



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

**PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN  
INGENIERIA**

**CONTROL ADAPTABLE CON LEY DE ADAPTACIÓN TIPO PI**

**TESIS**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**MAESTRO EN INGENIERÍA**

INGENIERÍA ELÉCTRICA – CONTROL

P R E S E N T A :

**ANAHI FLORES PÉREZ**

TUTOR:

DR. YU TANG XU

2010

JURADO ASIGNADO:

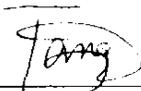
PRESIDENTE: DR. ÁLVAREZ ICAZA LONGORÍA LUIS AGUSTÍN  
SECRETARIO: DR. MORENO PÉREZ JAIME ALBERTO  
VOCAL: DR. TANG XU YU  
1er SUPLENTE: DR. ARTEAGA PÉREZ MARCO ANTONIO  
2do SUPLENTE: DR. SAVAGE CARMONA JESÚS

LUGAR DONDE SE REALIZÓ LA TESIS:

FACULTAD DE INGENIERÍA, CIUDAD UNIVERSITARIA, MÉXICO D.F.

TUTOR:

DR. YU TANG XU



A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Tang', is written over a horizontal line.

FIRMA

## AGRADECIMIENTOS

Con especial énfasis agradezco a mi tutor, Dr. Yu Tang Xu por su paciencia, sus innumerables enseñanzas y el amable ambiente de trabajo. Por su actitud abierta a cualquier propuesta y por su apoyo para iniciar mi travesía por el mundo.

A mis adorados padres **Marcelino** y **Ma. Del Pilar**. Porque el amor de ellos ha sido el único verdaderamente trascendental. Porque sé que nuestros logros los llenan de alegría; lo que a mí me alegra es tenerlos conmigo. A **Silvia**. Con cariño a **Adriana** y **Pilar** por estar pendiente de mí, de la familia y de mis proyectos, por superarse y esforzarse cada día. Gracias también a Luis, por cuidar de mi carnalita y ser un gran apoyo para nosotros.

Only a few words but written with my deepest gratitude and love to **Alejandro Núñez Priego**. Because he taught me, through martial arts, the most difficult science on control: *control of myself*. Thanks because this lines are product of your invaluable support and dazzling love. But, most of all, thanks because at the end of the hard work day, you are always the one who is there. Te adoro ☺.

A los amigos que he tenido la fortuna de encontrar a lo largo de mi vida y de reencontrar una y otra vez: **Arlette Alcántara, Karen Volke, Tania Romero, Zhenia González**. Gracias a **Héctor Ortiz** por su ayuda invaluable en momentos cruciales.

A la Facultad de Ingeniería y mis amigos ingenieros, gracias por ser increíbles y amabilísimas personas: **Eder Guzmán y Paty Jiménez, Ileana y Araceli Grave, Alejandro Núñez**. Gracias por compartir inolvidables experiencias de trabajo y por ser ejemplo de superación y profesionalismo. A la Facultad de Ciencias y mis amigos físicos: **Zhenia, Manuel, Igmarr y Preisser**. Algunos lejos y otros cerca; siempre presentes.

A los profesores **José Sámano Hernández, Arnulfo García Cárdenas** (Asociación de Tae Kwon Do, UNAM) y **Ricardo Sánchez** (Academia Mexicana de Wushu), por formar mi mente y mi espíritu. Porque han dejado enseñanzas grabadas con letras de oro en mi corazón.

A los sinodales de esta tesis: **Dr. Luis Álvarez, Dr. Jaime Moreno, Dr. Jesús Savage y Dr. Marco Arteaga** por sus valiosas opiniones y concisos comentarios. Al **Dr. Romeo Ortega, Dr. Gerardo Espinoza y Dr. Antonio Loría** por su ayuda en mi corta estancia en Supélec, Francia.

Gracias a CONACYT por la beca recibida durante mis estudios de posgrado. También un agradecimiento al proyecto PAPIIT IN120009 y gracias a la UNAM y a la Facultad de Ingeniería por abrir las puertas al conocimiento técnico y por contribuir al desarrollo del país.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
<b>2. Control adaptable con retroalimentación de estados</b>	<b>11</b>
2.1. Esquema de control adaptable unificado. . . . .	11
2.2. Sistemas no linealmente parametrizados. . . . .	17
2.3. Sistemas afines en el control conectados en cascada. . . . .	18
2.4. Convergencia paramétrica. . . . .	23
<b>3. Control Adaptable con retroalimentación de salida.</b>	<b>25</b>
3.1. Control adaptable con retroalimentación de salida. . . . .	26
<b>4. Control adaptable de robot móvil.</b>	<b>29</b>
4.1. Control adaptable de ángulo de orientación con retroalimentación de estados. . . . .	30
4.1.1. Implementación y resultados. . . . .	31
4.2. Diseño con $N(x) = 0$ . . . . .	34
4.2.1. Implementación y resultados . . . . .	35
4.2.2. Control de velocidad lineal. . . . .	37
4.2.3. Implementación y resultados . . . . .	38
4.3. Control adaptable de orientación del robot por retroalimentación de salida. . . . .	38
4.3.1. Simulación y resultados. . . . .	42
4.4. Respuesta ante incertidumbres en la medición. . . . .	43
<b>5. Conclusiones.</b>	<b>49</b>
<b>A.</b>	<b>51</b>

## Resumen.

El Control Adaptable es la herramienta más adecuada cuando enfrentamos el problema de control de un sistema físico sujeto a condiciones de operación inciertas. Sin embargo, si se trata de un sistema no lineal, los esquemas convencionales (basados en el principio de equivalencia cierta) pueden resultar inapropiados.

En este trabajo se abordó el problema de control de sistemas no lineales por medio de leyes de control adaptables con retroalimentación de estados y de salida. Las leyes de adaptación incluyen dos términos: uno dependiente de la integral del estado de la planta, asociado al diseño por principio de equivalencia cierta. El segundo es un nuevo grado de libertad, en particular una acción proporcional al estado, cuyo diseño adecuado me permitió manejar las dinámicas no linealmente parametrizadas.

La estrategia de control estudiada se aplicó a un robot móvil para llevarlo a una posición angular deseada. En un primer caso la inercia rotacional es un parámetro desconocido y el control adaptable por retroalimentación de posición y velocidad angulares logra estabilizar el ángulo del robot en cualquier referencia deseada. En un segundo caso, la velocidad angular y la inercia son desconocidas y la retroalimentación de posición angular logra también el objetivo de control. Se demostró, a nivel de simulaciones, que en caso de existir ruido de medición en las variables de retroalimentación también es posible lograr el objetivo de control, siempre y cuando las variaciones sean pequeñas. Como trabajo a futuro se propuso aumentar los grados de libertad en las leyes de estimación añadiendo por ejemplo, un término derivativo del estado de la planta.

## Abstract

Adaptive Control is the most appropriate tool when faced with the problem of control of a physical system subject to uncertain operating conditions. However, if it's a nonlinear system, the conventional tools (based on the principle of certainty equivalence) may be inappropriate.

This thesis deals with the problem of control of nonlinear systems using adaptive control laws with state and output feedback. The adaptation laws include two terms: one depends on the integral of the state of the plant; this term is associated with the design based on principle of certainty equivalence. The second is a new degree of freedom that corresponds to a proportional term of the state, whose proper design allowed us to handle nonlinearly parameterized dynamics.

The studied control strategy was applied to a mobile robot towards to stabilize a desired angular position at a certain linear velocity. On first case, the rotational inertia is an unknown parameter but the adaptive control with angular position and angular velocity feedback works well to stabilize the angular position of the robot at any angular desired reference. On a second case, the angular velocity and inertia are unknown but angular position feedback also achieved the control objective. It was demonstrated, at the level of simulations, that if measurement noise in the feedback variables is present, it's also possible to achieve the control objective, provided that the variations are small. I proposed, for future work, to increase the degrees of freedom in the laws of estimation adding, for example, a derivative term of the plant state.

# Capítulo 1

## Introducción

El comportamiento de un sistema físico invariante en el tiempo está descrito por sistemas de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\dot{x} = F(x, u, \theta), \quad x(0) = x_0, \quad (1.1)$$

donde  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$  denota el vector de estados y  $u = [u_1, u_2, \dots, u_p]^T \in \mathbb{R}^p$  las entradas de control.  $F(x, \cdot)$  es continua y diferenciable en  $x$ . El vector  $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r]^T \in \mathbb{R}^r$  es un conjunto de parámetros constantes desconocidos. Cuando enfrentamos el problema de control de un sistema físico desconocemos todos los factores que influyen en él; de ahí la importancia de ese vector de parámetros pues permite modelar dinámicas de la planta parcialmente conocidas y condiciones de operación inciertas.

En este escenario, la herramienta adecuada para obtener las mejores condiciones de funcionamiento es el Control Adaptable.

La estrategia convencional consiste en un diseño de dos etapas conocido como principio de equivalencia cierta. Para ilustrar este principio, consideremos una subclase de los sistemas (1.1) dados por:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (1.2)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $u \in \mathbb{R}^m$ . Las funciones  $f(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $g(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  son continuas y diferenciables. El objetivo es estabilizar asintóticamente el origen del sistema anterior, asegurando acotamiento de todas las trayectorias del lazo cerrado.

En la primera etapa, se asume la existencia de una función  $u_i(x, \theta)$ ,  $\theta \in \mathbb{R}^r$  tal que el sistema:

$$\dot{x} = f_n(x) \triangleq f(x) + g(x)u_i(x, \theta), \quad (1.3)$$

tiene un punto de equilibrio global, asintóticamente estable en  $x = 0$ . Supongamos que contamos con una función definida positiva  $V(x)$  tal que  $\frac{\partial V}{\partial x} f_n(x) < 0$ .

Debemos asumir también que  $u_i(x, \theta)$  puede ser linealmente parametrizada en  $\theta$ , esto es, puede escribirse como:

$$u_i(x, \theta) = u_0(x) + u_1(x)\theta,$$

para algunas funciones conocidas  $u_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $u_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m \times r}$  continuas. El control que puede ser implementado es aquel en el que el vector de parámetros  $\theta$  es sustituido por uno de estimaciones  $\hat{\theta}$ , proveniente de una ley de adaptación:

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = \Theta(x, \hat{\theta}), \quad (1.4)$$

por tanto el control adaptable basado en equivalencia cierta está dado por:

$$u = u_0(x) + u_1(x)\hat{\theta}. \quad (1.5)$$

Al hacer el lazo cerrado de (1.2) con (1.5), se cometerá un error debido a la diferencia  $\tilde{\theta} \triangleq \hat{\theta} - \theta$  y el sistema nominal (1.3) será perturbado por un término adicional, en nuestro caso:

$$\dot{x} = f_n(x) + g(x)u_1(x)\tilde{\theta}. \quad (1.6)$$

Para manejar ese término, la función (1.4) se diseña con una función positiva definida extendida  $V_e(x, \tilde{\theta}) = V(x) + \frac{1}{2}\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1}\tilde{\theta}$  donde  $\Gamma = \Gamma^T > 0$ , haciendo que  $\dot{V}_e(x, \tilde{\theta})$  a lo largo de las trayectorias de (1.6) no contenga términos dependientes del error de estimación  $\tilde{\theta}$ . En nuestro caso la ley de adaptación:

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\Gamma u_1(x)^T \left( \frac{\partial V(x)}{\partial x} g(x) \right)^T,$$

deja la derivada temporal de  $V_e(x, \tilde{\theta})$  expresada como:

$$\dot{V}_e(x, \tilde{\theta}) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f_n(x) \leq 0,$$

de lo cual no es posible establecer estabilidad asintótica del estado extendido  $(x, \tilde{\theta})$ . El lema de Barbalat nos ayuda a garantizar que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$  y un análisis más detallado indica que  $\tilde{\theta} = 0$  puede ser asintóticamente estabilizado si y sólo si se tienen condiciones de excitación persistente (EP). Si no hay EP, sólo se garantiza que  $\tilde{\theta}$  permanece acotado y que converge a un vector constante desconocido. Cuando se detiene el proceso de adaptación y el control actúa usando los valores límite puede presentarse inestabilidad del lazo cerrado en presencia de perturbaciones externas y dinámicas no modeladas siendo esto un tipo de respuesta inaceptable.

Por otro lado, el hecho de que el controlador pueda ser linealmente parametrizado es muy importante lo que a su vez representa una limitación pues deja a un lado las parametrizaciones no lineales intrínsecas a muchos sistemas físicos y biológicos.

Es necesario resaltar un aspecto importante de la ley de adaptación (1.4). Este algoritmo es una ecuación diferencial en  $\hat{\theta}$  dependiente de la *integral* respecto al tiempo del estado  $x$ , es por ello que podemos llamar a la ley (1.4) como un *término de adaptación tipo integral (I)*.

Aunque el principio de equivalencia cierta simplifica el proceso al dividir el problema en dos independientes, ignora la posibilidad de interacciones ventajosas entre el algoritmo de estimación y la planta que permitirían controlar sistemas inciertos más generales (ecuación (1.1)) e incluso resolver las limitaciones de los procedimientos tradicionales (inestabilidad cuando fijamos parámetros estimados, robustez contra dinámicas parásitas de la planta, parametrización no lineal).

En la literatura se ha explorado la existencia de esas interacciones desde diferentes enfoques [13, 7, 14, 6].

En [13] se propone una ley de adaptación nueva que logra estabilizar todas las soluciones del lazo cerrado de una planta no lineal con el control adaptable además de hacer que el estado tienda asintóticamente a un conjunto deseado. Sin embargo, ese nuevo algoritmo no es implementable pues depende de los parámetros nominales. Bajo cierta condición algebraica, es posible eliminar dicha dependencia y surge entonces, de manera natural, un término adicional a la parte integral asociada a equivalencia cierta. Ese término corresponde a una acción proporcional que introduce interacción entre el algoritmo de estimación y la dinámica de la planta.

En [14], esa acción proporcional se introduce como una herramienta de diseño y tiene el objetivo de lograr que una variedad no lineal relacionada con el error de estimación sea asintóticamente atrayente y permanezca invariante. En un tratamiento paralelo a [7, 14], el trabajo de [6] agrega el mismo término con la finalidad de manejar parametrizaciones no lineales.

En esta tesis, exponemos estas investigaciones unificadas en un sólo marco teórico cuyo punto de partida es la introducción en la ley de estimación de un término proporcional adicional al componente integral. El resultado, es una *esquema de adaptación tipo proporcional-integral (PI)*.

El planteamiento del primer problema en esta tesis, desarrollado en el capítulo 2, consiste en encontrar un control adaptable por retroalimentación de estados y una ley de adaptación:

$$u = u(x, \hat{\theta}), \quad (1.7)$$

$$\hat{\theta} = \theta_P(x) + \theta_I(t), \quad (1.8)$$

$$\dot{\theta}_I(t) = \Theta(x(t), \hat{\theta}(t)), \quad (1.9)$$

donde:

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = \dot{\theta}_P(x) + \Theta(x(t), \hat{\theta}(t)), \quad (1.10)$$

y (1.8) es la nueva estimación en la que  $\theta_P(x)$  y  $\theta_I(t)$  son los términos proporcional e integral del estado  $x$  respectivamente. El objetivo es que las soluciones del lazo cerrado con (1.1) permanezcan acotadas y el vector de estados converja a un conjunto acotado deseado  $\Omega_0$ , caracterizado por los ceros de cierta función de error, real, continua y diferenciable  $\varphi(x)$ :

$$\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) = 0\}. \quad (1.11)$$

Siguiendo inicialmente los pasos del principio de equivalencia cierta, asumamos que mediante algún método de diseño se ha obtenido un control dependiente de los parámetros nominales de la forma:

$$u = u_i(x, \theta), \quad (1.12)$$

tal que la dinámica:

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} F(x, \theta, u) = -\psi(\varphi), \quad (1.13)$$

donde  $F(x, \theta, u)$  definida en (1.1) y  $\psi(\cdot)$  función real, continua y tal que, entre otras propiedades,  $\varphi(\psi(\varphi)) > 0 \forall \varphi \neq 0$ , tenga en el origen un punto de equilibrio asintóticamente estable.

A continuación, el vector  $\theta$  se sustituye por la nueva estimación (1.8), dando lugar al control adaptable:

$$u = u_i(x, \theta_P(x) + \theta_I(t)). \quad (1.14)$$

Si en (1.13), se implementa el control (1.14) en lugar de (1.12), el resultado es un sistema perturbado que puede escribirse como:

$$\dot{\varphi} = -\psi(\varphi) + \zeta(x, \theta, \hat{\theta}), \quad (1.15)$$

donde la información del error que se comete al implementar el control adaptable se encuentra en el término de perturbación  $\zeta(x, \theta, \hat{\theta})$ .

El algoritmo de adaptación no implementable:

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = \dot{\varphi} + \psi(\varphi), \quad (1.16)$$

hace que (1.15) permanezca acotada para cualquier entrada  $\zeta(x, \theta, \hat{\theta})$  con<sup>1</sup>  $\|\zeta(x, \theta, \hat{\theta})\|_{2,T} < \infty$ , asegura que las trayectorias del lazo cerrado de (1.1) con el control (1.14) son acotadas y, bajo ciertas suposiciones adicionales, que  $\varphi(x(t)) \rightarrow 0$  conforme  $t \rightarrow \infty$ . Garantiza además que la dinámica de error de estimación es no creciente y, si hay excitación persistente, establece convergencia paramétrica a los valores reales.

Cierta condición algebraica elimina la dependencia de (1.16) respecto de los parámetros nominales asegurando la existencia de una realización implementable. Si se cumple esa condición, encontramos que la ley de adaptación tiene dos componentes: uno integral, que puede ser asociado al diseño mediante equivalencia cierta, y otro proporcional que surge como una extensión natural de las leyes convencionales.

Alternativamente, ese término proporcional puede ser visto como un grado de libertad usado para hacer asintóticamente estable el origen de un sistema relacionado con el error de estimación y la dinámica perturbada (1.15).

Para profundizar en este punto, pidamos al control (1.12) que haga que el origen de (1.1) sea tal que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \rightarrow 0,$$

que puede ser visto como un caso particular en el que se elige  $\varphi(x) = x - 0 = x$ . Gracias a lo anterior podemos asegurar, para el sistema nominal, la existencia de una función de Lyapunov  $V_n(x)$  que cumple los requisitos de los teoremas conversos.

Definamos la diferencia entre estimaciones y parámetros reales como:

$$\tilde{\theta} \triangleq \theta_P(x) + \theta_I(t) - \theta. \quad (1.17)$$

El error cometido al implementar el control adaptable en (1.1) es descrito por un sistema aumentado formado por la dinámica nominal perturbada (1.15) y por la derivada temporal de (1.17) a lo largo de las trayectorias de (1.15) dada por:

$$\frac{d\tilde{\theta}}{dt} = \dot{\theta}_I(t) - \frac{\partial \theta_P(x)}{\partial x} \psi(x) + \frac{\partial \theta_P(x)}{\partial x} \zeta(x, \theta, \hat{\theta}). \quad (1.18)$$

---

<sup>1</sup>  $\|\zeta\|_{p,T} \triangleq \left( \int_{t_0}^T \|\zeta(\tau)\|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}}$ ;  $\|\zeta\|_{\infty,T} \triangleq \sup \{ \|\zeta(t)\|, t \in [t_0, T] \}$ .

