



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN
INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DISEÑO DISIPATIVO DE OBSERVADORES ADAPTABLES
PARA SISTEMAS CON NO LINEALIDADES MULTIVALUADAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

INGENIERÍA ELÉCTRICA - CAMPO CONTROL

P R E S E N T A:

EDER GUZMÁN BALTAZAR

TUTOR:

DR. JAIME ALBERTO MORENO PÉREZ

MÉXICO, D.F. 2010

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Leonid Fridman

Secretario: Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez

Vocal: Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez

1er. Suplente: Dr. Luis Agustín Álvarez-Icaza Longoria

2o. Suplente: Dr. Francisco J. Bejarano Rodríguez

La tesis se realizó en el Instituto de Ingeniería de la UNAM.

TUTOR DE TESIS:

Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez

Agradecimientos

A mi familia, mis padres, mi hermana y mi esposa por su cariño incondicional y apoyo (y al Pujuis por alegrarme las visitas a mi casa). A mis profesores en la maestría por todas sus enseñanzas y tenacidad. A mis sinodales por sus aportaciones y buena voluntad. A mi tutor por su buen carácter e inteligencia para guiarme. A mis amigos en Toluca que nunca me olvidan y a los nuevos que hacen aun mejor mi estancia en la universidad. A la UNAM por darme la oportunidad de seguir estudiando, la universidad es tan grande como las personas que trabajan en ella. Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por su apoyo para continuar con mi formación académica. Al Instituto de Ingeniería de la UNAM por mi lugar de trabajo. Y a Dios por ponerlos a todos en mi camino. ✌

Índice general

Agradecimientos	I
Resumen	V
1. Introducción	1
1.1. Motivación y Antecedentes	1
1.2. Objetivos	2
1.3. Formulación del Problema	3
1.4. Contribuciones	5
1.5. Organización de la tesis	5
2. Preliminares	7
2.1. Observador Adaptable	7
2.2. Excitación Persistente	10
2.3. Sistemas Disipativos con No linealidades fuertes	13
2.4. Diseño de Observadores Disipativos	20
2.5. Algoritmo Super-Twisting Generalizado	22
3. Observador Disipativo Adaptable (ODA)	27
3.1. Forma de Observador Disipativo Adaptable (FODA)	27
3.2. Diseño Observador Disipativo Adaptable	28
3.3. Ejemplo: Motor de cd con fricción	35
4. Observador Disipativo Adaptable con Algoritmo Super-Twisting Generalizado (ASTG)	41
4.1. Forma de Observador Disipativo Adaptable con ASTG	41
4.2. Diseño de Observador Disipativo Adaptable con ASTG	42
4.3. Ejemplo: Sistema Masa Rotacional y Translacional	46
5. Conclusiones y Trabajo a Futuro	51
Bibliografía	53

Resumen

Un observador adaptable es capaz de estimar el estado de un sistema y bajo ciertas condiciones, los parámetros desconocidos, ya sea de forma conjunta o separada. En este trabajo se propone la idea de construir un observador para sistemas que tienen el estado no medible, parámetros constantes desconocidos y no linealidades multivaluadas, tales como la fricción de Coulomb. Para conseguir lo anterior, se hace la suposición de que el sistema está, o puede ser llevado (posiblemente por medio de transformación de coordenadas), a una estructura especial, la cual se ha denominado “Forma de Observador Disipativo Adaptable” (FODA), y que generaliza otras estructuras propuestas en la literatura. Para la FODA se construye un observador denominado “Observador Disipativo Adaptable” (ODA), el cual es capaz de estimar la parte no medible del estado, a pesar de que no se puedan estimar los parámetros, y bajo la condición de excitación persistente, se pueden estimar asintóticamente el valor de los parámetros. Una característica de la FODA es que tiene grado relativo 1 entre la salida medida y los parámetros desconocidos. Una segunda propuesta consiste en relajar la condición de grado relativo 1 a grado relativo 2 en la FODA. Para esta nueva forma se propone un observador, denominado “Observador Disipativo Adaptable con Algoritmo Super-Twisting Generalizado” (ASTG), que puede estimar estados y parámetros desconocidos. Los resultados se ilustran mediante ejemplos en simulación. Es de resaltarse que para sistemas con no linealidades multivaluadas existen muy pocos resultados en la literatura.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación y Antecedentes

Al comenzar a leer un libro sobre observadores como [Besançon, 2007], la importancia de medir señales inaccesibles (señales desconocidas) en un sistema se hace evidente, ya sea por el alto costo de transductores o porque simplemente no hay manera de saber su comportamiento. Los observadores tienen la tarea de estimar las variables o constantes desconocidas propias de la dinámica del sistema, internas e incluso externas (perturbaciones), a partir de señales conocidas o de fácil acceso, con el propósito de conocer características poco evidentes de la estructura o de manipular señales de interés para el diseñador.

Un tipo de observadores que se ha venido estudiando desde los años 70s son los denominados Observadores Adaptables, este tipo de algoritmo tiene el propósito de determinar unívocamente el comportamiento de las variables de estado y estimar los parámetros desconocidos del sistema. Métodos de diseño de sistemas adaptables con respecto a los parámetros se pueden encontrar en [Narendra y Annaswamy, 1989, Sastry y Bodson, 1989], estos libros son dedicados al estudio de sistemas lineales y algunas de sus secciones se enfocan en el diseño de observadores. Con el tiempo, a parte del caso lineal, se comenzaron a considerar sistemas no lineales (suaves), uno de los primeros resultados en este campo fue publicado en [Bastin y Gervers, 1988], en este trabajo se propone una forma canónica y se dan condiciones suficientes para la estimación del estado y parámetros variantes en el tiempo. En [Marino y Tomei, 1995] se puede encontrar una nueva forma canónica a la cual denominan *Forma de Observador Adaptable* (FOA), para la cual se puede diseñar un observador y bajo ciertas condiciones es posible estimar parámetros constantes que entran en forma lineal en el sistema, también se dan las condiciones necesarias y suficientes para la transformación a esta estructura especial. El sistema general del que se parte tiene la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \dot{x} &\in f(t, x, u) + g(t, x, u)\theta, & x(t_0) &= x_0 \\ y &= h(x) \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado desconocido, $u \in \mathbb{R}^p$ es el vector de entrada conocido, $\theta \in \mathbb{R}^q$ es el vector parámetros desconocidos, e $y \in \mathbb{R}^m$ es el vector de salida medible. Las configuraciones complejas que aparecen dentro del sistema pueden ser en ciertos casos llevadas a estructuras especiales por medio de transformaciones de coordenadas, lo cual a su vez relaja de cierta forma el diseño

del algoritmo de estimación. Basado en esta idea, en [Besançon, 2000, Besançon, 2007], se propone una nueva FOA, para la cual se puede diseñar un observador adaptable. Dicha forma engloba muchas estructuras propuestas hasta ese momento. Una FOA extendida con las mismas características que la propuesta por Besançon, fue presentada en [Moreno, 2001], donde se puede ver la introducción de un vector de salida, el cual tiene el propósito de inyectar una función al sistema de manera que la dinámica del error pueda ser manipulada (ver sección 2.1 para más detalles).

En [Besançon, 2007] también se pueden ver extensiones de la rama de estudio considerada hasta ahora, al introducir transformaciones de estado dependientes de los parámetros desconocidos, para este tipo de estructuras se diseñan observadores que estiman simultáneamente las variables de estado y parámetros. Por último en trabajos recientes se ha introducido la estimación de parámetros desconocidos, pero que entran en forma no lineal al sistema [Farza et al., 2009, Grip et al., 2010]. Cabe resaltar que en ninguno de los casos anteriores se consideran no linealidades fuertes, es decir, no linealidades discontinuas o multivaluadas en la estructura del sistema, las cuales son de gran importancia en las aplicaciones, por ejemplo considere el caso de sistemas mecánicos con fricción estática o de Coulomb, o con histéresis, o sistemas híbridos o conmutados.

Existen pocas investigaciones sobre la obtención de observadores para plantas que incluyan dentro de su estructura no linealidades multivaluadas, estos trabajos se inspiran en los algoritmos por criterio del círculo propuestos en [Arcak y Kokotovic, 2001]. Para sistemas dinámicos que se encuentran en la denominada forma de Lur'e (o que pueden ser llevados a ella), se han propuesto recientemente dos trabajos [Moreno y Osorio, 2006] y [Brogliato y Heemels, 2009], aunque es importante apuntar que el método propuesto por Moreno presenta algunas ventajas sobre el propuesto por Brogliato. Sin embargo, en estas publicaciones no se considera la estimación de parámetros desconocidos.

Con la breve revisión hecha hasta ahora se puede notar que el diseño de observadores para sistemas con no linealidades fuertes y parámetros desconocidos, aparentemente, no ha sido considerado dentro de la literatura.

1.2. Objetivos

Como se refirió en la sección anterior, dentro de la revisión hecha, no se encontraron publicaciones donde se considere la estimación de los estados para sistemas que contengan dentro de su estructura no linealidades multivaluadas y parámetros desconocidos constantes, de igual manera se hizo referencia al hecho de que muchas veces es necesaria una configuración especial del sistema para poder hacer el diseño de un observador. Retomando estas condiciones, dentro de la tesis se supondrá que la planta en estudio está o podrá ser llevada a una estructura especial, la cual es propuesta dentro de este trabajo, denominada *Forma de Observador Disipativo Adaptable* (FODA). Como es de esperarse la FODA contiene no linealidades multivaluadas y parámetros constantes desconocidos que entran en forma lineal al sistema, entonces el propósito es diseñar un observador capaz de estimar el estado y los parámetros desconocidos.

Al analizar algunas formas propuestas hasta la fecha se puede notar que una característica importante para poder estimar los estados no medibles es que el grado relativo entre la salida y los parámetros desconocidos debe ser 1, esto se debe a que la derivadas de la salida no están disponibles. Intuitivamente se piensa que con ayuda de un diferenciador se pueden generar estas derivadas. Dentro

del trabajo se propondrá una forma donde el grado relativo puede ser incrementado a 2, por lo tanto el segundo objetivo será encontrar un observador para esta configuración tal que se puedan estimar los estados y parámetros inaccesibles. Lo anterior se hará con ayuda de un diferenciador basado en el Algoritmo Super-Twisting Generalizado propuesto en [Moreno, 2009], la ventaja presentada por este procedimiento es el análisis de convergencia por medio de funciones de Lyapunov, por lo que también se propondrá una función de Lyapunov para el análisis de convergencia de la dinámica de error generada por la planta y el observador.

1.3. Formulación del Problema

Considere el sistema no lineal en el espacio de estados,

$$\begin{aligned} \dot{x} &\in f(t, x, u) + g(t, x, u)\theta, & x(t_0) &= x_0 \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (1.2)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u \in \mathbb{R}^p$ es el vector de entradas, $\theta \in \mathbb{R}^q$ es el vector de parámetros desconocidos, $y \in \mathbb{R}^m$ es el vector de salida, $f(\cdot)$ se considera una función multivaluada [Yakubovich et al., 2004] y $g(\cdot)$ es una función continua. El problema general es la estimación del vector de estado no medible x , a pesar de la presencia de parámetros desconocidos θ y funciones multivaluadas f .

Partiendo del hecho de no haber encontrado técnicas que atacaran el problema anterior, dentro de este trabajo se pretende usar dos métodos, hacerlos complementarios y diseñar un observador para una forma particular de la estructura general (1.2).

El primer método considera el caso donde (1.2) no contiene funciones multivaluadas, por lo tanto, $f(\cdot)$ es univaluada, es decir, para cada valor del argumento de f , a esta le corresponde un valor único [Yakubovich et al., 2004]. Como se mencionó en la sección anterior, en [Besançon, 2007] se pueden revisar dos tendencias para atacar este primer caso,

- *Observación Adaptable del Estado.* En este caso se obtiene una estimación del estado $x(t)$ a partir de las señales conocidas $y(t)$, $u(t)$, f , g y h , a pesar de tener el vector θ desconocido en el sistema.
- *Observación conjunta parámetros y estado.* Como su nombre los dice, se estiman ambos el estado $x(t)$ y θ a partir de $y(t)$, $u(t)$, f , g y h conocidas.

En la mayoría de los casos estudiados por medio de estas dos tendencias el sistema no es analizado a partir de su forma original, los observadores son diseñados a partir de una estructura especial, denominada “Forma de Observador Adaptable”, esta forma es alcanzada mediante el uso de transformaciones de coordenadas del sistema original (las más usuales son las transformaciones filtradas o dinámicas).

En el caso de Observación Adaptable del Estado, se propone una FAO en [Besançon, 2000, Besançon, 2007], que engloba muchas de las formas estudiadas en la literatura, dicha estructura está dada por

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \alpha(y, \zeta, u, t) + \beta(y, \zeta, u, t)\theta, & x(t_0) &= x_0 \\ \dot{\zeta} &= Z(y, \zeta, u, t), \end{aligned} \quad (1.3)$$

con $y \in \mathbb{R}^{m_1}$, $\zeta \in \mathbb{R}^{m_2}$, $u \in \mathbb{R}^p$, $\theta \in \mathbb{R}^q$.

La forma de observador adaptable (1.3) permite garantizar la estimación asintótica del estado ζ y de los parámetros θ , mediante la suposición de un observador para el subsistema ζ y la satisfacción de la propiedad clásica de excitación persistente [Narendra y Annaswamy, 1989, Sastry y Bodson, 1989] para la función $\beta(\cdot)$.

La FOA (1.3), inspira una forma más general presentada en [Moreno, 2001],

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \alpha(t, y, \xi, u) + \Gamma(t, y, \xi, u)\theta \\ \dot{\xi} &= \eta(t, y, \xi, u) \\ y_2 &= \rho(t, y, \xi, u) \end{aligned} \quad (1.4)$$

con condiciones iniciales $y_1(0) = y_0$, $\xi(0) = \xi_0$, y donde $\xi \in \mathbb{R}^{n-m_1}$, $y_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$, $y_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$, $m = m_1 + m_2$, $y^T = [y_1^T, y_2^T]$ es el vector de salidas del sistema y α , Γ y η son continuas. Al igual que para la forma de Besançon (1.3), se puede diseñar un observador que permite la estimación del estado ξ y si $\Gamma(\cdot)$ es de excitación persistente se pueden obtener los parámetros desconocidos θ , pero a diferencia de (1.3), (1.4) incluye la salida y_2 , la cual tiene el propósito de agregar cierto grado de libertad en el diseño del observador (ver Sección 2.1 para más detalles). Entonces estas formas presentan la posibilidad de estimar una parte no medible del estado y bajo ciertas condiciones la obtención de parámetros desconocidos constantes que entran linealmente al sistema, todo esto considerando sólo funciones univaluadas.

El objetivo perseguido requiere una estructura que tenga las características presentadas arriba, pero también tiene que lidiar con una clase de funciones multivaluadas. Por lo que se considera el tipo de sistemas con funciones multivaluadas para los cuales se puede diseñar un observador disipativo. Como se mencionó, una tendencia para resolver este problema fue planteada en [Moreno y Osorio, 2006], en dicha investigación se logró diseñar un observador para sistemas que tienen la siguiente configuración,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Gv + \varphi(t, y, u) \\ v &\in \Psi(\sigma) \\ y &= Cx \\ \sigma &= Hx \end{aligned} \quad (1.5)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado desconocido, $u \in \mathbb{R}^p$ es una entrada conocida, $y \in \mathbb{R}^m$ es el vector de salida medido, y $\sigma \in \mathbb{R}^r$ es una función lineal de los estados, que no tiene que ser medible físicamente. $\Psi(t, \sigma)$ es una función vectorial multivaluada de dimensión s , $\varphi(t, y, u)$ es función no lineal univaluada dependiente de (t, y, u) , continua en (y, u) . Es importante notar que en (1.5) no se consideran parámetros desconocidos.

Las ideas centrales que persigue la investigación son hacer complementarias las formas (1.4) y (1.5), de manera que se pueda generar una estructura donde se tengan estados no medibles, parámetros desconocidos y funciones multivaluadas (la nueva forma se puede revisar en la Sección 3.1) y debido a las ventajas que presenta el algoritmo propuesto en [Moreno y Osorio, 2006] sobre otros del mismo tipo y lo general de la forma (1.4), construir un observador para esta nueva estructura. En otras palabras el problema es diseñar un observador para una nueva forma de observador, la cual contiene estados no medibles, parámetros constantes desconocidos y funciones multivaluadas.

Observación 1.1 *Se puede notar que en las estructuras (1.3) y (1.4) el grado relativo 1 entre la salida y los parámetros desconocidos es indispensable para la estimación de estos últimos. Lo anterior no es indispensable en todas la formas de observador, por ejemplo en el caso de la observación conjunta de parámetros y estado, el grado relativo es cero, ya que la salida depende de los parámetros desconocidos [Besançon, 2007]. En este trabajo se toma la forma (1.4) porque su complementación con la clase de sistemas (1.5) para los cuales se puede desarrollar un observador disipativo es inmediata.*

△

1.4. Contribuciones

Las aportaciones que se desarrollan dentro del presente trabajo de tesis son las siguientes:

- Se presenta una nueva clase sistema, para cual se puede diseñar un observador adaptable. La novedad es la incorporación de funciones multivaluadas, además de parámetros constantes desconocidos y parte del estado no medible dentro de la nueva estructura.
- Al tomar la forma (1.4) como base para la nueva estructura de sistema, se hereda la restricción de grado relativo 1 entre la salida y los parámetros desconocidos para la estimación de estos últimos. Dentro del trabajo se debilitó esta condición al incrementar el grado relativo a 2.
- Se evidencia la importancia de la función de Lyapunov para el Algoritmo Super-Twisting Generalizado (ASTG) desarrollada en [Moreno, 2009], ya que ésta hace posible complementar técnicas disipativas y adaptables con modos deslizantes (ASTG) para asegurar la convergencia del observador propuesto.

1.5. Organización de la tesis

A continuación se hace una breve descripción del contenido del presente trabajo.

La tesis esta dividida en 5 capítulos. En el capítulo 2 se revisan los conceptos que se usan como herramientas para el desarrollo del trabajo; se retoman dos tipos observadores adaptables para sistemas no lineales, específicamente los propuestos en [Besançon, 2000] y [Moreno, 2001], después se repasan algunas propiedades de excitación persistente, se abordan los sistemas disipativos con no linealidades fuertes, se estudia el diseño de observadores disipativos propuesta en [Moreno y Osorio, 2006] y por último se revisa el algoritmo Super-Twisting Generalizado propuesto en [Moreno, 2009]. En el capítulo 3 se presenta una forma de observador adaptable, donde parte del estado es desconocido y hay presencia de funciones multivaluadas y parámetros desconocidos constantes, así mismo se muestra el desarrollo de un observador para este tipo de sistemas y para ilustrar el método se muestra un ejemplo académico. En el capítulo 4, se incrementa la condición de grado relativo de 1 a 2 de la forma propuesta en el capítulo 3, también se puede revisar la incorporación del algoritmo Super-Twisting Generalizado para diseñar el observador adaptable para la nueva forma de observador y por último se muestra un ejemplo académico que ilustra el caso. En el capítulo 5, se muestran las conclusiones de la tesis y el trabajo a futuro.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Observador Adaptable

Se retoma el sistema no lineal en el espacio de estados propuesto en la formulación del problema (Sección 1.3), pero ahora sin funciones multivaluadas, para hacer una breve exposición de los observadores adaptables,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t, x, u) + g(t, x, u)\theta, & x(t_0) &= x_0 \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u \in \mathbb{R}^p$ es el vector de entradas, $\theta \in \mathbb{R}^q$ es el vector de parámetros desconocidos, $y \in \mathbb{R}^m$ es el vector de salida. El problema general se centra en la estimación de los estados y la identificación de los parámetros.

Una forma común de abordar el problema es usar una transformación de coordenadas para obtener un sistema para el cual se pueda diseñar un observador. Tomando esto en consideración, se retomará la forma propuesta en [Besançon, 2000],

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \alpha(y, \zeta, u, t) + \beta(y, \zeta, u, t)\theta, & x(t_0) &= x_0 \\ \dot{\zeta} &= Z(y, \zeta, u, t)\end{aligned}\tag{2.2}$$

con $y \in \mathbb{R}^p$, $\zeta \in \mathbb{R}^r$, $u \in \mathbb{R}^m$, $\theta \in \mathbb{R}^q$. La cual engloba muchas de las estructuras propuestas en la literatura [Marino y Tomei, 1995, Cho y Rajamani, 1997, Canudas de Wit et al., 1999, Blanke y Loostman, 1999]. Ahora, el sistema debe cumplir ciertas características, en [Besançon, 2000] se menciona que (2.2) está en la forma no lineal de observador adaptable si,

1. y es la salida medida.
2. Existe una función $V(t, e)$ propia decreciente positiva definida, tal que para cualquier condición inicial para el sistema (2.2), cualquier entrada admisible u , cualquier salida y , cualquier ζ , $e \in \mathbb{R}^r$, y cualquier $t \geq 0$, se tiene:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, e) + \frac{\partial V}{\partial e}(Z(y(t), e + \zeta, u(t), t) - Z(y(t), \zeta, u(t), t)) \leq -\kappa(e),\tag{2.3}$$

para alguna κ positiva definida, donde e es el error generado al diferenciar ζ y su estimado.

