



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO  
EN INGENIERÍA

## CONTROL BASADO EN PASIVIDAD DE DISPOSITIVOS MEMS

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA ELÉCTRICA - CONTROL

PRESENTA:

JOSÉ MIGUEL DÍAZ ANTÚNEZ

TUTOR:

DR. GERARDO RENÉ ESPINOSA PÉREZ

2010

## **Jurado:**

**Presidente:** Dr. Alvarez-Icaza Longoría Luis A.

**Secretario:** Dr. Moreno Pérez Jaime Alberto

**Vocal:** Dr. Espinosa Pérez Gerardo René

**1er. Suplente:** Dr. Rodríguez Cuevas Jorge

**2do. Suplente:** Dr. Benítez Pérez Héctor

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: Ciudad Universitaria, D.F. Facultad de Ingeniería, UNAM.

## **Tutor:**

**Dr. Espinosa Pérez Gerardo René**

# Dedicatorias

A mi mamá que tanto quiero y admiro, por su guía y el consejo dado.

A mis hermanas y hermanos, por el apoyo y cariño incondicionales que siempre me brindan.

A mi amada Olivia, por el amor, comprensión y aliento con los que en todo tiempo me abriga. A su familia por sus atenciones para conmigo.

A la memoria de mi papá y de Rafita mi entrañable hermano de eterna sonrisa.

# Agradecimientos

Al Dr. Gerardo Espinosa, por haber depositado su confianza en mí aceptando ser mi director de tesis.

A mis profesores del posgrado, por compartir sus conocimientos y por la actitud amable que mostraron cada vez que les solicite su valiosa ayuda.

A mis compañeros de generación, por su disposición al trabajo en equipo y al debate de ideas, pero sobretodo, por su sólida camaradería.

Al Dr. Alvarez-Icaza Longoría Luis A., al Dr. Moreno Pérez Jaime Alberto, al Dr. Rodríguez Cuevas Jorge y al Dr. Benítez Pérez Héctor, por formar parte de mi jurado de titulación y enriquecer este trabajo con sus correcciones y sugerencias.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, UNAM, por abrirme una vez más sus puertas de par en par. En esta ocasión las del Posgrado de la Facultad de Ingeniería.

Al consejo Nacional de ciencia y Tecnología, CONACYT, por la beca que me concedió durante tres semestres de mis estudios de maestría.

Al Dr. Alvarez-Icaza, también le agradezco la invaluable asistencia que me brindó en la recta final de mi proceso de titulación.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes y motivación . . . . .	1
1.1.1. Modelo Matemático . . . . .	1
1.1.2. Normalización del Modelo . . . . .	2
1.1.3. Fenómeno de <i>Pull-in</i> . . . . .	3
1.2. Control de Actuadores Electroestáticos . . . . .	4
1.2.1. Control de MEMS en Lazo Abierto . . . . .	4
1.2.2. Control de MEMS en Lazo Cerrado . . . . .	5
1.3. Contribución . . . . .	6
1.4. Estructura de la tesis . . . . .	6
<b>2. Modelo Matemático</b>	<b>8</b>
2.1. Introducción . . . . .	8
2.2. Representación Esquemática del MEMS . . . . .	9
2.3. Modelo de la Dinámica del Actuator . . . . .	11
2.3.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange . . . . .	12
2.3.2. Modelo Dinámico Basado en las Ecuaciones de EL . . . . .	12
2.4. Análisis del Fenómeno de <i>Pull-In</i> . . . . .	14
2.4.1. Voltaje $V_{pull-in}$ y desplazamiento $z_{pull-in}$ . . . . .	15
2.5. Representación de la Dinámica en Ecuaciones Normalizadas . . . . .	17
2.6. Ilustración del fenómeno de <i>Pull-In</i> . . . . .	18

2.7.	Análisis de Estabilidad por el Método de Linealización . . . . .	20
2.7.1.	Linealización de un sistema no lineal . . . . .	21
2.8.	Puntos de Equilibrio del Actuador Electrostático . . . . .	22
2.9.	Simulación Numérica . . . . .	24
<b>3.</b>	<b>Metodología IDA-PBC</b>	<b>29</b>
3.1.	Introducción . . . . .	29
3.2.	Control Basado en Pasividad, PBC . . . . .	29
3.3.	Metodología IDA-PBC para PCHS . . . . .	30
3.3.1.	Metodología IDA-PBC Representación General . . . . .	31
3.3.2.	Prueba de Estabilidad . . . . .	32
3.4.	Métodos para Resolver la Ecuación de <i>Matching</i> . . . . .	33
<b>4.</b>	<b>Diseño de los Controladores por IDA-PBC</b>	<b>34</b>
4.1.	Introducción . . . . .	34
4.2.	Modelo de la Dinámica del Error . . . . .	34
4.3.	Ley de Control por el Método Algebraico . . . . .	36
4.3.1.	Solución de la Ecuación de <i>Matching</i> . . . . .	37
4.3.2.	Análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov . . . . .	39
4.4.	Ley de Control por el Método Paramétrico . . . . .	41
4.4.1.	Solución de la Ecuación de <i>Matching</i> . . . . .	41
4.4.2.	Análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov . . . . .	45
<b>5.</b>	<b>Simulación Numérica</b>	<b>47</b>
5.1.	Introducción . . . . .	47
5.2.	Ley de Control por Método Algebraico . . . . .	47
5.2.1.	Superficies y Curvas de Nivel $H_d$ Método Algebraico . . . . .	50
5.3.	Ley de Control por Método Paramétrico . . . . .	54
5.3.1.	Superficies y Curvas de Nivel $H_d$ Método Paramétrico . . . . .	56
5.4.	Desempeño de los Controladores a Variaciones de los Parámetros . . . . .	60

5.4.1. Respuesta del Controlador Método Algebraico . . . . .	60
5.4.2. Respuesta del Controlador Método Paramétrico . . . . .	63
<b>6. Conclusiones</b>	<b>67</b>
6.1. Trabajo Futuro . . . . .	68
<b>A. Normalización de las Ecuaciones Diferenciales</b>	<b>69</b>
<b>B. Estabilidad en el sentido de Lyapunov</b>	<b>73</b>
B.1. Condiciones de Estabilidad en el Sentido de Lyapunov . . . . .	73
<b>Bibliografía</b>	<b>76</b>

# Índice de figuras

2.1. Representación esquemática típica de un actuador electrostático con un grado de libertad [25] . . . . .	10
2.2. Equilibrio de Fuerzas (mecánica y electrostática) . . . . .	20
2.3. Trayectorias de las raíces . . . . .	25
2.4. Gráfica de las raíces $x_{eq}$ positivas . . . . .	26
2.5. Parte real de los eigenvalores del punto de equilibrio estable . . . . .	26
2.6. Parte real de los eigenvalores del punto de equilibrio inestable . . . . .	27
2.7. Posición del electrodo superior . . . . .	28
5.1. Posición del Electrodo Superior . . . . .	48
5.2. Ley de Control. Método Algebraico . . . . .	49
5.3. Superficie de nivel para $x_3 = x_3^* = 1.643$ . . . . .	51
5.4. Curvas de nivel en el plano $x_1x_2$ con origen en $x_*(x_1^* = 0.1, x_2^* = 0)$ . . . . .	51
5.5. Superficie de nivel para $x_1 = x_1^* = 0.1$ . . . . .	52
5.6. Curvas de nivel en el plano $x_2x_3$ con origen en $x_*(x_2^* = 0, x_3^* = 1.643)$ . . . . .	52
5.7. Superficie de nivel para $x_2 = x_2^* = 0$ . . . . .	53
5.8. Curvas de nivel en el plano $x_1x_3$ con origen en $x_*(x_1^* = 0.1, x_3^* = 1.643)$ . . . . .	53
5.9. Posición del Electrodo Superior . . . . .	54
5.10. Ley de Control. Método Paramétrico . . . . .	55
5.11. Superficie de nivel para $x_3 = x_3^* = 1.643$ . . . . .	57
5.12. Curvas de nivel en el plano $x_1x_2$ con origen en $x_*(x_1^* = 0.1, x_2^* = 0)$ . . . . .	57
5.13. Superficie de nivel para $x_1 = x_1^* = 0.1$ . . . . .	58



5.14. Curvas de nivel en el plano $x_2x_3$ con origen en $x_*(x_2^* = 0, x_3^* = 1.643)$ . . . . .	58
5.15. Superficie de nivel para $x_2 = x_2^* = 0$ . . . . .	59
5.16. Curvas de nivel en el plano $x_1x_3$ con origen en $x_*(x_1^* = 0.1, x_3^* = 1.643)$	59
5.17. Posición normalizada deseada $x_1^* = 0.8$ para $(\frac{1}{2}\zeta, \frac{1}{2}r)$ y $(2\zeta, 2r)$ . . . . .	61
5.18. Desempeño del controlador por método algebraico para $x_1^* = 0.8$ . . . . .	62
5.19. Posición normalizada deseada $x_1^* = 0.2$ para $(\frac{1}{2}\zeta, \frac{1}{2}r)$ y $(2\zeta, 2r)$ . . . . .	62
5.20. Desempeño del controlador por método algebraico para $x_1^* = 0.2$ . . . . .	63
5.21. Posición normalizada deseada $x_1^* = 0.8$ para $(\frac{1}{2}\zeta, \frac{1}{2}r)$ y $(2\zeta, 2r)$ . . . . .	64
5.22. Desempeño del controlador por método algebraico para $x_1^* = 0.8$ . . . . .	65
5.23. Posición normalizada deseada $x_1^* = 0.2$ para $(\frac{1}{2}\zeta, \frac{1}{2}r)$ y $(2\zeta, 2r)$ . . . . .	65
5.24. Desempeño del controlador por método algebraico para $x_1^* = 0.2$ . . . . .	66

# Resumen

La presencia del fenómeno de *pull-in* representa el principal inconveniente al trabajar con actuadores electrostáticos. Debido a esta limitante, en lazo abierto sólo se consigue regulación en el primer tercio de la banda de voltaje cero  $z_0$ .

