



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO  
EN INGENIERIA**

**FACULTAD DE INGENIERIA**

**“ESTUDIO SOBRE EL EFECTO DE LAS CUANTÍAS  
LÍMITE DE ACERO DE REFUERZO EN EL  
COMPORTAMIENTO DE ELEMENTOS LINEALES  
ANTE LA DEMANDA DE FLEXIÓN”**

**T E S I S**

**PARA OBTENER EL GRADO DE:  
“MAESTRO EN INGENIERÍA”  
INGENIERÍA CIVIL - ESTRUCTURAS**

**P R E S E N T A:**

**ING. SANTIAGO MEJÍA CONDE**

**DIRECTOR DE TESIS: DR. OSCAR LÓPEZ BATIZ**

**CIUDAD UNIVERSITARIA MÉXICO, D.F**

**OCTUBRE 2010.**

A mis padres, en especial a mi mamá: Lucia Conde Conde  
Quien me mando a la escuela y con su cuidado amoroso me  
supo guiar al éxito en mi vida.

A mis hijos: Santiago, Juan de Dios y Leonor

Por quienes hice este trabajo, pues tan solo su existencia me  
impulsa a dar lo mejor que tengo.

A mi esposa: Leonor Vázquez Mendieta

La más noble y comprensiva de las mujeres le dedico este  
trabajo para mostrarle que la amo.



A mis maestros que tuvieron confianza invirtiendo su valioso tiempo en mi preparación, en especial a:

Dr. Oscar A. López Batiz.

M. en I. Octavio García Domínguez

A mis amigos que con su ejemplo de perseverancia y una vida exitosa, me motivaron para realizar este trabajo y obtener el grado de Maestro en Ingeniería.

Lic. Enrique Peña Nieto

Ing. Manuel Cadena Morales

Lic. Fernando Fernández García

Ing. Manuel Ortiz García

Ing. Ismael Ordoñez Mancilla

Dr. Eruviel Ávila Villegas

A mis amigos que en la época de juventud, nació la idea de estudiar una maestría.

Francisco Mendoza Martínez y Alfredo Herrera Sánchez  
“Chico” “Ney”

A mis compañeros y amigos con quienes conocí la lealtad

Ricardo Román Sánchez y Gabriel Román Sánchez

A mi amigo Juan Cadena Morales, quien me ha brindado su amistad sincera

Finalmente dedico esta tesis a mi hermana Soledad, por que siempre ha creído en mi.

# ESTUDIO SOBRE EL EFECTO DE LAS CUANTÍAS LÍMITE DE ACERO DE REFUERZO EN EL COMPORTAMIENTO DE ELEMENTOS LINEALES ANTE LA DEMANDA DE FLEXIÓN

## CONTENIDO

	Pag.
PREFACIO	1
1.- INTRODUCCIÓN	3
2.- TRABAJOS PREVIOS Y ANTECEDENTES	5
2.1 Trabajo de Eivind Hognestad	5
2.2 Trabajo de Iqbal Ali	7
2.3 Cuantías de Acero Máxima y Mínima	9
3.- PRINCIPIOS MECÁNICOS QUE DETERMINAN LOS VALORES PROPUESTOS DE CUANTÍA	13
3.1 Hipótesis	13
3.2 Curva Esfuerzo-Deformación del concreto	15
3.3 Curva Esfuerzo-Deformación del acero	16
3.4 Resistencia al agrietamiento	18
3.5 Condición de Falla balanceada	22
3.6 Consideraciones de los dos tipos de falla asociados a los límites de cuantía	24
4.- EFECTOS DE LAS CUANTÍAS LÍMITE EN EL COMPORTAMIENTO LOCAL DEL ELEMENTO VIGA	27
4.1 Análisis del comportamiento momento-curvatura de un elemento a flexión con cuantía máxima hasta su falla	27
4.2 Análisis del comportamiento momento-curvatura de un elemento a flexión con cuantía mínima hasta su falla	49
5.- EFECTO DE LAS CUANTÍAS LÍMITE EN EL COMPORTAMIENTO GLOBAL DEL SISTEMA ESTRUCTURAL	68
5.1 Análisis de un edificio de 6 niveles, considerando el diseño de vigas con cuantía mínima y con cuantía máxima	71
5.2 Análisis de un edificio de 15 niveles, considerando el diseño de vigas con cuantía mínima y con cuantía máxima	96
6.- CONSIDERACIONES GENERALES Y PROPUESTA DE MODIFICACIÓN A LOS CRITERIOS DE DISEÑO EN LA REGLAMENTACIÓN ACTUAL, PARA LOS LÍMITES MÁXIMO Y MÍNIMO DE CUANTÍA	127
7.- CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	130
REFERENCIAS	132
APÉNDICES	134

## PREFACIO

En el presente trabajo se trata de mostrar a ingenieros proyectistas y constructores, el grado de certidumbre que se puede tener en el cálculo de la resistencia de elementos lineales de concreto reforzado sujeto al fenómeno de la flexión, considerando las cantidades de acero de refuerzo límites que propone el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal 2004 (R.C.D.F.). Con un análisis sencillo del comportamiento del elemento viga ante flexión llevado hasta su falla se podrá observar analíticamente los efectos que causan las cuantías límite, sobre todo cuando el acero incursiona en su etapa de post-fluencia, pudiendo comparar los resultados máximos obtenidos de resistencia-desplazamiento con los obtenidos con las expresiones propuestas por el R.C.D.F, y ponderar si este criterio de diseño lleva a un comportamiento global del sistema deseado de columna fuerte viga débil en el mecanismo de falla.

Ya que el estudio consiste en analizar los efectos de las cuantías límite de acero de refuerzo en el comportamiento de elementos lineales ante la demanda de flexión, para revisar el valor máximo y mínimo de cuantía aceptable que respete el comportamiento de pos-fluencia considerado en las filosofías de diseño actuales; se pretende proponer una modificación al criterio para límites de cuantía de acero en el diseño ante flexión que considere los efectos de la post-fluencia. Para ello en los capítulos I, II y III de este trabajo, se muestran algunas de las investigaciones previas así como, los principios teórico mecánicos que sustentan la definición de las cuantías límite de acero de refuerzo; posteriormente en el capítulo IV se analizan los efectos que causan las cuantías límite propuestas por el R.C.D.F, en el comportamiento local del elemento y global del sistema estructural. Lo anterior dará una visión más clara de lo que ocurre en el elemento y consecuentemente en el sistema, al considerar la post- fluencia del acero, de tal suerte que en el capítulo V se pueda hacer el estudio y análisis del comportamiento local y global de dos edificios para uso de departamentos, uno bajo de seis niveles y otro alto de quince niveles, considerando cuantías máxima y

mínima. Con base a lo anterior, en el capítulo VI se presenta la propuesta y, en su caso, la modificación a los criterios de diseño en la reglamentación actual.

Finalmente en el capítulo VII se presenta una conclusión de los resultados obtenidos de este trabajo, siendo así ésta tesis una contribución más que hacen los ingenieros, en la búsqueda de tener mayor seguridad estructural en elementos y estructuras de concreto reforzado.

## 1. INTRODUCCIÓN

El estudio sobre el comportamiento de elementos de concreto reforzado ante la demanda de flexión, se ha venido haciendo desde hace muchos años a partir de la mitad del siglo XIX, ya que se tuvo la necesidad de combinar acero y concreto para resistir flexión. Muchos ingenieros investigadores del mundo, aprovechando el avance tecnológico y su experiencia, han contribuido para que en la actualidad se tenga un criterio de diseño propuesto en los reglamentos para la construcción autorizados en cada país. En México, debido a que presenta zonas de alta sismicidad, se han tenido cambios importantes en materia de seguridad estructural en las Normas Técnicas Complementarias para el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, pues a partir de los sismos de 1985, los coeficientes sísmicos de diseño de las zonas de transición (II) y compresible (III) aumentaron aproximadamente al doble, además de la implementación de requisitos adicionales para considerar a una estructura dúctil, a través del factor de comportamiento sísmico Q, los cuales son más estrictos en su cumplimiento y más severos en su contenido. En lo que se refiere a las Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto Reforzado (NTC-Concreto) del R.C.D.F. y el Reglamento del Instituto del Concreto de los Estados Unidos de Norteamérica (A.C.I.), ambos están basados en la filosofía de diseño que considera la resistencia de la estructura al límite de falla, donde las cuantías de acero de refuerzo permiten, para la resistencia óptima que se desea del elemento en particular y del sistema estructural global, lograr los niveles de ductilidad adecuados al concepto de mecanismo de falla planteado, así como tratar de mantener el diseño funcional y económico. El problema que se trata de solventar en este estudio, radica en una posible deficiencia en la utilización de las expresiones que presentan el R.C.D.F. y el A.C.I. para diseño por flexión con cuantías límite, en cuanto que al utilizar estas cuantías para el cálculo de momentos resistentes se podrían estar subestimando o sobrestimando la resistencia y capacidad a deformación, bajo el criterio de resistencia última, puesto que no se está considerando adecuadamente los efectos de la post- fluencia del

acero de refuerzo. La realidad es que los elementos estructurales alcanzarán su resistencia última pasando por la post-fluencia, de allí la propuesta del presente trabajo, analizar los efectos que causan las cuantías límite de acero de refuerzo en el comportamiento de elementos lineales ante la demanda de flexión y su repercusión en el comportamiento global del sistema estructural, analizando la relación entre cuantía, distorsión de entrepiso y la geometría de la sección. Lo anterior con el objeto de verificar hasta donde son viables las expresiones para diseño con cuantías máxima y mínima que propone el R.C.D.F., respetando el comportamiento de la post-fluencia y la ductilidad local y global de la estructura. Se pretende que la información pueda conducir al ingeniero de la práctica a llegar más rápido al diseño óptimo de las trabes y a tener un mejor acercamiento al mecanismo de falla deseado. También con base en los resultados del análisis se presentan propuestas de modificación para los límites de cuantía con el propósito de reducir la posibilidad de la incursión en la zona de endurecimiento por deformación para el acero de refuerzo al emplear cuantía mínima; y tratando de que no se tenga rigidez negativa en el intervalo de post-fluencia cuando se use cuantía máxima.

El alcance del estudio se basa en el análisis y diseño de dos modelos estructurales, los cuales serán resueltos a base de marcos resistentes a momento con las siguientes características: un edificio de seis y otro de quince niveles, ambos con cuatro crujías en ambas direcciones, los edificios se diseñaron considerando uso habitacional, y para el diseño de trabes se consideraron dos posibilidades: el uso de cuantía máxima y el uso de cuantía mínima. Así mismo, todo el proceso de diseño se hizo conforme al Reglamento de las Construcciones para el Distrito Federal (2004) y sus Normas Técnicas Complementarias para Concreto.

## **2.- TRABAJOS PREVIOS Y ANTECEDENTES**

Los estudios presentados por investigadores como Iqbal Ali y Hognestad (1960), por mencionar algunos de los mas significativos, relacionados con el comportamiento de elementos de concreto reforzado ante la demanda de flexión; son retomados en este trabajo como el antecedente que permita la introducción a la teoría de elementos de concreto reforzado ante la demanda de flexión.

La filosofía de diseño por resistencia última fue adoptada por Iqbal Ali, quien presentó un estudio para interpretar el comportamiento de un elemento de concreto reforzado de sección rectangular ante flexión, en el cual la resistencia última fue interpretada en términos de la relación esfuerzo-deformación del concreto bajo compresión axial, idealizando una curva para su análisis. Así, la resistencia última fue identificada a partir del planteamiento de la distribución de esfuerzos que resulta del máximo momento interno. También se demostró que para el concreto la deformación máxima de compresión es variable y prácticamente proporcional a la posición de la fibra de interés respecto al eje neutro. Por lo tanto una de las mejores formas de comprender el comportamiento del concreto reforzado estructural, a flexión y en el estado de resistencia última, ha sido a través de la consideración de un estado de deformaciones unitarias lineal, del uso de la curva esfuerzo-deformación de los materiales constructivos, y finalmente por medio de las relaciones momento-curvatura.

### **2.1 Trabajo de Eivind Hognestad**

Una de las principales herramientas para el estudio de elementos de concreto reforzado en flexión, es el uso de la relación esfuerzo - deformación del concreto en compresión. Hognestad hizo un planteamiento básico sustentado en una serie de trabajos experimentales a partir de los cuales pudo establecer un conjunto de funciones sencillas que representan adecuadamente el comportamiento del concreto sujeto a compresión. La representación esquemática de la relación se presenta en la figura 1.

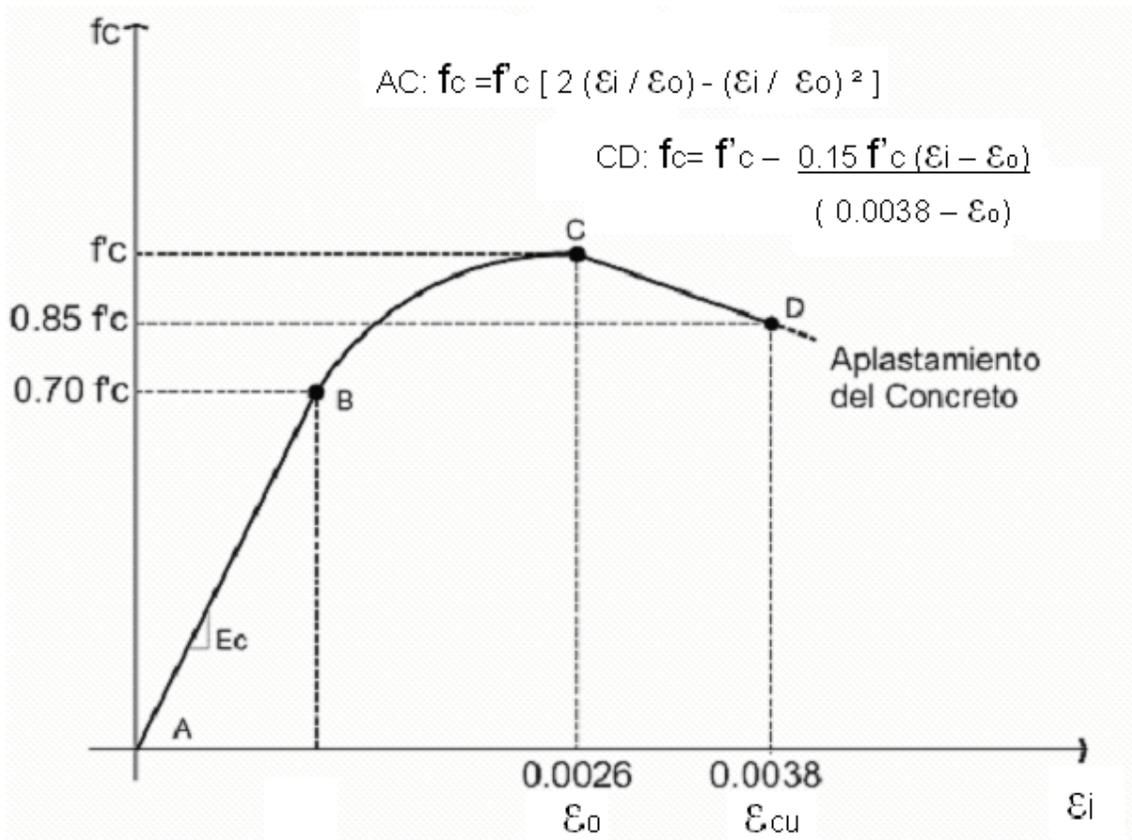


Figura 1. Relación  $\sigma$ - $\epsilon$  propuesta por Hognestad

Adicionalmente, Hognestad trabajó en el planteamiento de una simplificación para la relación  $\sigma$ - $\epsilon$  del concreto en compresión, aspecto que resultara de utilidad para el análisis de secciones sujetas a un estado de esfuerzos dominantes de flexión. Así, se inició con los planteamientos del diagrama de esfuerzos o bloque equivalente de esfuerzos rectangular en compresión en sección transversal rectangular. Ahora se sabe que a partir de la propuesta de 1956, el código del Instituto Americano del Concreto (A.C.I) especifica que el diagrama de distribución de esfuerzos del concreto en compresión puede ser aceptado como un rectángulo, trapezoide, parábola o cualquier figura que resulte de la resistencia última de un análisis razonable respaldado por trabajo experimental. Es así que las ecuaciones de diseño especificadas en el código del A.C.I. de 1956 sugieren el uso de una distribución rectangular, la cual se ha utilizado en el diseño práctico hasta la actualidad, por lo que ha sido comúnmente aceptado que la resultante del bloque

rectangular de esfuerzos idealizado, sea igual a la resultante considerando la distribución real de esfuerzos. En otras palabras, se ha ajustado una distribución polinomial de esfuerzos real a un bloque rectangular de esfuerzos. El manejo del bloque de esfuerzos rectangular es práctico y confiable, siempre y cuando se utilicen correctamente los coeficientes  $k_1$ ,  $k_2$  y  $k_3$  (Apéndice 1), propuestos por un grupo de investigadores en los años 1950. El bloque de esfuerzos a compresión de un elemento a flexión es mostrado en la figura 2.

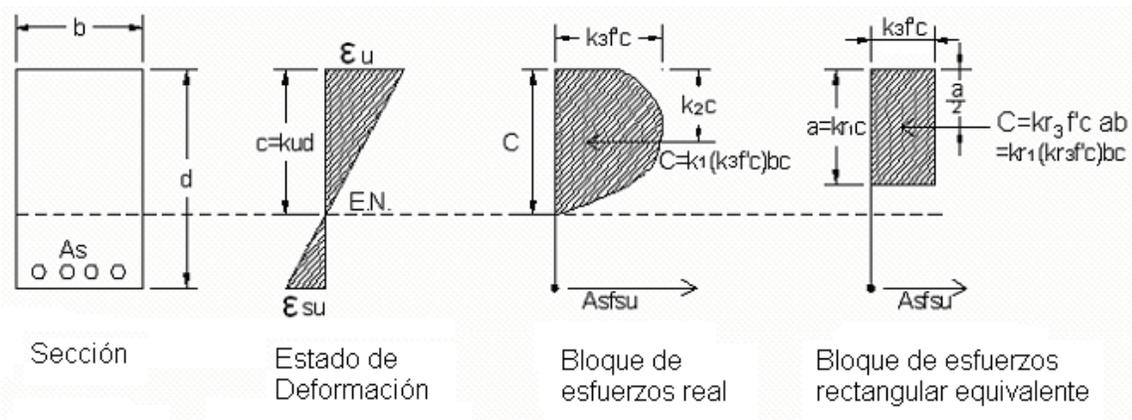


Figura 2. Distribución real y rectangular equivalente de esfuerzos para resistencia última

## 2.2.- Trabajo de Iqbal Ali

En marzo de 1961, en la revista del Instituto Americano del Concreto, Iqbal Ali, presentó una de las primeras iniciativas para conocer el comportamiento del concreto a través de su curva esfuerzo-deformación.

Las ideas del trabajo de Iqbal son las siguientes:

El diseño por carga última envuelve el concepto de un estado de carga, que si se impusiera produciría una falla al miembro estructural. El margen disponible de seguridad está entonces definido por la relación entre las cargas de servicio y la carga última. La carga última puede ser considerada como una carga meramente ficticia, más grande en magnitud que la carga de servicio, pero similar en naturaleza y distribución. Además, la carga última debe ser independiente de la posibilidad de su ocurrencia, alternativamente ésta podría ser considerada como

una carga catastrófica a la que una estructura puede ser expuesta y sufrir una falla.

Sin embargo, la realidad es que la carga última puede ser completamente diferente, en naturaleza, de las cargas de servicio. Las cargas accidentales debido a sismo u otras fuentes, como el viento u olas, son algunas de las posibles causas que pueden dar como resultado una falla estructural. La suposición de una sobrecarga sostenida como la sugirió Iqbal no puede ser, por lo tanto, justificable en un terreno real.

El modelo de Iqbal Ali para determinar la curva esfuerzo-deformación, lo obtuvo de aplicar a un espécimen de concreto carga de compresión sostenida con una excentricidad no mayor del 10% de la dimensión lateral del espécimen de prueba. Aplicar la fuerza de este modo, corresponde a lograr el equilibrio de fuerzas de la sección con la conformación del eje neutro casi en el borde de la sección.

Sin embargo en la actualidad, después de 50 años de investigación, se ha logrado llegar a un mejor conocimiento del comportamiento del concreto, a través de la curva esfuerzo-deformación. Uno de los modelos que mejor representa dicho comportamiento es el que está basado en el trabajo del Eivind Hognestad.

En México a partir del sismo de 1985, se intensificó el estudio sobre el análisis y diseño estructural; en consecuencia, destacados investigadores de las diferentes instituciones, entre las que destacan la Universidad Nacional Autónoma de México, se han abocado a estudiar el comportamiento de las fuerzas externas y su incidencia en las estructuras con el mismo objeto de brindar seguridad estructural a los ocupantes de los inmuebles. Aunado a lo anterior se logra una notoria y veloz actualización en el área de estructuras producto de los avances tecnológicos en la construcción, en el mejor conocimiento de las propiedades y comportamiento de los materiales, y a los nuevos procedimientos de análisis y diseño.

Existe mucha información respecto a los avances teóricos, analíticos y experimentales acerca del análisis y diseño de elementos lineales a flexión (vigas), sin embargo, para el estudio que interesa se tomará como documento de referencia el Reglamento de las Construcciones para el Distrito Federal, específicamente las NTC- Concreto (2004) en lo que se refiere a la definición de

límites de cuantías máxima y mínima y su repercusión en la conformación de un mecanismo de falla consistente con los niveles de ductilidad considerados para diseño.

### **2.3.- Cuantías de acero máxima y mínima**

El concreto y el acero son los materiales que conforman un elemento de concreto reforzado, el primero interviene básicamente para resistir los esfuerzos de compresión en una viga sometida a flexión, como es el caso del estudio; y por otro lado el acero resiste la tensión y compresiones adicionales que se manifiestan en la sección del elemento, así la falla de un elemento depende fundamentalmente de la resistencia última del concreto a compresión y del acero en tensión, cuando alguno de los dos agota su resistencia el elemento falla. Así, entonces se debe buscar la máxima resistencia óptima de cada uno de los materiales, lo ideal sería que ambos fallaran al mismo tiempo, lo cual implicaría tener una falla conocida como balanceada. Sin embargo este tipo de falla es instantánea y no permite advertir una catástrofe, por lo que antes de que esto suceda se deben adoptar medidas de seguridad buscando que los elementos tengan un tipo de falla específico, como al ingeniero le convenga, de tal manera que se pueda advertir su falla. Para lograr lo anterior se necesita que, aunque se tengan deformaciones “permisibles”, el acero sea el que fluya primero. Entonces como se puede observar, el porcentaje de acero de refuerzo es un buen calibrador que permitirá establecer el punto de resistencia-deformación que se desea tener en el elemento y a su vez en el sistema estructural, de tal manera que estos fallen de la manera más conveniente esperada. En el caso de un edificio a base de vigas y columnas se desea que primero sea agotada la resistencia de las vigas, pues esto conducirá a un mecanismo de falla global que le permita al edificio mantenerse más tiempo de pie. En otras palabras, el conocer el comportamiento de un elemento de concreto reforzado, en función del porcentaje de acero, permitirá ajustar la resistencia-deformación de los elementos a como se desea que falle.

Por lo tanto se pueden observar toda una gama de combinaciones entre acero de refuerzo y concreto para una sección rectangular de un elemento resistente, pero

existe un porcentaje de acero para el cual el concreto se aplastaría en forma simultánea con la fluencia del acero, a dicha cantidad de acero se le denomina porcentaje de acero balanceado ( $P_b$ ); sin embargo, este punto o porcentaje de acero no es exactamente el que un ingeniero de la práctica busca, sino más bien es aquel para el cual la estructura brinde el servicio y la seguridad estructural requerida, entonces en la práctica, el porcentaje de acero balanceado que se requiere solo sirve de referencia para determinar el porcentaje de acero máximo para diseño.

Al porcentaje de acero de refuerzo, en función del área de concreto en una sección reforzada, se le llama cuantía de acero de refuerzo; la cuantía máxima es la cantidad máxima de acero de refuerzo para la cual un elemento alcanza su resistencia última, logrando que el acero pueda fluir antes de que el concreto a compresión se aplaste. Por otro lado, la cuantía mínima de acero a tensión es la necesaria para que un elemento de concreto reforzado sometido a flexión pueda resistir al menos 1.5 veces el momento de agrietamiento, y entonces el elemento pueda considerarse como resistente. En relación a las definiciones anteriores éste documento busca proponer modificaciones a las formulas de la reglamentación actual, para obtener las cuantías máxima y mínima de diseño, las cuales garanticen la resistencia-deformación esperada en el elemento local y del sistema global, bajo el concepto de viga débil-columna fuerte, considerando el efecto de la post-fluencia.

Considerando que la definición de ductilidad de curvatura es la relación entre la curvatura asociada a la falla del concreto por aplastamiento y la curvatura asociada a la fluencia del acero de refuerzo longitudinal en tensión por flexión; del análisis de las relaciones momento – curvatura para secciones de elementos lineales de concreto reforzado se puede determinar que las cuantías mínima y máxima corresponden a los valores de ductilidades máximo y mínimo, respectivamente. Desde el punto de vista del diseño estructural, considerando la filosofía de diseño de disipación de energía sísmica incidente por medio de la aceptación de la aparición de daño controlado en los elementos estructurales, los reglamento de construcción y sus normas técnicas complementarias plantean al

profesional de la ingeniería estructural los requisitos mínimos que deberán cumplir la edificaciones para que ante el evento de diseño se conforme un mecanismo de falla del tipo de viga débil – columna fuerte. Este tipo de mecanismo implica la formación consistente de articulaciones plásticas en la mayoría de los extremos de las vigas y/o elementos horizontales y la capacidad de dichas zonas de articulación para alcanzar niveles de ductilidad altos.

Del análisis de una sección transversal típica de una viga rectangular, el ingeniero estructurista puede diseñar la viga considerando cualquier valor de cuantía que se encuentre entre la máxima y la mínima, y con base en esos valores supone que tendrá niveles adecuados de ductilidad y la resistencia estará determinada básicamente por la expresión:

$$M_R = A_{st} f_y d (1 - 0.59q)$$

donde  $q$ , es el índice de acero de refuerzo por flexión.

En relación con lo anterior y del análisis simple de secciones transversales para la obtención de su relación momento-curvatura, se ha podido identificar que existen serias inconsistencias que hay que mencionar:

- 1) El ingeniero, al seleccionar la cuantía máxima o la cuantía mínima, no tiene conocimiento de que habrá diferencias en las capacidades de ductilidad de curvatura del orden de quince a veinte veces; siendo siempre mayor, desde luego, la ductilidad cuando se eligen valores de cuantía en la vecindad de la mínima, como se podrá observar analíticamente en el capítulo 5, tabla 14.
- 2) De la expresión de resistencia a flexión se identifica que ésta es directamente proporcional al valor del esfuerzo resistencia a la fluencia del acero de refuerzo ( $f_y$ ). Por otro lado, si el ingeniero estructurista selecciona valores de cuantía en la vecindad de la mínima, las demandas de deformación unitaria en el acero de refuerzo por flexión en tensión generalmente resultan superiores a 0.01, valor que, en la mayoría de los casos, es el nivel de deformación unitaria al cual se inicia la aparición del fenómeno de endurecimiento por deformación en el acero de refuerzo. Lo anterior implica que ya no se está trabajando al acero en la planicie de fluencia y el valor de esfuerzo demandado en el material será superior al de fluencia.

Si esta incursión se presenta en los extremos de vigas, puesto que es donde se desea la formación de las articulaciones plásticas, puede llegar a presentarse que el momento resistente en las vigas resulte superior al de diseño, lo cual implicaría que también puede resultar superior al considerado para el diseño de las columnas, pudiendo llegar a generar una modificación indeseable en la conformación del mecanismo de falla del sistema, producto de la articulación en los extremos de algunas de las columnas.

- 3) Finalmente, y no por ello menos importante, cuando el estructurista selecciona una cuantía de acero para diseño en la vecindad de la máxima, no tiene conocimiento de que la relación momento-curvatura y, por lo tanto, la relación momento-rotación presentarán una rigidez negativa en la post-fluencia. La rigidez negativa para un elemento estructural, aún para parte de él, como puede ser la sección transversal (relación momento-curvatura) o un segmento del mismo (relación momento-rotación), implica que la matriz de rigideces del elemento deje de ser “positiva definida” y, por lo tanto, estrictamente hablando, resultaría inconsistente la solución de la ecuación de equilibrio con base en la que se obtienen los elementos mecánico para el diseño.

Tomando en cuenta los aspectos mencionados en este capítulo es que se consideró necesario realizar un estudio, modesto, pero que pudiera aportar algo para el entendimiento del profesional de la ingeniería estructural sobre la influencia que tiene la decisión de la selección de las cuantía de acero de refuerzo para el diseño de elementos vigas ante la demanda de flexión.

### 3. PRINCIPIOS MECÁNICOS QUE DETERMINAN LOS VALORES PROPUESTOS DE CUANTÍA

#### 3.1 Hipótesis

Para conocer el comportamiento mecánico del concreto reforzado se necesita de la mecánica, en donde la mayoría de las hipótesis se referirán al concreto, dado que es un material no homogéneo, mientras que siendo el acero un material más homogéneo en su constitución se necesita de menos suposiciones para tener un manejo analítico confiable.

La resistencia de un elemento estructural está basada en el comportamiento de los materiales que lo constituyen. Entonces, una primera suposición es que la resistencia a tensión del concreto es nula, por lo que para resistir este tipo de esfuerzo se utilizan barras de acero, así los esfuerzos de compresión serán soportados por el concreto y el acero en compresión, y los esfuerzos de tensión serán tomados por las barras de acero de refuerzo en tensión.

El comportamiento mecánico de un elemento de concreto reforzado sujeto a flexión, debe satisfacer algunas hipótesis básicas como son: la compatibilidad de deformaciones, equilibrio de fuerzas en la sección de análisis y las características esfuerzo-deformación de los materiales involucrados. A continuación se describen brevemente éstas hipótesis:

- a) *Las secciones planas permanecen planas posteriores a la flexión (Condición de compatibilidad de deformaciones). También denominado principio de Bernoulli, el cual plantea que las deformaciones longitudinales siguen una distribución triangular, que las deformaciones en cualquier punto de la sección transversal son proporcionales a su distancia respecto al eje neutro y que existe una adherencia perfecta entre acero y concreto.*
- b) *Se conoce la curva esfuerzo-deformación del acero y del concreto (características esfuerzo-deformación de los materiales). Aunque los materiales se encuentran bajo un estado de esfuerzos multiaxial, para definir las características esfuerzo-deformación se consideran resultados de pruebas donde se sujetó al material a un estado de esfuerzos uniaxiales.*

c) *Los esfuerzos internos están en equilibrio con las fuerzas externas (equilibrio de fuerza en la sección de análisis). Las fuerzas resultantes del estado de esfuerzos en la sección transversal deberá estar en equilibrio con los elementos mecánicos de la misma sección, producto de las cargas a las que se sujete el elemento (momento flexionante y carga axial).*

*El principio de Bernoulli es una hipótesis razonable en la zona a compresión del concreto, pero no es estrictamente aplicable en la vecindad del agrietamiento. Sin embargo, es aplicable a la deformación por tensión media de la zona agrietada. El principio de Bernoulli no se cumple totalmente en regiones sujetas a altos esfuerzos de cortante.*

Estas hipótesis permiten predecir el comportamiento de elementos de concreto reforzado únicamente para algunas situaciones simples. En realidad, la acción conjunta de los materiales tan diferentes y complejos como el concreto y el acero es tan compleja que no ha sido posible llevarla a un tratamiento analítico formal. Por esta razón, los métodos de diseño y análisis, aunque utilizan ciertas suposiciones, están basados ampliamente en los resultados de intensas investigaciones experimentales. Entonces estos métodos se modifican y mejoran en la medida en que se dispone de nuevas evidencias experimentales, por lo que tienen un alto grado de componente empírico.

Las propuestas teóricas y, en esta caso también, reglamentarias en relación con los valores límite de cuantías de acero de refuerzo longitudinal de elementos sujetos a flexión, tienen el principio básico de tratar de asegurar un comportamiento netamente dúctil en los elementos de concreto reforzado.

Si la definición de falla en un elemento de concreto reforzado es cuando se presenta el aplastamiento en el concreto producto de la demanda de esfuerzos de compresión, ésta condición se podrá presentar independientemente de que se presente o no la fluencia en el acero de refuerzo, tanto longitudinal, como transversal.

Así, la cuantía máxima surge a partir de la determinación de la condición de “falla balanceada”, condición en la que se presentará la demanda de aplastamiento en

el concreto en compresión al mismo tiempo en que se presentará la demanda de fluencia en el acero sujeto a esfuerzos de tensión en la misma sección transversal. La condición anterior correspondería a una ductilidad de curvatura unitaria, por lo que para poder lograr una ductilidad superior a la unidad se deberá proporcionar un valor de cuantía menor que la correspondiente a la falla balanceada, así se determina que la cuantía máxima sea el 75 por ciento de la correspondiente a la falla mencionada. Esta condición representará el menor valor de ductilidad de curvatura esperado en una sección transversal de concreto reforzado.

Por otro lado, la cuantía mínima se relaciona con las características de la sección transversal que permitan lograr una resistencia superior a la resistencia de flexión correspondiente a la aparición del agrietamiento de tensión por flexión en la fibra de concreto más demandada en esta condición. En este sentido, algunos reglamentos plantean que la cuantía mínima de acero resulte aquella correspondiente a lograr una resistencia última de flexión al menos igual al doble de la correspondiente a la resistencia al agrietamiento de la sección de concreto. La condición anterior corresponderá a lograr el nivel de ductilidad de curvatura máximo esperado en la sección.

Para las dos condiciones anteriores se acepta que el comportamiento en resistencia de la sección en estudio se mantiene invariante, o con incremento ligero, a partir de la fluencia del acero de refuerzo en tensión hasta que se presenta el aplastamiento del concreto en compresión, definido como la condición de falla de la sección o elemento.

En los siguientes acápites se indican los planteamientos de análisis utilizados en este trabajo.

### **3.2 Curva Esfuerzo-Deformación del concreto**

Como se sabe el concreto reforzado está constituido por dos elementos; el concreto y el acero, por lo que siendo dos materiales diferentes en sus propiedades, cuando el elemento estructural está sujeto a flexión, ambos tienen diferente comportamiento tanto por su constitución, como por la magnitud del esfuerzo al que están sometidos. Por lo que para conocer el comportamiento

mecánico estructural del elemento es indispensable conocer la curva esfuerzo-deformación del concreto y el acero, la cual ha sido obtenida de trabajo experimental, para éste trabajo se toma como base la curva definida por Eivind Hognestad, la cual se muestra en la figura 1. La curva se obtiene al someter al concreto a esfuerzos monóticamente crecientes, donde la estructura interna del elemento se va fracturando hasta su falla. Esta experimenta dos partes principales; la primera parte es una línea curva parabólica, hasta alcanzar su ordenada máxima (esfuerzo máximo resistente,  $f'_c$ ), la segunda parte de esta curva es lineal y desciende hasta alcanzar la deformación unitaria correspondiente al aplastamiento del concreto en compresión, aceptando su falla a un nivel de esfuerzo en el concreto de  $0.85 f_c$ .

Las expresiones que definen a la curva son las siguientes (referencia 16, 1964):

$$AC: f_c = f'_c [2 (\epsilon_i / \epsilon_o) - (\epsilon_i / \epsilon_o)^2]$$

$$CD: f_c = f'_c - \frac{0.15 f'_c (\epsilon_i - \epsilon_o)}{(0.0038 - \epsilon_o)}$$

donde  $\epsilon_i$ , es la deformación unitaria del concreto.

$\epsilon_o$ , la deformación unitaria que corresponde al máximo esfuerzo resistente del concreto,  $f'_c$ .

$f'_c$ , es el esfuerzo resistente máximo del concreto, en  $\text{kg/cm}^2$ , para poder aplicar la curva simplificada de Hognestad de la figura 1.

Finalmente, para el desarrollo analítico en este trabajo se acepta que el concreto tiene una resistencia nula a la tensión.

### 3.3 Curva Esfuerzo-Deformación del acero

El acero presenta un comportamiento similar ante cargas de tensión y compresión axial. La curva esfuerzo-deformación del acero de refuerzo, para usos práctico de la mecánica estructural, se ha simplificado a características lineales.

El comportamiento esfuerzo-deformación unitaria de barras de acero forjado en caliente, está definido, de manera simplificada, en la fig. 3. Dicha curva es un

modelo simplificado del Instituto de Arquitectura de Japón (A.I.J.) 1964, el cual se toma como modelo matemático para este trabajo (referencia 18, 1988).

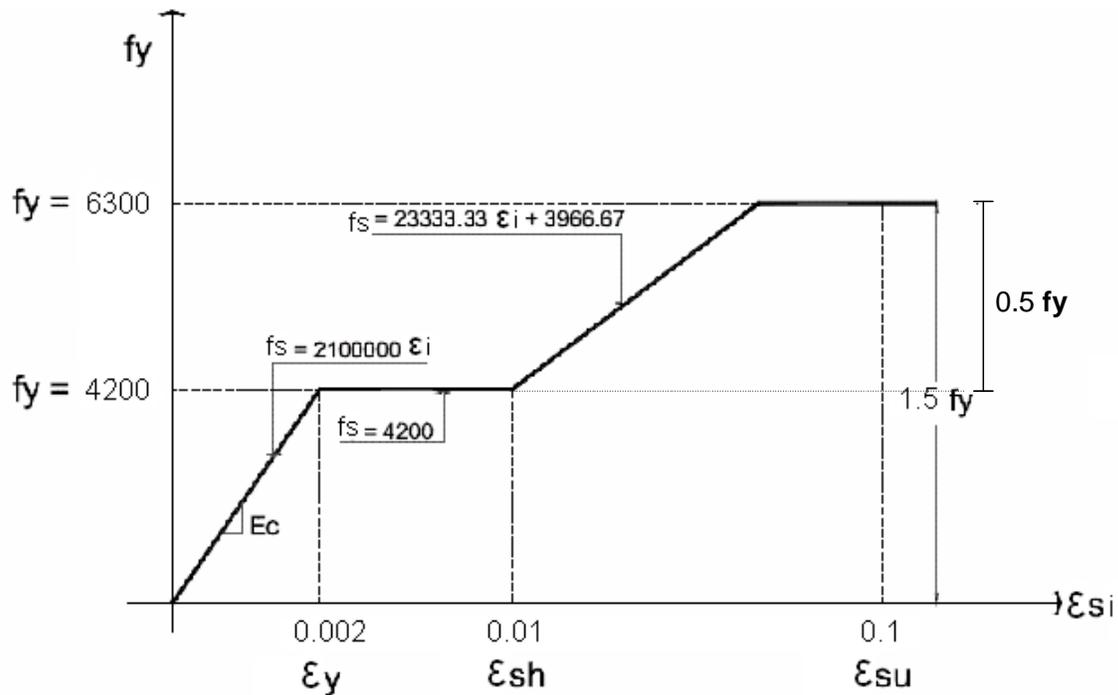


Figura 3. Curva esfuerzo-deformación unitaria para el acero de refuerzo

Las características principales de la curva se definen en tres segmentos; el primero es una línea ascendente con pendiente constante hasta el punto donde el material empieza a fluir, aproximadamente a 0.2% de deformación unitaria, el segmento es prácticamente lineal y su constante de proporcionalidad se define como el módulo de elasticidad  $E_s$ , valor que puede considerarse igual a 2100000 kg/cm<sup>2</sup>; el segundo segmento es una línea horizontal o plataforma de fluencia, la cual incluye todo el comportamiento de fluencia, y concluye aproximadamente en 1% de deformación unitaria y el tercer segmento es una línea ascendente con pendiente constante que concluye hasta el punto de resistencia máxima, aproximadamente a una deformación unitaria de 10%, a este segmento final del comportamiento se le llama la zona del *endurecimiento por deformación*, ya que en esta parte la barra de acero aumenta su rigidez y resistencia producto de una adecuación en la estructura molecular de la misma. Como se verá mas adelante el

considerar la zona de endurecimiento por deformación del acero influye de manera importante en el comportamiento de un elemento de concreto reforzado sujeto a flexión, cuando se tienen pequeñas cuantías de refuerzo.

### **3.4 Resistencia al agrietamiento**

La resistencia al agrietamiento de una sección transversal de concreto reforzado sujeta a momento flexionante es función directa de la resistencia a la tensión del material, en este caso el concreto, y aunque se ha dicho que la mejor propiedad del concreto es su resistencia a la compresión, e incluso se ha planteado que se omitirá considerar la resistencia a tensión del concreto, se deberá decir que su resistencia a la tensión también es importante en varias situaciones. Por ejemplo, la formación de grietas de tensión por flexión, o bien la aparición de grietas de tensión diagonal por cortante. La determinación del esfuerzo resistente a tensión del concreto presenta una de las mayores dificultades analíticas y experimentales; aspecto que resulta radicalmente diferente que la determinación de su resistencia a la compresión, por lo que se ha buscado encontrar la resistencia a la tensión de manera indirecta correlacionando el esfuerzo a tensión con el de compresión. Esta correlación de ninguna manera es proporcional, pues cualquier incremento en la resistencia a la compresión está acompañado por un incremento porcentual mucho menor en la resistencia a tensión.

El reglamento de construcciones del Distrito Federal (R.C.D.F.), en sus Normas Técnicas Complementarias para concreto recomienda obtener el esfuerzo resistente de agrietamiento o de tensión por flexión del concreto, mediante la expresión  $f_{crt} = 2 (f'_c)^{1/2}$ , concreto clase 1, la cual establece la resistencia a tensión del concreto en función exponencial del esfuerzo resistente a la compresión.

Con base en lo anterior y atendiendo a los principios de la mecánica estructural en el intervalo de comportamiento elástico lineal, se puede encontrar la ecuación que determine el momento resistente para el cual la sección transversal de un elemento viga sometido a flexión se agrieta; es decir, el momento de agrietamiento por tensión,  $M_{crt}$ . Lo anterior permite la obtención de la cuantía mínima de acero

necesaria para considerar como adecuadamente resistente a un elemento de concreto reforzado.