3. Para las mismas condiciones enunciadas arriba, y con $x(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ \zeta(t) \end{pmatrix}$ como el estado solución de (2.2), se tiene:

- $\|\alpha(y(t), e + \zeta, u(t), t) - \alpha(y(t), \zeta, u(t), t)\| \leq \gamma_\alpha \sqrt{\kappa(e)}; \quad \gamma_\alpha > 0$
- $\|\beta(y(t), e + \zeta, u(t), t) - \beta(y(t), e, u(t), t)\| \leq \gamma_\beta \sqrt{\kappa(e)}; \quad \gamma_\beta > 0$
- $\|\beta(y(t), \zeta(t), u(t), t)\| \leq b; \quad b > 0.$

La forma de observador adaptable (2.2) tiene el propósito de permitir el diseño de un observador que garantice la estimación del estado. Además si es posible garantizar que $\beta(\cdot)$ cumpla con la siguiente definición,

Definición 2.1 Una señal $\mathcal{B} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^r$ satisface la propiedad de excitación persistente si existen $T, k_1, k_2 > 0$ tal que para todo $t > 0$:

$$k_1 I_r \geq \int_t^{t+T} \mathcal{B}(\tau) \mathcal{B}^T(\tau) d\tau \geq k_2 I_r \quad (2.4)$$

△

Cuando existe excitación persistente (refiérase a la sección 2.2 para más detalles), se puede garantizar la estimación asintótica de los parámetros θ . Lo anterior queda establecido en la siguiente proposición [Besançon, 2000, Besançon, 2007],

Proposición 2.1 Dado el sistema (2.2), entonces

$$\begin{aligned} \dot{\hat{y}} &= \alpha(y, \hat{\zeta}, u, t) + \beta(y, \hat{\zeta}, v) \hat{\theta} - k_y (\hat{y} - y); & k_y > 0 \\ \dot{\hat{\zeta}} &= Z(y, \hat{\zeta}, v) \\ \dot{\hat{\theta}} &= -k_\theta \beta^T(y, \hat{\zeta}, v) (\hat{y} - y); & k_\theta > 0 \end{aligned}$$

es un observador adaptable del estado en el sentido de que $\|\hat{y}(t) - y(t)\|, \|\hat{\zeta}(t) - \zeta(t)\|$ tienden a cero cuando t tiende a infinito. Además si β tiene excitación persistente y $\hat{\beta}$ es acotada, entonces $\|\hat{\theta} - \theta\|$ también tiende a cero.

△

Las ganancias de inyección k_y y k_θ , son los grados de libertad a diseñar. Una desventaja de este método es que se requiere de una función de Lyapunov para asegurar la estabilidad del error $\hat{\zeta} - \zeta$. Esto se puede ver en (2.3), (por otro lado la transformación para pasar de (2.1) a (2.2) se puede revisar en [Besançon, 2000]).

En [Moreno, 2001] se propone una forma de observador más general que incluye la propuesta por Besançon,

$$\dot{y}_1 = \alpha_m(t, y, \xi, u) + \Gamma_m(t, y, \xi, u) \theta \quad (2.5a)$$

$$\dot{\xi} = \eta_m(t, y, \xi, u) \quad (2.5b)$$

$$y_2 = \rho_m(t, y, \xi, u) \quad (2.5c)$$

con condiciones iniciales $y_1(0) = y_0$, $\xi(0) = \xi_0$, y donde $\xi \in \mathbb{R}^{n-m_1}$, $y_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$, $y_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$, $m = m_1 + m_2$, $y^T = [y_1^T, y_2^T]$ es el vector de salidas del sistema y α_m , Γ_m y η_m son continuas. Esta forma se considera de observador adaptable si cumple con las siguientes condiciones,

1. Para el subsistema (2.5b) y (2.5c) existe un observador global y asintótico, es decir, se asume la existencia de una función $K(\cdot)$ continua, tal que para el sistema

$$\dot{\hat{\xi}} = \eta_m(t, y, \hat{\xi}, u) + K(t, y, \hat{\xi}, u) (y_2 - \rho_m(t, y, \hat{\xi}, u)),$$

con $\hat{\xi}(0) = \xi_0$, se satisface que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \hat{\xi}(t, t_0, \hat{\xi}_0, u, y) - \xi(t, t_0, \xi_0, u, y) \right\| = 0,$$

global y uniformemente para toda u , todo t_0 , toda θ , toda condición inicial (y_0, ξ_0) y toda $\hat{\xi}_0$. Definiendo $\varepsilon = \hat{\xi} - \xi$, se asume que para el sistema

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \alpha_m(t, y, \xi, u) + \Gamma_m(t, y, \xi, u)\theta \\ \dot{\xi} &= \eta_m(t, y, \xi, u) \\ \dot{\varepsilon} &= \eta_m(t, y, \varepsilon + \xi, u) - \eta_m(t, y, \xi, u) + \\ &\quad K(t, y, \varepsilon + \xi, u)(y_2 - \rho_m(t, y, \varepsilon + \xi, u)) \end{aligned}$$

con $y(0) = y_0$, $\xi(0) = \xi_0$, $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$, existe una función continuamente diferenciable $V(t, \varepsilon)$ propia, decreciente, positiva definida tal que para toda $u(\cdot)$, toda θ , toda condición inicial ξ_0 , toda ε_0 y toda $t > t_0$ se satisface

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(t, \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} [\eta_m(t, y, \varepsilon + \xi, u) - \eta_m(t, y, \xi, u) + \\ K(t, y, \varepsilon + \xi, u)(y_2 - \rho_m(t, y, \varepsilon + \xi, u))] \leq -\kappa(\varepsilon) \end{aligned}$$

para alguna función κ positiva definida.

2. Se asume que las funciones α_m y Γ_m satisfacen las siguientes desigualdades, para todo u, y, ξ , $\varepsilon \in \mathbb{R}^r$ y cualquier $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \|\alpha_m(t, y, \varepsilon + \xi, u) - \alpha_m(t, y, \xi, u)\| &\leq \delta_\alpha \sqrt{\kappa(\varepsilon)}; \quad \delta_\alpha > 0 \\ \|\Gamma_m(t, y, \varepsilon + \xi, u) - \Gamma_m(t, y, \xi, u)\| &\leq \delta_\Gamma \sqrt{\kappa(\varepsilon)}; \quad \delta_\Gamma > 0 \\ \|\Gamma_m(t, y, \xi, u)\| &\leq \Delta; \quad \Delta > 0 \end{aligned}$$

En (2.5), se puede ver la introducción de un vector salida y_2 , el cual tiene el propósito de inyectar una función al sistema de manera que la dinámica del error pueda ser manipulada a través del observador mostrado en el teorema 2.1. Cuando $m_2 = 0$, es decir no existe una salida desacoplada de los parámetros, se vuelve a la forma (2.2).

Teorema 2.1 *Si el sistema (2.5) satisface las condiciones anteriores 1 y 2, entonces el siguiente sistema,*

$$\begin{aligned}\hat{y}_1 &= \alpha_m(t, y, \hat{\xi}, u) + \Gamma_m(t, y, \hat{\xi}, u) \hat{\theta} - k_y(\hat{y}_1 - y_1) \\ \dot{\hat{\xi}} &= \eta_m(t, y, \hat{\xi}, u) + K(t, y, \hat{\xi}, u)(y_2 - \rho_m(t, y, \varepsilon + \xi, u)) \\ \dot{\hat{\theta}} &= -k_\theta \Gamma_m^T(t, y, \hat{\xi}, u)(\hat{y}_1 - y_1)\end{aligned}$$

donde $\hat{y}_1(0) = \hat{y}_0$, $\hat{\xi}(0) = \hat{\xi}_0$, $\hat{\theta}(0) = \hat{\theta}_0$, $k_y > 0$ y $k_\theta > 0$, es un observador adaptable para el sistema (2.5). Más precisamente, para toda condición inicial \hat{y}_0 , $\hat{\xi}_0$, $\hat{\theta}_0$ del observador, toda condición inicial y_0 , ξ_0 de la planta, todo tiempo inicial t_0 , toda entrada $u(\cdot)$ y todo vector de parámetros constantes θ , los errores de estimación $\|\hat{y}_1(t) - y_1(t)\|$ y $\|\hat{\xi}_1(t) - \xi_1(t)\|$ tienden a cero asintóticamente cuando t tiende a infinito y el error de estimación de los parámetros $\|\hat{\theta} - \theta\|$ permanece acotado.

Si, adicionalmente, la matriz $\Gamma_m(t, y, \xi, u)$ cumple con la condición de excitación persistente, y su derivada temporal es acotada, entonces se tiene también que $\lim_{x \rightarrow \infty} \|\hat{\theta} - \theta\| = 0$.

△

2.2. Excitación Persistente

Frecuentemente se encuentra que para estudiar la estabilidad de sistemas adaptables no lineales, se debe realizar el análisis de subsistemas lineales con coeficientes variantes en el tiempo. Algunas ecuaciones diferenciales representativas de estos hechos, así como sus condiciones de convergencia se pueden encontrar en [Narendra y Annaswamy, 1989, Sastry y Bodson, 1989]. En el caso de estudio presentado en esta tesis es de especial importancia la condición de excitación persistente, la cual es necesaria para asegurar estabilidad uniforme y asintótica de ciertos sistemas lineales.

Una primera ecuación diferencial encontrada con frecuencia dentro del estudio de sistemas adaptables se presenta a continuación,

$$\dot{x}(t) = -U(t)U^T(t)x(t) \quad (2.6)$$

donde $U(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ es una función continua a tramos y acotada. Si

$$Q(t) = U(t)U^T(t) \quad (2.7)$$

entonces $Q(t)$ es una matriz positiva semidefinida. Derivando temporalmente la candidata a función de Lyapunov $V = x^T x / 2$ a lo largo de las trayectorias de (2.6) sólo se puede demostrar que el punto $x = 0$ es uniformemente estable. Con el Teorema 2.2 se dan las condiciones suficientes y necesarias para que el sistema (2.6) sea uniforme y asintóticamente estable.

Teorema 2.2 *Las siguientes condiciones (1)-(4) son equivalentes y aseguran la estabilidad uniforme y asintótica del punto de equilibrio $x = 0$ de la ecuación diferencial (2.6)*

1. Existen constantes positivas t_0 , T_0 y ε_1 tal que para todo vector unitario $w \in \mathbb{R}^n$,

$$\int_t^{t+T_0} w^T U(\tau) U^T(\tau) w d\tau \geq \varepsilon_1 \quad \forall t \geq t_0 \quad (2.8)$$

2. Existen constantes positivas t_0 , T_0 y ε_2 tal que para todo vector unitario $w \in \mathbb{R}^n$,

$$\int_t^{t+T_0} \|U(\tau) U^T(\tau)\| d\tau \geq \varepsilon_2 \quad \forall t \geq t_0 \quad (2.9)$$

3. Existen constantes positivas t_0 , T_0 y ε_3 tal que para todo vector unitario $w \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} \|U^T(\tau) w\| d\tau \geq \varepsilon_3 \quad \forall t \geq t_0 \quad (2.10)$$

4. Existen constantes positivas t_0 , T_0 y ε_4 tal que

$$\lambda_i \left[\int_t^{t+T_0} U(\tau) U^T(\tau) d\tau \right] \geq \varepsilon_4 \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \forall t \geq t_0 \quad (2.11)$$

donde $\lambda_i[A]$ denota el i -ésimo autovalor de la matriz A .

△

Para la demostración del Teorema 2.2 se pueden referir a [Narendra y Annaswamy, 1989].

Pasemos al segundo caso,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= A(t)x_1(t) + U^T(t)x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -U(t)x_1(t) \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde $x_1 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x_2 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $A(t)$ y $U(t)$ son matrices de funciones acotadas y continuas a tramos de dimensiones $n \times n$ y $n \times m$ respectivamente, y $A(t) + A^T(t)$ es uniformemente negativa definida, es decir $A(t) + A^T(t) \leq -Q < 0$. Como en la primera ecuación (2.6) la atención se centra en analizar las condiciones necesarias y suficientes para las cuales el sistema (2.12) es uniforme y asintóticamente estable. El siguiente Teorema establece dichas condiciones [Narendra y Annaswamy, 1989],

Teorema 2.3 *El punto $x = 0$ de la ecuación (2.12) es uniforme y asintóticamente estable si, y sólo si, existen constantes positivas T_0 , δ_0 y ε_0 con $t_2 \in [t, t + T_0]$ tal que para cualquier vector unitario $w \in \mathbb{R}^n$,*

$$\left\| \frac{1}{T_0} \int_{t_2}^{t_2+\delta_0} U^T(\tau) w d\tau \right\| \geq \varepsilon_0 \quad \forall t \geq t_0 \quad (2.13)$$

△

Cuando $\|\dot{U}(t)\|$ es uniformemente acotado, la condición (2.13) puede ser relajada como se muestra en el siguiente corolario.

Corolario 2.1 Si $U(t)$ es suave, $\dot{U}(t)$ es uniformemente acotada, y $U(t)$ satisface la siguiente condición

$$\frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} \|U^T(\tau)w\| d\tau \geq \varepsilon_0 \quad \forall t \geq t_0 \quad (2.14)$$

para $t_0 \in \mathbb{R}^+$, y constantes positivas T_0 y ε_0 , y todos los vectores unitarios $w \in \mathbb{R}^n$, entonces la solución $x = 0$ de la ecuación (2.12) es uniforme y asintóticamente estable.

△

En [Narendra y Annaswamy, 1989] se menciona que bajo las condiciones dadas en el Corolario 2.1 para $U(t)$ la desigualdad (2.14) es equivalente a la siguiente desigualdad,

$$\int_t^{t+T_0} U(\tau)U^T(\tau) d\tau \geq \alpha I \quad \forall t \geq t_0 \quad (2.15)$$

para constantes positivas t_0 , T_0 y α . Esta condición denominada **excitación persistente** implica que la integral de la matriz $U(t)U^T(t)$ sobre un intervalo finito T_0 es una matriz positiva definida. Otra interpretación implica que la matriz $U(t)U^T(t)$, la cual tiene rango unidad en cada instante, al ser integrada sobre un intervalo y cumplir con la condición dada en (2.15) adquiere rango completo.

Un caso especial de (2.12), donde la matriz A no es variante en el tiempo se muestra en [Marino y Tomei, 1995], este sistema es de importancia dentro de la tesis, ya que para esta forma se puede garantizar convergencia uniforme y exponencial como se enuncia en el siguiente Lema,

Lema 2.1 [Sastry y Bodson, 1989, Marino y Tomei, 1995] Considere el sistema lineal variante en el tiempo

$$\dot{x} = Ax + \Omega^T(t)z, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.16)$$

$$\dot{z} = -\Lambda\Omega(t)Px, \quad z \in \mathbb{R}^p \quad (2.17)$$

en el cual A es una matriz de $n \times n$ Hurwitz, P es una matriz de $n \times n$, simétrica y positiva definida tal que se satisface la igualdad $A^T P + PA = -Q$, con Q simétrica y positiva definida, y Λ es una matriz de $p \times p$, simétrica y positiva definida. Si $\|\Omega(t)\|$, $\|\dot{\Omega}(t)\|$ son uniformemente acotadas y $\Omega(t)$ satisface la condición de excitación persistente, entonces $(x, z) = 0$ es un punto de equilibrio global y exponencialmente estable.

△

Por otro lado para que las condiciones de convergencia de (2.6) y (2.12) sean equivalentes, u tiene que ser restringida, esto nos conducirá a la revisión de propiedades para la convergencia del algoritmo propuesta en este trabajo. El primer paso, propuesto en [Narendra y Annaswamy, 1989], es definir una clase de funciones a las cuales pertenece U

Definición 2.2 Sea C_δ un conjunto en $[0, \infty)$ para el cual existe un $\delta > 0$ tal que para todo $t_1, t_2 \in C_\delta$, $t_1 \neq t_2$ implica $|t_1 - t_2| \geq \delta$. Entonces $\mathcal{P}_{[0, \infty)}$ está definido como la clase de funciones reales valuadas en $[0, \infty)$ tal que para cada $U \in \mathcal{P}_{[0, \infty)}$, corresponde algún δ y C_δ tal que

1. $U(t)$ y $\dot{U}(t)$ son continuas y acotadas en $[0, \infty)/C_\delta$ y
2. para todo $t_1 \in C_\delta$, $u(t)$ y $\dot{u}(t)$ se tienen límites finitos cuando $t \uparrow t_1$ y $t \downarrow t_1$

△

Cuando no se pueda asegurar que $U(t)$ es acotada, se tiene que pedir que la planta sea estable. Lo anterior para poder aplicar todos los conceptos explicados dentro del trabajo. Un vector u se dice que pertenece a $\mathcal{P}_{[0, \infty)}$ si cada componente de u pertenece a $\mathcal{P}_{[0, \infty)}$. Con esta condición sobre u se pueden usar indistintamente las ecuaciones (2.13) y (2.14). Una vez definida la condición de excitación persistente es de importancia para este trabajo señalar una propiedad adicional. Para poder citarla a través de un lema es necesario la definición del siguiente conjunto [Narendra y Annaswamy, 1989].

Definición 2.3 El conjunto de todas las funciones $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $u \in \mathcal{P}_{[0, \infty)}$ que satisface la condición en la desigualdad (2.15) sobre un periodo T_0 para todo $t \geq t_0$ es denotado por $\Omega_{(n, t_0, T_0)}$.

△

Los subíndices n , t_0 , y T_0 en la Definición 2.3 se refieren a la dimensión del espacio, el tiempo inicial, y el intervalo sobre el cual la función u es persistentemente excitada. En muchos casos el tiempo inicial puede ser omitido, por lo que el conjunto se denotará como $\Omega_{(n, T_0)}$.

Lema 2.2

1. Si $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ y cualquier componente de $u(t)$ tiende a 0 cuando $t \rightarrow \infty$, ó pertenece a \mathcal{L}^1 , o pertenece a \mathcal{L}^2 , entonces $u \notin \Omega_{(n, T)}$ para cualquier T .
2. Si $u_1 \in \Omega_{(n, t_0, T)}$, $u_2 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $u_2 \rightarrow 0$ como $t \rightarrow \infty$, entonces $u_1 + u_2 \in \Omega_{(n, t_1, T)}$ para algún $t_1 \geq t_0$. El mismo resultado se mantiene si $u_2 \in \mathcal{L}^1$ o \mathcal{L}^2 .
3. Si $u_1, u_2 \in \Omega_{(n, T)}$, entonces $u_1 + \varepsilon u_2 \in \Omega_{(n, T)}$ para algún $\varepsilon \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeño.

△

El Lema 2.2 indica que una señal de excitación persistente lo sigue siendo aunque se le sumen señales en algún sentido pequeñas.

2.3. Sistemas Disipativos con No linealidades fuertes

En esta sección se dan algunas definiciones necesarias para el diseño de observadores disipativos con funciones multivaluadas, las cuales son tomadas de [Moreno, 2004], [Brogliato et al., 2007] y [Osorio, 2009], que tienen como referencias importantes trabajos como [Willems, 1972a, Willems, 1972b, Hill y Moylan, 1980]. Los conceptos de disipatividad se definen con la ayuda de una función $\omega(u(t), y(t))$, denominada *Tasa de Suministro*, se asume que esta función cumple con

$\int_{t_0}^{t_1} |\omega(t)| dt < \infty$ para cualquier $(t_1, t_0) \in \mathbb{R}^+$, i.e. ω es localmente integrable. Ahora considere el sistema,

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = f(x, u), & u \in U \\ y = h(x, u), & y \in Y \end{cases} \quad (2.18)$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n) \in X \subset \mathbb{R}^n$ y $U \subset \mathbb{R}^m$ son espacios lineales.