El objetivo de este trabajo de tesis es lograr regulación en toda la banda de voltaje cero  $z_0$  del actuador electrostático. Como primer paso se obtiene el modelo matemático que describe la dinámica de un actuador electrostático MEMS basándose en el enfoque de las ecuaciones de Euler-Lagrange. El modelo matemático resultante es un conjunto de ecuaciones diferenciales que contienen los principales efectos no lineales del dispositivo. Con el fin de disminuir la propagación del error numérico en las simulaciones debido a la precisión numérica del simulador empleado, éste se normaliza. A partir del modelo normalizado se analiza el fenómeno de *pull-in* y se diseñan dos controladores con los cuales en lazo cerrado se consigue el objetivo de control. Ambos se obtienen empleando la metodología IDA-PBC. El primero resolviendo la ecuación de *matching* por el método algebraico y la segunda por el método paramétrico. Además de lograr regulación en toda la banda de voltaje cero  $z_0$  se consigue que el contacto entre electrodos sea mínimo y que el voltaje de control este dentro de un rango factible. Finalmente, se verifican los resultados analíticos mediante simulaciones numéricas.

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Antecedentes y motivación

Dentro de los principales métodos de actuación desarrollados para Sistemas Micro-Electro-Mecánicos (MEMS, por sus siglas en inglés), se encuentran los siguientes: piezoresistivos, piezoeléctricos, térmicos, ópticos, electromagnéticos y electrostáticos [4]. Los actuadores electrostáticos son los de mayor uso debido a que son de estructura geométrica relativamente sencilla y se pueden fabricar de manera estándar mediante procesos en lote con materiales bien caracterizados. Estas cualidades del sistema permiten disminuir de manera significativa el tiempo y los costos de fabricación. La utilización en gran escala de este tipo de actuadores no sólo se debe a estas ventajas, sino también al gran número de aplicaciones que se tienen de ellos, de las cuales destacan las siguientes: arreglos de micro-espejos, rejillas ópticas, capacitores variables, micro-acelerómetros, micro-interruptores [23].

#### 1.1.1. Modelo Matemático

Sin lugar a dudas, el estudio de los MEMS es un campo multidisciplinario se requieren especialistas de los diferentes campos de conocimiento, no sólo del de la ingeniería, sino también físicos, químicos, matemáticos por mencionar algunos. Las matemáticas son el campo de conocimiento que enlaza las diferentes especialidades. La

relevancia de las matemáticas se pone de manifiesto desde la primera etapa en el estudio de los sistemas dinámicos, incluidos los MEMS entre ellos, el modelado matemático. Antes de fabricar cualquier prototipo, primero se analiza su comportamiento a partir de un modelo matemático que de él se tenga. El análisis de un modelo matemático reduce costos de tiempo y dinero. Es por eso que como primera parte de este trabajo de tesis se plantea el modelo matemático que describe la dinámica del dispositivo MEMS.

En el Capítulo 2 se presenta el modelo matemático del actuador electrostático. Este modelo, pese a su simplicidad, contiene las principales no linealidades del sistema. El modelo es un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales ordinarias no lineales. Se origina a partir de considerar al actuador como un capacitor de placas planas paralelas, la superior movable y la inferior fija. La placa superior está sostenida por soportes y se modela como un sistema masa-resorte-amortiguador. Si se aplica una diferencia de potencial entre las placas se generan cargas eléctricas inducidas que dan lugar a una fuerza atractiva de origen electrostático. En otras palabras, los actuadores electrostáticos hacen uso de la fuerza de atracción de Coulomb que se genera entre dos conductores cuando existe una diferencia de potencial entre ellos.

### **1.1.2. Normalización del Modelo**

Se utiliza el enfoque basado en las ecuaciones de Euler-Lagrange para obtener el modelo matemático que describe el comportamiento dinámico del actuador. El modelo resultante es un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales. Las unidades de medida de los parámetros del modelo varían considerablemente unos con respecto a los otros, además de ser del orden de los micros o nanos incluso teras. Por lo que, con el fin de disminuir la propagación del error numérico en las simulaciones debido al número máximo de dígitos significativos que determinan la precisión numérica del simulador empleado, éste se normaliza. Una ventaja adicional de normalizar el modelo es que se reduce el número de parámetros. Tanto el diseño de los controladores como el análisis de la dinámica y las simulaciones numéricas se obtienen a partir del modelo normalizado.

### 1.1.3. Fenómeno de *Pull-in*

El fenómeno de *pull-in* constituye la principal desventaja que se presenta al trabajar con actuadores electrostáticos. Como se podrá constatar en el análisis del modelo matemático del actuador, si se aplica un voltaje al dispositivo se manifiestan dos fuerzas una de atracción de origen electrostático la cual provoca que la placa superior móvil se aproxime a la placa inferior fija y una fuerza mecánica debida al resorte que contrarresta el efecto de la fuerza electrostática. La fuerza mecánica del resorte crece de manera lineal mientras que la electrostática lo hace de forma cuadrática. Por este motivo es de esperarse que al aumentar el voltaje en cierto momento la fuerza lineal del resorte sea superada por la electrostática cuadrática. Cuando la fuerza del resorte es insuficiente para contrarrestar el efecto de la fuerza electrostática se produce el denominado fenómeno de *pull-in*. En este momento la fuerza de atracción electrostática es dominante y provoca que la placa móvil se colapse de súbito hacia la inferior. El voltaje en el cual se produce el fenómeno de *pull-in* se le conoce como el voltaje de *pull-in*.

Otra cantidad importante de determinar es la distancia a la cual están separadas las placas cuando se produce el fenómeno de *pull-in*. Cuando no se aplica voltaje el sistema está en equilibrio y las placas están separadas una distancia constante, denominada distancia de voltaje cero  $z_0$ . Al aplicarse un voltaje constante a la entrada la distancia entre las placas disminuye, la placa superior se aproxima a la inferior, debido a la fuerza de atracción de Coulomb. Podría pensarse que se puede fijar la distancia entre placas en cualquier punto de la banda cero  $z_0$  suministrando cantidades constantes de voltaje a la entrada. Sin embargo, no es así, en el Capítulo 2 se demostrará que aplicando un voltaje constante a la entrada tan sólo se logra equilibrar el electrodo superior en el primer tercio superior de la banda cero  $z_0$ . También se determinará que, si el voltaje de entrada es el de *pull-in*, entonces la distancia entre placas es  $z = \frac{2}{3}z_0$ . A esta distancia se le denomina distancia de *pull-in*. Y representa la distancia mínima teórica a la cual se pueden equilibrar las placas con un voltaje de entrada constante.

## 1.2. Control de Actuadores Electrostáticos

La mayor parte de los trabajos en control de dispositivos MEMS se realizan en lazo abierto, [3]. A medida que el nivel de sofisticación de los dispositivos MEMS se ha incrementado se exigen mejoras sustanciales en los controladores. Lo que se busca es implementar el controlador junto con el MEMS en un mismo dispositivo. Existe una lenta aceptación del control en lazo cerrado en el campo de los MEMS. Esta lenta aceptación se da principalmente por la complejidad que se presenta al implementar los controladores en lazo cerrado [4]. A diferencia de los sistemas en nivel macro donde el lugar de implementación de los controladores es relativamente simple. La inclusión de los controladores en un mismo dispositivo MEMS cambian el comportamiento dinámico del sistema de manera considerable.

### 1.2.1. Control de MEMS en Lazo Abierto

La solución más sencilla que se reporta para regular la posición una distancia  $d$ , consiste en fabricar el MEMS con una distancia de voltaje cero de, por lo menos, el triple de la distancia a regular,  $3d$ . La principal desventaja de este procedimiento radica en que, generalmente no se puede asignar de manera arbitraria la distancia de voltaje cero debido a restricciones en el proceso de fabricación, además se requeriría mayor voltaje de actuación [24].

Otra propuesta es modificar el comportamiento mecánico del actuador [10]. La idea es compensar el efecto de *pull-in* aplicando la fuerza electrostática sólo a una porción de la estructura y se utiliza la otra para apuntalar partes específicas. La idea es que una porción de la estructura se flexiona menos del límite de *pull-in* mientras la otra porción de la estructura se puede mover la distancia de voltaje cero por completo. Su principal desventaja radica en que se requiere voltaje de actuación mayor.

En las anteriores soluciones se ha modificado la parte mecánica del actuador. Algunos intentos se han hecho modificando el voltaje de actuación. Esta técnica de control

se denomina premoldeo [3]. La idea es utilizar el modelo dinámico del dispositivo para construir una señal de entrada que mejore el desempeño del actuador. Con la técnica de premoldeo se mejora significativamente el comportamiento dinámico del actuador. Sin embargo, la implementación de la señal de control se basa en la suma de pulsos y es una tarea complicada de implementar.

### 1.2.2. Control de MEMS en Lazo Cerrado

Otra posible solución consiste en colocar un capacitor en serie con la fuente de voltaje de control [5, 24]. El voltaje de actuación depende de la capacitancia del actuador y de la capacitancia del capacitor en serie con la fuente de alimentación. con esta técnica se ha logrado regular a 30, 60 y 90 por ciento de la distancia con voltaje cero. Su desventajas son: se requiere mayor voltaje de actuación y el capacitor en serie con la fuente de alimentación cambia de dispositivo a dispositivo.

Se ha abordado el problema desde enfoques basados en control no lineal. Las técnicas de *back-stepping* y *flatness* se aplican en [28]. En [30] se diseñan los controladores basados en la técnica de estabilización de entrada salida y la de *back-stepping* tomando en cuenta los efectos parásitos provocados por los efectos de borde del campo eléctrico. Dentro de las ventajas de utilizar estos controladores es que se logra robustez en el comportamiento de los controladores y que operan con voltajes de actuación adecuados. Su principal desventaja se presenta en la implementación de los controladores. Es importante señalar que la implementación de los controladores es tema abierto. Lo deseable es implementar el controlador y el actuador en un mismo dispositivo, pero la dinámica del actuador se altera considerablemente. Por otro lado, si se utiliza electrónica externa al actuador el controlador es de un tamaño muy superior al sistema a controlar.

### 1.3. Contribución

El objetivo de este trabajo de tesis es diseñar un par de leyes de Control Basadas en Pasividad por Asignación de Interconexión y Amortiguamiento (IDA-PBC, por sus siglas en inglés), [15].

Con cada una de las leyes de control se busca cumplir con tres objetivos principales. Primero, regular la posición de la placa superior movable con respecto a la inferior fija en cualquier punto de la distancia nominal de voltaje cero. Segundo, los actuadores electrostáticos tienen un tiempo de vida corto debido al frecuente contacto entre los electrodos, por lo que también se busca que el contacto entre electrodos sea mínimo. Tercero, se busca que el controlador opere con un voltaje de actuación aceptable.