Usando la función definida positiva  $V_2(x, \tilde{\theta}) = V_n(x) + \frac{1}{2} \|\tilde{\theta}\|^2$ ,  $\theta_I(t)$  y  $\theta_P(x)$  son diseñadas adecuadamente para hacer que ese sistema extendido tenga en el origen un punto de equilibrio globalmente estable. Con ello podremos lograr que en el límite el control (1.14) sea casi igual que el control (1.12).

Bajo ciertas características de la función  $\theta_I(t)$ , es posible desacoplar el análisis de la estabilidad de (1.15) de la de (1.18), así,  $\theta_P(x)$  se propone para hacer que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta}(t) = 0$ , mientras que (1.15) es estudiada con teoría de sistemas perturbados.

Este enfoque se aplica a dos sistemas que son casos particulares de (1.1), el primero a modelos no linealmente parametrizados y el segundo a sistemas afines en el control conectados en cascada.

Para concluir el segundo capítulo se incluyen resultados básicos respecto a condiciones necesarias y suficientes de convergencia paramétrica.

Por otra parte, supongamos que no todos los estados  $x \in \mathbb{R}^n$  son medibles para controlar mediante retroalimentación de estados. El problema entonces es encontrar un control adaptable estabilizante que no dependa de los estados no medidos. Con este fin, consideremos el sistema:

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= f(\eta, y, u), \\ \dot{y} &= h(\eta, y, u),\end{aligned}\tag{1.19}$$

con estado  $(\eta, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^r$  ( $p + r = n$ ) y entrada  $u \in \mathbb{R}^m$  y supongamos que sólo el estado  $y$  puede ser medido. Notemos que el sistema anterior puede incluir también parámetros desconocidos, i. e., ecuaciones en la forma  $\dot{\eta} = 0$ .

Esta situación constituye el segundo problema en esta tesis (desarrollado en el capítulo 3) y consiste en diseñar un control por retroalimentación de salida y una ley de estimación tanto de parámetros (en su caso) como de variables no medibles:

$$u = u(y, \hat{\eta}),\tag{1.20}$$

$$\frac{d\hat{\eta}}{dt} = \Psi(y, \hat{\eta}),\tag{1.21}$$

con  $\hat{\eta} \in \mathbb{R}^p$  tal que todas las trayectorias del lazo cerrado (1.19), (1.20), (1.21) sean acotadas y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y^*,\tag{1.22}$$

para algún  $y^* \in \mathbb{R}^r$ . Notemos que en este caso, sólo podremos regular la salida  $y(t)$  mientras que la variable  $\eta(t)$  simplemente permanece acotada. La razón para ello es que, cuando  $\eta(t)$  contiene parámetros desconocidos, el estado  $(\eta, y)$  no necesariamente puede estabilizarse en  $(\eta^*, y^*)$  para algún valor arbitrario de  $\eta^*$ .

Siguiendo las ideas del capítulo 2, generalizando al caso de estimación tanto de parámetros como estados desconocidos, asumiremos la existencia de un control ideal  $u_i(\eta, y)$  que logra el objetivo (1.22) y también hacer que las soluciones del lazo cerrado:

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= f(\eta, y, u_i(\eta, y)), \\ \dot{y} &= h(\eta, y, u_i(\eta, y)),\end{aligned}\tag{1.23}$$

sean trayectorias acotadas. El control adaptable dará lugar al sistema:

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= f(\eta, y, u_i(\hat{\eta}, y)), \\ \dot{y} &= h(\eta, y, u_i(\hat{\eta}, y)), \\ \hat{\eta} &= \eta_I(t) + \eta_P(y), \\ \frac{d\hat{\eta}}{dt} &= \Psi(y, \hat{\eta}),\end{aligned}$$

con estado extendido  $(\eta, y, \hat{\eta})$ ,  $\hat{\eta} \in \mathbb{R}^p$ . Nuestro objetivo será entonces diseñar a  $\eta_I(t)$  y  $\eta_P(y)$  para que el sistema anterior tenga todas sus soluciones acotadas y asintóticamente se comporte como (1.23).

En resumen, una contribución de esta tesis consiste en exponer un esquema unificado de control adaptable con leyes de adaptación tipo PI cuya idea principal es la introducción de nuevos grados de libertad al algoritmo de adaptación. Lo anterior constituye a su vez una línea de trabajo a futuro pues abre la posibilidad de incluir más términos en las leyes de estimación.

Una contribución más es la aplicación de las estrategias anteriores al control de ángulo de orientación y velocidad lineal de un robot móvil [18] (capítulo 4). En un primer caso, la inercia rotacional es considerada un parámetro incierto mientras que el ángulo y la velocidad angular son usadas en retroalimentación de estados. En un segundo análisis, tanto la inercia como la velocidad angular son estimadas en un algoritmo mixto y la posición angular es usada en retroalimentación de salida.

Los resultados más relevantes serán tratados en el capítulo 4 mientras que las conclusiones correspondientes y el trabajo a futuro, sintetizados en el capítulo 5.

## Capítulo 2

# Control adaptable con retroalimentación de estados

En este capítulo se presenta un esquema unificado de control adaptable con leyes de adaptación tipo PI (sección 2.1). En él se asume la existencia de un control ideal que logra hacer de la planta un sistema nominal asintóticamente estable. Ese control se hace adaptable sustituyendo los parámetros reales por una estimación que consiste de un término integral *más* un nuevo grado de libertad, en particular una acción proporcional, cuya introducción es la propuesta principal de este nuevo enfoque.

En un primer caso, un tipo de algoritmo de estimación particular hace que se cumpla el objetivo de control asegurando acotamiento de todas las trayectorias del lazo cerrado, sin embargo, no es implementable. Bajo ciertas condiciones, es posible implementar esa ley de adaptación y surge de manera natural la presencia de la componente proporcional.

Alternativamente, la acción proporcional puede ser vista como un grado de libertad que ayuda a construir una dinámica de error de estimación adecuada. La planta en lazo cerrado con el control adaptable es descrito entonces por un modelo extendido consistido por el sistema nominal perturbado debido a la diferencia de parámetros y por la dinámica del error de estimación. La estabilidad de este sistema es estudiada con método de Lyapunov y con análisis de sistemas perturbados.

Siendo una herramienta adaptable, es necesario conocer los requisitos con los cuales obtendremos convergencia paramétrica. Las condiciones básicas para lograrlo serán abordadas en la sección 2.4.

### 2.1. Esquema de control adaptable unificado.

Consideremos la clase de sistemas no lineales dados por:

$$\dot{x} = f(x, \theta, u), \quad x(0) = x_0 \tag{2.1}$$

con  $x \in \mathbb{R}^n$  el vector de estados,  $\theta \in \mathbb{R}^d$  vector de parámetros desconocidos y  $u \in \mathbb{R}^m$  la entrada de control.  $\theta \in \Omega_\theta \subset \mathbb{R}^d$  donde  $\Omega_\theta$  es cerrado y acotado y  $f(x, \cdot)$  es localmente Lipschitz en  $x$ .

Nuestro objetivo es encontrar una entrada de control y una ley de estimación de parámetros:

$$\begin{aligned} u &= u(x, \hat{\theta}), \\ \frac{d}{dt} \hat{\theta} &= \Theta(x, \hat{\theta}), \end{aligned} \quad (2.2)$$

$\hat{\theta}(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$  tales que  $u = u(x, \hat{\theta})$  mantenga acotadas todas las trayectorias del lazo cerrado con (2.1) y que el estado converja a un conjunto acotado deseado para cualquier vector  $\theta \in \Omega_\theta$ .

Ese conjunto deseado, llamado conjunto objetivo, está caracterizado por los ceros de cierta función de error  $\varphi(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , es decir, ese conjunto está formado por los vectores  $x$  que satisfacen la inclusión:

$$\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) = 0\},$$

donde  $\varphi(x) \in C^1$ . El valor positivo o cero dado por  $|\varphi(x)|$  puede ser interpretado como una medida de la lejanía de  $x$  respecto al conjunto  $\Omega_0$ .

Asumamos que  $\varphi(x)$  es tal que para cualquier  $\delta > 0$  existe una función  $\gamma_1 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  tal que:

$$\|\varphi(x(t))\|_{\infty, T} \leq \delta \Rightarrow \|x(t)\|_{\infty, T} \leq \gamma_1(\delta), \quad (2.3)$$

para todas las soluciones de (2.1).

Por otro lado, supongamos que existe un control ideal

$$u = u_i(x, \theta, \varphi), \quad (2.4)$$

que logra que la derivada temporal de  $\varphi(x)$  a lo largo de las trayectorias del sistema (2.1) dada por:

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} f(x, \theta, u_i) \triangleq -F(x, u_i), \quad (2.5)$$

resulte en una dinámica de error de la forma:

$$\dot{\varphi} = -\psi(\varphi), \quad (2.6)$$

para toda condición inicial  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  y donde  $\psi(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

$$\psi(\varphi) \in C^0, \quad (2.7)$$

$$\varphi(\psi(\varphi)) > 0 \quad \forall \varphi \neq 0, \quad (2.8)$$

$$\lim_{\varphi \rightarrow \infty} \int_0^\varphi \psi(\zeta) d\zeta = \infty. \quad (2.9)$$

Asumiremos también que para cualquier  $\theta \in \Omega_\theta$  existe  $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^d$ , el vector de estimados de  $\theta$ , que hace que (2.6) sea satisfecha.

El control (2.4) no puede ser implementado y  $\theta$  debe sustituirse por un estimado:

$$\hat{\theta}(x(t), t) = \theta_P(x) + \theta_I(t), \quad (2.10)$$

donde los términos proporcional e intergral  $\theta_P(x)$  y  $\theta_I(t)$ , respectivamente, serán aclarados posteriormente. El control adaptable es entonces:

$$u = u_i(x, \hat{\theta}, \varphi). \quad (2.11)$$

Si en (2.5) se implementa el control (2.11) en lugar de (2.4), el resultado es un sistema asintóticamente estable más un término de perturbación, esto es:

$$\dot{\varphi} = -\psi(\varphi) + F(x, u_i(x, \theta, \varphi)) - F(x, u_i(x, \hat{\theta}, \varphi)),$$

que, definiendo  $F(x, u_i(x, \hat{\theta}, \varphi)) \triangleq F(x, \hat{\theta})$  y  $F(x, u_i(x, \theta, \varphi)) \triangleq F(x, \theta)$ , se convierte en:

$$\dot{\varphi}(x) = F(x, \theta) - F(x, \hat{\theta}) - \psi(\varphi), \quad (2.12)$$

y donde la información del error que se comete al implementar el control adaptable está dentro de la perturbación  $F(x, \theta) - F(x, \hat{\theta})$ .

Restrinjamos nuestro análisis a la clase de funciones  $F(x, \theta) - F(x, \hat{\theta})$  para las que existe una función continua  $\alpha(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$  y  $D$  constante positiva tales que:

$$0 \leq \left( F(x, \hat{\theta}) - F(x, \theta) \right) \left( \alpha^T(x) (\hat{\theta} - \theta) \right), \quad (2.13)$$

$$\left| F(x, \hat{\theta}) - F(x, \theta) \right| \leq D \left| \alpha^T(x) (\hat{\theta} - \theta) \right|, \quad (2.14)$$

es decir, aquellas que cumplen una condición de crecimiento limitada por una función lineal del error de estimación.

Propongamos la siguiente ley de adaptación:

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = (\psi(\varphi) + \dot{\varphi}) \alpha(x) \quad (2.15)$$

y consideremos la función positiva definida  $V_\theta(\theta, \hat{\theta}) = \frac{D}{2} \|\hat{\theta} - \theta\|^2$ . Su derivada temporal a lo largo de las trayectorias de (2.15) es  $\dot{V}_\theta(\theta, \hat{\theta}) = D (\psi(\varphi) + \dot{\varphi}) (\hat{\theta} - \theta)^T \alpha(x)$  que, usando (2.12) y (2.13)-(2.14), se reduce a  $\dot{V}_\theta(\theta, \hat{\theta}) \leq -(\psi(\varphi) + \dot{\varphi})^2 \leq 0$  y por tanto  $\|\hat{\theta} - \theta\|^2$  es no creciente. Integrando de ambos lados la desigualdad obtenida concluimos que  $V_\theta(\theta, \hat{\theta}(0)) - V_\theta(\theta, \hat{\theta}(t)) \geq \int_0^t (\psi(\varphi(\tau)) + \dot{\varphi}(\tau))^2 d\tau \geq 0$ , entonces  $V_\theta$  es acotada por abajo. Gracias a lo anterior y a que  $V_\theta \geq 0$  establecemos que:

$$\int_0^t (\psi(\varphi(\tau)) + \dot{\varphi}(\tau))^2 d\tau = \int_0^t \left( F(x, \theta) - F(x, \hat{\theta}) \right)^2 d\tau \leq V_\theta(\theta, \hat{\theta}(0)) < \infty,$$

lo que significa que  $\left\| F(x, \theta) - F(x, \hat{\theta}) \right\|_{2,T} < \infty$ .

Consideremos la función  $V(\varphi, \theta, \hat{\theta}) = 2Q(\varphi) + V_\theta(\theta, \hat{\theta})$  donde  $Q(\varphi) = \int_0^\varphi \psi(\zeta) d\zeta$ .  $V(\varphi, \theta, \hat{\theta})$  es positiva definida respecto a  $\varphi(x)$  debido a (2.8). Su derivada temporal obedece la desigualdad  $\dot{V}(\varphi, \theta, \hat{\theta}) \leq 2\psi(\varphi)\dot{\varphi} - (\psi(\varphi) + \dot{\varphi})^2 =$

$-(\psi^2(\varphi) + \dot{\varphi}^2) \leq 0$  y por tanto  $V(\varphi, \theta, \hat{\theta})$  es no creciente. Integrando la desigualdad anterior respecto al tiempo y usando un método de acotamiento análogo al hecho para  $V_{\theta}(\theta, \hat{\theta})$ , logramos establecer que:

$$\begin{aligned}\|\psi(\varphi(t))\|_{2,T} &< \infty, \\ \|\dot{\varphi}(t)\|_{2,T} &< \infty.\end{aligned}$$

Como  $\dot{V}(\varphi, \theta, \hat{\theta}) \leq -(\psi^2(\varphi) + \dot{\varphi}^2) \leq -\psi^2(\varphi) \leq 0$  entonces  $\varphi(x)$  está acotado, es decir,  $\|\varphi(x(t))\|_{\infty, T} < \infty$  y de acuerdo con (2.3), el estado está acotado.

Si adicionalmente asumimos que  $F(x, \theta)$  es localmente acotada<sup>1</sup> en  $(x, \theta)$  entonces la diferencia  $F(x, \theta) - F(x, \hat{\theta})$  está acotada. Además, como  $\psi(\varphi(x))$  es continua y  $\varphi(x)$  está acotado, entonces  $\psi(\varphi)$  está acotado<sup>2</sup>. Por tanto  $\dot{\varphi}(x) = F(x, \theta) - F(x, \hat{\theta}) - \psi(\varphi)$  está acotado y de acuerdo al lema de Barbalat  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(x(t)) = 0$ .

Aunque el algoritmo (2.15) logra los objetivos perseguidos no es implementable pues no conocemos  $\dot{\varphi}$  y su dependencia con los parámetros desconocidos (ecuación (2.12)). Reescribamos (2.15) como:

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = \frac{d}{dt} \varphi \alpha(x) - \varphi \dot{\alpha}(x) + \psi(\varphi) \alpha(x) + \dot{\Psi}(x) - \dot{\Psi}(x),$$

para alguna función diferenciable  $\Psi(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Lo anterior es igual a:

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = \frac{d}{dt} (\varphi(x) \alpha(x) - \Psi(x)) + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \varphi \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x} \right) \dot{x} + \psi(\varphi) \alpha(x).$$

Asumiendo que existe  $\Psi(x)$  tal que cumple las condiciones necesarias para ser la solución única de:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \varphi \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x} = 0, \quad (2.16)$$

la ley de adaptación (2.15) se transforma en un algoritmo implementable dado por:

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = \frac{d}{dt} (\varphi(x) \alpha(x) - \Psi(x)) + \psi(\varphi) \alpha(x),$$

que claramente consta de una parte *proporcional*:

$$\theta_P(x) = \varphi(x) \alpha(x) - \Psi(x),$$

y una parte *integral*:

$$\dot{\theta}_I(t) = \psi(\varphi(x(t))) \alpha(x(t)). \quad (2.17)$$

Aunque  $\theta_P(x)$  ha surgido como consecuencia de (2.16), condición que hace posible la implementación de (2.15),  $\theta_P(x)$  puede ser también visto como un grado de libertad adicional agregado como una extensión a las leyes diseñadas mediante equivalencia cierta. Para profundizar en este punto hagamos  $\varphi(x) = x - 0 = x$  y pidamos al control ideal que alcance el objetivo:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \rightarrow 0, \quad (2.18)$$

<sup>1</sup>Dada  $f(x, z) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^m$ .  $f(x, z)$  es localmente acotada si  $\forall \|x\| \leq \delta_1$  y  $\|z\| \leq \delta_2$  ( $0 < \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ ) existen  $D_1(\delta_1)$  y  $D_2(\delta_2) > 0$  tales que  $\|f(x, z)\| \leq D_1(\delta_1) + D_2(\delta_2)$ . La superposición de dos funciones localmente acotadas es localmente acotada.

<sup>2</sup>Pues las funciones continuas llevan dominios compactos a imágenes compactas [35].

lo que es equivalente a pedir que la ecuación (2.1) en lazo cerrado con (2.4) se transforme en el sistema asintóticamente estable:

$$\dot{x} = f(x, \theta, u_i(x, \theta)) \triangleq F_n(x),$$

para toda condición inicial  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Asumiremos que la función  $F_n(x)$  es diferenciable y localmente acotada respecto a  $x$ . En virtud de (2.18), es posible garantizar la existencia de una función de Lyapunov  $V_n(x)$  que cumple:

$$\begin{aligned} \gamma_1(\|x\|) &\leq V_n(x) \leq \gamma_2(\|x\|), \\ \frac{\partial V_n(x)}{\partial x} F_n(x) &\leq -\gamma_3(\|x\|), \\ \left\| \frac{\partial V_n(x)}{\partial x} \right\| &\leq \gamma_4 \|x\|, \end{aligned} \quad (2.19)$$

para algunas  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  funciones tipo  $K_\infty$ .

El equivalente de la expresión (2.12) cuando el control adaptable es implementado, está dado por:

$$\dot{x} = F_n(x) - \left( F(x, \theta) - F(x, \hat{\theta}) \right),$$

donde  $f(x, \theta, u_i(x, \theta)) \triangleq F(x, \theta)$  y  $f(x, \theta, u_i(x, \hat{\theta})) \triangleq F(x, \hat{\theta})$ . El anterior es un sistema asintóticamente estable perturbado por una señal  $F(x, \theta) - F(x, \hat{\theta})$  donde se asume que  $F(x, \theta)$  es localmente acotado y diferenciable en sus argumentos.