Definición 2.4 *El sistema (2.18) es disipativo con respecto a la tasa de suministro ω si existe una función $V(x)$ llamada **Función de Almacenamiento**, tal que para todo $(t_0, t_1) \in \mathbb{R}^+$, $x_0 = x(t_0)$ y $x_1 = x(t_1) \in \mathbb{R}^n$, $y, u \in \mathbb{R}$, se satisface que*

$$V(x(t_1)) \leq V(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} \omega(u(t), y(t)) dt \quad (2.19)$$

△

La condición dada en la ecuación (2.19) es conocida como la desigualdad de disipación y establece que el incremento de energía (función de almacenamiento) durante el intervalo (t_0, t_1) no es más grande que la energía entregada al sistema (por medio de la tasa de suministro), es decir, puede haber pérdida de energía. Lo anterior puede entenderse como sigue

$$\underbrace{V(x(t_1))}_{\text{Energía almacenada final}} \leq \underbrace{V(x(t_0))}_{\text{Energía almacenada inicial}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} \omega(u(t), y(t)) dt}_{\text{Energía suministrada}}$$

Si en (2.19) se establece una igualdad estricta, entonces se dice que el sistema no tiene pérdidas. El punto de vista disipativo está basado en un comportamiento entrada-salida de la planta, lo cual permite entender su comportamiento. Con base en todo esto, sería natural el estudio de la estabilidad de la planta con base en la relación que establece la disipatividad.

Antes de abordar la estabilidad de un tipo de sistemas interesante, es necesario tomar en cuenta las siguientes definiciones.

Definición 2.5 [Osorio, 2009] *La desigualdad de disipación definida en (2.19) puede escribirse también como una ecuación usando una función real $d(x(t), u(t))$ llamada Tasa de Disipación. El sistema dinámico Σ es disipativo si existen una tasa de disipación $d(x(t), u(t))$ no negativa, una tasa de suministro $\omega(u(t), y(t))$ y una función de almacenamiento $V(x)$ no negativa, tales que para todo $(t_0, t_1) \in \mathbb{R}^+$, $x_0 = x(t_0)$ y $x_1 = x(t_1) \in \mathbb{R}^n$, $y, u \in \mathbb{R}$, se cumple que*

$$V(x(t_1)) = V(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} (\omega(u(t), y(t)) - d(x(t), u(t))) dt \quad (2.20)$$

Si $V(x)$ es diferenciable para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $u \in \mathbb{R}^m$, la igualdad de disipación es equivalente a

$$\dot{V}(x, u) = \omega(y, u) - d(x, u) \quad (2.21)$$

Si además se define una función $\alpha(\cdot)$ tipo \mathcal{K} tal que

$$\dot{V}(x, u) \leq \omega(y, u) - \alpha(\|x\|) \quad (2.22)$$

entonces se dice que Σ es **Estrictamente Disipativo en los Estados (EDE)** con respecto a $\omega(y, u)$.

△

Ahora consideremos la propiedad de disipatividad para un sistema lineal donde la función de almacenamiento puede definirse cuadrática.

Definición 2.6 [Moreno, 2004, Osorio, 2009] *El sistema*

$$\Sigma_L : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x(0) = x_0 \\ y = Cx \end{cases} \quad (2.23)$$

con entradas $u \in \mathbb{R}^m$, salidas $y \in \mathbb{R}^p$ y estados $x \in \mathbb{R}^n$, es **Estrictamente Disipativo en los Estados (EDE)**, o abreviado **(Q,S,R)-EDE**, con respecto a una tasa de alimentación $\omega(y, u)$ cuadrática

$$\omega(y, u) = \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

donde $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $S \in \mathbb{R}^{m \times q}$, $R \in \mathbb{R}^{q \times q}$, y Q y R son simétricas, si existe una función de almacenamiento diferenciable y positiva definida $V(x) = x^T P x$, y una constante $\delta > 0$, de tal manera que a lo largo de cualquier trayectoria del sistema se satisface

$$\frac{dV(x(t))}{dt} \leq \omega(y(t), u(t)) - \delta x^T P x \quad (2.25)$$

ó equivalentemente,

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P + \delta P & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C^T Q C & C^T S \\ S^T C & R \end{bmatrix} \leq 0 \quad (2.26)$$

△

Se puede notar que la definición 2.6 es un caso especial de la definición 2.5, esto al comparar las ecuaciones (2.21) y (2.25).

Definición 2.7 [Moreno, 2004] *Una no linealidad variante en el tiempo sin memoria $\psi : [0, \infty) \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^m$,*

$$y = \psi(t, u)$$

continua a tramos en t y localmente Lipschitz en u , tal que $\psi(t, 0) = 0$, se dice que es **disipativa con respecto a la tasa de suministro (2.24)**, o abreviado **(Q,S,R) - D**, si para cada $t > 0$, y $u \in \mathbb{R}^q$

$$\omega(y, u) = \omega(\psi(t, u), u) \geq 0.$$

△

Con los conceptos vistos, podemos revisar una clase de sistemas no lineales que pueden representarse en la *Forma de Lur'e*, que es aquella en la que un sistema dinámico lineal se encuentra retroalimentado por una función no lineal sin memoria, que puede o no ser multivaluada. El siguiente teorema da las condiciones para el caso donde la no linealidad es suave,

Lema 2.3 [Moreno, 2004] *Considere la interconexión*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \quad x(0) = x_0 \\ y &= Cx \\ u &= -\psi(t, y)\end{aligned}\tag{2.27}$$

Si el sistema lineal (A, B, C) es $(-R_N, S_N^T, -Q_N) - EDE$ y ψ satisface $\omega(y, u) = \omega(\psi(t, u), u) \geq 0$ con $(Q, S, R) = (Q_N, S_N, R_N)$. Entonces el punto de equilibrio $x = 0$ de (2.27) es global y exponencialmente estable para cada no linealidad $(Q_N, S_N, R_N) - D$.

Demostración: Por hipótesis el sistema (A, B, C) es $(-R_N, S_N^T, -Q_N) - EDE$. Tomando $V(x) = x^T P x$ como una candidata a función de Lyapunov para el sistema en lazo cerrado. La derivada en el tiempo de $V(x)$ a lo largo de las soluciones de (2.27) es $\dot{V} = (Ax + Bu)^T P x + x^T P (Ax + Bu)$, o debido a (2.26) y (2.27)

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} PA + A^T P & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \\ &\leq \begin{bmatrix} x \\ -\psi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -C^T R_N C & C^T S_N^T \\ S_N C & -Q_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ -\psi \end{bmatrix} - \delta x^T P x \\ &= - \begin{bmatrix} \psi \\ y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_N & S_N \\ S_N^T & R_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ y \end{bmatrix} - \delta V(x) \leq -\delta V(x)\end{aligned}$$

lo último debido a que ψ es $(Q_N, S_N, R_N) - D$. ■

El lema anterior se puede extender al caso donde la función no lineal es discontinua, normalmente este caso cambia su nombre al de inclusión diferencial o ecuación diferencial con valores múltiples y se representa con la siguiente nomenclatura,

$$\dot{x} \in F(x, t)\tag{2.28}$$

donde $F(x, t)$ es un conjunto no vacío dependiente de x y t en el espacio n -dimensional. La función $F(x, t)$ se denomina **función multivaluada** para enfatizar que sus valores son conjuntos [Yakubovich et al., 2004]. Es importante notar que se puede establecer una relación entre una función multivaluada (2.28) y una función discontinua (2.29), ya que esto permitirá el análisis de funciones tales como el signo (ver ecuación (2.31)).

$$\dot{x} = f(x, t)\tag{2.29}$$

En este trabajo se utiliza la aproximación debida a Filippov [Filippov, 1988], que consiste en modificar la función discontinua f mediante un procedimiento que no afecta sus propiedades y

permite que en los puntos de discontinuidad la función se represente por medio de un conjunto. Para hacer lo anterior se toma la definición de operador K_x ,

$$F(t, x) = K_x f(t, x) \triangleq \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{\mu(N)=0} \overline{\text{co}}\{f(t, B_{\delta}(x) \setminus N)\} \quad (2.30)$$

donde $\overline{\text{co}}$ denota la cerradura convexa de un conjunto, N son todos los conjuntos de medida cero sobre los cuales se toma la intersección y μ es la medida de Lebesgue de \mathbb{R}^n . Las soluciones generalizadas de (2.29) de acuerdo con la nueva relación (2.30) son *soluciones en el sentido de Filippov*. Para ilustrar el procedimiento anterior se toma la función signo, la cual se representa normalmente con una discontinuidad univaluada en cero,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

esta función discontinua se puede ver en la Figura 2.1. Después de convexificarla se obtiene $F(x)$,

$$F(x) = K_x f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ [0, 1] & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad (2.32)$$

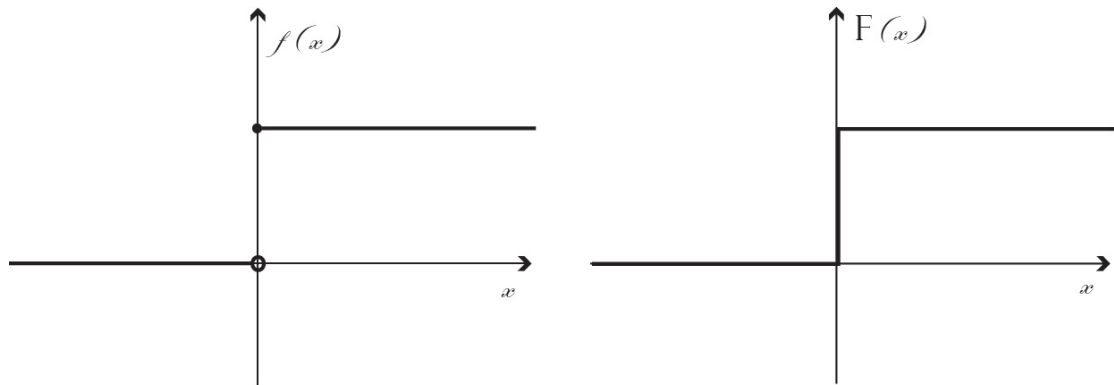


Figura 2.1: Funciones signo; $f(x)$ función discontinua univaluada y $F(x)$ función discontinua multivaluada.

En [Osorio, 2009] se menciona que el proceso de convexificación asegura la semicontinuidad por arriba, lo que a su vez asegura la existencia de soluciones. La existencia, pero no la unicidad, de soluciones para sistemas como (2.28), puede ser asegurada cuando $F(x, t)$ satisface simultáneamente las siguientes condiciones [Bacciotti y Rosier, 2001, Osorio, 2009].

Suposición 2.1 $F(x, t)$ es tal que:

1. $F(x, t)$ es un subconjunto de \mathbb{R}^n , no vacío, compacto y convexo para cada $t \in \mathbb{R}^+$ y $x \in \mathbb{R}^n$.
2. $F(x, t)$, como función multivaluada de x , es semicontinua por arriba para todo t . Una función $F(x, t)$ es semicontinua por arriba en un punto (x_0, t_0) si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon, x_0, t_0)$ tal que el conjunto $F(x_1, t_1)$ está contenido en la ε -vecindad del conjunto $F(x_0, t_0)$, dado que un punto (x_1, t_1) pertenece a la δ -vecindad del punto (x_0, t_0) .

3. $F(x,t)$ es medible en x en el sentido de Lebesgue.

4. $F(x,t)$ es localmente acotada.

△

Una vez que se ha definido la existencia de soluciones, se hacen necesarias las definiciones de estabilidad para inclusiones diferenciales [Brogliato et al., 2007], así como una herramienta que muestre la convergencia de estas soluciones, lo cual en este caso se hace con una forma extendida del Segundo Teorema de Lyapunov, valido para sistemas que incluyen funciones multivaluadas [Bacciotti y Rosier, 2001, Osorio, 2009].

Definición 2.8 Se dice que el origen de (2.28) es Uniformemente Estable si para cada $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que para cada $t_0 > 0$, cada $\|x_0\| \leq \delta$ y cada solución $x(\cdot)$ de (2.28)

$$\|x(t)\| < \varepsilon \quad (2.33)$$

△

Definición 2.9 Se dice que el origen de (2.28) es Localmente Atractivo si para cada $t_0 \geq 0$ existe $\delta_0 > 0$ tal que para cada x_0 con $\|x_0\| \leq \delta_0$ y cada solución $x(\cdot)$ de (2.28)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0 \quad (2.34)$$

△

Definición 2.10 Se dice que el origen de (2.28) es Uniforme y Localmente Atractivo si existe $\delta_0 > 0$ tal que para cada $\sigma > 0$ existe $T = T(\sigma) > 0$ tal que para cada $\|x(t)\| < \delta_0$, cada $t_0 \geq 0$, y cada solución $x(\cdot)$ de (2.28)

$$\|x(t)\| < \sigma \text{ para cada } t \geq t_0 + T \quad (2.35)$$

El origen es Uniforme y Globalmente Atractivo si para cada $\sigma > 0$ existe $T = T(\sigma) > 0$ tal que (2.35) se cumple para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$, cada $t_0 \geq 0$, cada $t \geq t_0 + T$, y cada solución $x(\cdot)$ de (2.28)

△

Definición 2.11 Se dice que el origen de (2.28) es Uniforme, Global y Asitóticamente Estable (UGAE) si es uniformemente estable y uniforme y globalmente atractivo.

△

Teorema 2.4 Segundo Teorema de Lyapunov: Sea $F : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ un mapa multivaluado, tal que existen soluciones locales de (2.28). Supóngase que existe una función de Lyapunov $V(x,t)$ estricta (\dot{V} negativa definida) tal que, para unas funciones a y $b \in K_\infty$ y $c \in K$, y para todo $t \in [0, +\infty)$ toda $x \in \mathbb{R}^n$, toda $v \in F(x,t)$, se satisface que

$$a(\|x\|) \leq V(t,x) \leq b(\|x\|) \quad (2.36)$$

$$t_1 \leq t_2 \Rightarrow V(t_2, x(t_2)) - V(t_1, x(t_1)) \leq - \int_{t_1}^{t_2} c(\|x(\tau)\|) d\tau \quad (2.37)$$

Para cada (t_1, t_2) y cada solución $x(\cdot) : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de (2.28). Bajo estas condiciones el origen de (2.28) es Uniforme, Global y Asintóticamente Estable (UGAE).

Cuando V es C^1 , para que (2.37) se cumpla es suficiente (aunque no necesario) que se satisfaga

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \langle \nabla_x V(t, x), v \rangle \leq -c(\|x(\tau)\|) \quad (2.38)$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto escalar en \mathbb{R}^n , y $\nabla_x V = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right)^T$

△

Puesto que el objetivo es garantizar disipatividad estricta en los estados de un sistema lineal retroalimentado por una función multivaluada, y la disipatividad siempre va acompañada de una función conocida como tasa de suministro, también se hace necesario hacer una extensión de la definición de este concepto [Osorio, 2009].

Definición 2.12 Una no linealidad sin memoria, que puede ser en general multivaluada y variante en el tiempo $\psi : [0, \infty) \times \mathbb{R}^q \rightrightarrows \mathbb{R}^m$,

$$y \in \psi(t, u) \quad (2.39)$$

es disipativa, si para toda $t \geq 0$, toda $u \in \mathbb{R}^q$ se cumple que:

$$\omega(y, u) \geq 0 \quad \forall y \in \psi(t, u)$$

Si la función de suministro es cuadrática, es decir

$$\omega(y, u) = \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

se dice que ψ es $(Q, S, R) - D$.

△

A través del siguiente Lema se puede garantizar estabilidad exponencial del sistema lineal retroalimentado por una función multivaluada.

Lema 2.4 [Moreno y Osorio, 2006, Osorio, 2009] Considere el sistema (2.41) representado como la interconexión de un subsistema lineal, dado por la tripleta (A, B, C) , en el lazo directo, y una no linealidad sin memoria, en general multivaluada, ψ en el lazo de realimentación

$$\Omega : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x(0) = x_0 \\ y = Cx \\ u \in -\psi(t, y) \end{cases} \quad (2.41)$$

y sea ψ tal que cumple con todas las condiciones establecidas para la existencia de soluciones de la inclusión diferencial.

Si el sistema lineal (A, B, C) es $(-R_N, S_N^T, -Q_N)$ -EDE y ψ satisface $\omega(y, u) = \omega(\psi(t, u), u) \geq 0$ con $(Q, S, R) = (Q_N, S_N, R_N)$. Entonces el punto de equilibrio $x = 0$ de (2.41) es global y exponencialmente estable.

△

El lema anterior es la base para el diseño de observadores disipativos con no linealidades fuertes.

2.4. Diseño de Observadores Disipativos

Retomando el tipo de sistemas con no linealidades multivaluadas para los cuales se puede diseñar un Observador Disipativo [Moreno y Osorio, 2006, Osorio, 2009],

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Gv + \varphi(t, y, u) \\ v &\in \psi(\sigma) \\ y &= Cx \\ \sigma &= Hx \end{aligned} \tag{2.42}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el estado, $u \in \mathbb{R}^m$ es una entrada conocida, $y \in \mathbb{R}^p$ es la salida medida y $\sigma \in \mathbb{R}^r$ es una función lineal de los estados, que no tiene que ser medible. $\varphi(t, y, u)$ es una función no lineal multivaluada de (t, y, u) , que se asume localmente Lipschitz en y , continua en u y continua a tramos en t . $\psi(\sigma)$ es una función conocida vectorial multivaluada de dimensión q que se asume dependiente de σ , es disipativa con respecto a alguna función de suministro cuadrática, es semicontinua por arriba, medible en el sentido de Lebesgue y localmente acotada, y el conjunto al que pertenece la salida de ψ es no vacío, compacto y convexo. Se debe notar que $\psi(\sigma)$ puede ser una versión convexificada de una función discontinua en x (ver sección anterior). El observador propuesto para esta estructura toma la forma presentada en [Moreno, 2004] y la extendida en [Moreno y Osorio, 2006] y [Osorio, 2009],

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + L(\hat{y} - y) + Gv_o + \varphi(t, y, u), & \hat{x}(0) &= \hat{x}_0 \\ v_o &\in \psi(\hat{\sigma} + N(\hat{y} - y)) \\ \hat{y} &= C\hat{x} \\ \hat{\sigma} &= H\hat{x} \end{aligned} \tag{2.43}$$

donde $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$, y $N \in \mathbb{R}^{r \times p}$ son matrices a diseñarse. Definiendo los errores como $e \triangleq \hat{x} - x$, $\tilde{y} \triangleq \hat{y} - y$ y $\tilde{\sigma} \triangleq \hat{\sigma} - \sigma$, la dinámica de error obtenida es

$$\begin{aligned} \dot{e} &= (A + LC)e - G(v - v_o) \\ v &\in \psi(\sigma) \\ v_o &\in \psi(\tilde{\sigma} + N(\tilde{y} - y)) \\ \tilde{y} &= Ce \\ \tilde{\sigma} &= He, \end{aligned} \tag{2.44}$$

con $e(0) = e_0 = \hat{x}_0 - x_0$. Nótese que $\hat{\sigma} + N\tilde{y} = H\hat{x} + NCe = Hx + He + NCe = \sigma + (H + NC)e$. Definiendo $z \triangleq (H + NC)e = \hat{\sigma} + N\tilde{y}$, una función de error de estimación y una nueva no linealidad $\phi(z, \sigma)$, en general multivaluada

$$\phi(z, \sigma) \triangleq \psi(\sigma) - \psi(\sigma + z) \quad (2.45)$$

la dinámica de error se puede escribir como,

$$\begin{aligned} \dot{e} &= A_L e + G v_e, & e(0) &= e_0 \\ z &= H_N e \\ v_e &\in -\phi(z, \sigma) \end{aligned} \quad (2.46)$$

donde $A_L \triangleq A + LC$, y $H_N \triangleq H + NC$ y $v_e = v - v_o$. Es importante observar que debido a (2.45), $0 \in \phi(0, \sigma)$ para todo σ , y por ende, $e = 0$ es un punto de equilibrio de (2.46). En [Moreno y Osorio, 2006, Osorio, 2009] se menciona que si el punto de equilibrio de (2.46) es uniforme, global y exponencialmente estable (UGEE), las trayectorias del observador convergen exponencialmente a las trayectorias de la planta (2.42), a pesar de que en ningún momento se exige la unicidad de solución. El concepto tradicional de observabilidad nos pide que a partir de la salida del sistema en estudio se pueda determinar unívocamente la condición inicial del estado. Lo anterior es de utilidad cuando se puede asegurar unicidad de las trayectorias solución, ya que a partir de la condición inicial se puede reconstruir unívocamente el estado. Dado que en presente estudio no se asegura unicidad de solución, no se puede asegurar la reconstrucción unívoca del estado por medio de la condición inicial, por lo que se hace necesaria otra definición de observabilidad. La siguiente definición se toma de [Vargas y Moreno, 2005], la cual es una condición suficiente para los propósitos del presente trabajo,

Definición 2.13 *Un sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x), & x(0) &= x_0 \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

*se llama de **trayectoria observable** si a cada trayectoria de salida corresponde una y sólo una trayectoria del estado.*

△

La definición anterior implica que dos trayectorias de la salida pueden ser iguales sólo si las trayectorias del estado son iguales. Cuando es posible garantizar unicidad de soluciones para el sistema en estudio, la Definición 2.13 es equivalente al caso tradicional, ya que ambas garantizan la obtención de la trayectoria del estado a partir de la señal de salida.