Una limitante del enfoque de control IDA-PBC es que requiere amortiguamiento natural del sistema, en este caso el amortiguamiento del subsistema mecánico. En las simulaciones se emplean parámetros basados en un microinterruptor construido en el laboratorio de UNAMEMS [22]. Estos dispositivos tienen una constante de amortiguamiento pequeña. Por lo que resulta interesante diseñar los controladores bajo el esquema de la metodología IDA-PBC.

### 1.4. Estructura de la tesis

En el Capítulo 2 se analiza de manera analítica la dinámica del MEMS. A partir del esquema típico del actuador electrostático, basándose en el enfoque de modelado de las ecuaciones de Euler-Lagrange, se obtiene un modelo matemático que describe su comportamiento dinámico. El modelo que describe la dinámica del actuador es un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales. Este modelo se normaliza con el fin de evitar inconsistencias en las simulaciones numéricas. Posteriormente, utilizando el modelo normalizado se realiza un estudio detallado del fenómeno de *pull-in* y de los puntos de equilibrio del sistema. Por último se visualizan mediante simulaciones numéricas los resultados obtenidos analíticamente.



En el Capítulo 3 se presentan los preliminares matemáticos y los conceptos a considerar en el diseño de los controladores basados en la técnica de Control Basado en Pasividad por Asignación de Interconexión y Amortiguamiento (IDA-PBC, por sus siglas en inglés).

En el Capítulo 4 se diseñan las leyes de control basadas en la técnica IDA-PBC. En la primera sección se obtiene una ley de control basada en resolver la ecuación de *matching* por el método algebraico. Por otra parte en la siguiente sección se obtiene una ley de control basada en resolver la ecuación de *matching* por el método paramétrico. En cada una de las secciones se muestran las pruebas de estabilidad en el sentido de Lyapunov.

En las primeras dos secciones del Capítulo 5 se presentan simulaciones numéricas que muestran el comportamiento de las leyes de control obtenidas. En la tercera y última sección se muestra el desempeño de los controladores ante la presencia de incertidumbre paramétrica. Las simulaciones se llevaron a cabo utilizando la herramienta SIMULINK de MATLAB.

Las conclusiones generales se presentan en el Capítulo 6.

# Capítulo 2

## Modelo Matemático

### 2.1. Introducción

El objetivo principal de este capítulo es analizar a detalle el comportamiento dinámico del dispositivo MEMS que se estudia en este trabajo. En principio se obtiene un modelo matemático, basado en la representación esquemática típica del actuador electrostático, que describe su comportamiento dinámico empleando las ecuaciones de Euler-Lagrange. A partir de éste se analiza el fenómeno de *pull-in* el cual representa el principal inconveniente de trabajar con actuadores electrostáticos. A continuación se normaliza el modelo matemático y se obtiene un sistema equivalente en ecuaciones diferenciales adimensionales. Finalmente, se obtienen simulaciones numéricas a través de las cuales se visualiza el comportamiento dinámico del actuador.

En la sección 2.2 se presenta el modelo esquemático típico de los actuadores electrostáticos. En la siguiente sección 2.3 se obtiene el modelo matemático del actuador electrostático basado en el enfoque de ecuaciones de Euler-Lagrange. El modelo matemático obtenido está expresado en ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales. Este modelo comprende los efectos no lineales más relevantes del actuador. En la sección 2.4 se obtienen de manera analítica las expresiones de voltaje a la entrada y posición a la cual se produce el fenómeno de *pull-in*. Para evitar complicaciones en la simulaciones debido al rango micrométrico de los parámetros en la sección 2.5 se obtiene

un modelo matemático normalizado equivalente que describe la dinámica del actuador electrostático. Las simulaciones numéricas y diseño de los controladores se basan en este último modelo normalizado. En la sección 2.6 se visualiza mediante simulaciones numéricas el momento en el cual se produce el fenómeno de *pull-in*. Este fenómeno se presenta en el momento en el que la fuerza mecánica del resorte es insuficiente para equilibrar la fuerza electrostática presente en el electrodo movable. El desarrollo del capítulo continua de la siguiente manera: En la sección 2.7 se analizan los equilibrios del actuador mediante la técnica de linealización. Posteriormente, en la sección 2.8 se obtienen los puntos de equilibrio del sistema en lazo abierto de manera analítica, los equilibrios son tres uno de los cuales queda fuera del intervalo de operación del MEMS y por lo tanto se descarta, de los dos restantes uno es estable y el otro inestable. Finalmente, en la sección 2.9 se presentan simulaciones numéricas referentes a los puntos de equilibrio.

## 2.2. Representación Esquemática del MEMS

En la Figura 2.1 se muestra la representación esquemática típica del actuador electrostático con un grado de libertad [25]. La parte mecánica del actuador se representa como un sistema masa, resorte y amortiguador. La placa superior es movable y se supone sujeta por el resorte y el amortiguador. La placa inferior se considera fija. El actuador es controlado por una fuente de voltaje. Sobre la placa inferior fija se deposita una película de material dieléctrico para evitar el contacto directo entre placas que provocaría un corto circuito.

En la Figura 2.1 se presentan los parámetros del sistema:  $V_s(t)$  es el voltaje de la fuente con resistencia interna  $R$ ,  $V_a(t)$  el voltaje de actuación,  $z_0$  la separación de las placas cuando el voltaje de actuación es cero,  $A$  el área de las placas,  $\epsilon_0$  la permitividad del dieléctrico entre placas,  $m$  la masa de la placa superior movable,  $b$  la constante de amortiguamiento,  $k$  la rigidez del resorte,  $Q(t)$  la carga del capacitor,  $z(t)$  el despla-

miento de la placa superior e  $i(t)$  la corriente que circula por la resistencia interna de la fuente.

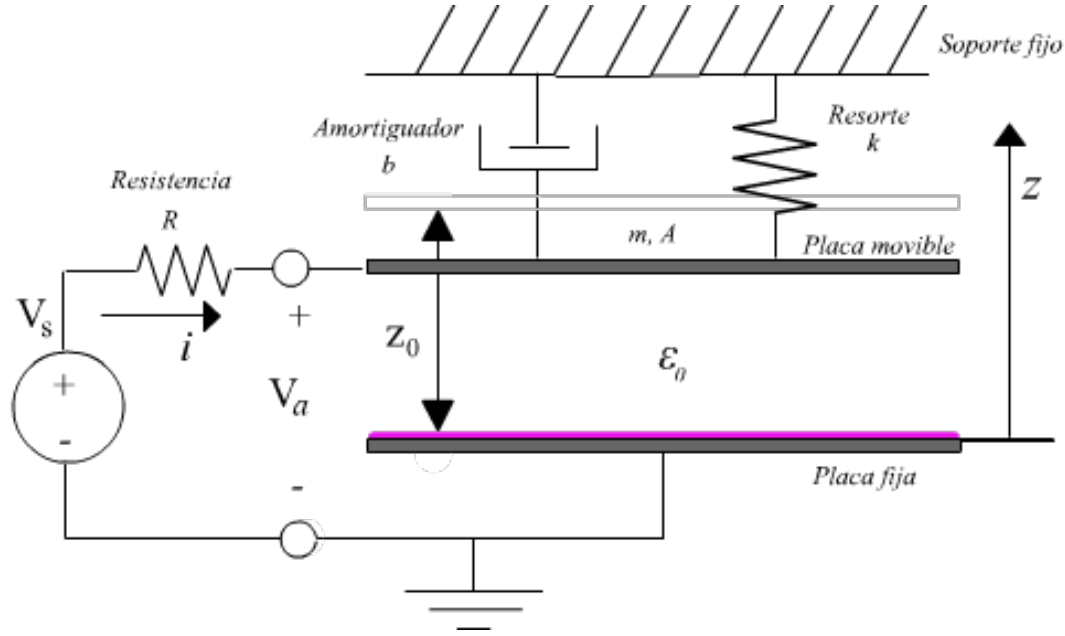


Figura 2.1: Representación esquemática típica de un actuador electrostático con un grado de libertad [25]

Como se puede ver en la Figura 2.1, se tiene un capacitor de placas planas paralelas de área  $A$  separadas una distancia  $z$  el dieléctrico entre placas es aire de constante dieléctrica  $\epsilon_0$ . Si se aplica un voltaje  $V_s$  a la entrada del actuador entre las placas se almacenan cargas eléctricas inducidas de signo contrario. La resistencia interna de la fuente  $R$  provoca que haya un tiempo de retraso entre el momento de aplicar un voltaje  $V_s$  a la entrada y el momento en el cual se empieza a almacenar la carga  $Q$  en las placas. Debido a que las cargas almacenadas entre las placas son de signo contrario se presenta una fuerza de atracción electrostática entre ellas. Por otro lado, la carga,  $Q$  y el voltaje  $V$  están relacionados por la capacitancia,  $C$ .

$$Q = CV \tag{2.1}$$

La capacitancia,  $C$ , de un capacitor de placas planas paralelas depende del área,  $A$ , y

la distancia entre las placas,  $z$ . Como se puede ver en (2.2) la capacitancia sólo depende de la geometría del capacitor y no del voltaje entre placas o de la carga inducida de origen eléctrico entre ellas.

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{z(t)} \quad (2.2)$$

En general, la corriente a la entrada,  $i(t)$ , y el voltaje de actuación,  $V_a(t)$ , se pueden medir. También es posible medir la capacitancia del dispositivo,  $C(t) = \frac{\varepsilon A}{z(t)}$ . A partir de esta medición se pueden deducir tanto la carga del dispositivo,  $Q(t)$ , como la posición de la placa superior  $z(t)$ , [29].

### 2.3. Modelo de la Dinámica del Actuador

En el modelado de sistemas físicos de parámetros concentrados destacan dos corrientes principales: el método de redes y las ecuaciones de Euler-Lagrange (EL). En el método de redes se plantean en primer lugar las ecuaciones de elementos y a partir de estas las ecuaciones de conjunto. La alternativa se basa en las ecuaciones de Euler-Lagrange. En el modelado de sistemas formados por elementos de la misma naturaleza el método de redes es adecuado. Por ejemplo, para modelar sistemas puramente mecánicos o puramente eléctricos, la segunda ley de Newton o las leyes de Kirchhoff respectivamente, son suficientes para obtener el modelo matemático. Incluso desde la perspectiva del método de redes se pueden modelar sistemas con componentes eléctricos y componentes mecánicos, pero la complejidad aumenta considerablemente. El enfoque de las ecuaciones de EL se basa en que el concepto de transformación de energía se comparte entre subsistemas de diferente naturaleza. Por lo tanto, parece natural formular el problema de modelado basándose en el concepto de transformación de energía. Para obtener el modelo matemático del actuador electrostático de este trabajo de tesis se elige la opción del enfoque basado en las ecuaciones de EL. En la dinámica del actuador

interactúan una parte de naturaleza eléctrica y una parte de naturaleza mecánica por lo que el enfoque de ecuaciones de EL es el más apropiado.