Cuantía Mínima de Acero de refuerzo ( $\rho_{min}$ ):

Una de las condiciones que en lo particular se estudiará en este trabajo, es la viga reforzada con acero mínimo, esta modalidad se explica de la siguiente manera: si el momento de agrietamiento  $M_{crt}$ , es mayor que el momento último resistente de una sección, la viga se asume que podría fallar súbitamente y sin ningún aviso de peligro una vez que se forme la primera grieta de flexión. Para evitar que se presente este tipo de falla se establece un límite inferior de cuantía de acero. Para evitar este tipo de falla, el R.C.D.F. establece que el refuerzo mínimo de tensión para secciones de concreto reforzado (vigas a flexión) deberá ser el necesario para que el momento resistente ( $M_R$ ) de la sección sea por lo menos 1.5 veces el momento de agrietamiento ( $M_{crt}$ ) de la sección transformada no agrietada, en otras palabras se requiere una cantidad de acero de refuerzo que permita al elemento soportar al menos el momento de agrietamiento por flexión más cincuenta por ciento de ese nivel de resistencia. Considerando que se trata de secciones transversales rectangulares, el momento de agrietamiento  $M_{crt}$ , corresponde exactamente al momento máximo resistente de una sección de concreto sin acero de refuerzo, sometida a flexión. Donde se supone que el elemento es homogéneo y tiene un comportamiento elástico y lineal. En este caso, el eje neutro coincide con el centro de gravedad de la sección transversal, y la magnitud de los esfuerzos de flexión normales a la sección aumenta directamente con la distancia al eje neutro, siendo máxima en las fibras extremas. Con base en estas hipótesis y considerando el equilibrio de momentos; el momento externo es igual en magnitud al momento interno. Entonces se afirma que el esfuerzo en cualquier punto de la sección está representado por la fórmula:

$$f(y) = \frac{M}{I} y$$

donde:

$f(y)$  = Esfuerzo de tensión o compresión, producto de la demanda de flexión a una distancia ( $y$ ) medida desde el eje neutro.

$M$  = Momento externo en la sección.

$I$  = Momento de inercia de la sección transversal con respecto al eje neutro.

El momento de agrietamiento ocurre con el esfuerzo de tensión por flexión máxima. Esto pasa cuando ( $y$ ) es máxima, y entonces si se introduce el concepto de módulo de sección ( $S$ ).

$$S = \frac{I}{(y)_{\max}}$$

$$S = \frac{b h^2}{6}$$

donde  $b$  y  $h$  son la base y el peralte de la sección, respectivamente.

Entonces:

$$f(y) = \frac{M}{S}$$

Si ahora se toma la demanda del esfuerzo máximo de tensión por flexión,  $f(y)_{\max}$ , igual al esfuerzo máximo de tensión para el concreto  $f_{crt} = 2 (f'_c)^{1/2}$ , se tiene que el momento de agrietamiento es:

$$M_{crt} = f_{crt} S$$

$$M_{crt} = \frac{2 (f'_c)^{1/2} (b h^2)}{6}$$

Por otro lado, el momento último resistente nominal de la sección de concreto reforzado,  $M_n$ , corresponde al que se obtiene de las condiciones de equilibrio y deformación de la sección, con una deformación unitaria del concreto en la fibra extrema en compresión igual a  $\epsilon_{c\max} = 0.003$ , que corresponde al esfuerzo del concreto cuando se presenta el fenómeno del aplastamiento, y el esfuerzo del acero  $f_s$  igual al esfuerzo máximo de fluencia  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ , además de

considerar la distribución de esfuerzos simplificado del concreto (bloque equivalente de esfuerzos), como se muestra en la fig. 4.

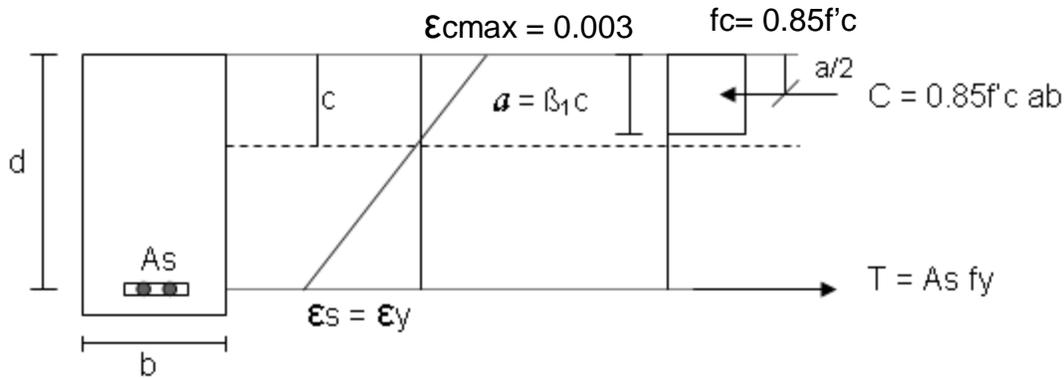


Figura 4. Distribución de esfuerzos equivalentes para carga última

A partir de las condiciones anteriores, se puede llegar a determinar entonces que el momento nominal es igual a:

$$M_n = b d^2 f'_c q (1 - 0.588 q)$$

Entonces, se toma como condición mínima de seguridad que:

$$M_n \geq 2 M_{crt} \quad y$$

$$M_{crt} = (2 (f'_c)^{1/2}) b h^2 / 6$$

Entonces:

$$M_n \geq 2 (2 (f'_c)^{1/2}) b h^2 / 6$$

Sustituyendo el valor de  $M_n$ , se tiene:

$$b d^2 f'_c q (1 - 0.588 q) \geq 4 (f'_c)^{1/2} b h^2 / 6$$

$$b d^2 f'_c q - b d^2 f'_c q^2 0.588 \geq 2 (f'_c)^{1/2} b h^2 / 3$$

Si  $\rho$  será pequeño y  $q = \rho f_y / f'_c$ , se asume que  $q^2$  resulta suficientemente pequeño, por lo que se acepta la simplificación de  $q^2 = 0$ , entonces resulta:

$$b d^2 f'_c q \geq 2 (f'_c)^{1/2} b h^2 / 3$$

Ahora, para tener una expresión sencilla aproximada que proporcione el porcentaje de acero mínimo ( $\rho_{min}$ ), se considera a (d) igual a (h). Y sustituyendo el valor de (q), se tiene:

$$b h^2 f'c \rho f_y / f'c \geq 2 (f'c)^{1/2} b h^2 / 3$$

Despejando a ( $\rho$ ), que para las condiciones establecidas es la cuantía mínima de acero de refuerzo ( $\rho_{min}$ ).

$$(\rho_{min}) = 0.7 \frac{(f'c)^{1/2}}{f_y} \quad \text{ó el área de acero mínima (A}_{smin})$$

$$A_{smin} = 0.7 \frac{(f'c)^{1/2}}{f_y} (b d)$$

Las expresiones anteriores corresponden al porcentaje de acero mínimo de refuerzo, para secciones rectangulares de concreto reforzado de peso normal que propone el R.C.D.F.

### 3.5 Condición de Falla balanceada

La falla balanceada es una de los tres tipos de falla genérica definidos en un elemento de concreto reforzado sometido a flexión; la primera, sugerida por las propuestas reglamentarias, se presenta de manera que se manifieste el aplastamiento del concreto en compresión después de la aparición de la fluencia del acero de refuerzo, este tipo de falla se define como dúctil, debido a que el elemento mantiene la capacidad resistente ante demandas crecientes de deformación; la segunda, sería la forma de falla en la que se manifiesta el *aplastamiento del concreto* previo a la aparición de la fluencia en el acero de refuerzo longitudinal en tensión, este tipo de falla es netamente frágil, se considera que el elemento no mantiene la capacidad de resistencia ante demandas crecientes de deformación

El tercer tipo de falla está en la condición intermedia entre los dos tipos mencionados en los párrafos anteriores, condición que se identifica por la aparición conjunta de la fluencia del acero de refuerzo y el aplastamiento del concreto en compresión. Ante ésta condición de falla el elemento presentará la

deformación última al mismo tiempo que aparece la deformación a la fluencia del acero de refuerzo, por lo que la demanda de ductilidad sería unitaria.

El parámetro mas conveniente para limitar la cuantía máxima de acero es el porcentaje de acero balanceado  $\rho_b$ , el cual se obtiene de las condiciones de deformación asociadas a una falla balanceada.

El R.C.D.F., establece que para elementos a flexión que forman parte de sistemas que deben resistir fuerzas sísmicas, el área máxima de acero de tensión será de 75% de la correspondiente a la falla balanceada, lo anterior con el propósito de alcanzar capacidades de ductilidad superiores a 1.5.

El porcentaje de acero balanceado se obtiene de las condiciones de equilibrio y deformación asociado a la falla balanceada, representada en la fig. 5, y utilizando el bloque de esfuerzos simplificado que propone el A.C.I.

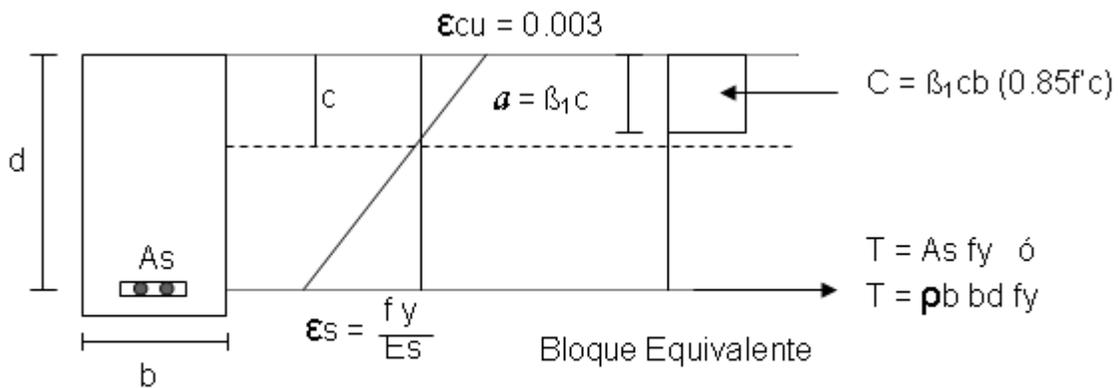


Figura 5. Condición de deformación y equilibrio para la falla balanceada

Si la cuantía de refuerzo se define como  $\rho_b = A_s / bd$

Del estado de deformaciones se tiene la siguiente relación:

$$\frac{0.003}{c} \sim \frac{f_y / 2\,000\,000}{d - c}$$

$$c = d \left( \frac{6000}{6000 + f_y} \right) \text{----- (1)}$$

Del equilibrio de fuerzas  $C = T$

$$\beta_1 c b (0.85 f'_c) = \rho_b b d f_y \quad \text{----- (2)}$$

Sustituyendo (1) en (2) y despejando  $\rho_b$

$$\rho_b = \frac{\beta_1 0.85 f'_c}{f_y} \times \frac{6\,000}{6\,000 + f_y}$$

donde

$$\beta_1 = 0.85 \text{ para valores de } f'_c \leq 280 \text{ kg/cm}^2$$

En el R.C.D.F. en sus Normas Técnicas Complementarias para Concreto, establece que:

$$\rho_b = \frac{f''_c}{f_y} \left[ \frac{\beta_1 6\,000}{f_y + 6\,000} \right]$$

Si se acepta que la resistencia máxima a compresión del concreto sea 280 kg/cm<sup>2</sup>, entonces:

$$f''_c = 0.85 f_c^*$$

$$f_c^* = 0.80 f'_c$$

Entonces, para utilizar  $f'_c$  en el R.C.D.F.

$$\rho_b = \frac{\beta_1 (0.68 f'_c)}{f_y} \left[ \frac{6\,000}{f_y + 6\,000} \right]$$

$$A_{sb} = \frac{\beta_1 (0.68 f'_c)}{f_y} \left[ \frac{6\,000}{f_y + 6\,000} \right] bd$$

donde b y d son el ancho y el peralte efectivo de la sección, respectivamente.

### 3.6 Consideraciones de los dos tipos de falla asociados a los límites de cuantía

El presente trabajo se trata de centrar en la inconsistencia que se puede presentar al diseñar irresponsablemente considerando cualquiera de los dos límites de cuantía, o bien valores en la vecindad de los mismos.

Por ejemplo, al considerar la cuantía límite superior, aunque se sabe que el seleccionar dicho valor para diseño conlleva alcanzar las menores dimensiones de las secciones transversales de los elementos estructurales, así como los menores valores de capacidad de ductilidad, también se ha identificado en esta condición que en la post-fluencia se presenta una rigidez negativa, aspecto que resulta inaceptable desde el punto de vista de la mecánica estructural.

Por otro lado, también se sabe que al seleccionar consistentemente la cuantía mínima, o algún valor en la vecindad de la misma, como un valor de diseño de elementos sujetos a demanda de flexión, se obtendrán los mayores valores de las dimensiones de las secciones transversales, así como los mayores valores de la capacidad de ductilidad de los elementos; sin embargo, también se ha identificado que para dichas condiciones, la demanda de deformación unitaria en el acero de refuerzo en tensión puede llegar a resultar superior a la que marca el inicio del fenómeno de endurecimiento por deformación. Entonces, si las expresiones para diseño toman en cuenta que la fuerza de tensión estará definida por el esfuerzo de fluencia del acero de refuerzo longitudinal,  $f_y$ , es probable que para la cuantía mínima el esfuerzo demandado en el acero sea considerablemente superior al esfuerzo de fluencia y, por lo tanto, la resistencia del elemento resulte superior a la nominal, independientemente de la dispersión que se tenga en las propiedades mecánicas del acero de refuerzo.

Con base en lo anterior podría decirse que estrictamente se debería considerar en la reglamentación los efectos que causa la pos-fluencia del acero, ya que el criterio de diseño está basado en un estado límite de falla. Además se ha observado que en una viga de concreto reforzado el momento último resistente de falla, así como su correspondiente deformación, son los parámetros más importantes para normar el buen funcionamiento estructural. Por esta razón en los siguientes capítulos se analiza el comportamiento de elementos viga, ante la demanda de flexión, considerando para su diseño la post-fluencia del acero.

Este trabajo se centra en la obtención de información relativa a probables anomalías e inconsistencias que se presentarían en el proceso de diseño

estructural, cuando se use de manera no racional los límites de cuantías de acero de refuerzo.

## 4. EFECTOS DE LAS CUANTÍAS LÍMITE EN EL COMPORTAMIENTO LOCAL DE LA SECCIÓN TRANSVERSAL DEL ELEMENTO VIGA

### 4.1 Análisis del comportamiento momento-curvatura de un elemento a flexión con cuantía máxima hasta su falla

Se procede a hacer el análisis del comportamiento momento-curvatura de un elemento a flexión con la cuantía máxima que propone el R.C.D.F., llevando la sección hasta su falla. Para lo cual se analizan siete puntos representativos para dicha curva.

El cálculo estará basado en las hipótesis planteadas en este trabajo, para el estudio de elementos de concreto reforzado, además de considerar el comportamiento esfuerzo-deformación del concreto y el acero, presentados en capítulos anteriores.

La viga para la cual se presenta el análisis de su momento-curvatura, corresponde a una sección de 30x60 cm. que corresponde a un edificio de 6 niveles para uso habitacional, el cual será analizado en el capítulo siguiente.

Datos generales de análisis:

Sección:

Base,  $b = 30\text{cm}$ .

Altura,  $h = 60\text{cm}$ .

Recubrimiento al eje del acero  $= r = 5\text{cm}$ .

$d = h - r$

$f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$

$f''_c = 0.85 f'_c = 190.4 \text{ kg/cm}^2$

$\beta_1 = 1.05 - \frac{f'_c}{1400}$

$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

$$\rho_b = f''_c / f_y \left( \frac{\beta_1 6000}{f_y + 6000} \right) = 0.00226$$

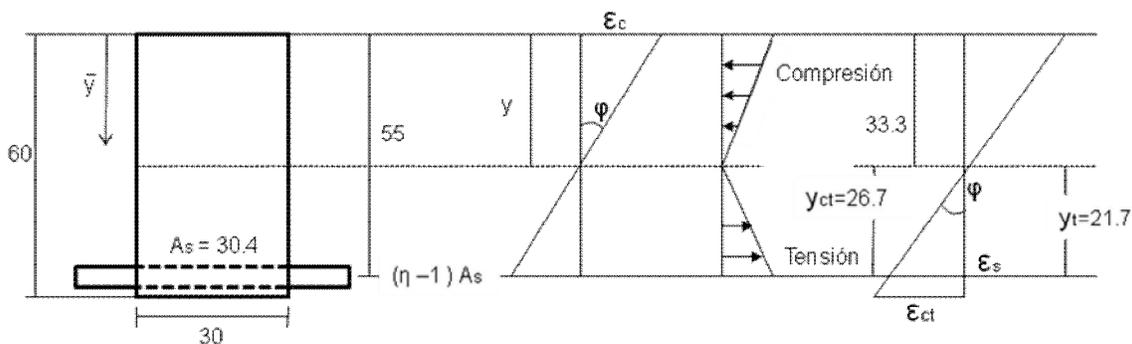
$$\rho_{max} = 0.75 \rho_b$$

$$A_{smax} = 30.4 \text{ cm}^2$$

$$\text{Se considera que } \eta = \frac{E_s}{E_c} = 10$$

En la nomenclatura de los cálculos  $A_{smax} = A_s$

Caso 1. Instantes antes del agrietamiento se tiene:



Cálculo del centroide geométrico de la sección transformada.

$$\tilde{y} (h*b + (\eta - 1) A_s) = h/2 (h*b) + d (\eta - 1) A_s$$

$$\tilde{y} = 33.29 \text{ cm.}$$

Cálculo del momento de inercia respecto al eje centroidal,  $I_y$ .

$$I_y = bh^3/12 + bh (h/2 - \tilde{y})^2 + (\eta - 1) A_s (d - \tilde{y})^2$$

$$I_y = 688437.5 \text{ cm}^4$$

El momento "exactamente" de agrietamiento,  $M_{cr}$ , está dado por:

$$M_{cr} = \frac{f_{ct} (I_y)}{c}$$

donde:

$$c = d - \tilde{y}$$

$$f_{ct} = 2 (f'_c)^{1/2} = 33.47, \text{ máximo esfuerzo de tensión del concreto.}$$

$$M_{cr} = 862.996 \text{ t. cm}$$

La curvatura de agrietamiento,  $\Phi_{cr}$

$$\Phi_{cr} = \epsilon_{ct} / y_{ct} \quad : \quad \epsilon_{ct} = f_{ct} / E_{ct}$$

$$\Phi_{cr} = 5.96 \times 10^{-6} \text{ 1/cm}$$

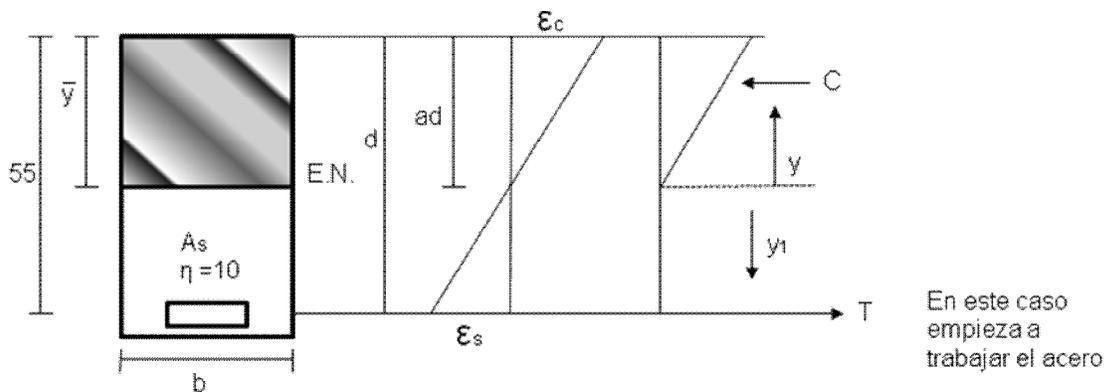
Se revisa el esfuerzo en el acero, debe ser cero.

$$f_s = E_s \epsilon_s$$

$$f_s = E_s \Phi_{cr} y_t = 272.05 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{ó}$$

$$f_s = 0.065 f_y = 0$$

Caso 1'. Instante después del agrietamiento, abajo del E.N. sólo se considera el acero, pues está totalmente agrietado.



Por equilibrio los primeros momentos deben ser cero.

$$(ad * b) ad/2 = (As \eta) (d - ad) = 0$$

Se despeja ad

$$ad = 24.75 \text{ cm.}$$

$$\tilde{y} = 24.75 \text{ cm.}$$

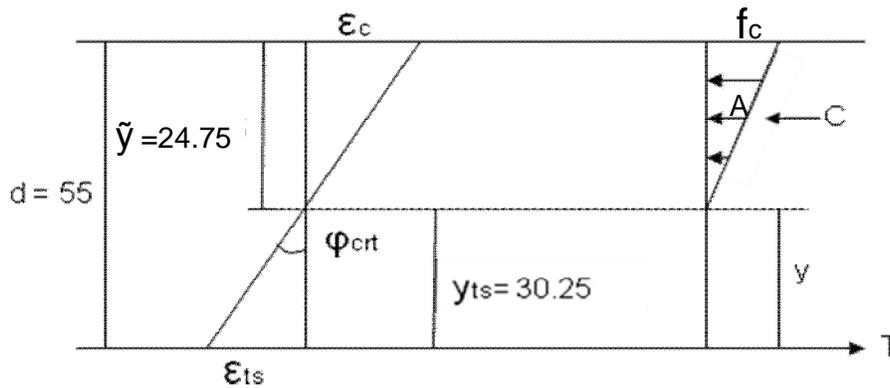
Se obtiene el momento de inercia después del agrietamiento.

$$I_{crt} = by^3/12 + (b * \tilde{y}) (\tilde{y} /2)^2 + (\eta As) (\tilde{y} - d)^2$$

$$I_{crt} = 429787.54 \text{ cm}^4$$

Ahora se obtiene la curvatura después del agrietamiento.

Aplicando equilibrio de momentos se tiene:



$$M_{cr} = \int_0^{\bar{y}} f_c dA y + f_s A_s y_{ts}$$

Si,  $E_c = f_c / \epsilon_c$  y  $\phi_{cr} = \epsilon_c / y$

$$f_c = E_c \phi_{cr} y$$

entonces:

$$M_{cr} = \int_0^{\bar{y}} (E_c \phi_{cr} y) dA y + (\eta E_c \phi_{cr} y_{ts}) A_s y_{ts}$$

$$M_{cr} = E_c \phi_{cr} \left[ \int dA y^2 + \eta A_s y_{ts}^2 \right]$$

donde,  $\int dA y^2 + \eta A_s y_{ts}^2$  es igual al momento de inercia de la sección transformada agrietada ( $I_{cr.S.T.A.}$ )

$$M_{cr} = E_c \phi_{cr} I_{cr.S.T.A.}$$

entonces

$$\phi_{cr} = M_{cr} / E_c I_{cr.S.T.A.}$$

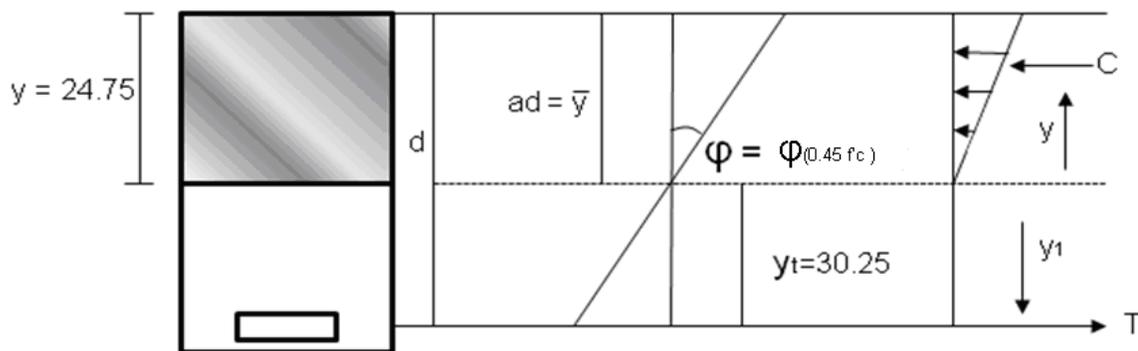
$$\phi_{cr} = 9.8617 \times 10^{-6} \text{ cm}^4$$

Para un momento exactamente igual al del agrietamiento.

$$M_{cr} = 862.99 \text{ t.cm}$$

Caso 2. Para una deformación del concreto  $\epsilon_c$ , que implica un esfuerzo  $f_c = 0.45f'_c$ , con un comportamiento elástico del acero.

Por equilibrio de fuerzas, con el E.N. en el centroide de la sección agrietada transformada (S.A.T.), se tiene:



$\tilde{y} = 24.75$  cm, profundidad del bloque de concreto.

$$I_{cr.S.A.T.} = 429787.54 \text{ cm}^4$$

entonces:

$$\phi(0.45 f'_c) = \frac{\epsilon_c}{ad} \quad : \quad \epsilon_c = \frac{f_c}{E_c} \quad : \quad f_c = 0.45 f'_c = 126 \text{ kg/cm}^2$$

$$\phi(0.45 f'_c) = 2.42 \times 10^{-5} \text{ 1/cm.}$$

y un momento resistente para  $0.45 f'_c$  igual a  $M_y (0.45 f'_c)$

$$M_y(0.45 f'_c) = (f'_c * I_{cr.S.T.A.}) / y$$

$$\text{Si } \phi = \epsilon_c / y \quad : \quad \epsilon_c = f_c / E_c \quad : \quad f_c = \phi_y E_c \tilde{y}$$

Sustituyendo valores

$$\begin{aligned} M_y(0.45 f'_c) &= \phi_y E_c I_{cr} \\ &= 2.42 \times 10^{-5} * 2.1 \times 10^5 * 429787.54 \end{aligned}$$

$$M_y(0.45 f'_c) = 2184.18 \text{ T.cm}$$

En este caso el esfuerzo en el acero aún no alcanza el esfuerzo de fluencia

$$\epsilon_s = \phi(0.45 f'_c) * y_{ts} = 7.32 * 10^{-4}$$

$$f_{st} = E_s \epsilon_s = 2.1 \times 10^6 * 7.32 \times 10^{-4} = 1537.3 \text{ kg/cm}^2 < 4200 \text{ kg/cm}^2$$

Caso 3. Para una deformación del concreto  $\epsilon_c$  que implica una resistencia del concreto  $f_c = 0.7 f'_c$ , con un estado de esfuerzos probable en el acero de  $f_s = f_y$ .

Este caso se considera como el límite del rango elástico. Aún se está con el eje centroidal en  $y = 24.76$  e  $I_{cr.S.T.A.} = 429787.54 \text{ cm}^4$ .

Entonces:

$$\phi_{(0.7 f_c)} = \frac{\epsilon_c}{ad} : \quad \epsilon_c = \frac{f_c}{E_c} = 280(0.7) / E_c = 9.33 \times 10^{-4} \text{ cm}$$

$$\phi_{(0.7 f_c)} = 3.769 \times 10^{-5} \text{ 1/cm.}$$

y un momento resistente igual a:

$$M_y (0.7 f_c) = \phi_{(0.7 f_c)} * E_c * I_{cr.S.T.A.}$$

$$M_y (0.7 f_c) = 3401.72 \text{ t. cm}$$

Se verifica que el esfuerzo del acero en tensión sea menor o igual al de fluencia, como se está suponiendo.

$$\epsilon_s = \phi_{(0.70 f_c)} * y_{ts} = 1.140 * 10^{-3}$$

$$f_{st} = E_s \epsilon_s = 2394.25 \text{ kg/cm}^2 < 4200 \text{ kg/cm}^2$$

Caso 3'. Condición en la que se presentaría el inicio de la fluencia del acero de refuerzo en tensión. Como hipótesis de análisis se acepta que el comportamiento desplazamiento-deformación del concreto es no lineal (se usa la propuesta de Hognestad), y aún no se alcanza el esfuerzo máximo del concreto  $f'_{cmax}$ . Además se considera que el acero está al límite del comportamiento lineal  $\epsilon_y$ .

$$\epsilon_y = f_s / E_s = 0.002 * 10^{-3}$$

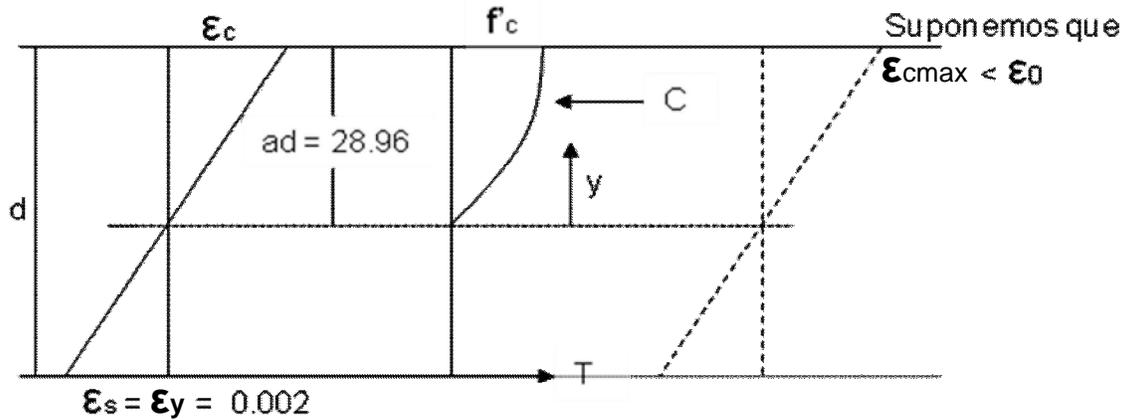
entonces se tiene que:

$$f_c = f'_c [ 2 \epsilon_c / \epsilon_0 - (\epsilon_c / \epsilon_0)^2 ]$$

Se debe conocer la deformación unitaria  $\epsilon_c$  y la profundidad del bloque de concreto, para las condiciones dadas en éste caso.

Para el cálculo de  $ad$  y  $\epsilon_c$ , suponemos que la deformación máxima alcanzada del concreto  $\epsilon_{cmax}$  es menor o igual a la deformación del concreto en su límite elástico lineal  $\epsilon_0$ , esto es  $\epsilon_{cmax} \leq \epsilon_0$ .

Entonces, se aplica equilibrio de fuerzas:



$$T = C = b \int_0^{ad} \left( 2 \frac{\epsilon_c}{\epsilon_0} - \left( \frac{\epsilon_c}{\epsilon_0} \right)^2 \right) f'_c dy$$

donde:  $\epsilon_c = \frac{y \epsilon_{cmax}}{ad}$  :  $\epsilon_{cmax} = \left( \frac{\epsilon_y}{d-ad} \right) ad$

Integrando y sustituyendo valores

$$Asf_y = b f'_c ad \left( \frac{\epsilon_y ad}{\epsilon_c (d-ad)} - \frac{1}{3} \left( \frac{\epsilon_y}{\epsilon_0} \right)^2 \left( \frac{ad}{d-ad} \right)^2 \right)$$

para:

$$As = 30.4 \text{ cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$b = 30 \text{ cm}$$

$$f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$$

$$\epsilon_s = 0.002 \times 10^{-3}$$

$$\epsilon_s = 2 f'_c / E_c = 0.00266$$

$$d = 55 \text{ cm}$$

sustituyendo valores y despejando ad

$$ad = 28.96 \text{ cm}$$

Se verifica si se cumple lo supuesto  $\epsilon_{cmax} \leq \epsilon_0$

$$\epsilon_{cmax} = \epsilon_y (ad/(d-ad)) = 6.002 * 28.96/26.04$$

$$\epsilon_{cmax} = 0.00222 \leq 0.00266, \text{ se está en el límite de lo supuesto.}$$

La curvatura a la fluencia es  $\phi_y$

$$\phi_y = \epsilon_{cmax} / ad$$

$$\phi_y = 7.66 \times 10^{-5} \text{ 1/cm}$$

Para calcular el momento en el límite elástico  $M_y$ , se debe calcular el centroide del bloque de compresión. Por el teorema de primeros momentos:

$$\bar{y} = \frac{\int_0^{ad} f_c y dy}{\int_0^{ad} f_c dy}, \text{ comprende a } \tilde{y} C = \int_0^{ad} f_c y dy$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{2}{3} \left( \frac{\epsilon_{cmax}}{\epsilon_0} \right) (ad)^2 - \frac{1}{4} \left( \frac{\epsilon_{cmax}}{\epsilon_0} \right)^2 (ad)^2}{\frac{\epsilon_{cmax}}{\epsilon_0} ad - \frac{1}{3} \left( \frac{\epsilon_{cmax}^2}{\epsilon_0} \right) ad}$$

sustituyendo los valores de:

$$ad = 28.96 \text{ cm}$$

$$\epsilon_{cmax} = 0.0022$$

$$\epsilon_0 = 0.00266$$

$$\epsilon_{cmax}/\epsilon_0 = 0.8345$$

$$\tilde{y} = 18.37 \text{ cm}$$

Se observa que el centro de aplicación de la fuerza de compresión a una distancia  $\bar{y}$  del E.N., casi es igual a aplicarla a  $2/3 ad = 2/3 (28.96) = 19.3 \text{ cm}$ . Por lo que sin mucho error se puede aceptar que el punto de aplicación de la fuerza de compresión en la parábola de esfuerzos real es a  $2/3$  de la profundidad del bloque de esfuerzos del concreto,  $ad$ .

Entonces:

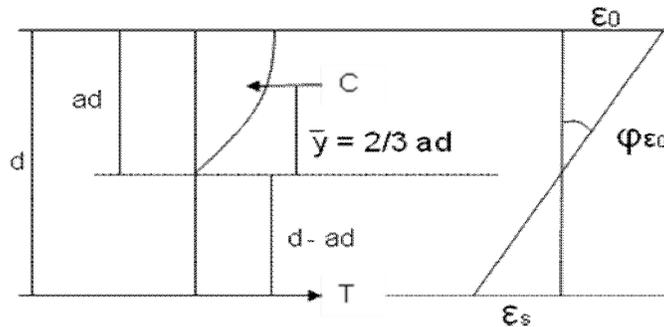
$$M_y = (d - ad + \tilde{y}) (A_s * f_y)$$

sustituyendo valores

$$M_y = 5670.26 \text{ T.cm}$$

Caso 4. El concreto alcanza su esfuerzo resistente máximo, asociado a un nivel de deformación unitaria  $\epsilon_0 = 0.0026$ , y aún el acero está fluyendo  $f_s = f_y$ .

Del equilibrio de fuerzas mostrado en la siguiente figura, se obtiene el momento y la curvatura.



Se acepta que el promedio de esfuerzos del concreto en compresión es  $2/3$  del rectángulo donde se encuentra ubicada la parábola propuesta por Hognestad, entonces:

$$C = 2/3 ad * b * f'_c$$

si,  $T = C = A_s f_y = 127680.00 \text{ T}$

despejando  $ad$

$$ad = 22.8 \text{ cm}$$

Se revisa si se está en lo supuesto, que  $\epsilon_s < \epsilon_{sh} = 0.01$  donde  $\epsilon_{sh}$  es el límite de la plataforma de fluencia del acero, ver la figura 3.

$$\epsilon_s = \frac{\epsilon_0 (d - ad)}{ad}$$

sustituyendo valores

$$\epsilon_s = 0.00375 < \epsilon_{sh} = 0.01, \text{ el acero está fluyendo.}$$

entonces se calcula  $\varphi_{\epsilon_0}$ , la curvatura

$$\varphi_{\epsilon_0} = \epsilon_0 / ad$$

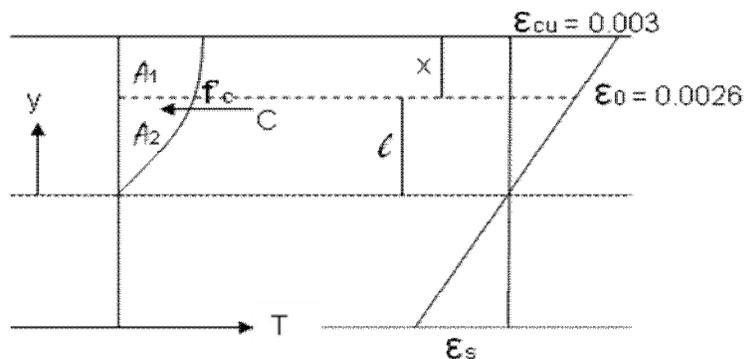
$$\varphi_{\epsilon_0} = 11.666 \times 10^{-5} \text{ 1/cm}$$

El momento resistente es:

$$M_{\epsilon_0} = A_s f_y (d - ad + \tilde{y}) \quad : \quad \tilde{y} = 2/3 ad = 15.20 \text{ cm}$$

$$M_{\epsilon_0} = 6052.03 \text{ T.cm}$$

Caso 5. El concreto alcanza su deformación máxima de falla  $\epsilon_{cmax} = \epsilon_{cu} = 0.003$ , por lo que el bloque de compresión del concreto se compone de dos partes, como se muestra en la siguiente figura.



Para calcular el eje centroidal se utilizará las condiciones de equilibrio de fuerzas y la geometría de la sección con las condiciones de deformación.

Por equilibrio de fuerzas se tiene que:

$$T = C$$

$$C = A_2 f_{c2} + A_1 f_{c1}$$

$$= \frac{1}{3} b (2/3 f'_c) + x * b (f_c + 0.95 f'_c)/2$$

donde:

$$\frac{1}{3} = \epsilon_0 ad / \epsilon_{cu}$$

$$x = ad - \epsilon_0 ad / \epsilon_{cu} = ad (1 - \epsilon_0 / \epsilon_{cu})$$

sustituyendo en C

$$C = (\epsilon_0 ad / \epsilon_{cu}) * b(2/3) f'_c + (1 - \epsilon_0 / \epsilon_{cu}) ad * b ((f'_c + 0.95 f'_c)/2)$$

sustituyendo  $\epsilon_0=0.0026$  y  $\epsilon_{cu}=0.003$  en C

$$C = T = 127680 = 3827.74 ad + 2585 ad$$

despejando ad

$$ad = 19.91$$

$$x = 6.28 \text{ cm}$$

$$\frac{1}{3} = 13.63 \text{ cm}$$

Se verifica si se está en el supuesto que  $\epsilon_y < \epsilon_s < \epsilon_{sh}$

$$\epsilon_s = (d-ad) * \epsilon_{cu} / ad = 0.0069 < \epsilon_{sh}=0.01$$

entonces:

$$\begin{aligned} \phi_{\epsilon_{cu}} &= \epsilon_{cu} / ad \\ &= 1.91 \times 10^{-4} \text{ 1/cm} \end{aligned}$$

Para el cálculo del momento correspondiente, se necesita el centro de la aplicación de la fuerza de compresión C, el cual se puede obtener con la suma de los primeros momentos.

$$\sum A_i (\bar{y}) = (\sum A_i y_i)$$

donde:

$$\sum A_i = C = 127680 \text{ T.cm}$$

$$\sum A_i y_i = f_{c1} y_1 + f_{c2} y_2$$

$$y_1 = \frac{1}{3} x / 2 = 16.71 \text{ cm}$$

$$y_2 = 2/3 \neq 2/3 (13.63)$$

entonces se tiene

$$\tilde{y} (127680) = 2585.58 (19.91) + 3827.74 (16.71) (13.63 * 2/3)$$

$$\tilde{y} = 12.18 \text{ cm.}$$

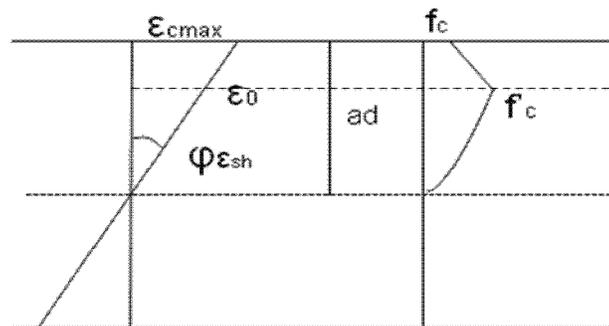
Por lo que el momento resistente que comprende a la deformación última de falla del concreto es:

$$M_{\epsilon_{cu}} = (d - ad + \bar{y}) (T)$$

$$M_{\epsilon_{cu}} = 6035.43 \text{ T.cm}$$

Caso 6. Es para la deformación del concreto  $\epsilon_{cc}$ , tal que se presenta el inicio de endurecimiento por deformación del acero, ( $\epsilon_s = \epsilon_{sh} = 0.01$ ).

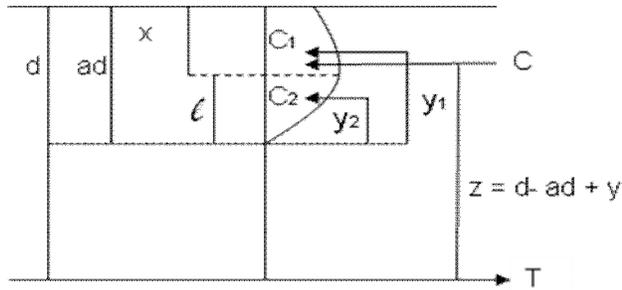
Esta condición de equilibrio, se puede representar en las siguientes figuras del estado de deformación y esfuerzos:



De donde se obtiene:

$$\epsilon_{cmax} = \epsilon_{sh} (ad) / (d-ad) = 0.01 (ad/(d-ad))$$

La siguiente figura muestra la condición de esfuerzos en equilibrio donde el bloque de esfuerzos en compresión es la parábola de Hognestad, ver fig. 1.



