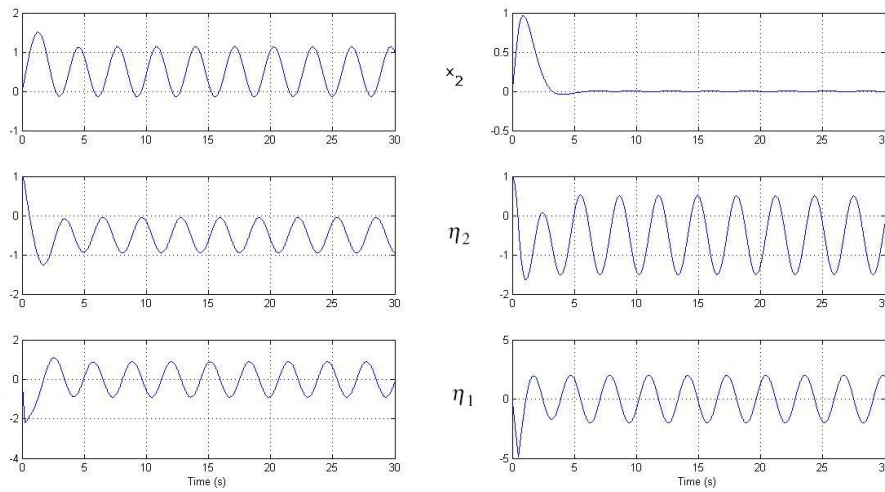


Figura 4.2: La columna de la izquierda muestra los estados sin compensación. La columna de la derecha muestra la compensación de la coordenada  $x_2$  y la estabilización de los estados restantes  $\eta_2, \eta_1$  cuando se usa la estrategia de compensación anidada.

por

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 59,41 \\ 26,85 \end{bmatrix}$$

Se puede comprobar que no se satisface la condición  $\text{span}(D) \subset \text{span}(B)$ . Regularizando el sistema (3.10), se tiene

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) = & \begin{bmatrix} 0 & -0,26 & 0,92 \\ -8,76 & -0,07 & 0,25 \\ 31,04 & -0,02 & 0,07 \end{bmatrix} x_1(t) \\ & + \begin{bmatrix} -0,27 \\ 0,92 \\ 0,26 \end{bmatrix} \eta_1(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -2,45 \\ 8,69 \end{bmatrix} w(t) \quad (4.36) \end{aligned}$$

$$\dot{\eta}_1(t) = \begin{bmatrix} -94,82 & 0,10 & -0,35 \end{bmatrix} x_1(t) + \begin{bmatrix} -1,31 \end{bmatrix} \eta_1(t) + \begin{bmatrix} -60,11 \end{bmatrix} w(t) + u(t)$$

Del sistema anterior se aprecia que no se satisface la propiedad  $\text{span } D_1 \subset \text{span } B_1$  por lo que es necesario regularizar el subsistema (4.36). Se tiene entonces

$$\dot{x}_2(t) = \begin{bmatrix} -8,38 & -1,36 \\ 28,67 & 8,38 \end{bmatrix} x_2(t) + \begin{bmatrix} 2,38 \\ -8,43 \end{bmatrix} \eta_2(t) + \begin{bmatrix} -2,45 \\ 8,69 \end{bmatrix} w(t) \quad (4.37)$$

$$\dot{\eta}_2(t) = \begin{bmatrix} 0,003 & 0,0009 \end{bmatrix} x_2(t) + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \eta_2(t) + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} w(t) + \eta_1(t) \quad (4.38)$$

se tiene entonces que  $\text{span } D_2 \subset \text{span } \{B_2\}$  y existe una  $\Gamma_2 = -1,031$ , tal que  $B_2\Gamma_2 = D_2$ . Se introduce la variable auxiliar  $\zeta_2 = \begin{bmatrix} -34,61 & -16,41 \end{bmatrix} x_2 + \eta_2 - 1,031\hat{w}(t)$  y se tiene que el sistema auxiliar (4.29) es

$$\dot{x}_2(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 74,08 & 37,74 \\ -263,27 & -130,08 \end{bmatrix}}_{A_{s2}} x_2(t) + \begin{bmatrix} 2,38 \\ -8,43 \end{bmatrix} \zeta_2(t) \quad (4.39)$$

$$\dot{\zeta}_2(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1757 & 829 \end{bmatrix}}_{\bar{E}_2} x_2(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 56 \end{bmatrix}}_{\bar{F}_2} \zeta_2(t) + \eta_1(t) \quad (4.40)$$