Por otra parte, cualquier función  $F_n(x)$  vectorial, no lineal, tal que  $F_n(0) = 0$ , diferenciable en  $x$ , puede representarse como una matriz  $A_n(x)$  por un vector  $x$  de la siguiente manera:

$$F_n(x) = \int_0^1 \frac{\partial F_n(\beta x)}{\partial \beta} d\beta = \left[ \int_0^1 \frac{\partial F_n(\zeta)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=\beta x} d\beta \right] x \triangleq A_n(x)x. \quad (2.20)$$

Asumamos que existe la matriz  $P(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  que es introducida para denotar las derivadas parciales de  $V_n(x)$  y tal que:

$$V_n^c(x) \left( \frac{\partial V_n(x)}{\partial x} \right) \triangleq P^T(x)x, \quad (2.21)$$

donde  $0 \leq c$ , constante real que puede ser libremente elegida.

Consideremos la diferencia entre estimaciones y parámetros reales definida por:

$$\tilde{\theta} = \theta_P(x) + \theta_I(t) - \theta, \quad (2.22)$$

en esta variable de error se ha introducido la nueva función  $\theta_P(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$  como una extensión a la estimación  $\theta_I(t)$  asociada con el principio de equivalencia cierta, así, la estimación total estará dada por (2.10). A diferencia del enfoque basado en (2.15), en este caso no conocemos la naturaleza de  $\theta_P(x)$  y es introducida como una herramienta de diseño.

Gracias a (2.20), el comportamiento del lazo cerrado con el control adaptable es descrito por el sistema extendido:

$$\dot{x} = A_n(x)x - M(x, \theta, \tilde{\theta})\tilde{\theta}, \quad (2.23)$$

$$\frac{d}{dt} \tilde{\theta} = \dot{\theta}_I(t) + \frac{\partial \theta_P(x)}{\partial x} A_n(x)x - \frac{\partial \theta_P(x)}{\partial x} M(x, \theta, \tilde{\theta})\tilde{\theta}, \quad (2.24)$$

donde  $M(x, \theta, \tilde{\theta}) = \left( \int_0^1 \frac{\partial f(x, \theta, u_i(x, \theta + \beta \tilde{\theta}))}{\partial \beta \theta} d\beta \right) \tilde{\theta}$ , depende del caso de aplicación. Tomemos la función definida positiva  $V_2(x, \tilde{\theta}) = \frac{1}{1+c} V_n^{1+c}(x) + \frac{1}{2} \|\tilde{\theta}\|^2$  y su derivada temporal a lo largo de (2.23)-(2.24):

$$\dot{V}_2(x, \tilde{\theta}) = V_n^c(x) \left( \frac{\partial V_n(x)}{\partial x} \right)^T \left( A_n(x)x - M(x, \theta, \tilde{\theta})\tilde{\theta} \right) + \tilde{\theta}^T \left( \dot{\theta}_I(t) + \frac{\partial \theta_P(x)}{\partial x} A_n(x)x - \frac{\partial \theta_P(x)}{\partial x} M(x, \theta, \tilde{\theta})\tilde{\theta} \right).$$

Elijamos la parte integral de la ley de adaptación como:

$$\dot{\theta}_I(t) = -\frac{\partial \theta_P(x)}{\partial x} A_n(x)x - N(x)P^T(x)x, \quad (2.25)$$

donde la función continua  $N(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un nuevo grado de libertad. Notemos que el objetivo de la parte integral en este caso, al igual que en el diseño por equivalencia cierta, es eliminar los términos con variables que no dependen del error de estimación. Una segunda meta de  $\dot{\theta}_I$  en este caso es introducir a  $N(x)$ , función que reduce  $\dot{V}_2(x, \tilde{\theta})$  a:

$$\dot{V}_2(x, \tilde{\theta}) = x^T P(x) \left( A_n(x)x - M(x, \theta, \tilde{\theta})\tilde{\theta} \right) + \tilde{\theta}^T \left( -N(x)P^T(x)x - \frac{\partial \theta_P(x)}{\partial x} M(x, \theta, \tilde{\theta})\tilde{\theta} \right).$$

Gracias a (2.19), (2.20) y (2.21), el término  $x^T P(x)A_n(x)x$  puede escribirse como  $-x^T Q_n(x)x$  con:

$$Q_n(x) = \left[ \frac{1}{2} P A_n(x) + \frac{1}{2} A_n^T P^T \right],$$

positiva definida y decreciente. Reescribiendo  $\dot{V}_2(x, \tilde{\theta})$ :

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(x, \tilde{\theta}) &= -x^T Q_n(x)x + x^T \left[ -P(x)M(x, \theta, \tilde{\theta}) - P(x)N^T(x) \right] \tilde{\theta} - \\ &\quad \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \left[ \frac{\partial \theta_P(x)}{\partial x} M(x, \theta, \tilde{\theta}) + M^T(x, \theta, \tilde{\theta}) \frac{\partial \theta_P(x)}{\partial x} \right] \tilde{\theta}, \end{aligned}$$

podemos concluir que:

$$\dot{V}_2(x, \tilde{\theta}) = -\beta x^T Q_n(x)x - \frac{1}{2} z^T Q_e(z)z,$$

donde  $z^T = \begin{bmatrix} x^T & \tilde{\theta}^T \end{bmatrix}$ ,  $0 < \beta < 1$  y:

$$Q_e(z) = \left[ \begin{array}{cc} (1-\beta) Q_n & \frac{1}{2} P (N^T + M) \\ \frac{1}{2} (N + M^T) P^T & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \theta_P(x)}{\partial x} M + M^T \frac{\partial \theta_P(x)}{\partial x} \right)^T \end{array} \right]. \quad (2.26)$$

En resumen, (2.23)-(2.24) se ha transformado en:

$$\dot{x} = A_n(x)x - M(x, \theta, \tilde{\theta})\tilde{\theta}, \quad (2.27)$$

$$\frac{d}{dt} \tilde{\theta} = -N(x)P^T(x)x - \frac{\partial \theta_P(x)}{\partial x} M(x, \theta, \tilde{\theta})\tilde{\theta}. \quad (2.28)$$

Si podemos proponer a  $\theta_P(x)$  y  $N(x)$  adecuadamente para que (2.26) sea positiva semidefinida con respecto a  $z^T = \begin{bmatrix} x^T & \tilde{\theta}^T \end{bmatrix}$ , entonces el control adaptable (2.11) en conjunto con el algoritmo de adaptación (2.25) harán que

las soluciones del lazo cerrado con (2.1) permanezcan acotadas y además que el origen de (2.1) sea asintóticamente estable. Más aún, si logramos que (2.27)-(2.28) sea tal que  $\tilde{\theta} = \theta_P(x) + \theta_I(t) - \theta \rightarrow 0$  ((2.26) positiva definida) conforme  $t \rightarrow \infty$ , conseguiremos con ello una estimación asintótica del vector de parámetros reales.

Notemos que al hacer  $N(x) = 0$ , (2.28) sólo depende del error de estimación el cual podemos hacer asintóticamente estable en  $\tilde{\theta} = 0$  diseñando  $\theta_P(x)$  adecuadamente. Por su parte, (2.27) puede ser visto como un sistema perturbado y por tanto ser analizado con base en el comportamiento del término  $M(x, \theta, \tilde{\theta})\tilde{\theta}$ .

## 2.2. Sistemas no linealmente parametrizados.

En el enfoque anterior,  $\theta_P(x)$  y  $N(x)$  tenían la misión de hacer positiva semidefinida cierta matriz asociada a la estabilidad, tanto del sistema en lazo cerrado con el control adaptable como con la dinámica del error de estimación. Si hacemos  $N(x) = 0$ , el análisis de estabilidad del lazo cerrado y del error puede desacoplarse. El sistema en lazo cerrado es analizado mediante teoría de sistemas perturbados y para el caso de la dinámica de error,  $\theta_P(x)$  será la herramienta auxiliar para hacerla estable o asintóticamente estable.

Para profundizar en lo anterior, consideremos un caso particular de los sistemas (2.1) de la clase:

$$\dot{x} = G(x, u) + \Phi(x, \theta), \quad (2.29)$$

donde las funciones  $G(\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\Phi(\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$  son continuas y diferenciables. Definamos  $\varphi(x) = x - 0 = x$  y, como antes, asumamos que el control ideal es tal que:

$$\dot{x} = G(x, u_i(x, \theta)) + \Phi(x, \theta) = F_n(x),$$

con el sistema  $\dot{x} = F_n(x)$  asintóticamente estable en  $x = 0$ . El equivalente de (2.12) es por tanto:

$$\dot{x} = F_n(x) + G(x, u_i(x, \hat{\theta})) - G(x, u_i(x, \theta)). \quad (2.30)$$

Considerando la variable de error  $\tilde{\theta} = \theta_P(x) + \theta_I(t) - \theta$  y tomando su derivada temporal a lo largo de (2.30), el sistema equivalente a (2.27)-(2.28) en este caso es:

$$\dot{x} = F_n(x) - G(x, u_i(x, \theta)) + G(x, u_i(x, \hat{\theta})), \quad (2.31a)$$

$$\frac{d\tilde{\theta}}{dt} = \frac{\partial \theta_P(x)}{\partial x} \left( G(x, u_i(x, \hat{\theta})) - G(x, u_i(x, \theta)) \right), \quad (2.31b)$$

$$\dot{\theta}_I(t) = -\frac{\partial \theta_P(x)}{\partial x} F_n(x), \quad (2.31c)$$

notemos que en (2.31c), el grado de libertad  $N(x)$  se ha tomado  $N(x) = 0$  (ver la ecuación (2.25)).

Para analizar la estabilidad de (2.31b), definamos la propiedad de *P-monotonidad* para una función vectorial  $L(x) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ .

$L(x)$  es P-monótona si dada una matriz  $P \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ,  $P = P^T > 0$  y para todos  $a, b \in \mathbb{R}^d$  se cumple que:

$$(a - b)^T P (L(a) - L(b)) \geq 0.$$

Si la desigualdad es estricta se dice que  $L(x)$  es estrictamente P-monótona.

Con esta herramienta consideremos la función positiva definida  $V(\tilde{\theta}) = \tilde{\theta}^T P \tilde{\theta}$  cuya derivada temporal a lo largo de (2.31b) es:

$$\dot{V}(\tilde{\theta}) = \tilde{\theta}^T P \frac{d}{dt} \tilde{\theta} = \tilde{\theta}^T P \frac{\partial \theta_P(x)}{\partial x} \left( G(x, u_i(x, \hat{\theta})) - G(x, u_i(x, \theta)) \right). \quad (2.32)$$

Asumamos que podemos diseñar  $\theta_P(x)$  de tal manera que aseguremos la existencia de un conjunto  $\Omega_d \subset \mathbb{R}^n$ ,  $x = 0 \in \Omega_d$ , en el que la función  $\Xi(\theta) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ :

$$\Xi(\theta) \triangleq -\frac{\partial \theta_P(x)}{\partial x} G(x, u_i(x, \theta)),$$

es estrictamente P-monótona para todo  $x(t) \in \Omega_d$ . Con lo anterior, (2.32) es tal que:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\theta}) &= -(\theta - (\theta_P(x) + \theta_I(t)))^T P (\Xi(\theta) - \Xi(\theta_P(x) + \theta_I(t) - \theta)) = \\ &- (\theta - \hat{\theta})^T P (\Xi(\theta) - \Xi(\hat{\theta})) < 0, \forall x(t) \in \Omega_d. \end{aligned}$$

Por otro lado, supongamos que el hecho de que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta}(t) = 0$  implica que  $x(t)$  está acotada. Entonces

$\lim_{t \rightarrow \infty} G(x(t), u_i(x(t), \theta)) + G(x(t), u_i(x(t), \hat{\theta}(t))) = 0$  y, por argumentos de estabilidad establecidos en la sección 2.4, el origen de (2.31a) es asintóticamente estable.

### 2.3. Sistemas afines en el control conectados en cascada.

Dado que podemos analizar estabilidad más fácilmente si lo hacemos independientemente para el lazo cerrado y el error de estimación, apliquemos el esquema anterior a una clase de sistemas más restrictiva dada por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f(x_1) + g(x_1)x_2, \\ \dot{x}_2 &= \theta_2 u + \phi^T(x)\theta_1, \end{aligned} \quad (2.33)$$

donde  $x = \begin{bmatrix} x_1^T & x_2 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$  denota el estado,  $u \in \mathbb{R}$ , la entrada escalar de control,  $\theta_1 \in \mathbb{R}^{d-1}$ ,  $\theta_2 \in \mathbb{R}$  parámetros desconocidos y  $f(\cdot), g(\cdot) : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  continuas y suaves en  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Además  $\phi^T(x)$  es un vector que contiene funciones continuas y diferenciables del estado.

Asumamos que el subsistema

$$\dot{x}_1 = f(x_1),$$

es global, asintóticamente estable en  $x = 0$ . En virtud de ello existe una función de Lyapunov  $V_1(x_1)$  que cumple el conjunto de ecuaciones en (2.19).

Un control ideal que estabiliza asintóticamente el origen de (2.33) es:

$$u_i(x, \theta) = \theta_2^{-1} \left( -kx_2 - \frac{\partial V_1(x_1)}{\partial x_1} g(x_1) - \phi^T(x)\theta_1 \right),$$

que en lazo cerrado con (2.33), resulta en el sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f(x_1) + g(x_1)x_2, \\ \dot{x}_2 &= -kx_2 - \frac{\partial V_1(x_1)}{\partial x_1}g(x_1), \quad k > 0.\end{aligned}\tag{2.34}$$

Sin embargo, sólo será posible implementar el control adaptable<sup>3</sup>:

$$u = (\theta_{I_2}(t) + \theta_{P_2}(x)) \left( -kx_2 - \frac{\partial V_1(x_1)}{\partial x_1}g(x_1) - \phi^T(x)(\theta_{I_1}(t) + \theta_{P_1}(x)) \right).\tag{2.35}$$

Las variables que describen los errores de estimación para  $\theta_1$  y  $\theta_2^{-1}$  son:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\theta}_1 \\ \tilde{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{I_1} + \theta_{P_1}(x) - \theta_1 \\ \theta_{I_2} + \theta_{P_2}(x) - \theta_2^{-1} \end{bmatrix},\tag{2.36}$$

cuya variación en el tiempo a lo largo de (2.33) está dada por:

$$\frac{d\tilde{\theta}}{dt} = \dot{\theta}_I + \frac{\partial \theta_P}{\partial x_1} (f(x_1) + g(x_1)x_2) + \frac{\partial \theta_P}{\partial x_2} (\theta_2 u + \phi^T(x)\theta_1),$$

donde:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta_P}{\partial x_1} &\triangleq \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta_{P_1}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \theta_{P_2}}{\partial x_1} \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial \theta_P}{\partial x_2} &\triangleq \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta_{P_1}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \theta_{P_2}}{\partial x_2} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Usando (2.36) y sustituyendo el control (2.35), la dinámica anterior es equivalente a:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\tilde{\theta} &= \dot{\theta}_I + \frac{\partial \theta_P}{\partial x_1} (f(x_1) + g(x_1)x_2) + \\ &\frac{\partial \theta_P}{\partial x_2} \left\{ -kx_2 - \frac{\partial V_1(x_1)}{\partial x_1}g(x_1) - \phi^T(x)\tilde{\theta}_1 + \right. \\ &\left. \theta_2\tilde{\theta}_2 \left( -kx_2 - \frac{\partial V_1(x_1)}{\partial x_1}g(x_1) - \phi^T(x)(\theta_{I_1} + \theta_{P_1}(x)) \right) \right\}.\end{aligned}$$

Elijamos la ley de adaptación como:

$$\dot{\theta}_I = - \left\{ \frac{\partial \theta_P}{\partial x_1} (f(x_1) + g(x_1)x_2) + \frac{\partial \theta_P}{\partial x_2} \left( -kx_2 - \frac{\partial V_1(x_1)}{\partial x_1}g(x_1) \right) \right\},\tag{2.37}$$

entonces la dinámica de  $\tilde{\theta}$  toma la forma:

$$\frac{d}{dt}\tilde{\theta} = - \frac{\partial \theta_P}{\partial x_2} \Phi(x, \hat{\theta}_1)^T \tilde{\theta},\tag{2.38}$$

donde:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_1 &= \theta_{I_1} + \theta_{P_1}(x), \\ \Phi(x, \hat{\theta}_1) &= \begin{bmatrix} \phi^T(x) \\ \theta_2 \left\{ kx_2 + \frac{\partial V_1(x_1)}{\partial x_1}g(x_1) + \phi^T(x)\hat{\theta}_1 \right\} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

---

<sup>3</sup> $\theta \triangleq \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2^{-1} \end{bmatrix}$ .

Considerando la función definida positiva  $V_2(\tilde{\theta}) = \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}$ , con  $\Gamma = \Gamma^T > 0$ , su derivada temporal a lo largo de (2.38) es:

$$\dot{V}_2(\tilde{\theta}) = -2\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \frac{\partial \theta_P}{\partial x_2} \Phi(x, \hat{\theta}_1)^T \tilde{\theta}, \quad (2.39)$$

de donde notamos que es conveniente que:

$$\frac{\partial \theta_P}{\partial x_2} = \Gamma \Phi(x, \hat{\theta}_1),$$

y por tanto, para un condición inicial particular en la que  $\theta_P(0) = 0$  :

$$\begin{bmatrix} \theta_{P_1}(x) \\ \theta_{P_2}(x, \hat{\theta}_1) \end{bmatrix} = \Gamma \left( \int_0^{x_2} \Phi(x_1, \zeta, \hat{\theta}_1) d\zeta \right) = \begin{bmatrix} \gamma_1 \int_0^{x_2} \phi(x_1, \zeta) d\zeta \\ \gamma_2 \left( k \frac{x_2^2}{2} + \frac{\partial V_1(x_1)}{\partial x_1} g(x_1) x_2 + \int_0^{x_2} \phi^T(x_1, \zeta) (\theta_{I_1} + \theta_{P_1}(x_1, \zeta)) d\zeta \right) \end{bmatrix},$$

con:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \theta_2^{-1} \end{bmatrix}.$$

Por tanto, la ecuación (2.39) puede reducirse a:

$$\dot{V}_2(\tilde{\theta}) = -2 \left( \Phi(x, \hat{\theta}_1)^T \tilde{\theta} \right)^2 \leq 0,$$

lo cual implica que  $\tilde{\theta}(t) \in L_\infty$  y  $\Phi(x, \hat{\theta}_1)^T \tilde{\theta} \in L_2$ .

En resumen, la planta (2.33) en lazo cerrado con (2.35) y (2.37) se reescribe como:

$$\dot{x}_1 = f(x_1) + g(x_1)x_2, \quad (2.40)$$

$$\dot{x}_2 = -kx_2 - \frac{\partial V_1(x_1)}{\partial x_1} g(x_1) - \Phi(x, \hat{\theta}_1)^T \tilde{\theta}, \quad (2.41)$$

es decir, un sistema asintóticamente estable en el origen perturbado por una señal  $L_2$ . Si usamos la función positiva definida global  $W(x, \tilde{\theta}) = 2V_1(x_1) + x_2^2 + V_2(\tilde{\theta})$ , la derivada temporal a lo largo del sistema anterior cumple que<sup>4</sup>:

$$\dot{W}(x, \tilde{\theta}) \leq -2\gamma_3(\|x_1\|) - 2kx_2^2 - 2 \left( \Phi(x, \hat{\theta}_1)^T \tilde{\theta} \right)^2 \leq 0.$$

Podemos concluir entonces que  $x(t) \in L_2 \cap L_\infty$  y además, dado que  $f(\cdot)$ ,  $g(\cdot)$  y  $\phi(\cdot)$  son diferenciables, entonces  $\dot{x}(t) \in L_\infty$ . Por tanto, gracias al lema de Barbalat,  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ .

Eliminar la suposición de que el subsistema  $\dot{x}_1 = f(x_1)$  es asintóticamente estable, puede hacerse fácilmente para una versión escalar del sistema (2.33):

$$\dot{x}_1 = f(x_1) + g(x_1)x_2, \quad (2.42)$$

$$\dot{x}_2 = \theta_2 u + \phi^T(x)\theta_1,$$

---

<sup>4</sup> Gracias a que  $uw \leq \frac{1}{\mu} u^p + \mu^{\frac{1}{p-1}} w^{\frac{p}{p-1}}$ ,  $\forall u \geq 0, w \geq 0, \mu > 0, p > 1$  (desigualdad de Young).

en el que tanto  $x_1$  como  $x_2$  son estados escalares. Adicionalmente supongamos que  $f(0) = 0$  y que  $g^{-1}(x_1)$  existe. Asumamos que  $g^{-1}(0) = 0$  y que es continua para toda  $x_1$  en la imagen de  $g$ . Definamos una nueva variable  $u_a(x)$  dada por:

$$u_a \triangleq \theta_2 u + \phi^T(x)\theta_1, \quad (2.43)$$

con la que el sistema (2.42) se transforma en:

$$\dot{x}_1 = f(x_1) + g(x_1)x_2, \quad (2.44)$$

$$\dot{x}_2 = u_a(x), \quad (2.45)$$

el cual tiene la forma de *integrador backstepping*.

El control virtual  $\beta(x_1)$  dado por:

$$x_2 = \beta(x_1) \triangleq -g^{-1}(x_1)(f(x_1) + kx_1),$$

estabilizará asintóticamente el punto  $x_1 = 0$  en el subsistema (2.44) como lo demuestra la función  $V_1(x_1) = \frac{1}{2}x_1^T x_1$ .

Definamos ahora la variable de error<sup>5</sup>  $z = x_2 - \beta(x_1)$  y escribamos (2.44)-(2.45) en términos de  $x_1$  y  $z$ :

$$\dot{x}_1 = f(x_1) + g(x_1)(z + \beta(x_1)), \quad (2.46)$$

$$\dot{z} = v, \quad (2.47)$$

donde se ha tomado:

$$v = u_a(x) - \frac{\partial \beta(x_1)}{\partial x_1} (f(x_1) + g(x_1)(z + \beta(x_1))). \quad (2.48)$$

(2.46)-(2.47) es un sistema similar al inicial excepto por el término  $f(x_1) + g(x_1)\beta(x_1)$  que tiene un punto de equilibrio asintóticamente estable en  $x_1 = 0$ .

Tomando la función de Lyapunov compuesta:

$$V_c(x_1, z) = V_1(x_1) + \frac{1}{2}z^2,$$

y su derivada temporal a lo largo de (2.46)-(2.47) obtenemos  $\dot{V}_c(x_1, z) = x_1^T (f(x_1) + g(x_1)\beta(x_1)) + x_1^T g(x_1)z + zv \leq -kx_1^2 + x_1^T g(x_1)z + zv$ . Si hacemos:

$$v = -x_1^T g(x_1) - k_2 z, \quad (2.49)$$

resulta que  $\dot{V}_c(x_1, z)$  cumple:

$$\dot{V}_c(x_1, z) \leq -kx_1^2 - k_2 z^2 < 0.$$

Es decir, (2.46)-(2.47) es asintóticamente estable en  $(x_1, z) = (0, 0)$ . Dado que  $\beta(0) = 0$  concluimos que el origen  $(x_1, x_2) = (0, 0)$  es también asintóticamente estable.

Igualando (2.48) y (2.49) despejamos  $u_a(x)$  obteniendo:

$$u_a(x) = -x_1^T g(x_1) - k_2 (x_2 - \beta(x_1)) + \frac{\partial \beta(x_1)}{\partial x_1} (f(x_1) + g(x_1)x_2).$$

---

<sup>5</sup>Sin ninguna relación con el error de estimación.

Pero tomando en cuenta que el control  $u$  esta relacionado con  $u_a(x)$  por medio de (2.43) hallamos que:

$$u_i(x, \theta) = \frac{1}{\theta_2} \left( u_a(x) - \phi^T(x)\theta_1 \right).$$

El control adaptable en este caso estará dado por:

$$u = (\theta_{I_2}(t) + \theta_{P_2}(x)) \left( u_a(x) - \phi^T(x)(\theta_{I_1}(t) + \theta_{P_1}(x)) \right), \quad (2.50)$$

mientras que las dinámicas de error y estimación serán:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\theta} &= \dot{\theta}_I + \frac{\partial \theta_P}{\partial x_1} (f(x_1) + g(x_1)x_2) + \\ &\frac{\partial \theta_P}{\partial x_2} \{ u_a(x) - \phi^T(x)\tilde{\theta}_1 + \theta_2 \tilde{\theta}_2 (u_a(x) - \phi^T(x)(\theta_{I_1} + \theta_{P_1}(x))) \}, \end{aligned} \quad (2.51)$$

y:

$$\dot{\theta}_I = - \left\{ \frac{\partial \theta_P}{\partial x_1} (f(x_1) + g(x_1)x_2) + \frac{\partial \theta_P}{\partial x_2} u_a(x) \right\}, \quad (2.52)$$

respectivamente.

Por su parte  $\theta_P(x)$  estará dado por:

$$\begin{bmatrix} \theta_{P_1}(x) \\ \theta_{P_2}(x, \hat{\theta}_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \int_0^{x_2} \phi(x_1, \zeta) d\zeta \\ \gamma_2 \left( - \int_0^{x_2} u_a(x_1, \zeta) d\zeta + \int_0^{x_2} \phi^T(x_1, \zeta) (\theta_{I_1} + \theta_{P_1}(x_1, \zeta)) d\zeta \right) \end{bmatrix}, \quad (2.53)$$

con:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \theta_2^{-1} \end{bmatrix}.$$

Con esas elecciones, la derivada de la función de Lyapunov  $V_2(\tilde{\theta}) = \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}$ ,  $\Gamma = \Gamma^T > 0$  a lo largo de las trayectorias de (2.51) queda:

$$\dot{V}_2(\tilde{\theta}) = -2 \left( \Phi(x, \hat{\theta}_1)^T \tilde{\theta} \right)^2 \leq 0,$$

donde  $\Phi(x, \hat{\theta}_1)$  ha cambiado a:

$$\Phi(x, \hat{\theta}_1) = \begin{bmatrix} \phi^T(x) \\ \theta_2 \left\{ -u_a(x) + \phi^T(x)\hat{\theta}_1 \right\} \end{bmatrix}.$$

En resumen, la planta (2.42) en lazo cerrado con (2.50), (2.52) y (2.53) resulta en el sistema perturbado:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f(x_1) + g(x_1)x_2, \\ \dot{x}_2 &= u_a(x) - \Phi(x, \hat{\theta}_1)^T \tilde{\theta}, \end{aligned}$$

que, mediante un análisis análogo al hecho anteriormente, se concluye que es tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ .

## 2.4. Convergencia paramétrica.

Los siguientes dos tipos de ecuaciones diferenciales han jugado un papel muy importante en el análisis de estabilidad de sistemas adaptables continuos en el tiempo [9]:

$$\dot{x}(t) = -u(t)u^T(t)x(t), \quad (2.54)$$

donde  $x(t), u(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $u(t)$  es una función continua por pedazos y acotada con  $\dot{u}(t)$  acotada. La segunda clase es:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A & -bu^T(t) \\ u(t)b^T & 0 \end{bmatrix} x, \quad (2.55)$$

donde  $x^T = \begin{bmatrix} x_1^T & x_2^T \end{bmatrix}$ ,  $x_1 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $x_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $A$  es una matriz de  $m \times m$  estable con  $A + A^T = -Q < 0$ ,  $(A, b)$  es controlable y  $u(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continua por pedazos y acotada.

Podremos tener estabilidad asintótica uniforme de  $x = 0$  en (2.54) si y sólo si  $u(t)$  es de *excitación persistente*. Esta propiedad indica que existen constantes positivas  $T_0$  y  $\alpha_1$  tales que [9]:

$$\int_t^{t+T_0} u(\tau)u^T(\tau)d\tau \geq \alpha_1 I \quad \forall t \geq 0. \quad (2.56)$$

Similarmente para (2.55), el punto  $x = 0$  es uniforme asintóticamente estable si y sólo si existen constantes positivas  $T_0, \delta_0, \varepsilon_1$  tales que  $\exists t_2 \in [t, t + T_0]$  con:

$$\left| \frac{1}{T_0} \int_{t_2}^{t_2+\delta_0} u^T(t)w d\tau \right| \geq \varepsilon_1 \quad \forall t \geq t_0,$$

para cualquier vector unitario  $w \in \mathbb{R}^n$ . Dado que (2.54) y (2.55) son lineales, la estabilidad es exponencial y global.

Dentro de los sistemas tipo (2.55) se encuentran los *casi invariantes en el tiempo*:

$$\dot{x} = (A + B(t))x \quad \forall t \geq t_0, \quad (2.57)$$

donde  $A$  es una matriz constante y  $B(t)$  es pequeña, en algún sentido, cuando  $t \rightarrow \infty$ . Dadas las propiedades de las soluciones de la ecuación diferencial lineal invariante en el tiempo:

$$\dot{z} = Az, \quad (2.58)$$

la pregunta es de qué manera las soluciones de (2.57) se desvían de las de (2.58) para las mismas condiciones iniciales. Si (2.58) es asintóticamente estable, los casos  $\|B(t)\| \rightarrow 0$  y  $\int_{t_0}^{\infty} \|B(t)\| dt < \infty$  permiten concluir que el origen de (2.57) es también asintóticamente estable [9].



## Capítulo 3

# Control Adaptable con retroalimentación de salida.

Los resultados obtenidos hasta ahora han sido bajo la suposición de que el estado completo de la planta es perfectamente conocido. Sin embargo, un tipo de problemas más realistas son aquellos en los que sólo parte del estado está disponible para retroalimentación.

Para poner en perspectiva los problemas a los que nos enfrentamos cuando hacemos control por retroalimentación de salida de sistemas no lineales, tratemos el caso de sistemas lineales invariantes en el tiempo:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du,\end{aligned}$$

donde  $A, B, C, D$  matrices constantes de dimensiones adecuadas. Con el control por retroalimentación de estados  $u = -Kx$ , el origen del sistema en lazo cerrado,  $\dot{x} = (A - BK)x$ , es exponencialmente estable si y sólo si  $A - BK$  es Hurwitz.

Si sólo podemos medir la salida  $y$  y si el sistema es controlable<sup>1</sup> y observable, es posible usar un controlador dinámico como el controlador basado en observador:

$$\begin{aligned}u &= -K\hat{x}, \\ \frac{d\hat{x}}{dt} &= A\hat{x} + Bu + H(y - C\hat{x} - Du),\end{aligned}$$

para estabilizar el sistema. En este tipo de problemas, los valores propios de la parte de retroalimentación de estados y los de observación pueden ser asignados de manera independiente, lo que usualmente es referido como *principio de separación* [31].

En sistemas no lineales el principio de separación deja de tener sentido pues aún cuando un observador no

---

<sup>1</sup>Estabilizable es suficiente [34].

lineal exponencialmente convergente esté disponible, la implementación de un controlador dinámico globalmente estabilizante puede provocar inestabilidad ó tiempo de escape finito del lazo cerrado [36].

Para cierto tipo de sistemas no lineales podremos lograr nuestro objetivo de control usando una retroalimentación dinámica de salida cuyo diseño está basado en el principio de separación. La base de la solución del problema es una extensión de las ideas desarrolladas en el capítulo 2 en la que estados y parámetros son manejados de una manera unificada de la misma manera en que fueron tratados los parámetros en el capítulo anterior.

### 3.1. Control adaptable con retroalimentación de salida.

Para el planteamiento del problema, retomemos el sistema general:

$$\dot{x} = F(x, \theta, u), \quad x(0) = x_0,$$

con  $x \in \mathbb{R}^{n+r}$  el vector de estados,  $\theta \in \mathbb{R}^d$  vector de parámetros desconocidos y  $u \in \mathbb{R}^m$  la entrada de control.  $\theta \in \Omega_\theta \subset \mathbb{R}^d$  donde  $\Omega_\theta$  es cerrado y acotado y  $F(x, \cdot)$  es localmente Lipschitz en  $x$ . Supongamos que no todos los estados  $x$  nos son medibles para controlar mediante retroalimentación de estados. Debemos entonces encontrar un control adaptable estabilizante que no dependa de los estados no medidos. Con este fin, consideremos que el sistema general puede llevarse a la forma:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= f(\eta, y, u), \\ \dot{y} &= h(\eta, y, u), \end{aligned} \tag{3.1}$$

con estado  $x = (\eta, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$  y entrada  $u \in \mathbb{R}^m$  bajo la condición de que sólo  $y$  puede ser medido. Notemos que el sistema anterior puede incluir también parámetros desconocidos, i. e., ecuaciones en la forma  $\dot{\eta} = 0$ .

Hay que encontrar una ley de control por retroalimentación de salida descrito por ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned} u &= u(y, \hat{\eta}), \\ \frac{d\hat{\eta}}{dt} &= \Psi(y, \hat{\eta}), \end{aligned} \tag{3.2}$$

con  $\hat{\eta} \in \mathbb{R}^n$  tal que todas las trayectorias del lazo cerrado (3.1)-(3.2) sean acotadas y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y^*, \tag{3.3}$$

para algún  $y^* \in \mathbb{R}^r$ . Notemos que en este caso, sólo podremos regular la salida  $y(t)$  mientras que la variable  $\eta(t)$  simplemente permanece acotada. La razón para ello es que, cuando  $\eta(t)$  contiene parámetros desconocidos, el estado  $(\eta, y)$  no necesariamente puede estabilizarse en  $(\eta^*, y^*)$  para algún valor arbitrario de  $\eta^*$ .

Siguiendo las ideas de la sección 2.1, generalizando al caso de estimación tanto de parámetros como estados desconocidos, asumiremos la existencia de un control ideal  $u_i(\eta, y)$  que logra el objetivo (3.3) y también hacer que las soluciones del lazo cerrado:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= f(\eta, y, u_i(\eta, y)), \\ \dot{y} &= h(\eta, y, u_i(\eta, y)), \end{aligned} \tag{3.4}$$

sean trayectorias acotadas. El control adaptable dará lugar al sistema:

$$\dot{\eta} = f(\eta, y, u_i(\eta_I(t) + \eta_P(y), y)), \quad (3.5)$$

$$\dot{y} = h(\eta, y, u_i(\eta_I(t) + \eta_P(y), y)),$$

$$\hat{\eta} = \eta_I(t) + \eta_P(y), \quad (3.6)$$

$$\frac{d\hat{\eta}}{dt} = \Psi(y, \hat{\eta}), \quad (3.7)$$

con estado extendido  $(\eta, y, \hat{\eta})$ ,  $\hat{\eta} \in \mathbb{R}^n$ . Nuestro objetivo será entonces diseñar a  $\eta_I(t)$  y  $\eta_P(y)$  para que el sistema anterior tenga todas sus soluciones acotadas y asintóticamente se comporte como (3.4).

Supongamos que el sistema general (3.1) puede llevarse a la forma:

$$\dot{\eta} = A(y, u)\eta + B(y, u), \quad (3.8)$$

$$\dot{y} = \Psi_0(y, u) + \Psi_1(y, u)\eta,$$

donde  $\eta \in \mathbb{R}^n$  es una variable mixta que puede contener tanto parámetros como estados. La salida medible es  $y \in \mathbb{R}^r$  y la entrada de control es  $u \in \mathbb{R}^m$ . Las funciones  $A(\cdot) : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B(\cdot) : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Psi_0(\cdot) : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^r$  y  $\Psi_1(\cdot) : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{r \times n}$  son localmente Lipschitz en sus argumentos y desvanecientes en el origen.

El sistema (3.8) no necesariamente es afín en el control y su subsistema  $\eta$  puede depender de la variable de entrada  $u$ .

Siguiendo la metodología de la sección 2.1, supongamos que conocemos la expresión del controlador que logra el objetivo (3.3), asumiendo todos los parámetros y estados conocidos:

$$u = u_i(y, \eta),$$

también asumiremos que ese control es localmente Lipschitz en sus argumentos.

Haciendo la sustitución de  $\eta$  por la estimación en (3.6), el control adaptable es entonces:

$$u = u_i(y, \eta_I(t) + \eta_P(y)). \quad (3.9)$$

Tomando la variable de error  $\tilde{\eta}$  como:

$$\tilde{\eta} = \eta_I(t) + \eta_P(y) - \eta, \quad (3.10)$$

(3.9) también puede escribirse como:

$$u = u_i(y, \eta + \tilde{\eta}). \quad (3.11)$$

Supongamos que el sistema (3.8) con control  $u = u_i(y, \hat{\eta}) = u_i(y, \eta + \tilde{\eta})$  es globalmente entrada-estado estable con respecto a cualquier entrada  $\tilde{\eta}$ .

Estudiemos ahora la parte del error de estimación. Derivando (3.10) respecto al tiempo y sustituyendo las ecuaciones del sistema (3.8) obtendremos la siguiente dinámica en  $\frac{d\tilde{\eta}}{dt}$ :

$$\frac{d\tilde{\eta}}{dt} = \frac{d}{dt}\eta_I(t) - A(y, u)(\eta_I(t) + \eta_P(y) - \tilde{\eta}) - B(y, u) + \frac{\partial\eta_P(y)}{\partial y} [\Psi_0(y, u) + \Psi_1(y, u)(\eta_I(t) + \eta_P(y) - \tilde{\eta})], \quad (3.12)$$

donde el argumento  $u$  está dado por la ecuación (3.11).

Eligiendo la ley de adaptación como:

$$\frac{d}{dt}\eta_I(t) = \left( A(y, u) - \frac{\partial\eta_P(y)}{\partial y}\Psi_1(y, u) \right) \eta_I(t) - \frac{\partial\eta_P(y)}{\partial y} \{ \Psi_0(y, u) + \Psi_1(y, u)\eta_P(y) \} + A(y, u)\eta_P(y) + B(y, u), \quad (3.13)$$

la dinámica en  $\tilde{\eta}$  se reduce a:

$$\frac{d\tilde{\eta}}{dt} = \left[ A(y, u) - \frac{\partial\eta_P(y)}{\partial y}\Psi_1(y, u) \right] \tilde{\eta}.$$

En resumen, el sistema (3.8) en lazo cerrado con (3.11) está descrito por el modelo extendido:

$$\dot{\eta} = A(y, u_i(y, \eta + \tilde{\eta}))\eta + B(y, u_i(y, \eta + \tilde{\eta})), \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \Psi_0(y, u_i(y, \eta + \tilde{\eta})) + \Psi_1(y, u_i(y, \eta + \tilde{\eta}))\eta, \\ \frac{d\tilde{\eta}}{dt} &= \left[ A(y, u) - \frac{\partial\eta_P(y)}{\partial y}\Psi_1(y, u) \right] \tilde{\eta}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Asumamos que podemos proponer una función  $\eta_P(y)$  tal que el origen del sistema (3.15) es global uniformemente estable para cualesquiera  $y$  y  $u$  y además logre que  $\tilde{\eta}(t)$  cumpla:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (u_i(y, \eta + \tilde{\eta}(t))) = u_i(y, \eta). \quad (3.16)$$

Con lo anterior, la elección correcta de  $\eta_P(y)$  hará que el error de estimación  $\tilde{\eta}$  permanezca acotado para todo  $t$  y que podamos reconstruir, después de un tiempo grande, el control ideal consiguiendo con ello nuestro objetivo de control. Notemos que hasta el momento hemos podido diseñar el control de manera independiente a la dinámica (3.15) por lo que puede considerarse que bajo las condiciones planteadas, lo anterior es un método de diseño basado en el principio de separación pero para sistemas no lineales.