El comportamiento de  $f_c$  es no lineal, ver fig. 1

Por equilibrio de fuerzas  $T=C$ . Se plantea la ecuación con  $T= A_s f_y$ , dado que  $f_s=f_y$ .

$$C = C_1 + C_2$$

$$C = f_{c1} b(x) + f_{c2} b(\lambda)$$

$$f_{c1} = (f_c + f'_c)/2$$

$$f_{c2} = 2/3(f'_c)$$

$$f_c = f'_c [ 1 - [(0.15(\epsilon_{cu} - \epsilon_0)) / (0.0038 - \epsilon_0)] ], \text{ ver fig. 1}$$

De la geometría de las condiciones de equilibrio para éste caso se obtiene:

$$\lambda = (\epsilon_0 / \epsilon_{cmax}) ad$$

$$x = (1 - \epsilon_0 / \epsilon_{cmax}) ad$$

sustituyendo en la expresión de  $C=T$

$$C = \frac{\left[ \left( 2 - 0.15 \left[ \frac{(ad/(d-ad))0.01 - 0.0026}{0.0038 - 0.0026} \right] \right) 280 \right]}{2} * \left( 30 \left[ 1 - \frac{0.0026}{(ad/(d-ad))0.01} \right] ad \right) + 2/3 (ad) \left[ \frac{0.0026}{(ad/(d-ad))0.01} \right]^* 280 * 30$$

Por tanteos se calcula ad

$$ad = 20.7 \text{ cm}$$

entonces la curvatura para el límite de fluencia del acero es  $\phi_{\epsilon_{sh}}$

$$\begin{aligned} \phi_{\epsilon_{sh}} &= \epsilon_{sh} ad / (d - ad) = 20.72 (0.01) / (55 - 20.72) \\ &= 2.917 \times 10^{-4} \text{ 1/cm} \end{aligned}$$

Ahora para calcular el momento resistente, se obtiene la profundidad del eje centroidal  $\tilde{y}$ , de la suma de primeros momentos.

$$\sum C_i (\tilde{y}) = (\sum C_i y_i), \text{ con los siguientes valores de:}$$

$$C = C_1 + C_2$$

$$C_1 = 77784.42 \text{ kg}$$

$$C_2 = 49861.76 \text{ kg}$$

$$x = 11.80 \quad : \quad y_1 = \sqrt{x}/2 = 14.81 \text{ cm}$$

$$\sqrt{x} = 8.91 \quad : \quad y_2 = 2/3 (\sqrt{x}) = 5.94 \text{ cm}$$

Se tiene la siguiente expresión:

$$127690.13 \tilde{y} = 77784.42(14.81) + 49861.77 (5.94)$$

despejando:

$$\tilde{y} = 11.34 \text{ cm}$$

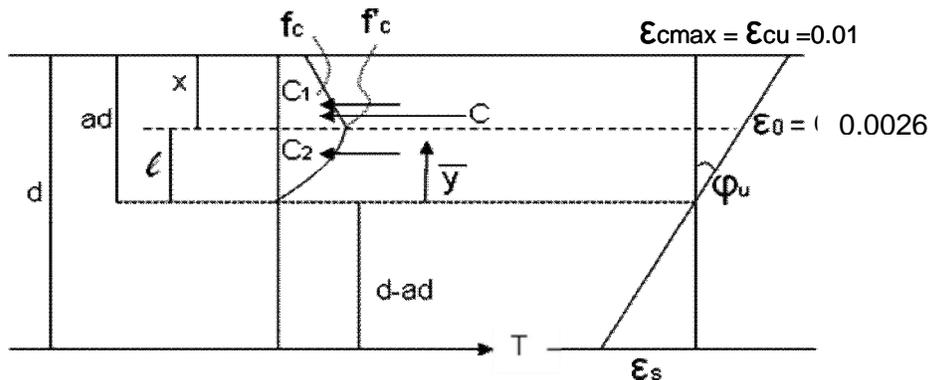
Resultando un momento para el límite de fluencia del acero.

$$M_{\epsilon_{sh}} = A_s f_y (d - ad + \tilde{y})$$

$$M_{\epsilon_{sh}} = 5824.76 \text{ T.cm}$$

Caso 7. Condición excepcional de aplastamiento en el concreto, con una deformación unitaria  $\epsilon_{cu}=0.01$ , y se acepta que el acero se mantiene en la plataforma de fluencia.

Esta condición de equilibrio se ilustra en la siguiente figura.



De la geometría de deformaciones:

$$\epsilon_s = (\epsilon_{cu} (d-ad))/ad$$

$$x = (1 - \epsilon_0/\epsilon_{cu}) ad$$

$$/ = (\epsilon_0/\epsilon_{cu}) ad$$

Del equilibrio de fuerzas se obtiene ad

$$C = C_1 + C_2$$

$$C = ((f_c + f'_c)/2) b * (1-\epsilon_0/\epsilon_{cu})ad + 2/3 (f'_c b) (\epsilon_0/\epsilon_{cu}) ad$$

donde:

$$f_c = f'_c [1 - [(0.15(\epsilon_{cu}-\epsilon_0)) / (0.003 - \epsilon_0)]]$$

y se puede corroborar que la fibra extrema de compresión está aplastada  $f_c = 0$ .

$$f_c = 280 - 280*0.15(0.01-0.0026)/(0.003-0.0026) = 0$$

entonces

$$C = ((7.36+280)/2)*30(1-(0.0026)/0.01)ad+(2/3)(280)(30)(0.0026/0.01)ad$$

$$C = 3163.83 ad + 1490.34 ad = 4654.17 ad$$

por otro lado

$$T = A_s f_y$$

donde

$$f_s = f_y + [(\epsilon_s - \epsilon_{sh}) / (\epsilon_{shu} - \epsilon_s)] 2000 \quad \text{ó}$$

$$f_s = 23333.33 \epsilon_s + 3966.67, \text{ ver fig. 3}$$

sustituyendo  $\epsilon_{sh}=0.01 : \epsilon_{shu}=0.10 : \epsilon_s = \epsilon_{cmax}(d-ad)/ad$

$$T = 30.4 \left[ 4200 + \left( \frac{0.01 (d-ad)/ad - 0.01}{0.10-0.01(d-ad)/ad} \right) 2000 \right]$$

Por la condición de equilibrio  $C=T$ , y por tanteos se obtiene ad

$$ad = 27.45 \text{ cm}$$

Se calcula la curvatura última  $\phi_u$ .

$$\phi_u = \epsilon_{cmax}/ad = 0.01/27.45$$

$$\phi_u = 3.643 \times 10^{-4} \text{ 1/cm}$$

Para el cálculo del momento último  $M_u$ , obtenemos  $\tilde{y}$ .

Del bloque de esfuerzos y por equilibrio de primeros momentos.

$$\sum C_i (y) = (\sum C_i y_i)$$

Sustituyendo los siguientes valores calculados con  $ad$ .

$$C_1 = 86847.13$$

$$C_2 = 40909.83$$

$$x = (1 - \epsilon_0/\epsilon_{cmax}) ad = 20.14 \text{ cm}$$

$$\lambda = ad - x = 7.30 \text{ cm}$$

$$y_1 = \lambda + x/2 = 17.37 \text{ cm}$$

$$y_2 = 2/3 (\lambda) = 4.866 \text{ cm}$$

entonces tenemos que la profundidad del eje centroidal  $\tilde{y}$  es:

$$\tilde{y} (127756.96) = 86847.13(17.37) + 40909.83(4.866)$$

$$\tilde{y} = 13.366 \text{ cm}$$

entonces el momento último de falla del elemento es:

$$M_u = A_s f_y (d - ad + \tilde{y})$$

$$= 30.4 + 4200.8 (55 - 27.45 + 13.36)$$

$$\underline{M_u = 5225.15 \text{ T.cm}}$$

**Tabla 1. Resumen del comportamiento de una sección transversal a flexión. Relación momento-curvatura hasta su falla con área de acero máxima,  $A_{smax}$ .**

Casos representativos de la curva M- $\Phi$	Momento M (T.cm)	Curvatura $\Phi$ (1/cm)	Centroide ad (cm)
CASO 1 Antes del agrietamiento.	$M_{cr} = 863.00$	$\Phi_{cr} = 0.0057 \times 10^{-3}$	$y_{cr} = 33.29$
CASO 1' Exactamente después del agrietamiento, sección agrietada transformada.	$M_{crt} = 863.00$	$\Phi_{crt} = 0.00956 \times 10^{-3}$	$y_{crt} = 24.75$
CASO 2 Con $0.45 f'_c$ , es comportamiento elástico de la sección.	$M_{y(0.45f'_c)} = 2184.18$	$\Phi_{y(0.45f'_c)} = 0.0242 \times 10^{-3}$	$y_{(0.45f'_c)} = 24.75$
CASO 3 Con $0.70 f'_c$ límite de rango elástico de la sección.	$M_{y(0.7f'_c)} = 3402.35$	$\Phi_{y(0.7f'_c)} = 0.0377 \times 10^{-3}$	$y_{(0.7f'_c)} = 24.75$
CASO 3' Comportamiento de concreto ya no es lineal (Hognestad) $f_s=f_y$ : El acero está casi en su límite elástico $\epsilon_c=0.002$ (El acero acepta un poco de más carga sin sobrepasar su límite elástico).	$M_y = 5670.26$	$\Phi_y = 0.0766 \times 10^{-3}$	$y = 28.96$
CASO 4 Máximo desplazamiento del concreto $\epsilon_0=0.00266$ y máximo esfuerzo $f'_c=280$ kg/cm <sup>2</sup> . El acero aún esta en la plataforma de fluencia $f_s=f_y$ .	$M_{\epsilon_0} = 6052.03$	$\Phi_{\epsilon_0} = 0.116 \times 10^{-3}$	$y_{\epsilon_0} = 22.28$
CASO 5 Máximo desplazamiento del concreto $\epsilon_{cmax}=\epsilon_{cu}=0.0038$ , aunque ya tiene menos resistencia en alguna parte de la sección. El acero aún está en la plataforma de fluencia $f_s=f_y$ .	$M_{\epsilon_{cu}} = 6035.43$	$\Phi_{\epsilon_{cu}} = 0.191 \times 10^{-3}$	$y_{\epsilon_{cu}} = 19.91$
CASO 6 El acero está en el límite de plataforma $\epsilon_s=\epsilon_{sh}=0.01$ . $f_y=f_s$ . El concreto en una parte de la sección aún esta resistiendo.	$M_{\epsilon_{sh}} = 5824.76$	$\Phi_{\epsilon_{sh}} = 0.2917 \times 10^{-3}$	$y_{\epsilon_{sh}} = 20.7$

<p><b>CASO 7</b>  El desplazamiento del concreto es el último máximo <math>\epsilon_{cmax} = \epsilon_{cu}</math>; cuando la fibra superior está aplastada <math>\epsilon_{cu} = 0.01</math>. El acero está en la post-fluencia.</p>	$M_{cup} = 5225.15$	$\phi_{cup} = 0.3643 \times 10^{-3}$	$y_{cup} = 27.4$
<p>Donde:  <math>M_{cup}</math> = Momento ultimo del concreto, en post-fluencia del acero.  <math>\phi_{cup}</math> = Curvatura ultima del concreto en post-fluencia del acero.</p>			

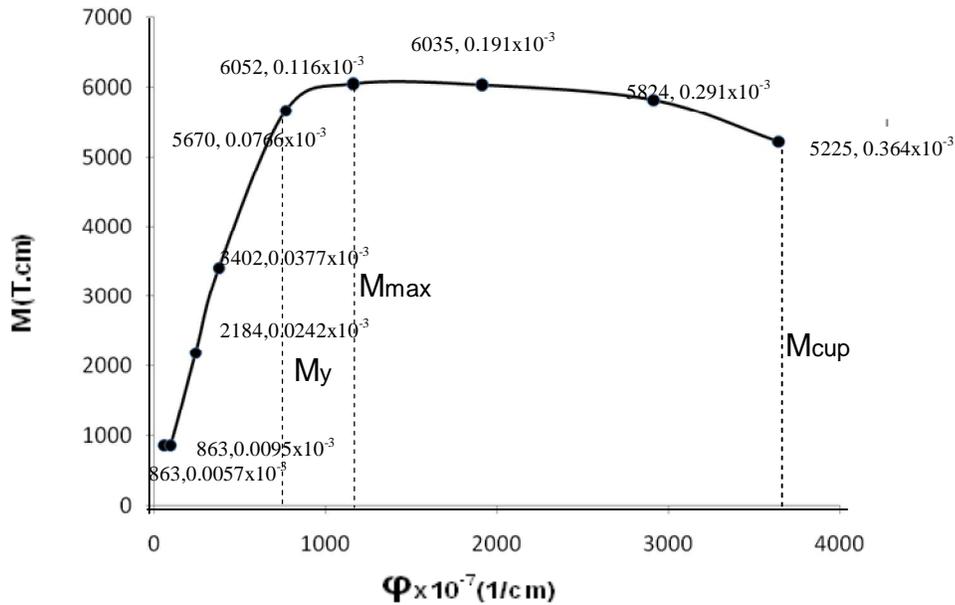


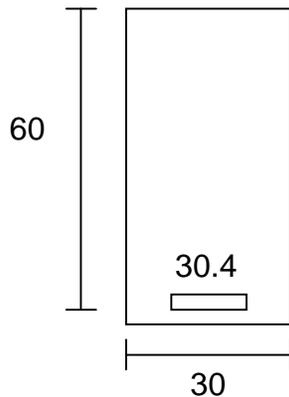
Figura 6. Curvatura M- $\phi$  de una sección rectangular con acero máximo  $A_{smax}$ . Comportamiento hasta su falla

**Comparación de resultados con los propuestos por el R.C.D.F. Para la sección en estudio de 30x60 cm, con área máxima de acero.**

Cálculo de resistencia a flexión por el R.C.D.F., para hacer la comparación de resultados.

Sección 30x60 cm

$A_{smax} = 30.4 \text{ cm}^2$



$$b = 30 \text{ cm}$$

$$d = 60 \text{ cm}$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$$

$$f^*c = 0.8 f'_c = 224 \text{ kg/cm}^2$$

$$f''c = (1.05 - f^*c/1250) f^*c \leq 0.85 f^*c$$

$$f''c = 195.05 \leq 0.85(224) = 190.4$$

$$f''c = 190.4 \text{ kg/cm}^2$$

$$M_{Rn} = b d^2 f''c q (1 - 0.5q) : q = ((A_s f_y / bd) / (f''c)) = 0.406$$

$$M_{Rn} = 5596.66 \text{ T.cm}$$

Si se compara con el "exacto" (caso 3'), es prácticamente igual a  $M_y = 5670.26 \text{ T.cm}$ .

Sin embargo, se debe observar que para la curvatura

$$\phi_{y(f''c)} = \epsilon_c / ad$$

$$\epsilon_c = f''c / E_c$$

$E_c$ , no es  $210000 \text{ kg/cm}^2$ , pues como se vio en el caso 3', el comportamiento del concreto ya no es lineal. Por lo tanto el desplazamiento o curvatura no es el que corresponde a:

$$\phi_{y(f''c)} = \epsilon_c / ad ; \text{ con}$$

$$\epsilon_c = f''c / E_c = 190.4/210000 = 9.06 \times 10^{-4}$$

$$\phi_{y(f''c)} = 9.066 \times 10^{-4} / 24.75 = 3.66 \times 10^{-5} \text{ 1/cm}$$

Si no el que corresponde a considerar que el concreto en una parte de la sección transversal ya no es lineal. El cuál es el  $\phi_y$  del caso 3'.

$$\phi_y = 7.66 \times 10^{-5} \text{ 1/cm}$$

Así mismo como se puede observar en la tabla 1, la sección con  $A_{smax}$  alcanza una resistencia máxima de:

$$M_{\epsilon_{cu}} = 6052.43 \text{ T.cm y un giro}$$

$$\phi_{\epsilon_{cu}} = 11.6 \times 10^{-5} \text{ 1/cm}$$

Comparado con el momento máximo calculado con las formulas que propone el R.C.D.F., se tiene:

$$M_y = 5596.66 \text{ T.cm y un giro calculado}$$

$$\phi_y = 3.66 \times 10^{-5} \text{ 1/cm}$$

Se observa que por un momento la sección con el  $A_{smax}$  propuesta por el R.C.D.F. en realidad alcanza una mayor resistencia, sin embargo se tendría mayor desplazamiento o giro. En otras palabras, si se deja que el acero fluya un poco mas de lo que permite el R.C.D.F. se alcanzaría un mayor momento en el orden del 8%, por lo que en ese caso el R.C.D.F. estaría subestimando resistencia, sin embargo no pone en riesgo el comportamiento viga débil-columna fuerte, ya que diseñamos para que  $M_{columna} = 1.5 M_{viga}$ .

Quizá el caso más importante que se debe observar es el comportamiento del momento último  $M_u$ , pues el criterio de diseño es al límite de falla.

Entonces, si se observa la gráfica  $M-\phi$  de la figura 6 se puede ver que el  $M_u$  de falla es menor que el momento considerado por el R.C.D.F. ( $M_y$ ), o sea  $M_u < M_y$ . Por lo que, el dejar éste momento  $M_y$  como último resistente, sería sobreestimar resistencia en el orden del 7%. Para que no ocurra esto, debemos obtener un valor máximo de acero " $A_{smax}$ " que respete el comportamiento de la post-fluencia, como se verá a continuación.

Finalmente, y probablemente la condición de mayor relevancia en la relación momento – curvatura de este ejemplo, resulta claro que después de que se presenta la fluencia del acero de refuerzo longitudinal en tensión, la pendiente del diagrama resulta negativa, aspecto inconsistente con la teoría del análisis estructural, figura 6

## Valor máximo aceptable de cuantía para respetar el comportamiento de post-fluencia

Respetar el comportamiento de post-fluencia, significa que el momento último  $M_u$  alcanzado con cuantía máxima  $A_{smax}$ , no deberá ser menor que el momento límite elástico  $M_y$  del R.C.D.F., es decir que

$$M_u \geq M_y$$

Aspecto que implica una rigidez post-fluencia positiva.

Entonces si se calcula el  $M_u$  utilizando el bloque simplificado de esfuerzos:

$$f_c = 0.85 f'_c \quad : \quad f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$a = c \beta_1 \quad : \quad f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$$

$$\epsilon_c = 0.003$$

Implica un momento último resistente igual a:

$$M_u = A_s f_y d (1 - 0.59 q)$$

por otro lado, considerando el momento de la sección en el límite elástico  $M_y$  con:

$$f_c = 0.7 f'_c, \text{ simplificando a:}$$

$$f_c = 0.5 f'_c, \text{ con}$$

$$f_s = f_y$$

Del bloque de esfuerzos se tiene que:

$$M_y = T(Jd) = A_{st} f_y d \left(1 - \frac{k}{3}\right)$$

Donde  $k$  y  $J$  son parametros que afectan el peralte efectivo de la sección, para darnos la profundidad del eje neutro desde la fibra más aleja de compresión, y el brazo de palanca entre las fuerzas de compresión  $C$  y tensión  $T$ , respectivamente.

La condición que se desea es que  $M_u \geq M_y$ , y se debe encontrar el  $A_{smax}$  que satisfaga esta condición.

$$M_u = A_s f_y d (1 - 0.59 q)$$

$$M_y = A_{st} f_y d \left(1 - \frac{k}{3}\right)$$

$$M_u \geq M_y$$

Simplificando los términos.

$$1 - 0.59 q \geq \frac{k}{3}$$

Entonces, dado que el estado de esfuerzos está en el límite del rango elástico, se puede introducir el valor de los parámetros:

$$q = \rho_{\max} f_y / f'_c$$

$$k = ((\eta \rho)^2 + 2 \eta \rho)^{1/2} - \eta \rho$$

donde:

$$\rho_{\max} = A_{s\max} / bd$$

$$\eta = E_s / E_c = 10$$

Por lo que, la expresión final para el cálculo de la cuantía máxima sin que se presente rigidez negativa en la post-fluencia es la siguiente:

$$0.59 \rho_{\max} f_y / f'_c \leq [((\eta \rho)^2 + 2 \eta \rho)^{1/2} - \eta \rho] / 3$$

Sustituyendo los valores de q y k, se tiene:

$$0.59 (A_{s\max} / bd) (f_y / f'_c) \leq \frac{((10 A_{s\max} / bd)^2 + 20 A_{s\max} / bd)^{1/2} - 10 A_{s\max} / bd}{3}$$

En la expresión anterior,  $\rho_{\max}$  es la cuantía de acero máxima aceptable para respetar el comportamiento de la post-fluencia, la cual se denota en este trabajo como " $\rho_{\max}$ " con su correspondiente " $A_{s\max}$ ".

Con base a lo anterior se presenta el cálculo numérico de " $A_{s\max}$ ", del ejemplo planteado en este trabajo.

Sustituyendo valores se tiene:

$$0.01475 A_{s\max} + 0.0055 A_{s\max} = (0.0000308 A_{s\max}^2 + 0.0111 A_{s\max})^{1/2}$$

$$(0.0203 A_{s\max})^2 = 0.0000308 A_{s\max}^2 + 0.0111 A_{s\max}$$

$$"A_{s\max}" = 29.09 \text{ cm}^2.$$

Por lo que con ésta área de acero " $A_{s\max}$ ", se está cumpliendo con la condición  $M_u = M_y$ , sin que se presente rigidez negativa en la post-fluencia.

Con la finalidad de tener una idea aproximada del " $A_{s\max}$ " (propuesta en este trabajo) en función del  $A_{s\max}$  (propuesta por el R.C.D.F.), se presenta la siguiente comparación de resultados numéricos.

$$“A_{smax}” = 29.09 \text{ cm}^2$$

$$A_{smax} = 30.40 \text{ cm}^2$$

$$“A_{smax}” = 0.956 \text{ cm}^2 A_{smax} \text{ (R.C.D.F.)}$$

## 4.2 Análisis del comportamiento momento-curvatura de un elemento a flexión con cuantía mínima hasta su falla

Se procede a hacer el análisis del comportamiento momento-curvatura para la viga del ejemplo que se trata en este capítulo, con el área de acero mínima que propone el R.C.D.F., llevando la sección hasta su falla. Para lo cual se analizan seis puntos representativos en dicha curva.

Área de acero mínima propuesta por el R.C.D.F. para una sección de  $b \times h$ .

$$b = 30 \text{ cm.}$$

$$h = 60 \text{ cm.}$$

$$\rho_{min} = \frac{0.67 (f'_c)^{1/2}}{f_y} = 0.00278$$

$$A_{smin} = b d \rho_{min} = 5.06 \text{ cm}^2$$

$$\eta = E_s/E_c = 10$$

Caso 1. Instantes antes del agrietamiento

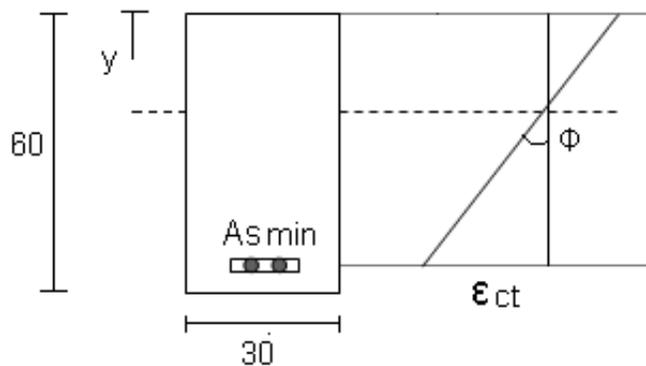


Figura 7. Deformación de la sección antes del agrietamiento

El centroide de la sección transformada no agrietada se obtiene por equilibrio de momentos.

$$\tilde{y} ( 60 \times 30 + (\eta - 1 ) A_{smin} = ( 60/2 ) ( 60 \times 30 ) + 55 (\eta - 1 ) A_{smin}$$

$$\tilde{y} = 30.6 \text{ cm.}$$

$$I_y = ( 30 \times 60^3 / 12 ) + 30 \times 60 ( 30 - 30.6 )^2 + 9 ( 5.06 ) ( 55 - 30.6 )^2$$

$$= 567760.69 \text{ mc}^4$$

$$M_{crt} = f_{crt} ( I ) / c \quad : \quad f_{crt} = 2 ( f'c )^{1/2} = 33.47 \text{ kg/cm}^2$$

$$c = 60 - 30.6 = 29.4$$

$$M_{crt} = 646.35 \text{ t.cm}$$

La curvatura instantes antes del agrietamiento  $\phi_{cr}$ .

$$\epsilon_{ct} = f_{crt} / E_{ct}$$

$$\phi_{cr} = \epsilon_{ct} / y_{ct} = 0.00542 \times 10^{-3}$$

Se revisa el esfuerzo del acero

$$f_s = E_s \phi_{cr} y_t \quad : \quad y_t = c - 5 = 24.4 \text{ cm.}$$

$$\epsilon_s = f_s = 2.97 = 0.00$$

Caso 1' Instantes después del agrietamiento (abajo de E.N., está agrietado)

De los primeros momentos de área.

$$(ad \times b) ad / 2 = A_{smin} ( d - ad )$$

Sustituyendo valores

$$ad = \tilde{y} = 12.038$$

El momento de inercia de la sección agrietada  $I_{crt}$

$$I_{crt} = b y^3 / 12 + ( b \times \tilde{y} ) ( \tilde{y} / 2 )^2 + ( n A_{smin} ) ( \tilde{y} - d )^2$$

$$I_{crt} = 110841.70 \text{ cm}^4$$

El giro es:

$$\phi_{crt} = M_{cr} / E_{cts} ( I_{crt} )$$

$$\phi_{crt} = 0.0277 \times 10^{-3} \text{ 1/cm}$$

El momento que se tuvo exactamente antes del agrietamiento es:

$$M_{cr} = 646.358 \text{ tcm}$$

Se revisa el esfuerzo del acero

$$f_s = E_s \phi_{cr} \tilde{y} t = 1754.59 \text{ k/cm}^2$$

Quiere decir que después del agrietamiento el acero empieza a trabajar

Caso 2. Para una resistencia del concreto  $f_c = 0.45 f'_c$ , aun el comportamiento es elástico

$y = 12.038$  cm, está agrietado y el acero seguirá tomando esfuerzo

$$I_{crt} = 110841.70 \text{ cm}^4$$

$$\Phi_{(0.45 f'_c)} = \epsilon_c / ad$$

$$\epsilon_c = f_c / E_c = 0.0006$$

$$\Phi_{(0.45 f'_c)} = 0.0498 \times 10^{-3} \text{ 1/cm}$$

$$M_{y(0.45 f'_c)} = \Phi E_c I_{crt}$$

$$M_{y(0.45 f'_c)} = 1159.17 \text{ t.cm}$$

Revisamos el esfuerzo del acero, que esté en lo supuesto. (Comportamiento elástico, no alcanza su esfuerzo de fluencia)

$$\epsilon_s = \Phi_{(0.45 f'_c)} \times y_{ts} \quad : \quad y_{ts} = d - y = 42.97 \text{ cm}$$

$$\epsilon_s = 1.039 \times 10^{-3}$$

$$f_{st} = E_s \times \epsilon_s = 2183.73 \text{ kg/cm}^2 < 4200 \text{ kg/cm}^2 .$$

Caso 3. Para una deformación del concreto  $\epsilon_c$ , la cual implica una resistencia  $f_c = 0.7 f'_c$ , con un estado de esfuerzos probable en el acero de  $f_s = f_y$ .

Este caso se considera como el límite del rango elástico. El eje centroidal  $y=12.038$  cm e  $I_{crt} = 110841.7 \text{ cm}^4$ .

Entonces:

$$\Phi_{(0.7 f'_c)} = \epsilon_c / ad \quad : \quad \epsilon_c = f_c / E_c = 9.33 \times 10^{-4}$$

$$\Phi_{(0.7 f'_c)} = 9.33 \times 10^{-4} / 12.038$$

$$\Phi_{(0.7 f'_c)} = 0.0775 \times 10^{-3}$$

$$M_{(0.7 f'_c)} = \Phi_{(0.7 f'_c)} \times E_c I_{crt}$$

$$M_{(0.7 f'_c)} = 1803.94 \text{ t.cm}$$

Se revisa que el acero no rebasa el esfuerzo de fluencia como se está suponiendo.

$$f_{st} = E_s \times \epsilon_s = 2.1 \times 10^6 \times 0.00334 = 7014 > 4200 \text{ kg/cm}^2$$

Para  $f_c = 0.7 f'_c$ , el acero rebasa el esfuerzo de fluencia y **no se está en lo supuesto**.

Entonces se busca el valor del esfuerzo  $f_c$ , que corresponda a lo supuesto de estar en el límite del rango elástico  $f_{st} = f_y$ , o sea:

$$\epsilon_s = f_{st} / E_s = 0.002$$

$$\phi_{(f'_c)} = \epsilon_c / a d$$

$$\epsilon_s = \phi_{(f'_c)} y_{ts}$$

$$f_{st} / E_s = \epsilon_c / a d * y_{ts}$$

Sustituyendo valores.

$$0.002 = \epsilon_c / a d * y_{ts}$$

$$\epsilon_s = 0.0056$$

Lo cual implica un esfuerzo

$$f_c = \epsilon_c * E_s = 117.66 \text{ kg/cm}^2$$

Por lo que se requiere un esfuerzo resistente igual a:

$$f_c = 0.42 f'_c.$$

Esto significa que el  $A_{smin}$  propuesto por el RCDF, empieza a fluir con  $f_c = 0.42 f'_c$ , entonces el caso 2 del ejemplo es el límite del rango elástico, con:

$$M_{y(0.45 f'_c)} = M_{y(0.42 f'_c)} = 1159.17 \text{ t.cm}$$

$$\phi_{(0.45 f'_c)} = 0.0498 \times 10^{-3} \text{ 1/cm}$$

Caso 3'. Condición en la que se presentaría el inicio de la fluencia del acero de refuerzo en tensión. Como hipótesis del análisis se acepta que el comportamiento desplazamiento-deformación del concreto es no lineal, se usa la propuesta de

Hognestad, y aún no se alcanza el esfuerzo máximo del concreto  $f'_c \text{ max}$ . Además se considera que el acero está al límite del comportamiento lineal  $\epsilon_y$ .

$$f_s = E_s \times \epsilon_s$$

$$\epsilon_s = 4200 / 2.1 \times 10^6 = 0.002$$

Se Integra todo el esfuerzo del concreto y se igualan las fuerzas  $T = C$

$$A_{smin} f_y = b f'_c ad (\epsilon_s ad / \epsilon_s (d - ad) - 1/3 (\epsilon_y \epsilon_s)^2 (ad / d - ad)^2)$$

Calculamos  $ad$  para  $\epsilon_s = \epsilon_y = 0.002$  y suponemos que la deformación de concreto  $\epsilon_{cmax}$  es menor que  $\epsilon_0$ , la deformación cuando el concreto alcanza su esfuerzo máximo.

$$Ad = 12.6 \text{ cm.}$$

Verificamos lo supuesto  $\epsilon_{cmax} < \epsilon_0$

$$\epsilon_{cmax} = \epsilon_y ad / (d - ad) = 0.00059 < 0.0026$$

Entonces.

$$\phi_y = \epsilon_{cmax} / ad = 0.0468 \times 10^{-3}$$

Por primeros momentos.

$$\tilde{y} = \frac{(2/3) (\epsilon_{cmax} / \epsilon_0) (ad)^2 - (1/4) (\epsilon_{cmax} / \epsilon_0)^2 (ad)^2}{(\epsilon_{cmax} / \epsilon_0) ad - (1/3) ((\epsilon_{cmax} / \epsilon_0)^2) ad}$$

Sustituyendo valores.

$$\tilde{y} = 8.315 \text{ cm}$$

$$M_y = (d - ad + \tilde{y}) (A_{smin} f_y).$$

$$M_y = 1077.8 \text{ t.cm.}$$

Se puede corroborar que el límite es elástico pues:

$$M_y = M_{y(0.42 f'_c)} = M_{y(0.45 f'_c)}$$

asi como:

$$\phi_y = \phi_{y(0.42 f'_c)} = \phi_{y(0.45 f'_c)}$$

Caso 4. Para el concreto en su máximo desplazamiento  $\epsilon_0 = 0.0026$  y su correspondiente máximo esfuerzo  $f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$  y el acero está en la plataforma de fluencia  $f_s = f_y$ .

Igualando fuerzas  $C = T$

$$T = A_s m f_y = 5.06 \times 4200 = 21252 \text{ kg/cm}^2$$

Para calcular C, se acepta que  $f_c = 2/3 f'_c$ , entonces.

$$C = (ad \times b) \frac{2}{3} f'_c$$

de  $C = T$  : se despeja ad

$$ad = 3.795 \text{ cm.}$$

Se revisa el supuesto  $\epsilon_s < \epsilon_{sh} = 0.01$

$$\epsilon_s = \epsilon_0 (d - ad) / ad = 0.0358 > \epsilon_{sh} = 0.01$$

No se está en lo supuesto.

Por lo que se deja a  $f_s$  en función de  $\epsilon_s = \epsilon_0 (d - ad) / ad$ , para determinar la profundidad del eje neutro E. N, o sea (ad), que conlleva a obtener el momento-curvatura para el caso que se está planteando; que el acero este fluyendo.  $f_s \leq 4200 \text{ kg/cm}^2$ ; y que el concreto alcance su máximo desplazamiento.

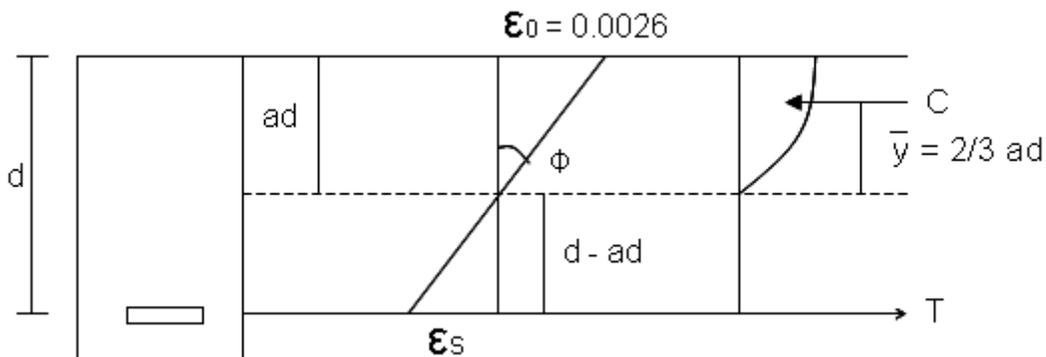


Figura 8. Diagrama de deformación y equilibrio de fuerzas para  $f_s \leq 4200 \text{ kg/cm}^2$  y  $\epsilon_0 = 0.0026$

Obtención de  $a_d$ .

Para simplificar el cálculo se acepta que el esfuerzo del concreto total de la sección no agrietada es en promedio  $(2/3) \hat{f}_c$ , o sea que la integral de  $f_c$  desde 0 hasta  $a_d$  es igual a  $2/3 \hat{f}_c$

Entonces.

$$C = (a_d \times b) (2/3) \hat{f}_c$$

El acero está fluyendo con  $f_y = 2400 \text{ kg/cm}^2$ , sin embargo no se conoce su deformación unitaria, la cual se puede poner en función de  $(a_d)$  para un desplazamiento y esfuerzo máximo del concreto  $\epsilon_0 = 0.0026$  y  $\hat{f}_c = 280 \text{ kg/cm}^2$ , respectivamente, en la fibra superior de aplastamiento.

Del estado de deformación y equilibrio de fuerzas, se tiene:

$$\epsilon_s = \epsilon_0 (d - a_d) / a_d \quad y$$

$$T = A_{smin} f_y$$

$$f_y = E_s \epsilon_s$$

Entonces esfuerzo del acero  $f_s$ , está en función de  $\epsilon_0$ ,  $d$  y  $a_d$ , pues su módulo de elasticidad  $E_s = 2100000 \text{ kg/cm}^2$ , es constante durante su comportamiento de fluencia. Por lo que:

$$f_y = E_s (\epsilon_0 (d - a_d) / a_d) \quad y$$

$$T = A_{smin} E_s (\epsilon_0 (d - a_d) / a_d)$$

Si  $C = T$  y se sustituyen valores.

$$A_d \times 30 (2/3) 280 = 5.06 \times 2100000 (0.0026 \times 55 - 0.0026 a_d) (1/a_d)$$

Resulta una ecuación cuadrática y se despeja  $a_d$ .

$$a_d = 14.32 \text{ cm}$$

Lo cual corresponde a lo supuesto  $\epsilon_s < \epsilon_{sh} = 0.01$ .

$$\epsilon_s = \epsilon_0 (d - a_d) / a_d$$

$$\epsilon_s = 0.0075 < 0.01$$

Entonces es correcto calcular.

$$\Phi_{\epsilon_0} = \epsilon_0 / ad = 0.181 \times 10^{-3}$$

$$M_{\epsilon_0} = A_{smin} f_y (d - ad + \tilde{y})$$

$$\tilde{y} = (2/3) ad = 9.54 \text{ cm}$$

$$M_{\epsilon_0} = 1067.41 \text{ t.cm}$$

Caso 5. Es para el desplazamiento que corresponde al aplastamiento del concreto  $\epsilon_{cu} = 0.003$

Para el cálculo se supone que  $f_s = f_y$  y después se verifica, pues podría ser que para  $\epsilon_{cu}$  el acero esté en su esfuerzo por endurecimiento.

Para este trabajo se simplifican los bloques de esfuerzo del concreto.

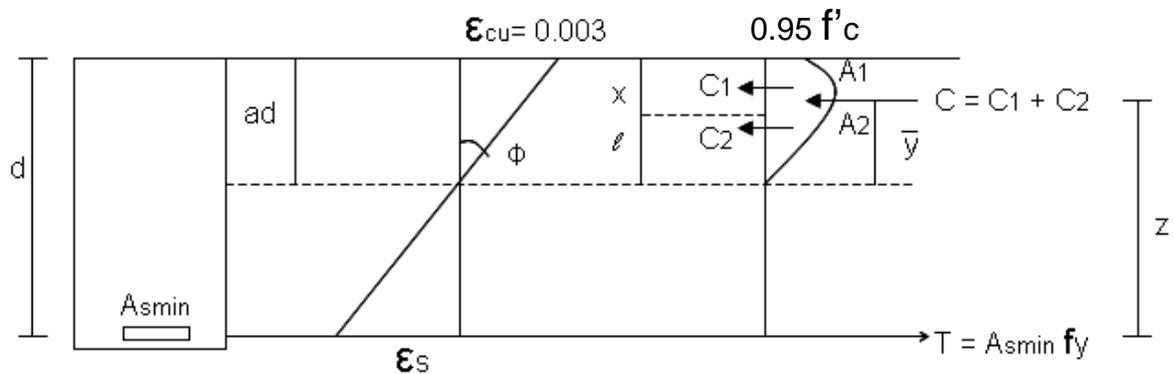


Figura 9. Esfuerzo y deformación de la sección para desplazamiento último  $\epsilon_{cu} = 0.003$ .

La fuerza  $C = C_1 + C_2$

$$C = l \cdot b \cdot x \cdot (2/3) f'_c + x \cdot b \cdot (f'_c + 0.95 f'_c) / 2$$

$$l = \epsilon_0 (ad) / \epsilon_{cu}$$

$$X = ((1 - \epsilon_0 / \epsilon_{cu})) ad$$

Sustituyendo valores.

$$C = 6373.08 ad \quad y$$

$$T = A_{smin} f_y = 5.06 \cdot 4200 = 21252.00 \text{ kg.}$$

Por equilibrio  $C = T$ , despejamos  $ad$ .

$$ad = 3.33$$

Verificamos, si  $\epsilon_s$  está en lo supuesto (en la plataforma de fluencia  $f_s = f_y$ )

$$\epsilon_s = ((d - ad) / ad) \epsilon_{cu}$$

$$\epsilon_s = 0.059 > \epsilon_{sh} = 0.01, \text{ no cumple lo supuesto}$$

Significa que,  $\epsilon_s$  corresponde a un  $f_s$  en la zona de endurecimiento por deformación del acero de refuerzo, aspecto que implica que el esfuerzo es mayor que el de fluencia. Por lo que se debe considerar el comportamiento del acero en ésta parte de la curva, como se muestra en la figura 10.

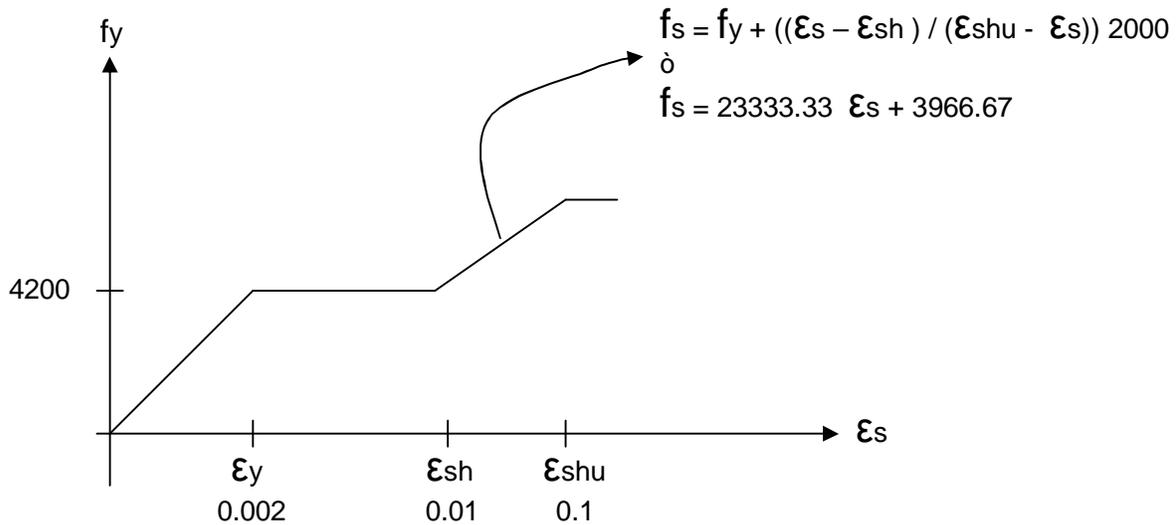


Figura 10. Curva esfuerzo deformación del acero

entonces:

$$T = A_{smin} f_y, \text{ donde}$$

$$f_y = 23333.33 \epsilon_s + 3966.67$$

De la geometría del estado de deformaciones de la sección, en la figura 9.

$$\epsilon_s = \epsilon_{smax} (d - ad) / ad \quad y$$

$$T = A_{smin} (23333.33 ((d - ad) / ad) \epsilon_{cu} + 3996.67$$

$$T = (24674.078/ad) + 19774.68$$

$$C = 6376.08 \text{ ad}$$

Por equilibrio  $C = T$

$$6376.08 \text{ ad} = (24674.078/\text{ad}) + 19774.68$$

Resulta una ecuación cuadrática y se despeja ad

$$Ad = 4.056 \text{ cm.}$$

entonces.

$$\varphi \epsilon_{cu} = \epsilon_{cu} / ad = 0.003 / 4.056$$

$$\varphi \epsilon_{cu} = 0.936 * 10^{-3}$$

De la figura 9 el momento último  $M_{cu}$  es:

$$M_{cu} = T * Z$$

$$Z = (d - ad + \tilde{y})$$

donde ( $\tilde{y}$ ) es igual a la distancia del E.N. al punto de aplicación de la fuerza del concreto C.