### 2.3.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange

Planteamiento general de las ecuaciones de Euler-Lagrange. Las ecuaciones de EL se expresan de la siguiente manera (2.3)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial P}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad (2.3)$$

donde:  $Q_i$  representa el vector de las fuerzas externas que actúan sobre el sistema,  $q_i = (q_1, \dots, q_n)$  es el vector de coordenadas generalizadas del sistema con  $n$  grados de libertad,  $L$  es el Lagrangiano del sistema y  $P$  la función de potencia que describe la disipación de energía del sistema. En el caso del actuador electrostático la fuente de voltaje  $V_s$  es una fuerza externa ( $Q_i$ ) y se puede elegir el desplazamiento  $z$  y la carga  $Q$  como las coordenadas generalizadas ( $q_i$ ) del sistema. El Lagrangiano  $L$  del sistema representa la diferencia entre la energía cinética  $T$  y la energía potencial  $V$  (2.4).

$$L = T - V \quad (2.4)$$

### 2.3.2. Modelo Dinámico Basado en las Ecuaciones de EL

En esta subsección, basándose en las ecuaciones de Euler-Lagrange, se obtiene el modelo matemático en parámetros concentrados del actuador electrostático.

La energía cinética del sistema está dada por (2.5)

$$T = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 \quad (2.5)$$

donde  $m$  representa la masa de la placa superior móvil. La energía potencial (2.6) tiene una componente eléctrica y una componente mecánica debido a la capacitancia y

al resorte respectivamente.

$$V = \frac{1}{2C}Q^2 + \frac{1}{2}k(z - z_0)^2 \quad (2.6)$$

La capacitancia  $C$  (2.7) del actuador de placas planas paralelas depende del área de las placas  $A$ , de la permitividad eléctrica  $\varepsilon_0$  del medio que las separa y de la distancia  $z$  a la que se encuentran una de otra.

$$C = \frac{\varepsilon A}{z} \quad (2.7)$$

Sustituyendo (2.7) en (2.6) resulta

$$V = \frac{1}{2\varepsilon A}zQ^2 + \frac{1}{2}k(z - z_0)^2 \quad (2.8)$$

La función de disipación de potencia  $P$  (2.9) incluye una parte de origen eléctrico y una parte de origen mecánico. La potencia de origen eléctrico se disipa a través de la resistencia interna de la fuente  $R$ , mientras que la potencia de origen mecánico se disipa a través del amortiguador con factor de amortiguamiento  $b$ .

$$P = \frac{1}{2}R\dot{Q}^2 + \frac{1}{2}b\dot{z}^2 \quad (2.9)$$

De (2.5) y (2.8) el Lagrangiano  $L$  (2.4) queda de la siguiente manera

$$L = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - \left( \frac{1}{2\varepsilon A}zQ^2 + \frac{1}{2}k(z - z_0)^2 \right) \quad (2.10)$$

De las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.3) se derivan parcialmente la ecuación de potencia (2.9) y el Lagrangiano (2.10) con respecto a las variables generalizadas  $z$  y  $Q$  y con respecto a sus derivadas temporales  $\dot{z}$  y  $\dot{Q}$ . El resultado de realizar estas derivadas se presenta en (2.11) y (2.12)

$$\frac{\partial L}{\partial z} = - \left( \frac{Q^2}{2\varepsilon A} + k(z - z_0) \right), \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}, \quad \frac{\partial P}{\partial \dot{z}} = b\dot{z} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Q} = \frac{zQ}{\varepsilon A}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \dot{Q}} = R\dot{Q} \quad (2.12)$$

A continuación se realizan las derivadas temporales de las derivadas parciales del Lagrangiano con respecto a las coordenadas generalizadas  $\dot{z}$  y  $\dot{Q}$ .

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) = m\ddot{z}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} \right) = 0 \quad (2.13)$$

Finalmente, sustituyendo (2.11), (2.12) y (2.13) en (2.3) se obtiene el modelo matemático en ecuaciones diferenciales no lineales que describen el comportamiento dinámico del actuador a electrostático.

$$m\ddot{z} = -k(z - z_0) - b\dot{z} - \frac{Q^2}{2\varepsilon A} \quad (2.14)$$

$$\dot{Q} = \frac{1}{R} \left( V_s - \frac{zQ}{\varepsilon A} \right) \quad (2.15)$$

## 2.4. Análisis del Fenómeno de *Pull-In*

En esta sección se evidencia con base en el modelo obtenido el fenómeno de *pull-in* que se presenta en actuadores electrostáticos y que reduce de manera significativa su rango de operación en lazo abierto.

El fenómeno de *pull-in* se puede constatar de la siguiente manera: si se aplica un voltaje de entrada  $V_s$  al sistema en reposo entonces circulará un flujo de cargas eléctricas las cuales se almacenarán en las placas del capacitor. Las cargas eléctricas almacenadas en las placas son de signo contrario por lo que se genera una diferencia de potencial entre ellas. La diferencia de potencial da lugar a que se presente una fuerza de atracción de origen electrostático entre placas. La placa superior es movable por lo que al presentarse



la fuerza de atracción electrostática la distancia entre las placas disminuye, es decir, la placa superior móvil se aproxima a la inferior fija. A la par se generará una fuerza restauradora en el resorte que se opone al movimiento del electrodo superior móvil. La fuerza restauradora del resorte es lineal y la fuerza de origen electrostático que estira al resorte es cuadrática. Si se aumenta paulatinamente el voltaje de entrada  $V_s$  hasta alcanzar un valor crítico, denominado voltaje de *pull-in*, el electrodo superior colisiona súbitamente con el inferior fijo. Este efecto se produce cuando la fuerza restauradora lineal del resorte es completamente desbordada por la fuerza electrostática cuadrática del capacitor. A partir de ese instante la fuerza del resorte es incapaz de equilibrar la fuerza de electrostática entre placas. Como ya se dijo, cuando se presenta el fenómeno de *pull-in* la placa superior móvil colisiona de súbito con la inferior. Para evitar que se produzca un corto circuito al ponerse en contacto directo las placas conductoras se deposita una película aislante en la placa inferior.

#### 2.4.1. Voltaje $V_{pull-in}$ y desplazamiento $z_{pull-in}$

En esta subsección se obtienen las expresiones  $V_{pull-in}$  y  $z_{pull-in}$ . Estas son útiles para identificar el momento en el cual se produce el fenómeno de *pull-in*.

La fuerza neta de la placa superior está dada por (2.16)

$$F_{net} = - \left( k(z - z_0) + b\dot{z} + \frac{\varepsilon AV_a^2}{2z^2} \right) \quad (2.16)$$

Cuando la placa está en equilibrio se cumple que:

$$F_{net} = 0 \quad (2.17)$$

y

$$\dot{z} = 0 \quad (2.18)$$

De (2.16), (2.17) y (2.18) se tiene

$$- \left( k(z - z_0) + \frac{\varepsilon A V_a^2}{2z^2} \right) = 0 \quad (2.19)$$

Si se considera al voltaje  $V_a$  constante, se multiplica (2.19) por  $z^2$  y se deriva con respecto  $z$  se obtiene la distancia a la cual se produce el fenómeno de *pull-in*. A este valor se le conoce como la distancia de *pull-in*.

$$z_{pull-in} = \frac{2}{3}z_0 \quad (2.20)$$

Sustituyendo (2.20) en (2.19) se obtiene el valor crítico del voltaje al cual se produce el fenómeno de *pull-in*, por eso se le conoce como voltaje de *pull-in*.

$$V_{pull-in} = \sqrt{\frac{8kz_0^2}{27C_0}}; \quad \text{con } C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{z_0} \quad (2.21)$$

Otra cantidad a considerar es la carga de *pull-in*,  $Q_{pull-in}$ , ésta se da cuando se produce el voltaje de *pull-in*,  $V_{pull-in}$  (2.21) y las placas están separadas una distancia  $z_{pull-in}$  (2.20). La capacitancia en ese instante está dada por (2.22)

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{z_{pull-in}} = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_0 A}{z_0} = \frac{3}{2} C_0 \quad (2.22)$$

Por otro lado, la carga está relacionada con la capacitancia y el voltaje por  $Q = CV$  de donde se deriva (2.23)

$$Q_{pull-in} = \frac{3}{2} C_0 V_{pull-in} \quad (2.23)$$

Es importante remarcar que inmediatamente después de que se produce el fenómeno de *pull-in* la placa superior se colapsa abruptamente hacia la placa inferior fija. Es en este momento en el cual la fuerza restauradora del resorte, que se opone al libre movimiento de la placa superior no puede contrarrestar la fuerza electrostática entre placas.

## 2.5. Representación de la Dinámica en Ecuaciones Normalizadas

En esta sección se presentan las ecuaciones normalizadas de la dinámica del actuador electrostático. El objetivo principal de normalizar las ecuaciones es simplificar el análisis de la dinámica y diseño de los controladores. Al normalizar el modelo; primero se reduce el número de parámetros y segundo se evitan complicaciones numéricas en las simulaciones.

A continuación se presenta los factores con los cuales se normalizarán las variables y los parámetros de las ecuaciones diferenciales que modelan la dinámica del actuador.

$$x_1 = \frac{z}{z_0} \quad (2.24)$$

$$u_s = \frac{V_s}{V_{pull-in}} \quad (2.25)$$

$$x_3 = \frac{Q}{Q_{pull-in}} \quad (2.26)$$

$$\tau = \omega_0 t; \text{ con } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.27)$$

La posición de la placa  $z$  (2.24) se normalizó con respecto a la distancia de voltaje cero  $z_0$ , el voltaje de la fuente  $V_s$  (2.25) con respecto al voltaje de *pull-in*  $V_{pull-in}$  (2.21), la carga acumulada en el capacitor de placas planas paralelas  $Q$  (2.26) con respecto a la carga de *pull-in*  $Q_{pull-in}$  (2.23) y el tiempo  $t$  (2.27) con respecto a la frecuencia natural del sistema  $\omega_0$ .