Se diseña  $\eta_1(t) = \begin{bmatrix} 1786,2 & 807,5 \end{bmatrix} x_2(t) + 57,00 \zeta_2(t) - \hat{w}^{(1)}(t)$  tal que  $\dot{V}(x_2, \zeta_2) \leq -\|x_2\|^2 - 2\|\zeta_2\|^2$ . Para el subsistema (4.39)

$$\eta_1(t) = \begin{bmatrix} -204,60 & -128,16 \end{bmatrix} x_2(t) + 57,00 \eta_2(t) - 58,78 \hat{w}(t) - \hat{w}^{(1)}(t)$$

Finalmente la superficie deslizante

$$s(t) = \begin{bmatrix} 8,10 & -238,50 & 17,43 & -65,44 \end{bmatrix} x(t) - 58,78 \hat{w}(t) - \hat{w}^{(1)}(t)$$



y la ganancia  $\rho(x) = 30 \|x\| + 30$ . La perturbación es  $w(t) = ,3 \sin 4t + \cos 24t + 0,3$  la cual satisface la condición de suavidad. El sistema es fuertemente observable, el índice  $k = 2$ . Se diseña un observador por MDOS usando un diferenciador de 3er orden, i.e.  $\alpha = 3$ , para obtener los estimados del estado, de la entrada desconocida  $\hat{w}(t)$  y de la derivada de la entrada desconocida  $\hat{w}^{(1)}(t)$ . Las ganancias del observador son las siguientes  $M_1 = C$ ,

$$M_2 = \begin{bmatrix} -11,40 & 0,76 & 1 & 0 \\ 1,56 & -13,28 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 11,40 & -0,76 \\ -1,56 & 13,28 \\ 24,7 & 78,54 \\ -12,07 & 100,44 \end{bmatrix}$$

Los resultados se muestran en la Fig. 4.3. La columna de la izquierda, muestra los estados sin compensación usando un control convencional por modos deslizantes ( $s = Kx_1 + \eta_1$ ). La columna de la derecha muestra la estabilización de la coordenada  $x_2$  usando un controlador por compensación anidada de perturbaciones ( $s = f(x, \hat{w}(t), \hat{w}^{(1)})$ ), las coordenadas restantes se mantienen acotadas.

## 4.5 Conclusiones

Se presentó una estrategia para estabilización de sistemas con incertidumbres no acopladas. Usando la reconstrucción exacta del estado y de las entradas desconocidas (incertidumbres desacopladas) se propuso un control basado en modos deslizantes que permite la compensación de las incertidumbres de al menos una parte de la dinámica no actuado logrando su estabilización, al mismo tiempo que garantiza que las trayectorias de los estados restantes permanecen acotadas.