Para el cálculo de  $\tilde{y}$  se aprovecha que la suma de los primeros momentos es cero.

$$\sum C_i \tilde{y} = \sum C_i y_i$$

Sustituyendo el valor de (ad)

$$C_1 = 2457 \text{ (ad)} = 9965.59 \text{ kg}$$

$$C_2 = 3916.08 \text{ (ad)} = 15883.62 \text{ kg.}$$

$$X = ((1 - \epsilon_0 / \epsilon_{cu})) ad = 1.28 \text{ cm.}$$

$$/ = ad - X = 2.769 \text{ cm}$$

$$y_1 = / + X/2 = 3.40 \text{ cm}$$

$$y_2 = (2/3) / = 1.85 \text{ cm.}$$

entonces.

$$(C_1 + C_2) \tilde{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

Se sustituyen valores y se despeja  $\tilde{y}$

$$\tilde{y} = 2.46 \text{ cm}$$

$$C = 6373.08 \text{ ad}$$

$$C = 25849.21 \text{ kg.}$$

$$C = T$$

por lo que:

$$M_{cu} = T (d - a_d + \tilde{y})$$

$$M_{cu} = 1386.63 \text{ t.cm}$$

$M_{cu}$ , es el momento último que resiste la sección con  $A_{smin} = 5.06 \text{ cm}^2$ , aunque se debe considerar que el acero está en sobrerresistencia  $f_s > f_y$ , es decir está trabajando en la zona de endurecimiento por deformación. Por lo que su esfuerzo es:

$$f_s = 23333.33 \epsilon_s + 3966.67$$

$$\epsilon_s = (d - a_d) / a_d = 12.56 \text{ cm.}$$

$$f_s = 5080.32 \text{ kg/cm}^2 \gg 4200 \text{ kg/cm}^2$$

**Tabla 2. Resumen del comportamiento de una sección transversal rectangular sometida a flexión considerando la post-fluencia del acero hasta su falla, con área de acero mínima ( $A_{smin}$ ).**

Casos representativos de la curva M- $\phi$	Momento M(t.cm)	Curvatura $\phi$ (1/cm)	Centroide ad (cm)
Caso 1. Antes del agrietamiento.	$M_{cr} = 646.35$	$\phi_{cr} =$ $0.00542 \times 10^{-3}$	30.6
Caso 1'. Exactamente después del agrietamiento. El acero esta trabajando $f_s = 1754.59 \text{ kg/cm}^2$	$M_{crt} = 646.35$ Es el mismo momento que instantes antes del agrietamiento.	$\phi_{crt} =$ $0.0194 \times 10^{-3}$	12.038
Caso 2. Para $f_c = 0.4 f'_c$ , el acero y el concreto están en comportamiento elástico. Aún esta agrietado y el E.N. se conserva por que el acero toma el esfuerzo, sin rebasar su límite elástico.	$M_{y(0.4 f'_c)}$ $= 1159.17$	$\phi_{y(0.4 f'_c)} =$ $0.0498 \times 10^{-3}$	12.038

<p>Caso 3. Con <math>f_c = 0.7 f'_c</math>, el acero no obedece al supuesto comportamiento elástico, ya que <math>f_{st} &gt; f_y</math>. Por lo que este caso es igual al caso 2 para Asmin. Y el límite del rango elástico es con <math>f_c = 0.42 f'_c</math></p>	$M_y (0.42 f'_c) = 1159.17$	$\phi_{y(0.42 f'_c)} = 0.0498 \times 10^{-3}$	12.038
<p>Caso 3'. Se considera el acero en su límite lineal <math>\epsilon_s = \epsilon_y = 0.002</math>, <math>f_c</math> ya no es lineal, pero aún no se alcanza <math>f_{cmax}</math>. <math>\epsilon_{cmax} &lt; \epsilon_0</math>. Se integra todo el esfuerzo <math>f_c</math>, Hognestad</p>	$M_y = 1077.80$	$\phi_y = 0.0468 \times 10^{-3}$	12.6
<p>Caso 4. El concreto alcanza su máximo desplazamiento y esfuerzo <math>\epsilon_0 = 0.00266</math>, <math>f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2</math>. El acero esta fluyendo sin alcanzar su límite de fluencia.</p>	$M_{\epsilon_0} = 1067.4$	$\phi_{\epsilon_0} = 0.1815 \times 10^{-3}$	14.32
<p>Caso 5. Se considera desplazamiento último del concreto <math>\epsilon_{cu} = \epsilon_{cmax} = 0.0038</math>. El esfuerzo <math>f_c</math> sigue la curva de Hognestad y el acero esta en la post-fluencia <math>\epsilon_s &gt; \epsilon_{sh}</math>. <math>f_s = f(\epsilon_s)</math> por endurecimiento.</p>	$M_{\epsilon_{cu}} = 1386.63$ Es el momento último $M_u$ resistente para Asmin del R.F.D. llevado hasta su desplazamiento último de falla $\epsilon_{cu} = 0.003$	$\phi_{\epsilon_{cu}} = 0.936 \times 10^{-3}$	4.056

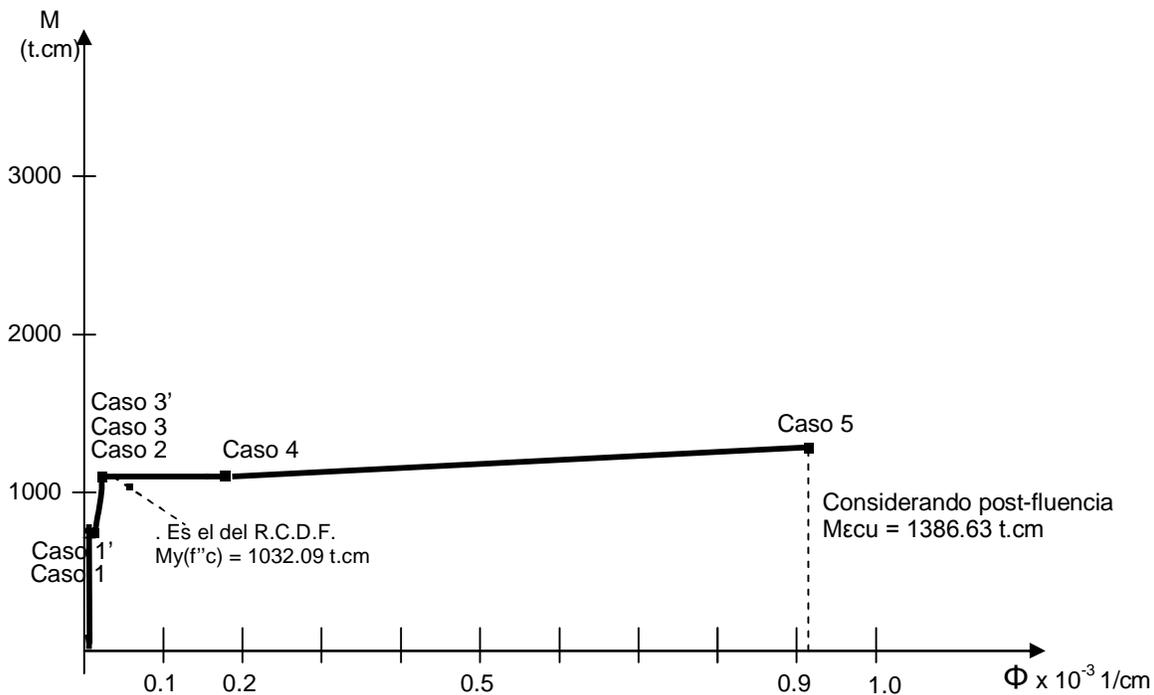


Figura 11. Grafica momento curvatura de una sección rectangular sometida a flexión hasta su falla, con área de acero mínima.

Se puede observar en la tabla 2 y la figura 11, que con Asmin se obtiene un momento último de falla  $M_{cu} = 1386.63 \text{ tcm}$ , el cual es mucho mayor al momento máximo en el límite elástico  $M_y = 1082 \text{ tcm}$ , que propone el R.C.D.F. sin considerar la post-fluencia del acero. Por lo que si se acepta el criterio del R.C.D.F., se estaría subestimando resistencia con el Asmin propuesta, pues en realidad la sección resistirá aproximadamente, 28%, más que la esperada por el R.C.D.F.

La condición anterior implica la posibilidad de que la resistencia de las traveses resulte mayor que el de las columnas que conforman un sistema estructural, generando con eso la posible modificación del mecanismo de falla, de uno de viga débil – columna fuerte, a uno de columna débil, con la conformación de un mecanismo de inestabilidad estructural.

En el capítulo 6 se darán las conclusiones y recomendaciones respecto al análisis anterior.

**Comparación de resultados considerando la post-fluencia del acero con los propuestos por el R.C.D.F. para una sección de 30 \* 60 cm. Con  $A_{smin} = 5.06cm$**

Calculo de resistencia a flexión por el R.C.D.F. con un  $F_R = 0.9$ .

$$M_R = F_R b d^2 f''_c q (1 - 0.59 q)$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$$

$$f^*_c = 0.8 f'_c = 224 \text{ kg/cm}^2$$

$$A_{smin} = 5.06 : b = 30 : d = 60$$

$$f''_c = (1.05 - (f^*_c/1250)) f^*_c \leq 0.85 f^*_c$$

$$f''_c = 0.85 f^*_c = 190.4 \text{ kg/cm}^2$$

$$q = A_{smin} * f_y / f''_c b d$$

$$q = 0.062$$

$$M_n = 30 * 55^2 * 190.4 * 0.062 (1 - 0.59 * 0.062)$$

$$M_n = M_y (f''_c) = 1032.09 \text{ t.cm. Es con el R.C.D.F.}$$

Se observa que el momento último resistente de la sección propuesta,  $M_{\text{ecu}} = 1386.68 \text{ tcm}$ . considerando la post-fluencia del acero, es mayor que el momento resistente admisible propuesto por el R.C.D.F.,  $M_y (f''_c) = 1032.09 \text{ t.cm}$ , el cual no considera la post-fluencia del acero. La diferencia es porque la sección con área de acero mínima propuesta por el R.C.D.F., incrementa su resistencia debido al endurecimiento por deformación del acero, cuando éste entra en la post-fluencia, lo que implica esfuerzos mayores a  $4200 \text{ kg/cm}^2$  en el acero de refuerzo a tensión.

Lo anterior hace que el  $\mu$  real de la sección sea mayor en promedio un 30% más que el admisible propuesto por el R.C.D.F. Lo cual podría cambiar considerablemente la falla deseada; columna fuerte viga débil pues estaríamos subestimando resistencia.

### Valor mínimo aceptable de cuantía para respetar el comportamiento post-fluencia

Para que en la condición de la determinación de  $M_u$  no se considere estar en  $f_s > f_y$ , es decir, para que el acero no entre en sobrerresistencia por la incursión en la zona de endurecimiento por deformación: deberá cumplirse que en el momento último no se rebase el límite de la planicie de fluencia del acero de refuerzo en tensión.

Por otro lado se debe cumplir que el momento último  $M_u$ , no rebase el límite de desplazamiento por fluencia del acero  $\epsilon_s = 0.01$ , así como el desplazamiento último del concreto  $\epsilon_{cu} = 0.003$

Dadas estas condiciones de deformación para forzar a no rebasar el límite determinado por la fluencia del acero de refuerzo, a continuación se analiza el estado de deformación y esfuerzos, mostrado en la figura 12.

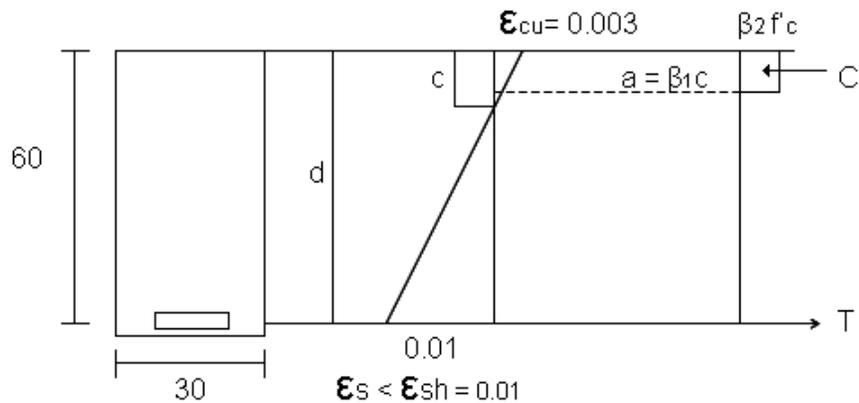


Figura 12. Deformación y esfuerzos al límite de fluencia.

Para el ejemplo en estudio se tiene:

Por equilibrio  $C = T$

$$\beta_2 f'_c (b f'_c \beta_1 c) = A_{smin} f_y. \quad : \quad \beta_2 = 0.85$$

$$0.85 f'c b \beta_1 (d/((\epsilon_s/ \epsilon_{cu})+ 1)) = A_{smin} f_y$$

$$0.85 f'c b d \beta_1 / 3.63 = A_{smin} f_y \quad : \quad (\epsilon_s/ \epsilon_{cu})+ 1 = 3.63 \quad : \quad \beta_1 = 0.85$$

$$A_{smin} = 21.89 \text{ cm.}$$

$$c = d/((\epsilon_s/ \epsilon_{cu})+ 1)$$

$$c = 15.15 \text{ cm.}$$

Lo anterior es un caso particular de considerar  $\epsilon_{cu} = 0.003$  y barrer todo el rango de fluencia del acero  $0.002 < \epsilon_s \leq \epsilon_{sh}$ .

Obtención de la expresión del area de acero mínima que considera la post-fluencia del acero ("Asmin")

Del equilibrio de fuerzas  $C = T$ .

$$\beta_2 f'c (b) (a) = "Asmin" f_y$$

$$a = ("Asmin" f_y) / b \beta_2 f'c.$$

Por otro lado, de la geometría de esfuerzos y desplazamientos se tiene:

$$C = a/ \beta_1$$

$$C = d / ((\epsilon_s/ \epsilon_{cu})+ 1)$$

Igualando y despejando (a)

$$a/ \beta_1 = d / ((\epsilon_s/ \epsilon_{cu})+ 1)$$

$$a = d \beta_1 / ((\epsilon_s/ \epsilon_{cu})+ 1)$$

Para que se cumplan las restricciones de  $\epsilon_s \leq 0.01$  y  $\epsilon_{cu} = 0.003$ . que restringen pasar a la post-fluencia. Se tiene la siguiente igualdad

$$("Asmin" f_y) / b \beta_2 f'c. = d \beta_1 / ((\epsilon_s/ \epsilon_{cu})+ 1), \text{ Si despejamos } A_{smin}.$$

$$“Asmin” = b d \beta_1 \beta_2 f'c / ((\epsilon_s / 0.003) + 1) f_y$$

Esta sería la expresión que permite determinar el área de acero mínima que implique el momento máximo resistente, sin que se llegue a presentar una sobrerresistencia por la incursión en la zona de endurecimiento por deformación del acero de refuerzo longitudinal en tensión.

Por lo que la cuantía mínima aceptable para respetar el límite de fluencia del acero  $\epsilon_s = 0.01$ , y la máxima deformación del concreto  $\epsilon_{cu} = 0.003$ , sería.

$$“\rho_{min}” = \frac{\beta_1 \beta_2 f'c}{\left( \frac{\epsilon_s}{0.003} + 1 \right) f_y}$$

Para un concreto normal de  $250 \text{ kg/cm}^2$ ,  $“\rho_{min}” = 0.0099$  y  $\rho_{med} = 0.0089$  (cuantía media propuesta por el R.C.D.F.). Lo anterior da una idea aproximada de la cuantía mínima propuesta en este trabajo en función de la cuantía propuesta por el R.C.D.F.

$$“\rho_{min}” = 1.10 \rho_{med}$$

Por otro lado, si se despeja  $\epsilon_s$  en función de  $“Asmin”$  y se sustituyen valores para el caso en estudio, se tiene.

$$\epsilon_s = ((79.47 / “Asmin”) - 1) 0.003$$

A continuación se muestran las “áreas mínimas” que corresponden a deformaciones del acero desde 0.002 hasta 0.01, señalándose los correspondientes valores para la área de acero que propone; el R.C.D.F. (sin considerar post-fluencia), y el área que correspondería sin que se permita que el acero pase a la post-fluencia. Para estas áreas calculadas el concreto se aplasta justo antes de la post-fluencia del acero.

Tabla 3. Áreas “mínimas” que corresponden a la plataforma de fluencia del acero para la sección del ejemplo en este trabajo

(1/cm) $\epsilon_{cu}$	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	
(1/cm) $\epsilon_{si}$	0.002	0.0035	0.005	0.0065	0.008	0.0095	0.01	0.055 → Post-fluencia
(cm <sup>2</sup> ) “Asmin”	79.46	41.36	34.31	29.32	25.59	22.70	21.80	5.06

Inicio de fluencia  
 $\epsilon_s = \frac{f_y}{E_s} = \frac{4200}{2100000} = 0.002$

Corresponde a la “Asmin”, sin permitir que el acero pase a la post-fluencia. Con esta área el concreto se aplasta justo antes de que el acero entre a la post-fluencia.

Esta área es la del R.C.D.F.

El momento último de falla “Mu” que viene de considerar la nueva “Asmin” propuesta en este trabajo es:

$$\text{“Asmin”} = 21.85 \text{ cm}^2$$

$$\text{“Mu”} = \text{“Asmin”} f_y d (1 - 0.588q)$$

$$\text{“Mu”} = 4507.2 \text{ t.cm}$$

Si se compara con el obtenido por el R.C.D.F.,  $Mu_{(R.C.D.F.)}$

$$Asmin = 4.788 \text{ cm}^2$$

$$Mu_{(R.C.D.F.)} = 1082.77 \text{ t.cm}$$

Se puede decir que para el  $Mu_{(R.C.D.F.)}$  el concreto aún no alcanza su resistencia última, y la alcanzaría con un momento mucho mayor, pues el acero podrá entrar en su resistencia por endurecimiento. Esto significa que con la propuesta del R.C.D.F. y considerando la post-fluencia del acero, tendríamos un momento último de falla real  $Mu_{(Post-f)}$ .

$$Mu_{(Post-f)} = 1386 \text{ t.cm}$$

$$Asmin = 4.8 \text{ cm}^2$$

$$f_s = 5642.5 \text{ kg/cm}^2 \gg f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

En la figura 13, para el ejemplo de éste trabajo, se pueden observar el resultado de los momentos últimos obtenidos para tres diferentes casos. Primero: con el área de

acero mínima propuesta por el R.C.D.F., sin considerar post-fluencia del acero  $Mu(R.C.D.F.)$ . Segundo: con la misma área mínima propuesta por el R.C.D.F., pero considerando la post-fluencia del acero  $Mu(Post-f)$ . Tercero: es con el área de acero mínima "Asmin" propuesta en éste trabajo, para garantizar que el acero no entre en sobrerresistencia, de tal suerte que se tenga mayor certeza en el estado límite de falla de la sección.

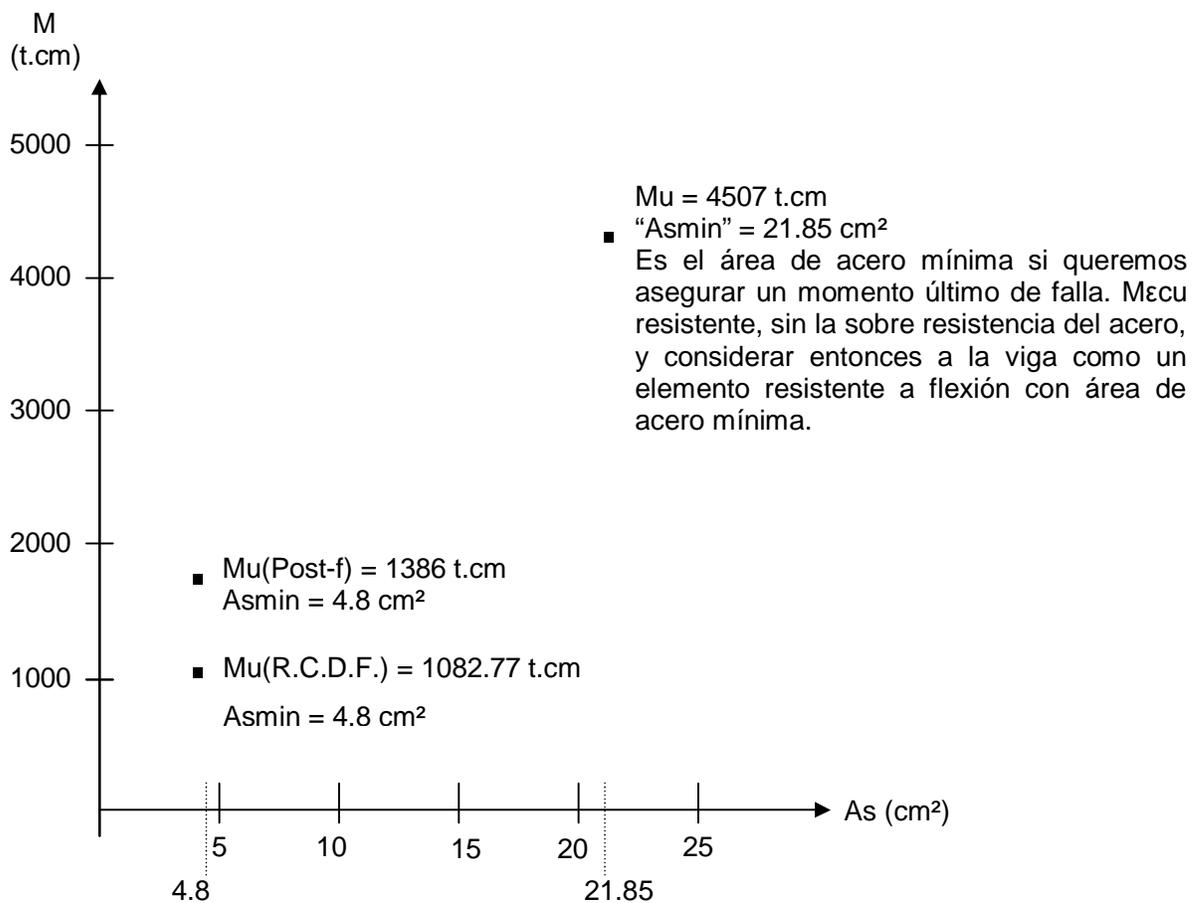


Figura 13. Gráfica momento-áreas de acero, considerando post-fluencia y la propuesta del R.C.D.F.

## **5. EFECTOS DE LAS CUANTÍAS LÍMITE EN EL COMPORTAMIENTO GLOBAL DEL SISTEMA ESTRUCTURAL**

En este capítulo se presenta el análisis de dos modelos estructurales a base de marcos resistentes a momentos, los cuales tienen las siguientes características geométricas; el primero es un edificio bajo de 6 niveles con cuatro crujeías de 8 m. de claro en ambas direcciones; el segundo es un edificio alto de 15 niveles, también con cuatro crujeías de 8 m. de claro en ambas direcciones. Los edificios se diseñaron con una resistencia del concreto de  $f'c = 250 \text{ kg/cm}^2$  y la del acero  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ , considerando que su uso será habitacional. Cada uno de los modelos se diseñó, para el caso de trabes, considerando dos posibilidades: a) respetando la cuantía mínima y b) respetando la cuantía máxima.

Para el predimensionamiento de las columnas se acepta un análisis preliminar, considerando un esfuerzo permisible en el elemento a compresión axial de  $0.2 f'c$ , resultando para el edificio bajo columnas de  $80 \times 80 \text{ cm}$  y para el edificio alto de  $120 \times 120 \text{ cm}$ .

El análisis estructural se hizo con el programa SAP2000, en el cuál se considera que las características mecánicas y geométricas de las trabes son al paño de columnas, o sea que el programa considera el ancho de las columnas en los nudos.

Todo el proceso de diseño será conforme al Reglamento de las Construcciones para el Distrito Federal y sus Normas Técnicas Complementarias.

A continuación se describe el modelo de los sistemas estructurales que serán analizados, así como el método de análisis.

### **Descripción de los modelos estructurales**

Se trata de dos edificios, uno de 6 niveles (columnas de  $80 \times 80 \text{ cm}$ ) y el otro de 15 niveles (columnas de  $120 \times 120 \text{ cm}$ ) los cuáles se definieron con el objetivo de hacer una revisión comparativa de su comportamiento cuando son diseñados, para ambos sistemas estructurales, considerando irrestrictamente la cuantía mínima para un tipo de solución, y también irrestrictamente la cuantía máxima para otro tipo de solución, esto para cada uno de los edificios, resultando finalmente en cuatro modelos de estudio.

La distancia a ejes para cada claro es de 8m, considerando cuatro crujías en ambos sentidos de los cuatro modelos. Por lo que la planta de cada edificio es igual para todos los casos a revisar. La altura de entrepiso se propone inicial de 3.5 m, aunque puede modificarse pues para la cuantía mínima los peraltes de las trabes son sensiblemente mayores, generando alturas de entrepiso poco funcionales.

### **Estructuración**

La estructuración es a base de marcos formados por columnas y trabes de concreto, el sistema de piso es a base de losas también de concreto ( $f'c= 250 \text{ kg/cm}^2$  y  $f_y= 4200 \text{ kg/cm}^2$ ). El destino de las estructuras es habitación (Estructura del Grupo B, Art. 139 R.C.D.F.), por lo que utilizando las *Normas Técnicas Complementarias sobre Criterios y Acciones para el Diseño Estructural de las Edificaciones* se obtuvieron las cargas vivas unitarias (Tabla 5.1 Cargas vivas unitarias  $\text{kg/cm}^2$ ). Para la bajada de cargas se tomaron en cuenta los elementos que estarán obrando durante la vida útil de la estructura, impermeabilizante, plafón de yeso, instalaciones, loseta vinílica, además de la carga adicional que considera el apartado 5.1.2 Peso muerto de losas de concreto, de las Normas antes mencionadas.

Con las cargas consideradas se elaboró la carga por entrepiso de cada uno de los niveles de las estructuras de 6 y 15 niveles.

En la estructura se utilizó un concreto de  $f'c= 250 \text{ kg/cm}^2$  y un módulo de elasticidad  $E_c = 210000.00 \text{ kg/cm}^2$ , y un acero de refuerzo con  $f_y= 4200 \text{ kg/cm}^2$  y un módulo de elasticidad  $E_s= 2100000$ . La carga viva unitaria para losa de entrepiso se consideró  $170 \text{ kg/m}^2$ , y para azotea  $100 \text{ kg/m}^2$ .

### **Análisis Estático**

Empleando las Normas Técnicas Complementarias vigentes en el Distrito Federal se propuso utilizar el Análisis Estático para todas las revisiones, también se supuso de inicio que el Factor de Comportamiento Sísmico sea  $Q=3$ . Se consideró una zona sísmica II por lo que el Coeficiente basal utilizado es  $c=0.32$ . La distribución lateral de las fuerzas inerciales generadas por sismo se aceptó que fuera triangular invertida, como lo establece la normatividad en el Distrito Federal.

Se definió un sistema de piso rígido para cada uno de los niveles de las estructuras (6 y 15 niveles). Además de considerar una excentricidad adicional del 10% para cada sentido en el sistema de piso rígido de cada nivel.

Con el propósito de revisar que para cada análisis se cumpla con las distorsiones límite de entrepiso (*1.8 Revisión de Desplazamientos Laterales, NTC para Diseño por Sismo*), se consideró que en el sistema estructural había total independencia de los elementos no estructurales, por lo que se aceptó una distorsión de entrepiso igual a:

$$\Delta=0.012H$$

Donde H es la altura de entrepiso a revisar.

Cuando la estructura ha cumplido con los límites de distorsión para entrepiso, se revisa que, con la geometría propuesta, se cumpla con la capacidad a momento flexionante empleando la expresión de resistencia última de las Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto:

a) Secciones rectangulares sin acero de compresión

$$M_R = F_R b d^2 f''_c q (1 - 0.5 q)$$

ò bien:

$$M_R = F_R A_s f_y d (1-0.5 q)$$

$$q = \rho f_y / f''_c$$

$$\rho = A_s / bd; \text{ cuantía de refuerzo longitudinal en tensión}$$

b ancho de la sección (sección 1.6);

d peralte efectivo (sección 1.6);

f''c esfuerzo uniforme de compresión (inciso 2.1 e); y

A<sub>s</sub> área del refuerzo de tensión

Y empleando los valores de cuantía mínima o máxima, según el caso en estudio, se revisa la resistencia de los elementos. Para tal efecto se consideró que las cuantías mínima y máxima están dadas por las siguientes expresiones, también obtenidas de las NTC para Concreto.

$$(\rho_{\min})= 0.07 \frac{(f'_c)^{1/2}}{f_y}$$

$$\rho_{\max} = 0.75 \left( \frac{f''_c}{f_y} \frac{6000 \beta_1}{f_y + 6000} \right)$$

Resulta claro que el proceso de diseño es iterativo, ya que no necesariamente usando el valor de cuantía definida (mínima o máxima, según el caso) y la geometría de trabe previamente determinada y adecuada desde el punto de vista de distorsiones, redundará en el valor de resistencia requerido. Se trabajó de manera iterativa, redefiniendo características geométricas de trabes y columnas, de modo que se respetaran los valores límite de distorsión de entrepiso, calculando la resistencia y comparándola con el elemento mecánico demandado (básicamente el momento flexionante obtenido del análisis); este proceso se realizó hasta lograr la convergencia de cuantía predefinida, distorsión de entrepiso y resistencia demandada.

### **5.1 Análisis del edificio de 6 niveles, considerando el diseño de vigas con cuantía mínima, media y máxima**

El objeto del análisis y diseño en éste trabajo, es relacionar la deformación del edificio con la geometría de la sección de las vigas, en función de su cuantía de acero. Por lo cual se presenta a continuación el análisis y diseño para los tres casos de cuantía considerados.

#### **Análisis y diseño con cuantía mínima**

Se presenta la memoria descriptiva para el edificio de 6 niveles con la cuantía mínima.

Para la revisión se utilizó el Reglamento de Construcciones y las Normas Técnicas Complementarias vigentes para el Distrito Federal (RCDF y NTC).

## DESCRIPCIÓN

Se trata de una estructura que consta de Planta Baja (P.B.), (N1), (N2), (N3), (N4), (N5) y Azotea (Az). Cada uno de los cuales están destinados para los siguientes usos:

Nivel	Uso	Altura [m]
P.B.	Departamento.	3.50
N1 a N5	Departamentos	3.50
Az	Azotea.	3.50

Las dimensiones en planta de cada uno de los entresijos es de 32 x 32 m. (a ejes).  
La altura de total la estructura es de 21 [m].

## MATERIALES

Concreto para superestructura (columnas y trabes)  $f'c$  [kg/cm<sup>2</sup>]: **250**

Acero de refuerzo (longitudinal y transversal)  $f_y$  [kg/cm<sup>2</sup>]: **4200**

## CARGAS CONSIDERADAS

AZOTEA	Diseño [kg/m <sup>2</sup> ]	Sismo [kg/m <sup>2</sup> ]
Losa maciza h 14 [CM]:	336	
Impermeabilizante	20	
Carga adicional (NTC)	40	
Carga muerta [CM]	<b>396</b>	<b>396</b>
Carga viva (CV)	100	70
<b>Total</b>	<b>496</b>	<b>466</b>

DEPARTAMENTO	Diseño [kg/m <sup>2</sup> ]	Sismo [kg/m <sup>2</sup> ]
Losa maciza h 14 [CM]:	336	
Plafón de yeso	40	
Instalaciones	10	

Loseta Vinílica	10	
Carga adicional (NTC)	40	
Carga muerta [CM]	<b>436</b>	<b>436</b>
Carga viva (CV)	170	90
<b>Total</b>	<b>606</b>	<b>526</b>

## DIMENSIONES EN ELEMENTOS ESTRUCTURALES

Estas dimensiones son el resultado del proceso iterativo de diseño, las cuales se utilizarán en el análisis estructural definitivo.

### Dimensiones de elementos estructurales

Espesor de losa maciza [cm]:	14
Trabes N4 a Azotea [cm]:	<b>45 x 125</b>
Trabes N1 a N3 [cm]:	<b>50 x 145</b>
Columnas [cm]:	80 x 80
Altura de entrepiso [m]:	3.5

## CÁLCULO DE PESOS POR NIVEL

Para el cálculo de las áreas tributarias se descontó el área de las columnas.

### ÁREAS TRIBUTARIAS

NIVEL	ÁREA* [m <sup>2</sup> ]	W [kg/m <sup>2</sup> ]	Ws [kg/m <sup>2</sup> ]	Wcv [ton]	Ws [ton]
Azotea	1059.8	496	466	<b>525.7</b>	<b>493.9</b>
Departamento 5	1059.8	606	526	<b>642.3</b>	<b>557.5</b>
Departamento 4	1059.8	606	526	<b>642.3</b>	<b>557.5</b>
Departamento 3	1059.8	606	526	<b>642.3</b>	<b>557.5</b>
Departamento 2	1059.8	606	526	<b>642.3</b>	<b>557.5</b>
Departamento 1	1059.8	606	526	<b>642.3</b>	<b>557.5</b>
P. B.					

\*Descontando área de columnas.

PESO PROPIO

NIVEL	LONGITUD TRABES* [m]	LONGITUD COLUMNAS [m]	W TRABES [ton]	W COLUMNAS [ton]
Azotea	288.0	1.75	388.8	67.2
Departamento 5	288.0	3.5	388.8	134.4
Departamento 4	288.0	3.5	388.8	134.4
Departamento 3	288.0	3.5	501.1	134.4
Departamento 2	288.0	3.5	501.1	134.4
Departamento 1	288.0	3.5	501.1	134.4
P. B.		1.75		67.2

\*A paño de columnas

PESO TOTAL POR NIVELES

NIVEL	Wcv [ton]	Ws [ton]
Azotea	981.7	949.9
Departamento 5	1165.5	1080.7
Departamento 4	1165.5	1080.7
Departamento 3	1277.8	1193.0
Departamento 2	1277.8	1193.0
Departamento 1	1277.8	1193.0
P. B.	67.2	67.2
<b>Suma</b>	<b>7213.2</b>	<b>6757.4</b>

ANÁLISIS ESTÁTICO

Se empleó el Análisis Estático para analizar la estructura, considerando un sistema de piso rígido en cada entrepiso. Utilizando el RCDF y sus Normas Técnicas Complementarias vigentes, se obtienen los siguientes datos. El factor de ductilidad se obtiene de las NTC para sismo, sabiendo que la estructuración es a base de marcos de concreto (columnas y trabes).

Datos de entrada

Zona sísmica	II
Coefficiente sísmico basal c	0.32
Factor de ductilidad o de Comportamiento sísmico Q	3

Fuerzas sísmica estática:  $F_i = \frac{c}{Q} \frac{W_i h_i}{\sum_{i=1}^n W_i h_i} W_T$

donde el factor de reducción de fuerza sísmica  $Q' = Q$

#### Fuerzas Sísmica Estática

Nivel	h entrepiso [m]	hi [m]	Wi [ton]	Wi hi [ton m]	Fi [ton]	Fi/col [ton]	Vi [ton]
Azotea							
	3.5	21	<b>949.9</b>	19947.6	180.1	7.2	180.1
Depto. 5							
	3.5	17.5	<b>1080.7</b>	18911.8	170.7	6.8	350.8
Depto. 4							
	3.5	14	<b>1080.7</b>	15129.5	136.6	5.5	487.4
Depto. 3							
	3.5	10.5	<b>1193.0</b>	12526.5	113.1	4.5	600.5
Depto. 2							
	3.5	7	<b>1193.0</b>	8351.0	75.4	3.0	675.9
Depto 1							
	3.5	3.5	<b>1193.0</b>	4175.5	37.7	1.5	713.6
P.B.							
	<b>Suma</b>		<b>6690.2</b>	<b>79041.8</b>			

#### ANÁLISIS ESTRUCTURAL

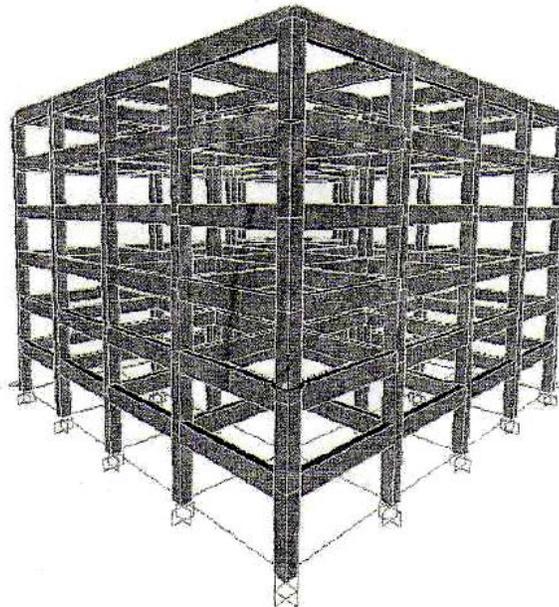
Para el análisis estructural, se empleó el programa SAP2000, considerando las siguientes condiciones de carga:

Cargas	Condiciones de carga
Dead	Carga de los elementos columnas y trabes.
Cv Max	Carga viva máxima
CvSis	Carga viva por fuerzas accidentales.
Sx	Fuerzas debidas al Sismo en Dirección X, considerando una excentricidad de 10% en planta.
Sy	Fuerzas debidas al Sismo en Dirección Y, considerando una excentricidad de 10% en planta.

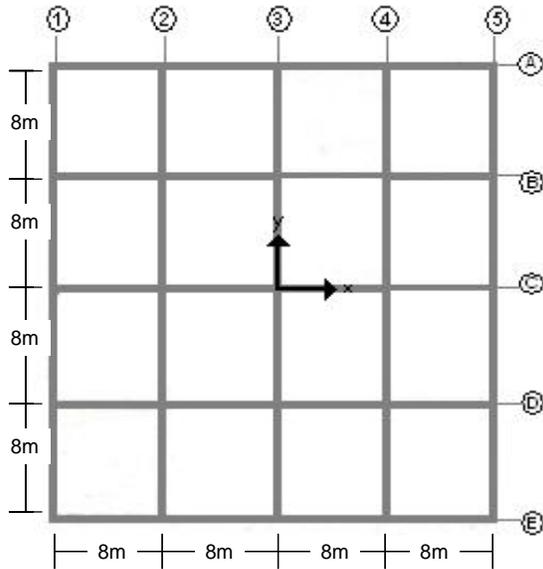
Se utilizaron las siguientes combinaciones de carga.

Combinaciones	Cargas utilizadas
CMAX	Cv Max + Dead
$Sx + 0.3 Sy$	Cv Sis + Dead+ $Sx + 0.3Sy$
$0.3 Sx + Sy$	Cv Sis + Dead+ $0.3Sx + Sy$
$- Sx - 0.3 Sy$	Cv Sis + Dead - $Sx - 0.3Sy$
$- 0.3 Sx + Sy$	Cv Sis + Dead - $0.3Sx - Sy$
$Sx - 0.3 Sy$	Cv Sis + Dead + $Sx - 0.3Sy$
$0.3 Sx - Sy$	Cv Sis + Dead + $0.3Sx - Sy$
$- Sx + 0.3 Sy$	Cv Sis + Dead - $Sx + 0.3Sy$
$- 0.3 Sx - Sy$	Cv Sis + Dead - $0.3Sx + Sy$
CVSIS	Cv Sis + Dead

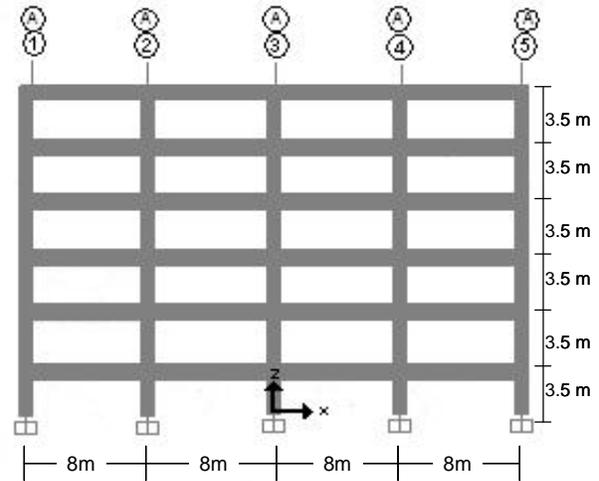
A continuación se presenta el modelo tridimensional de la estructura analizada, también se proporciona la planta de azotea, así como la elevación de la estructura.



Edificio modelado en el Programa SAP2000



Estructuración en la planta de Azotea



Elevación del modelo utilizado

Se revisaron los desplazamientos para las distintas combinaciones de carga. El RCDF, para la condición considerada en este trabajo permite un desplazamiento máximo en el nivel de Azotea de

$$0.012 H_T = 0.012 \times 2100 = 25 \text{ [cm]}$$

Suponiendo que los sistemas de piso son infinitamente rígidos y que todos los nodos del mismo piso presentan el mismo nivel de desplazamiento lateral, la distorsión de entrepiso se determinó con base en la comparativa directa de los desplazamientos laterales de nodos de pisos consecutivos.