Si  $\tilde{\eta}$  permanece acotada para todo tiempo, entonces  $\eta$  y  $y$  cumplen lo mismo pues (3.14) es entrada-estados estable por suposición. Podemos concluir entonces que será posible diseñar una ley de control de retroalimentación de salida de la forma (3.2) que resuelve el problema de regulación para estados desconocidos de (3.14).

Para lograr el objetivo de control, es suficiente con que la dinámica (3.15) sea sólo globalmente estable. Sin embargo, si logramos que sea asintóticamente estable para cualesquiera  $y$  y  $u$ , podremos usarla para obtener un estimado asintótico de estados y parámetros.

Nuestro problema entonces se concentra en diseñar a  $\eta_P(y)$  adecuadamente para que (3.15) sea globalmente estable y se cumpla (3.16). Aunque  $\eta_P(y)$  se ha restringido a depender sólo de la parte conocida del estado, la idea puede generalizarse a permitir dependencias de los parámetros y estados estimados así como de variables artificiales que sólo tienen importancia en el momento del diseño. Puede hacerse uso de esta propuesta cuando por ejemplo el sistema general no puede ser llevado a la estructura (3.8) o cuando la dinámica (3.15) no tiene una solución que pueda diseñarse fácilmente.

## Capítulo 4

# Control adaptable de robot móvil.

Todos los desarrollos anteriores, serán aplicados al control de ángulo y velocidad lineal de un robot móvil mostrado en la figura 4.1.

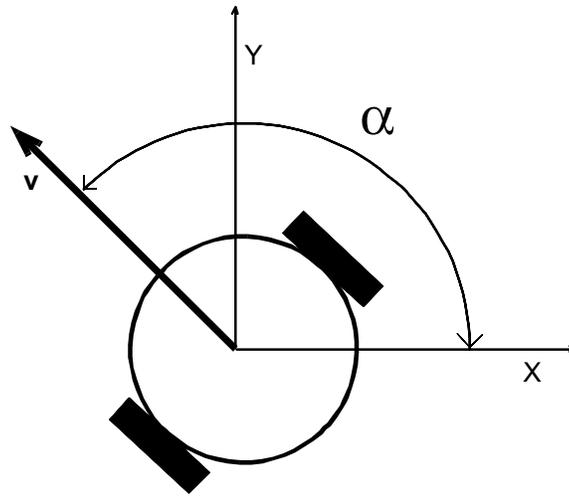


Figura 4.1: Esquema del robot móvil

El modelo que describe la dinámica del robot está dado por las ecuaciones [18]:

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \dot{\theta} \\ \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos(\alpha) \\ v \sin(\alpha) \\ \omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ \tau \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

donde  $v_x$  y  $v_y$  son las componentes de la velocidad lineal  $v$  a lo largo de cada eje cartesiano del sistema de referencia externo XY,  $\alpha$  denota el ángulo medido respecto al eje horizontal del mismo sistema.  $\omega$  es la velocidad angular del

robot,  $m$  su masa  $J$  su momento de inercia,  $F$  la fuerza lineal a la que está sometido y  $\tau$  el torque. Estas últimas dos variables corresponden a las entradas de control.

## 4.1. Control adaptable de ángulo de orientación con retroalimentación de estados.

Dado que las dinámicas angular y longitudinal del modelo (4.1) están totalmente desacopladas, podemos tratar el control de cada parte independientemente.

Para lograr estabilizar la orientación del robot en cierto valor deseado  $\alpha^* \in [0, 2\pi)$ , reescribimos su parte angular en términos del error de seguimiento y el objetivo será estabilizar ese nuevo sistema en el origen. Las variables de error y de deslizamiento están definidas por:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha - \alpha^*, \\ x_2 &\triangleq \dot{x}_1 + \lambda x_1 = \omega + \lambda x_1 \implies \omega = x_2 - \lambda x_1. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Derivándolas respecto al tiempo obtenemos el par de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - \lambda x_1, \\ \dot{x}_2 &= \theta_2 u + \lambda x_2 - \lambda^2 x_1, \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde  $u$  es la entrada de control  $\tau$ . Asumiremos los estados  $x_1$  y  $x_2$  conocidos y el parámetro  $\theta_2 \triangleq \frac{1}{J}$  desconocido pero, sin pérdida de generalidad  $\theta_2 > 0$ .  $\lambda$  es conocido pues es un valor de diseño. Puede ocurrir que la velocidad angular  $\omega$  no sea físicamente medible, en tal caso, diseñaremos un observador que proporcione tanto el parámetro  $\theta_2 = \frac{1}{J}$  como una estimación indirecta de  $\omega$ , mediante la dinámica de  $x_2$  (sección 4.3).

Calculando la ley de control estabilizante ideal para (4.3) usando la función definida positiva  $V_1(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ , obtenemos:

$$u_i(x_1, x_2, \theta_2) = \theta_2^{-1} (-(k + \lambda)x_2 + (\lambda^2 - 1)x_1). \quad (4.4)$$

El control adaptable para este caso es:

$$u_i(x_1, x_2, \hat{\theta}) = (\theta_I(t) + \theta_P(x_1, x_2)) (-(k + \lambda)x_2 + (\lambda^2 - 1)x_1). \quad (4.5)$$

Con la definición de la nueva variable  $\tilde{\theta} = \theta_I(t) + \theta_P(x_1, x_2) - \theta_2^{-1}$  y  $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$ , las dinámicas de error al implementar el control adaptable son:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -k \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_2 ((\lambda^2 - 1)x_1 - (k + \lambda)x_2) \end{bmatrix} \tilde{\theta}, \quad (4.6)$$

$$\frac{d\tilde{\theta}}{dt} = -N(x)I_{2 \times 2}x - \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_P(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial \theta_P(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_2 ((\lambda^2 - 1)x_1 - (k + \lambda)x_2) \end{bmatrix} \tilde{\theta}, \quad (4.7)$$

donde  $P^T(x) = I_{2 \times 2}$  y  $c = 0$  (ver ecuación (2.21)) y donde se ha asignado el algoritmo de adaptación:

$$\dot{\theta}_I(t) = -N(x)I_{2 \times 2}x - \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_P(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial \theta_P(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Como siguiente paso, debemos diseñar las funciones  $\theta_P(x_1, x_2)$  y  $N(x_1, x_2)$  para que (4.6)-(4.7) sea globalmente estable. Propongamos la función positiva definida:

$$V_e(x, \tilde{\theta}) = \frac{1}{2\theta_2^2}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{2\theta_2}\tilde{\theta}^2,$$

cuya derivada temporal a lo largo de las trayectorias de (4.6) y (4.7) es:

$$\begin{aligned} \dot{V}_e(x, \tilde{\theta}) &= -\frac{\lambda}{\theta_2^2}x_1^2 - \frac{k}{\theta_2^2}x_2^2 - \frac{\tilde{\theta}x_2}{\theta_2}((\lambda^2 - 1)x_1 - (k + \lambda)x_2) \\ &\quad - \frac{\tilde{\theta}}{\theta_2} \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \frac{\partial \theta_P(x)}{\partial x_2}((\lambda^2 - 1)x_1 - (k + \lambda)x_2)\tilde{\theta}^2, \end{aligned}$$

donde se ha definido  $N(x) \equiv \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) \end{bmatrix}$ .

Proponiendo  $\theta_P(x)$  como:

$$\frac{\partial \theta_P(x)}{\partial x_2} = (\lambda^2 - 1)x_1 - (k + \lambda)x_2,$$

y  $N(x)$  tal que:

$$-\frac{\tilde{\theta}x_2}{\theta_2}((\lambda^2 - 1)x_1 - (k + \lambda)x_2) - \frac{\tilde{\theta}}{\theta_2} \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0,$$

conseguiremos entonces estabilizar globalmente a (4.6) y (4.7).

De los cálculos anteriores obtenemos:

$$\begin{aligned} \theta_P(x) &= (\lambda^2 - 1)x_1x_2 - \frac{(k + \lambda)}{2}x_2^2, \\ \begin{bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 - \lambda^2 \\ (k + \lambda) \end{bmatrix} x_2, \end{aligned} \quad (4.9)$$

Con esas elecciones  $\dot{V}_e(x, \tilde{\theta})$  cumple:

$$\dot{V}_e(x, \tilde{\theta}) = -\frac{\lambda}{\theta_2^2}x_1^2 - \frac{k}{\theta_2^2}x_2^2 - ((\lambda^2 - 1)x_1 - (k + \lambda)x_2)^2\tilde{\theta}^2. \quad (4.10)$$

Notemos que el coeficiente de  $\tilde{\theta}^2$  depende de estados que tienden a cero asintóticamente por lo que no podemos garantizar estabilidad asintótica del estado completo  $(x_1, x_2, \tilde{\theta})$ .

#### 4.1.1. Implementación y resultados.

La implementación de este esquema de control consta de tres bloques principales como se muestra en la figura 4.2. Dentro del bloque *PLANTA* se encuentra el modelo de la parte angular del robot y los cálculos necesarios para

construir los estados  $x_1$  y  $x_2$  definidos en las expresiones (4.2). El bloque *AA* denota al algoritmo de adaptación de la ecuación (4.8) en el que las variables de entrada son las salidas de la planta. Dentro de él se calcula la función  $\theta_P(x)$  mediante (4.9) y la salida,  $\dot{\theta}_I(t)$ , se integra para entrar al bloque de *Control* donde se calcula la señal dada en (4.5) que reingresa a la planta.

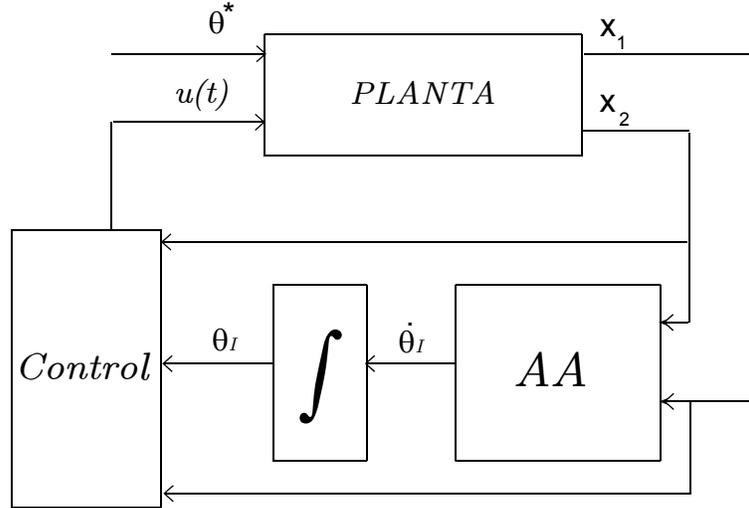


Figura 4.2: Diagrama de bloques del esquema de control. Consta de tres bloques principales: Planta, Algoritmo de Adaptación (*AA*) y Control.

Las gráficas de las figuras 4.3 y 4.4 muestran los resultados de estabilización en un ángulo de referencia  $\alpha^* = \frac{\pi}{4}$  y  $\frac{\pi}{8}$  y el comportamiento de la señal de control, respectivamente.

Estudiemos ahora la dinámica de estimación de la figura 4.5. En simulación encontramos que el valor en el cual el sistema se estabiliza es altamente dependiente de la condición inicial del integrador mostrado en la figura 4.2 y del ángulo de referencia  $\alpha^*$  por lo que no conseguimos convergencia paramétrica. Para explicarlo retomemos la ecuación (4.10). Ya que el factor de  $\tilde{\theta}^2$  es positivo, (4.10) cumple la desigualdad:

$$\dot{V}_e(x, z) \leq -\frac{\lambda}{\theta_2^2} x_1^2 - \frac{k}{\theta_2^2} x_2^2.$$

$x_1, x_2 \in L_2$  pues<sup>1</sup>:

$$\dot{V}_e(x, z) \leq -\frac{\lambda}{\theta_2^2} x_1^2 - \frac{k}{\theta_2^2} x_2^2 \leq -\frac{\lambda}{\theta_2^2} x_1^2,$$

lo que implica que:

$$V_e(T) - V_e(0) \leq -\frac{\lambda}{\theta_2^2} \int_0^T x_1^2 dt,$$

y por lo tanto:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T x_1^2 dt \leq \frac{\theta_2^2}{\lambda} V_e(0).$$

<sup>1</sup>El mismo desarrollo puede ser usado si se sustituye  $x_1$  por  $x_2$ .

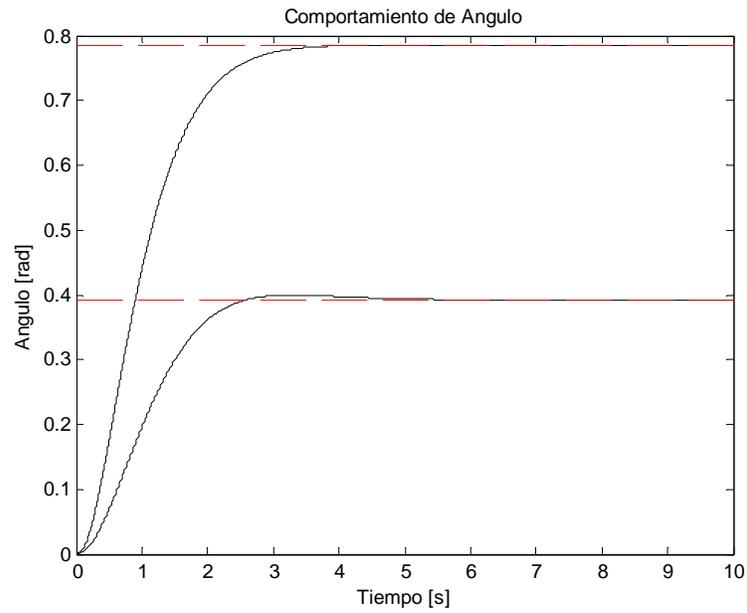


Figura 4.3: Comportamiento del angulo del robot para referencias  $\alpha^* = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}$ .

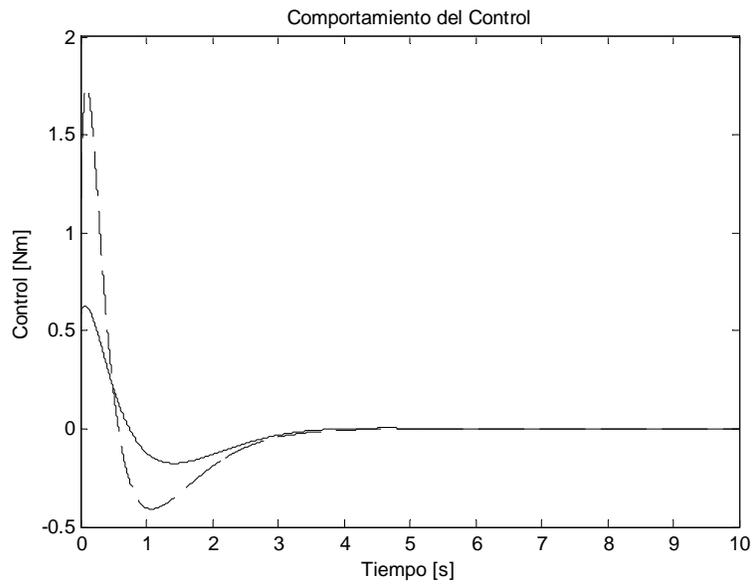


Figura 4.4: Comportamiento del control para referencias de  $\frac{\pi}{4}$  (línea punteada), y  $\frac{\pi}{8}$  (línea continua).

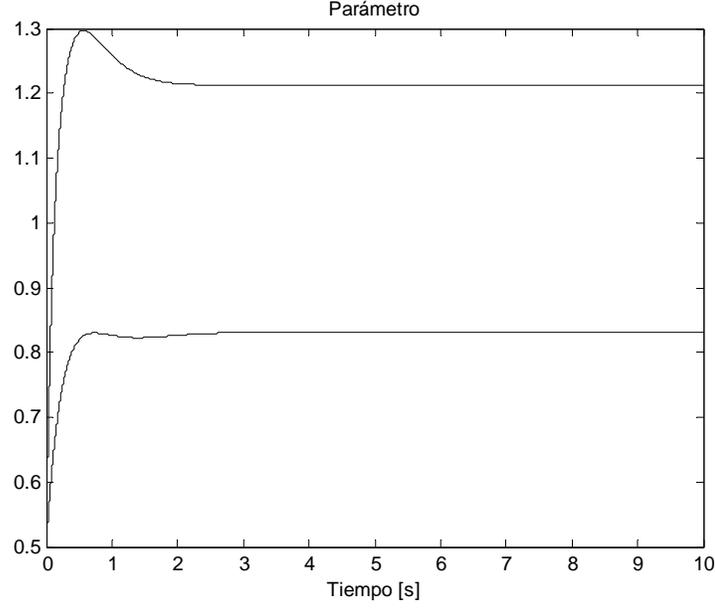


Figura 4.5: Comportamiento del parámetro estimado. En este caso el valor real de la inercia es  $J = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . El parámetro se estabiliza en 0.8308 si  $\alpha^* = \frac{\pi}{8}$  y en 1.212 si  $\alpha^* = \frac{\pi}{4}$ .

Gracias a la ecuación (4.6),  $\dot{x}_1$  y  $\dot{x}_2 \in L_\infty$  y, en virtud del lema de Barbalat,  $x_1, x_2 \rightarrow 0$  asintóticamente. Dado que  $\tilde{\theta} \in L_\infty$ , pues cumple (4.10), concluimos que la dinámica en  $\tilde{\theta}$  sólo permanece estable y *no asintóticamente estable*, con lo que conseguiríamos estimación asintótica del parámetro real.

## 4.2. Diseño con $N(x) = 0$ .

Retomemos el control adaptable:

$$u = (\theta_I(t) + \theta_P(x)) ((\lambda^2 - 1)x_1 - x_2(k + \lambda)).$$

Si  $N(x) = 0$  la dinámica del error  $\tilde{\theta}$  es<sup>2</sup>:

$$\frac{d\tilde{\theta}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_P}{\partial x_1} & \frac{\partial \theta_P}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_2 ((\lambda^2 - 1)x_1 - (k + \lambda)x_2) \end{bmatrix} \tilde{\theta},$$

donde se ha asignado el algoritmo de adaptación:

$$\dot{\theta}_I(t) = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_P}{\partial x_1} & \frac{\partial \theta_P}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

<sup>2</sup>Los argumentos de las funciones  $\theta_P(x)$  y  $\theta_I(t)$  serán omitidos por brevedad.