El diseño de observador disipativo aplicable a sistemas con no linealidades fuertes se enuncia en el siguiente teorema [Moreno y Osorio, 2006, Osorio, 2009],

Teorema 2.5 *Asúmase que la Suposición 2.1 se cumple para la no linealidad ϕ en (2.46). Además, ϕ es $(Q, S, R) - D$. Si hay matrices L y N tales que el subsistema lineal (2.46) es $(-R, S^T, -Q) - EDE$, es decir, existen una matriz $P = P^T > 0$, y un $\varepsilon > 0$ tales que*

$$\begin{bmatrix} PA_L + A_L^T P + \varepsilon P + H_N^T R H_N & PG - H_N^T S^T \\ G^T P - S H_N & Q \end{bmatrix} \leq 0 \quad (2.47)$$

entonces (2.44) es un observador uniforme, global y exponencialmente estable (UGEE) de (2.42), esto es, existen constantes $\kappa, \gamma > 0$ tales que para todo $e(0)$ y todo $t \geq 0$

$$\|e(t)\| \leq \kappa \|e(0)\| \exp(-\gamma t) \quad (2.48)$$

Demostración: Con (2.47), la aplicación del Lemma 2.4 lleva inmediatamente a $\dot{V} \leq -\varepsilon V(e)$ y ya que $V(e) = e^T P e$, (2.48) se obtiene con $\kappa = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}$, y $\gamma = \frac{\varepsilon}{2}$. ■

2.5. Algoritmo Super-Twisting Generalizado

En este apartado se estudiarán algunos de los conceptos expuestos en [Moreno, 2009]. En dicho artículo se introduce una forma generalizada del Algoritmo Super-Twisting (AST), que incluye una versión lineal del AST, el AST estándar y un AST con términos de corrección lineal extra, este nuevo algoritmo se basa en el presentado en [Moreno y Osorio, 2008]. El AST generalizado (ASTG), cuando no hay perturbaciones presentes, está descrito por la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -k_1 \phi_1(x_1) + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_2 \phi_2(x_1), \end{aligned} \quad (2.49)$$

donde $x_i, i = 1, 2$ son variables de estado escalares, k_i son ganancias positivas a ser diseñadas, y

$$\phi_1(x_1) = \mu_1 |x_1|^{1/2} \text{signo}(x_1) + \mu_2 x_1, \quad \mu_1, \mu_2 > 0 \quad (2.50)$$

$$\phi_2(x_1) = \frac{\mu_1^2}{2} \text{signo}(x_1) + \frac{2}{3} \mu_1 \mu_2 |x_1|^{1/2} \text{sign}(x_1) + \mu_2^2 x_1 \quad (2.51)$$

son términos de estabilización. Es importante notar que cuando $\mu_1 = 1$ y $\mu_2 = 0$ el AST clásico es recuperado [Levant, 1993]. Sin embargo, el ASTG (2.49) incluye términos de estabilización lineal, que son más fuertes que los terminos no lineales cuando x está lejos del origen. También cabe resaltar que las soluciones de (2.49) son todas soluciones en el sentido de Filippov [Filippov, 1988].

La siguiente función de Lyapunov propuesta para analizar estabilidad y convergencia en tiempo finito del ASTG, es tomada de [Moreno y Osorio, 2008] y reescrita en forma cuadrática en [Moreno, 2009],

$$V(x) = \zeta^T \Upsilon \zeta, \quad (2.52)$$

donde el vector $\zeta^T = [\phi_1(x_1) \quad x_2]$, con Υ una matriz positiva definida y simétrica. Lo interesante de este método es que Υ es la solución de la ecuación algebraica de Lyapunov (EAL),

$$A^T \Upsilon + \Upsilon A = -Q \quad (2.53)$$

con una elección especial de la matriz A . En la siguiente proposición, encontrada en [Moreno, 2009], se pueden revisar las condiciones para llevar a cabo el diseño de la función de Lyapunov,

Proposición 2.2 *Considere la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

donde $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, tal que A es Hurwitz. Para cada matriz $Q = Q^T > 0$ simétrica y positiva definida, la ecuación (2.52) es una función de Lyapunov fuerte y global para el AST (2.49), donde $Y = Y^T > 0$ es la única solución positiva definida y simétrica de la EAL (2.53). Además, la derivada \dot{V} de la función de Lyapunov tomada a lo largo de las trayectorias del sistema satisface la desigualdad diferencial,

$$\dot{V} \leq -\gamma_1(Q, \mu_1)V^{1/2}(x) - \gamma_2(Q, \mu_2)V(x) \quad (2.55)$$

donde

$$\begin{aligned} \gamma_1(Q, \mu_1) &\triangleq \mu_1 \frac{\lambda_{\min}\{Q\}\lambda^{1/2}\{Y\}}{2\lambda_{\max}\{Y\}} \\ \gamma_2(Q, \mu_2) &\triangleq \mu_2 \frac{\lambda_{\min}\{Q\}}{\lambda_{\max}\{P\}} \end{aligned}$$

son escalares dependientes de la selección de la matriz Q y μ_1 , μ_2 .

Demostración: Seleccionando $Q = Q^T > 0$ arbitrariamente, A es Hurwitz (ver (2.54)). El hecho de que bajo las condiciones anteriores la solución Y de la EAL (2.53) satisface las propiedades establecidas, puede ser verificado en ([Khalil, 2002]). Considere la función continua

$$V(x) = \zeta^T Y \zeta$$

donde

$$\zeta^T = [\phi_1(x_1) \quad x_2]$$

y $Y = Y^T > 0$ es una matriz constante, simétrica y positiva definida, como una candidata a función de Lyapunov para el ASTG (2.49). Note que $V(x)$ es continua y continuamente diferenciable en todas partes excepto en el conjunto $\{x_1 = 0\}$. Además, para Y positiva definida, es una función en \mathbb{R}^2 positiva definida y radialmente no acotada. Dado que las trayectorias de (2.49) no pueden permanecer en el conjunto $\{x_1 = 0\}$ antes de alcanzar el origen, \dot{V} puede ser calculado del modo usual, excepto cuando la trayectoria intercepta el conjunto $\{x_1 = 0\}$. El conjunto de instantes de tiempo cuando esto ocurre, antes que el origen sea alcanzado, es de medida cero. Si el origen es alcanzado en algún tiempo T , entonces la trayectoria permanecerá ahí. Note que se puede escribir $\phi_2(x_1) = \phi_1'(x_1)\phi_1(x_1)$, donde $\phi_1'(x_1) = \left(\mu_1 \frac{1}{2|x_1|^{1/2}} + \mu_2\right)$. Ya que

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= \begin{bmatrix} \phi_1'(x_1)\{-k_1\phi_1(x_1) + x_2\} \\ -k_2\phi_2(x_1) \end{bmatrix} \\ &= \phi_1'(x_1) \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & 0 \end{bmatrix} \zeta = \phi_1'(x_1)A\zeta \end{aligned}$$

la derivada de la candidata a función de Lyapunov es

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \dot{\zeta}^T \Upsilon \zeta + \zeta^T \Upsilon \dot{\zeta} \\ &= \phi_1'(x_1) \zeta^T (A^T \Upsilon + \Upsilon A) \zeta = -\phi_1'(x_1) \zeta^T Q \zeta\end{aligned}$$

donde Q satisface la EAL (2.53). Retomando la desigualdad para formas cuadráticas,

$$\lambda_{\min}\{\Upsilon\} \|\zeta\|_2^2 \leq \zeta^T \Upsilon \zeta \leq \lambda_{\max}\{\Upsilon\} \|\zeta\|_2^2,$$

donde

$$\|\zeta\|_2^2 = \zeta_1^2 + \zeta_2^2 = \phi_1^2(x_1) + x_2^2 = |x_1| + 2k_3|x_1|^{3/2} + k_3^2 x_1^2 + x_2^2$$

es la norma euclidiana de ζ , y se puede notar que la desigualdad

$$|x_1|^2 \leq \|\zeta\|_2 \leq \frac{V^{1/2}(x)}{\lambda_{\min}^{1/2}\{\Upsilon\}}$$

se satisface. Esto muestra que

$$\dot{V} = \phi_1'(x_1) \zeta^T \{Q\} \zeta \leq -\lambda_{\min} Q \phi_1'(x_1) \|\zeta\|_2^2 \quad (2.56)$$

$$\leq -\mu_1 \frac{\lambda_{\min}\{Q\}}{2|x_1|^{1/2}} \|\zeta\|_2^2 - \lambda_{\min}\{Q\} \mu_2 \|\zeta\|_2^2 \quad (2.57)$$

$$\leq -\mu_1 \frac{\lambda_{\min}\{Q\} \lambda_{\max}^{1/2}\{\Upsilon\}}{2\lambda_{\max}\{\Upsilon\}} V^{1/2}(x) - \mu_2 \frac{\lambda_{\min}\{Q\}}{\lambda_{\max}\Upsilon} V(x) \quad (2.58)$$

lo cual muestra que $V(x)$ es una función de Lyapunov y las trayectorias convergen en tiempo finito. ■

Observación 2.1 De (2.55) se puede deducir que ASTG converge en tiempo finito y que una cota superior puede ser estimada. Estos dos puntos se muestran en la siguiente Proposición 2.3.

△

Proposición 2.3 Suponga que $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ y $\mu_2 > 0$. Entonces la trayectoria del ASTG (2.49) que comienza en $x_0 \in \mathbb{R}^2$ converge al origen en tiempo finito si $\mu_1 = 1$, y el algoritmo llega a este punto a lo mucho en el tiempo,

$$T_e = \begin{cases} \frac{2}{\gamma_1(Q, \mu_1)} V^{1/2}(x_0) & \text{si } \mu_2 = 0 \\ \frac{2}{\gamma_2(Q, \mu_2)} \ln \left(\frac{\gamma_2(Q, \mu_2)}{\gamma_1(Q, \mu_1) V^{1/2}(x_0) + 1} \right) & \text{si } \mu_2 > 0 \end{cases} \quad (2.59)$$

donde $V(x)$, $\gamma_1(Q, \mu_1)$ y $\gamma_2(Q, \mu_2)$ son dadas en la Proposición 2.2. Cuando $\mu_1 = 0$ la convergencia es exponencial.

Demostración: Dado que la solución de la ecuación diferencial

$$\dot{v} = -\gamma_1 v^{1/2} - \gamma_2 v, \quad v(0) = v_0 \geq 0$$

está dada por

$$v(t) = \left(v_0^{1/2} - \frac{\gamma_1}{2} t \right)^2 \quad \text{si } \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0 \quad (2.60)$$

o, cuando $\gamma_1 \geq 0, \gamma_2 > 0$

$$v(t) = \exp(-\gamma_2 t) \left[v_0^{1/2} + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \left(1 - \exp\left(\frac{\gamma_2}{2} t\right) \right) \right]^2$$

De (2.55) y del principio de comparación [Khalil, 2002], se puede deducir que $V(t) \leq v(t)$ cuando $V(x_0) \leq v_0$. Por lo tanto, $x(t)$ converge a cero en tiempo finito (cuando $\mu_1 = 1$) y alcanza ese valor a lo mucho en el tiempo dado en (2.59). Cuando $\gamma_1 = 0$ la convergencia es exponencial. ■

Observación 2.2 *Es interesante mencionar que la Sección III de [Moreno, 2009] se hace un análisis de las perturbaciones que puede soportar el ASTG utilizando funciones de Lyapunov. Se comprueba que el ASTG converge en tiempo finito a pesar de cierto tipo de perturbaciones, lo cual se lleva a cabo solucionando una desigualdad matricial equivalente a la Desigualdad Algebraica de Riccati. Dentro de este trabajo se supondrá que al usar el ASTG para el desarrollo de observadores se hereda su robustez.*

△

Capítulo 3

Observador Disipativo Adaptable (ODA)

Dentro de este capítulo se presentará una nueva forma de observador adaptable, la cual considera dentro de su estructura funciones multivaluadas y parámetros desconocidos constantes. En la segunda parte se muestra las condiciones y el teorema para diseñar un observador para la nueva forma propuesta. Este observador tiene el propósito de estimar la parte no medible del estado, a pesar de la presencia de una clase de funciones multivaluadas y la presencia de parámetros desconocidos constantes, que bajo ciertas condiciones podrá estimar los parámetros desconocidos. Por último se presenta un ejemplo académico que presenta un motor de corriente directa con fricción viscosa y de Coulomb, donde se puede ver el potencial del estimador propuesto.

3.1. Forma de Observador Disipativo Adaptable (FODA)

En la Sección 1.3 se hace mención de la unión de dos estructuras especiales propuestas en [Moreno, 2001] y [Moreno, 2006] y la posibilidad de hacerlas complementarias. Esto con el propósito de tener una estructura de sistema que contenga parte de las variables de estado no medible, funciones multivaluadas y parámetros desconocidos constantes que entren en forma lineal en la dinámica.

Recordando estas configuraciones propuestas en [Moreno, 2001],

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \alpha(t, y, \xi, u) + \Gamma(t, y, \xi, u) \theta \\ \dot{\xi} &= \eta(t, y, \xi, u) \\ y_2 &= \rho(t, y, \xi, u) \end{aligned} \tag{3.1}$$

y en [Moreno y Osorio, 2006, Osorio, 2009],

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Gv + \varphi(t, y, u) \\ v &\in \psi(\sigma) \\ y_2 &= Cx \\ \sigma &= Hx \end{aligned} \tag{3.2}$$

tenemos que los estados están dados por $[y_1 \ \xi]^T$ y x respectivamente. Ahora supongamos que el sistema (3.2) se puede complementar usando (3.1), al proponer que el subsistema $\eta(\cdot)$ sea el sistema (3.2), es decir, hacer $\xi = x$, lo cual nos lleva a la siguiente estructura,

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{y}_1 = \alpha(t, y, u, \xi) + \Gamma(t, y, u, \xi) \theta \\ \dot{\xi} = A\xi + Gv + \varphi(t, y, u) \\ v \in \psi(t, \sigma) \\ y_2 = C\xi, \\ \sigma = H\xi \end{cases} \quad (3.3)$$

donde $\xi \in \mathbb{R}^{n-m_1}$ es parte del vector de estado, $\sigma \in \mathbb{R}^r$ es una función lineal del estado (no necesariamente medible), $\psi(t, \sigma)$ es una función vectorial multivaluada de dimensión s , $y^T = [y_1^T, y_2^T]$ es el vector de salida $y_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$, $y_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$, con $m = m_1 + m_2$. $\varphi(t, y, u)$ es función no lineal univaluada de (t, y, u) , continua en (y, u) . La ecuación (3.3) se ha denominado *Forma de Observador Disipativo Adaptable* (FODA).

Dado que ψ es una función multivaluada se hace uso de la Suposición 2.1, vista en la Sección 2.3, para garantizar la existencia local de soluciones. También se usará la aproximación debida a Filippov para establecer la relación entre una función multivaluada y una función discontinua [Filippov, 1988] (ver sección 2.4), de tal manera que las soluciones propuestas sean soluciones generalizadas en el sentido de Filippov.

Dentro de este trabajo no se estudiará la transformación de coordenadas que llevan al sistema a la forma (3.3), se supondrá que el sistema multivaluado (1.1) puede ser llevado a la estructura deseada, motivados por las transformaciones dadas en [Besançon, 2000], las cuales llevan al sistema a la forma (3.1) y lo general de la estructura (3.2) propuesta en [Moreno, 2004] y generalizada en [Moreno y Osorio, 2006].

3.2. Diseño Observador Disipativo Adaptable

El diseño del algoritmo propuesto en esta tesis, hace uso del observador disipativo [Moreno y Osorio, 2006, Osorio, 2009] para estimar la parte del estado desconocido, con esto se puede asegurar convergencia asintótica a cero del error en el estado y que el error en los parámetros sea acotado, pero si $\beta(\cdot)$ en (3.3) cumple con la condición de excitación persistente (2.15) y haciendo uso de las técnicas mostradas en [Moreno, 2001], se puede demostrar que tanto el error en los estados como el error en los parámetros convergen uniforme y exponencialmente a cero. El observador adaptable diseñado para (3.3), se puede ver a continuación,

$$\Sigma_{OD} : \begin{cases} \dot{\hat{y}}_1 = -k_y(\hat{y}_1 - y_1) + \alpha(t, y, u, \hat{\xi}) + \Gamma(t, y, u, \hat{\xi}) \hat{\theta} \\ \dot{\hat{\xi}} = A\hat{\xi} + L(\hat{y}_2 - y_2) + G\hat{v} + \varphi(t, y, u) \\ \hat{v} \in \psi(t, \hat{\sigma} + N(\hat{y}_2 - y_2)) \\ \hat{y}_2 = C\hat{\xi}, \\ \hat{\sigma} = H\hat{\xi} \\ \dot{\hat{\theta}} = -k_\theta \Gamma^T(t, y, \hat{\xi}, u)(\hat{y}_1 - y_1) \end{cases} \quad (3.4)$$

donde las ganancias de inyección de salida $k_y > 0$, $k_\theta > 0$, las cuales son escalares, y $L \in \mathbb{R}^{n-m_1 \times m_2}$, $N \in \mathbb{R}^{r \times m_2}$, las cuales son matrices, todas constantes, tienen que ser diseñadas.

Definiendo los errores de estimación como $e_{y_1} \triangleq \hat{y}_1 - y_1$, $e_\xi = \hat{\xi} - \xi$, $e_{y_2} \triangleq \hat{y}_2 - y_2$, $e_\sigma \triangleq \hat{\sigma} - \sigma$ y $e_\theta = \hat{\theta} - \theta$, su comportamiento dinámico puede ser escrito como

$$\Xi_{\theta} : \begin{cases} \dot{e}_{y_1} = -k_y e_{y_1} + \Gamma(t, y, u, \hat{\xi}) e_{\theta} + \Delta_{\alpha}(t, y, u, \hat{\xi}, \xi) + \\ \quad + \Delta_{\Gamma}(t, y, u, \hat{\xi}, \xi) \theta \\ \dot{e}_{\theta} = -k_{\theta} \Gamma^T(t, y, u, \hat{\xi}) e_{y_1} \end{cases} \quad (3.5a)$$

$$\Xi_D : \begin{cases} \dot{e}_{\xi} = A_L e_{\xi} - G \vartheta \\ \vartheta \in \Psi(t, \sigma) - \Psi(t, \hat{\sigma} + N e_{y_2}) \\ e_{y_2} = C e_{\xi} \\ e_{\sigma} = H e_{\xi} \end{cases} \quad (3.5b)$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha}(t, y, u, \hat{\xi}, \xi) &\triangleq \alpha(t, y, u, \hat{\xi}) - \alpha(t, y, u, \xi) \\ \Delta_{\Gamma}(t, y, u, \hat{\xi}, \xi) &\triangleq \Gamma(t, y, u, \hat{\xi}) - \Gamma(t, y, u, \xi) \\ A_L &= A + LC, \quad H_N = H + NC \end{aligned}$$

Utilizando el procedimiento mostrado en [Moreno, 2004] (ver Sección 2.4), se nota que $\hat{\sigma} + N e_{y_2} = H \hat{\xi} + N C e_{\xi} = H \xi + H e_{\xi} + N C e_{\xi} = \sigma + (H + N C) e_{\xi}$. Se define $z \triangleq (H + N C) e_{\xi} = e_{\sigma} + N e_{y_2}$, una función de estimación de error, y una nueva no linealidad incremental $\varkappa_{\sigma}(t, z)$ dada por,

$$\varkappa_{\sigma}(t, z) \triangleq \Psi(t, \sigma) - \Psi(t, \sigma + z) \quad (3.6)$$

Considerando t y σ como variables exógenas del subsistema (3.8b), la ecuación (3.6) se puede escribir de forma equivalente como

$$\varkappa(t, z) = \bigcup_{\sigma} \varkappa_{\sigma}(t, z) \quad (3.7)$$

La ecuación (3.7), indica que $\varkappa(t, z)$ (con z como entrada) representa la familia de funciones multivaluadas generada por $\varkappa_{\sigma}(t, z)$ a través los diferentes valores de la variable σ (en general dicha familia se puede considerar una nueva función multivaluada). Considerando lo anterior, la nueva dinámica de error se puede escribir como

$$\Xi_{\theta} : \begin{cases} \dot{e}_{y_1} = -k_y e_{y_1} + \Gamma(t, y, u, \hat{\xi}) e_{\theta} + \Delta_{\alpha}(t, y, u, \hat{\xi}, \xi) + \\ \quad + \Delta_{\Gamma}(t, y, u, \hat{\xi}, \xi) \theta \\ \dot{e}_{\theta} = -k_{\theta} \Gamma^T(t, y, u, \hat{\xi}) e_{y_1} \end{cases} \quad (3.8a)$$

$$\Xi_D : \begin{cases} \dot{e}_{\xi} = A_L e_{\xi} + G \vartheta \\ \vartheta \in -\varkappa(t, z) \\ z = H_N e_{\xi} \end{cases} \quad (3.8b)$$

Para la convergencia del observador (3.4) una condición de disipatividad en la no linealidad (multivaluada) $\Psi(t, \sigma)$, y algunas restricciones de crecimiento sobre Δ_{α} , y Δ_{Γ} tienen que ser impuestas.