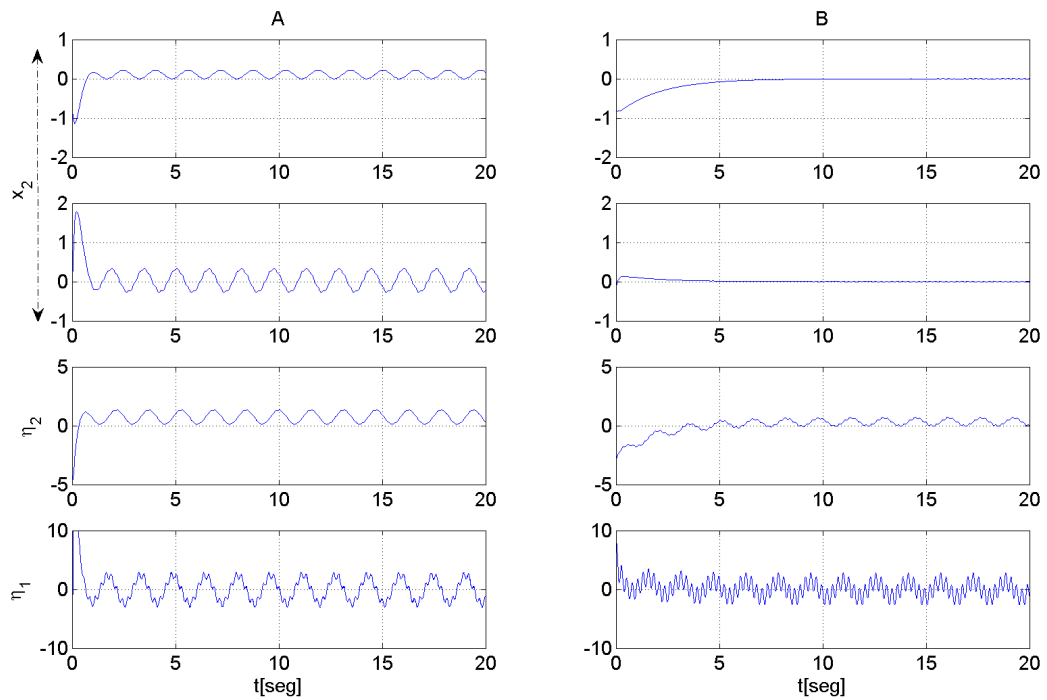


Figura 4.3: La columna de la izquierda, muestra los estados sin compensación usando un control convencional por modos deslizantes. La columna de la derecha muestra la estabilización de la coordenada  $x_2$  usando un controlador por compensación anidada de perturbaciones, las coordenadas restantes se mantienen acotadas.

# Capítulo 5

---

---

## Conclusiones

---

A partir de los observadores vía MDOS es posible diseñar estrategias de control basadas en la compensación exacta de las incertidumbres y perturbaciones de los sistemas. Las contribuciones de este trabajo se pueden enumerar como

1. Se propusieron dos esquemas distintos basados en la compensación por identificación de incertidumbres y en la compensación vía modos deslizantes integrales. Ambas estrategias están basadas en la observación del estado.
2. Se estimó el error de estabilización de cada una de las metodologías propuestas lo cual puede servir de referencia para comparar el desempeño de las estrategias basadas en identificación y compensación de incertidumbres con respecto a otras metodologías.
3. Se propuso un criterio de selección de controlador basado en las estimaciones de los errores de estabilización, de acuerdo a las restricciones del sistema, es decir, la discretización, el ancho de banda de los actuadores y nivel de ruido determinístico. Se realizaron experimentos en el péndulo invertido.
4. Se propuso una técnica para linealizar un sistema mediante la identificación

y compensación de las fricciones y no linealidades presentes en la planta con el objeto de compensar la diferencia entre el sistema no lineal y su modelo linealizado. Se mostró la viabilidad del método en la generación experimental de oscilaciones. La estrategia fue verificada experimentalmente en el péndulo invertido rotatorio.

5. En lo que respecta a las incertidumbres no acopladas se propuso una compensación usando una ley de control por modos deslizantes. Las incertidumbres no acopladas son compensadas a través de la superficie deslizante. El método se basa en transformaciones sucesivas de la dinámica subactuada, de tal modo que al menos una parte de las perturbaciones desacopladas sean acopladas a una entrada virtual de control. Al mismo tiempo se garantiza que las incertidumbres no compensadas no serán amplificadas y las trayectorias de los estados restantes se mantienen acotadas.

# Apéndice A

---

---

## Lista de símbolos

---

### Notación Matemática

$\mathbb{R}$	campo de los números reales
$\mathbb{C}$	campo de los números complejos
$\mathbb{R}^{n \times m}$	conjunto de matrices reales con $n$ renglones y $m$ columnas
$A^T$	transpuesta de la matriz $A$
$A^{-1}$	inversa de la matriz cuadrada $A$
$A^+$	pseudoinversa de la matriz $A$
$\text{rango}(A)$	rango de la matriz $A$
$I_n$	matriz identidad de $n \times n$
$X^\perp$	matriz ortogonal $X \in \mathbb{R}^{r \times c}$ $\text{rank}(X) = h$ $X^\perp X = 0$
$\ \cdot\ $	norma Euclidiana
$ a $	valor absoluto de número real $a$
$f^{[i]}(t)$	$i$ – ésimo antidiferenciador $f^{[i]}(t) = \int_0^t \cdots \int_0^{\tau_{i-1}} f(\tau_i) d\tau_i \cdots d\tau_1$
$\text{sgn}(\cdot)$	función signum
$\dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n)}$	primera, segunda y $n$ ésima derivada de $y$ con respecto al tiempo
$\equiv$	equivalente a
$O(\cdot)$	función de orden de magnitud