El modelo matemático normalizado que describe la dinámica del actuador electrostático está dado por (2.28), (2.29) y (2.30).

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2.28)$$

$$\dot{x}_2 = -(x_1 - 1) - 2\zeta x_2 - \frac{1}{3}x_3^2 \quad (2.29)$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{r} \left( \frac{2}{3} u_s - x_1 x_3 \right) \quad (2.30)$$

donde:  $x_1$  representa la posición normalizada,  $x_2$  la velocidad normalizada,  $x_3$  la carga normalizada. El parámetro  $\zeta = \frac{b}{2m\omega_0}$  representa el factor de amortiguamiento normalizado y  $r = \omega_0 C_0 R$  la resistencia normalizada.

En el Apéndice A se presenta de manera detallada la obtención de las ecuaciones normalizadas (2.28), (2.29) y (2.30).

Si bien es cierto que al normalizar el sistema dimensional los parámetros resultantes son adimensionales, éstos no dejan de ser una combinación de los parámetros dimensionales. En la Tabla 2.1 se presentan los valores de los parámetros dimensionales a partir de los cuales se obtuvieron los parámetros adimensionales utilizados en las simulaciones de este trabajo de tesis [22].

Parámetro	Símbolo	Valor
Permitividad del aire	$\varepsilon_0$	$8.85 \times 10^{-12} \frac{Nm^2}{C^2}$
Área de la placa movable	A	$100 \times 300 \times 10^{-12} m^2$
Masa de la placa movable	m	$2.16 \times 10^{-10} \text{ Kg}$
Constante de viscosidad	b	$2.75 \times 10^{-5} \frac{Ns}{m}$
Posición con $V_s = 0$	$z_0$	$5 \times 10^{-6} m$
Resistencia de la fuente	R	$2 \times 10^6 \Omega$
Constante del resorte	k	$1.663 \frac{N}{m}$

Tabla 2.1: Valores de los parámetros

## 2.6. Ilustración del fenómeno de *Pull-In*

En esta sección, empleando el modelo matemático normalizado, se ilustra de manera numérica el momento en el cual la fuerza restauradora del resorte es incapaz de contrarrestar la fuerza electrostática del capacitor. Esto ocurre cuando el voltaje de actuación

normalizado  $u_a > 1$ , es decir,  $V_{actuacion} > V_{pull-in}$ . Cuando el voltaje de actuación sobrepasa al voltaje de *pull-in* no hay manera de equilibrar al electrodo superior y éste se colapsa abruptamente hacia el inferior.

La fuerza neta normalizada está dada por la ecuación (2.31)  $F_{netnorm}$ .

$$F_{netnorm} = -(x_1 - 1) - 2\zeta x_2 - \frac{4}{27} \left( \frac{u_a}{x_1} \right)^2 \quad (2.31)$$

donde:  $u_a = \frac{V_a}{V_{pull-in}}$  representa el voltaje de actuación normalizado.

Cuando el electrodo esta en estado estable  $x_2 = 0$  y la fuerza normalizada del resorte  $F_{mnorm}$  es equivalente a la fuerza normalizada electrostática  $F_{enorm}$ .

$$F_{mnorm} = 1 - x_1 \quad (2.32)$$

$$F_{enorm} = -\frac{4}{27} \left( \frac{u_a}{x_1} \right)^2 \quad (2.33)$$

En la Figura 2.2 se aprecia que para valores de  $u_a < 1$  ( $V_a < V_{pull-in}$ ) la fuerza mecánica restauradora del resorte puede contrarrestar el efecto de la fuerza de atracción electrostática presente entre los electrodos. Se tienen dos puntos de equilibrio para la fuerza neta normalizada en estado estable, es decir, cuando  $x_2 = 0$  y  $F_{mnorm} = F_{enorm}$ . Cuando  $u_a = 1$  ( $V_a = V_{pull-in}$ ) se tiene un solo punto de equilibrio. Por último, cuando  $u_a > 1$  ( $V_a > V_{pull-in}$ ) no existe ningún punto de equilibrio, es decir, no hay manera de que la fuerza mecánica restauradora del resorte pueda contrarrestar la fuerza electrostática entre electrodos. Es en este momento en el cual la fuerza de atracción electrostática sobrepasa a la fuerza mecánica y domina el comportamiento de los electrodos provocando que el electrodo superior se colapse súbitamente hacia el inferior. En el capítulo 2.7 se determina la naturaleza de los puntos de equilibrio, es decir, si son estables o inestables.

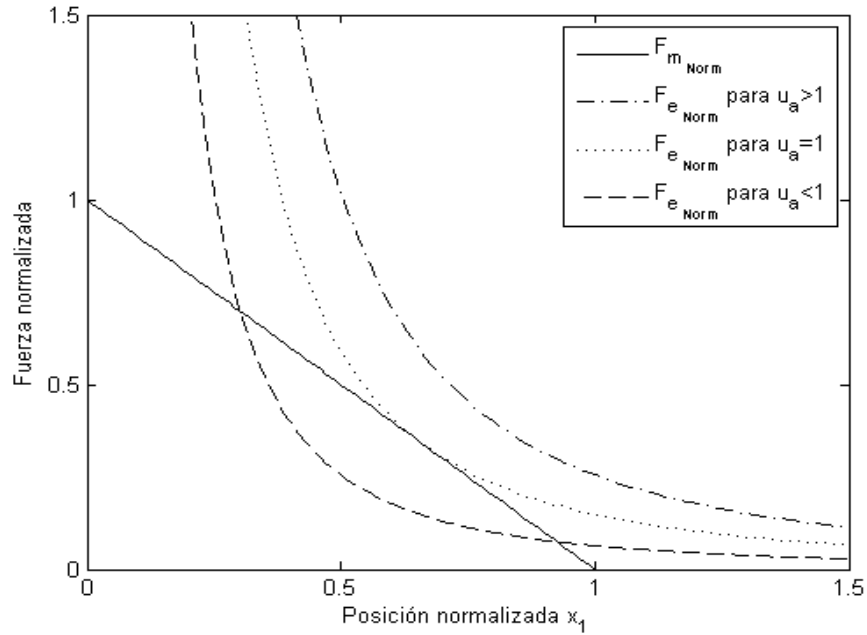


Figura 2.2: Equilibrio de Fuerzas (mecánica y electrostática)

## 2.7. Análisis de Estabilidad por el Método de Linealización

El objetivo de esta sección, y las subsiguientes de este capítulo, es analizar el comportamiento de los puntos de equilibrio del actuador electrostático.

Dado un sistema de control, la primera y más importante cuestión es si es o no estable en el punto de operación, ya que un sistema inestable no sólo no es útil sino también potencialmente peligroso. Cualitativamente, un sistema es estable si las trayectorias temporales que empiezan en las cercanías de un punto de operación permanecen en sus cercanías. El método de linealización fue introducido por el matemático ruso Lyapunov. Este método permite obtener conclusiones acerca de la estabilidad local de un sistema no lineal a partir de su aproximación lineal [26].

### 2.7.1. Linealización de un sistema no lineal

La dinámica de un sistema no lineal se puede representar como un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales de la forma

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2.34)$$

$$y = g(x, u) \quad (2.35)$$

donde  $f$  es un vector de  $n \times 1$  funciones,  $x$  es un vector de  $n \times 1$  estados,  $u$  es un vector de  $n \times 1$  entradas. Las funciones  $f$  y  $g$  son funciones no lineales del estado y las entradas. El número de estados  $n$  indica el orden del sistema.

Un estado  $x_*$  es un punto de equilibrio del sistema si una vez que  $x(t)$  es igual a  $x_*$ , éste permanece igual  $x_*$  para todo tiempo futuro [26]. Matemáticamente los puntos de equilibrio de un sistema no lineal se pueden obtener resolviendo la ecuación (2.36).

$$f(x_*, u_*) = 0 \quad (2.36)$$

#### 2.7.1.1. Técnica de linealización

Mediante la técnica de linealización, excepto para algunos casos especiales, es posible determinar el comportamiento cualitativo de un sistema no lineal en las cercanías de un punto de equilibrio [11]. Esta técnica se emplea para determinar si un punto de equilibrio es estable o inestable siempre que la parte real de los eigenvalores resultantes sea diferente de cero. Supóngase que

$$x(t) = X_0 + \delta x(t) \quad (2.37)$$

y

$$u(t) = U_0 + \delta u(t) \quad (2.38)$$

donde  $X_0$  y  $U_0$  es el punto de operación. Si se sustituyen (2.37) y (2.38) en (2.34) y se desarrolla en series de Taylor

$$\delta\dot{x}(t) = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{X_0, U_0} \right) \delta x(t) + \left( \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{X_0, U_0} \right) \delta u(t) \quad (2.39)$$

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{x}_1 \\ \vdots \\ \delta\dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \Big|_{X_0, U_0} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \vdots \\ \delta x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{pmatrix} \Big|_{X_0, U_0} \begin{pmatrix} \delta u_1 \\ \vdots \\ \delta u_n \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

donde el primer Jacobiano es una matriz de  $n \times n$ ,  $n$  representa el número de variables del estado. El segundo Jacobiano es una matriz de  $n \times m$ ,  $m$  representa el número de entradas.

Una vez linealizado el sistema se evalúa el Jacobiano del sistema en los equilibrios resultantes de resolver (2.36) con entrada cero. Si todos los eigenvalores resultantes del Jacobiano tienen parte real negativa, es decir, están en la parte izquierda del plano complejo, el punto de equilibrio es estable. Si alguno de los eigenvalores tiene parte real positiva el punto de equilibrio es inestable [11], [26].

## 2.8. Puntos de Equilibrio del Actuador Electroestático

En esta sección se obtienen los puntos de equilibrio del actuador electrostático y se determina si son estables o inestables de acuerdo a la teoría presentada en la sección (2.7).

Por conveniencia se reproducen nuevamente las ecuaciones dinámicas normalizadas del actuador (2.28), (2.29) y (2.30).

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2.41)$$

$$\dot{x}_2 = -(x_1 - 1) - 2\zeta x_2 - \frac{1}{3}x_2^2 \quad (2.42)$$



$$\dot{x}_3 = \frac{1}{r} \left( \frac{2}{3} u_s - x_1 x_3 \right) \quad (2.43)$$

- Primero se obtienen los puntos de equilibrio.