A1) $\varkappa(t, z)$ es (Q, S, R) -Disipativa, esto es, existen matrices constantes $Q \in \mathbb{R}^{s \times s}$, $S \in \mathbb{R}^{s \times r}$, $R \in \mathbb{R}^{r \times r}$, con Q y R simétricas, tal que para cada $t \geq 0$ y $z \in \mathbb{R}^r$

$$\omega(\vartheta, z) = \vartheta^T Q \vartheta + 2\vartheta^T S z + z^T R z \geq 0, \quad \forall \vartheta \in \varkappa(t, z). \quad (3.9)$$

La condición A1) es la generalización de las condiciones de sector [Khalil, 2002] para no linealidades cuadradas, esto es, cuando $r = s$. Así, por ejemplo, si una no linealidad ψ está en el sector $[K_1, K_2]$, i.e. $(y - K_1 u)^T (K_2 u - y) \geq 0$, entonces esta es (Q, S, R) -Disipativa, con $(Q, S, R) = (-I, \frac{1}{2}(K_1 + K_2), -\frac{1}{2}(K_1^T K_2 + K_2^T K_1))$.

De (3.6) y (3.7), se deduce que para cada valor de σ se genera una función, la cual puede ser multivaluada, así el objetivo buscado con la condición A1) es verificar si la familia de funciones multivaluadas pertenece a un sector.

Tomando el caso particular de la función multivaluada que representa la fricción viscosa y de Coulomb y usando la nomenclatura de la sección tenemos $\psi(\sigma) \in F_m \text{signo}(\sigma) + \mu \sigma$, donde F_m es la fuerza límite de la fricción de Coulomb, μ es la constante de la fricción viscosa y σ representa la velocidad del sistema en turno. Al hacer uso de la ecuación (3.6), tenemos

$$\varkappa(t, z) = F_m [\text{signo}(\sigma) - \text{signo}(z + \sigma)] - \mu z. \quad (3.10)$$

Tomando $\sigma = 0$, la no linealidad puede ser restringida al sector $[-\infty, -\mu]$ como se aprecia en la Figura 3.1, por lo que se puede establecer que $\omega(\varkappa(t, z), z) = -\varkappa(t, z)z - z^2 \geq 0, \quad \forall \vartheta \in \varkappa(t, z)$.

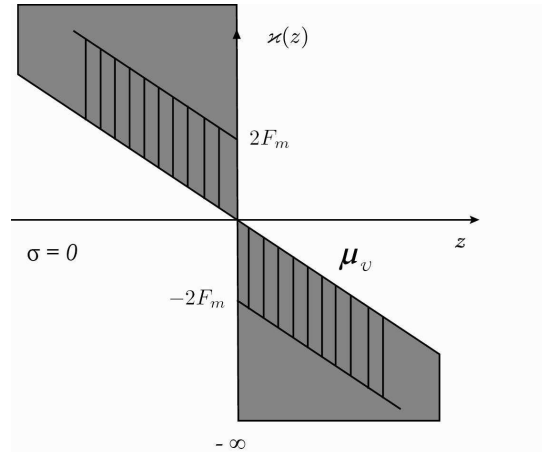


Figura 3.1: $\varkappa(t, z)$ con $\sigma = 0$ y el sector donde se encuentra contenida en gris.

Con base en la Figura 3.2, se puede ver que con $\sigma \neq 0$ el sector de la no linealidad multivaluada no cambia, por lo que la tasa de suministro se puede establecer como se había hecho anteriormente $\omega(\varkappa(t, z), z) = -\varkappa(t, z)z - z^2 \geq 0, \quad \forall \vartheta \in \varkappa(t, z)$.

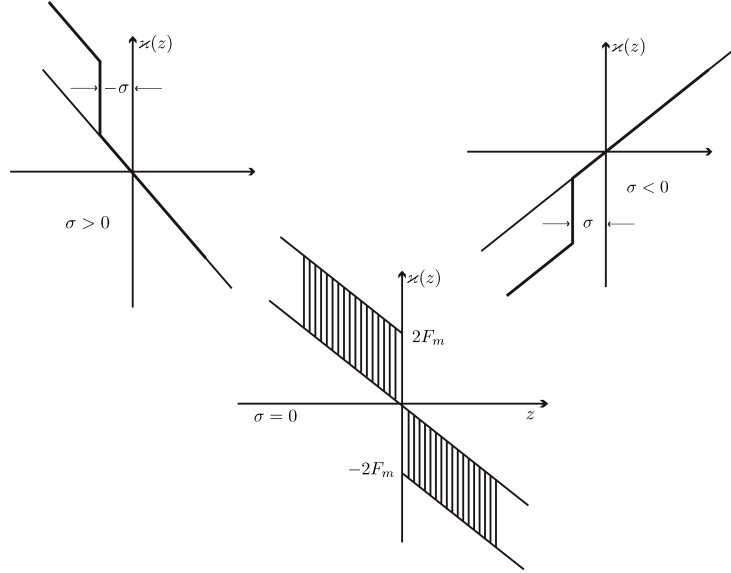


Figura 3.2: $x(t, z)$ para diferentes valores de σ .

A2) Las funciones α y Γ son continuas, y satisfacen las desigualdades:

$$\|\Delta_\alpha(t, y, u, \hat{\xi}, \xi)\| \leq \delta_\alpha \|\hat{\xi} - \xi\| \quad (3.11a)$$

$$\|\Delta_\Gamma(t, y, u, \hat{\xi}, \xi)\| \leq \delta_\Gamma \|\hat{\xi} - \xi\| \quad (3.11b)$$

$$\|\Gamma(t, y, \xi, u)\| \leq \Delta \quad (3.11c)$$

con $\delta_\alpha > 0$, $\delta_\Gamma > 0$ y $\Delta > 0$, para todo t , toda $u(\cdot) \in \mathcal{L}_\infty$, toda y , todo $\hat{\xi}$ y todo ξ .

Observación 3.1 La condición anterior debe cumplirse globalmente para que pase lo mismo con la región donde el error de estimación puede converger a cero. Aunque lo anterior es difícil de cumplir en ciertos casos, siempre existe la posibilidad de restringirse a una región del estado.

△

Para la convergencia de los parámetros se requiere que $\Gamma(\cdot)$ cumpla con la condición de excitación persistente (2.15). El siguiente teorema provee más condiciones para la convergencia del Observador Adaptable (3.4).

Teorema 3.1 Suponga que las condiciones A1) y A2) son satisfechas y que k_y y k_θ son elegidas arbitrariamente mayores a cero. Asuma además que existen matrices $P = P^T > 0$, N y L , y un escalar $\delta > 0$ tal que la siguiente desigualdad

$$\begin{bmatrix} PA_L + A_L^T P + \delta P + H_N^T R H_N & PG - H_N^T S^T \\ G^T P - S H_N & Q \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.12)$$

se satisface, y el subsistema lineal (3.8b) es EDE como se muestra en el Lema 2.4. Entonces el sistema (3.4) es un observador para (3.3), y los errores de estimación $\|\hat{y}_1(t) - y_1(t)\|$ y $\|\hat{\xi}(t) - \xi(t)\|$ convergen asintóticamente a cero cuando $t \rightarrow \infty$, y el error de estimación $\|\hat{\theta}(t) - \theta(t)\|$ permanece acotado. Si adicionalmente, la matriz $\Gamma(t, y, \xi, u)$ tiene excitación persistente, de acuerdo con el Lema 2.1, entonces el error de observación y el error en los parámetros convergen exponencialmente a cero.

Demostración: Considere primero el subsistema (3.8b), con la candidata a función de Lyapunov $V(e_\xi) = e_\xi^T P e_\xi$, donde $P = P^T > 0$ es una solución de (3.12) para algún $\delta > 0$. Su derivada es

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_\xi) &= e_\xi^T A_L^T P e_\xi + \vartheta^T G^T P e_\xi + e_\xi^T P A_L e_\xi + e_\xi^T P G \vartheta \\ &= \begin{bmatrix} e_\xi \\ \vartheta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_L^T P + P A_L & P G \\ G^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_\xi \\ \vartheta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Debido a A1)

$$\begin{bmatrix} \varkappa(t, z) \\ z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varkappa(t, z) \\ z \end{bmatrix} \geq 0, \forall (t, z, \sigma)$$

y por lo tanto

$$\begin{bmatrix} e_\xi \\ -\varkappa \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} H_N^T R H_N & -H_N^T S^T \\ -S H_N & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_\xi \\ -\varkappa \end{bmatrix} \geq 0, \forall (t, z, \sigma)$$

y debido a (3.12)

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \begin{bmatrix} e_\xi \\ \vartheta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_L^T P + P A_L + H_N^T R H_N & P G - H_N^T S^T \\ G^T P - S H_N & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_\xi \\ \vartheta \end{bmatrix} \\ &\leq -\delta e_\xi^T P e_\xi = -\delta V(e_\xi). \end{aligned}$$

Y así e_ξ converge exponencialmente a cero. Ahora considere para el sistema (3.8) la siguiente candidata a función de Lyapunov

$$V_e(e_{y1}, e_\theta, e_\xi) = \frac{1}{2} e_{y1}^T e_{y1} + \frac{1}{2k_\theta} e_\theta^T e_\theta + \rho e_\xi^T P e_\xi \quad (3.13)$$

Diferenciando (3.13) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_e &= e_{y1}^T \dot{e}_{y1} + \frac{1}{k_\theta} \dot{e}_\theta^T e_\theta + \rho \dot{e}_\xi^T P e_\xi + \rho e_\xi^T P \dot{e}_\xi \\ &= -k_y e_{y1}^T e_{y1} + e_{y1}^T \Gamma(\cdot) e_\theta + e_{y1}^T \Delta_\alpha(\cdot) + e_{y1}^T \Delta_\Gamma(\cdot) \theta \\ &\quad - e_\theta^T \Gamma^T(\cdot) e_{y1} - \rho \delta e_\xi^T P e_\xi \\ &= -k_y e_{y1}^T e_{y1} + e_{y1}^T \Delta_\alpha(\cdot) + e_{y1}^T \Delta_\Gamma(\cdot) \theta - \rho \delta e_\xi^T P e_\xi \\ &\leq -k_y \|e_{y1}\|^2 + \|e_{y1}\| \|\Delta_\alpha(\cdot)\| + \|e_{y1}\| \|\Delta_\Gamma(\cdot)\| \|\theta\| - \rho \delta \lambda_{\min}(P) \|e_\xi\|^2 \end{aligned}$$

y por A2) y (3.11) tenemos

$$\dot{V}_e \leq -k_y \|e_{y1}\|^2 + (\delta_\alpha + \delta_\Gamma \|\theta\|) \|e_{y1}\| \|e_\xi\| - \rho \delta \lambda_{\min}(P) \|e_\xi\|^2 \quad (3.14)$$

$$\dot{V}_e \leq - \begin{bmatrix} \|e_{y1}\| \\ \|e_\xi\| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_y & -\frac{1}{2}(\delta_\alpha + \delta_\Gamma \|\theta\|) \\ -\frac{1}{2}(\delta_\alpha + \delta_\Gamma \|\theta\|) & \rho \delta \lambda_{\min}(P) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|e_{y1}\| \\ \|e_\xi\| \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

\dot{V}_e es negativa semidefinida si ρ es seleccionada tal que

$$\rho > \frac{(\delta_\alpha + \delta_\Gamma \|\theta\|)^2}{4k_y \delta \lambda_{\min}(P)}, \quad (3.16)$$

lo cual es siempre posible, dado que θ es un vector desconocido constante, con una norma finita $\|\theta\|$. Esto implica que $\|e_{y1}\|$, $\|e_\xi\|$ y $\|e_\theta\|$ son acotadas. Además de (3.11) se deduce que $\|\dot{e}_{y1}\|$ también es acotada, así que de (3.14) se deduce que $e_{y1} \in \mathcal{L}_2$, como se muestra en la parte de abajo, donde E es la matriz constante de la ecuación (3.15).

$$\dot{V}_e \leq -\lambda_{\min}(E) (\|e_{y1}\|^2 + \|e_\xi\|^2) = -\lambda_{\min}(E) \|e_{y1}\|^2 - \lambda_{\min} \|e_\xi\|^2 \quad (3.17)$$

$$\leq -\lambda_{\min}(E) \|e_{y1}\|^2 \quad (3.18)$$

Integrando lo anterior

$$\int_0^t \dot{V}_e d\tau \leq -\lambda_{\min}(E) \int_0^t \|e_{y1}\| d\tau \quad (3.19)$$

$$\Rightarrow V_e(t) - V_e(0) \leq -\lambda_{\min}(E) \int_0^t \|e_{y1}\| d\tau \quad (3.20)$$

Como $V_e(t)$ es monótonamente decreciente y acotada por abajo,

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} V_e(t) = V_e(\infty)$$

existe y es finito. Por lo que se puede deducir lo siguiente,

$$\int_0^t \|e_{y1}\| d\tau \leq \frac{1}{\lambda_{\min}(E)} (V_e(0) - V_e(\infty)) < \infty \quad (3.21)$$

Usando el Lema de Barbalat se tiene que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_{y1}(t)\| = 0$.

Ahora, considerando el sistema Ξ_θ (3.8a) sin “perturbaciones”, i.e. $\Delta_\alpha(t, y, u, \hat{\xi}, \xi) = 0$, $\Delta_\Gamma(t, y, u, \hat{\xi}, \xi) = 0$.

$$\begin{aligned} \dot{e}_{y1} &= -k_y e_{y1} + \Gamma(t, y, u, \hat{\xi}) e_\theta \\ \dot{e}_\theta &= -k_\theta \Gamma^T(t, y, u, \hat{\xi}) e_{y1} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Para cada $(y, u, \hat{\xi})$ este es un sistema Lineal Variante en el Tiempo con un punto de equilibrio $(e_{y1}, e_\theta) = 0$ *uniformemente estable*, como la función de Lyapunov $W(e_{y1}, e_\theta) = \frac{1}{2} e_{y1}^T e_{y1} + \frac{1}{2k_\theta} e_\theta^T e_\theta$

muestra. Además, si $\Gamma(t, y, u, \hat{\xi})$ satisface la *condición de excitación persistente* (2.15), tomando en cuenta el Lema 2.1 y la condición algebraica 2 del Lema 2.2, esto último por el hecho de que $\hat{\xi} = \xi + e_\xi$, el punto de equilibrio $(e_{y1}, e_\theta) = 0$ es *exponencialmente estable*. El teorema converso de Lyapunov [Khalil, 2002] asegura que existe una función de Lyapunov cuadrática variante en el tiempo (posiblemente dependiente de las señales $(y, u, \hat{\xi})$) para el subsistema (3.22),

$$W(t, e_{y1}, e_\theta) = (e_{y1}^T, e_\theta^T) \Pi(t) (e_{y1}^T, e_\theta^T)^T,$$

con una matriz $\Pi(t)$ simétrica, acotada y positiva definida, i.e. $0 < c_1 I \leq \Pi(t) \leq c_2 I$, y tal que su derivada

$$\dot{W}(t, e_{y1}, e_\theta) = - (e_{y1}^T, e_\theta^T) \mathcal{Q}(t) (e_{y1}^T, e_\theta^T)^T,$$

con $\mathcal{Q}(t)$ una matriz positiva definida, simétrica, i.e. $0 < c_3 I \leq \mathcal{Q}(t)$.

Usando la función de Lyapunov generada a través del teorema converso se puede generar una candidata a función de Lyapunov para el sistema (3.8), con el objetivo de comprobar que el punto de equilibrio $(e_{y1}, e_\theta, e_\xi)$ es global y exponencialmente estable,

$$V_e(t, e_{y1}, e_\theta, e_\xi) = W(t, e_{y1}, e_\theta) + \rho e_\xi^T P e_\xi, \quad (3.23)$$

donde $\rho > 0$ es una constante a ser seleccionada, y con derivada (se establece $f(t) = \Delta_\alpha(t, y, u, \hat{\xi}, \xi) + \Delta_\Gamma(t, y, u, \hat{\xi}, \xi) \theta$)

$$\begin{aligned} \dot{V}_e &\leq \begin{pmatrix} e_{y1} \\ e_\theta \end{pmatrix}^T \Pi(t) \begin{pmatrix} e_{y1} \\ e_\theta \end{pmatrix} - \rho \delta e_\xi^T P e_\xi \\ &\leq - \begin{pmatrix} e_{y1} \\ e_\theta \end{pmatrix}^T \mathcal{Q}(t) \begin{pmatrix} e_{y1} \\ e_\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \end{pmatrix}^T \Pi(t) \begin{pmatrix} e_{y1} \\ e_\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{y1} \\ e_\theta \end{pmatrix}^T \Pi(t) \begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \end{pmatrix} - \rho \delta e_\xi^T P e_\xi \\ &\leq -c_3 \left\| \begin{pmatrix} e_{y1} \\ e_\theta \end{pmatrix} \right\|^2 + 2c_2 (\delta_\alpha + \delta_\Gamma \|\theta\|) \left\| \begin{pmatrix} e_{y1} \\ e_\theta \end{pmatrix} \right\| \|e_\xi\| - \rho \delta \lambda_{\min}(P) \|e_\xi\|^2, \end{aligned}$$

donde (3.11) fue usada y c_2 y c_3 son constante positivas tomadas del teorema converso de Lyapunov [Khalil, 2002]. Eligiendo

$$\rho > \frac{c_2^2 (\delta_\alpha + \delta_\Gamma \|\theta\|)^2}{\delta \lambda_{\min}(P) c_3}$$

\dot{V}_e se vuelve negativa definida y se puede concluir que el punto de equilibrio $(e_{y1}^T, e_\theta^T, e_\xi^T) = 0$ es global y exponencialmente estable, siempre y cuando $\Gamma(t, y, u, \hat{\xi})$ cumpla con la condición de excitación persistente. ■

El diseño del observador se puede dividir en dos partes; primero el diseño del observador disipativo (revisar Sección 2.3) para el subsistema ξ de la FODA (3.3), que consiste en identificar las no linealidades y las matrices Q , S y R que satisfagan la desigualdad (3.9), que en ciertos casos se reduce a las condiciones de sector para no linealidades cuadradas. El siguiente paso es encontrar matrices P , L y N tales que se satisfaga la desigualdad (3.12), una forma de solucionar esta última, es manipular ciertos elementos de la desigualdad de tal forma que se obtenga una LMI (Linear Matrix Inequality)

en los términos P , PL y δ . Esto se consigue al fijar N , para deshacerse del término cuadrático formado por $H_N^T R H_N$ y sustituyendo δP por δI , también cabe mencionar que para situaciones especiales se puede aplicar el teorema del círculo, como se puede revisar en el ejemplo de este capítulo. El segundo paso es proponer ganancias k_y y k_θ , ambas se eligen con un valor mayor a cero. En el caso de k_θ para modificar la velocidad de convergencia de los parámetros estimados, siempre y cuando Γ sea de excitación persistente. También es importante notar, que bajo la condición de excitación persistente para Γ , se demostró la existencia de una función de Lyapunov (3.23), cuya derivada es negativa definida. Esta función de Lyapunov será de gran utilidad en la propuesta mostrada en el siguiente capítulo.

3.3. Ejemplo: Motor de cd con fricción

Dentro de este apartado se tomará el modelo de motor de corriente directa (CD) mostrado en [Krishnan, 2001], pero en el ejemplo que veremos en este trabajo se añadirá fricción de Coulomb, por lo que se diseñara un ODA. El motor de CD se ha visto desplazado por motores de corriente alterna debido al menor costo de estos últimos. De cualquier forma el motor de CD aún se puede ver en varias aplicaciones donde se requiere precisión o el espacio es reducido.

El circuito equivalente de una armadura (rotor) de motor de CD (ver Figura 3.3), se basa en el hecho de que ésta tiene una resistencia R_a , una inductancia L_a y una fuerza electromotriz (fem) inducida e . El motor tiene la tarea de transformar energía eléctrica en mecánica con un torque T_e a una velocidad rotacional de ω_m . La ecuación que describe la dinámica de la armadura se muestra a continuación

$$v = e + R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} \quad (3.24)$$

donde v es la tensión de entrada del motor, R_a es la resistencia de la armadura, i_a es la corriente que fluye a través del circuito y L_a es la inductancia de la armadura.