**Índice de variables**

$x(t) \in \mathbb{R}^n$	vector de estado
$y(t) \in \mathbb{R}^p$	vector de salidas
$u(t) \in \mathbb{R}^m$	vector de entradas
$w(t) \in \mathbb{R}^q$	vector de entradas desconocidas
$A, B, C, D$	matrices del sistema
$w^+$	cota de las perturbaciones
$u_0(t)$	control para el sistema nominal
$u_1(t)$	compensador de perturbaciones
$\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)$	estado y salida del observdor de Luenberger
$L$	ganancia del observador de Luenberger
$e(t)$	error de observación $e(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$
$y_e(t)$	$y_e(t) = Ce(t)$
$e^+$	cota del error
$T_e$	tiempo de estabilización del error de observación de Luenberger
$M_j$	matriz del algoritmo de desacoplamiento
$J_i$	$= (M_j D)^{\perp}$
$k$	$k \in \mathbb{Z} \ k \leq n$ tal que $\text{rank}(M_k) = n$
$\alpha$	derivada de mayor orden de la perturbación
$\hat{x}(t)$	estimado exacto del estado $\hat{x}(t) \equiv x(t)$ para todo $t > T$
$z_i$	variables del diferenciador
$\Theta(t)$	$M_k^+ \begin{bmatrix} J_{k-1} & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} Y^{[k-1]}$ argumento del diferenciador
$\hat{w}(t)$	identificación <i>exacta</i> de la entrada desconocida

$\delta$	tiempo de muestreo
$n(t)$	señal de ruido determinístico medible en el sentido de Lebesgue
$\nu$	cota del ruido determinístico $\ n(t)\  \leq \nu$
$\tilde{\Theta}(t)$	señal medida a la entrada del diferenciador por MDOS $\tilde{\Theta}(t) := \Theta(t) + n(t)$
$k_\delta, k_\eta, \Delta$	constantes
$\Psi^\beta(\sigma)$	$\left[  \sigma_1 ^\beta \operatorname{sgn}(\sigma_1) \quad \dots \quad  \sigma_n ^\beta \operatorname{sgn}(\sigma_n) \right]^T$
$r$	coordenada mayor del vector de grado relativo
$x_0$	estado nominal
$K$	ganancia del control
$\epsilon$	error de estabilización
$s$	superficie deslizante
$\mu$	constante de tiempo del controlador
$u_{eq}(t)$	control equivalente
$t_0$	tiempo inicial
$\tau$	variable de integración
$\rho(\bullet)$	ganancia del compensador
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$	constantes
$\mathcal{T}$	Transformación ; $\mathcal{T}x = x_1, \eta_1$
$x_i, \eta_i$	particiones sucesivas del estado
$A_i, B_i, D_i, E_i, F_i, H_i$	particiones de las matrices del sistema
$\zeta$	constante
$t_\sigma$	tiempo de llegada a la superficie deslizante

# Apéndice B

---

---

## Conceptos de sistemas multivariables

---

Sea el sistema multivariable

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Dw(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{B.1}$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$ ,  $w(t) \in \mathbb{R}^q$ .