A continuación se presentan los desplazamientos obtenidos para los puntos: **7, 35,147 y 175**

Desplazamientos en azotea

Point	Load	UX [cm]	UY [cm]
7	SX03SY	2.8	1.4
7	03SXSY	1.4	2.8
7	NSX03SY	-2.5	0.2
7	NO3SXSY	-0.2	2.5
7	SXN03SY	2.5	-0.2
7	03SXNSY	0.2	-2.5
7	NSXN03SY	-2.8	-1.4

①	②	③	④	⑤	
35	70	105	140	175	A
28	63	98	133	168	B
21	56	91	126	161	C
14	49	84	119	154	D
7	42	77	112	147	E

Ubicación en Azotea de desplazamientos

7	N03SXNSY	-1.4	-2.8
35	SX03SY	3.7	1.4
35	03SXS	0.5	2.8
35	NSX03SY	-4.1	0.2
35	N03SXS	-1.8	2.5
35	SXN03SY	4.1	-0.2
35	03SXNSY	1.8	-2.5
35	NSXN03SY	-3.7	-1.4
35	N03SXNSY	-0.5	-2.8
147	SX03SY	2.8	0.5
147	03SXS	1.4	3.7
147	NSX03SY	-2.5	1.8
147	NO3SXS	-0.2	4.1
147	SXNO3SY	2.5	-1.8
147	03SXNSY	0.2	-4.1
147	NSXN03SY	-2.8	-0.5
147	N03SXNSY	-1.4	-3.7
175	SX03SY	3.7	0.5
175	03SXS	0.5	3.7
175	NSX03SY	-4.1	1.8
175	N03SXS	-1.8	4.1
175	SXNO3SY	4.1	-1.8
175	03SXNSY	1.8	-4.1
175	NSXN03SY	-3.7	-0.5
175	N03SXNSY	-0.5	-3.7

Los desplazamientos ya se encuentran afectados por el factor de ductilidad  $Q = 3$ .

La altura total del edificio  $Z=21.00$  m. corresponde al nivel de Azotea, y se consideraron alturas libres de entrepiso de 3.5 m. para los departamentos y la planta baja.

Por otro lado se calcula la cuantía mínima con la siguiente expresión del RCDF.

$$p_{\min} = 0.07 \frac{\sqrt{f'_c}}{f_y} = 0.00264$$

Por lo que, con la sección transversal de las trabes propuestas para cada seccionamiento del edificio, se tienen las siguientes áreas de acero de refuerzo y sus momentos resistentes.

Seccion y resistencia de trabes para cada nivel

Nivel	Seccion (b * h) cm	Asmin. cm <sup>2</sup>	MR T.m
N1 – N3	50 * 145	19.10	97.8
N4– NAZ	45 * 125	14.90	65.0

DISTORSIONES DE ENTREPISO Y ROTACIONES EN LOS NUDOS

Tabla 4.a. Desplazamientos por nivel y rotaciones en los nudos

Joint	OutputCase	CaseType	U1	U2	R2	R2
Text	Text	Text	m	m	Radians	Grados
(sin multiplicar por Q=3)						
29	NSX03SY	Combination	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
30	NSX03SY	Combination	-0.00270	0.00009	-0.00049	-0.02819
31	NSX03SY	Combination	-0.00602	0.00021	-0.00047	-0.02710
32	NSX03SY	Combination	-0.00904	0.00032	-0.00041	-0.02338
33	NSX03SY	Combination	-0.01176	0.00043	-0.00045	-0.02555
34	NSX03SY	Combination	-0.01375	0.00051	-0.00014	-0.00779
35	NSX03SY	Combination	-0.01375	0.00051	0.00013	0.00768

Tabla 4.b. Distorsiones de entrepiso para cada nivel

Nivel	Nudo	Distorsión X [m]	Altura nivel [m]	Distorsión Y [m]	Altura nivel [m]	Distorsión max
						<b>0.012</b>
N1	30	0.00232	3.5	0.00008	3.5	0.012
N2	31	0.00284	7	0.00010	7	0.012
N3	32	0.00259	10.5	0.00010	10.5	0.012
N4	33	0.00233	14	0.00009	14	0.012
N5	34	0.00170	17.5	0.00007	17.5	0.012
NAZ	35	0.00000	21	0.00000	21	0.012

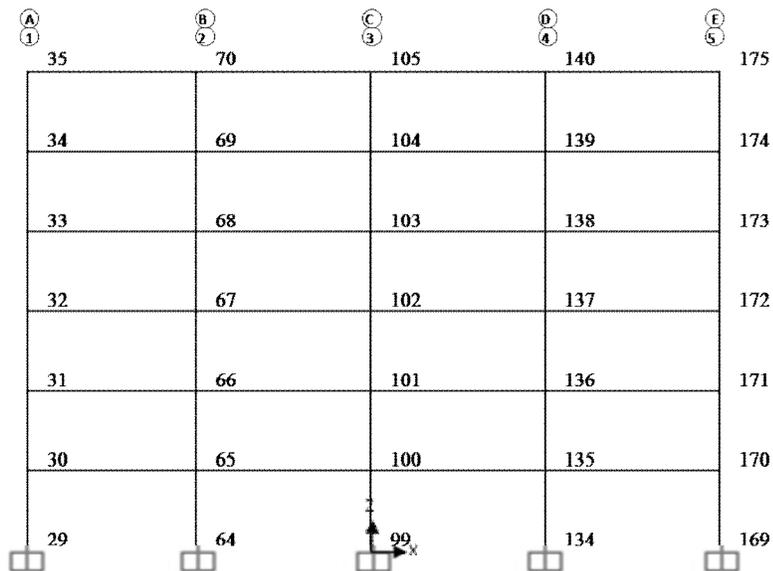


Figura 14. Elevación del marco considerado más desfavorable para diseño

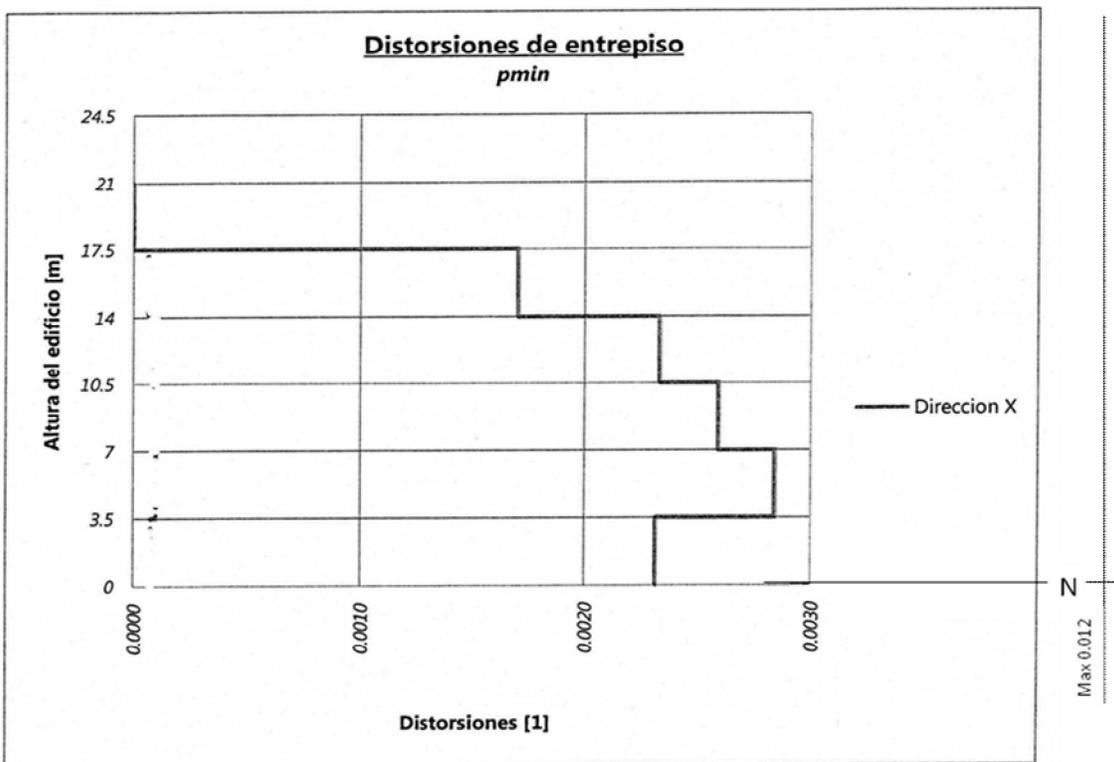


Figura 15. Presentación gráfica de la distorsión de entrepiso máxima para el caso del modelo de 6 niveles diseñado con la cuantía mínima

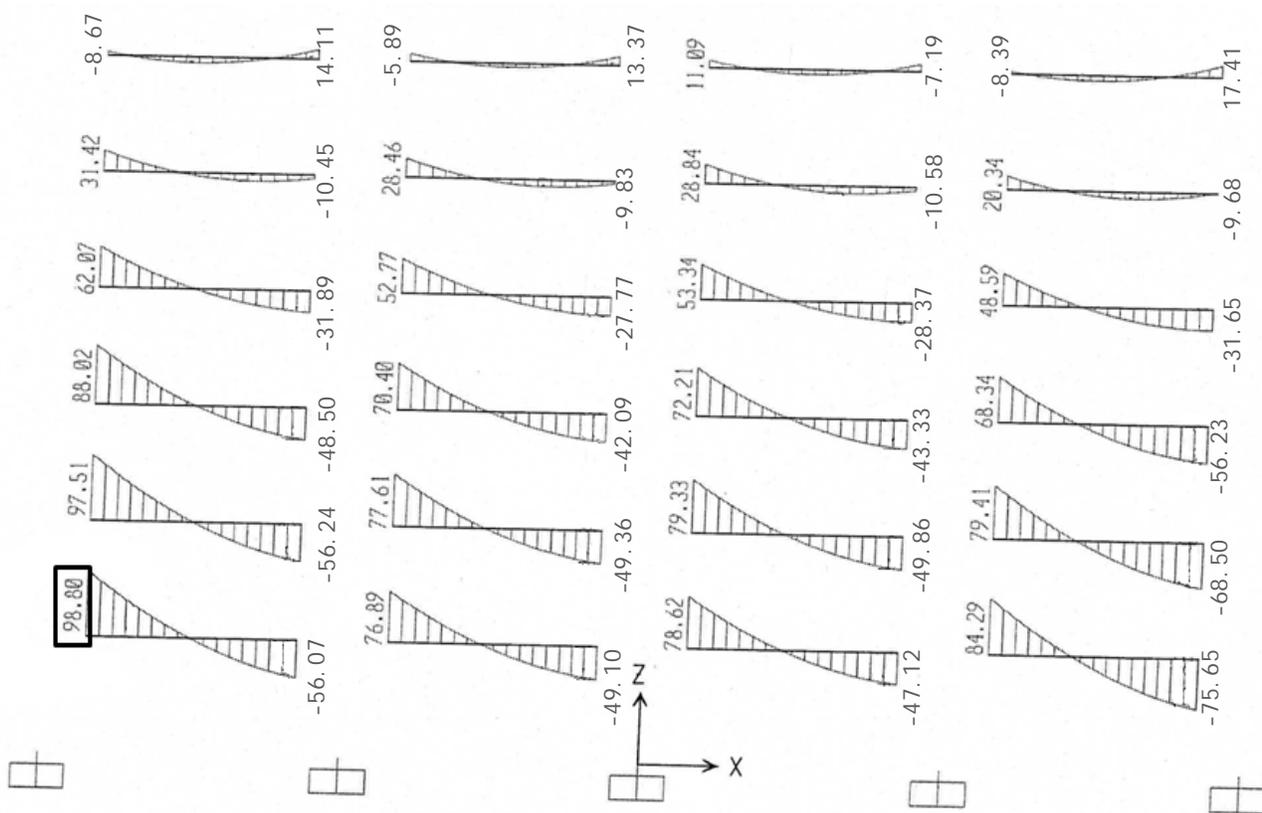


Figura 16. Diagrama de momentos para el diseño de las traveses de los niveles N1–N3, con la combinación de cargas mas desfavorable para el análisis estructural (edificio de 6 niveles con cuantía mínima)

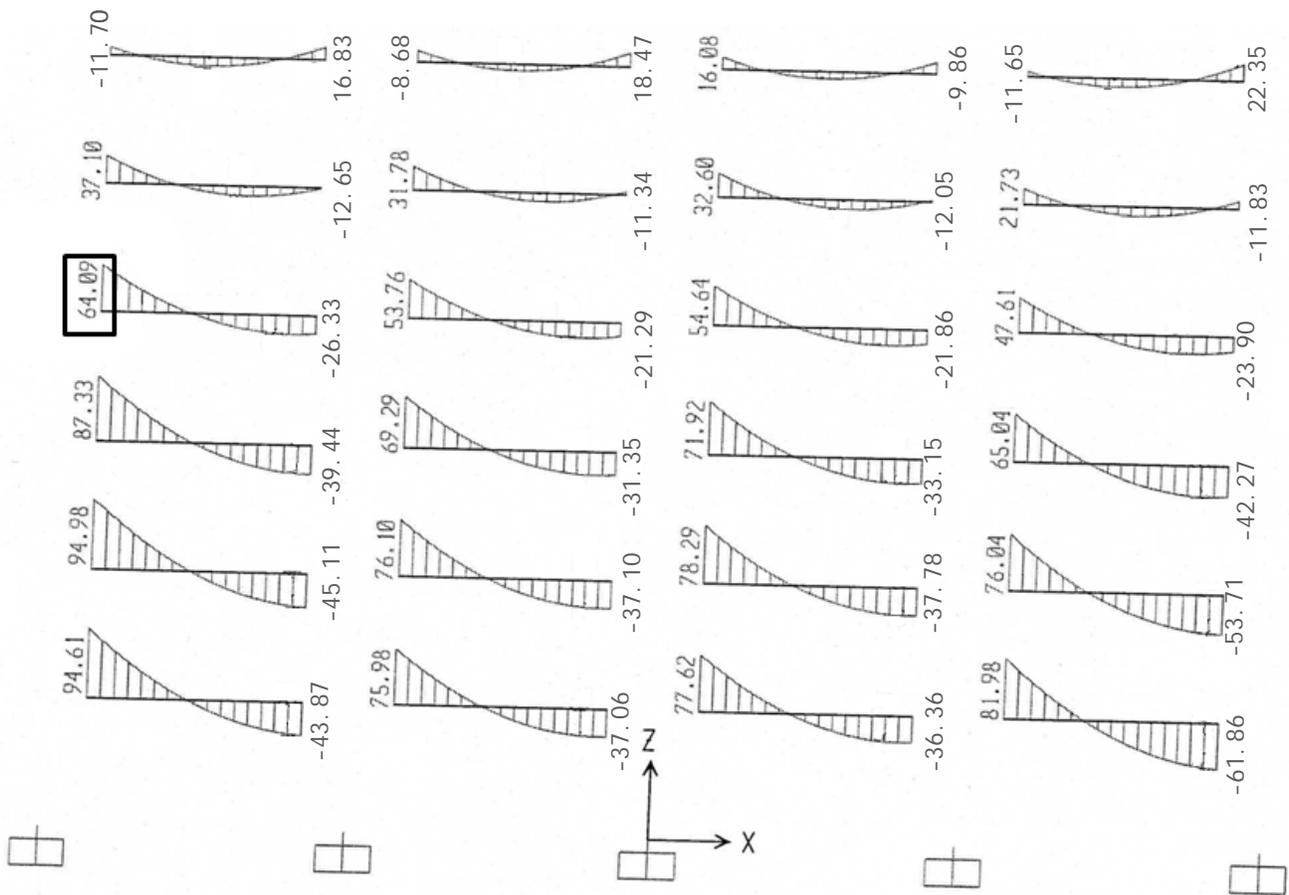


Figura 17. Diagrama de momentos para el diseño de las traveses de los niveles N4-NAZ, con la combinación de cargas más desfavorable para el análisis estructural (edificio de 6 niveles con cuantía mínima)

## Análisis y diseño con cuantía media

De manera similar, al análisis de cuantía mínima, se hizo para la cuantía media obteniendo los siguientes resultados.

### DIMENSIONES EN ELEMENTOS ESTRUCTURALES

Estas dimensiones son el resultado del proceso iterativo de diseño, las cuales se utilizarán en el análisis estructural definitivo.

Espesor de losa maciza [cm]:	14
Trabes N4 a Azotea [cm]:	<b>30 x 60</b>
Trabes N1 a N3 [cm]:	<b>35 x 85</b>
Columnas [cm]:	80 x 80
Altura de entrepiso [ m]:	3.5

### AREA DE ACERO MEDIA CALCULADA Y SU MOMENTO RESISTENTE $M_R$ , PARA CADA SECCION DEL EDIFICIO

$$\rho_{media} = (\rho_{max} + \rho_{min}) / 2 = 0.00891$$

Nivel	Seccion (b * h) cm	Asmin. cm <sup>2</sup>	MR T.m
N1 – N3	35 * 80	24.9	62.9
N4 – NAZ	30 * 65	17.4	35.1

### DISTORSIONES DE ENTREPISO Y ROTACIONES EN LOS NUDOS

Tabla 5.a. Desplazamientos por nivel y rotaciones en los nudos

Joint	OutputCase	CaseType	U1	U2	R2	R2
Text	Text	Text	m	m	Radians	Grados
(sin multiplicar por Q=3)						
22	NSX03SY	Combination	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
23	NSX03SY	Combination	-0.00394	0.00016	-0.00152	-0.08692
24	NSX03SY	Combination	-0.01093	0.00044	-0.00183	-0.10462
25	NSX03SY	Combination	-0.01815	0.00075	-0.00175	-0.10004
26	NSX03SY	Combination	-0.02486	0.00103	-0.00158	-0.09064
27	NSX03SY	Combination	-0.02926	0.00122	-0.00050	-0.02882

28 NSX03SY Combination -0.02926 0.00122 0.00035 0.02023

Tabla 5.b. Distorsiones de entrepiso para cada nivel

Nivel	Nudo	Distorsión X [m]	Altura nivel [m]	Distorsión Y [m]	Altura nivel [m]	Distorsión max <b>0.012</b>
N1	23	0.00337	3.5	0.00013	3.5	0.012
N2	24	0.00599	7	0.00025	7	0.012
N3	25	0.00619	10.5	0.00026	10.5	0.012
N4	26	0.00575	14	0.00024	14	0.012
N5	27	0.00377	17.5	0.00016	17.5	0.012
N6	28	0.00000	21	0.00000	21	0.012

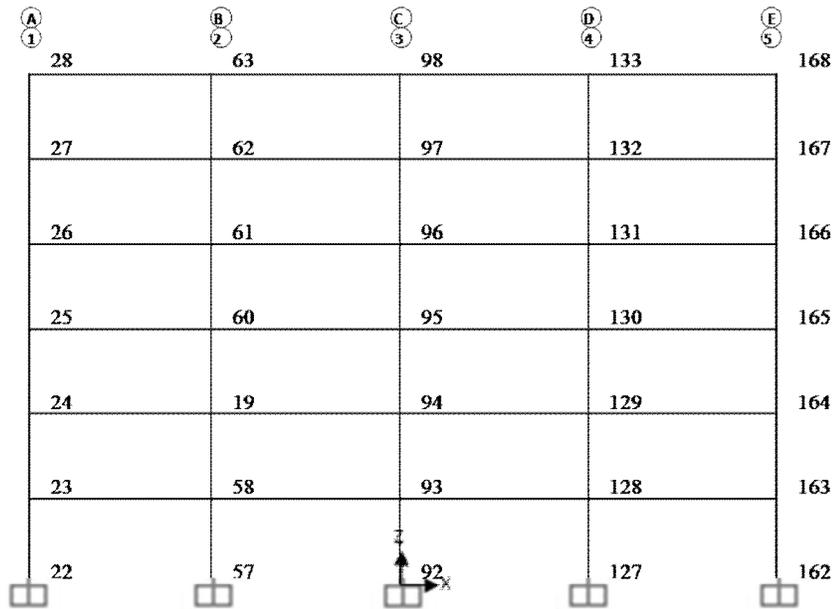


Figura 18. Elevación del marco considerado más desfavorable para diseño

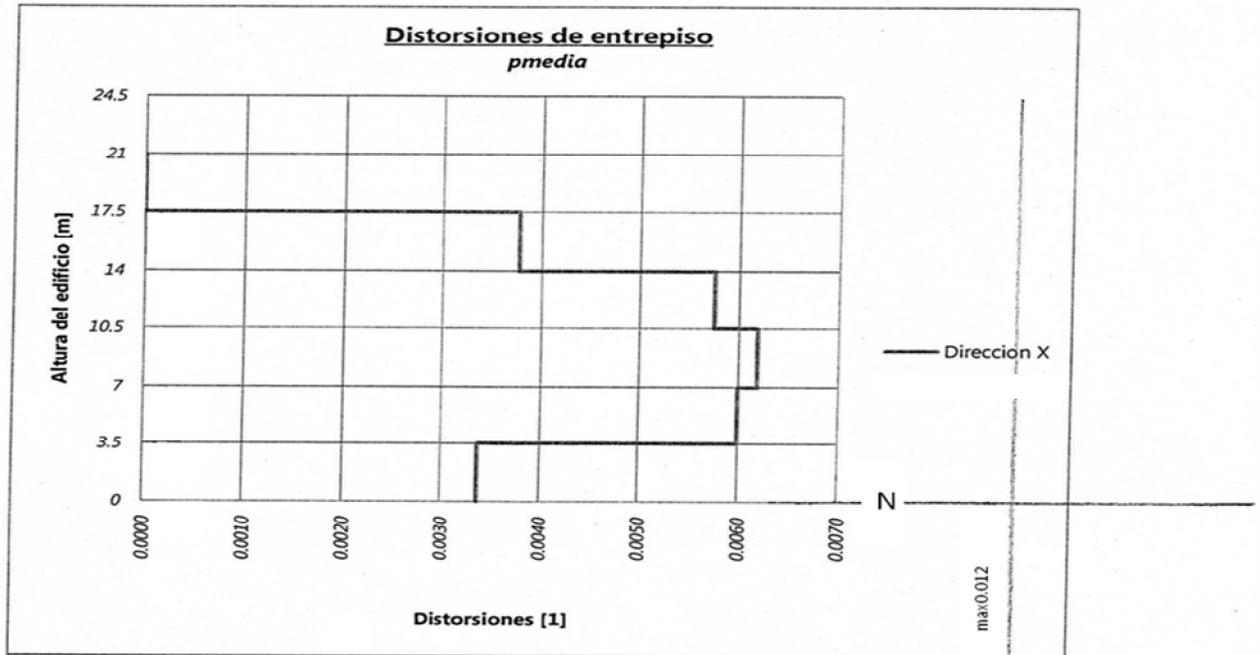


Figura 19. Presentación gráfica de la distorsión de entrepiso máxima para el caso del modelo de 6 niveles diseñado con la cuantía media

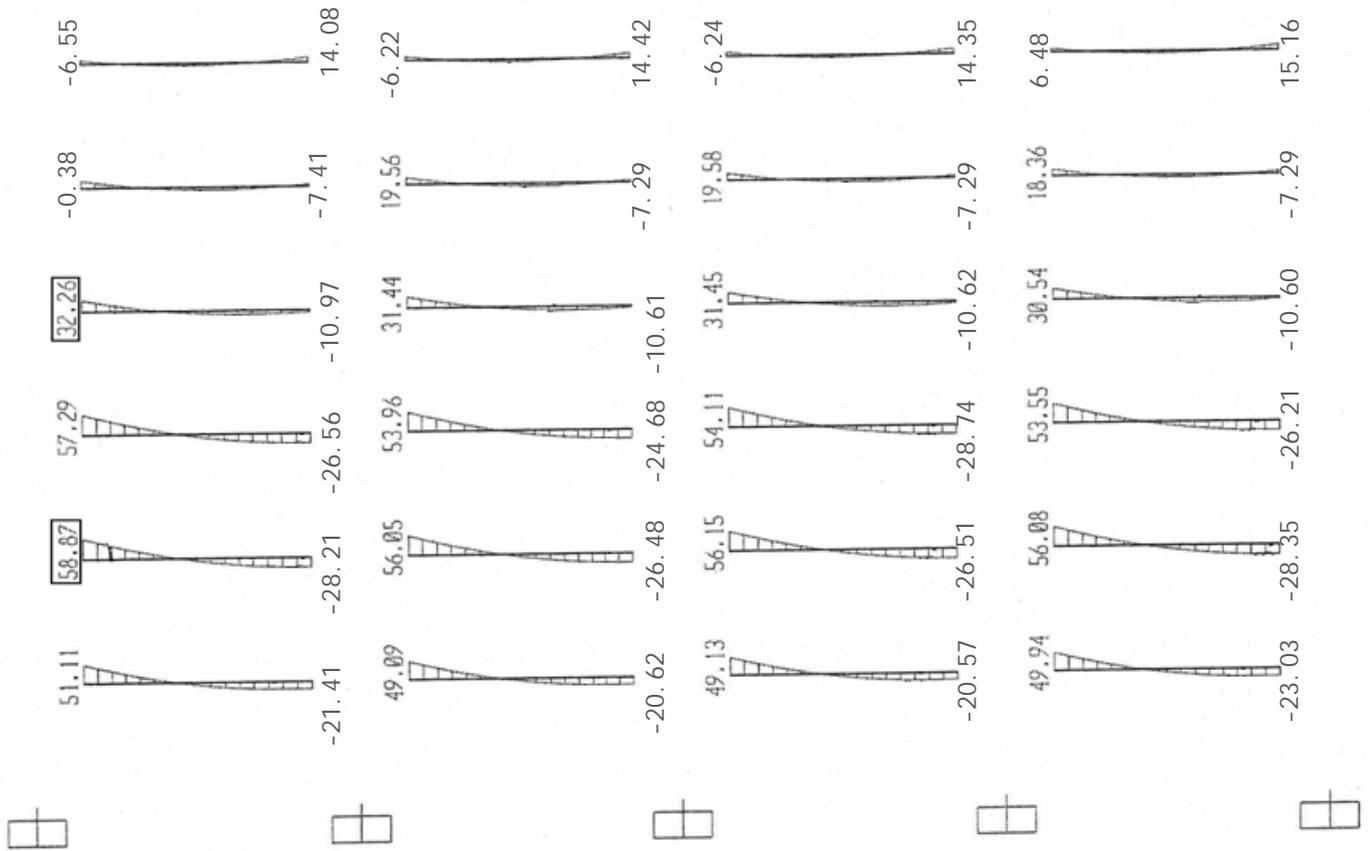


Figura 20. Diagrama de momentos para el diseño de las traves de los niveles N1–N3 y N4-NAZ, con la combinación de carga mas desfavorable para el análisis estructural (edificio de 6 niveles con cuantía media)

## Análisis y diseño con cuantía máxima

De manera similar, al análisis de cuantía mínima, se hizo para la cuantía máxima obteniendo los siguientes resultados.

### DIMENSIONES EN ELEMENTOS ESTRUCTURALES

Estas dimensiones son el resultado del proceso iterativo de diseño, las cuales se utilizarán en el análisis estructural definitivo.

Espesor de losa maciza [cm]:	14		
Trabes N4 a Azotea [cm]:	<b>25</b>	X	<b>50</b>
Trabes N1 a N3 [cm]:	<b>30</b>	X	<b>60</b>
Columnas [cm]:	80	X	80
Altura de entrepiso [m]:	3.5		

### AREA DE ACERO MAXIMA CALCULADA Y SU MOMENTO RESISTENTE MR, PARA CADA SECCION DEL EDIFICIO

$$p_{max} = 0.75 \left( \frac{f'_c}{f_y} \frac{6000 \beta_1}{f_y + 6000} \right) = 0.01518$$

Nivel	Seccion (b * h) cm	Asmin. cm <sup>2</sup>	MR T.m
N1 – N3	30 * 60	27.00	46.2
N4 – NAZ	25 * 50	19.000	26.3

### DISTORSIONES DE ENTREPISO Y ROTACIONES EN LOS NUDOS

Tabla 6.a. Desplazamientos por nivel y rotaciones en los nudos

Joint	OutputCase	CaseType	U1	U2	R2	R2
Text	Text	Text	m	m	Radians	Grados
(sin multiplicar por Q=3)						
29	NSX03SY	Combination	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
30	NSX03SY	Combination	-0.00590	0.00025	-0.00266	-0.15258
31	NSX03SY	Combination	-0.01790	0.00078	-0.00355	-0.20346
32	NSX03SY	Combination	-0.03112	0.00138	-0.00346	-0.19813
33	NSX03SY	Combination	-0.04284	0.00191	-0.00274	-0.15705
34	NSX03SY	Combination	-0.04981	0.00223	-0.00083	-0.04773
35	NSX03SY	Combination	-0.04981	0.00223	0.00050	0.02848

Tabla 6.b. Distorsiones de entrepiso para cada nivel

Nivel	Nudo	Distorsión X [m]	Altura nivel [m]	Distorsión Y [m]	Altura nivel [m]	Distorsión max 0.012
N1	23	0.00506	3.5	0.00021	3.5	0.012
N2	24	0.01029	7	0.00045	7	0.012
N3	25	0.01133	10.5	0.00051	10.5	0.012
N4	26	0.01004	14	0.00046	14	0.012
N5	27	0.00598	17.5	0.00027	17.5	0.012
N6	28	0.00000	21	0.00000	21	0.012

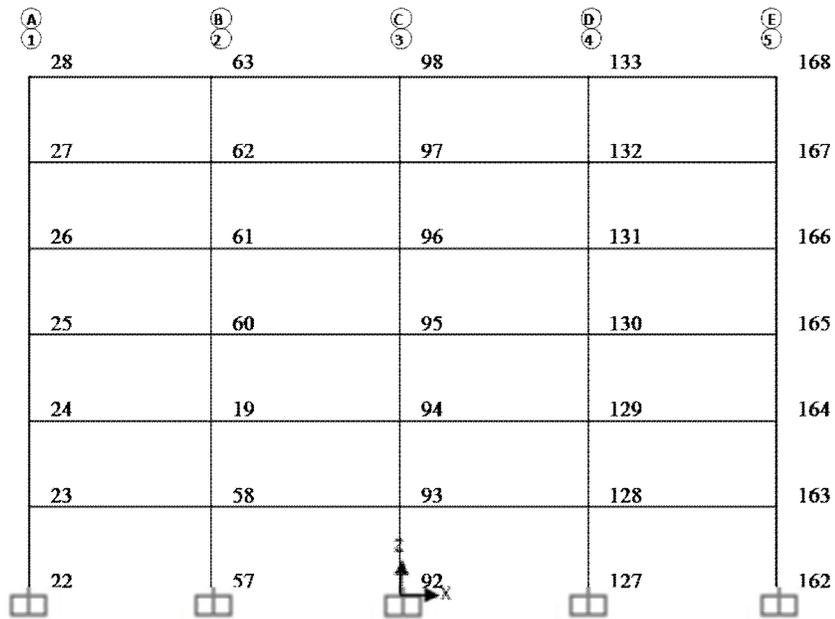


Figura 21. Elevación del marco considerado más desfavorable para diseño

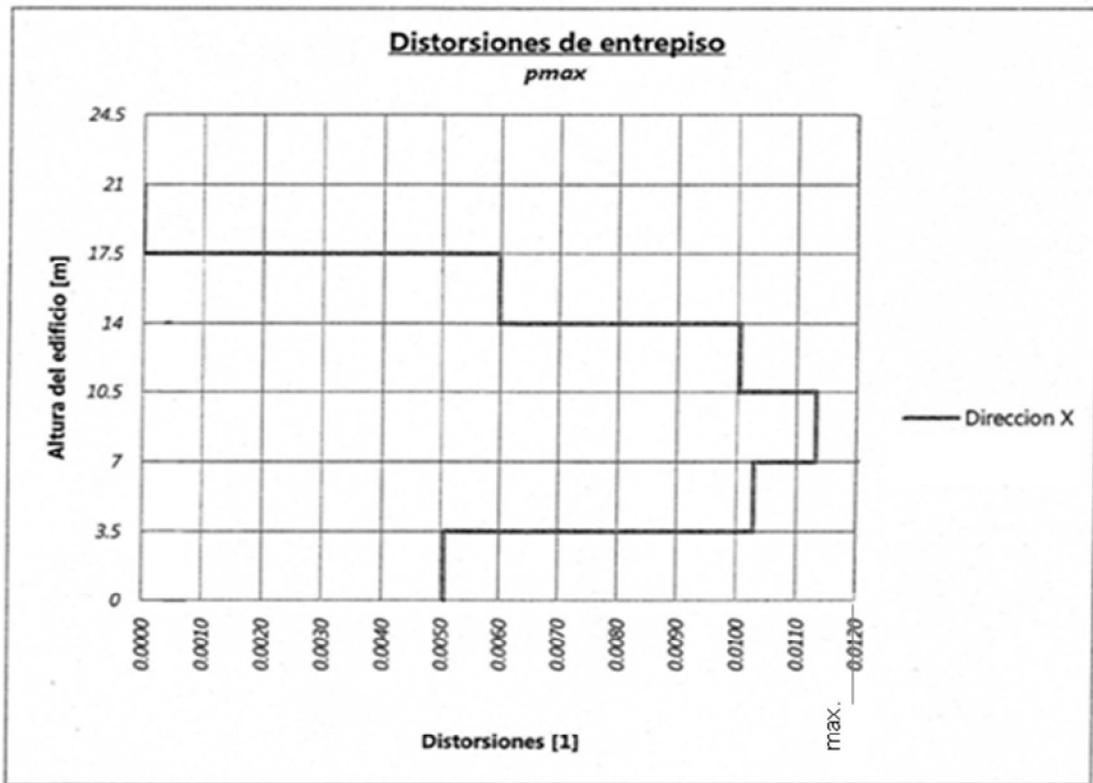


Figura 22. Presentación gráfica de la distorsión de entrapiso máxima para el caso del modelo de 6 niveles diseñado con la cuantía máxima

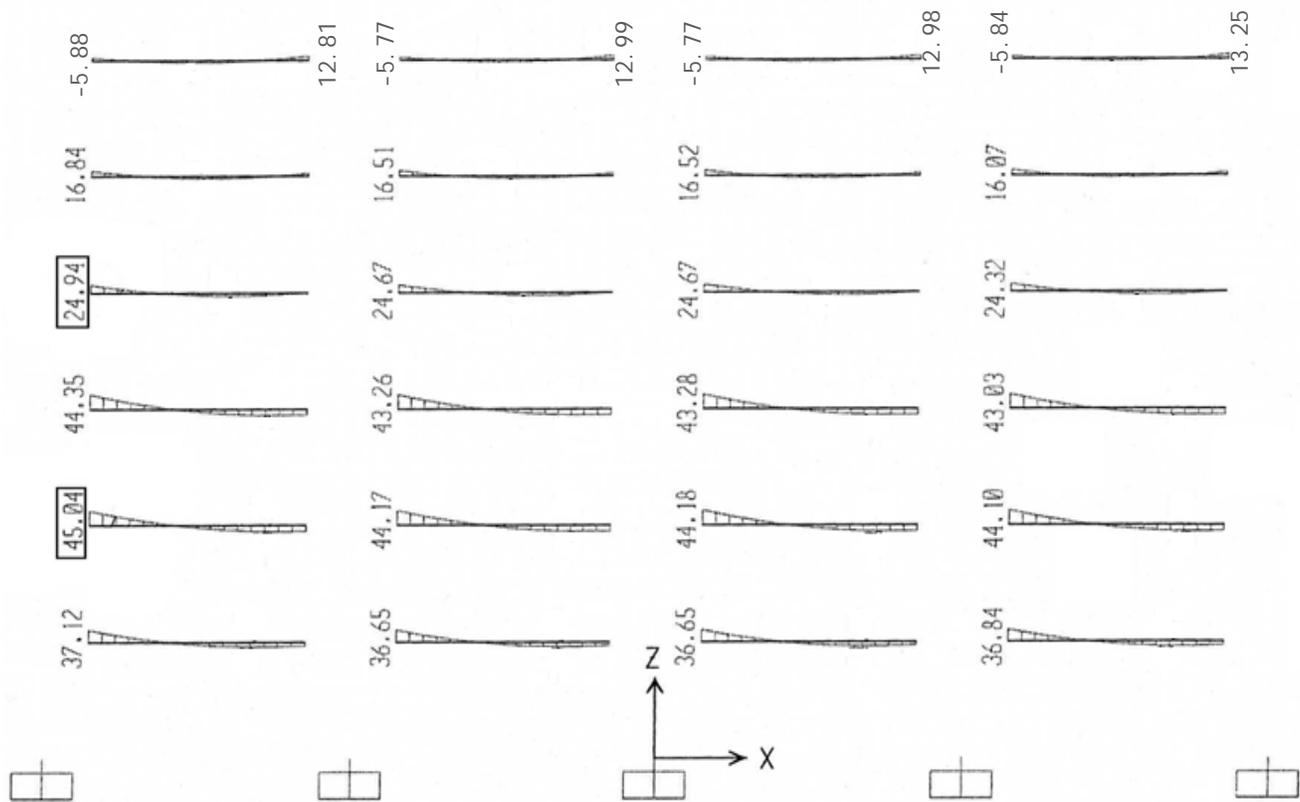


Figura 23. Diagrama de momentos para el diseño de las traves de los niveles N1–N3 y N4-NAZ, con la combinación de carga mas desfavorable para el análisis estructural (edificio de 6 niveles con cuantía máxima)

## Análisis y estudio de los parámetros de respuesta máxima para un edificio bajo

Tomando en cuenta que el diseño de estructuras de concreto reforzado se define básicamente por dos conceptos: los límites de desplazamiento, y la demanda de resistencia de los elementos estructurales; en esta parte del trabajo se establece una relación entre dos de los parámetros representativos: la demanda de distorsión de entrepiso promedio de cada nivel y la cuantía de refuerzo longitudinal para resistencia a flexión de los elementos trabe.

Dado que la distribución de la distorsión de entrepiso (tablas 4.b, 5.b y 6.b) difícilmente resulta uniforme en la altura de las estructuras, el estudio de los parámetros se dividió en dos grupos: el nivel medio inferior (niveles 1 al 3) y el nivel medio superior (niveles 4 al 6).

Distorsión de entrepiso ( $\delta$ ), es el cociente entre el desplazamiento relativo de entrepiso y la altura del mismo.

$$\delta_i = (U_i - U_{i-1})/H$$

donde

U, es el desplazamiento del nivel en estudio

H, es la altura del entrepiso

i, es el i-esímo nivel

La Distorsión promedio, ( $\bar{\delta}_M$ ) vs. Cuantías ( $\rho$ ), para cada seccionamiento del edificio de 6 niveles, se muestra en la tabla 7 y la figura 24.

Tabla 7. Distorsiones promedio ( $\bar{\delta}_M$ ), para cada seccionamiento del edificio de 6 niveles

Dimensiones de trabes (cm)		EDIFICIO DE 6 NIVELES			
		Cuantía		Distorsiones promedio ( $\bar{\delta}_M$ )	
N1 a N3	N4 a Nazotea			N1 aN3	N4 a Nazotea
50 x 145	45 x 125	Mínima	0.00264	0.0026	0.0020
35 x 80	30 x 65	media	0.00891	0.0052	0.0047
30 x 60	25 x 50	máxima	0.01518	0.0089	0.0080

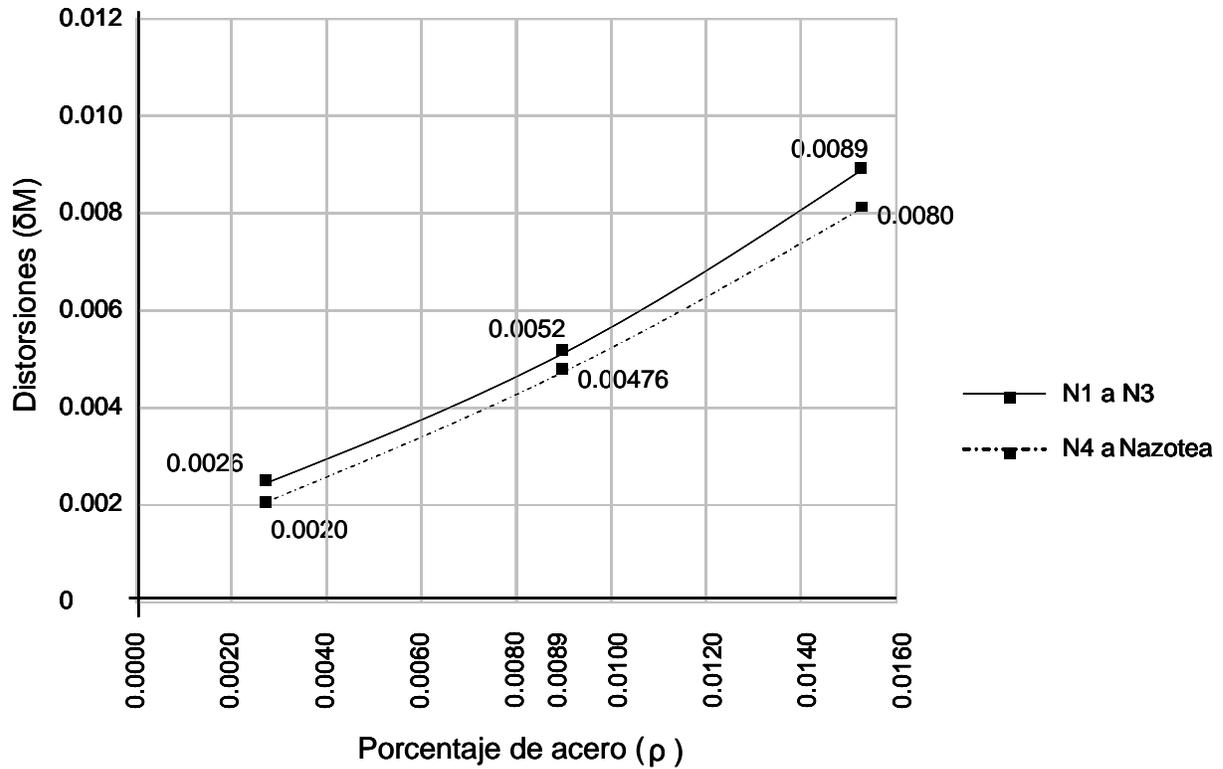


Figura 24. Cuantía ( $\rho$ ) vs. Distorsiones ( $\delta_M$ ), para el edificio de 6 niveles

La relación de cuantía de acero ( $\rho$ ) vs. Geometría de la sección, en función de la altura de entrepiso y el peralte de la sección ( $H/h$ ), se muestra en la tabla 8 y la fig.25

Tabla 8. Cuantía ( $\rho$ ) vs.  $H/h$ , para edificio de 6 niveles

Dimensiones de trabes (cm)		EDIFICIO DE 6 NIVELES			
		Cuantía		H/h	
N1 a N3	N4 a Nazotea			N1 aN3	N4 a Nazotea
50 x 145	45 x 125	mínima	0.00264	2.41	2.80
35 x 80	30 x 65	media	0.00891	4.38	5.38
30 x 60	25 x 50	máxima	0.01518	5.83	7.00

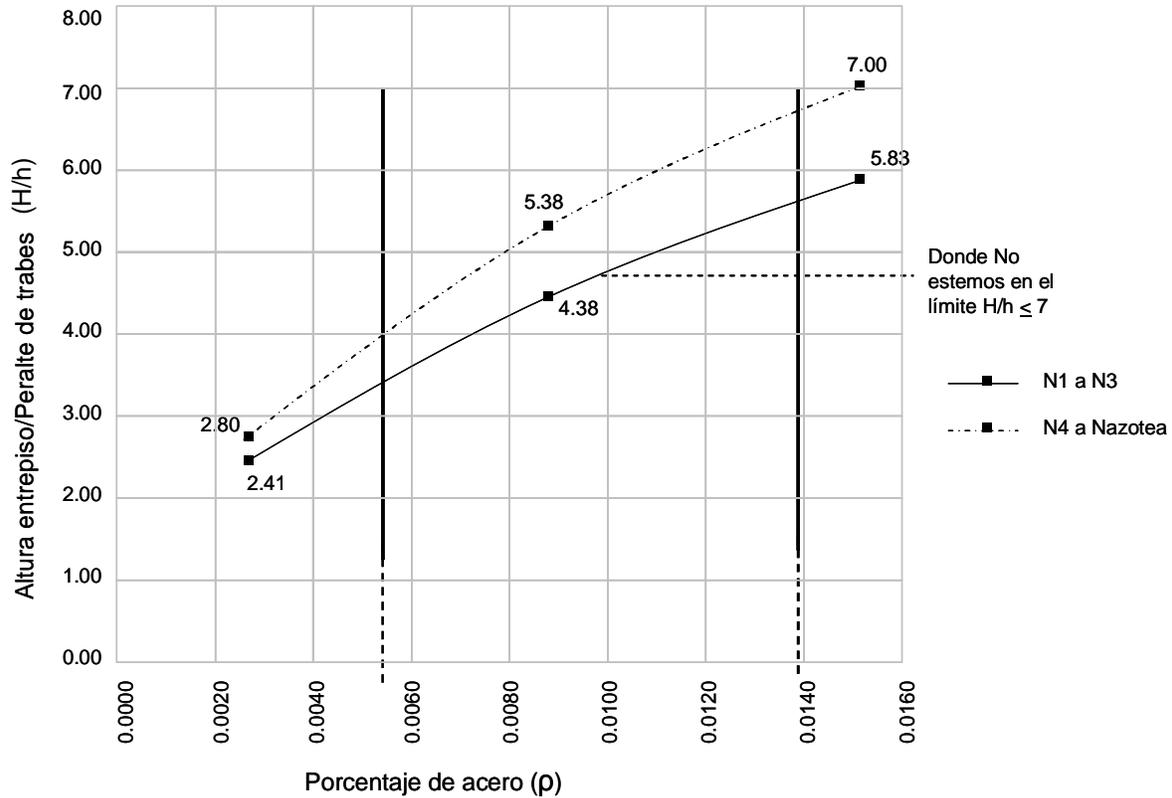


Figura 25. Cuantía ( $\rho$ ) vs.  $H/h$ , para edificio de 6 niveles

### Análisis de la relación entre cuantía de acero y la distorsión de entrepiso, para el edificio de 6 niveles

En el modelo representado por el edificio de 6 niveles, con el propósito de uniformizar las secciones de los elementos estructurales se seccionan en dos partes la altura del edificio, N1 a N3 y N4-Nazotea, y se presenta el análisis y diseño de las trabes para cuantías mínima, máxima e intermedia, según la propuesta del R.C.D.F. De los resultados analíticos se estableció una relación, para la traves, entre cuantía de acero (% de acero), y la distorsión de entrepiso representativa para cada seccionamiento del edificio, como se puede observar en la figura 24. Con base en el análisis anterior, se hacen las siguientes observaciones:

Para la cuantía mínima, las secciones resultan muy grandes en relación al tamaño del edificio, por lo que estética y económicamente no son construibles, y las rotaciones son muy pequeñas así como las distorsiones de entrepiso, quedando muy

por debajo del límite permitido por el R.C.D.F. Pero a medida que se aumenta la cuantía de acero, a partir de la media y hasta la cuantía máxima, las secciones van observando una mejor relación entre la altura del entrepiso y la altura de la sección  $H/h$ , haciéndose más esbeltas, como se puede ver en la figura 25. También al ir incrementando la cuantía de acero los nudos presentan mayor rotación y las distorsiones se incrementan en valor, estando siempre dentro del límite permisible, como se puede ver en la figura 24 y las figuras 15, 19 y 22 respectivamente.