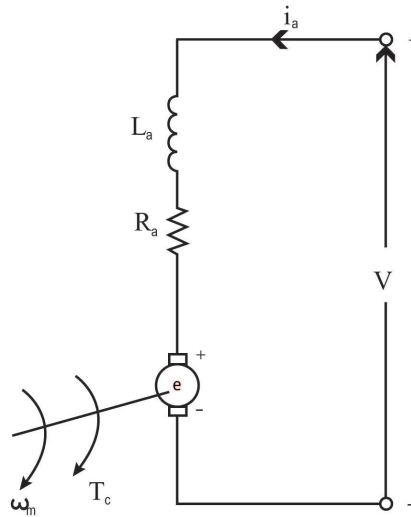


Figura 3.3: Circuito equivalente del rotor de un motor de cd

Por simplicidad la parte mecánica del motor es modelada como un momento de inercia J con una coeficiente de fricción viscosa B , pero en este caso añadiremos a la fricción viscosa, fricción de Coulomb, es decir, utilizaremos la función multivaluada $B_1(\omega_m) \in F_m \text{signo}(\omega_m) + \mu_v \omega_m$, donde F_m es la fuerza límite de la fricción de Coulomb y μ_v es la constante de fricción viscosa. La dinámica de esta parte del motor queda descrita como,

$$J \frac{d\omega_m}{dt} + B_1(\omega_m) = T_e - T_l = T_a \quad (3.25)$$

donde T_e es el par eléctrico, T_l es el par de carga y T_a es el par debido a la aceleración. El modelo dinámico del motor con carga está dado por las ecuaciones (3.24) y (3.25). En este caso se considera el motor sin carga, esto es $T_l = 0$.

Tomando en cuenta el hecho de que $T_e = k_b i_a$ y $e = k_b \omega_m$, donde k_b es la constante de la fem inducida, el modelo en el espacio de estados esta dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{R_a}{L_a} x_1 - \frac{k_b}{L_a} x_3 + \frac{v}{L_a} \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{J} [k_b x_1 - B_1(x_3)] \\ y &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde x_1 es la corriente de la armadura, x_2 es la posición angular de la flecha y x_3 es la velocidad angular. Estableciendo una relación con la nomenclatura usada en la forma de observador (3.3), $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $\xi = [x_2 \quad x_3]^T$, $\theta = \left[\frac{R_a}{L_a} \quad \frac{1}{L_a} \right]^T$, $v \in \Psi = F_m \text{signo}(\sigma) + \mu_v \sigma$ y $\sigma = x_3$. El ODA (3.4) para el sistema (3.26) está dado por,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= -\hat{\theta}_1 x_1 - \hat{\theta}_2 (k_b \hat{x}_3 + u(t)) - k_y (\hat{x}_1 - x_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \hat{x}_3 + l_1 (\hat{x}_2 - x_2) \\ \dot{\hat{x}}_3 &= x_1 - \hat{v} + l_2 (\hat{x}_2 - x_2) \\ \hat{v} &\in F_m \text{signo}(\hat{x}_3 + N(\hat{x}_2 - x_2)) + \mu_v (\hat{x}_3 + N(\hat{x}_2 - x_2)) \\ \dot{\hat{\theta}} &= -k_\theta \begin{bmatrix} -x_1 & -\hat{x}_3 & v \end{bmatrix}^T (\hat{x}_1 - x_1) \end{aligned} \quad (3.27)$$

donde $\hat{\sigma} = \hat{x}_3$, $\hat{\theta} = \left[\frac{\hat{R}_a}{L_a} \quad \frac{1}{L_a} \right]$ considerando L_a y R_a desconocidas para el sistema (3.26). El objetivo es diseñar k_y , l_1 , l_2 y N de tal forma que (3.27) pueda estimar la velocidad angular a pesar de tener R_a y L_a desconocidas.

El primer paso que se considera para desarrollar el estimador es el diseño del Observador Disipativo, las matrices necesarias para construirlo, con base en el sistema descrito por (3.27), se muestran a continuación,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J} \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0] \quad H = [0 \quad 1]$$

A partir de la no linealidad multivaluada $v = B_1(x_3) : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ y su estimado se debe deducir una no linealidad incremental como la dada en (3.6), la cual se describe en la ecuación de error (3.8b). Usando la nomenclatura de la sección anterior tenemos $\vartheta \in -\varkappa(t, z) = F_m [\text{signo}(z + \sigma) - \text{signo}(\sigma)] +$

$\mu_\nu z$, a partir de la Figura 3.4 se puede deducir que \varkappa pertenece al sector $[-\infty, -\mu_\nu]$ o equivalentemente $-\varkappa \in [\mu_\nu, \infty]$,

$$\omega = -\varkappa z - \mu_\nu z^2 \geq 0, \quad \forall \sigma, z \in \mathbb{R}, \quad (3.28)$$

con $Q = 0$, $S = -1/2$ y $R = -\mu_\nu$, lo anterior queda ilustrado en las Figuras 3.1 y 3.4,

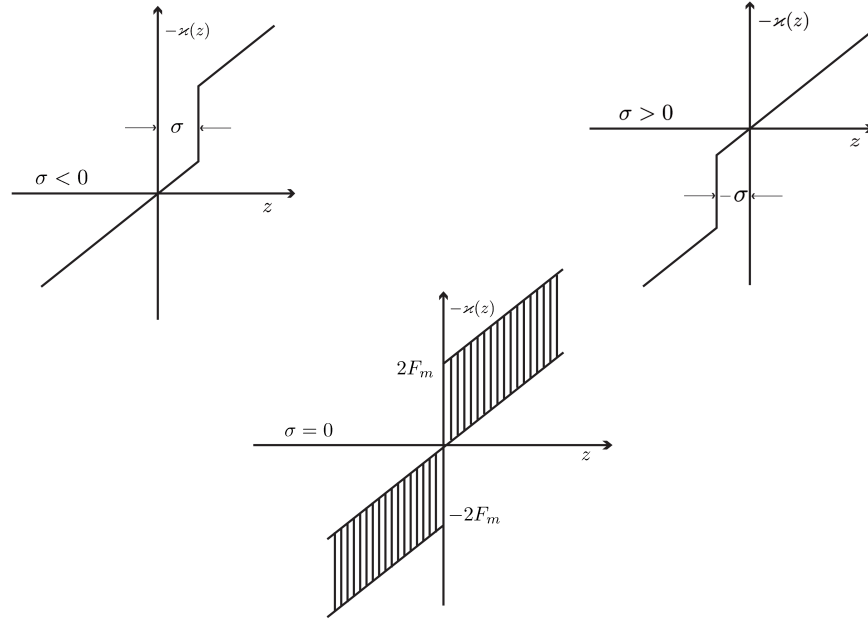


Figura 3.4: $-\varkappa(z, \sigma)$ para diferentes valores de σ

Puesto que el ejemplo sólo tiene el objetivo de ilustrar el método, los siguientes valores tomados para los parámetros son totalmente arbitrarios. $R_a = 1.5$, $L_a = 1$, $k_b = 1$, $F_m = 1$ y $\mu_\nu = 1$. Dado que la no linealidad es un mapeo de \mathbb{R} en \mathbb{R} , y el método disipativo utiliza la generalización de la condición de sectores [Khalil, 2002] para no linealidades cuadradas, en este caso podemos hacer uso del teorema del círculo [Khalil, 2002]. Para esto se define la función de transferencia de $-\vartheta$ a z del subsistema (3.8b), es decir,

$$G(s) = -H_N(sI - A_L)^{-1}G = [N \quad 1] \begin{bmatrix} s - l_1 & -1 \\ -l_2 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{s + N - l_1}{s^2 - l_1 s - l_2}$$

El sector de la no linealidad negativa es $-\varkappa \in [\mu_\nu, \infty)$, entonces para la satisfacción del teorema del círculo es necesario seleccionar N , l_1 y l_2 de tal manera que,

$$H(s) = \frac{G(s)}{1 + \mu_\nu G(s)} = \frac{s + N - l_1}{s^2 + (\mu_\nu - l_1)s + \mu_\nu N - \mu_\nu l_1 - l_2}$$

sea Estrictamente Positiva Real (SPR por sus siglas en ingles) [Khalil, 2002], esto se logra con las siguientes desigualdades

$$N > l_1, \quad \mu_v > l_1, \quad \mu_v N - \mu_v l_1 > l_2 \quad y \quad \mu_v > N$$

La siguiente parte del diseño es obtener las ganancias para k_y y k_θ , las cuales deben ser positivas y suficientemente grandes según la demostración vista en la sección anterior, por último k_θ se utiliza para hacer más rápida la convergencia de los parámetros, tomando todo lo anterior en cuenta se proponen los siguientes valores para las ganancias de inyección,

$$k_y = 10, \quad k_\theta = 190, \quad l_1 = -10, \quad l_2 = -1 \quad y \quad N = -1$$

para generar la simulación cuyos resultados pueden ser vistos en las Figuras 3.5, 3.6 y 3.7. Las condiciones iniciales para la planta son $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$ y $x_3(0) = 0$.

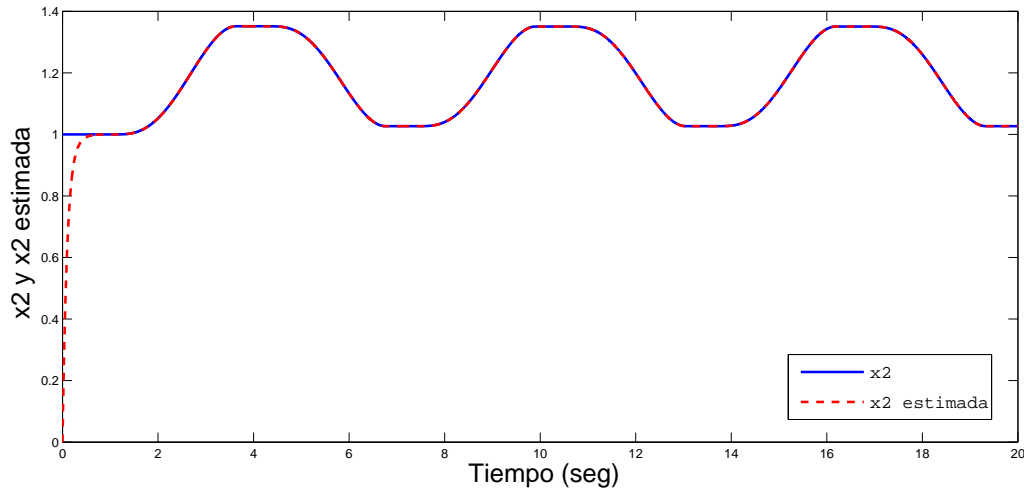


Figura 3.5: Posición de la flecha de motor x_2 y su estimado \hat{x}_2

En la Figura 3.5, se puede ver la convergencia de la posición estimada \hat{x}_2 a la posición real x_2 , aunque no tengan la misma condición inicial. La excitación persistente es dada por una señal senoidal de amplitud 1.5 y frecuencia de 1rad/seg, y la parte chata de la señal se debe a la fricción viscosa y de Coulomb presente en el sistema.

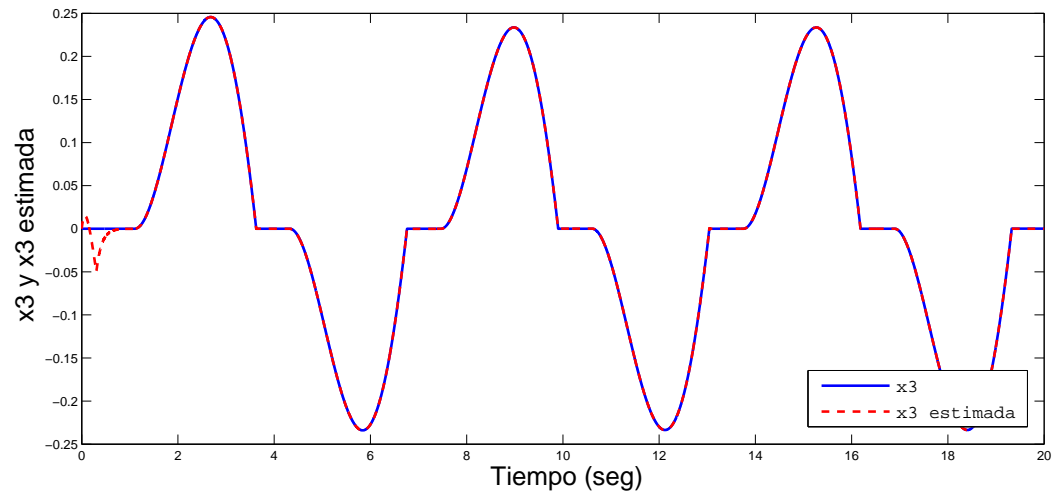


Figura 3.6: Velocidad angular de la flecha de motor x_3 y su estimado \hat{x}_3

En la Figura 3.6, se ve la convergencia de la velocidad estimada \hat{x}_3 a la velocidad real x_3 , a pesar de que el sistema pasa frecuentemente por cero, que es donde se tiene la no linealidad fuerte.

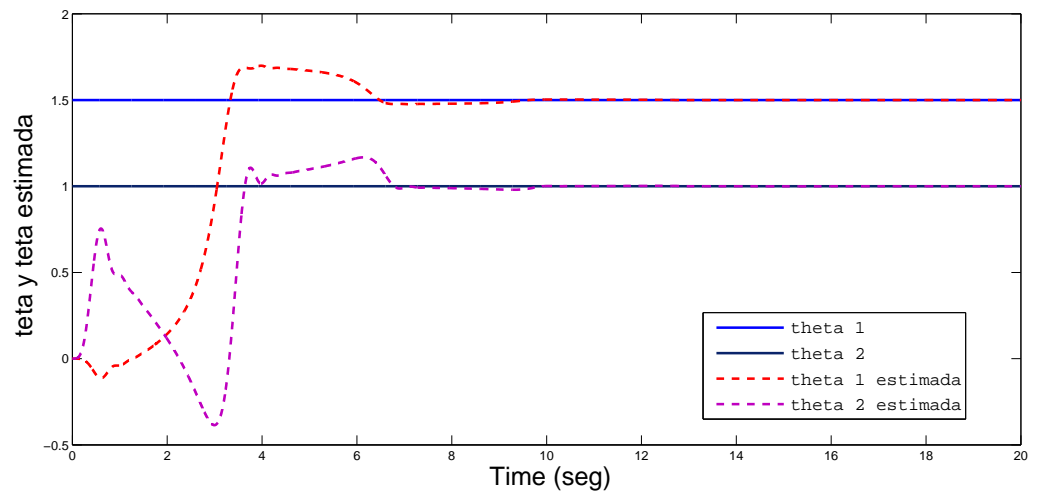


Figura 3.7: Parámetros reales y sus estimados.

En la Figura 3.7 se puede apreciar la convergencia de los parámetros, la cual es muy rápida principalmente por la elección de la ganancia k_θ , la cual tiene un valor de 190.

Capítulo 4

Observador Disipativo Adaptable con Algoritmo Super-Twisting Generalizado (ASTG)

En este capítulo se presenta una nueva forma de observador adaptable, en la cual se debilita la condición de grado relativo, entre la salida y los parámetros desconocidos del sistema, de 1 a 2. Se propone un observador para esta nueva forma, así como las condiciones para su diseño. El observador tiene el propósito de estimar la parte del estado no medible y los parámetros desconocidos del sistema bajo ciertas condiciones. El aumento del grado relativo, lo cual fue posible gracias al uso del Algoritmo Super-Twisting Generalizado que funge como diferenciador en este caso. Se incluye este algoritmo dentro del diseño ya que cuenta con una función de Lyapunov, lo que permite hacer el análisis de convergencia de una forma clásica.

4.1. Forma de Observador Disipativo Adaptable con ASTG

Note que la forma (3.1) y la FOA (3.3) tienen grado relativo 1 entre los parámetros desconocidos θ y la salida y . Es intuitivamente claro, que si la salida y pudiera ser exactamente diferenciada, tal que \dot{y} estuviera disponible, la condición de grado relativo podría ser debilitada a un grado relativo dos. Aunque, no existen los diferenciadores perfectos, este objetivo puede cumplirse por medio de un Algoritmo Super-Twisting Generalizado ASTG propuesto en [Moreno, 2009] (ver Sección 2.5). Consideraremos por lo tanto sistemas en la forma

$$\Sigma_e : \begin{cases} \dot{y}_1 = \eta \\ \dot{\eta} = \alpha(t, y, u, \xi, \eta) + \Gamma(t, y, u, \xi, \eta) \theta \\ \dot{\xi} = A\xi + Gv + \varphi(t, y, u) \\ v \in \psi(\sigma) \\ y_2 = C\xi, \\ \sigma = H\xi \end{cases} \quad (4.1)$$

esta es la misma forma (3.3) con grado relativo dos entre θ y y . Se asume que η , la derivada de y_1 , no es medible. Para (4.1) se asumen que la mismas condiciones impuestas sobre (3.3) son satisfechas.

Una desventaja es que la forma (4.1) está restringida al caso escalar, es decir, para $y_1 \in \mathbb{R}$.

4.2. Diseño de Observador Disipativo Adaptable con ASTG

Un Observador Adaptable se propone como

$$\Sigma_o : \begin{cases} \dot{y}_1 = -k_1 \phi_1(e_{y_1}) + \hat{\eta}_s \\ \dot{\hat{\eta}}_s = -k_2 \phi_2(e_{y_1}) + \alpha(t, y, u, \hat{\xi}, \hat{\eta}_s) + \Gamma(t, y, u, \hat{\xi}, \hat{\eta}_s) \hat{\theta} \\ \dot{\hat{\eta}}_D = -k_\eta (\hat{\eta}_D - \hat{\eta}_s) + \alpha(t, y, u, \hat{\xi}, \hat{\eta}_s) + \Gamma(t, y, u, \hat{\xi}, \hat{\eta}_s) \hat{\theta} \\ \dot{\hat{\xi}} = A \hat{\xi} + L(\hat{y}_2 - y_2) + G \hat{v} + \varphi(t, y, u) \\ \hat{v} \in \Psi(\hat{\sigma} + N(\hat{y}_2 - y_2)) \\ \hat{y}_2 = C \hat{\xi}, \\ \hat{\sigma} = H \hat{\xi} \\ \dot{\hat{\theta}} = -k_\theta \Gamma^T(t, y, u, \hat{\xi}, \hat{\eta}_s) (\hat{\eta}_D - \hat{\eta}_s) \end{cases} \quad (4.2)$$

donde

$$\phi_1(e_{y_1}) = \mu_1 |e_{y_1}|^{1/2} \text{sign}(e_{y_1}) + \mu_2 e_{y_1}, \quad \mu_1, \mu_2 > 0 \quad (4.3)$$

$$\phi_2(e_{y_1}) = \frac{\mu_1^2}{2} \text{sign}(e_{y_1}) + \frac{2}{3} \mu_1 \mu_2 |e_{y_1}|^{1/2} \text{sign}(e_{y_1}) + \mu_2^2 e_{y_1} \quad (4.4)$$

son las funciones de inyección de salida del Algoritmo Super-Twisting Generalizado (ASTG), introducido en [Moreno, 2009]. μ_1 y μ_2 son constantes positivas fijas. Además, las ganancias de inyección de salida $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $k_\eta > 0$, $k_\theta > 0$, las cuales son escalares, y $L \in \mathbb{R}^{n-m_1 \times m_2}$, $N \in \mathbb{R}^{r \times m_2}$, las cuales son matrices, todas constantes, tienen que ser diseñadas. La dinámica de los errores de estimación, incluyendo $e_{\eta_D} = \hat{\eta}_D - \eta$, $e_{\eta_s} = \hat{\eta}_s - \eta$, pueden ser escritas como

$$\Xi_{ST} : \begin{cases} \dot{e}_{y_1} = -k_1 \phi_1(e_{y_1}) + e_{\eta_s}, \\ \dot{e}_{\eta_s} = -k_2 \phi_2(e_{y_1}) + \chi_2(t) \end{cases} \quad (4.5a)$$

$$\Xi_\theta : \begin{cases} \dot{e}_{\eta_D} = -k_\eta e_{\eta_D} + \Gamma(t, y, u, \hat{\xi}, \hat{\eta}_s) e_\theta + f_1(t) \\ \dot{e}_\theta = -k_\theta \Gamma^T(t, y, u, \hat{\xi}, \hat{\eta}_s) e_{\eta_D} + f_2(t) \end{cases} \quad (4.5b)$$

$$\Xi_D : \begin{cases} \dot{e}_\xi = A_L e_\xi + G \vartheta \\ \vartheta \in -\varkappa(t, z) \\ z = H_N e_\xi \end{cases} \quad (4.5c)$$

donde $\varkappa(t, z)$ es la no linealidad definida en (3.6),

$$\chi(t) = \begin{bmatrix} \chi_1(t) \\ \chi_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma(\cdot) e_\theta + \Delta_\alpha(\cdot) + \Delta_\Gamma(\cdot) \theta \end{bmatrix}$$

$$f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_\eta e_{\eta_s} + \Delta_\alpha(\cdot) + \Delta_\Gamma(\cdot) \theta \\ k_\theta \Gamma^T(t, y, u, \hat{\xi}, \hat{\eta}_s) e_{\eta_s} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Delta_\alpha(t, y, u, \hat{\xi}, \hat{\eta}_s, \xi, \eta) &= \alpha(t, y, u, \hat{\xi}, \hat{\eta}_s) - \alpha(t, y, u, \xi, \eta) \\ \Delta_\Gamma(t, y, u, \hat{\xi}, \hat{\eta}_s, \xi, \eta) &= \Gamma(t, y, u, \hat{\xi}, \hat{\eta}_s) - \Gamma(t, y, u, \xi, \eta)\end{aligned}$$

y hemos usado el hecho de que $\hat{\eta}_D - \hat{\eta}_s = e_{\eta_D} - e_{\eta_s}$. Como en la Sección previa, la condición disipativa A1) sobre \varkappa será impuesta. En lugar de A2) las siguientes condiciones sobre el crecimiento de las no linealidades α y Γ serán asumidas:

A3) Las funciones α y Γ son continuas, y satisfacen las desigualdades:

$$\left\| \Delta_\alpha(t, y, u, \hat{\xi}, \hat{\eta}_s, \xi, \eta) \right\| \leq \delta_{\alpha\xi} \left\| \hat{\xi} - \xi \right\| + \delta_{\alpha\eta} \left\| \hat{\eta}_s - \eta \right\| \quad (4.8a)$$

$$\left\| \Delta_\Gamma(t, y, u, \hat{\xi}, \hat{\eta}_s, \xi, \eta) \right\| \leq \delta_{\Gamma\xi} \left\| \hat{\xi} - \xi \right\| + \delta_{\Gamma\eta} \left\| \hat{\eta}_s - \eta \right\| \quad (4.8b)$$

$$\left\| \Gamma(t, y, u, \hat{\xi}, \hat{\eta}_s) \right\| \leq \Delta \quad (4.8c)$$

con $\delta_\alpha > 0$, $\delta_\Gamma > 0$ y $\Delta > 0$, para todo t , todo $u(\cdot) \in \mathcal{L}_\infty$, todo ξ , todo $\hat{\xi}$, todo η y todo $\hat{\eta}$.