**Definición 1.**  $s \in \mathbb{C}$  es llamado un *cero invariante* de la terna  $(A, C, D)$  si

$$\text{rango}(P(s)) = n + q \quad P(s) := \begin{bmatrix} sI - A & -D \\ C & 0 \end{bmatrix}\tag{B.2}$$

Donde  $P(s)$  es conocida como la *matriz de Rosenbrock* del sistema (B.1) y se obtiene tomando la transformada de Laplace de dicho sistema y reordenando, es decir

$$\begin{bmatrix} sI - A & -D \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(s) \\ W(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) \\ Y(s) \end{bmatrix}$$

Los ceros invariantes son el conjunto de frecuencias complejas  $\{s\}$  tales que una entrada  $w(t) = w(0)e^{st}$  distinta de cero, provoca una respuesta del estado  $x(t) = x(0)e^{st}$  distinta de cero, mientras que la salida del sistema es idénticamente cero para



todo tiempo. Una condición necesaria y suficiente para que esto se presente es que  $x$ ,  $x(0)$  y  $w(0)$  satisfagan

$$P(s) \begin{bmatrix} x(0) \\ w(0) \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{B.3})$$

Es claro que la información con respecto a la existencia de los ceros invariantes puede obtenerse del análisis del rango de  $P(s)$  en la ecuación (B.3).

**Definición 2.** [ES98]. *Considérese el sistema (B.1) el cual esta sujeto a una incertidumbre  $w(\bullet)$ . Sea  $\epsilon \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto acotado, entonces la solución de  $x(\bullet)$  del sistema incierto (B.1) se dice que es últimamente acotada con respecto al conjunto  $\epsilon$  si*

- *la solución permanece acotada en algún intervalo finito, i.e. si  $\|x(t_0)\| < \varsigma$  entonces,  $\|x(t)\| < d(\varsigma)$  para cualquier  $t \in [t_0, t_1)$*
- *la solución  $x(t)$  entra al conjunto acotado  $\epsilon$  en un tiempo finito y permanece ahí para todo tiempo futuro.*

# Apéndice C

---

---

## Publicaciones

---

### Memorias de congresos:

- A. Ferreira, E. Punta *Nested Backward Compensation of Unmatched Effects of Unknown Inputs Based on HOSM Identification* 11<sup>th</sup> **International Workshop on Variable Structure Systems**, México, Jun. 2010.
- A. Ferreira, F. J. Bejarano, L. Fridman *Robust Output Regulation with Exact Unmatched Uncertainties Compensation Based on HOSM Observation* 48<sup>th</sup> **Conference on Decision and Control**, Shangai, China, Dec. 2009.
- A. Ferreira, M. Jimenez-Lizarraga, L. Fridman *Robust Output Nash Strategies Based on Hierarchical Sliding Mode Observer in a Two-Player Differential Game* 47<sup>th</sup> **Conference on Decision and Control**, Cancún, Mexico, Dec. 9-11, 2008.
- L. Aguilar, I. Boiko, L. Fridman and A. Ferreira *Identification Based Generation of Self-excited Oscillations for Underactuated Mechanical Systems via Two-relay Algorithm* 10<sup>th</sup> **International Workshop on Variable Structure Systems**, Antalya, Turkey, Jun. 5-8, 2008.

- A. Ferreira, F. Bejarano, L. Fridman *Robust output feedback control: With or without chattering?* 46<sup>th</sup> **Conference on Decision and Control**, New Orleans, LA, Dec. 12-14, 2007.

Publicaciones:

- Ferreira, F. Bejarano, L. Fridman **Robust Control with Exact Uncertainties Compensation: With or Without Chattering?** *Transactions on Control Systems Technology*. (Aceptado)

---

---

## Bibliografía

---

- [ABFI09a] L. Aguilar, I. Boiko, L. Fridman, and R. Iriarte. Generating self-excited oscillations for underactuated mechanical systems via two-relay controller. International Journal Of Control, 82:1678–1691, 2009.
- [ABFI09b] L. Aguilar, I. Boiko, L. Fridman, and R. Iriarte. Oscillations via two-relay controller. IEEE Transactions on Automatic Control, 54:416–420, 2009.
- [AF03] Y. Aoustin and A. Formal'sky. Control design for a biped reference trajectory based on driven angles as functions of the undriven angle. Journal of Computer and System Sciences International, 42(4):159–176, 2003.
- [AL09] M. Angulo and A. Levant. On robust output based finite-time control of LTI systems using HOSMs. In Proc. of the 2009 IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems (AHDS09), pages 222–227, 2009.
- [Ath75] D.P. Atherton. Nonlinear control engineering—Describing Function Analysis and Design. Van Nostrand, Wokingham, U.K., 1975.
- [BDB02] J. Barbot, M. Djemai, and T. Boukhobza. Sliding mode observers. In W. Perruquetti and J. Barbot, editors, Sliding Mode Control in Engineering, pages 103–130. Marcel Dekker, New York, 2002.
- [BF06] J. Barbot and T. Floquet. A canonical form for the design of unknown inputs sliding mode observers. In C. Edwards, E. Fossas-Colet, and L. Fridman, editors, Advances in Variable Structure and Sliding Mode Control, volume 334, pages 103–130. Springer, Berlin, 2006.
- [BF09] F. J. Bejarano and L. Fridman. Unbounded unknown inputs estimation based on high-order sliding mode differentiator. In Conference on Decision and Control 2009, Shangai, China, 2009.