Así también, se observa en la figura 24, que a partir de la cuantía media hacia arriba, las curvas que representan el seccionamiento de los niveles del edificio se separan, pues la curva que representa los niveles bajos tiende a incrementar más rápido las rotaciones en los nudos y las distorsiones de entrepiso, con relación a la curva que representa los niveles altos.

Por lo que si para el diseño de traveses por flexión, en edificios bajos, se rige por las cuantías que arrojen las distorsiones de entrepiso idóneas, se estaría considerando un límite conservador en las rotaciones de los nudos, y si además acotamos el límite superior de distorsión en un 5% como medida de seguridad ya que, las distorsiones de entrepiso para cuantía máxima están en el límite permisible, entonces se podría establecer que una sección de trabe práctica, estética y económica, es la que resulta de la cuantía media hacia arriba y hasta la cuantía máxima.

Con base en lo anterior, un intervalo de cuantía de acero recomendable para edificios bajos sería:

$$\rho_{med} < \rho_{recomendable} < 0.95 \rho_{max}$$

donde la cuantía media es:

$$\rho_{media} = (\rho_{max} + \rho_{min}) / 2$$

Con lo cual se puede decir, que no es recomendable el uso de cuantía mínima para el diseño de traveses a flexión en edificios bajos. Sin embargo se recomienda hacer la revisión de diseño con la cuantía propuesta en este trabajo.

### **Análisis de la relación entre la cuantía de acero y la geometría de la sección**

Para edificios bajos se hizo el análisis y diseño de las traveses a flexión, con cuantías mínima, máxima e intermedia, según el R.C.D.F. También, con el objeto de

uniformizar las secciones, la altura del edificio ( $H_T$ ) se seccionó en dos partes; la primera son los niveles N1, N2 y N3; la segunda son los niveles N4 a Nazotea.

De los resultados analíticos se estableció una relación, para las trabes, entre cuantía de acero y la geometría de la sección, la cuál estará en función de  $H/h$ , donde ( $H$ ) es la altura del entrepiso y ( $h$ ) el peralte de la sección, como se muestra en la tabla 8 y la figura 25. De lo observado en dichos resultados se puede decir lo siguiente:

- Para cuantías mínimas la relación  $H/h$  son pequeñas para todos los niveles del edificio. Lo cuál no es adecuado por apariencia estética, servicio y economía, aunque las distorsiones de entrepiso y rotaciones en los nudos sean pequeñas.

- También, a medida que aumenta la cuantía de acero la relación  $H/h$  se hace más grande, es decir las secciones se vuelven más esbeltas.

- El comportamiento de las curvas ( $\rho - H/h$ ) resulta ser casi lineal para los dos seccionamientos de la altura del edificio, sin embargo se aprecia notablemente que la curva que representa el segundo medio de la altura del edificio tiene una relación  $H/h$  mayor a la de la curva del primer medio. Lo cual indica que se pueden manejar secciones mas esbeltas en los niveles del segundo medio de la altura del edificio.

- También se puede observar en las curvas de la figura 25, que a partir de la cuantía media y hasta la cuantía máxima la relación ( $H/h$ ) se encuentra en el rango  $4 < H/h < 7$ , lo cual indica según la practica que desde el punto de vista arquitectónico, técnico y económico las secciones son construibles.

- Es notable que las curvas para los dos tipos de secciones tienen un límite en el eje de las ordenadas de aproximadamente siete, cuando en el eje de las abcisas la cuantía de acero es máxima ( $\rho_{max} = 0.0151$ ), como se muestra en la figura 25.

Con base en el análisis anterior, mostrado en la gráfica de la figura 25 y la tabla 8, se puede plantear una recomendación de cuantía de acero para edificios bajos, tratando de lograr funcionalidad sin que se rebasen los límites permisibles de distorsión de entrepiso y desplazamientos laterales, sería la que se encuentra dentro del intervalo siguiente, de acuerdo a las figuras 24 y 25:

$$\rho_{med} < \rho_{recomendable} < \rho_{max}$$

Con las anteriores recomendaciones se tendría un valor práctico de cuantía para diseño, el cuál le sería de mucha ayuda al ingeniero de la práctica, para tener un

acercamiento más rápido y adecuado en la utilización de porcentajes de acero, cuidando distorsiones de entrepiso, apariencia estética, servicio y economía. Sin embargo siempre será recomendable hacer las revisiones de diseño pertinentes.

## **5.2 Análisis del edificio de 15 niveles, considerando el diseño de vigas con cuantía mínima, cuantía media y con cuantía máxima**

El objeto del análisis y diseño en éste trabajo, es relacionar la deformación del edificio con la geometría de la sección de las vigas, en función de su cuantía de acero. Por lo cual se presenta a continuación el análisis y diseño para los tres casos de cuantía considerados.

### **Análisis y diseño con cuantía mínima**

Se presenta la memoria descriptiva para el edificio de 15 niveles con la cuantía mínima.

Para la revisión se utilizó el Reglamento de Construcciones y las Normas Técnicas Complementarias vigentes para el Distrito Federal (RCDF y NTC).

### **DESCRIPCIÓN.**

Se trata de una estructura que consta de Planta Baja (P.B.), (N1-N14) y Azotea (Az). Cada uno de los cuales están destinados para los siguientes usos:

<b>Nivel</b>	<b>Uso</b>	<b>Altura [m]</b>
P.B.	Departamento.	4.00
N1 a N14	Departamentos	4.00
Az	Azotea.	4.00

Las dimensiones en planta de cada uno de los entrepisos es de 32 x 32 m. (a ejes).

La altura total de la estructura es de 60 [m].

### **MATERIALES**

Concreto para superestructura (columnas y trabes)  $f'c$  [kg/cm<sup>2</sup>]: **250**

Acero de refuerzo (longitudinal y transversal)  $f_y$  [kg/cm<sup>2</sup>]: **4200**

## CARGAS CONSIDERADAS

AZOTEA		Diseño [kg/m <sup>2</sup> ]	Sismo [kg/m <sup>2</sup> ]
Losa maciza h	14	336	
[cm]:			
Impermeabilizante		20	
Carga adicional (NTC)		40	
Carga muerta [CM]		<b>396</b>	<b>396</b>
Carga viva (CV)		100	70
<b>Total</b>		<b>496</b>	<b>466</b>

DEPARTAMENTO		Diseño [kg/m <sup>2</sup> ]	Sismo [kg/m <sup>2</sup> ]
Losa maciza h	14	336	
[cm]:			
Plafón de yeso		40	
Instalaciones		10	
Loseta Vinílica		10	
Carga adicional (NTC)		40	
Carga muerta [CM]		<b>436</b>	<b>436</b>
Carga viva (CV)		170	90
<b>Total</b>		<b>606</b>	<b>526</b>

## DIMENSIONES EN ELEMENTOS ESTRUCTURALES

Estas dimensiones son el resultado del proceso iterativo de diseño, las cuales se utilizarán en el análisis estructural definitivo.

Espesor de losa maciza	14		
[cm]:			
Trebes Dpto. 11- Azotea	50	X	205
[cm]:			
Trabes Dpto. 6 – Dpto.	55	X	265
10 [cm]:			
Trabes Dpto. 1 – Dpto. 5	55	X	295
[cm]:			

Columnas [cm]: 120 X 120  
 Altura de entrepiso [m]: 4

## CALCULO DE PESOS POR NIVEL

Para el cálculo de las áreas tributarias se descontó el área de las columnas.

### ÁREAS TRIBUTARIAS

NIVEL	ÁREA* [m <sup>2</sup> ]	W [kg/m <sup>2</sup> ]	Ws [kg/m <sup>2</sup> ]	Wcv [ton]	Ws [ton]
Azotea	1066.2	496	466	528.9	496.9
Departamento 14	1066.2	606	526	646.1	560.8
Departamento 13	1066.2	606	526	646.1	560.8
Departamento 12	1066.2	606	526	646.1	560.8
Departamento 11	1066.2	606	526	646.1	560.8
Departamento 10	1066.2	606	526	646.1	560.8
Departamento 9	1066.2	606	526	646.1	560.8
Departamento 8	1066.2	606	526	646.1	560.8
Departamento 7	1066.2	606	526	646.1	560.8
Departamento 6	1066.2	606	526	646.1	560.8
Departamento 5	1066.2	606	526	646.1	560.8
Departamento 4	1066.2	606	526	646.1	560.8
Departamento 3	1066.2	606	526	646.1	560.8
Departamento 2	1066.2	606	526	646.1	560.8
Departamento 1	1066.2	606	526	646.1	318.8
P. B.					

### PESO PROPIO

NIVEL	LONGITUD TRABES* [m]	LONGITUD COLUMNAS [m]	W TRABES [ton]	W COLUMNAS [ton]
Azotea	272.0	2	669.1	172.8
Departamento 14	272.0	4	669.1	345.6
Departamento 13	272.0	4	669.1	345.6
Departamento 12	272.0	4	669.1	345.6
Departamento 11	272.0	4	669.1	345.6
Departamento 10	272.0	4	951.5	345.6
Departamento 9	272.0	4	951.5	345.6
Departamento 8	272.0	4	951.5	345.6
Departamento 7	272.0	4	951.5	345.6
Departamento 6	272.0	4	951.5	345.6

Departamento 5	272.0	4	<b>1059.2</b>	<b>345.6</b>
Departamento 4	272.0	4	<b>1059.2</b>	<b>345.6</b>
Departamento 3	272.0	4	<b>1059.2</b>	<b>345.6</b>
Departamento 2	272.0	4	<b>1059.2</b>	<b>345.6</b>
Departamento 1	272.0	4	<b>1059.2</b>	<b>345.6</b>
P. B.		2		<b>172.8</b>

\*A paño de columnas

### PESO TOTAL POR NIVELES

NIVEL	Wcv [ton]	Ws [ton]
Azotea	1370.8	1338.8
Departamento 14	1660.9	1575.6
Departamento 13	1660.9	1575.6
Departamento 12	1660.9	1575.6
Departamento 11	1660.9	1575.6
Departamento 10	1943.2	1857.9
Departamento 9	1943.2	1857.9
Departamento 8	1943.2	1857.9
Departamento 7	1943.2	1857.9
Departamento 6	1943.2	1857.9
Departamento 5	2050.9	1965.6
Departamento 4	2050.9	1965.6
Departamento 3	2050.9	1965.6
Departamento 2	2050.9	1965.6
Departamento 1	2050.9	1723.5
P. B.	172.8	172.8
<b>Suma</b>	<b>28157.6</b>	<b>26689.3</b>

### ANÁLISIS ESTÁTICO

Se empleó el Análisis Estático para analizar la estructura, considerando un sistema de piso rígido en cada entrepiso. Utilizando el RCDF y sus Normas Técnicas Complementarias vigentes, se obtienen los siguientes datos. El factor de ductilidad se obtiene de las NTC para sismo, sabiendo que la estructuración es a base de marcos de concreto (columnas y trabes).

Cabe aclarar que para el análisis de edificios de más de 30 m. de altura el R.C.D.F. vigente propone el uso del método dinámico. Sin embargo, para el ejemplo del edificio alto en éste trabajo se utiliza el método estático, ya que es más práctico de utilizar y no altera significativamente los resultados en estudio.

## Datos de entrada

Zona sísmica II  
 Coeficiente sísmico basal 0.32  
 Factor de ductilidad Q 3  
 Donde  $Q' = Q$

$$F_i = \frac{c}{Q} \frac{W_i h_i}{\sum_{i=1}^n W_i h_i} W_T$$

Nivel	h entrepiso [m]	hi [m]	Wi [ton]	Wih [ton m]	Fi [ton]	Fi/col [ton]	Vi [ton]
Azotea							
	4	60	<b>1338.8</b>	80327.3	280.6	11.2	280.6
Departamento 14							
	4	56	<b>1575.6</b>	88231.5	308.2	12.3	588.8
Departamento 13							
	4	52	<b>1575.6</b>	81929.2	286.2	11.4	875.0
Departamento 12							
	4	48	<b>1575.6</b>	75627.0	264.2	10.6	1139.2
Departamento 11							
	4	44	<b>1575.6</b>	69324.7	242.2	9.7	1381.4
Departamento 10							
	4	40	<b>1857.9</b>	74315.9	259.6	10.4	1641.0
Departamento 9							
	4	36	<b>1857.9</b>	66884.3	233.6	9.3	1874.6
Departamento 8							
	4	32	<b>1857.9</b>	59452.7	207.7	8.3	2082.3
Departamento 7							
	4	28	<b>1857.9</b>	52021.2	181.7	7.3	2264.1
Departamento 6							
	4	24	<b>1857.9</b>	44589.6	155.8	6.2	2419.8
Departamento 5							
	4	20	<b>1965.6</b>	39312.2	137.3	5.5	2557.2
Departamento 4							
	4	16	<b>1965.6</b>	31449.8	109.9	4.4	2667.0
Departamento 3							
	4	12	<b>1965.6</b>	23587.3	82.4	3.3	2749.4
Departamento 2							
	4	8	<b>1965.6</b>	15724.9	54.9	2.2	2804.3
Departamento 1							
	4	4	<b>1723.5</b>	6894.1	24.1	1.0	2828.4
P.B.							
		<b>Suma</b>	<b>26516.5</b>	<b>809671.7</b>			

## ANÁLISIS ESTRUCTURAL

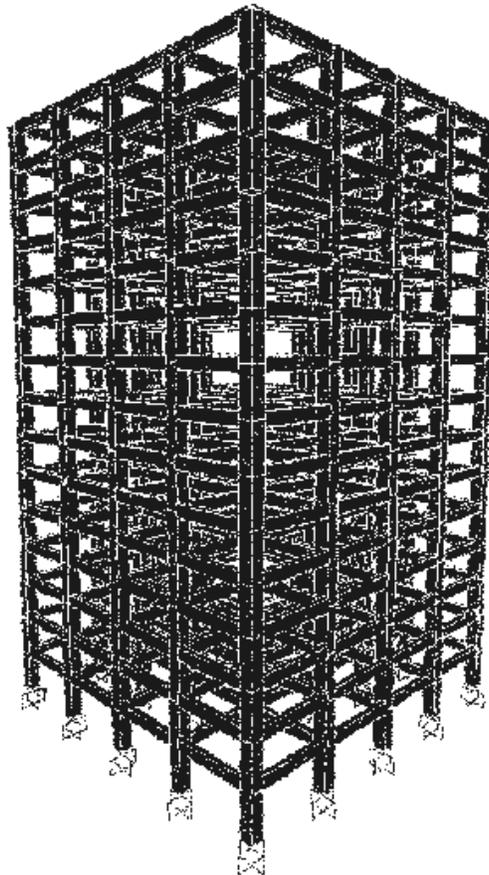
Para el análisis estructural, se empleó el programa SAP2000, considerando las siguientes condiciones de carga:

<b>Cargas</b>	<b>Condiciones de carga.</b>
Dead	Carga de los elementos columnas y trabes.
Cv Max	Carga viva máxima
CvSis	Carga viva por fuerzas accidentales.
Sx	Fuerzas debidas al Sismo en Dirección X, considerando una excentricidad de 10% en planta.
Sy	Fuerzas debidas al Sismo en Dirección Y, considerando una excentricidad de 10% en planta.

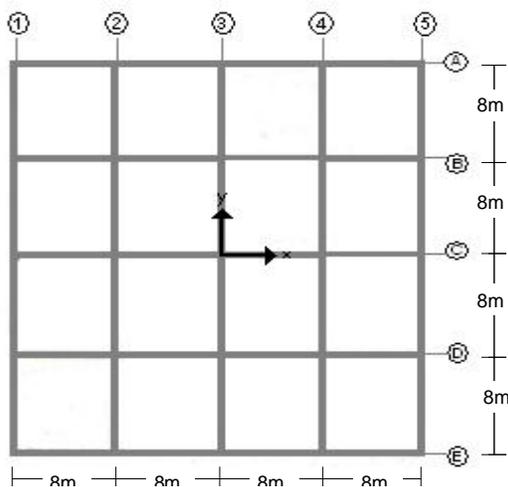
Se utilizaron las siguientes combinaciones de carga.

<b>Combinaciones</b>	<b>Cargas utilizadas</b>
CMAX	Cv Max + Dead
Sx + 0.3 Sy	Cv Sis + Dead+ Sx + 0.3Sy
0.3 Sx + Sy	Cv Sis + Dead+ 0.3Sx + Sy
- Sx - 0.3 Sy	Cv Sis + Dead - Sx - 0.3Sy
- 0.3 Sx + Sy	Cv Sis + Dead - 0.3Sx - Sy
Sx - 0.3 Sy	Cv Sis + Dead + Sx - 0.3Sy
0.3 Sx - Sy	Cv Sis + Dead + 0.3Sx - Sy
- Sx + 0.3 Sy	Cv Sis + Dead - Sx + 0.3Sy
- 0.3 Sx - Sy	Cv Sis + Dead - 0.3Sx + Sy
CVSIS	Cv Sis + Dead

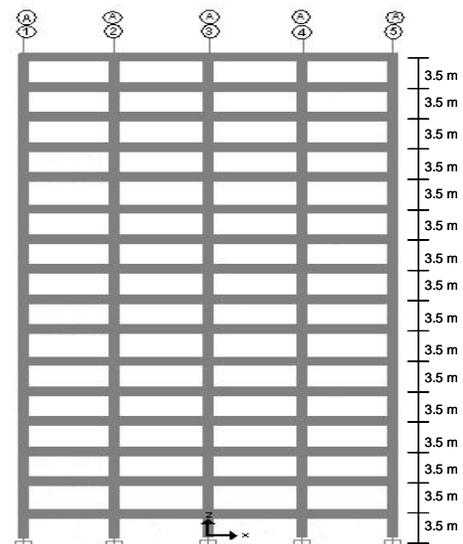
A continuación se presenta el modelo tridimensional de la estructura analizada, también se proporciona la planta de azotea, así como la elevación de la estructura.



Edificio modelado con el programa SAP2000



Estructuración en la planta de azotea



Elevación del modelo utilizado  
 Altura de entrepiso para  $\rho_{min}$ ,  $H=4m$

Se revisaron los desplazamientos para las distintas combinaciones de carga. El RCDF, para la condición considerada en este trabajo permite un desplazamiento máximo en el nivel de Azotea de

$$0.012 H = 0.012 \times 6000 = 72 \text{ [cm]}$$

Suponiendo que los sistemas de piso son infinitamente rígidos y que todos los nodos del mismo piso presentan el mismo nivel de desplazamiento lateral, la distorsión de entrepiso se determinó con base en la comparativa directa de los desplazamientos laterales de nudos de pisos consecutivos. A continuación se presentan los desplazamientos obtenidos para los puntos: **7, 35, 147 y 175**, los cuales ya se encuentran afectados por el factor de ductilidad  $Q=3$ .

1	2	3	4	5	
35	70	105	140	175	A
28	63	98	133	168	B
21	56	91	126	161	C
14	49	84	119	154	D
7	42	77	112	147	E

Ubicación en Azotea de desplazamientos

Point	Load	UX [cm]	UY [cm]
7	SX03SY	11.7	5.3
7	03SXS	5.3	11.7
7	NSX03SY	-10.5	1.4
7	NO3SXS	-1.4	10.5
7	SXN03SY	10.5	-1.4
7	03SXNS	1.4	-10.5
7	NSXN03SY	-11.7	-5.3
7	N03SXNS	-5.3	-11.7
35	SX03SY	14.4	5.3
35	03SXS	2.6	11.7
35	NSX03SY	-15.6	1.4
35	N03SXS	-6.4	10.5
35	SXN03SY	15.6	-1.4
35	03SXNS	6.4	-10.5
35	NSXN03SY	-14.4	-5.3
35	N03SXNS	-2.6	-11.7
147	SX03SY	11.7	2.6
147	03SXS	5.3	14.4
147	NSX03SY	-10.5	6.4
147	NO3SXS	-1.4	15.6
147	SXN03SY	10.5	-6.4
147	03SXNS	1.4	-15.6
147	NSXN03SY	-11.7	-2.6
147	N03SXNS	-5.3	-14.4
175	SX03SY	14.4	2.6
175	03SXS	2.6	14.4
175	NSX03SY	-15.6	6.4
175	N03SXS	-6.4	15.6
175	SXN03SY	15.6	-6.4
175	03SXNS	6.4	-15.6
175	NSXN03SY	-14.4	-2.6
175	N03SXNS	-2.6	-14.4

La altura total del edificio Z= 60 m. corresponde al nivel de Azotea, y se consideraron alturas libres de entrepiso de 4 m. para los departamentos y la planta baja.

Por otro lado se calcula la cuantía mínima con la siguiente expresión del RCDF.

$$p_{\min} = 0.07 \frac{\sqrt{f'_c}}{f_y} = 0.00264$$

Por lo que, con la sección transversal de las trabes propuestas para cada seccionamiento del edificio, se tienen las siguientes áreas de acero de refuerzo y sus momentos resistentes  $M_R$ .

Nivel	Seccion (b * h) cm	Asmin. cm <sup>2</sup>	M <sub>R</sub> T.m
N1 – N5	55 * 295	42.83	453.3
N6 – N10	55 * 265	38.47	365.1
N10 – NAZ	50 * 205	27.06	197.5

## DISTORSIONES DE ENTREPISO Y ROTACIONES EN LOS NUDOS

Tabla 9.a. Desplazamientos por nivel y rotaciones en los nudos

Joint	OutputCase	CaseType	U1	U2	R2	R2
Text	Text	Text	m	m	Radians	Grados
(sin multiplicar por Q=3)						
896	NSX03SY	Combination	0	0	0	0
30	NSX03SY	Combination	-0.00319	0.000128	-0.00043	-0.02458
31	NSX03SY	Combination	-0.007118	0.000323	-0.00048	-0.02762
32	NSX03SY	Combination	-0.01117	0.000561	-0.00052	-0.02951
33	NSX03SY	Combination	-0.015261	0.000834	-0.00054	-0.03065
430	NSX03SY	Combination	-0.019336	0.001135	-0.00055	-0.03128
455	NSX03SY	Combination	-0.023459	0.001462	-0.00062	-0.03541
480	NSX03SY	Combination	-0.027577	0.00181	-0.00061	-0.03478
505	NSX03SY	Combination	-0.031507	0.002168	-0.00058	-0.03340
530	NSX03SY	Combination	-0.035193	0.002532	-0.00055	-0.03151
555	NSX03SY	Combination	-0.038598	0.002896	-0.00052	-0.02979
580	NSX03SY	Combination	-0.041963	0.003267	-0.00064	-0.03655
605	NSX03SY	Combination	-0.045241	0.00364	-0.00057	-0.03289
630	NSX03SY	Combination	-0.048044	0.004	-0.00048	-0.02773
34	NSX03SY	Combination	-0.050292	0.004343	-0.00039	-0.02229
35	NSX03SY	Combination	-0.051974	0.004667	-0.00029	-0.01650

Tabla 9.b. Distorsiones de entrepiso para cada nivel

Nivel	Nudo	Distorsión X [m]	Altura nivel [m]	Distorsión Y [m]	Altura nivel [m]	Distorsión Max
P.B.						<b>0.012</b>
N1	30	0.00239	4	0.00010	3.5	0.012
N2	31	0.00295	8	0.00015	7	0.012
N3	32	0.00304	12	0.00018	10.5	0.012
N4	33	0.00307	16	0.00020	14	0.012
N5	430	0.00306	20	0.00023	17.5	0.012
N6	455	0.00309	24	0.00025	21	0.12
N7	480	0.00309	28	0.00026	24.5	0.012
N8	505	0.00295	32	0.00027	28	0.012
N9	530	0.00276	36	0.00027	31.5	0.012
N10	555	0.00255	40	0.00027	35	0.012
N11	580	0.00252	44	0.00028	38.5	0.012
N12	605	0.00246	48	0.00028	42	0.012
N13	630	0.00210	52	0.00027	45.5	0.012
N14	34	0.00169	56	0.00026	49	0.012
NAZ	35	0.00126	60	0.00024	52.5	0.012

35	70	105	140	175
34	69	104	139	174
630	635	640	645	650
605	610	615	620	625
680	685	690	695	600
655	660	665	670	675
630	635	640	645	650
605	610	615	620	625
480	485	490	495	600
455	460	465	470	475
430	435	440	445	450
33	68	103	138	173
32	67	102	137	172
31	66	101	136	171
30	65	100	135	170
896	897	898	899	900



Figura 26. Elevación del marco considerado más desfavorable para diseño

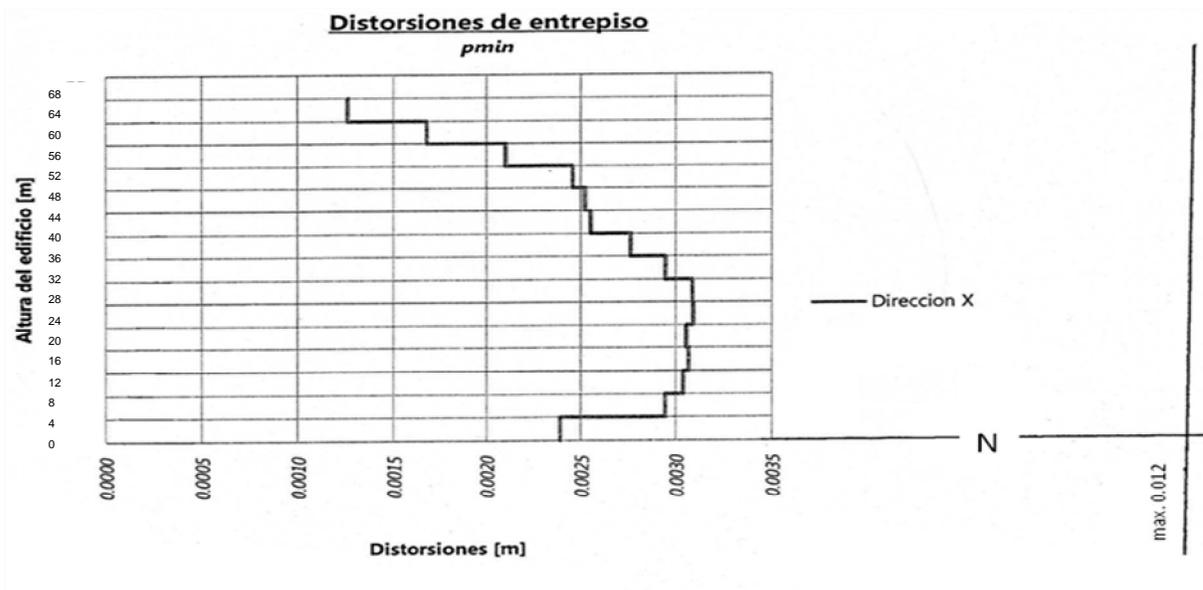


Figura 27. Presentación grafica de la distorsión de entrepiso máxima para el caso del modelo de 15 niveles diseñado con cuantía mínima

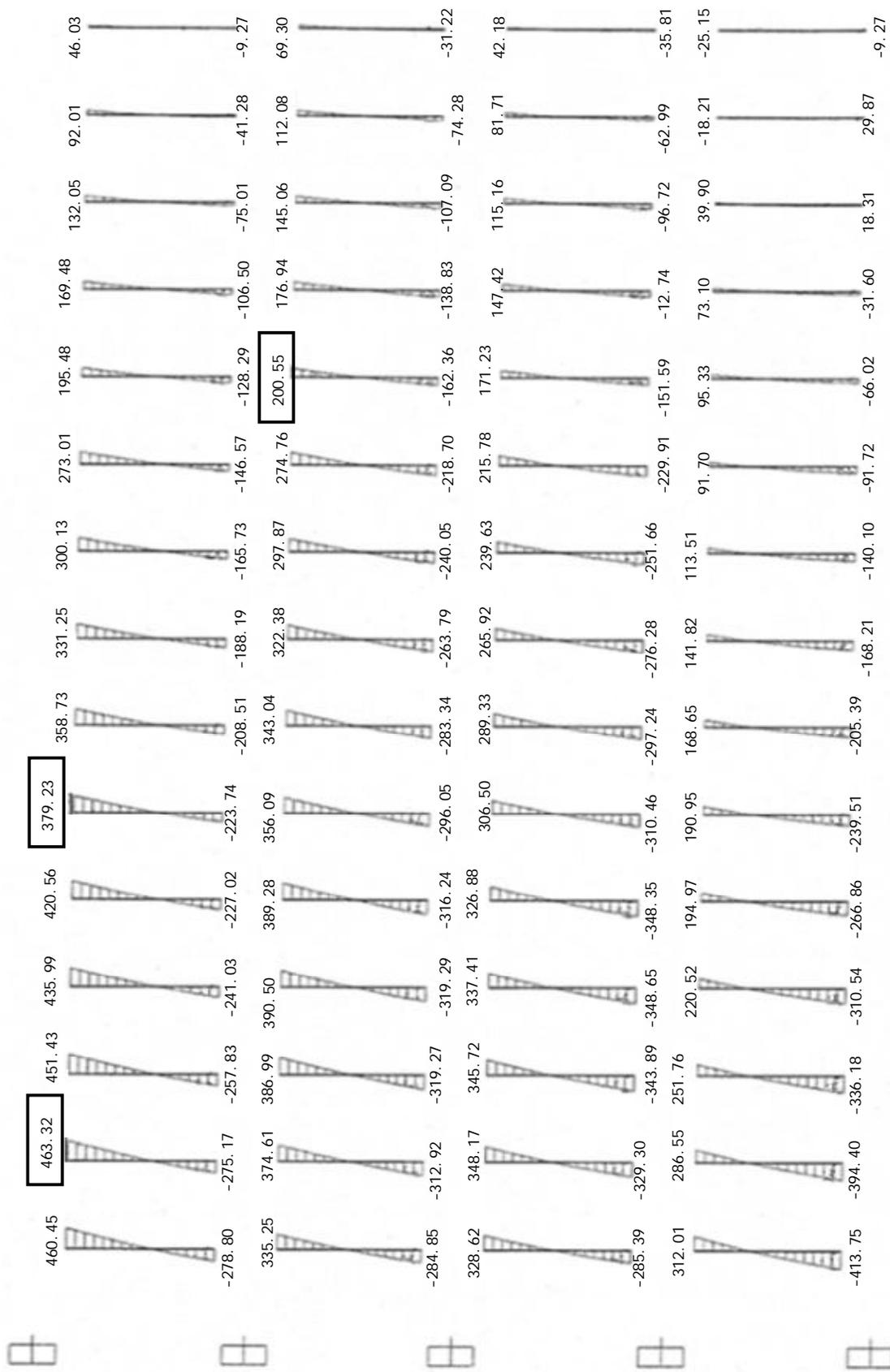


Figura 28. Diagrama de momentos para el diseño de las traves de los niveles N1 – N5, N6 –N10 y N11- NAZ

### Análisis y diseño con cuantía media

De manera similar, al análisis con cuantía mínima, se hizo para la cuantía media obteniendo los siguientes resultados.

#### DIMENSIONES EN ELEMENTOS ESTRUCTURALES

Estas dimensiones son el resultado del proceso iterativo de diseño, las cuales se utilizarán en el análisis estructural definitivo.

Espesor de losa maciza [cm]:	14
Trebes Dpto. 11- Azotea [cm]:	40 x 80
Trabes Dpto. 6 – Dpto. 10 [cm]:	45 x 115
Trabes Dpto. 1 – Dpto. 5 [cm]:	45 x 130
Columnas [cm]:	120 x 120
Altura de entrepiso [m]:	3.5

#### AREA DE ACERO MEDIA CALCULADA Y SU MOMENTO RESISTENTE $M_R$ , PARA CADA SECCION DEL EDIFICIO

$$\rho_{media} = (\rho_{max} + \rho_{min}) / 2 = 0.00891$$

Nivel	Seccion (b * h) cm	Asmed. cm <sup>2</sup>	MR T.m
N1 – N5	45 * 130	52.12	219.1
N6 – N10	45 * 115	46.11	170.6
N10 – NAZ	40 * 80	28.51	71.9

## DISTORSIONES DE ENTREPISO Y ROTACIONES EN LOS NUDOS

Tabla. 10.a. Desplazamientos por nivel y rotaciones en los nudos

Joint	OutputCase	CaseType	U1	U2	R2	R2
Text	Text	Text	m	m	Radians	Grados
(sin multiplicar por Q=3)						
29	NSX03SY	Combination	0	0	0	0
30	NSX03SY	Combination	-0.00323	0.00012	-0.00125	-0.07162
31	NSX03SY	Combination	-0.00907	0.00036	-0.00160	-0.09139
32	NSX03SY	Combination	-0.01561	0.00065	-0.00168	-0.09620
33	NSX03SY	Combination	-0.02229	0.00095	-0.00169	-0.09689
430	NSX03SY	Combination	-0.02900	0.00127	-0.00173	-0.09924
455	NSX03SY	Combination	-0.03609	0.00162	-0.00192	-0.10989
480	NSX03SY	Combination	-0.04348	0.00199	-0.00191	-0.10961
505	NSX03SY	Combination	-0.05063	0.00237	-0.00182	-0.10451
530	NSX03SY	Combination	-0.05741	0.00274	-0.00174	-0.09958
555	NSX03SY	Combination	-0.06404	0.00311	-0.00180	-0.10302
580	NSX03SY	Combination	-0.07147	0.00354	-0.00220	-0.12628
605	NSX03SY	Combination	-0.07955	0.00400	-0.00218	-0.12473
630	NSX03SY	Combination	-0.08692	0.00446	-0.00188	-0.10743
34	NSX03SY	Combination	-0.09301	0.00486	-0.00149	-0.08560
35	NSX03SY	Combination	-0.09783	0.00521	-0.00122	-0.06990

Tabla 10.b. Distorsiones de entrepiso para cada nivel

Nivel	Nudo	Distorsión X [m]	Altura nivel [m]	Distorsión Y [m]	Altura nivel [m]	Distorsión max <b>0.012</b>
N1	30	0.00277	3.5	0.00011	3.5	0.012
N2	31	0.00501	7	0.00020	7	0.012
N3	32	0.00561	10.5	0.00024	10.5	0.012
N4	33	0.00572	14	0.00026	14	0.012
N5	430	0.00575	17.5	0.00028	17.5	0.012
N6	455	0.00608	21	0.00030	21	0.12
N7	480	0.00633	24.5	0.00032	24.5	0.012
N8	505	0.00613	28	0.00032	28	0.012
N9	530	0.00581	31.5	0.00032	31.5	0.012
N10	555	0.00568	35	0.00032	35	0.012
N11	580	0.00637	38.5	0.00036	38.5	0.012
N12	605	0.00692	42	0.00040	42	0.012
N13	630	0.00632	45.5	0.00039	45.5	0.012
N14	34	0.00522	49	0.00034	49	0.012
N15	35	0.00413	52.5	0.00030	52.5	0.012

35	70	105	140	175
34	69	104	139	174
630	635	640	645	650
605	610	615	620	625
680	685	690	695	600
655	660	665	670	675
630	635	640	645	650
605	610	615	620	625
480	485	490	495	600
455	460	465	470	475
430	435	440	445	450
33	68	103	138	173
32	67	102	137	172
31	66	101	136	171
30	65	100	135	170
29	64	99	134	169

Figura 29. Elevación del marco considerado mas desfavorable para diseño

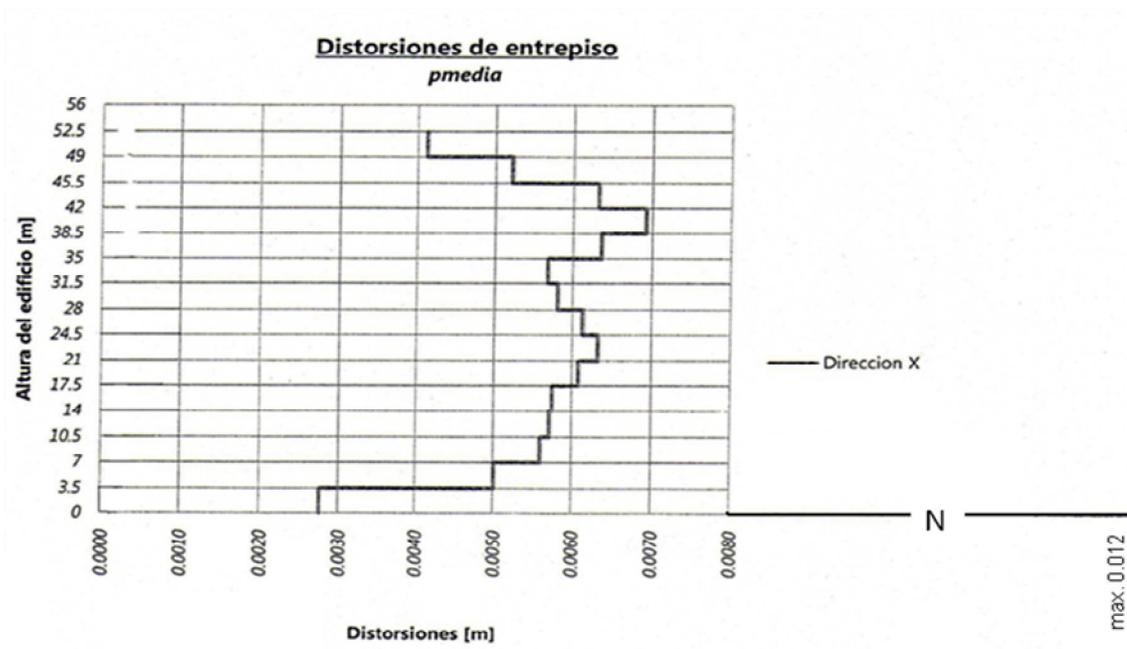


Figura 30. Presentación gráfica de la distorsión de entre piso máxima para el caso del modelo de 15 niveles diseñado con cuantía media

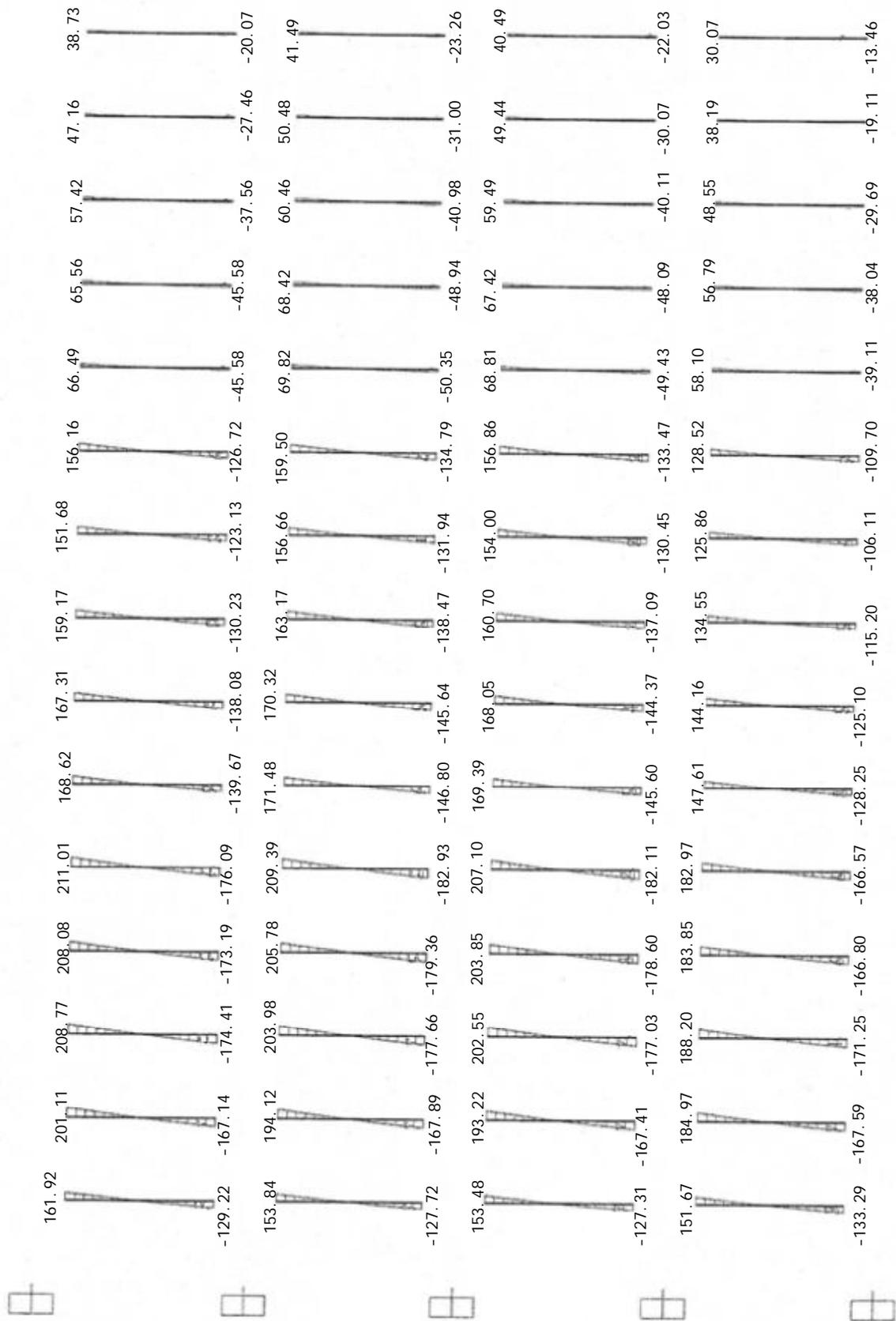


Figura 31. Diagrama de momentos para el diseño de las traveses en los niveles N1 – N5, N6 – N10 y N11 – NAZ, con la combinación de carga mas desfavorable para el análisis estructural (edificio de 15 niveles con cuantía media)

### Análisis y diseño con cuantía máxima

De manera similar, al análisis con cuantía mínima, se hizo para la cuantía máxima obteniendo los siguientes resultados.