El siguiente teorema provee condiciones para la convergencia del Observador Adaptable (4.2).

Teorema 4.1 *Suponga que las condiciones A1) y A3) son satisfechas. Asuma además que existen matrices $P = P^T > 0$, N y L , y un escalar $\delta > 0$ tal que la desigualdad matricial (3.12) se satisface, y la matriz $\Gamma(t, y, u, \hat{\xi}, \hat{\eta}_s)$ tiene excitación persistente, de acuerdo a la ecuación (2.15). Entonces para cada conjunto compacto del vector de parámetros $\Theta_p = \{\theta \in \mathbb{R}^q \mid \|\theta\| \leq p\}$, existe un valor de μ_2 tal que el sistema (4.2) es un observador adaptable exponencial para (4.1), tal que los errores de estimación $\|\hat{y}_1(t) - y_1(t)\|$, $\|\hat{\eta}_D(t) - \eta(t)\|$, $\|\hat{\eta}_s(t) - \eta(t)\|$, $\|\hat{\xi}(t) - \xi(t)\|$ y el error de estimación de los parámetros $\|\hat{\theta}(t) - \theta(t)\|$ converge exponencialmente a cero cuando $t \rightarrow \infty$. Además, los errores de estimación $\|\hat{y}_1(t) - y_1(t)\|$ y $\|\hat{\eta}_s(t) - \eta(t)\|$ convergen en tiempo finito a cero.*

Demostración: Note que, cuando $e_{\eta_s} = 0$, los subsistemas (4.5b) (4.5c) corresponden a la dinámica de error (3.8), que de acuerdo con el Teorema 3.1 tiene un punto de equilibrio exponencialmente estable, si $\Gamma(t, y, u, \hat{\xi}, \hat{\eta}_s)$ es persistentemente excitada. El teorema converso de Lyapunov provee una función de Lyapunov cuadrática (ver la demostración del Teorema 3.1)

$$V_2(t, e_2) = e_2^T \text{diag} \{ \Pi(t), \rho P \} e_2$$

donde $e_2^T = (e_{\eta_D}^T, e_\theta^T, e_\xi^T)$, y $\rho > 0$ es una constante. El subsistema (4.5a) es un algoritmo supertwisting. Esto puede ser reescrito en terminos del vector $\zeta^T = (\phi_1(e_{y1}), e_{\eta_s})$ como

$$\begin{aligned}\dot{\zeta} &= \begin{pmatrix} \phi_1'(e_{y1}) (-k_1 \phi_1(e_{y1}) + e_{\eta_s}) \\ -k_2 \phi_2(e_{y1}) + \chi_2(t) \end{pmatrix} \\ &= \phi_1'(e_{y1}) \mathcal{A} \zeta + \chi(t)\end{aligned}$$

donde

$$\chi(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma(\cdot) e_\theta + \Delta_\alpha(\cdot) + \Delta_\Gamma(\cdot) \theta \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \phi_1'(e_{y1}) = \frac{\mu_1}{2|e_{y1}|^1/2} + \mu_2$$

y la relación $\phi_2(e_{y1}) = \phi_1'(e_{y1}) \phi_1(e_{y1})$ ha sido usada. Se utiliza una función de Lyapunov como la vista en la Sección 2.5, $V_1(e_1) = \zeta^T \Upsilon \zeta$, donde $\Upsilon = \Upsilon^T > 0$ es la única solución positiva definida y simétrica de la Ecuación Algebraica de Lyapunov $\mathcal{A}^T \Upsilon + \Upsilon \mathcal{A} = -\Omega$ con una $\Omega = \Omega^T > 0$ arbitraria, y $e_1^T = (e_{y1}^T, e_{\eta s}^T)$. Para el sistema (4.5) una función candidata de Lyapunov se propone como

$$V_e(t, e_1, e_2) = \zeta^T \Upsilon \zeta + e_{\eta\theta}^T \Pi(t) e_{\eta\theta} + \rho e_\xi^T P e_\xi,$$

donde $e_{\eta\theta}^T = (e_{\eta\theta}^T, e_\theta^T)$, $\rho > 0$ es una constante positiva, y $\Omega = I$, la matriz identidad. Su derivada es

$$\begin{aligned} \dot{V}_e &= \phi_1'(e_{y1}) \zeta^T (\mathcal{A}^T \Upsilon + \Upsilon \mathcal{A}) \zeta + 2\chi^T(t) \Upsilon \zeta - e_{\eta\theta}^T \mathcal{Q}(t) e_{\eta\theta} + \\ & f^T(t) \Pi(t) e_{\eta\theta} + e_{\eta\theta}^T \Pi(t) f(t) - \rho \delta e_\xi^T P e_\xi \\ & \leq -\phi_1'(e_{y1}) \|\zeta\|^2 + 2\lambda_{\max}(\Upsilon) \Delta \|e_{\eta\theta}\| \|\zeta\| + 2\lambda_{\max}(\Upsilon) (\delta_\alpha \eta + \delta_\Gamma \eta \|\theta\|) \|\zeta\|^2 \\ & + 2\lambda_{\max}(\Upsilon) (\delta_\alpha \xi + \delta_\Gamma \xi \|\theta\|) \|e_\xi\| \|\zeta\| - c_3 \|e_{\eta\theta}\|^2 \\ & + 2c_2 (k_\eta + \delta_\alpha \eta + k_\theta \Delta + \delta_\Gamma \eta \|\theta\|) \|e_{\eta\theta}\| \|\zeta\| \|e_{\eta\theta}\| \\ & + c_2 (\delta_\alpha \xi + \delta_\Gamma \xi \|\theta\|) \|e_\xi\| \|e_{\eta\theta}\| - \rho \delta \lambda_{\min}(P) \|e_\xi\|^2 \\ & \leq - \begin{bmatrix} \|\zeta\| \\ \|e_{\eta\theta}\| \\ \|e_\xi\| \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} g & \gamma^T \\ \gamma & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\zeta\| \\ \|e_{\eta\theta}\| \\ \|e_\xi\| \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} g &= \mu_2 + 2\lambda_{\max}(\Upsilon) (\delta_\alpha \eta + \delta_\Gamma \eta \|\theta\|) \\ G &= \begin{bmatrix} c_3 & -\frac{1}{2}c_2 (\delta_\alpha \xi + \delta_\Gamma \xi \|\theta\|) \\ * & \rho \delta \lambda_{\min}(P) \end{bmatrix} \\ \gamma^T &= [\gamma_1 \quad \gamma_2] \\ \gamma_1 &= -\lambda_{\max}(\Upsilon) \Delta - c_2 (k_\eta + k_\theta \Delta + \delta_\alpha \eta + \delta_\Gamma \eta \|\theta\|) \\ \gamma_2 &= -\lambda_{\max}(\Upsilon) (\delta_\alpha \xi + \delta_\Gamma \xi \|\theta\|) \end{aligned}$$

y las desigualdades

$$\begin{aligned} \|f(t)\| &\leq (k_\eta + \delta_\alpha \eta + k_\theta \Delta + \delta_\Gamma \eta \|\theta\|) \|e_{\eta s}\| + (\delta_\alpha \xi + \delta_\Gamma \xi \|\theta\|) \|e_\xi\| \\ &\leq (k_\eta + \delta_\alpha \eta + k_\theta \Delta + \delta_\Gamma \eta \|\theta\|) \|\zeta\| + (\delta_\alpha \xi + \delta_\Gamma \xi \|\theta\|) \|e_\xi\| \\ \|\chi(t)\| &\leq \Delta \|e_\theta\| + (\delta_\alpha \eta + \delta_\Gamma \eta \|\theta\|) \|e_{\eta s}\| + (\delta_\alpha \xi + \delta_\Gamma \xi \|\theta\|) \|e_\xi\| \\ &\leq \Delta \|e_{\eta\theta}\| + (\delta_\alpha \eta + \delta_\Gamma \eta \|\theta\|) \|\zeta\| + (\delta_\alpha \xi + \delta_\Gamma \xi \|\theta\|) \|e_\xi\| \end{aligned}$$

han sido usadas, estas pueden ser derivadas de (4.8). \dot{V}_e es negativa definida si

$$g > 0 \quad (4.9a)$$

$$G - \frac{1}{g} \gamma \gamma^T > 0 \quad (4.9b)$$

La condición (4.9a) puede ser lograda eligiendo $\mu_2 > 0$ suficientemente grande. Para satisfacer la condición (4.9b) se requiere que $G > 0$. Esto siempre puede ser logrado debido al parámetro libre ρ , como se muestra a continuación,

$$\rho > \frac{c_2^2 (\delta_{\alpha\xi} + \delta_{\Gamma\xi} \|\theta\|)^2}{4\delta \lambda_{\min}(P) c_3}.$$

Se sigue fácilmente que (4.9b) también puede ser satisfecha eligiendo μ_2 suficientemente grande. En general, el requerimiento del valor de μ_2 depende de la cota de los parámetros desconocidos $\|\theta\|$. Para mostrar la convergencia en tiempo finito del subsistema (4.5a) al estado original η del sistema (4.2), considere, una vez más, la función de Lyapunov $V_1(e_1) = \zeta^T \Upsilon \zeta$ (con $\Omega = I$). Su derivada es

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \phi_1'(e_{y1}) \zeta^T (\mathcal{A}^T \Upsilon + \Upsilon \mathcal{A}) \zeta + 2\chi^T(t) \Upsilon \zeta \\ &\leq -\left(\frac{\mu_1}{2} - 2|\chi_2(t)| \|\Upsilon\|\right) \|\zeta\| - \mu_2 \|\zeta\|^2 \\ &\leq -\frac{1}{\lambda_{\max}^{1/2}(\Upsilon)} \left(\frac{\mu_1}{2} - 2|\chi_2(t)| \|\Upsilon\|\right) V_1^{1/2} - \frac{\mu_2}{\lambda_{\max}(\Upsilon)} V_1. \end{aligned}$$

Dado que $|\chi_2(t)| \rightarrow 0$ se puede decir que después de un tiempo t_1 estará acotada, por lo tanto,

$$\frac{1}{\lambda_{\max}^{1/2}(\Upsilon)} \left(\frac{\mu_1}{2} - 2|\chi_2(t)| \|\Upsilon\|\right) < \text{constante} \quad (4.10)$$

lo que nos llevaría al caso que se muestra en la Proposición 2.3. Aunque se desconozca t_1 para calcular el tiempo de convergencia, se puede decir que $e_1(t) \rightarrow 0$ en tiempo finito. ■

El primer paso para diseñar el observador, al igual que en capítulo anterior es obtener un estimador de estado para el subsistema ξ de (4.1), lo cual es hecho desde un punto de vista disipativo propuesto para sistemas con funciones multivaluadas en [Moreno y Osorio, 2006, Osorio, 2009] (ver Sección 2.3 y capítulo anterior). Después se elige k_η con un valor mayor a cero, k_1 y k_2 se obtienen con base en la EAL (2.53), μ_2 se elige de tal forma que se cumpla (4.9a) para el compacto Θ_p mencionado en el Teorema 4.1 y por último k_θ se elige con base en la velocidad de convergencia deseada para los parámetros desconocidos. El valor sugerido en [Moreno, 2009] para μ_1 es 1.

Es importante resaltar la doble estimación del estado η en (4.1), por parte del observador (4.2), la primera estimación $\hat{\eta}_s$ tiene el propósito de converger al estado real η y la segunda estimación $\hat{\eta}_D$ converge al estimado $\hat{\eta}_s$, es decir, después de un tiempo finito, el valor exacto de η en el sistema (4.1) está disponible, así que desde ese momento el observador se comporta como si η y y_1 fueran medibles. Otro punto importante es que el ASTG es robusto contra algunas perturbaciones fuertes [Moreno, 2009]. Aunque no se ha hecho el análisis aquí, se deduce que el observador adaptable propuesto hereda tales propiedades de robustez.

4.3. Ejemplo: Sistema Masa Rotacional y Translacional

En este documento se presentará un ejemplo que combina sistemas mecánicos translacionales y rotacionales, el cual se muestra en la figura 4.1. La masa y el resorte están conectados a un disco por medio de un cable flexible. Realmente, el resorte se usa para representar como se comprime el cable. La masa M está sujeta a una fuerza externa $u(t)$. El objetivo del ejemplo es diseñar un Observador Disipativo Adaptable con ASTG, para el sistema de masas rotacional y translacional, considerando medibles la posición de la masa rotacional y translacional, fricción viscosa constante en la masa rotacional y en la masa translacional se considera fricción de Coulomb, lo cual representa una no linealidad fuerte, en este caso el objetivo del observador es estimar las velocidades, y algunos parámetros de la masa rotacional.

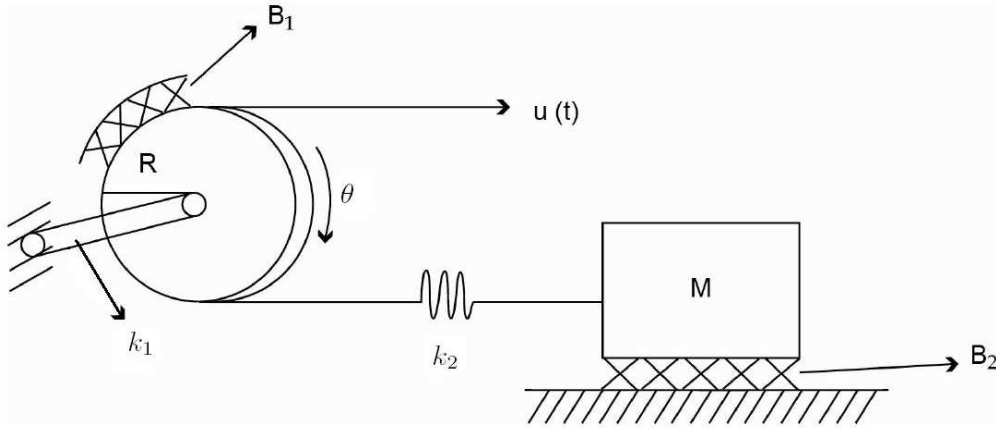


Figura 4.1: Sistema masa translacional y rotacional

Para el modelo de la Figura 4.1 se toman θ y x como las posiciones medibles de las masas rotacional y translacional respectivamente, J es el momento de inercia de la masa con respecto al eje, d_1 es la constante de torsión de la flecha de la masa rotacional, R es el radio del disco, d_2 es la constante de restitución del resorte, ω es la velocidad angular de la masa rotacional, $\dot{\omega}$ es la aceleración angular, v es la velocidad de la masa translacional y \dot{v} es la aceleración de la masa translacional. Tomando en cuenta las variables anteriores se pueden deducir las siguientes ecuaciones

$$J\dot{\omega} + B_1\omega + d_1\theta + Rd_2(R\theta - x) - u(t) = 0 \quad (4.11)$$

$$d_2(R\theta - x) = B_2v + M\dot{v} \quad (4.12)$$

Las ecuaciones (4.11) y (4.12) quedan representadas en el espacio de estados como sigue

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= \frac{1}{J} [-B_1 x_2 - d_1 x_1 + R d_2 x_3 - R^2 d_2 x_1 + u(t)] \\
\dot{x}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_4 &= \frac{1}{M} [R d_2 x_1 - d_2 x_3 - B_2(x_4)]
\end{aligned}$$

donde:

x_1 es la posición de la masa rotacional (θ).

x_2 es la velocidad de la masa rotacional (ω).

x_3 es la posición de la masa translacional (x).

x_4 es la velocidad de la masa translacional (v).

Para la implementación del Observador Disipativo Adaptable se consideraran medibles x_1 y x_3 , es decir como salidas conocidas. En la forma de Observador Disipativo Adaptable con ASTG el sistema queda como sigue

$$\dot{y}_1 = x_2 \quad (4.14a)$$

$$\dot{x}_2 = [-x_1 \quad -x_2 \quad u - R^2 d_2 x_1 + R d_2 x_3] \theta \quad (4.14b)$$

$$\dot{y}_2 = x_4 \quad (4.14c)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{M} [R d_2 x_1 - d_2 x_3 - B_2(x_4)] \quad (4.14d)$$

donde J , B_1 y k_1 se consideran parámetros desconocidos, es decir, $\theta = \left[\frac{d_1}{J} \quad \frac{B_1}{J} \quad \frac{1}{J} \right]^T$ y $B_2(x_4)$ es la no linealidad generada por la fricción de Coulomb, la cual se describe como

$$B_2(x_4) \in F_m \text{signo}(x_4) + \mu_v(x_4) \quad (4.15)$$

donde, $F_m \geq 0$ es la fuerza límite de la fricción de Coulomb, $\mu_v \geq 0$ es la constante de fricción viscosa.

El observador propuesto es el siguiente

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{y}}_1 &= \hat{x}_{s2} - k_1 \phi_1(e_{y1}) \\
\dot{\hat{x}}_{s2} &= -k_2 \phi_2(e_{y1}) + [-y_1 \quad -\hat{x}_{s2} \quad u - R^2 d_2 y_1 + R d_2 \hat{x}_3] [\hat{\theta}_1 \quad \hat{\theta}_2 \quad \hat{\theta}_3]^T \\
\dot{\hat{x}}_{D2} &= -k_\eta (\hat{x}_{D2} - \hat{x}_{s2}) + [-y_1 \quad -\hat{x}_{s2} \quad u - R^2 d_2 y_1 + R d_2 \hat{x}_3] [\hat{\theta}_1 \quad \hat{\theta}_2 \quad \hat{\theta}_3]^T \\
\dot{\hat{y}}_2 &= \hat{x}_4 + l_1 e_{y2} \\
\dot{\hat{x}}_4 &= \frac{1}{M} (R d_2 y_1 - d_2 y_2 - \hat{v}) + l_2 e_{y2} \\
\hat{v} &\in F_m \text{signo}(\hat{\sigma} + N e_{y2}) + \mu_v(\hat{\sigma} + N e_{y2}) \\
\hat{y}_1 &= x_1 \\
\hat{y}_2 &= \hat{x}_3 \\
\hat{\sigma} &= \hat{x}_4 \\
\dot{\hat{\theta}} &= -k - \theta [-y_1 \quad -\hat{x}_{s2} \quad u - R^2 d_2 y_1 + R d_2 \hat{x}_3]^T (\hat{x}_{D2} - \hat{x}_{s2})
\end{aligned} \quad (4.16)$$

con $e_{y_1} = \hat{y}_1 - y_1$, $e_{y_2} = \hat{y}_2 - y_2$.