Para lograr este propósito se igualan (2.41), (2.42) y (2.43) a cero y se resuelve el sistema algebraico resultante.

$$0 = x_{2eq} \quad (2.44)$$

$$0 = -(x_{1eq} - 1) - 2\zeta x_{2eq} - \frac{1}{3} x_{3eq}^2 \quad (2.45)$$

$$0 = \frac{1}{r} \left( \frac{2}{3} u_s - x_{1eq} x_{3eq} \right) \quad (2.46)$$

Despejando  $x_{1eq}$  de (2.45) y como  $x_{2eq} = 0$  (2.44)

$$x_{1eq} = 1 - \frac{1}{3} x_{3eq}^2 \quad (2.47)$$

Ahora se sustituye (2.47) en (2.46) y se obtiene una ecuación de tercer grado. Las tres raíces resultantes de resolver la ecuación (2.48) son los puntos de equilibrio del actuador. Para resolver la ecuación (2.48) se considera el voltaje normalizado  $u_s$  como una constante positiva.

$$x_{3eq}^3 - 3x_{3eq} + 2u_s = 0 \quad (2.48)$$

Las tres raíces resultantes de resolver (2.48) están dadas por (2.49), (2.50) y (2.51).

$$x_{3eq1} = \psi + \frac{1}{\psi} \quad (2.49)$$

$$x_{3eq2} = -\frac{1}{2} \left( \psi + \frac{1}{\psi} \right) + \frac{i\sqrt{3}}{2} \left( \psi - \frac{1}{\psi} \right) \quad (2.50)$$

$$x_{3eq3} = -\frac{1}{2} \left( \psi + \frac{1}{\psi} \right) - \frac{i\sqrt{3}}{2} \left( \psi - \frac{1}{\psi} \right) \quad (2.51)$$

donde:  $\psi = \left(-u_s + \sqrt{u_s^2 - 1}\right)^{\frac{1}{3}}$

- Segundo se obtiene el Jacobiano del actuador a partir de (2.41), (2.42) y (2.43).

Una vez obtenido el Jacobiano se evalúan los puntos de equilibrio,  $x_{eq} = (x_{1eq}, x_{2eq}, x_{3eq})$ .

Si la parte real de al menos uno de los tres eigenvalores resultantes del Jacobiano es positiva se tiene un punto de equilibrio inestable. Si la parte real de los tres eigenvalores es negativa se tiene un punto de equilibrio estable. En caso de tener eigenvalores con parte real cero este criterio de estabilidad no es suficiente para establecer si la naturaleza del punto de equilibrio.

$$Jacobian = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2\zeta & -\frac{2}{3}x_{3eq} \\ -\frac{x_{3eq}}{r} & 0 & -\frac{x_{1eq}}{r} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

## 2.9. Simulación Numérica

En esta sección se visualizan mediante simulaciones numéricas los resultados analíticos de la sección (2.8). Los parámetros utilizados en las simulaciones tanto el factor de amortiguamiento normalizado  $\zeta$  como la resistencia normalizada  $r$  se toman de acuerdo a los parámetros de la Tabla 2.1.

En la Figura 2.3 se observa el comportamiento de las raíces (2.49), (2.50) y (2.51) conforme varía el valor de  $u_s$  en el intervalo  $0 \leq u_s \leq 1$ . La carga eléctrica normalizada  $x_3$  almacenada en la placa móvil debe ser positiva o nula debido a que el voltaje de entrada  $u_s$  es positivo o cero. Como se aprecia en la Figura 2.3 la raíz  $x_{3eq2}$  es negativa y por lo tanto se descarta. Se puede comprobar que esta raíz genera posiciones negativas  $x_{1eq2}$  numéricamente posibles, no así físicamente.

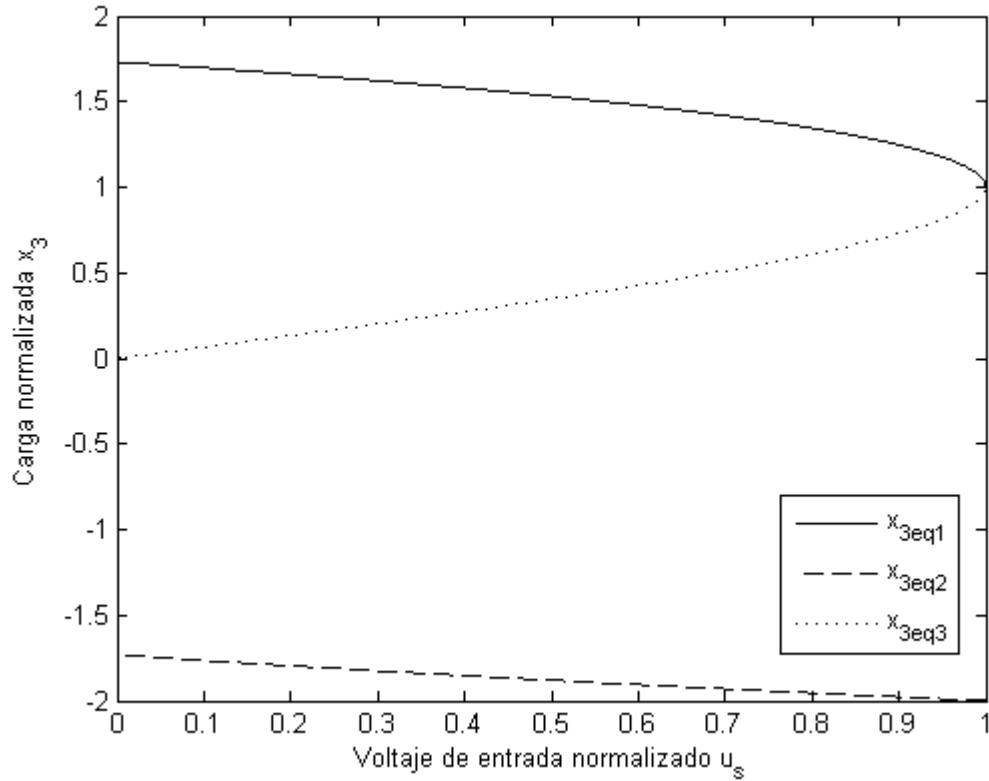


Figura 2.3: Trayectorias de las raíces

En la Figura 2.4 se observa el comportamiento de la posición  $x_{1eq1}$  y de la posición  $x_{1eq3}$ . Conforme el voltaje  $u_s$  se aproxima al valor crítico  $u_s = 1$  las dos trayectorias se aproximan entre sí. En la gráfica se aprecia que el momento en el que las trayectorias se intersectan se da en  $x_1 = \frac{2}{3}$ .

En la Figura 2.5 se presentan las trayectorias de la parte real de los eigenvalores resultantes de evaluar el punto de equilibrio  $P(x_{1eq3}, 0, x_{3eq3})$ . Las tres trayectorias son negativas, por lo tanto, el punto de equilibrio es estable.

En la Figura 2.6 se presentan las trayectorias de la parte real de los eigenvalores resultantes de evaluar el punto de equilibrio  $P(x_{1eq1}, 0, x_{3eq1})$ . Una de las tres trayectorias es positiva, por lo tanto, el punto de equilibrio es inestable.