### DIMENSIONES EN ELEMENTOS ESTRUCTURALES

Estas dimensiones son el resultado del proceso iterativo de diseño, las cuales se utilizarán en el análisis estructural definitivo.

Espesor de losa maciza [cm]:	14
Trebes Dpto. 11- Azotea [cm]:	30 x 75
Trabes Dpto. 6 – Dpto. 10 [cm]:	40 x 95
Trabes Dpto. 1 – Dpto. 5 [cm]:	40 x 105
Columnas [cm]:	120 x 120
Altura de entrepiso [m]:	3.5

### AREA DE ACERO MAXIMA CALCULADA Y SU MOMENTO RESISTENTE $M_R$ , PARA CADA SECCION DEL EDIFICIO

$$p_{\max} = 0.75 \left( \frac{f'_c}{f_y} \frac{6000\beta_1}{f_y + 6000} \right) = 0.01518$$

Nivel	Seccion (b * h) cm	Asmax. cm <sup>2</sup>	MR T.m
N1 – N5	40 *105	63.42	195.8
N6 – N10	40 * 95	57.38	142.6
N10 – NAZ	30 * 75	33.97	73.4

## DISTORSIONES DE ENTREPISO Y ROTACIONES EN LOS NUDOS

Tabla 11.a. Desplazamientos por nivel y rotaciones en los nudos

Joint	OutputCase	CaseType	U1	U2	R2	R2
Text	Text	Text	m	m	Radians	Grados
(sin multiplicar por Q=3)						
29	NSX03SY	Combination	0	0	0	0
30	NSX03SY	Combination	-0.00429	0.00017	-0.00189	-0.10835
31	NSX03SY	Combination	-0.01304	0.00053	-0.00264	-0.15109
32	NSX03SY	Combination	-0.02352	0.00099	-0.00292	-0.16742
33	NSX03SY	Combination	-0.04624	0.00204	-0.00320	-0.18346
430	NSX03SY	Combination	-0.05870	0.00265	-0.00356	-0.20374
455	NSX03SY	Combination	-0.07190	0.00331	-0.00362	-0.20741
480	NSX03SY	Combination	-0.08493	0.00398	-0.00351	-0.20105
505	NSX03SY	Combination	-0.09745	0.00464	-0.00336	-0.19228
530	NSX03SY	Combination	-0.10950	0.00531	-0.00330	-0.18885
555	NSX03SY	Combination	-0.12168	0.00600	-0.00345	-0.19738
580	NSX03SY	Combination	-0.13375	0.00671	-0.00324	-0.18564
605	NSX03SY	Combination	-0.14459	0.00739	-0.00281	-0.16089
630	NSX03SY	Combination	-0.14501	0.00150	-0.00304	-0.17441
34	NSX03SY	Combination	-0.15375	0.00800	-0.00233	-0.13350
35	NSX03SY	Combination	-0.16139	0.00854	-0.00201	-0.11534

Tabla 11.b. Distorsiones de entrepiso para cada nivel

Nivel	Nudo	Distorsión X [m]	Altura nivel [m]	Distorsión Y [m]	Altura nivel [m]	Distorsión max <b>0.012</b>
N1	30	0.00368	3.5	0.00014	3.5	0.012
N2	31	0.00750	7	0.00031	7	0.012
N3	32	0.00898	10.5	0.00039	10.5	0.012
N4	33	0.01947	14	0.00090	14	0.012
N5	430	0.01068	17.5	0.00052	17.5	0.012
N6	455	0.01131	21	0.00056	21	0.12
N7	480	0.01117	24.5	0.00057	24.5	0.012
N8	505	0.01073	28	0.00057	28	0.012
N9	530	0.01033	31.5	0.00057	31.5	0.012
N10	555	0.01044	35	0.00060	35	0.012
N11	580	0.01034	38.5	0.00061	38.5	0.012
N12	605	0.00929	42	0.00058	42	0.012
N13	630	0.00361	45.5	0.00505	45.5	0.012
N14	34	0.00749	49	0.00557	49	0.012
N15	35	0.00655	52.5	0.00046	52.5	0.012

	35	70	105	140	175
	34	69	104	139	174
	630	635	640	645	650
	605	610	615	620	625
	680	685	690	695	600
	655	660	665	670	675
	630	635	640	645	650
	605	610	615	620	625
	480	485	490	495	600
	455	460	465	470	475
	430	435	440	445	450
	33	68	103	138	173
	32	67	102	137	172
	31	66	101	136	171
□	30	35	100	35	170
	29	64	99	134	169

Figura 32. Elevación del marco considerado más desfavorable para diseño

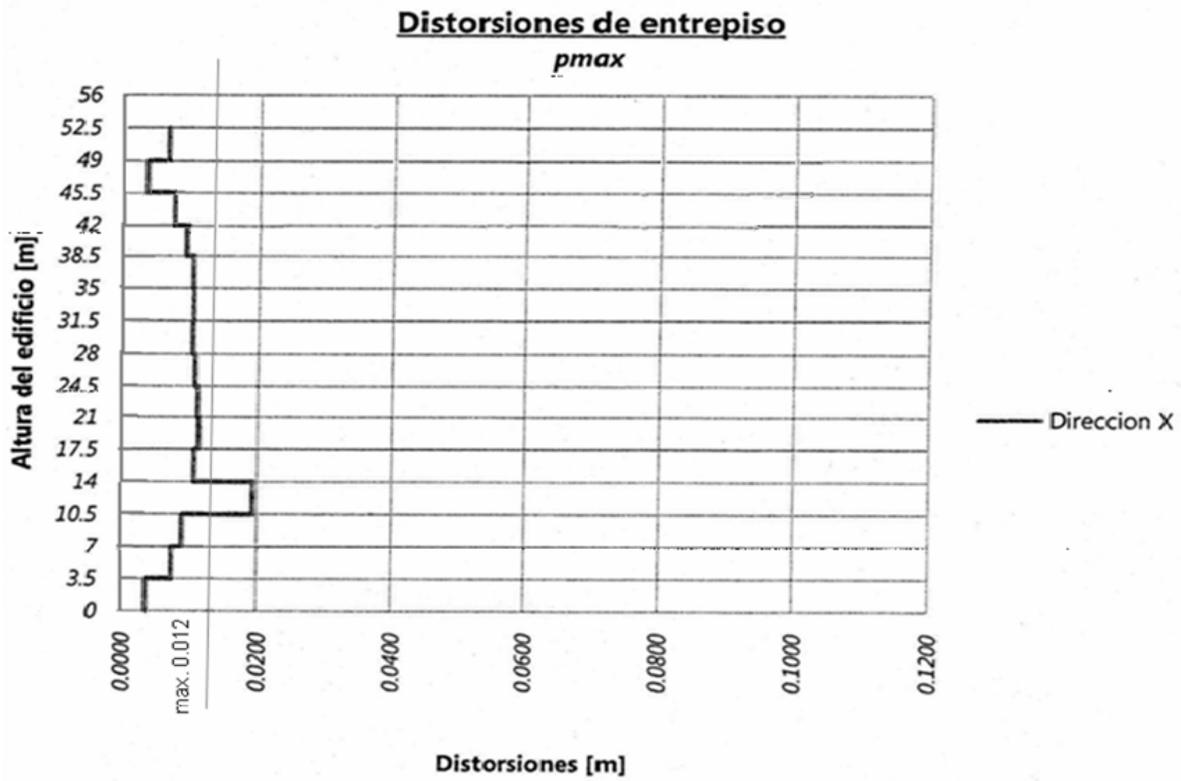


Figura 33. Presentación grafica de la distorsión de entresiso máxima para el caso del modelo de 15 niveles diseñado con cuantía máxima

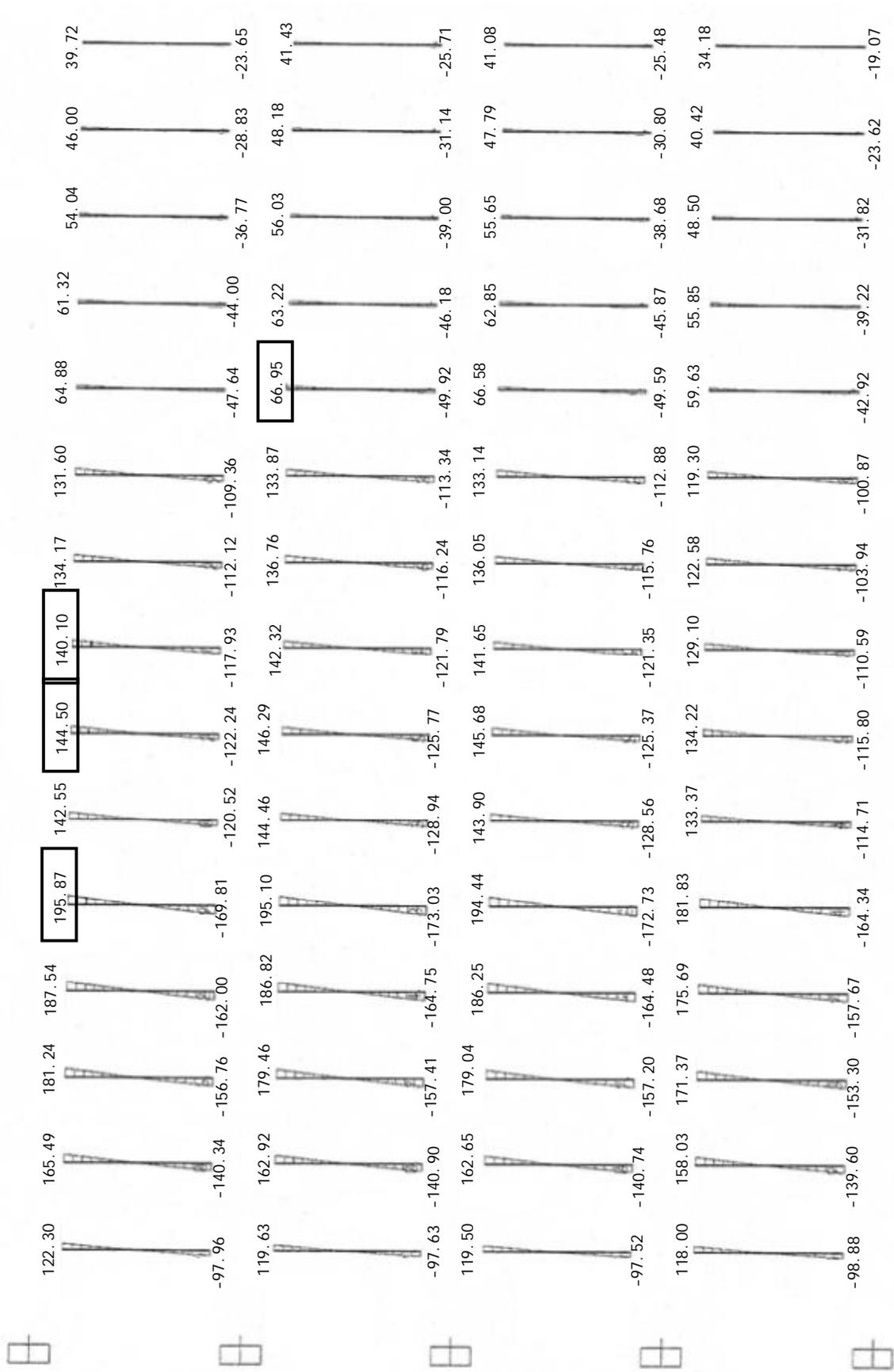


Figura 34. Diagrama de momentos para el diseño de las traveses en los niveles N1 – N5, N6 – N10 y N11 – NAZ, con la combinación de carga mas desfavorable para el análisis estructural (edificio de 15 niveles con cuantía maxima)

### Análisis y estudio de los parámetros de respuesta máxima para un edificio alto

Considerando que el diseño de estructuras de concreto reforzado esta definido básicamente por los límites de desplazamiento y la demanda de resistencia de los elementos estructurales, se puede establecer una relación entre los parámetros representativos; la demanda de distorsión de entrepiso de cada nivel y la cuantía de refuerzo longitudinal para resistencia a flexión de los elementos trabe.

Para el estudio de dichos parámetros el edificio se dividió en tres secciones: el nivel inferior (niveles 1 al 5), el nivel medio (niveles 6 al 10) y el nivel superior (niveles 11 al Nazotea), lo cual permitirá relacionar, en cada seccionamiento del edificio; la distorsión promedio ( $\bar{\delta}_M$ ) contra las cuantías mínima, máxima e intermedia, como se muestra en la tabla 12 y la figura 35.

Tabla 12. Distorsiones promedio  $\bar{\delta}_M$ , para cada seccionamiento del edificio de 15 niveles

Dimensiones de trabes (cm)			EDIFICIO DE 15 NIVELES					
			Cuantía		Distorsion promedio ( $\bar{\delta}_M$ )			
N1 a N5	N6 a N10	N11 a Nazotea					N1 a N5	N6 a N10
55x295	55x265	50x205	mínima	0.00264		0.0029	0.0028	0.0020
45x130	45x115	40x80	media	0.00891		0.0049	0.0060	0.0058
40x105	40x95	30x75	máxima	0.01518		0.0100	0.0108	0.0074

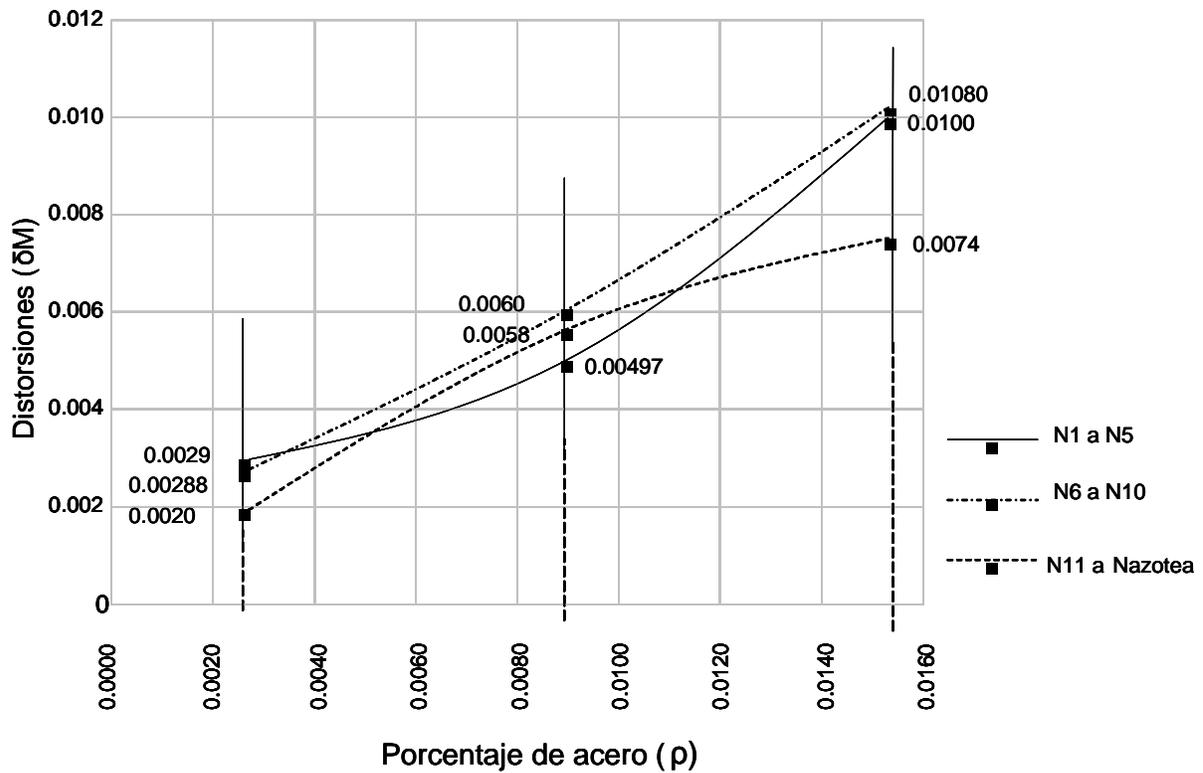


Figura. 35 Cuantía ( $\rho$ ) vs. Distorsiones ( $\delta_M$ ) para el edificio de 15 niveles

Por otro lado, la relación de cuantía de acero ( $\rho$ ) vs. Geometría de la sección, en función de la altura de entrepiso y el peralte de la sección ( $H/h$ ), se muestra en la tabla 13 y la figura 36.

Tabla 13. Cuantía ( $\rho$ ) vs.  $H/h$ , para edificio de 15 niveles.

Dimensiones de trabes (cm)			EDIFICIO DE 15 NIVELES				
			Cuantía		H/h		
N1 a N5	N6 a N10	N11 a Nazotea			N1 a N5	N6 a N10	N11 a Nazotea
55x295	55x265	50x205	mínima	0.00264	1.36	1.51	1.95
45x130	45x115	40x80	media	0.00891	2.69	3.04	4.38
40x105	40x95	30x75	máxima	0.01518	3.33	3.68	4.67

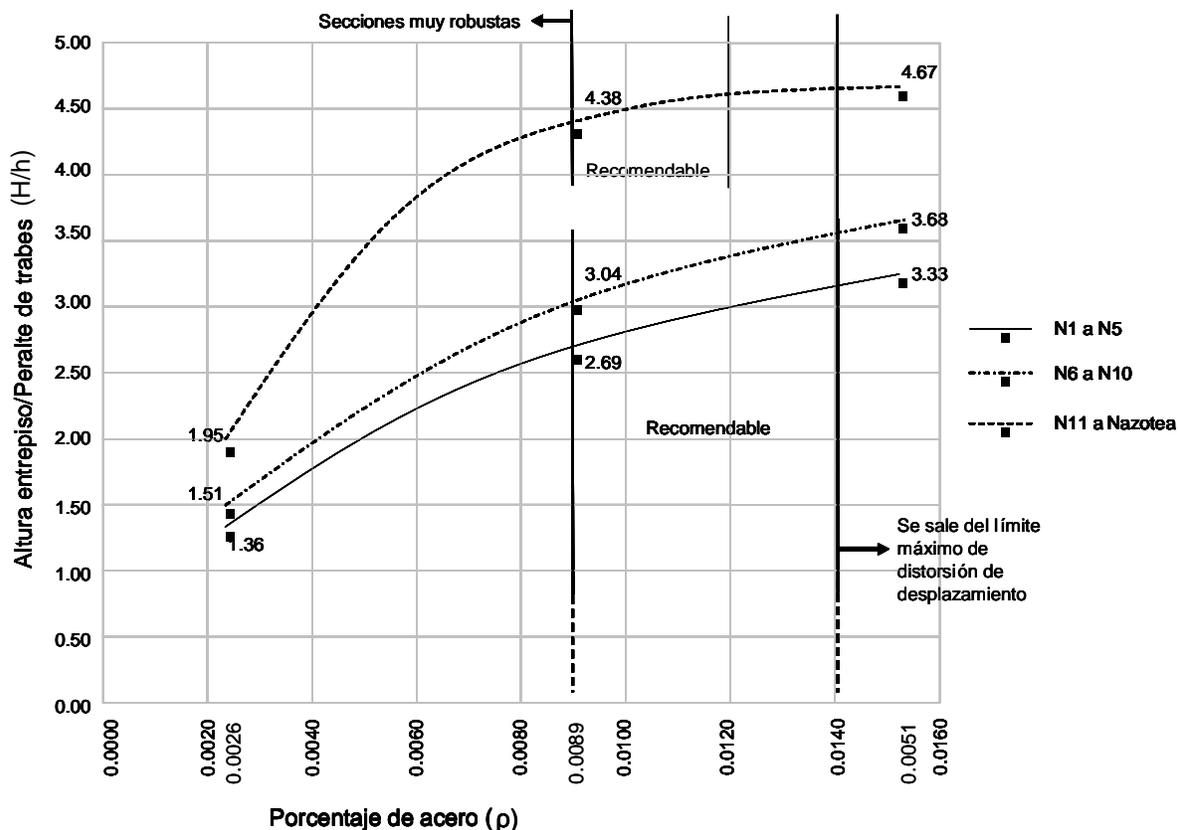


Figura 36. Cuantía ( $\rho$ ) vs. H/h, para edificio de 15 niveles

### Análisis de la relación entre cuantía de acero y la distorsión de entrepiso, para el edificio de 15 niveles

En el modelo representado por el edificio de 15 niveles, con el propósito de uniformizar las secciones de los elementos estructurales, se secciona en tres partes la altura del edificio; de los niveles N1 a N5, N6 a N10 y N11 a Nazotea, y se presenta el análisis y diseño de las traves para cuantías mínima, máxima e intermedio, según la propuesta del R.C.D.F. De los resultados analíticos se estableció una relación, para las traves, entre cuantía de acero (% de acero), y la distorsión de entrepiso representativa para cada seccionamiento del edificio, como se puede observar en la figura 35.

Con base en el análisis anterior se hacen las siguientes observaciones:

- Para cuantía mínima las secciones resultan muy grandes, en relación al tamaño del edificio, por lo que estética y económicamente no son construibles, y las

rotaciones son muy pequeñas así como las distorsiones de entrepiso, quedando muy por debajo del límite permitido por el R.C.D.F.

- A medida que aumenta la cuantía de acero, las secciones van siendo más regulares y esbeltas, siguiendo un comportamiento casi lineal, es decir, al aumentar la cuantía los nudos presentan mayor rotación y las distorsiones de entrepiso se incrementan en valor, como se observa en la figura 35. Este comportamiento continúa pasando por la cuantía media hasta llegar a la cuantía máxima de acero, mostrando que por rotaciones no se tiene problema. Sin embargo, las distorsiones de entrepiso están en el límite de lo permisible por el R.C.D.F., como se puede observar en la figura 33. Además, recordemos que el utilizar el área de acero máxima sugerida por el R.C.D.F. implica sobre estimar resistencia de diseño, cuando el acero entra en su post-fluencia, lo cual se analizó en la sección 4.1 de éste trabajo.

Con base en lo anterior se recomienda utilizar conservadoramente hasta el 90% del área de acero máxima propuesta por el R.C.D.F.

$$“\rho_{\max \text{ recom}}” = 0.90 \rho_{\max}$$

Este acotamiento en la práctica permitirá acercarse de una manera más rápida al diseño de traveses por flexión, en un edificio alto, estando dentro de un intervalo de seguridad. Sin embargo se recomienda hacer la revisión de diseño correspondiente.

### **Análisis de la relación entre la cuantía de acero y la geometría de la sección**

Para un edificio alto de 15 niveles se hizo el análisis y diseño de las traveses a flexión, con cuantías mínima, máxima e intermedia, según el R.C.D.F. También, con el objeto de unificar las secciones, la altura del edificio ( $H_T$ ) se seccionó en tres partes; N1 a N5, N6 a N10 y N11 a Nazotea. De los resultados analíticos se estableció una relación, para las traveses, entre cuantía de acero y la geometría de la sección, la cuál esta en función de  $H/h$ , donde ( $H$ ) es la altura del entrepiso y ( $h$ ) el peralte de la sección, como se muestra en la tabla 13 y la figura 36. En base al análisis anterior se observa lo siguiente:

- Para cuantía mínima, las relaciones  $H/h$  son pequeñas del orden de 1.5, como se muestra en la figura 36, la cuál se encuentra más abajo de la relación de donde

arrancan las curvas para la misma cuantía para un edificio bajo, cuya relación H/h es del orden de 2.5, ver figura 25.

- También, para cuantía mínima las secciones resultan extremadamente grandes, resultando inservibles.

- En los primeros dos tercios de la altura del edificio ( $2/3 H_T$ ) figura 36, se observa que a medida que aumenta la cuantía de acero, las secciones van siendo más regulares y esbeltas en una razón parabólica, dónde se puede notar que a partir de la cuantía media ( $\rho_{media}$ ) y hasta la cuantía máxima de acero ( $\rho_{max}$ ), la relación H/h es lo suficientemente grande para implicar una geometría de la sección, aceptable. Además, si se revisan los desplazamientos relativos o distorsiones de entrepiso que corresponden al intervalo de cuantía media y hasta la máxima, (ver tabla 12), se puede observar que se cumple con la normatividad en este rubro. Por lo que una cuantía recomendable para el diseño de trabes por flexión, en los dos primeros tercios de edificios altos ( $\rho_{recom. \text{ prim. } 2/3 \text{ edif. alto}}$ ), sería la que se encuentra dentro del rango siguiente:

$$\rho_{media} < (\rho_{recom. \text{ prim. } 2/3 \text{ edif. alto}}) < \rho_{max}$$

Lo que nos implica tener una relación de H/h entre 2.7 y 3.5.

- En el último tercio de la altura del edificio representada por la curva de la figura 36, se observa que la cuantía ya no es proporcional a la relación H/h, pues la curva se vuelve casi horizontal con  $H/h = 5$ , en otras palabras el incremento de cuantía, a partir del 75% de la máxima, ya no implica un mejoramiento de esbeltez en la sección.

Por lo que una cuantía recomendable para el diseño de trabes en el último tercio de edificios altos ( $\rho_{recom \text{ último tercio edif. alto}}$ ), sería la que se encuentre limitada por la cuantía media y hasta el 75% de la máxima, esto es:

$$\rho_{media} < (\rho_{recom. \text{ último tercio edif. alto}}) < 0.75 \rho_{max}$$

Lo que nos implica tener una relación de H/h entre 4.25 y 4.6

Las recomendaciones anteriores están basadas en análisis analíticos y de la práctica común. Por lo que están dentro de un margen de seguridad, sin embargo se recomienda hacer la revisión de diseño con las cuantías propuestas.

## Análisis de la demanda de ductilidades locales y globales de los edificios de 6 y 15 niveles

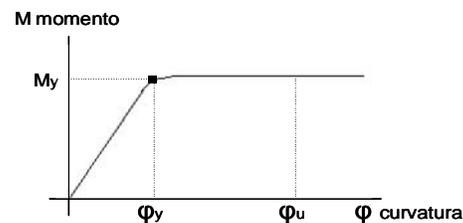
Después del análisis elástico y diseño de los edificios de 6 y 15 niveles, es posible establecer teóricamente los valores de las ductilidades y conocer la relación que guarda la ductilidad local ( $\mu\phi$  local) y global ( $\mu\Delta$  global) con la cuantía de acero máxima y mínima recomendables. Lo anterior será de mucha utilidad para conocer, el intervalo recomendable de cuantía, los cuales son los valores de demanda de ductilidad, desde luego respetando los límites permisibles de deformación.

A continuación se muestra el desarrollo analítico de la obtención de la ductilidad global y local, parámetros que resultan en función de las cuantías de acero.

### Ductilidad Local de Curvatura ( $\mu\phi_L$ )

La ductilidad local se refiere a la ductilidad de curvatura del elemento en la sección crítica en la vecindad de los nudos, en este trabajo es la ductilidad de curvatura en los extremos de las vigas, como se muestra a continuación:

$$\mu\phi_L = \phi_u / \phi_y \quad :$$



Donde:

$\phi_u = \epsilon_{cu} / C_u d$ , es la curvatura última o de falla

$\phi_y = \epsilon_y / d (1 - c)$ , es la curvatura en el límite elástico o de fluencia.

$c_u = \rho_t f_y / \beta_1 \beta_2 f'_c$ , Eje neutro para resistencia última.

$c = ((\eta \rho_t)^2 + 2\eta \rho_t)^{1/2} - \eta \rho_t$ , Eje neutro en el límite elástico o de servicio.

$\eta = E_s / E_c$ , relación entre los módulos de elasticidad del acero y del concreto

Se debe cuidar que  $f_s = f_y$ , ya que es la suposición en el límite elástico, para determinar C.

Si se sustituyen valores y se simplifican términos, se tiene la expresión para obtener la ductilidad local.

$$\mu_{\phi L} = \frac{\epsilon_{cu} f'_c \beta_1 \beta_2}{\epsilon_s f_y \rho_t} \left( 1 - [ ((\eta \rho_t)^2 + 2\eta \rho_t)^{1/2} - \eta \rho_t ] \right)$$

Con la expresion anterior se calcula la ductilidad local para las diferentes secciones y cuantías de los edificios que se analizan en éste trabajo, lo cuál se resume en la tabla 14 y la gráfica de la figura 37.

#### Ductilidad Global de Desplazamiento ( $\mu_{\Delta G}$ )

Tomando en cuenta que la ductilidad es la relación entre el valor de deformación asociado a la fluencia del acero de refuerzo (generalmente en tensión por flexión) y el valor de deformación asociado a la falla del elemento o resistencia última (generalmente asociado a la aparición del aplastamiento del concreto en compresión, por flexión), parámetro que matemáticamente se puede representar con la expresión:

$$\mu_{\Delta G} = \Delta u / \Delta y$$

Donde:

$\Delta u$ , es el desplazamiento total de la punta del edificio, al presentarse el aplastamiento del concreto en compresión por flexión en un porcentaje predeterminado de elementos estructurales se define como desplazamiento último o de falla.

$\Delta y$ , es el desplazamiento total en la punta del edificio, correspondiente al momento en el que se presenta la fluencia por flexión de los elementos estructurales, se conoce también como el límite de comportamiento elástico lineal.

Para la obtención de la ductilidad global de desplazamiento de la estructura ( $\mu_{\Delta G}$ ), existen expresiones confiables como la que se propone en el Curso de Concreto Reforzado impartido en la División de Posgrado de la Facultad de Ingeniería UNAM, (Ref. 1); la expresion que se presenta en el texto del Dr. Roberto Meli, (Ref. 2) o la expresion deducida bajo el criterio de iguales energías utilizada en la tesis del M.I. Percy Alejandro Huerta A. (Ref. 3).

Por la facilidad del método y la aproximación adecuada de resultados, para éste trabajo se ocupó la expresion que propone Roberto Meli y Enrique Bazan en su libro "Diseño Sísmico de Edificios" (Ref. 2, pp. 167-168). El método permite hacer un cálculo rápido ya que, de manera burda pero representativa, el edificio se puede representar como una viga en cantiliver (Apéndice 3), y entonces aplicar la siguiente expresion:

$$\mu\Delta = 1 + 2 (h_v / l_v) (\mu\phi - 1)$$

donde para los edificios que se estudian.

$\mu\Delta = \mu\Delta_G$ , es la ductilidad global de desplazamiento

$\mu\phi = \mu\phi_L$ , es la ductilidad local de curvatura. (Tabla 14)

$h_v$ , es la longitud del edificio

$l_v$ , es la altura del edificio.

Cálculo de la ductibilidad global para las cuantías mínima, máxima e intermedia para los edificios de 6 y 15 niveles.

Edificio de 6 Niveles, donde  $h_v = 8$  m. y  $l_v = 21$  m.

$$\mu\Delta_G (\rho_{\min}) = 1 + 2 (8/21) (19.42 - 1) = 15$$

$$\mu\Delta_G (\rho_{\text{med}}) = 3.857$$

$$\mu\Delta_G (\rho_{\max}) = 2.124$$

Edificio de 15 Niveles, donde  $h_v = 8$  m. y  $l_v = 52.5$  m.

$$\mu\Delta_G (\rho_{\min}) = 1 + 2 (8/52.5) (19.42 - 1) = 6.6$$

$$\mu\Delta_G (\rho_{\text{med}}) = 2.14$$

$$\mu\Delta_G (\rho_{\max}) = 1.45$$

El resumen de la ductilidad global para las cuantías límite de los edificios de 6 y 15, se muestra en la tabla 14.

Tabla 14. Ductilidad local y global para los edificios de 6 y 15 niveles

EDIFICIO 15 NIVELES			CUANTÍAS DE ACERO		DUCTILIDAD $\mu$			EDIFICIO 6 NIVELES	
SECCIONES TRABES (cm)			EDIFICIO 6 Y 15 NIVELES		LOCAL $\mu\phi_L$ EDIFICIO 6 Y 15 NIVELES	GLOBAL $\mu\Delta_G$ EDIFICIO		SECCIONES TRABES (cm)	
N1 a N5	N6 a N10	N11 a Nazotea			6 NIVELES	15 NIVELES	N1 a N3	N4 a Nazotea	
55x295	55x265	50x205	mínima	0.00264	19.42	15	6.6	50x145	45x125
45x130	45x115	40x80	media	0.0089	4.76	3.85	2.14	35x80	30x65
40x105	40x95	30x75	máxima	0.01518	2.48	2.12	1.45	30x60	25x50

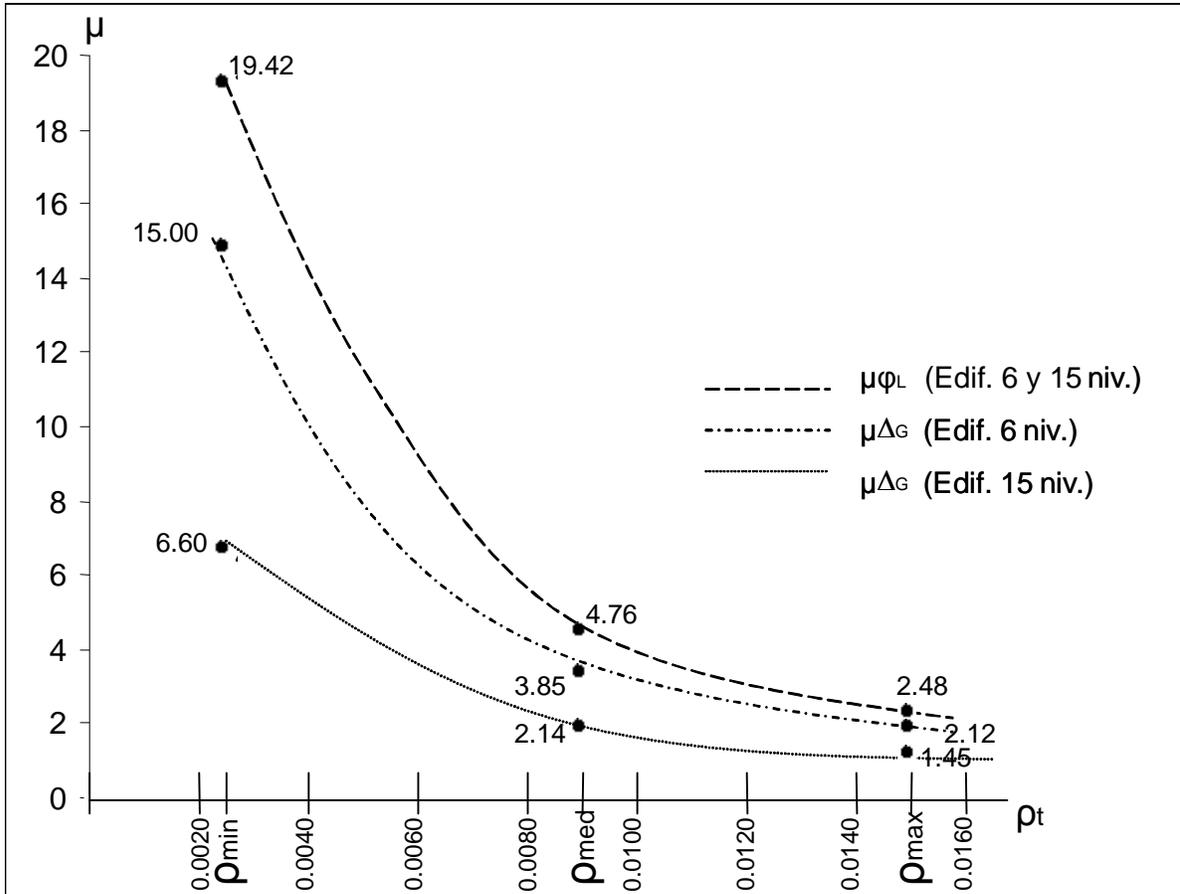


Figura 37. Relación de cuantía ( $\rho_t$ ) vs. Ductilidad de curvatura de sección transversal

Se puede observar, en la figura 37, que la relación entre cuantía y ductilidad es de manera exponencial, donde a menor cuantía mayor es la demanda de ductilidad, siendo más notable en el intervalo de cuantía media y cuantía mínima. Es importante señalar que a menor cuantía de acero mayor es la demanda de ductilidad global de desplazamiento, además es evidente que la cuantía local demandada es, en mucho, mayor que la cuantía global de desplazamiento para la misma cuantía de acero.

Por otro lado, si relacionamos cuantía ( $\rho_t$ ) con ductilidad ( $\mu$ ), se podrá observar un rango de ductilidad que implica estar dentro de los límites permisibles de deformación lateral y distorsión de entrepiso, lo que a su vez podrá relacionarse con la altura del entrepiso y la geometría de la sección ( $H/h$ ), (figuras 24, 25, 35 y 36).

En otras palabras, se pueden acotar las ductilidades local ( $\mu\phi_L$ ) y global ( $\mu\Delta_G$ ) en función de las cuantías límite propuestas en este trabajo, para un factor de comportamiento sísmico  $Q=3$ , (tabla 14).

Por lo que, para el diseño de trabes a flexión de edificios bajos y altos como los modelos analizados en este trabajo, se puede recomendar el siguiente intervalo de ductilidad de curvatura local en función de las cuantías de acero.

$$4.76 > \mu\phi_{Lrec.} > 2.81$$

para el siguiente intervalo de cuantías

$$(\rho_{med.} = 0.0089) < \rho_{recom.} < (\rho_{max} = 0.01518)$$

## **6. CONSIDERACIONES GENERALES Y PROPUESTA DE MODIFICACIÓN A LOS CRITERIOS DE DISEÑO EN LA REGLAMENTACIÓN ACTUAL PARA LOS LÍMITES MÁXIMO Y MÍNIMO DE CUANTÍA**

En el presente trabajo se hicieron las siguientes consideraciones generales, las cuáles fueron para simplificar los cálculos y por considerar que no influyen determinantemente en los resultados de la investigación.

- Los modelos estructurales fueron analizados sólo para estudiar el comportamiento de las trabes, bajo la sollicitación de flexión, por lo que los demás elementos como columnas, losas y cimentación, fueron considerados sólo con una aproximación de diseño.
- La cimentación es rígida y empotrada, no se consideró la interacción suelo-estructura.
- Las losas de entrepiso se aceptan de un espesor igual a 14 cm.
- Las columnas para el edificio de 6 niveles son de 80x80 cm. y las del edificio de 15 niveles son de 120x120 cm., ambas en toda la altura.
- Las distorsiones ( $\delta$ ) se promediaron para cada sección en la que fue dividida la altura del edificio.
- También, para el diseño de las trabes se tomó el momento máximo en los nudos de la parte seccionada, correspondiente a la altura del edificio. La altura del edificio de 6 niveles fue seccionada en dos partes de N1 a N3 y de N4 a Nazotea; y la del edificio de 15 niveles en tres partes de N1a N5, N6 a N10 y de N11 a Nazotea. Por lo que los momentos (M), en el presente trabajo, se tomaron del máximo correspondiente a cada seccionamiento.
- El programa de análisis estructural SAP2000, se utilizó como herramienta de cálculo para obtener los elementos mecánicos, la deformación lateral y las rotaciones en los extremos de las vigas.
- Para todo el análisis y diseño de los modelos en estudio, se tomó como base el R.C.D.F. y sus N.T.C. 2004.