- 
- [BFP07a] F.J. Bejarano, L. Fridman, and A. Poznyak. Exact state estimation for linear systems with unknown inputs based on hierarchical super-twisting algorithm. Intern. J. of Robust and Nonlinear Control, 17:1734–1753, 2007.
- [BFP07b] F.J. Bejarano, L. Fridman, and A. Poznyak. Output integral sliding mode control based on algebraic hierarchical observer. International Journal of Control, 80:443–453, 2007.
- [Boi09] I. Boiko. Discontinuous Control Systems: Frequency-Domain Analysis and Design. Birkhäuser, Boston, 2009.
- [CF06] F. Castanos and L. Fridman. Analysis and design of integral sliding manifolds for systems with unmatched perturbations. IEEE Transactions on Automatic Control, 51(5):853–858, May. 2006.
- [Cho03] H. H. Choi. An LMI-based switching surface design method for a class of mismatched uncertain systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 48(9):1634–1638, 2003.
- [Cho08] H. H. Choi. Output feedback variable structure control design with an  $H_2$  performance bound constraint. Automatica, 44(9):2403–2408, 2008.
- [CX04] W. Cao and J. Xu. Nonlinear integral-type sliding surface for both matched and unmatched uncertain systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 49:1355–1360, Aug. 2004.
- [DFL] J. Davila, L. Fridman, and A. Levant. Second-order sliding-mode observer for mechanical systems. IEEE Transactions on Automatic Control, (11):1785–1789.
- [Dra69] B. Drazenovic. The invariance conditions in variable structure systems. Automatica, 5:287–295, 1969.
- [DS93] R. Davis and S.K. Spurgeon. Robust implementation of sliding mode control schemes. International Journal of System Science, 24:733–743, 1993.
- [EF08] A. Estrada and L. Fridman. Exact compensation of unmatched perturbation via quasi-continuous HOSM. In Proc. of the 47th IEEE Conference on Decision and Control, Cancun, Mex, 2008.
- [ES98] C. Edwards and S.K. Spurgeon. Sliding Mode Control. Taylor and Francis, London, 1998.
- [EST02] C. Edwards, S. Spurgeon, and C. P. Tan. On development and application of sliding mode observers. In J. Xu and Y. Yu, editors, Variable Structure Systems: Towards XXIst Century, pages 253–282. Springer Verlag, Berlin, 2002.
-