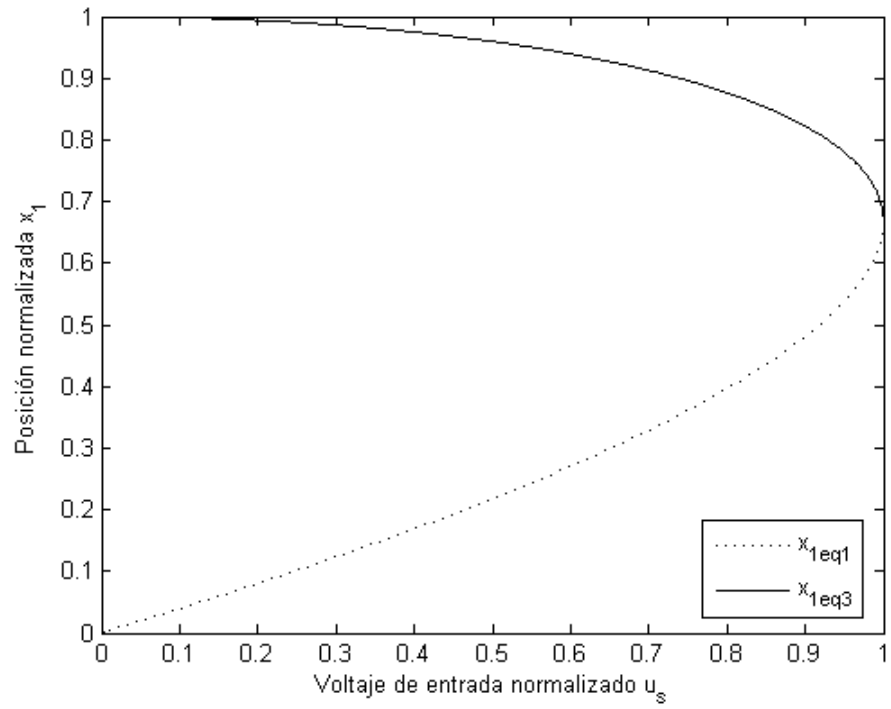


Figura 2.4: Gráfica de las raíces  $x_{eq}$  positivas

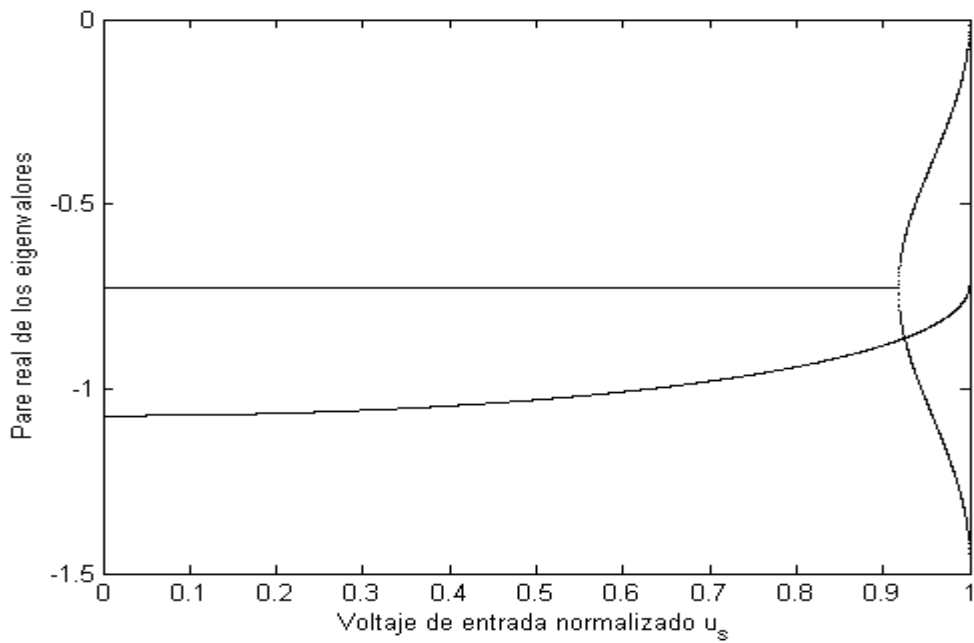


Figura 2.5: Parte real de los eigenvalores del punto de equilibrio estable

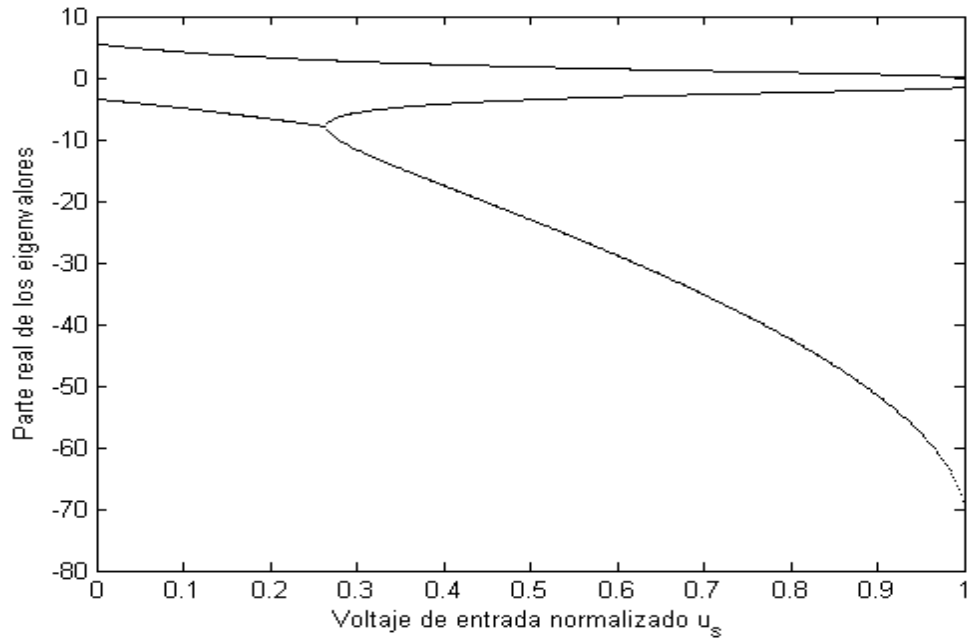


Figura 2.6: Parte real de los eigenvalores del punto de equilibrio inestable

En la Figura 2.7 se verifica el fenómeno de pull-in de manera gráfica. Se aplican diferentes valores constantes de voltaje  $u_s$  a la entrada del actuador. Como se ve en la figura cuando el voltaje  $u_s$  es mayor a uno el electrodo movable colisiona con el inferior, mientras que para valores de  $u_s$  menores a uno el electrodo movable se equilibra. El rango para el cual se logra equilibrar el electrodo movable es  $\frac{2}{3} \leq x_1 \leq 1$ , como era de esperarse.

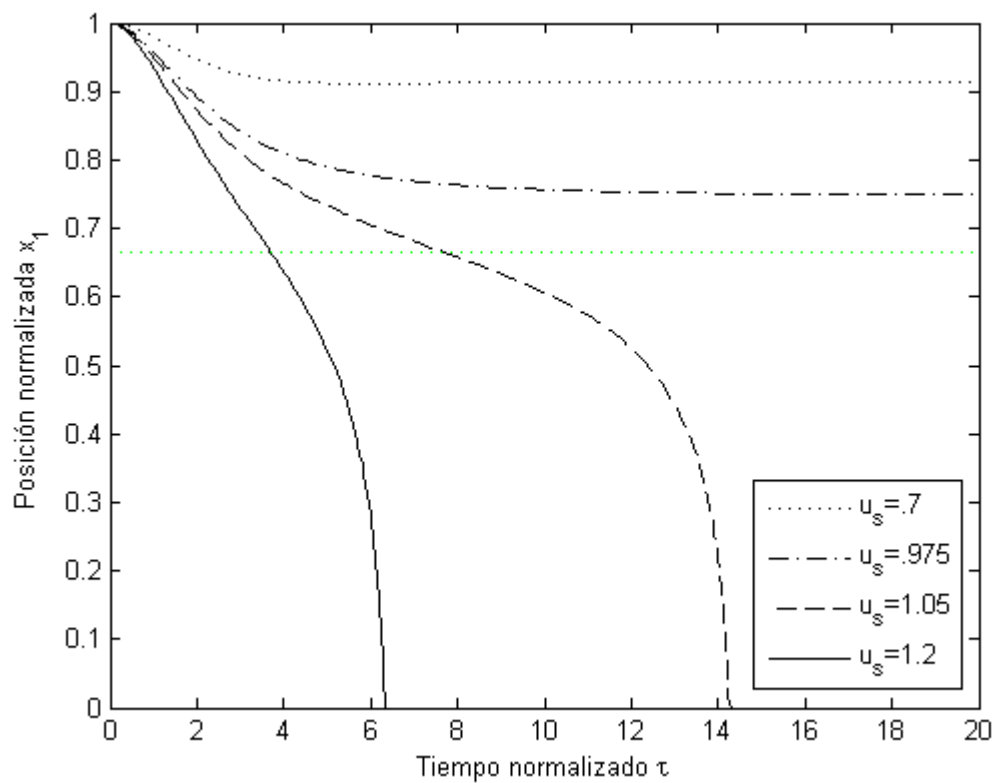


Figura 2.7: Posición del electrodo superior

# Capítulo 3

## Metodología IDA-PBC

### 3.1. Introducción

### 3.2. Control Basado en Pasividad, PBC

El Control Basado en Pasividad (PBC, por sus siglas en inglés), introducido en [15], es el nombre genérico dado a una familia de técnicas de diseño de controladores que logran la estabilidad del sistema vía las propiedades de sistemas pasivos. La estructura del sistema en lazo cerrado es pasiva con respecto a una función de almacenamiento deseada (función que usualmente califica como una función de Lyapunov en el análisis de estabilidad).

La característica principal de esta metodología en el diseño del controlador se basa en el uso de las propiedades de almacenamiento y disipación de energía del sistema.

La metodología aplica de manera adecuada en aquellos sistemas que pueden ser modelados por ecuaciones de Euler-Lagrange o ecuaciones Hamiltonianas. Cuando se describen los sistemas físicos con este tipo de representaciones matemáticas quedan visibles ciertas propiedades estructurales que pueden ser explotadas en el diseño de los esquemas de control.

Una vez modelado el sistema pasivo se verifica que las trayectorias (las soluciones de las ecuaciones diferenciales del modelo matemático que describe el comportamiento

del sistema físico) tiendan al punto mínimo de energía a una velocidad proporcional a la cantidad de energía disipada.

Como consecuencia inmediata en el PBC se proponen como pasos básicos para el diseño de leyes de control las siguientes dos etapas:

Moldeo de energía. Modificar la entrada de control del sistema a controlar de tal manera que el sistema en lazo cerrado posea una función de energía tal que su valor mínimo coincida con un punto de operación deseado.

Inyección de amortiguamiento. Lograr que el sistema en lazo cerrado disipe la mayor cantidad de energía de tal forma que el punto de operación deseado se alcance en el menor tiempo posible.

El PBC se puede clasificar en dos ramas principales:

PBC estándar, en el cual se selecciona a priori una función de almacenamiento, típicamente cuadrática, y posteriormente se diseña el controlador que logra que la función de almacenamiento sea no creciente. Esta rama está fuertemente ligada al concepto de estabilidad en el sentido de Lyapunov.

En la segunda rama de PBC no se fija la función de almacenamiento en lazo cerrado, sino que se busca una estructura PCH deseada y después caracterizar todas las funciones de energía asignables compatibles con esta estructura. Esta caracterización se logra resolviendo un conjunto de Ecuaciones diferenciales Parciales, PDE.

### 3.3. Metodología IDA-PBC para PCHS

La metodología IDA-PBC fue introducida en [17, 18] como un procedimiento para controlar sistemas físicos descritos por Sistemas Hamiltonianos Controlados por Puerto, PCHS, representados de la forma

$$PCHS = \begin{cases} \dot{x} = (J(x) - R(x))\nabla H + g(x)u \\ y = g^T(x)\nabla H \end{cases} \quad (3.1)$$



donde:  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$  es el vector de estados,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ ,  $m < n$  es la acción de control,  $\mathbf{H} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es la energía total almacenada,  $J(x) = -J^T$ ,  $R(x) = R^T \geq$  son las matrices naturales de interconexión y de amortiguamiento, respectivamente, además,  $\mathbf{u}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  son variables conjugadas, es decir, su producto resulta en unidades de potencia. La elección de PCHS se debe a que un gran número sistemas físicos se pueden modelar bajo esta estructura, ampliamente discutida en [27]. Con esta técnica de control lo que se busca es regular el comportamiento de un sistema no lineal asignándole una estructura Hamiltoniana deseada en lazo cerrado [14].

Con la técnica de IDA-PBC se busca regulación del comportamiento de sistemas no lineales asignando una estructura Hamiltoniana Controlada por Puerto, PCH, deseada en lazo cerrado. La estructura PCH deseada en lazo cerrado permite apreciar propiedades del sistema descritas por las matrices de interconexión y amortiguamiento.

Esta técnica de control ha sido aplicada para controlar sistemas físicos de diferente naturaleza: sistemas mecánicos [1, 16], sistemas magnéticos de levitación [20, 21], máquinas eléctricas [2, 19], convertidores de potencia [8, 9], sistemas de potencia [7, 13].

La propiedad de Pasividad juega un rol central en esta técnica de diseño de controladores.