La propuesta de modificación a los criterios de diseño en la reglamentación actual, se hace con el fin de que las cuantías de acero máxima y mínima sean utilizadas, en la

práctica, razonablemente para el diseño de elementos de concreto reforzado, por lo que debe afinarse el uso de la misma. Lo cuál se pretende hacer en este trabajo. Con base a lo anterior, se presentarán las siguientes propuestas de cuantías de acero, para el diseño de vigas de concreto reforzado, sometidas a flexión. Las cuantías límite propuestas consideran el criterio de diseño de resistencia última, además la post-fluencia del acero (cap. 4), la ductilidad, distorsión de entrepiso y geometría adecuada de la sección (cap. 5).

**Las cuantías mínima y máxima propuestas son las siguientes:**

Tabla 15. Cuantías de acero máxima y mínima propuestas

Cuantía Recomendable “ρ”	Considera: Post-fluencia del acero	Considera: Post-fluencia del acero, distorsión, geometría y ductilidad.		
		Edificio Alto (15 Niveles)		Edificio Bajo (6 Niveles)
		Primeros 2/3 altura	Ultimo 1/3 altura	
“Min”	$\beta_1 \beta_2 f_c / ((\epsilon_s / 0.003) + 1) f_y$ *	$\rho_{med}$	$\rho_{med}$	$\rho_{med}$
“Max”	$0.95 \rho_{max}$ **	$\rho_{max}$	$0.75 \rho_{max}$	$0.95 \rho_{max}$

donde

$$\rho_{med} = (\rho_{min} + \rho_{max}) / 2$$

$\rho_{min}$ , cuantía mínima por el R.C.D.F.

$\rho_{max}$ , cuantía máxima por el R.C.D.F.

$\beta_1$ , parámetro que afecta profundidad al eje neutro ( $\beta_1 c$ ),  $\beta_1 = 0.85$

$\beta_2$ , parámetro que afecta al esfuerzo de compresión del concreto ( $\beta_2 f_c$ ),  $\beta_1 = 0.85$

$f_y$ , esfuerzo de fluencia del acero = 4200 kg/cm<sup>2</sup>

$\epsilon_s$ , deformación unitaria del acero al límite de fluencia, igual a 0.01.

\* inciso 4.2 Pp. 62

\*\* inciso 4.1 Pp. 47

Las anteriores modificaciones al criterio reglamentario, respecto a cuantías máxima y mínima de acero de refuerzo, están obtenidas de cálculos analíticos y basadas en las hipótesis que se plantean en este mismo trabajo, por lo que en lo general, las recomendaciones propuestas están bajo un margen de seguridad estructural, sin embargo se recomienda hacer la revisión de diseño correspondiente.

## 7. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Con base al trabajo desarrollado para edificios regulares, considerados bajos de hasta 21 m. de altura y altos de hasta 53 m., con un factor de comportamiento sísmico  $Q=3$  y, bajo el planteamiento de las hipótesis, la mecánica estructural y las consideraciones generales, se confirma que es correcto proponer la modificación al criterio de diseño para vigas de concreto reforzado, sujetas a flexión, del R.C.D.F. en torno a las siguientes conclusiones.

- Para considerar a un elemento viga de concreto reforzado, como resistente a flexión, deberá tomarse como área de acero mínima la media geométrica entre el área mínima y máxima que plantea el R.C.D.F., esto es:

$$"A_{smin \text{ rec.}}" = b d [(0.67 (f'c)^{1/2}) / f_y + 0.75 \rho_b] / 2$$

- El área de acero mínima recomendable por el R.C.D.F.

$$A_{smin \text{ R.C.D.F.}} = b d (0.67 (f'c)^{1/2}) / f_y ,$$

se propone usarla sólo para elementos estructurales cuya principal función sea la de soportar carga axial, o en su caso para tomar el esfuerzo por agrietamiento. El no atender esta recomendación implicaría poner en riesgo la seguridad estructural.

- También se debe tener especial cuidado en el diseño de trabes por flexión, con  $Q=3$  y cuantía mínima de acero, recomendadas por el R.C.D.F., ya que esto demandaría grandes ductilidades en el elemento. Por lo que para utilizar un  $Q=3$  en el diseño de vigas por flexión con un área de acero mínima, ésta deberá ser la que se recomienda en este trabajo " $\rho_{min \text{ rec.}}$ ", además de revisar el confinamiento del concreto en los nudos.

- Para edificios bajos y en los dos primeros tercios de edificios altos, se recomienda una área de acero máxima igual a:

$$"A_{smax \text{ rec.}}" = \underline{0.90} (0.75 \rho_b) b d$$

- Para el último tercio de edificios altos (último  $1/3 H_T$ ), se recomienda utilizar un área de acero máxima igual a:

$$"A_{smax \text{ rec. } 1/3 H_T}" = \underline{0.75} (0.75 \rho_b) b d$$

- A pesar de los trabajos analíticos desarrollados en esta tesis, que implican estar en un rango de seguridad, se recomienda hacer la revisión de diseño con la mecánica de materiales y las hipótesis planteadas en este trabajo, para elementos de concreto reforzado.

## REFERENCIAS

1. Oscar A. López Batiz. "Apuntes del Curso de Concreto Reforzado", División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, 2006.
2. Enrique Bazán y Roberto Meli, "Diseño Sísmico de Edificios", Editorial Limusa, Comportamiento de Sistemas Estructurales, 2004, pp.165-171.
3. Percy Alejandro Huerta Aguilera, "Revisión de los Métodos para Determinar los Desplazamientos Laterales de Estructuras de Concreto Reforzado ante Diferentes Condiciones de Desempeño", Cap. 2, 2005.
4. CENAPRED "Curso sobre Diseño y Construcción Sismorresistente de Estructuras", Comportamiento y Diseño de Estructuras de Concreto Reforzado, 1999, pp. 177-185.
5. Arthur H. Nilson, "Diseño de Estructuras de Concreto", Mc Graw Hill, 1999, pp 62-84.
6. "El Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal" y sus "Normas Técnicas Complementarias", México. 2005.
7. Roberto Meli Piralla, "Diseño Estructural", Edit. Limusa, 2004, Criterios de Diseño y métodos de análisis sísmico.
8. Hubert Rüsçh, from de work of Comité Europeen du Beton, Journal of the American Concrete Institute, "Research Toward a General Flexural Theory for Structural Concret". By Iqbal Alí, Eivind Hognestad, Ladislav B. Kriz, R. C. Smith. V.32, Disc. 57-1, Julio 1960.

9. Alan H. Mattock, Ladislau B. Kriz, y Eivind Hognestad, "Rectangular Concrete Strees Distribution in Ultimate Strength Design", Title No. 57-43, Part 1 –Review of Basic Assumptions, Part 2 –Design Equations, Febrero 1961, pp 875-885.
10. Park R. y Dai Ruitong, "Ductility of Doubly Reinforced Concrete Bean Sections", ACI Structural Journal Technical Paper, Title No. 85 - S24, Marzo– Abril 1988, pp 217-225.
11. Mander J.B. , Priestley M.J.N. y Park R., "Theoretical Stress-Strain Model for Confined Concrete." ASCE, Journal of Structural Division, Journal of Structural Engineering, Vol. 114, No. 8, Agosto 1988.
12. Sheikh S. A. y Yeh C-C. "Tied Concrete Columns Under Axial Load and Flexure", ASCE Journal of Structural Engineering, Vol. 116, No. 10, Octubre 1990.
13. Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318-89), 1989. pp. 318/318R-160.
14. Comité Euro-International Du Beton, CEB-FIP Model Code for concrete structures 1990, (Final draft). Bulletin d` Information No. 203. Julio 1991.
15. Park R., "Ductility of Square-Confined Concrete Columns", Journal of Structural Division, ASCE, Vol. 108. No. ST4, Abril, 1982, pp. 929-950.
16. Park R. y Paulay T., "Reinforced Concrete Structures", John Wiley and Sons, Inc., 1975, pp. 319-332.
17. E.G. Pfrang, c.p. Siess, y M.A. Sozen, "Load–Moment–Curvature characteristics of Reinforced concrete cross sections", Journal of the American concrete institud, titulo num. 61-44. Julio 1964.
18. Architecture Institute of japan: Dising Guidelines for Earthquake Resistance Reinforced concrete Buildings Based on the ultimate strength concept (draft), Octubre 1988.

## APÉNDICE 1

### CONCEPTOS BASICOS DEL ANALISIS DE FLEXION EN ELEMENTOS DE CONCRETO REFORZADO

Del estado de esfuerzos en la sección transversal de un elemento de concreto reforzado sujeto a una demanda predominante de flexión, se puede obtener la distribución simplificada de esfuerzos indicada en la figura A.1.

Como se puede observar en la obtención de la fuerza de compresión resultante  $C$  y su punto de aplicación, intervienen tres conceptos importantes 1.- la integración propia del volumen del bloque de esfuerzos, para obtener la fuerza resultante de compresión  $C$ . 2.- la altura  $c$  del bloque de esfuerzos ó profundidad del eje neutral y 3.- el esfuerzo de compresión del concreto  $f'_c$ . Así también se debe precisar que para que el bloque de esfuerzos rectangular sea equivalente a la distribución real de esfuerzos, se deben cumplir dos condiciones que relacionen los tres conceptos antes mencionados; primero que la fuerza de compresión resultante  $C$ , considerando la distribución real de esfuerzos, sea igual a la resultante obtenida con el bloque equivalente y, segundo que la posición de aplicación de dicha resultante sea la misma. Entonces a partir de estas definiciones paramétricas, resulta sencillo el cálculo del momento resistente último para elementos de concreto reforzado.

Así,  $k_1$  es el parámetro que correlaciona la integración propia del volumen del bloque de esfuerzos, que sirva para obtener la fuerza resultante de compresión  $C$ , y que además sea equivalente a la del bloque rectangular simplificado. En cuanto al punto de aplicación de la fuerza resultante  $C$ , el parámetro  $k_2$  es el que ajusta la profundidad al eje neutral y, finalmente  $k_3$  es el parámetro que permite ajustar el esfuerzo de compresión del concreto, considerado en la aplicación del método del bloque rectangular equivalente. Al respecto el código del A.C.I. de 1956 indica que el esfuerzo de compresión no debe exceder de  $0.85 f'_c$ . Además de la utilización de los parámetros que ayudan a hacer el modelo equivalente, se puede notar en la fig. A.1 que el centroide siempre estará a una profundidad  $a/2$ , igual a la mitad de la altura del bloque de esfuerzos equivalente, siendo  $a = k_{r1} \cdot c$ , con estos datos se puede obtener geoméricamente una relación entre la distribución de esfuerzos real y equivalente, y con la ayuda de datos experimentales se pueden asignar los valores de los parámetros que intervienen en el modelo rectangular equivalente.

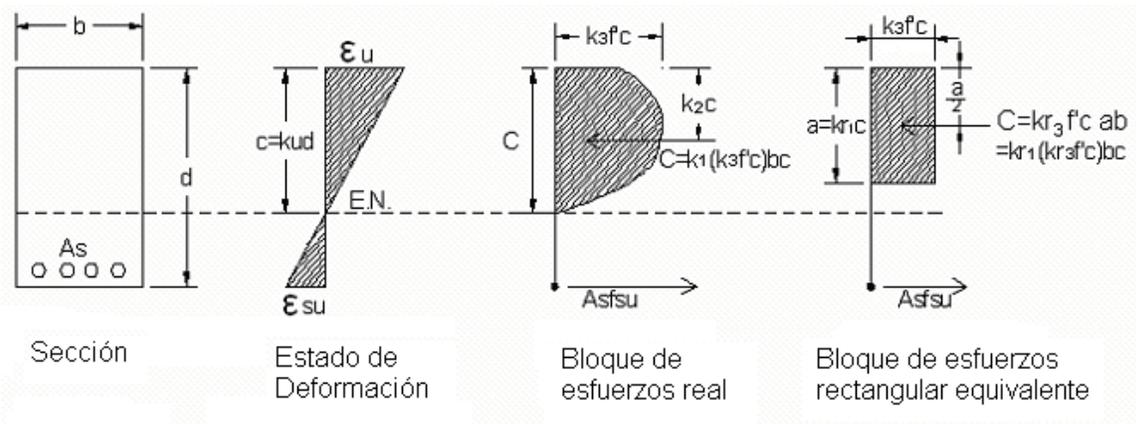


Figura A.1 Distribución real y rectangular equivalente de esfuerzos para resistencia última

De la figura A.1 se puede llegar a establecer la relación entre los parámetros que definen la distribución real y equivalente de esfuerzos, como se indica:

Del bloque de esfuerzo real se tiene

$$C = k_1 (k_3 \cdot f_c \cdot bc) \text{ ----- (1)}$$

Del bloque de esfuerzos equivalente

$$C = k_r k_1 (k_r f_c ab) \text{ ----- (2)}$$

Igualando 1 con 2 y despejando  $k_r$

$$k_r = \frac{k_1 k_3}{k_r k_1} \text{ ----- (3)}$$

Del bloque equivalente y el bloque real, se despeja  $k_r$

$$\frac{k_r k_1 \cdot c = k_2 \cdot c}{2} \text{ ----- (4)}$$

Sustituyendo 4 en 3

$$k_r = \frac{k_1 \cdot k_3}{2 k_2}$$

Y entonces se tiene la relación entre los parámetros del bloque de esfuerzos real y el equivalente.

Resulta claro que se acepta una distribución lineal de deformaciones para ambas condiciones, la distribución real y la simplificada, ya que para los dos modelos se considera aplicable el principio de Bernoulli, el cual establece la compatibilidad lineal de deformaciones a lo largo de la sección transversal y entre los materiales componentes.

## APÉNDICE 2

### PROGRAMA PARA P.C. EN LENGUAJE “VISUAL BASIC”, PARA EL CÁLCULO DE LA RELACION MOMENTO-CURVATURA EN VIGAS DE COMPORTAMIENTO LINEAL ANTE LA DEMANDA DE FLEXION HASTA SU FALLA, PARA CUANTIAS LÍMITE DE ACERO.

#### Cálculo con Área de acero Máxima

```
Public ycr As Single
Public ycr1 As Single
Public y45 As Single
Public y70 As Single
Public y As Single
Public yE0 As Single
Public yEcu As Single
Public yEsh As Single
Public ycup As Single
Public lcr As Single
Public lcr1 As Single
Public l45 As Single
Public l70 As Single
Public ly As Single
Public lE0 As Single
Public lEcu As Single
Public lEsh As Single
Public lcup As Single
Public mcr As Single
Public mcr1 As Single
Public m45 As Single
Public m70 As Single
Public my As Single
Public mE0 As Single
Public mEcu As Single
Public mEsh As Single
Public mcup As Single
Public qcr As Single
Public qcr1 As Single
Public q45 As Single
Public q70 As Single
Public qy As Single
Public qE0 As Single
Public qEcu As Single
Public qEsh As Single
Public qcup As Single
Public yt3 As Double
Public yt4 As Double
Public yt5 As Double
Public yt6 As Double
Public yt7 As Double
Public C As Double
Public fct As Double
Public fc As Double
Public fs As Double
Public Ect As Double
Public Es As Double
Public Es4 As Double
Public Es5 As Double
Public Es6 As Double
Public Es7 As Double
Public Ecmx As Double
Public Ecmx5 As Double
Public Ecmx6 As Double
Public Ecmx7 As Double
Public Ecup As Double
Public aux As Double
Public aux1 As Double
Public aux2 As Double
Public y1 As Double
Public y2 As Double

Public C1 As Double
Public C2 As Double
Public yc As Double
Public Ey As Double
Public E0 As Double
Public ad As Double
Public T As Double
Public Ecu As Double
Public l As Double
Public x As Double
Public Esh As Double
Public Eshu As Double
Public fsp As Double

Private Sub CmdSalir_Click()
    End
End Sub

Private Sub CmdCalcular2_Click()
    aux = 0
    yt = 0
    l = 0
    M = 0
    C = 0
    f = 0
    Q = 0
    fs = 0
    Ect = 0
    yc = 0
    Asm = 0
    h = 0
    b = 0
    T = 0
    E0 = 0
    ad = 1
    FrmDatos.Show
    FrmResultados.Hide
    FrmDatos.Text1 = ""
    FrmDatos.Text2 = ""
    FrmDatos.Text3 = ""
    FrmDatos.Refresh
    FrmResultados.Refresh
End Sub

Private Sub Form_Load()
    'Asignación de valores
    Asm = FrmDatos.Text1.Text
    h = FrmDatos.Text2.Text
    b = FrmDatos.Text3.Text
    d = h - 5
    Es = 2100000
    Ec = 210000
    fy = 4200
    fc = 280
    n = Es / Ec
    'Cálculo de Caso 1
    ycr = ((h / 2) * (h * b) + d * ((n - 1) * Asm)) / ((h * b) + ((n - 1) * Asm))
    ycr = Round(ycr, 2)
    yc = h - ycr
    Text1.Text = ycr
```

```

lcr = ((b * (h ^ 3)) / 12) + ((b * h) * (((h / 2) - ycr) ^ 2)) +
((n - 1) * Asm * ((d - ycr) ^ 2))
lcr = Round(lcr, 2)
fct = 2 * (Sqr(fc))
fct = Round(fct, 2)
C = h - ycr
C = Round(C, 2)
Mcr = (fct * lcr) / C
Mcr = Mcr / 1000
Mcr = Round(Mcr, 3)
Text10.Text = Mcr
Ect = fct / Ec
Qcr = Ect / yc
Qcr = Round(Qcr, 7)
Text19.Text = Qcr
'Cálculo de Caso 1'
aux = ((Asm * n) ^ 2) - ((4 * (b / 2)) * (-1 * (Asm * n *
d)))
aux = Round(aux, 2)
ycrt = (((-Asm * n) + Sqr(aux)) / (2 * (b / 2)))
ycrt = Round(ycrt, 2)
Text2.Text = ycrt
lcr = ((b * (ycrt ^ 3)) / 12) + ((b * ycrt) * ((ycrt / 2) ^ 2))
+ ((n * Asm) * ((ycrt - d) ^ 2))
lcr = Round(lcr, 2)
Mcr = Mcr * 1000
Text11.Text = Mcr
Qcrt = Mcr / (Ec * lcr)
Qcrt = Round(Qcrt, 7)
Text20.Text = Qcrt
'Cálculo de Caso 2'
y45 = ycrt
Text3.Text = y45
l45 = lcr
f = fc * 0.45
f = Round(f, 2)
E = f / Ec
E = Round(E, 5)
Q45 = E / y45
Q45 = Round(Q45, 7)
Text21.Text = Q45
M45 = Q45 * Ec * l45
M45 = M45 / 1000
M45 = Round(M45, 3)
Text12.Text = M45
'Cálculo de Caso 3'
y70 = y45
Text4.Text = y70
l70 = l45
f = 0.7 * fc
f = Round(f, 2)
E = f / Ec
E = Round(E, 5)
Q70 = E / y70
Q70 = Round(Q70, 7)
Text22.Text = Q70
M70 = Q70 * Ec * l70
M70 = M70 / 1000
M70 = Round(M70, 3)
Text13.Text = M70
'Cálculo de Caso 3'
T = Asm * fy
Ey = fy / Es
Ey = Round(Ey, 5)
E0 = (2 * fc) / Ec
E0 = Round(E0, 5)
ad = 0
aux = 0
Do While aux <= T
x = d - ad
If x < 0 Then

```

```

MsgBox "Error de datos, Desbordamiento"
End
Else
ad = ad + 0.01
aux = (b * fc) * (ad / (d - ad)) * ad * ((Ey / E0) - (((Ey /
E0) ^ 2) / 3) * (ad / (d - ad))))
End If
Loop
y = ad
y = Round(y, 2)
Text5.Text = y
Ecmax = Ey * (ad / (d - ad))
Ecmax = Round(Ecmax, 5)
If Ecmax <= E0 Then
Qy = Ecmax / ad
Qy = Round(Qy, 7)
Text23.Text = Qy
aux = Ecmax / E0
aux1 = ((2 / 3) * aux * (y ^ 2)) - (((1 / 4) * (aux ^ 2) * (y ^
2)))
aux2 = (aux * y) - ((1 / 3) * (aux ^ 2) * y)
yt3 = aux1 / aux2
yt3 = Round(yt3, 2)
My = (d - ad + yt3) * T
My = My / 1000
My = Round(My, 2)
Text14.Text = My
Else
MsgBox "Error', Revisar cantidad de acero As"
End
End If
'Cálculo de Caso 4'
ad = (3 * T) / (2 * fc * b)
ad = Round(ad, 2)
yE0 = ad
Text6.Text = yE0
Es4 = E0 * ((d - yE0) / yE0)
Esh = 0.01
If (Es4 <= Esh) Then
QE0 = E0 / yE0
QE0 = Round(QE0, 7)
Text24.Text = QE0
yt4 = (2 / 3) * yE0
yt4 = Round(yt4, 2)
ME0 = T * (d - yE0 + yt4)
ME0 = ME0 / 1000
ME0 = Round(ME0, 3)
Text15.Text = ME0
Else
MsgBox "El acero propuesto está en post-fluencia,
Aumentar acero As ó 'Calcular como viga con Asmin"
End
End If
'Cálculo de Caso 5'
Ecu = Round(Es4, 4)
'E0 = 0.0026
ad = T / (((2 / 3) * (E0 / Ecu) * b * fc) + (1 - (E0 / Ecu)) * b *
((fc + (0.95 * fc)) / 2))
ad = Round(ad, 2)
yEcu = ad
Text7.Text = yEcu
Es = Ecu * ((d - yEcu) / yEcu)
Esh = 0.01
If Es < Esh Then
QEcu = Ecu / yEcu
QEcu = Round(QEcu, 7)
Text25.Text = QEcu
l = (E0 / Ecu) * yEcu
x = yEcu * (1 - (E0 / Ecu))
C1 = yEcu * (1 - (E0 / Ecu)) * b * ((fc + (0.95 * fc)) / 2)
C2 = ((2 / 3) * (E0 / Ecu) * b * fc) * yEcu

```

```

y1 = l + (x / 2)
y2 = (2 / 3) * l
yt5 = ((C1 * y1) + (C2 * y2)) / T
yt5 = Round(yt5, 2)
MEcu = T * (d - yEcu + yt5)
MEcu = MEcu / 1000
MEcu = Round(MEcu, 3)
Text16.Text = MEcu
Else
MsgBox "El acero está en post-fluencia, aumentar
propuesta de acero As ó 'Calcular como viga con Asmin'"
End
End If
Cálculo de Caso 6
Esh = 0.01
T = fy * Asm
ad = 0
aux = 0
While (aux <= T)
ad = ad + 0.01
aux = (((2 * fc) - (fc * (0.15 * ((Esh * (ad / (d - ad)) -
E0) / (Ecu - E0)))))) / 2 * b * ((1 - (E0 / (Esh * (ad / (d -
ad)))) * ad) + ((2 / 3) * fc * b * ad * (E0 / (Esh * (ad / (d -
ad))))))
Wend
yEsh = ad
yEsh = Round(yEsh, 2)
Text8.Text = yEsh
Ecmx6 = Esh * (yEsh / (d - yEsh))
Ecmx6 = Round(Ecmx6, 5)
QEsh = Ecmx6 / yEsh
QEsh = Round(QEsh, 7)
Text26.Text = QEsh
l = (E0 / Ecmx6) * yEsh
x = yEsh * (1 - (E0 / Ecmx6))
C1 = (((2 * fc) - (fc * (0.15 * ((Esh * (ad / (d - ad)) - E0)
/ (Ecu - E0)))))) / 2 * b * ((1 - (E0 / (Esh * (ad / (d - ad))))))
* yEsh
C2 = (2 / 3) * fc * (b * (E0 / (Esh * (ad / (d - ad)))) *
yEsh)
y1 = l + (x / 2)
y2 = (2 / 3) * l
yt6 = ((C1 * y1) + (C2 * y2)) / T

```

```

MEsh = T * (d - yEsh + yt6)
MEsh = MEsh / 1000
MEsh = Round(MEsh, 3)
Text17.Text = MEsh
Cálculo de Caso 7
Ecmx7 = 0.01
Ecup = 0.01
ad = 0
C = 0
T = 0.01
Do While C <= T
ad = ad + 0.01
C = (((fc * (1 - (0.15 * ((Ecmx7 - E0) / (Ecu - E0)))) + fc)
/ 2) * b * (1 - (E0 / Ecup)) * ad) + ((2 / 3) * fc * (b * (E0 / Ecup)
* ad))
T = (((Ecmx7 * ((d - ad) / ad)) - Ecup) / (Ecup -
(((Ecmx7 * ((d - ad) / ad)))) * 2000) + fy) * Asm
C = Round(C, 0)
T = Round(T, 0)
Loop
ycup = ad
Text9.Text = ycup
Qcup = Ecup / ycup
Qcup = Round(Qcup, 7)
Text27.Text = Qcup
C1 = (((fc * (1 - (0.15 * ((Ecmx7 - E0) / (Ecu - E0)))) + fc) /
2) * b * (1 - (E0 / Ecup)) * ad)
C2 = ((2 / 3) * fc * (b * (E0 / Ecup)) * ad)
fsp = (((Ecmx7 * ((d - ycup) / ycup)) - Ecup) / (Ecup -
(((Ecmx7 * ((d - ycup) / ycup)))) * 2000) + fy)
fsp = Round(fsp, 2)
Text28.Text = fsp
T = fsp * Asm
l = (E0 / Ecmx7) * ycup
x = ycup * (1 - (E0 / Ecmx7))
y1 = l + (x / 2)
y2 = (2 / 3) * l
yt7 = ((C1 * y1) + (C2 * y2)) / T
Mcup = T * (d - ycup + yt7)
Mcup = Mcup / 1000
Mcup = Round(Mcup, 3)
Text18.Text = Mcup
End Sub

```

### Cálculo con Área de acero Mínima

```

Public ycr As Single
Public ycrt As Single
Public y45 As Single
Public y70 As Single
Public y As Single
Public yE0 As Single
Public ycup As Single
Public lcr As Single
Public lcr As Single
Public l45 As Single
Public l70 As Single
Public ly As Single
Public lE0 As Single
Public lcup As Single
Public mcr As Single
Public mcr As Single
Public M45 As Single
Public M70 As Single
Public My As Single
Public ME0 As Single
Public Mcup As Single

```

```

Public Qcr As Single
Public Qcr As Single
Public Q45 As Single
Public Q70 As Single
Public Qy As Single
Public QE0 As Single
Public Qcup As Single
Public yt3 As Double
Public yt4 As Double
Public yt5 As Double
Public c As Double
Public fct As Double
Public fc As Double
Public fs As Double
Public Ect As Double
Public Es4 As Double
Public Es5 As Double
Public Ecmx As Double
Public Ecmx5 As Double
Public Ecup As Double
Public aux As Double

```

```

Public au As Double
Public aux1 As Double
Public aux2 As Double
Public a1 As Double
Public a2 As Double
Public y1 As Double
Public y2 As Double
Public C1 As Double
Public C2 As Double
Public yc As Double
Public Ey As Double
Public E0 As Double
Public ad As Double
Public T As Double
Public Ecu As Double
Public l As Double
Public x As Double
Public Esh As Double
Public Es As Double
Public fsp As Double

Private Sub CmdSalir_Click()
    End
End Sub

Private Sub CmdCalcular2_Click()
    aux = 0
    yt = 0
    l = 0
    M = 0
    c = 0
    f = 0
    Q = 0
    fs = 0
    Ect = 0
    yc = 0
    Asm = 0
    h = 0
    b = 0
    T = 0
    E0 = 0
    ad = 0
    FrmDatos.Show
    FrmResultados.Hide
    FrmDatos.Text1 = ""
    FrmDatos.Text2 = ""
    FrmDatos.Text3 = ""
    FrmDatos.Refresh
    FrmResultados.Refresh
End Sub

Private Sub Form_Load()
'Asignación de valores
    Asm = FrmDatos.Text1.Text
    h = FrmDatos.Text2.Text
    b = FrmDatos.Text3.Text
    d = h - 5
    Es = 2100000
    Ec = 210000
    fy = 4200
    fc = 280
    n = Es / Ec
'Cálculo de Caso 1
    ycr = ((h / 2) * (h * b) + d * ((n - 1) * Asm)) / ((h * b) +
((n - 1) * Asm))
    ycr = Round(ycr, 2)
    yc = h - ycr
    Text1.Text = ycr
    lcr = ((b * (h ^ 3)) / 12) + ((b * h) * (((h / 2) - ycr) ^ 2)) +
((n - 1) * Asm * ((d - ycr) ^ 2))
    lcr = Round(lcr, 2)

    fct = 2 * (Sqr(fc))
    fct = Round(fct, 2)
    c = h - ycr
    c = Round(c, 2)
    Mcr = (fct * lcr) / c
    Mcr = Mcr / 1000
    Mcr = Round(Mcr, 3)
    Text10.Text = Mcr
    Ect = fct / Ec
    Qcr = Ect / yc
    Qcr = Round(Qcr, 6)
    Text19.Text = Qcr
'Cálculo de Caso 1'
    aux = ((Asm * n) ^ 2) - ((4 * (b / 2)) * (Asm * n * d))
    aux = Round(aux, 2)
    If (aux < 0) Then
        aux = aux * (-1)
    End If
    ycr2 = (((-Asm * n) + Sqr(aux)) / (2 * (b / 2)))
    ycr2 = Round(ycr2, 2)
    Text2.Text = ycr2
    lcr2 = ((b * (ycr2 ^ 3)) / 12) + ((b * ycr2) * ((ycr2 / 2) ^ 2)) + ((n
* Asm) * ((ycr2 - d) ^ 2))
    lcr2 = Round(lcr2, 2)
    Mcr2 = Mcr * 1000
    Text11.Text = Mcr
    Qcr2 = Mcr2 / (Ec * lcr2)
    Qcr2 = Round(Qcr2, 6)
    Text20.Text = Qcr2
'Cálculo de Caso 2
    y45 = ycr
    Text3.Text = y45
    l45 = lcr
    f = fc * 0.45
    f = Round(f, 2)
    E = f / Ec
    E = Round(E, 5)
    Q45 = E / y45
    Q45 = Round(Q45, 6)
    Text21.Text = Q45
    M45 = Q45 * Ec * l45
    M45 = M45 / 1000
    M45 = Round(M45, 3)
    Text12.Text = M45
'Cálculo de Caso 3
    y70 = y45
    Text4.Text = y70
    l70 = l45
    f = 0.7 * fc
    f = Round(f, 2)
    E = f / Ec
    E = Round(E, 5)
    Q70 = Q45
    Q70 = E / y70
    Q70 = Round(Q70, 6)
    Text22.Text = Q70
    M70 = Q70 * Ec * l70
    M70 = M70 / 1000
    M70 = Round(M70, 3)
    M70 = M45
    Text13.Text = M70
'Cálculo de Caso 3'
    T = Asm * fy
    Ey = fy / Es
    Ey = Round(Ey, 5)
    E0 = (2 * fc) / Ec
    E0 = Round(E0, 5)
    ad = 0
    aux = 0
    Do While aux < T
        x = d - ad

```

```

If x < 0 Then
    MsgBox "Error de datos, Desbordamiento"
End
Else
    ad = ad + 0.01
    aux = (b * fc) * (ad / (d - ad)) * ad * ((Ey / E0) -
    (((Ey / E0) ^ 2) / 3) * (ad / (d - ad))))
End If
Loop
y = ad
y = Round(y, 2)
Text5.Text = y
Ecmax = Ey * (ad / (d - ad))
Ecmax = Round(Ecmax, 5)
If Ecmax <= E0 Then
    Qy = Ecmax / ad
    Qy = Round(Qy, 6)
    Text23.Text = Qy
    aux = Ecmax / E0
    aux1 = ((2 / 3) * aux * (y ^ 2)) - (((1 / 4) * (aux ^ 2) *
    (y ^ 2)))
    aux2 = (aux * y) - ((1 / 3) * (aux ^ 2) * y)
    yt3 = aux1 / aux2
    yt3 = Round(yt3, 2)
    My = (d - ad + yt3) * T
    My = My / 1000
    My = Round(My, 2)
    Text14.Text = My
Else
    MsgBox "'Error', Revisar cantidad de acero As"
End
End If
Cálculo de Caso 4
ad = T / ((2 / 3) * fc * b)
ad = Round(ad, 2)
Es4 = E0 * ((d - ad) / ad)
Esh = 0.01
If (Es4 <= Esh) Then
    MsgBox "Revisar acero, no es Asmin para el
    R.C.D.F."
End
Else
    ad = 0
    a1 = 0.01
    a2 = 0
    While (a2 <= a1)
        ad = ad + 0.01
        a1 = Asm * Es * E0 * ((d - ad) / ad)
        a2 = ad * b * (2 / 3) * fc
    Wend
    yE0 = ad
    Text6.Text = yE0
    QE0 = E0 / yE0
    QE0 = Round(QE0, 6)
    Text24.Text = QE0
    yt4 = (2 / 3) * yE0
    yt4 = Round(yt4, 2)
    ME0 = T * (d - yE0 + yt4)
    ME0 = ME0 / 1000
    ME0 = Round(ME0, 3)
    Text15.Text = ME0
End If
Cálculo de Caso 5
Ecmax5 = E0
Ecu = 0.0038
Esh = 0.01
ad = T / ((b * (E0 / Ecu) * (2 / 3) * fc) + ((1 - (E0 / Ecu))
* b * ((fc + (0.95 * fc)) / 2)))
Es5 = Ecu * ((d - ad) / ad)
If Es5 <= Esh Then
    MsgBox "Revisar acero, no es Asmin para el R.C.D.F."
End
Else
    ad = 0
    au = 0
    T = 0.01
    Do While au < T
        ad = ad + 0.01
        au = ((b * (E0 / Ecu) * (2 / 3) * fc * ad) + (ad * (1 - (E0
        / Ecu)) * b * ((fc + (0.95 * fc)) / 2)))
        T = ((23333.33 * Ecu * ((d - ad) / ad)) + 3996.67) *
    Asm
    Loop
    ycup = ad
    Text7.Text = ycup
    Qcup = Ecu / ycup
    Qcup = Round(Qcup, 6)
    Text25.Text = Qcup
    fsp = (23333.33 * Ecu * ((d - ycup) / ycup)) + 3996.67
    Text8.Text = Round(fsp, 2)
    T = Asm * fsp
    C1 = (ycup * (1 - (E0 / Ecu)) * b * ((fc + (0.95 * fc)) / 2))
    C2 = (b * (E0 / Ecu) * (2 / 3) * fc * ycup)
    y1 = ((E0 / Ecu) * ycup) + (((1 - (E0 / Ecu)) * ycup) / 2)
    y2 = (2 / 3) * (E0 / Ecu) * ycup
    yt5 = ((C1 * y1) + (C2 * y2)) / T
    yt5 = Round(yt5, 2)
    Mcup = T * (d - ycup + yt5)
    Mcup = Mcup / 1000
    Mcup = Round(Mcup, 3)
    Text16.Text = Mcup
End If
End Sub

```

### APÉNDICE 3

#### DUCTILIDAD GLOBAL DE DESPLAZAMIENTO Y DUCTILIDAD LOCAL DE CURVATURA

##### **Relacion entre ductilidad de un elemento y ductilidad de una sección. (Ref. 2. Bazan/Meli)**

La ductilidad de una sección se representa usualmente mediante la relación entre curvatura última y curvatura de fluencia de la sección sujeta a momento flexionante.

La relación momento-curvatura ( $M - \Phi$ ) describe el comportamiento.

Como el más simple de los elementos, tomaremos una viga en voladizo sujeta a una carga uniforme, cuya respuesta se define entre la carga total aplicada y el desplazamiento en la punta ( $V - \Delta$ ).

La ductilidad de la viga se expresa como la relación entre el desplazamiento de colapso y el de fluencia (figura C1)

$$\mu_{\Delta} = \Delta_u / \Delta_y$$

El desplazamiento de colapso es la suma de una parte lineal y una de deformación plástica.

$$\Delta_u = \Delta_y + \Delta_p$$

La deformación plástica es igual a la rotación de la articulación plástica multiplicada por la longitud de la viga

$$\Delta_p = \theta_p l_u$$

La rotación de la articulación plástica se determina como la curvatura de colapso menos la curvatura a la que inicia la fluencia, multiplicada esta diferencia por la longitud de plastificación, o sea la porción de la viga en que se propaga la plastificación

$$\theta_p = l_p (\Phi_u - \Phi_y)$$

El desplazamiento de fluencia de la viga se calcula en función de la rotación de fluencia, por relaciones de mecánica de materiales

$$\Delta_y = \theta_y l_u^2 / 4$$

por lo anterior

$$\mu_{\Delta} = \Delta_u / \Delta_y = 1 + \Delta_p / \Delta_y = 1 + 4(l_p l_u / l_u^2)(\theta_u - \theta_y) / \theta_y = 1 + 4(l_p / l_u)(\theta_u / \theta_y - 1)$$

El cociente  $\Delta_u/\Delta_y$  es la ductilidad de curvatura de la sección, que se identificará como  $\mu_\phi$ . La relación entre el factor de ductilidad de desplazamiento de la viga  $\mu_\Delta$ , y el de curvatura de la sección crítica  $\mu_\phi$  queda expresada como

$$\mu_\Delta = 1 + 4(l_p/l_u)(\mu_\phi - 1)$$

La longitud de plastificación para una articulación plástica que se forma en un empotramiento se estima conservadoramente como la mitad de la peralte de la viga

$$l_p = h_u/2$$

Por tanto,

$$\mu_\Delta = 1 + 2(h_u/l_u)(\mu_\phi - 1) \quad 4.2$$

Para valores usuales de la relación peralte a longitud de viga ( $h_u/l_u < 1/4$ ), se aprecia que para lograr un factor de ductilidad dado en la viga, se requiere un factor de ductilidad significativamente mayor para la sección. Por ejemplo, para una viga con relación ( $h_u/l_u = 1/4$ ), se tiene

$$\mu_\Delta = (\mu_\phi + 1)/2$$

si se quiere lograr  $\mu_\Delta = 4$ , se requiere  $\mu_\phi = 7$ .

De manera semejante, para  $h_u/l_u = 1/8$ , se tiene

$$\mu_\Delta = (\mu_\phi + 3)/4$$

y para lograr  $\mu_\Delta = 4$  se requiere  $\mu_\phi = 13$ .

El ejemplo simplificado anterior puede considerarse representativo de un edificio en que las cargas laterales son resistidas principalmente por un muro de concreto (o un núcleo). Este muro es esencialmente un elemento sujeto a flexión y se comporta como la viga en voladizo aquí estudiada. Por tanto, la respuesta del edificio puede representarse en función del desplazamiento en la punta del muro, para el cual el factor de ductilidad ( $\mu_\Delta$ ) es función de la rotación de la articulación plástica que se forma en la base del muro. Los dos factores quedan relacionados por la ecuación 4.2. Si suponemos que el muro tiene una longitud de 4 m y que la altura del edificio (y del muro) es de 32 m, la relación  $h_u/l_u$  es de  $1/8$ , y para que la estructura logre un factor de ductilidad de 4, la sección crítica debe desarrollar un factor de ductilidad de

13, el cual es muy elevado, aunque factible si la carga axial sobre el muro es muy baja y si se eliminan problemas de pandeo.

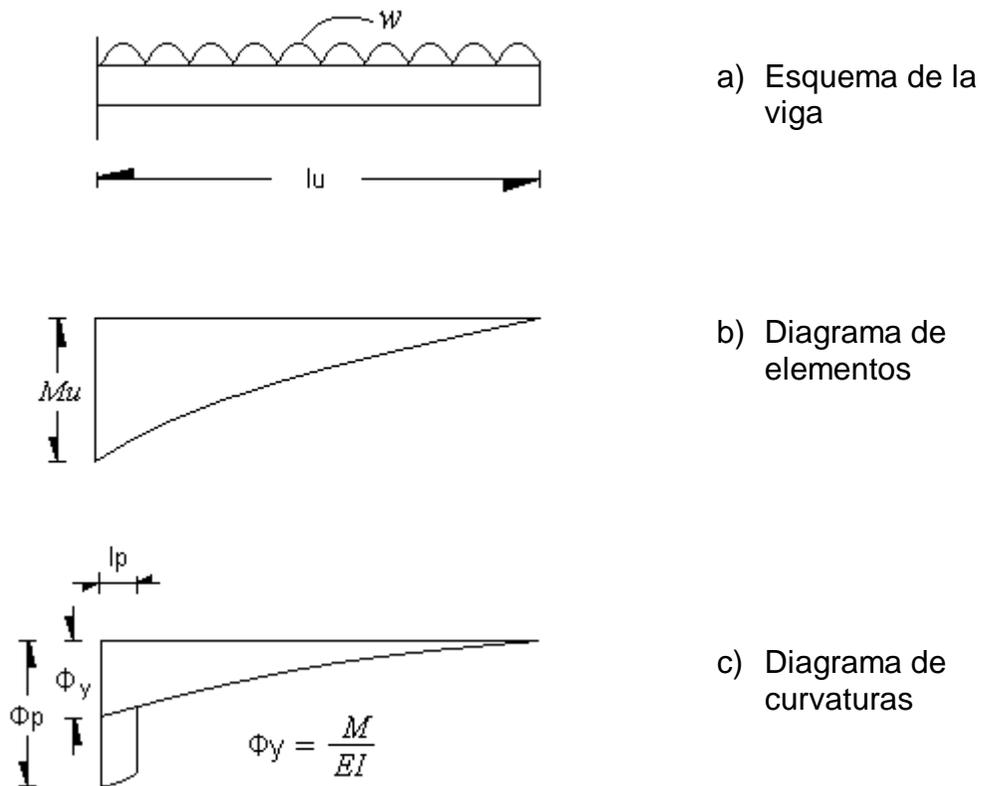


Figura C1. Distribución de curvaturas elásticas y plásticas en una viga en voladizo.