- 
- [FB07] T. Floquet and J.P. Barbot. Super twisting algorithm based step-by-step sliding mode observers for nonlinear systems with unknown inputs. Special Issue of IJSS on Advances in Sliding Mode Observation and Estimation, 538:803–815, 2007.
- [FG98] A. Ferrara and L. Giacomini. On multi-input backstepping design with second order sliding modes for a class of uncertain nonlinear systems. International Journal of Control, 71(5):767–788, 1998.
- [Fil88] A.F. Filippov. Differential equations with discontinuous right hand-sides, 1988.
- [FK96] R.A. Freeman and P.V. Kokotovic. Robust Nonlinear Control Design. Birkhäuser, Boston, 1996.
- [FL02] I. Fantoni and R. Lozano. Non-Linear Control for Underactuated Mechanical Systems. Springer, 2002.
- [Fri02] L. Fridman. Singularly perturbed analysis of chattering in relay control systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 47:2079–2084, 2002.
- [FSGE<sup>+</sup>07] L. Freidovich, A. Shiriaev, F. Gomez-Estern, F. Gordillo, and J. Aracil. Partial-energy-shaping control for orbital stabilization of high frequency oscillations of the furuta pendulum. In Proc. of the 46nd Conference on Decision and Control, New Orleans, USA, 2007.
- [Hau83] M. L. J. Hautus. Strong detectability and observers. Linear Algebra and its Applications, 50:353–368, 1983.
- [HS83] M. L. J. Hautus and L. M. Silverman. System structure and singular control. Linear Algebra and its Applications, 50:369–402, 1983.
- [Isi96] A. Isidori. Nonlinear Control Systems. Springer-Verlag, London:England, 1996.
- [Kha02] H. Khalil. Nonlinear Systems. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2002.
- [Kol62] A. N. Kolmogorov. On inequalities between upper bounds of consecutive derivatives of an arbitrary function defined on an infinite interval (in russian). Amer. Math. Soc. Transl. 2, pages 233–242, 1962.
- [KS91] H. Kwakernaak and R. Sivan. Linear control optimal systems. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [LD07] L. Fridman A. Levant and J. Davila. Observation of linear systems with unknown inputs via high-order sliding-modes. International Journal of Systems Science, 38:773–791, 2007.
-

- 
- [Lev93] A. Levant. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. International Journal of Control, 58:1247–1263, 1993.
- [Lev98] A. Levant. Robust exact differentiation via sliding mode technique. Automatica, 34(3), 1998.
- [Lev03] A. Levant. Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. International Journal of Control, 76:924–941, 2003.
- [Lev08] A. Levant. Homogeneous high-order sliding modes. In Proc. of the 17th IFAC World Congress, pages 3799–3810, 2008.
- [LFD08] A. Levant L. Fridman and J. Davila. Sliding mode observers. In G. Bartolini, L. Fridman, A. Pisano, and Elio Usai, editors, Modern Sliding Mode Control Theory New Perspectives and Applications, pages 293–320. Springer Verlag, Berlin, 2008.
- [LS00] R. C. H. Lee and M. C. Smith. Nonlinear control for robust rejection of periodic disturbances. Systems and Control Letters, 39:97–107, 2000.
- [Mol76] B. P. Molinari. A strong controllability and observability in linear multi-variable control. IEEE Transactions on Automatic Control, 21:761–764, 1976.
- [MST03] R. Marino, G. L. Santosuosso, and P. Tomei. Robust adaptive compensation of biased sinusoidal disturbances with unknown frequencies. Automatica, 39:1755–1761, 2003.
- [Nij99] J. Nijmeijer. New Directions in Nonlinear Observer Desing. Springer Verlag, 1999.
- [PCE09] C.C. Peng, C.L. Chen, and C. Edwards. Reconstruction and rejection of mismatched and matched disturbances for a class of multivariable systems. In Proc. of the 2009 ICROS-SICE International Joint Conference, pages 98–103, 2009.
- [Poz03] A. S. Poznyak. Stochastic output noise effects in sliding mode estimations. International Journal of Control, 76:986–999, 2003.
- [PSJ03] A. Poznyak, Y. B. Shtessel, and C. Jiménez. Mini-max sliding mode control for multimodel linear time varying systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 48:2141–2150, Dec 2003.
- [Qua] Quanser. Rotary pendulum (rotpen) inverted pendulum trainer.
- [SD93] S.K. Spurgeon and R. Davis. A nonlinear control strategy for robust sliding mode performance in the presence of unmatched uncertainty. International Journal of Control, 57:1107–1123, 1993.
-

- [Sil68] L. M. Silverman. Properties and application of inverse systems. IEEE Transactions on Automatic Control, AC-13:436–437, 1968.
- [UGS99] V. I. Utkin, J. Guldner, and J. Shi. Sliding Modes in Electromechanical Systems. Taylor and Francis, London, 1999.
- [US96] V. Utkin and J. Shi. Integral sliding mode in systems operating under uncertainty conditions. In Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control, pages 4591–4596, Kobe, Japan, 1996.
- [Utk92] V. I. Utkin. Sliding modes in control and optimization. Springer Verlag, Berlin, Germany, 1992.