El primer paso que se considera para desarrollar el estimador es el diseño del Observador Disipativo, las matrices necesarias para construirlo, con base en el sistema descrito por (4.16), se muestran a continuación

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{M} \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0] \quad H = [0 \quad 1]$$

A partir de la no linealidad multivaluada $v = B_2(x_4) : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ y su estimado se debe deducir una no linealidad incremental como la dada en (3.6), la cual se describe en la ecuación de error (4.5). Usando la nomenclatura del ejemplo anterior tenemos $\vartheta \in -\varkappa(t, z, \sigma) = F_m[\text{signo}(\sigma) - \text{signo}(z + \sigma)] - \mu_v z$, a partir de una inspección se puede probar que la v pertenece al sector $[-\infty, -\mu_v]$, lo cual implica una tasa de suministro cuadrática,

$$\omega = -\varkappa z - \mu_v z^2 \geq 0, \quad \forall \sigma, z \in \mathbb{R}, \quad (4.17)$$

con $Q = 0$, $S = -1/2$ y $R = -\mu_v$, lo anterior queda ilustrado en la Figura 3.4.

Para realizar los cálculos numéricos se tomaron los siguientes valores de manera arbitraria, $M = 1$, $k_1 = 0,2$, $k_2 = 0,3$, $B_1 = 0,5$, $J = 1$, $R = 0,5$, $F_m = 0,2$ y $\mu_v = 0,2$. Dado que la no linealidad es un mapeo de \mathbb{R} en \mathbb{R} , y el método disipativo utiliza la generalización de la condición de sectores [Khalil, 2002] para no linealidades cuadradas, en este caso podemos hacer uso del teorema del círculo [Khalil, 2002]. Para esto se define la función de transferencia de $-\vartheta$ a z del subsistema (4.5c), es decir

$$G(s) = -H_N(sI - A_L)^{-1}G = [N \quad 1] \begin{bmatrix} s - l_1 & -1 \\ -l_2 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{s + N - l_1}{s^2 - l_1 s - l_2}$$

El sector de la no linealidad negativa es $-\varkappa \in [\mu_v, \infty)$, entonces para la satisfacción del teorema del círculo es necesario seleccionar N , l_1 y l_2 de tal manera que

$$H(s) = \frac{G(s)}{1 + \mu_v G(s)} = \frac{s + N - l_1}{s^2 + (\mu_v - l_1)s + \mu_v N - \mu_v l_1 - l_2}$$

sea Estrictamente Positiva Real (SPR por sus siglas en ingles) [Khalil, 2002], esto se logra con las siguientes desigualdades

$$N > l_1, \quad \mu_v > l_1, \quad \mu_v N - \mu_v l_1 > l_2 \quad \text{y} \quad \mu > N$$

La siguiente parte del diseño es obtener las ganancias para k_1 , k_2 , k_η , k_θ , μ_2 y μ_1 , para la demostración de convergencia en tiempo finito del algoritmo ASTG se usó el valor de $\mu_1 = 1$ (ver Sección 4.2), k_1 , k_2 y k_η deben ser positivas y suficientemente grandes según la demostración vista en esta sección, por último k_θ se utiliza para hacer más rápida la convergencia de los parámetros, tomando todo lo anterior en cuenta se proponen los siguientes valores para las ganancias de inyección

$$\mu_2 = 2, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = 2, \quad k_\eta = 1, \quad k_\theta = 5, \quad l_1 = -1, \quad l_2 = -1 \quad \text{y} \quad N = -1$$

para generar la simulación cuyos resultados pueden ser vistos en las Figuras 4.2, 4.3 y 4.4. Las condiciones iniciales para la planta son $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 1$ y $x_4(0) = 0$.

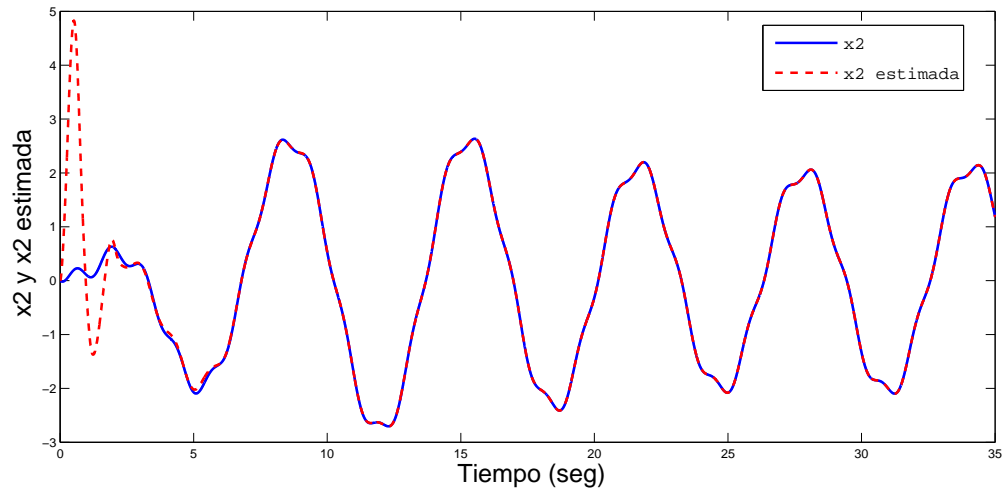


Figura 4.2: Velocidad de la masa rotacional x_2 y su estimado \hat{x}_2 .

En la Figura 4.2, se puede ver la estimación de la velocidad de la masa rotacional, donde el sobreimpulso presentado se debe a que la condición inicial de la posición en ambas masas es 1.

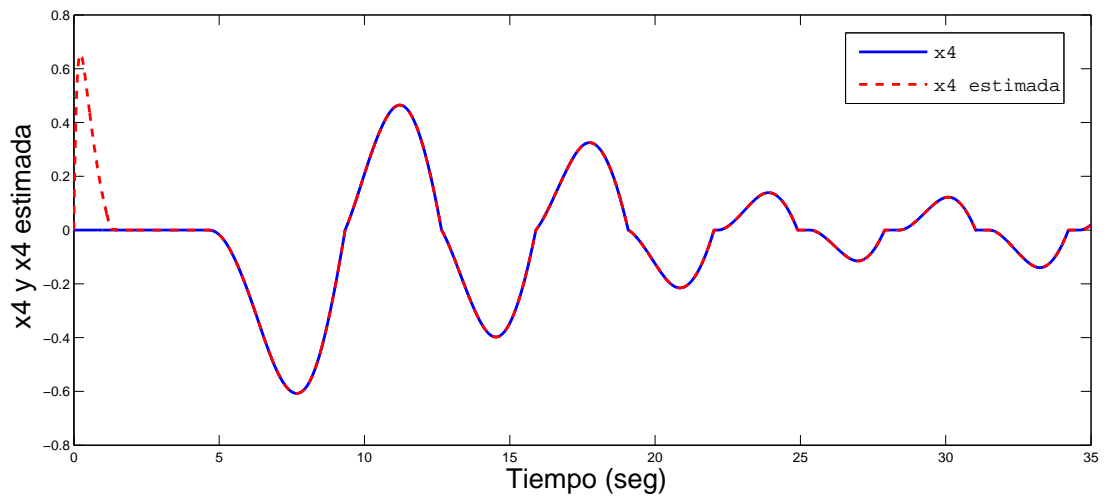


Figura 4.3: Velocidad de la masa translacional x_4 y su estimado \hat{x}_4 .

En la figura 4.3, se puede ver la convergencia de la velocidad estimada de la masa translacional \hat{x}_4 al estado original x_4 , se nota que aunque x_4 adquiere frecuentemente el valor cero, que es donde se presenta el valor conjunto para la función multivaluada, el seguimiento es muy bueno.

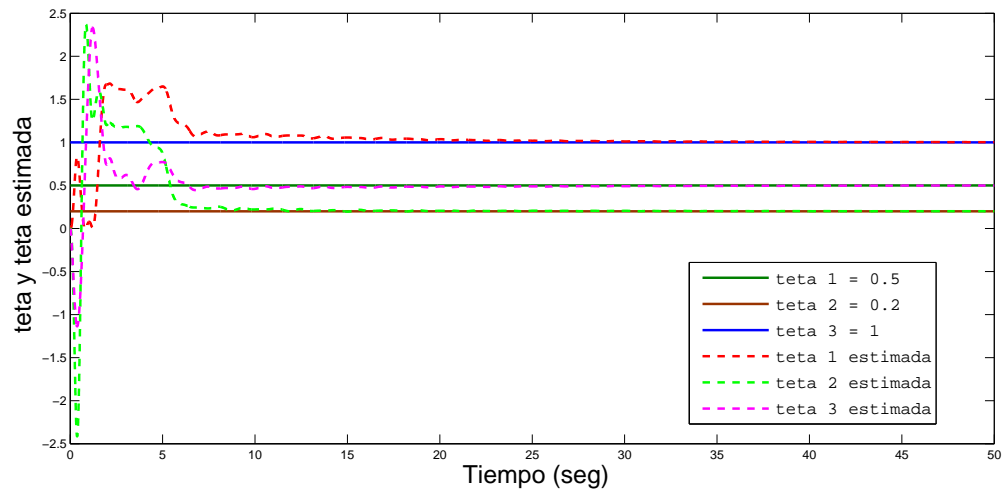


Figura 4.4: Parámetros reales y sus estimados.

En la figura 4.4, se muestra la convergencia de los parámetros. Debido a la necesidad de excitación persistente, y la presencia de 3 parámetros desconocidos, se utilizaron 2 señales senoidales sumadas de entrada $u(t) = \text{sen}(t) + 0,8\text{sen}(5t)$ donde la frecuencia esta en rad/seg .

Capítulo 5

Conclusiones y Trabajo a Futuro

Dentro de la revisión hecha en la literatura no se encontraron observadores que estimaran el estado cuando la planta en estudio contiene no linealidades fuertes y parámetros desconocidos. En este trabajo se propone una nueva forma de observador adaptable, denominada “Forma de Observador Disipativo Adaptable” (FODA). La FODA define la estructura que debe tener el sistema para el cual se quiere diseñar un observador. La estructura propuesta esta basada en la forma (1.3), que posteriormente fue extendida a (1.4) y en la clase de sistemas para los cuales se puede diseñar un observador disipativo con no linealidades multivaluadas (1.5). La combinación de las estructuras anteriores permite tener un sistema, donde se encuentra la presencia de estado no medible, parámetros constantes desconocidos y una clase de no linealidades multivaluadas, para el cual se hizo el diseño del “Observador Disipativo Adaptable” (ODA). Se dan las condiciones bajo la cuales el ODA puede estimar la parte del estado no medible y los parámetros desconocidos. El análisis de convergencia del error de estimación se hace por medio de una función de Lyapunov y el Teorema de Barbalat. En la parte final de esta primera etapa, se plantea un ejemplo académico donde se puede notar el potencial de la herramienta propuesta.

En la segunda parte del trabajo se evidencia la necesidad de grado relativo 1 entre la salida y los parámetros desconocidos del sistema para los cuales se puede diseñar un observador. Esta condición es relajada a 2 mediante el uso del Algoritmo Super-Twisting Generalizado (ASTG) como diferenciador, este algoritmo presenta la ventaja de tener una función de Lyapunov de fácil diseño para el análisis de convergencia. Se toma la forma propuesta en la primera parte de la investigación (3.3) y se extiende el grado relativo, entre la salida y los parámetros desconocidos, a 2 (4.1), aunque esto sólo ha sido comprobado para el caso escalar.

Se dan las condiciones para la existencia de un observador capaz de estimar el estado no medible y los parámetros desconocidos, a pesar del incremento del grado relativo, aunque por la forma en la que se hizo la demostración, la estimación debe ser simultanea, es decir, se debe cumplir con la condición de excitación persistente para poder estimar el estado, la misma que permite la convergencia de los parámetros. A pesar de que se utilizó el Algoritmo Super-Twisting, fue posible utilizar una función de Lyapunov para demostrar la convergencia de la dinámica de error a cero. La función de Lyapunov propuesta, hace uso de los conceptos presentados en [Moreno, 2009], y del análisis de convergencia para el Observador Disipativo Adaptable. Por último se propone un ejemplo académico para hacer notar el desarrollo eventual del método propuesto.

El trabajo propuesto permite extender la investigación en varias direcciones, pero la primera será extender la forma de observador disipativo adaptable con grado relativo 2 al caso multivariable, una consecuencia natural de esto es extender la estructura al caso donde hay varios grados relativos.

Es interesante la propuesta de una función de Lyapunov fuerte, para prescindir de la utilización del teorema converso de Lyapunov en el análisis de convergencia del Observador Disipativo Adaptable con ASTG, esto permitiría hacer un estudio más transparente y añadiría robustez al sistema. También es importante establecer las condiciones para las cuales un sistema puede ser transformado a la nueva forma que pueda ser desarrollada durante la investigación. En resumen se buscaría la extensión de la clase de sistemas con parámetros desconocidos, parte del estado no medible y no linealidades multivaluadas para los cuales se puede diseñar un observador disipativo adaptable.

Bibliografía

- [Arcak y Kokotovic, 2001] Arcak, M. y Kokotovic, P. (2001). Nonlinear observers: a circle criterion design and robustness analysis. *Automatica*, vol. 37 no. 12:pp. 1923–1930.
- [Bacciotti y Rosier, 2001] Bacciotti, A. y Rosier, L. (2001). *Lyapunov functions and stability in control theory*. 2nd Ed. New York. Springer-Verlang.
- [Bastin y Gervers, 1988] Bastin, G. y Gervers, M. R. (1988). Stable adaptive observers for nonlinear time-varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 33 no. 7:pp. 650–658.
- [Besançon, 2000] Besançon, G. (2000). Remarks on nonlinear adaptive observer design. *Systems & Control Letters*, 41:pp. 271–280.
- [Besançon, 2007] Besançon, G. (2007). *Nonlinear Observers and Application*. Springer-Verlang Berlin Heidelberg.
- [Blanke y Loostman, 1999] Blanke, M. y Loostman, T. F. (1999). Adaptive observer for diesel fault detection in a ship propulsion benchmark. *Proceedings of the Fifth European Control Conference*, Karlsruhe, Germany.
- [Brogliato y Heemels, 2009] Brogliato, B. y Heemels, W. (2009). Observer design for lur'e systems with multivalued mappings: A passivity approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 54 no. 8:pp. 1996–2001.
- [Brogliato et al., 2007] Brogliato, B., Lozano, R., Mashke, B., y Egelad, O. (2007). *Dissipative System Analysis and Control, Theory and Applications*. Springer 2nd Edition.
- [Canudas de Wit et al., 1999] Canudas de Wit, C., Horowitz, R., y Tsiotras, P. (1999). Model-based observers for tire/road contact friction prediction. *H. Nijmeijer, T. Fossen (Eds.), New Direction in Nonlinear Observer Design, Lecture Notes in Control and Information Sciences*.
- [Cho y Rajamani, 1997] Cho, Y. M. y Rajamani, R. (1997). A systematic approach to adaptive observer synthesis for nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 42 no. 4:pp. 534–537.
- [Davila et al., 2006] Davila, J., Fridman, L., y Poznyak, A. (2006). Observation and identification of mechanical systems via second order sliding modes. *Journal of Control.*, vol. 79, no. 10:pp. 1251–1262.

- [Farza et al., 2009] Farza, M., M'Saad, M., Maatoug, T., y Kamoun, M. (2009). Adaptive observers for nonlinear parameterized class of nonlinear systems. *Automatica.*, 45:pp. 2292–2299.
- [Filippov, 1988] Filippov, A. F. (1988). *Differential Equations with Discontinuous Righthand side*. Mathematics and its Applications (Soviet Series). Kluwer, Dordrecht, The Netherlands.
- [Gauthier et al., 1992] Gauthier, J.-P., Hammouri, H., y Othman, S. (1992). A simple observer for nonlinear systems. *Applications to bioreactors*, vol. 37:pp. 2292–2299.
- [Grip et al., 2010] Grip, H. F., Jhoansen, T. A., Imsland, L., y Kaasa, G.-O. (2010). Parameter estimation and compensation in systems with nonlinearly parametrized perturbations. *Automatica*, vol. 46:pp. 19–28.
- [Hill y Moylan, 1980] Hill, D. J. y Moylan, P. J. (1980). Dissipative dynamical systems: Basic input-output and state properties. *Journal of the Franklin Institute*, vol. 309:pp. 327–357.
- [Khalil, 2002] Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, Upsaddle River, New Jersey 3rd. edition.
- [Krishnan, 2001] Krishnan, R. (2001). *Electric Motor Drives. Modeling, Analysis and Control*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.
- [Levant, 1993] Levant, A. (1993). Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International Journal of Control*, vol. 58 no. 6:pp. 1247–1263.
- [Marino y Tomei, 1995] Marino, R. y Tomei, P. (1995). *Nonlinear Control Design: Geometric, Adaptive & Robust*. London, Prentice Hall.
- [Moreno, 2001] Moreno, J. (2001). Observadores adaptables para sistemas no lineales. *Memorias del Congreso Nacional de la AMCA 2001*, San Luis Potosi, México:pp. 3–4.
- [Moreno, 2004] Moreno, J. (2004). Observer design for nonlinear systems: A dissipative approach. *Proceedings of the 2nd Symposium on System, Structure and Control (SSSC 2004)*, Oaxaca, México:pp. 735–740.
- [Moreno, 2005a] Moreno, J. (2005a). Control and observer design for nonlinear finite and infinite dimensional systems. *ser. Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer, vol. 32, ch. Approximate Observer Error Linearization by Dissipative Methods:pp. 35–51.
- [Moreno, 2006] Moreno, J. (2006). A separation property of dissipative observers for nonlinear systems. *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, San Diego, CA, USA:pp. 1647–1652.
- [Moreno, 2009] Moreno, J. (2009). A linear framework for the robust stability analysis of a generalized super-twisting algorithm. *2009 6th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE 2009)(Formerly known as ICEEE)*, Toluca, México:pp. 10–13.

- [Moreno y Osorio, 2006] Moreno, J. y Osorio, M. (2006). Dissipative desing of observers for multi-valued nonlinear systems. *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision & Control*, pages pp. 5400–5405.
- [Moreno, 2005b] Moreno, J. A. (2005b). Robust disipative observer design for nonlinear systems. *Memorias Congreso Asociación de México de Control Automático, AMCA*, Cuernavaca, México:pp. 1647–1652.
- [Moreno y Osorio, 2008] Moreno, J. A. y Osorio, M. (2008). A lyapunov aproach to second order sliding mode controllers and observers. *47th IEEE Conference on Decision and Control, CDC*:pp. 2856–2861.
- [Narendra y Annaswamy, 1989] Narendra, K. y Annaswamy, A. (1989). *Stable Adaptive Systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [Osorio, 2009] Osorio, M. (2009). Diseño de observadores con no linealidades fuertes. *Tesis Doctoral (Ingeniería Eléctrica - Control)*, Tutor: Jaime Alberto Moreno Pérez.
- [Rajamani, 1998] Rajamani, R. (1998). Observers for lipschitz nonlinear systems. *IEEE Trans. Aut. Cont.*, vol. 43:pp. 397–401.
- [Rugh, 1993] Rugh, W. (1993). *Linear Systems Theory*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [Sastry y Bodson, 1989] Sastry, S. y Bodson, M. (1989). *Adaptive Control Stability. Convergence and Robustness*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [Vargas y Moreno, 2005] Vargas, A. y Moreno, J. A. (2005). Aproximate high-gain observers for non-lipschitz observability forms. *International Journal of Control*, vol. 78 no. 4:pp. 247–253.
- [Willems, 1972a] Willems, J. C. (1972a). Dissipative dynamical systems, part i: General theory. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 45:pp. 321–351.
- [Willems, 1972b] Willems, J. C. (1972b). Dissipative dynamical systems, part ii: Linear systems with quadratic supply rates. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 45:pp. 352–393.
- [Yakubovich et al., 2004] Yakubovich, V. A., Leonov, G. A., y Gelig, A. K. (2004). *Stability of Stationary Sets in Control Systems with Discontinuous Nonlinearities*. volume 14 of Series on Stability, Vibration and Control Systems. World Scientific, Singapore.