La dinámica  $\frac{d\tilde{\theta}}{dt}$  es entonces:

$$\frac{d\tilde{\theta}}{dt} = \theta_2 \frac{\partial \theta_P}{\partial x_2} ((\lambda^2 - 1)x_1 - x_2(k + \lambda)) \tilde{\theta}.$$

La ecuación diferencial anterior es globalmente estable con la elección de  $\theta_P$  tal que  $\frac{\partial \theta_P}{\partial x_2} = (1 - \lambda^2)x_1 + x_2(k + \lambda)$ , como lo demuestra la función  $V_z(\tilde{\theta}) = \frac{1}{2\theta_2}\tilde{\theta}^2$ . Entonces  $\tilde{\theta}$  se reduce a:

$$\frac{d\tilde{\theta}}{dt} = \theta_2 ((\lambda^2 - 1)x_1 - x_2(k + \lambda))^2 \tilde{\theta}. \quad (4.12)$$

En resumen, la ley de control adaptable en conjunto con la ley de adaptación (4.11) y:

$$\theta_P(x_1, x_2) = (1 - \lambda^2)x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2(k + \lambda) \quad (4.13)$$

lograrán estabilizar globalmente el origen de (4.3).

### 4.2.1. Implementacion y resultados

Se implementó el modelo de la figura 4.1 en Simulink, Matlab con el control como en el esquema de la figura 4.2 y se obtuvieron los resultados mostrados en las figuras 4.6 a 4.8.

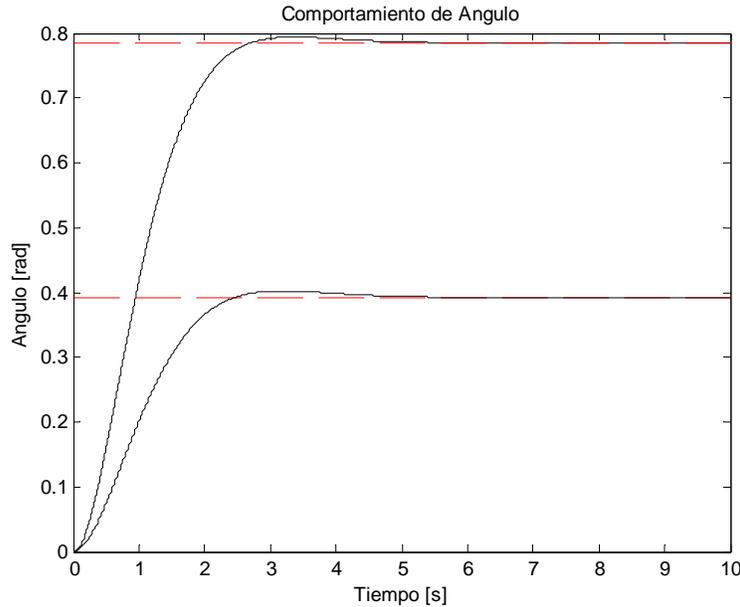


Figura 4.6: Comportamiento del ángulo para el diseño  $N(x) = 0$ . Los valores de la referencia deseada son  $\frac{\pi}{4}$  y  $\frac{\pi}{8}$ .

Retomemos la ecuación (4.12). Recordando los resultados de la sección 2.4, sabemos que (4.12) es asintóticamente estable si  $\theta_P(x)$  es una señal de excitación persistente lo que no es compatible con nuestro objetivo de control  $x_1 \rightarrow 0$  y  $x_2 \rightarrow 0$ . Si lo anterior ocurre, entonces:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_P(x(t)) \rightarrow 0,$$

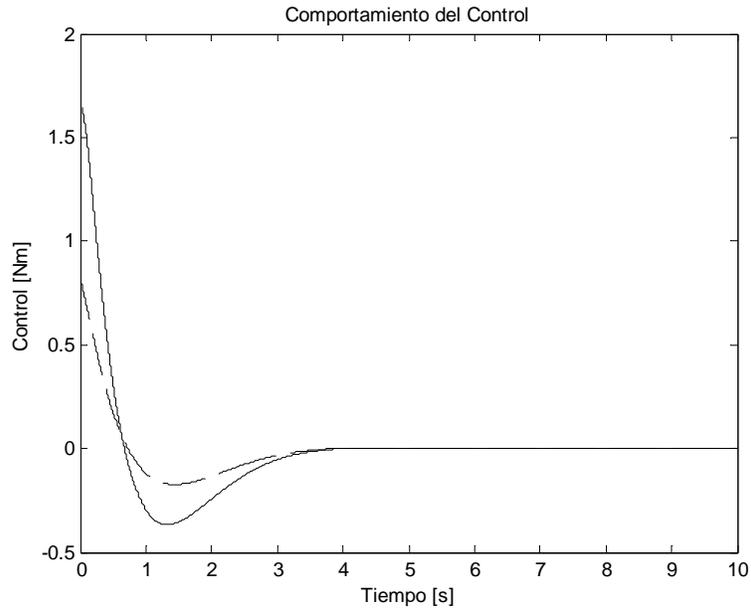


Figura 4.7: Comportamiento del control para referencias de  $\frac{\pi}{4}$  (línea continua), y  $\frac{\pi}{8}$  (línea punteada).

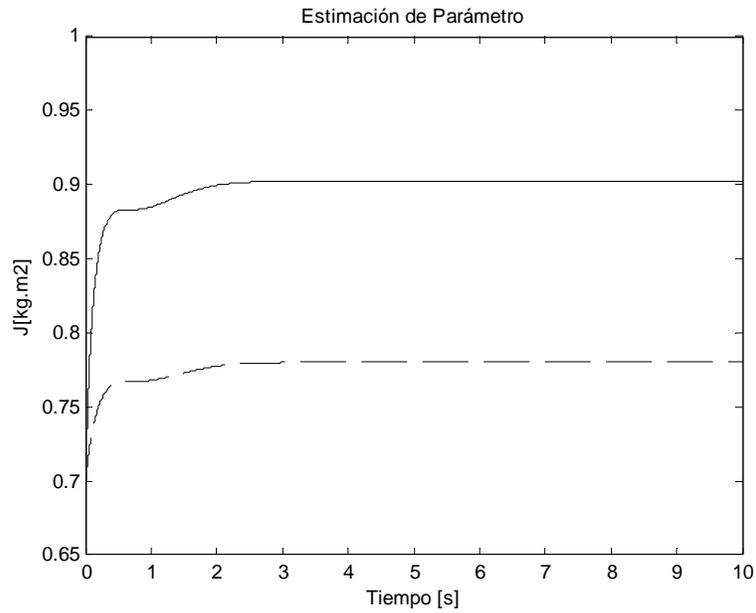


Figura 4.8: Comportamiento del parámetro estimado. En este caso el valor real de la inercia es  $J = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Si el valor de referencia es  $\alpha^* = \frac{\pi}{4}$  (línea continua) la dinámica se estabiliza en  $J = 0,9023 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Si  $\alpha^* = \frac{\pi}{8}$  (línea punteada) lo hace en  $J = 0,7801 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .

y por tanto no podemos establecer convergencia paramétrica en la estimación de la inercia  $J$  y sólo podemos decir que la dinámica de estimación permanece estable. Lo anterior es válido para cualquier condición inicial del integrador del esquema 4.2 sin embargo, este valor y la referencia a seguir determinan el punto en el que esta dinámica se estabiliza.

### 4.2.2. Control de velocidad lineal.

Denotando  $v$  como la velocidad, podemos escribir la parte de la dinámica lineal de robot como:

$$\begin{aligned}\dot{v} &= \frac{F}{m}, \\ v_x &= v \cos(\alpha), \\ v_y &= v \sin(\alpha).\end{aligned}\tag{4.14}$$

Definiendo la nueva variable de error:

$$y = v - v^*,$$

donde  $v^*$  la velocidad lineal deseada, podemos reescribir (4.14) como:

$$\dot{y} = \frac{F}{m} \triangleq \theta_1 u,\tag{4.15}$$

donde:

$$\theta_1 = \frac{1}{m},$$

la masa  $m$  es un parámetro desconocido y la entrada de control  $u$  corresponde a la fuerza.

El control:

$$u = -\frac{k}{\theta_1} y,$$

con  $k > 0$  estabiliza asintóticamente al sistema (4.15) como puede ser comprobado mediante la función de Lyapunov  $V(y) = \frac{1}{2}y^2$ . El control adaptable es entonces:

$$u = -k(\theta_I(t) + \theta_P(y))y,\tag{4.16}$$

y el error de estimación está dado por la variable:

$$\tilde{\theta} = \theta_I(t) - \theta_1^{-1} + \theta_P(y).\tag{4.17}$$

Calculando la variación en el tiempo de (4.17) en lazo cerrado con el control (4.16), encontramos que:

$$\frac{d\tilde{\theta}}{dt} = \dot{\theta}_I - ky \frac{d\theta_P(y)}{dy} - k\theta_1 y \frac{d\theta_P(y)}{y} \dot{\theta}.\tag{4.18}$$

Si establecemos que

$$\dot{\theta}_I = ky \frac{d\theta_P(y)}{y},$$

entonces (4.18) es estable si:

$$\theta_P(y) = \frac{1}{2}y^2. \quad (4.19)$$

Ya que nuestro objetivo es que  $y \rightarrow 0$  conforme  $t \rightarrow \infty$ , la señal (4.19) no puede ser de excitación persistente y por tanto sólo logramos estabilidad de la dinámica de adaptación, pero *no* podremos obtener un estimado asintótico del valor real de la masa.

### 4.2.3. Implementación y resultados

Se implementó el modelo de la figura 4.1 en Simulink, Matlab y se obtuvieron los resultados mostrados en las figuras 4.9 a 4.11.

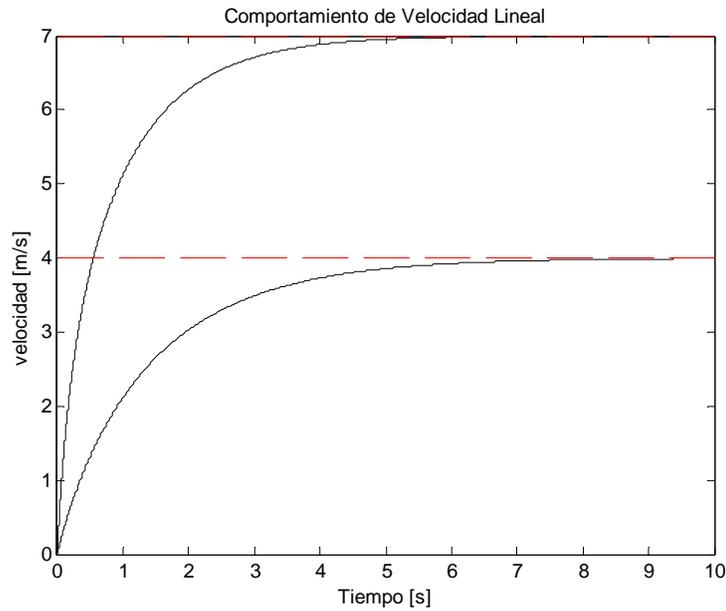


Figura 4.9: Comportamiento de la velocidad lineal. Los valores de referencia son  $v^* = 7m/s$  y  $4m/s$  denotadas con líneas punteadas.

## 4.3. Control adaptable de orientación del robot por retroalimentación de salida.

Retomemos el sistema (4.3) dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - \lambda x_1, \\ \dot{x}_2 &= \theta_2 u + \lambda x_2 - \lambda^2 x_1. \end{aligned} \quad (4.20)$$

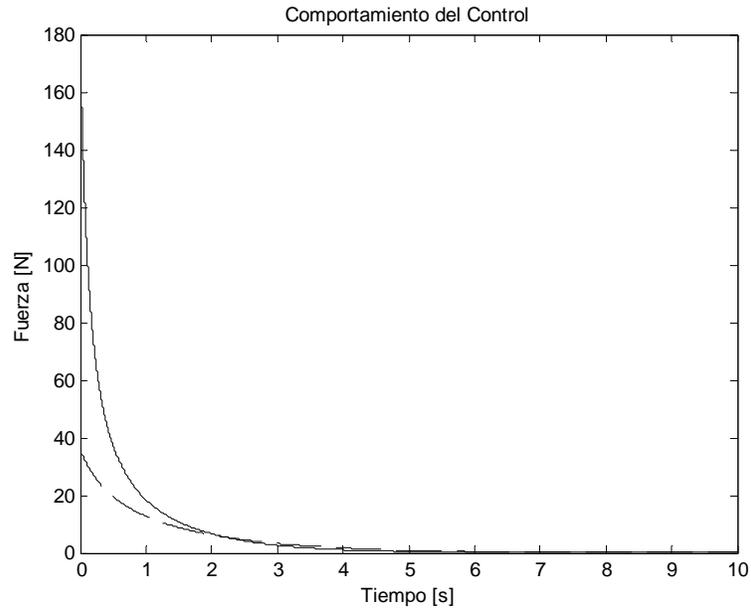


Figura 4.10: Comportamiento de la señal de control para referencias  $v^* = 7 \text{ m/s}$  (línea continua) y  $v^* = 4 \text{ m/s}$  (línea punteada).

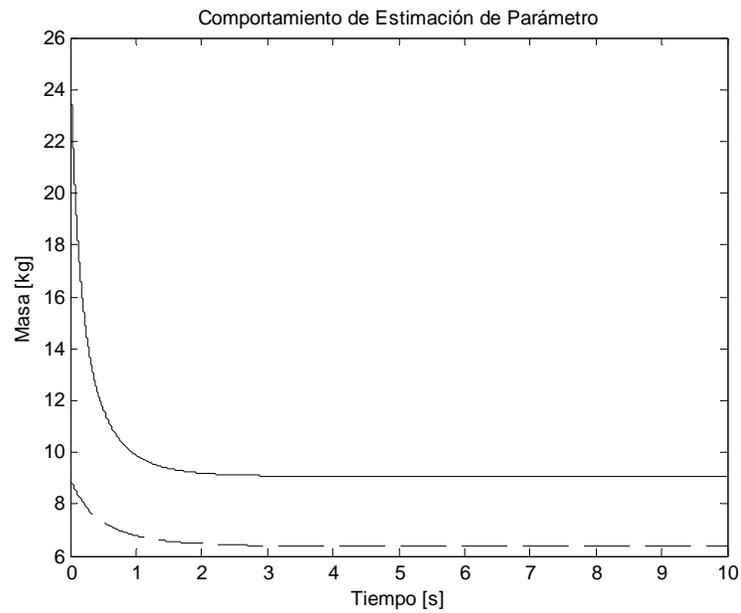


Figura 4.11: Comportamiento de la dinámica de estimación de la masa cuyo valor real es de  $10 \text{ kg}$ . La línea continua corresponde al caso en el que la referencia es  $v^* = 7 \text{ m/s}$  y la punteada a  $v^* = 4 \text{ m/s}$ .

Consideremos que el estado conocido es  $x_1$  por lo que lo tomaremos como salida  $y$  del sistema. En este caso, queremos estimar  $x_2$  y el parámetro  $\theta_2$ , por tanto, el vector  $\eta$  que contiene las estimaciones es igual a  $\eta = \begin{bmatrix} x_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$ . Sabemos que un control estabilizante que logra el objetivo deseado, suponiendo estados y parámetros disponibles, es (sección 4.1):

$$u(x_1, \eta) = \theta_2^{-1} (x_1 (\lambda^2 - 1) - x_2 (k + \lambda)).$$

Reescribamos al sistema (4.20) como:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \begin{bmatrix} \lambda & u \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \eta + \begin{bmatrix} -\lambda^2 y \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \dot{y} &= -\lambda y + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \eta, \end{aligned} \quad (4.21)$$

el cual tiene la forma general (3.8).

La dinámica  $\tilde{\theta}(t) \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$  está expresada como<sup>3</sup>:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\theta}}{dt} &= \dot{\eta}_I(t) + \frac{\partial \eta_P}{\partial y} \dot{y} - \dot{\eta} \\ &= \dot{\eta}_I(t) + \left\{ \frac{\partial \eta_P}{\partial y} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} (\eta_I(t) + \eta_P(y) - \tilde{\theta}) - \lambda y \frac{\partial \eta_P}{\partial y} + \begin{pmatrix} \lambda^2 y \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Eligiendo la ley de adaptación:

$$\dot{\eta}_I(t) = \begin{pmatrix} \lambda - \frac{\partial \eta_{P_1}}{\partial y} & u \\ -\frac{\partial \eta_{P_2}}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} \eta_I(t) - \begin{pmatrix} \frac{\partial \eta_{P_1}}{\partial y} (\eta_{P_1}(y) - \lambda y) - \lambda \eta_{P_1}(y) + \lambda^2 y - u \eta_{P_2}(y) \\ \frac{\partial \eta_{P_2}}{\partial y} (\eta_{P_1}(y) - \lambda y) \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

la dinámica en  $\tilde{\theta}$  resulta en:

$$\frac{d\tilde{\theta}}{dt} = \begin{pmatrix} \lambda - \frac{\partial \eta_{P_1}}{\partial y} & u \\ -\frac{\partial \eta_{P_2}}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} \tilde{\theta}. \quad (4.23)$$

Nuestro problema ahora se concentra en diseñar las funciones  $\eta_{P_1}(y)$  y  $\eta_{P_2}(y)$  para que el sistema anterior, variante en el tiempo, sea globalmente estable.

Asumamos funciones  $\eta_P(y)$  de la forma:  $\eta_P(y) = \begin{bmatrix} \lambda_1 y \\ \lambda_2 y \end{bmatrix}$  donde  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son dos constantes a determinar [2].

Con la elección anterior el sistema (4.23) queda:

$$\frac{d\tilde{\theta}}{dt} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda_1 & u \\ -\lambda_2 & 0 \end{pmatrix} \tilde{\theta}. \quad (4.24)$$

Supongamos que la entrada de control tiene una magnitud acotada  $m < u(t) < M$  para algunos valores de  $m$  y  $M$  a determinar<sup>4</sup>. Definamos los parámetros  $\bar{u} = \frac{m+M}{2}$ ,  $\delta u = \bar{u} - u$ . Entonces podemos expresar al sistema (4.24)

---

<sup>3</sup> $\eta_P(y) = \begin{pmatrix} \eta_{P_1}(y) \\ \eta_{P_2}(y) \end{pmatrix}$ ,  $\frac{\partial \eta_P}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \eta_{P_1}}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta_{P_2}}{\partial y} \end{pmatrix}$  y  $\dot{\eta} = \begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix}$

<sup>4</sup>Para establecer los valores de éstas constantes podemos usar argumentos de limitación física o energética.

como:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\theta}}{dt} &= \begin{pmatrix} \lambda - \lambda_1 & \bar{u} \\ -\lambda_2 & 0 \end{pmatrix} \tilde{\theta} + \begin{pmatrix} 0 & -\delta u \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{\theta} = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda_1 & \bar{u} \\ -\lambda_2 & 0 \end{pmatrix} \tilde{\theta} + \begin{pmatrix} -\delta u \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{\theta} \\ &\triangleq \begin{pmatrix} \lambda - \lambda_1 & \bar{u} \\ -\lambda_2 & 0 \end{pmatrix} \tilde{\theta} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} w, \end{aligned} \quad (4.25)$$

donde  $w = \delta u \mathbf{r}$  y  $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T \tilde{\theta}$ . El modelo (4.25) es entonces un sistema lineal invariante en el tiempo con función de transferencia  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{\lambda_2}{s^2 - (\lambda - \lambda_1)s + \lambda_2 \bar{u}}$ ; asintóticamente estable si:

$$\lambda < \lambda_1, \quad (4.26)$$

$$0 < \bar{u} \lambda_2, \quad (4.27)$$

en lazo cerrado con una ganancia variante en el tiempo  $\delta u$  que es tal que  $|\delta u| < \frac{M-m}{2}$  (cálculos en apéndice A).

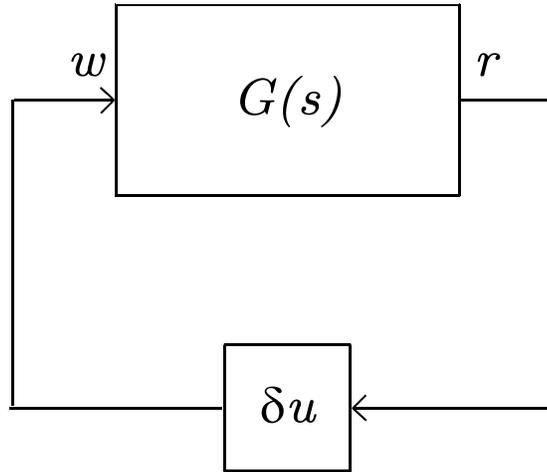


Figura 4.12: Conexión de un sistema asintóticamente estable  $G(s)$ , en lazo cerrado con una ganancia acotada variante en el tiempo  $\delta u$

La norma<sup>5</sup>  $H_\infty$  del sistema (4.25) con salida  $y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{\theta}$ , tiene dos partes (apéndice (A)):

$$\|G(s)\|_\infty = \begin{cases} \frac{1}{|\bar{u}|} & \omega = 0 \\ \sqrt{\frac{1}{\frac{(\lambda - \lambda_1)^2}{\lambda_2} \left( \bar{u} - \frac{(\lambda - \lambda_1)^2}{4\lambda_2} \right)}} & \omega^2 = \bar{u} \lambda_2 - \frac{(\lambda - \lambda_1)^2}{2} \end{cases}. \quad (4.28)$$

dado que  $\omega^2 = \bar{u} \lambda_2 - \frac{(\lambda - \lambda_1)^2}{2}$ , consideraremos que:

$$0 < \lambda_2 \bar{u} - \frac{(\lambda - \lambda_1)^2}{2}. \quad (4.29)$$

<sup>5</sup>Calculado con el método de [1].

El teorema de pequeñas ganancias asegura que el sistema (4.24) será asintóticamente estable si:

$$\left(\frac{M-m}{2}\right) \left(\sqrt{\frac{1}{\frac{(\lambda-\lambda_1)^2}{\lambda_2} \left(\bar{u} - \frac{(\lambda-\lambda_1)^2}{4\lambda_2}\right)}}}\right) < 1, \quad (4.30)$$

ó

$$\frac{1}{|\bar{u}|} \frac{M-m}{2} < 1, \quad (4.31)$$

tomando en cuenta las dos partes de (4.28) y bajo las condiciones (4.26), (4.27) y (4.29).

Haciendo manipulaciones algebraicas, (4.30) es equivalente a:

$$\left(\xi - \left(M + m + 2\sqrt{Mm}\right)\right) \left(\xi - \left(M + m - 2\sqrt{Mm}\right)\right) < 0 \quad (4.32)$$

donde  $\xi \triangleq \frac{(\lambda-\lambda_1)^2}{\lambda_2}$ .

Como  $m$  y  $M$  pueden diseñarse con cierta libertad, supongamos que  $m > 0$  y  $M > 0$  con la restricción  $m < M$ . Al resolver la desigualdad (4.32) para la variable  $\xi$ , obtenemos un continuo de valores  $\lambda$ ,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  que satisfacen las ecuaciones (4.26), (4.27) y (4.29). El mismo camino puede ser usado si suponemos que  $m$  y  $M$  son ambos negativos con una restricción equivalente a la del caso anterior. Ya que han sido propuestas todas las variables de sintonización, seremos capaces de implementar para simulación.

El caso  $m < 0$  y  $M > 0$  no está permitido pues el término dentro del radical de la ecuación (4.32) sería negativo, lo que implicaría constantes de control imaginarias.

Concentrémonos ahora en (4.31) que es equivalente a:

$$\frac{M-m}{|M+m|} < 1, \quad (4.33)$$

la cual sólo será satisfecha cuando  $m$  y  $M$  sean ambas negativas o ambas positivas.

Dado que el Teorema de Pequeñas Ganancias es un requisito sólo suficiente, podemos estabilizar a (4.24) aún cuando (4.32) o (4.33) no se cumplan. Con esto en mente, se proponen valores  $m < 0$  y  $0 < M$  que excedan el valor de 1 en, por ejemplo, un 20%. Usando  $m$  y  $M$ , se calculan las constantes de sintonización del control y del algoritmo de adaptación  $\lambda$ ,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  mediante<sup>6</sup>:

$$\bar{u}\lambda_2 = \frac{(\lambda - \lambda_1)^2}{2}, \quad (4.34)$$

$$\lambda < \lambda_1, \quad (4.35)$$

$$0 < \bar{u}\lambda_2, \quad (4.36)$$

donde (4.35) y (4.36) son necesarias para que (4.25) sea asintóticamente estable.

### 4.3.1. Simulación y resultados.

Supongamos que la señal de control  $u(t)$ , se encuentra entre los valores  $-1 < u(t) < 10$  los cuales han sido propuestos con base en las simulaciones de la sección 4.1 y 4.2. Aunque  $m = -1$  y  $M = 10$  no cumplen (4.33), se

<sup>6</sup>Notemos que, dados  $m$  y  $M$ , existe una infinidad de constantes de sintonización que satisfacen (4.34)-(4.36).

desvían del valor 1 en un 22 %. Las relaciones (4.34)-(4.36) se cumplen si los valores lambda son por ejemplo:

$$\begin{aligned}\lambda &= 1, \\ \lambda_1 &= 2, \\ \lambda_2 &= 1/9.\end{aligned}$$

Con estas constantes de sintonización implementamos el control en Simulink, Matlab cuyo diagrama esquemático

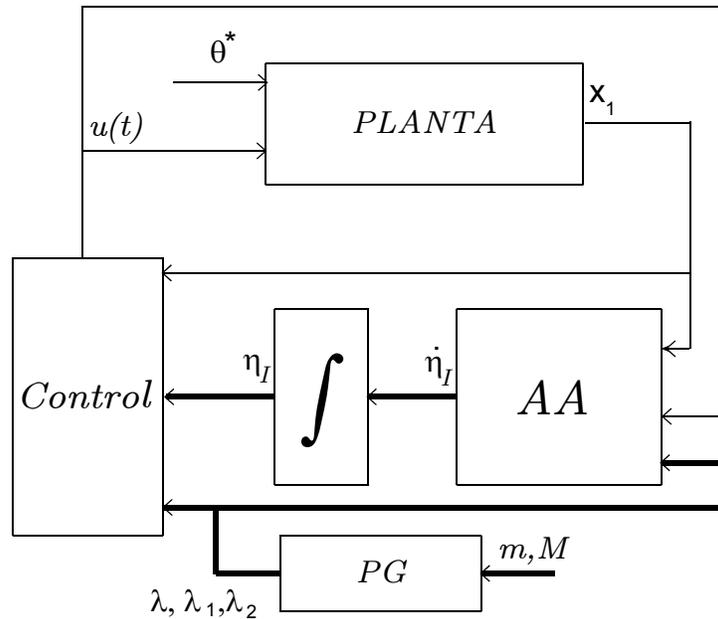


Figura 4.13: Diagrama de bloques de la implementación de control adaptable por retroalimentación de salida.

se presenta en la figura 4.13. En ella, dentro del bloque *PLANTA* se construye el estado  $x_1$  usando únicamente el ángulo de orientación. El bloque *AA* (algoritmo de adaptación) genera la derivada del vector de estados-parámetros estimados cuya integral ingresa al bloque *Control* que calcula el torque necesario para estabilizar en cero el error de seguimiento para el ángulo. El bloque *PG* calcula, además, las constantes de sintonización usando tanto el teorema de pequeñas ganancias como argumentos de limitación física al imponer los valores de  $m$  y  $M$ . Con base en las simulaciones, surgen los siguientes resultados mostrados en las figuras 4.14 a 4.16.

#### 4.4. Respuesta ante incertidumbres en la medición.

Hasta ahora, hemos asumido que se conocen perfectamente los valores de ángulo y/o velocidad angular para ser retroalimentadas. En el mundo real, muchas son las fuentes de error en un experimento, por ejemplo, incertidumbres en los instrumentos de medición o perturbaciones de muchos tipos en la planta.

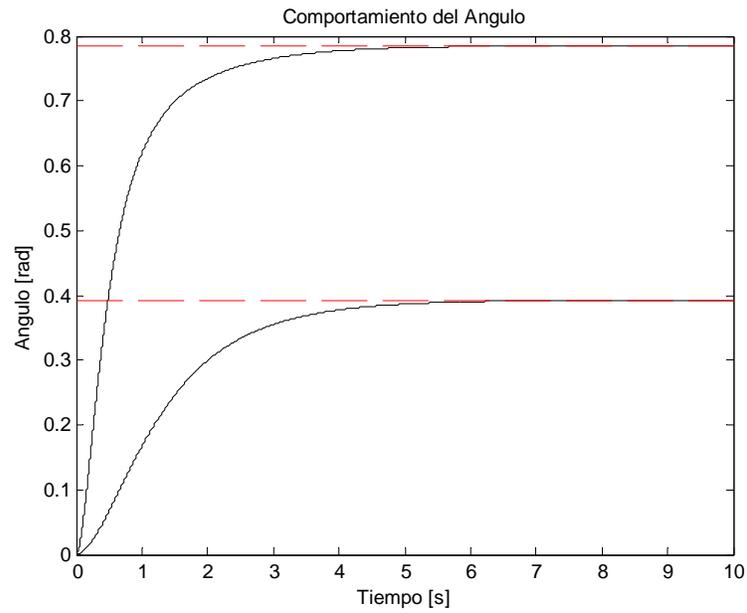


Figura 4.14: Comportamiento del ángulo para control por retro de salida con referencias  $\alpha^* = \frac{\pi}{4}$  y  $\frac{\pi}{8}$ .

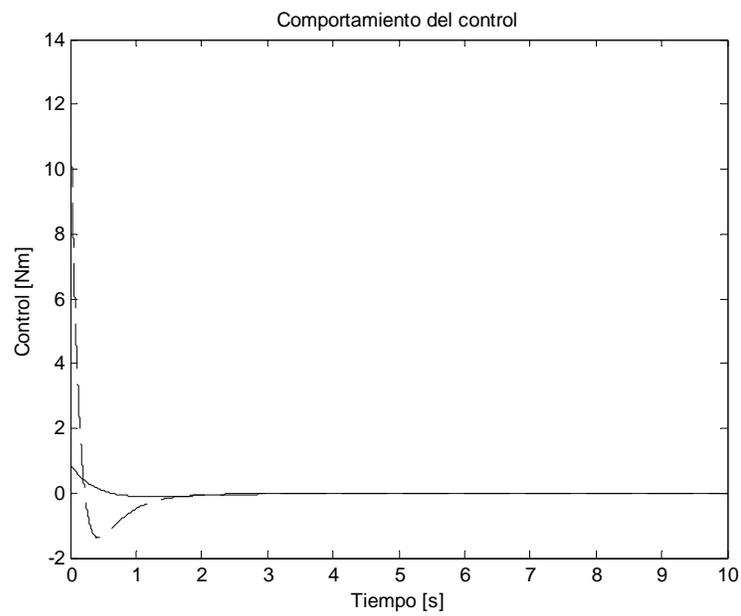


Figura 4.15: Comportamiento de la señal de control. La línea continua corresponde a la referencia  $\alpha^* = \frac{\pi}{8}$  y la punteada a  $\frac{\pi}{4}$ .

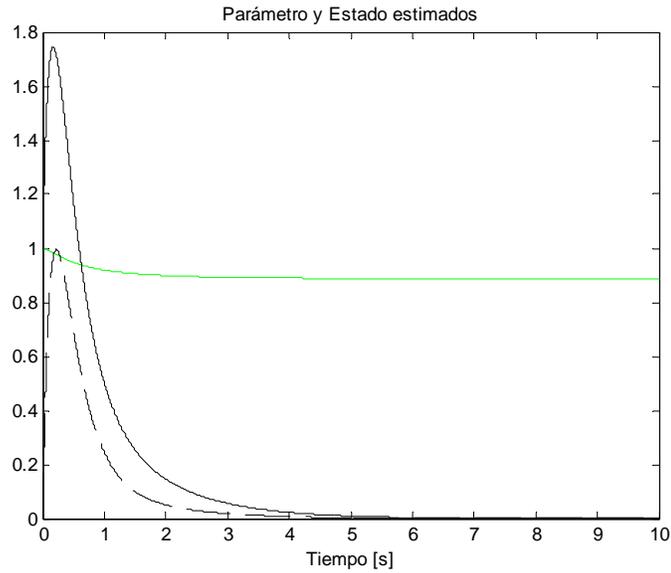


Figura 4.16: Comportamiento de las estimaciones. La línea clara indica la estimación de la inercia  $J$  cuyo valor se estabiliza en 0.888. La línea negra continua indica la velocidad angular estimada y la punteada la velocidad angular real.  $\alpha^* = \frac{\pi}{4}$ .

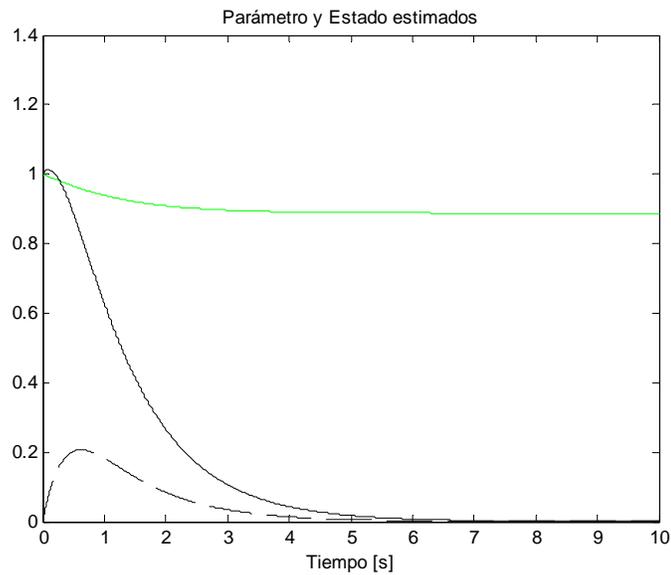


Figura 4.17: Comportamiento de las estimaciones. La línea clara indica la estimación de la inercia  $J$  cuyo valor se estabiliza en 0.8879. La línea negra continua indica la velocidad angular estimada y la punteada la velocidad angular real.  $\alpha^* = \frac{\pi}{8}$ .

En este trabajo, sólo analizaremos el desempeño de la ley de control bajo errores en los instrumentos de medición a nivel de simulaciones matemáticas ya que un análisis teórico más extenso sale de los objetivos de la tesis.

La condición imperfecta de los medidores reales está modelada por medio de una aproximación a ruido blanco gaussiano que en Simulink, corresponde a la generación de una secuencia de números aleatorios con un tiempo de correlación muy pequeño (comparado con la constante de tiempo más pequeña del sistema). Esta secuencia de números aleatorios es introducida como un término aditivo en las variables de retroalimentación: ángulo y velocidad angular (retroalimentación de estados) y ángulo (retroalimentación de salida).

La amplitud de la señal de error es en cada caso aproximadamente del 0,2% de la variable de entrada. Si la amplitud del error se incrementa a partir de 0,2% la respuesta del sistema se vuelve inestable pues la señal de control no puede contrarrestar los cambios. Lo anterior comprueba que el algoritmo es robusto ante pequeñas perturbaciones pero muy sensible a la amplitud de éstas.

En las gráficas de la figura 4.18 se muestra el comportamiento del ángulo y la señal de control respectivamente, para las mismas condiciones que las figuras 4.3 y 4.4. En las gráficas 4.19 se muestra el comportamiento del ángulo y la señal de control respectivamente, para las mismas condiciones que las figuras 4.6 y 4.7. Para el caso de retroalimentación de salida, la única variable que se ve afectada por incertidumbre en la medición es el ángulo. En las gráficas de la figura 4.20 se muestra el comportamiento del ángulo y la señal de control respectivamente, para las mismas condiciones que las figuras 4.14 y 4.15.

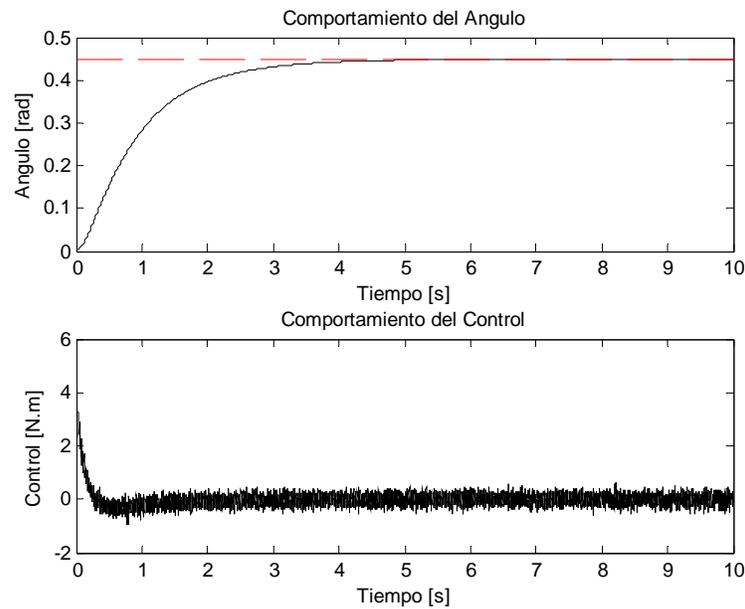


Figura 4.18: Comportamiento del ángulo y de la señal de control en presencia de errores en la medición. Las condiciones son las mismas que en las figuras 4.3 y 4.4.

En todos los casos notamos un desempeño adecuado del control, compensando las variaciones en la señal medida

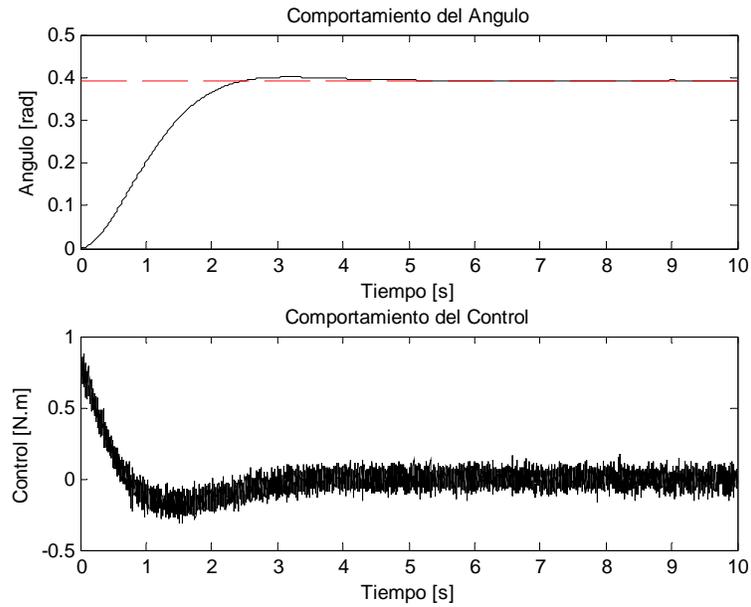


Figura 4.19: Comportamiento del ángulo y de la señal de control en presencia de errores en la medición. Las condiciones para generar estas gráficas fueron las mismas que en las figuras 4.6 y 4.7.

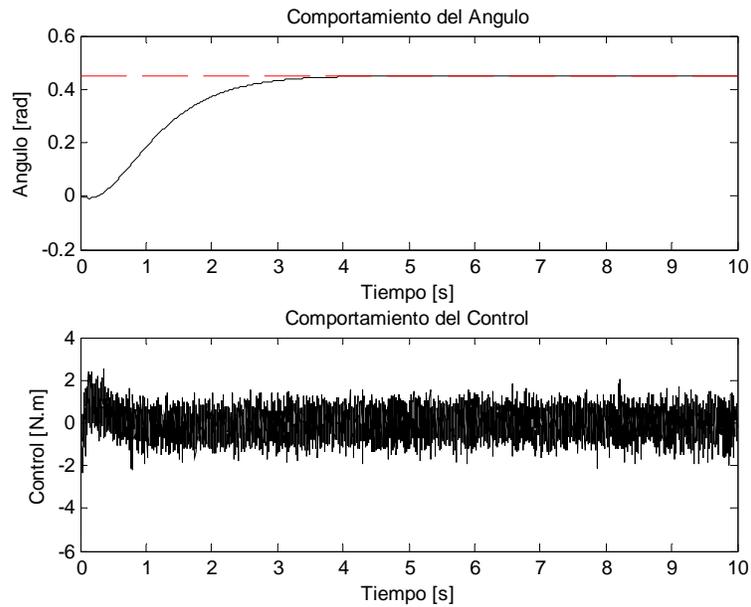


Figura 4.20: Comportamiento del ángulo y de la señal de control para retroalimentación de salida. Las condiciones para generar estas gráficas son las mismas que en las figuras 4.14 y 4.15.

correspondiente y logrando que la variable controlada tenga un comportamiento suave y se alcance la referencia deseada.

## Capítulo 5

# Conclusiones.

El problema de control adaptable de sistemas no lineales ha tenido diferentes enfoques en los últimos años. En esta tesis planteamos un esquema unificado de esos enfoques en una estructura teórica cuyo punto de partida es la introducción en la ley de estimación de un término proporcional adicional al componente integral. El resultado, es un *esquema de adaptación tipo proporcional-integral (PI)*.

En primer lugar se estudiaron sistemas en los que existe incertidumbre paramétrica. Se asumió la existencia de un control por retroalimentación de estados que dependiera inicialmente de los parámetros nominales. Ese control se hizo adaptable sustituyendo los parámetros nominales por una estimación proveniente de una ley de adaptación que inicialmente no es implementable. Se mostró que el lazo cerrado de la planta con el control adaptable y esa ley de adaptación forman un sistema globalmente estable. Encontramos que si se cumple cierta condición algebraica nos es posible implementar esa ley de adaptación y más aún, encontramos que está constituida por dos partes: una integral, relacionada con el principio de equivalencia cierta y una proporcional.

Alternativamente, esa acción proporcional puede ser vista como un grado de libertad adicional cuya misión es hacer que el sistema extendido que describe la dinámica de la planta bajo la acción del control adaptable, tenga en el origen un punto de equilibrio asintóticamente estable.

Esta idea se aplicó a sistemas no linealmente parametrizados afines en el control cuyas incertidumbres cumplen con una condición de crecimiento particular y a sistemas afines en el control conectados en cascada. En ambos casos el diseño adecuado de la acción proporcional permite establecer el cumplimiento del objetivo de control, el acotamiento de las trayectorias del lazo cerrado y la estabilidad del error de estimación.

Cuando, además de incertidumbre en los parámetros no todos los estados son medibles, podemos estabilizar la planta usando retroalimentación de salida y un algoritmo combinado en el que la acción proporcional incluye una estimación mixta de parámetros y estados.

Los enfoques de retroalimentación de estados y de salida se aplicaron al control de ángulo de orientación y velocidad lineal de un robot móvil. En un primer caso, la inercia rotacional es desconocida y en segundo lugar, cuando la inercia y la velocidad angular son inciertas.

Para el primer caso encontramos que podemos estabilizar el ángulo de orientación del robot en cualquier referencia preestablecida mediante un control suave y acotado. No se logra convergencia paramétrica pues no se cumplen condiciones de excitación persistente.

La velocidad lineal también puede ser estabilizada para cualquier referencia y no es posible lograr convergencia paramétrica al valor de la masa pues, nuevamente, no hay excitación persistente.

Para retroalimentación de salida fué posible alcanzar la referencia para el ángulo de orientación del robot. Fué posible estabilizar la dinámica de error usando el teorema de pequeñas ganancias.

Se reprodujo adecuadamente el comportamiento de la velocidad angular con la estimación correspondiente, pero nuevamente, no es posible estimar el valor de la inercia pues no es posible estabilizar asintóticamente la dinámica de error de estimación.

La ley de control funciona adecuadamente cuando se presentan pequeños errores (0,2%) en las mediciones de las variables de retroalimentación. En el caso de retroalimentación de estados fué posible estabilizar el ángulo en el valor de referencia de manera suave y uniforme cuando se simulan errores en las mediciones con una aproximación de ruido blanco gaussiano. En el caso de retroalimentación de salida la única variable afectada por el ruido de medición es el ángulo. Aunque la señal de control cambia con mayor amplitud que en el caso de retro de estados, fué posible la estabilización adecuada de la variable angular.

Si el valor de la amplitud del ruido aumenta desde 0.2% el sistema en lazo cerrado se vuelve inestable. Ello implica que en la implementación física del control deben usarse instrumentos de medición muy precisos de lo contrario, perderemos estabilidad o podremos provocar daños irreparables a la planta. Aunque existen medidores muy sensibles su costo es elevado y entonces podemos esperar que la implementación de este control sea costosa.

Como trabajo a futuro se propone aumentar más los grados de libertad introducidos a la ley de adaptación quizá logrando un algoritmo tipo PID (proporcional-integral-derivativo).

# Apéndice A

**Proposición 1** La ganancia variante en el tiempo  $\delta u$  cumple que:  $|\delta u| < \frac{M-m}{2}$ .

**Proof.** Sabemos, por definición que:  $\delta u = \bar{u} - u$  y que  $m < u(t) < M$  (por el momento no estamos haciendo ninguna suposición sobre el signo de  $m$ ). De esta última desigualdad tenemos que:

$$\begin{aligned} -m &> -u(t) > -M, \\ \bar{u} - m &> \bar{u} - u(t) > \bar{u} - M, \\ \frac{m+M}{2} - m &> \delta u > \frac{m+M}{2} - M, \\ -\frac{M-m}{2} &< \delta u < \frac{M-m}{2} \\ \therefore |\delta u| &< \frac{M-m}{2}. \end{aligned}$$

■

Para poder usar el Teorema de Pequeñas Ganancias debemos calcular la ganancia  $H_\infty$  [1] del sistema:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \begin{pmatrix} \lambda - \lambda_1 & \bar{u} \\ -\lambda_2 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} w; \\ y &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} z. \end{aligned} \tag{A.1}$$

La función de transferencia del sistema (A.1) está dada por:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{\lambda_2}{s^2 - (\lambda - \lambda_1)s + \lambda_2\bar{u}}.$$

Evaluada en  $s = j\omega$  y calculando su magnitud, obtenemos:

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\frac{\lambda_2^2}{(\lambda_2\bar{u} - \omega^2)^2 + (\lambda - \lambda_1)^2\omega^2}}, \tag{A.2}$$

cuya derivada respecto a  $\omega$  es:

$$\frac{d}{d\omega} |G(j\omega)| = -2\omega |\lambda_2| \frac{\omega^2 - \lambda_2\bar{u} + \frac{(\lambda - \lambda_1)^2}{2}}{\left( (\lambda_2\bar{u} - \omega^2)^2 + (\lambda - \lambda_1)^2\omega^2 \right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Esta derivada se hace igual a 0 si y sólo si:

$$\begin{aligned}\omega &= 0 \\ \omega^2 &= \bar{u}\lambda_2 - \frac{(\lambda - \lambda_1)^2}{2}.\end{aligned}$$

La evaluación de cada extremo en la función (A.2) da como resultado:

$$|G(j\omega)| = \begin{cases} \frac{1}{|\bar{u}|} & \omega = 0 \\ \sqrt{\frac{1}{\frac{(\lambda - \lambda_1)^2}{\lambda_2} \left( \bar{u} - \frac{(\lambda - \lambda_1)^2}{4\lambda_2} \right)}} & \omega^2 = \bar{u}\lambda_2 - \frac{(\lambda - \lambda_1)^2}{2} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

**Proposición 2** La función  $\sqrt{\frac{1}{\frac{(\lambda - \lambda_1)^2}{\lambda_2} \left( \bar{u} - \frac{(\lambda - \lambda_1)^2}{4\lambda_2} \right)}}$  cumple la propiedad:

$$\frac{1}{|\bar{u}|} < \sqrt{\frac{1}{\frac{(\lambda - \lambda_1)^2}{\lambda_2} \left( \bar{u} - \frac{(\lambda - \lambda_1)^2}{4\lambda_2} \right)}}$$

$\forall \bar{u} > \frac{(\lambda - \lambda_1)^2}{2\lambda_2}, \bar{u} > 0$  y  $\lambda_2 > 0$ .

**Proof.** Para cualesquiera valores  $\bar{u}$  y  $\frac{(\lambda - \lambda_1)^2}{\lambda_2}$  con la condición  $\bar{u} > \frac{(\lambda - \lambda_1)^2}{2\lambda_2}$ , se cumple que

$$0 < \left( \bar{u} - \frac{(\lambda - \lambda_1)^2}{2\lambda_2} \right)^2,$$

desarrollando el binomio, tenemos que:

$$0 < \bar{u}^2 - \frac{(\lambda - \lambda_1)^2}{\lambda_2} \bar{u} + \frac{(\lambda - \lambda_1)^4}{4\lambda_2^2} \implies \frac{(\lambda - \lambda_1)^2}{\lambda_2} \bar{u} - \frac{(\lambda - \lambda_1)^4}{4\lambda_2^2} < \bar{u}^2$$

Podemos concluir entonces:

$$\therefore \frac{1}{|\bar{u}|} < \sqrt{\frac{1}{\frac{(\lambda - \lambda_1)^2}{\lambda_2} \bar{u} - \frac{(\lambda - \lambda_1)^4}{4\lambda_2^2}}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{(\lambda - \lambda_1)^2}{\lambda_2} \left( \bar{u} - \frac{(\lambda - \lambda_1)^2}{4\lambda_2} \right)}}$$

■

En resumen, concluimos entonces que  $\sqrt{\frac{1}{\frac{(\lambda - \lambda_1)^2}{\lambda_2} \left( \bar{u} - \frac{(\lambda - \lambda_1)^2}{4\lambda_2} \right)}}$  corresponde a máximos de la función (A.3) siempre que  $\bar{u} > \frac{(\lambda - \lambda_1)^2}{2\lambda_2}$ . Sin embargo, si  $\bar{u} = \frac{(\lambda - \lambda_1)^2}{2\lambda_2}$  tendremos una raíz doble en  $\omega = 0$  y, por tanto, un sólo máximo, cuyo valor es  $\frac{1}{|\bar{u}|}$ .

# Bibliografía

- [1] Doyle, J. et. al. *Feedback control theory*. Maxwell Macmillan Int. Ed.1992.
- [2] D. Karagiannis, A. Astolfi, R. Ortega. *Two results for adaptive output feedback stabilization of nonlinear systems*. Automatica **39** (2003) 857-866.
- [3] Rodriguez, H., R. Ortega and Gerardo Escobar. *A robustly stable output feedback saturated controller for the boost DC-t o-DC converter*. Proceedings of the 38th Conference on Decision and Control, Phoenix Arizona, USA. Dec. 1999.
- [4] Tan, Y., Kanellakopoulos, I., and Jiang, Z. *Nonlinear observer/controller design for a class of nonlinear systems*. Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision & Control, Tampa, Florida USA. December 1998.
- [5] Liu,X., Ortega, R., Su, H. and Chu, J. *Identification of nonlinearly parameterized nonlinear models: Application to mass balance system*. 48th IEEE, Conf. on Dec. and Cont. Shanghai, P. R. China, Dec. 2009.
- [6] Qu, Z.,Hull, R.,Wang, J. *Globally stabilizing adaptive control design for nonlinearly-parametrized systems*, IEEE, TAC, Vol. 51, No. 6. June 2006
- [7] Karagiannis, D. Astolfi, A. *A robustly stabilising adaptive controller for systems in feedback form*. Proc. of 2006 Am. Cont. Conf. USA, 2006.
- [8] Astolfi, A., Karagiannis, D. and Ortega, R.,*Nonlinear and Adaptive Control with Applications*. Springer, 2007.
- [9] Kumpati, N. Annaswamy, A. *Persistent excitation in adaptive systems*. Int. Journal of Control. Vol. 45, No. 1, 127-160. 1987.
- [10] Panteley, E., Loria, A. and Teel, A., *Relaxed Persistency of Excitation for Uniform Asymptotic Stability*. IEEE Transactions on Automatic Control. Vol. 46, No. 12. Dec. 2001.
- [11] Morgan, A. and Narendra, K. *On the stability of nonautonomous differential equations  $\dot{x}=(A+B(t))x$ , with skew symmetric matrix  $B(t)$* . SIAM, J. Control and Optimization. Vol. 15, No. 1, Jan. 1977.

- [12] Loria, A. and Panteley, E. *Uniform exponential stability of linear time-varying systems: revisited*. Systems & Control Letters, 47, 13-24, 2002.
- [13] Tyukin, I., Prokhorov, D., and Van Leeuwen, C. *Adaptation and Parameter Estimation in Systems with Unstable Target Dynamics and Nonlinear Parametrization*. IEEE, Transactions on Automatic Control, Vol. 52, No. 9, Sept. 2007.
- [14] Astolfi, A. and Ortega, R. *Immersion and Invariance: A new tool for stabilization and Adaptive Control of Nonlinear Systems*. IEEE, Transactions on Automatic Control, Vol. 48, No. 4, April 2003.
- [15] Karagiannis, D., Jiang, Z., Ortega, R. and Astolfi, A. *Output-feedback stabilization of a class of uncertain non-minimum-phase nonlinear systems*. Automatica, 41, 1609-1615, 2005.
- [16] Karagiannis, D., Carnevale, D. and Astolfi, A. *Output-feedback stabilization of a class of nonlinear systems via reduced-order observers and certainty equivalence*. Proceedings of the 46th IEEE, CDC, USA, Dec. 2007.
- [17] Karagiannis, D., Carnevale, D. and Astolfi, A. *Invariant Manifold Based Reduced-Order Observer design for Nonlinear Systems*. IEEE, Transactions on Automatic Control, Vol. 53, No. 11, Dec. 2008.
- [18] Lawton, J., Beard, R., and Young, B. *A Decentralized Approach to Formation Maneuvers*. IEEE, Transactions on Robotics and Automation, Vol. 19, No. 6. Dec. 2003.
- [19] Mazenc, F., Astolfi, A. *Nonlinear Stabilization of Particular Interconnected Structures*. Proceedings of the 37th IEEE, CDC, USA, Dec. 1998.
- [20] Shah, D., Ortega, R. and Astolfi, A. *Speed and Load Torque observer for Rotating Machines*. Joint 48th IEEE, CDC and 28th Chinese Control Conference, China, Dec. 2009.
- [21] Astolfi, A., Ortega, R., and Venkatraman, A. *A Globally Exponentially Convergent Immersion and Invariance speed Observer for  $n$  Degrees of freedom Mechanical Systems*. Joint 48th IEEE, CDC and 28th Chinese Control Conference, China, Dec. 2009.
- [22] Karagiannis, D., and Astolfi, A. *Observer design for a class of nonlinear systems using dynamic scaling with application to adaptive control*. Proceedings of 47th IEEE, CDC, Mexico, Dec. 2008.
- [23] Karagiannis, D., Astolfi, A. Ortega, R., and Hilairet, M. *A Nonlinear Tracking Controller for Voltage-Fed Induction Motors with Uncertain Load Torque*. IEEE, Transactions on Control Systems Technology, Vol. 17, No. 3, May 2009.
- [24] Narendra, K., Annaswamy, A. *Stable Adaptive Systems*. Prentice Hall, 1989.
- [25] Tyukin, I., Prokhorov, D., and Van Leeuwen, C. *A New Method for Adaptive Brake Control*. 2005 American Control Conference. June 2005, USA.

- [26] Lin, W. and Qian, Ch. *Adaptive Control of Nonlinearly Parameterized Systems: A Nonsmooth Feedback Framework*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 47, No. 5, May 2002.
- [27] Panteley, E. and Loria, A. *Uniform Exponential Stability for families of linear time-varying systems*. Proceedings of 39th IEEE Conference on Decision and Control. Sydney, Dec. 2000.
- [28] Jetto, L. and Orsini, Valentina. *Relaxed Conditions for the Exponential Stability of a class of Linear Time-Varying Systems*. IEEE, Transactions on Automatic Control, Vol. 54, No. 7, July 2009.
- [29] Heller, M. *Hurwitz-Based stability criteria for Bounded Nonlinear Time-Varying Systems*. International Conference on Control and Automation, Budapest, Hungary, 2005.
- [30] Mazenc, F and Astolfi, A. *Nonlinear Stabilization of Particular Interconnected Structures*. Proceedings of 37th IEEE Conference on Decision and Control. Florida, USA. 1998.
- [31] Khalil, H. *Nonlinear systems*. Prentice Hall, 3rd Ed.
- [32] Isidori, A. and Byrnes, C. *Output regulation of nonlinear systems*. IEEE, Transactions on Automatic Control. Vol. 35, No. 2, Febrero 1990.
- [33] Battilotti, S. *Global output regulation and disturbance attenuation with global stability via measurement feedback for a class of nonlinear systems*. IEEE, Transactions on Automatic Control, Vol. 41, No. 3, Marzo 1996.
- [34] Krstic, M. Kanellakopoulos, I. Kokotovic, P. *Nonlinear and adaptive control design*. Wiley & Sons 1995.
- [35] Kolmogorov, A. and Fomin S. *Elements of the theory of functions and functional analysis*. Ed. Mir, 1999.
- [36] Teel, A. and Praly, L. *Global stabilizability and observability imply semiglobal stabilizability by output feedback*. Systems and Control Letters Vol. 22, pgs. 313-325.