### 3.3.1. Metodología IDA-PBC Representación General

La metodología IDA-PBC se puede aplicar a una clase más general de sistemas físicos. A continuación se demuestra que la metodología IDA-PBC permite el diseño por realimentación de estados de sistemas de la forma

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (3.2)$$

donde:  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$  es el vector de estados,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ ,  $m < n$  es la acción de control. Se propone una estructura en lazo cerrado de la forma

$$\dot{x} = (J_d(x) - R_d(x))\nabla H_d \quad (3.3)$$

donde:  $J_d(x) = -J_d^T(x)$  y  $R_d(x) = R_d^T(x) \geq 0$ , representan las matrices deseadas de interconexión y disipación respectivamente, de ahí el nombre de IDA, y  $H_d : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es la función de energía deseada.

Si se cumple que la Ecuación Diferencial Parcial, (EDP).

$$g^\perp(x)f(x) = g^\perp(x)(J_d(x) - R_d(x))\nabla H_d \quad (3.4)$$

donde:  $g^\perp(x)$  es un aniquilador izquierdo de  $g(x)$ , es decir,  $g^\perp(x)g(x) = 0$  y  $H_d(x)$  es tal que

$$x_* = \operatorname{argmin} H_d(x) \quad (3.5)$$

con  $\mathbf{x}_* \in \mathbb{R}^n$  representa el equilibrio a estabilizar. Entonces el sistema (3.2) en lazo cerrado con  $u = \beta(x)$ , toma la forma (3.3)

$$\beta(x) = [g^\perp(x)g(x)]^{-1}g^\top(x) \{[J_d(x) - R_d(x)]\nabla H_d - f(x)\} \quad (3.6)$$

con  $\mathbf{x}_*$  un punto de equilibrio estable. El punto de equilibrio  $\mathbf{x}_*$  será asintóticamente estable, si además, es un mínimo de  $H_d(x)$  y el conjunto invariante más grande de la dinámica en lazo cerrado de (3.3) contenido en

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid [\nabla H_d]^\top R_d \nabla H_d = 0\} \quad (3.7)$$

es igual a  $\{\mathbf{x}_*\}$ .

### 3.3.2. Prueba de Estabilidad

Sustituyendo (3.6) en el lado derecho de (3.2), con  $u = \beta(x)$ , e igualando con (3.3) se obtiene la ecuación de *matching*.

$$f(x) + g(x)\beta(x) = [J_d(x) - R_d(x)]\nabla H_d \quad (3.8)$$

premultiplicando por  $g^\perp(x)$  se obtiene la EDP (3.4). La ley de control se obtiene pre-multiplicando por la pseudoinversa de  $g(x)$ . La estabilidad de  $\mathbf{x}_*$  se establece porque a lo largo de las trayectorias de (3.3), se tiene que

$$\dot{H}_d = -[\nabla H_d]^\top R(x) \nabla H_d \leq 0 \quad (3.9)$$

Por lo tanto,  $H_d$  califica como una función de Lyapunov. La estabilidad asintótica se puede establecer por medio del principio de invariancia de La Salle y la condición (3.7).

### 3.4. Métodos para Resolver la Ecuación de *Matching*

La clave en la obtención de la ley de control empleando la metodología IDA-PBC se basa en la solución de la ecuación de *matching* (3.4).

Se han propuesto varias técnicas en la literatura para seleccionar las matrices  $J_d$ ,  $R_d$  de interconexión y amortiguamiento deseadas, respectivamente, así como de la función de energía deseada  $H_d$  que satisfacen  $J_d(x) = -J_d^T(x)$ ,  $R_d(x) = R_d^T(x) \geq 0$  y  $x_* = \operatorname{argmin} H_d(x)$ . Los diferentes procedimientos se discuten con mayor detalle en [14].

- Método Algebraico: Originalmente propuesto en [6]. Se selecciona la ecuación Hamiltoniana deseada  $H_d(x)$  y a partir de ella se resuelven las ecuaciones algebraicas resultantes para  $J_d(x)$  y  $R_d(x)$ .
- Parametrizado: Originalmente propuesto en [16]. Se aplica principalmente a sistemas mecánicos subactuados, es indispensable tener conocimiento a priori de la estructura Hamiltoniana deseada el cual se utiliza para obtener una EDP menos compleja de resolver.

# Capítulo 4

## Diseño de los Controladores por IDA-PBC

### 4.1. Introducción

En este Capítulo 4 se diseñan un par de controladores basados en la técnica IDA-PBC, de acuerdo al marco teórico expuesto en el Capítulo 3.

El punto donde la energía en lazo abierto es mínima usualmente no es el punto que interesa controlar, es entonces que se introducen técnicas de control para operar alrededor de un punto de equilibrio deseado  $x^*$  [16].

En general la función de energía total de los sistemas físicos es buena candidata como función de almacenamiento  $H(x)$ . Sin embargo, la función de energía total del actuador electrostático no es definida positiva en todos los puntos de equilibrio deseados. Por lo que es necesario moldear la función de energía total, tal que sea semidefinida positiva o incluso definida positiva para los puntos de equilibrio deseados.

### 4.2. Modelo de la Dinámica del Error

El objetivo de los controladores de este trabajo de tesis es lograr regulación en cualquier posición dentro de la distancia  $z_0$  que separa a las placas cuando no se le aplica voltaje alguno a la entrada. El diseño de los controladores se obtiene a partir de las

ecuaciones dinámicas del error. Éstas se contruyen con la diferencia entre las ecuaciones diferenciales normalizadas que describen la dinámica del actuador y las ecuaciones algebraicas que describen el conjunto de puntos de equilibrio.

Las ecuaciones diferenciales normalizadas que describen la dinámica del actuador están dadas por (4.1), (4.2) y (4.3).

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4.1)$$

$$\dot{x}_2 = -(x_1 - 1) - 2\zeta x_2 - \frac{x_3^2}{3} \quad (4.2)$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{x_1 x_3}{r} + \frac{2u}{3r} \quad (4.3)$$

Por otro lado, las ecuaciones algebraicas que describen el conjunto de puntos de equilibrio posibles del sistema están dadas por (4.4), (4.5) y (4.6).

$$x_2^* = 0 \quad (4.4)$$

$$-(x_1^* - 1) - 2\zeta x_2^* - \frac{(x_3^*)^2}{3} = 0 \quad (4.5)$$

$$-\frac{x_1^* x_3^*}{r} + \frac{2u^*}{3r} = 0 \quad (4.6)$$

donde:  $x^* = (x_1^*, 0, \sqrt{3(1-x_1^*)})$  representa el conjunto de equilibrios y  $x_1^*$  la posición deseada del electrodo movable del actuador electrostático. El control constante correspondiente está dado por  $u_* = \frac{3x_1^* \sqrt{3(1-x_1^*)}}{2}$ .

Finalmente, sustrayendo las ecuaciones algebraicas en el equilibrio a las ecuaciones dinámicas del sistema se obtiene el modelo que describe el comportamiento dinámico en términos del error (4.7), (4.8) y (4.9).

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_2^* \quad (4.7)$$

$$\dot{x}_2 = -(x_1 - x_1^*) - 2\zeta(x_2 - x_2^*) - \frac{x_3^2 - (x_3^*)^2}{3} \quad (4.8)$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{x_1x_3 - x_1^*x_3^*}{r} + \frac{2(u - u^*)}{3r} \quad (4.9)$$

El sistema de ecuaciones (4.7), (4.8) y (4.9) se puede representar de la forma:

$$\dot{x} = f(x) - g(x)u = (J - R)\nabla H + g(x)u \quad (4.10)$$

donde:

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 - x_2^* \\ -(x_1 - x_1^*) - 2\zeta(x_2 - x_2^*) - \frac{x_3^2 - (x_3^*)^2}{3} \\ -\frac{x_1x_3 - x_1^*x_3^*}{r} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{3r} \end{bmatrix}^T \quad (4.12)$$

$$J - R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2\zeta & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2r} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$H = \frac{(x_1 - x_1^*)^2}{2} + \frac{(x_2 - x_2^*)^2}{2} + \frac{x_1(x_3^2 - (x_3^*)^2)}{3} - \frac{2x_1^*x_3^*x_3}{3} \quad (4.14)$$

### 4.3. Ley de Control por el Método Algebraico

Como primer paso en la solución de la ecuación de *matching* por el método algebraico se propone una función Hamiltoniana deseada  $H_d$  que tenga un mínimo en el punto de equilibrio a estabilizar  $x^* = \operatorname{argmin} H_d(x)$ .

Una elección recomendable de la función Hamiltoniana deseada  $H_d$  es considerarla cuadrática en términos del error (4.15).

$$H_d(x_1, x_2, x_3) = \frac{\gamma_1(x_1 - x_1^*)^2}{2} + \frac{(x_2 - x_2^*)^2}{2} + \frac{\gamma_2(x_3 - x_3^*)^2}{2} \quad (4.15)$$

donde;  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son parámetros constantes positivos.

De (4.15) se tiene que

$$\nabla H_d = [\gamma_1(x_1 - x_1^*), x_2 - x_2^*, \gamma_2(x_3 - x_3^*)]^T \quad (4.16)$$

Asimismo, es necesario proponer las matrices de interconexión y de disipación generalizadas  $J_d$  y  $R_d$ .

$$J_d = \begin{bmatrix} 0 & J_{12} & J_{13} \\ -J_{12} & 0 & J_{23} \\ -J_{13} & -J_{23} & 0 \end{bmatrix}; \quad R_d = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

### 4.3.1. Solución de la Ecuación de *Matching*

Ahora se resolverá la ecuación de *matching* (4.18) por el método algebraico haciendo uso de la función Hamiltoniana deseada  $H_d$  (4.15) y de las matrices deseadas de interconexión  $J_d$  y de disipación  $R_d$  (4.17) propuestas en conjunto con las ecuaciones (4.13) y (4.14) dadas. Lo que se busca es que la estructura del sistema en lazo cerrado esté dada de la forma (4.18)

$$g^\perp(x)((J(x) - R(x))\nabla H) = g^\perp(x)[J_d(x) - R_d(x)]\nabla H_d \quad (4.18)$$

donde:  $g^\perp(x)$  es un aniquilador izquierdo de  $g(x)$ , es decir,  $g^\perp(x)g(x) = 0$ .

$$g^\perp(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

El objetivo de premultiplicar  $\dot{x}$  (4.10) por el aniquilador izquierdo  $g^\perp$  (4.19) es desacoplar la parte subactuada de la actuada. Las ecuaciones (4.20) y (4.21) describen la dinámica de la parte subactuada.

$$x_2 - x_2^* = -r_1\gamma_1(x_1 - x_1^*) + J_{12}(x_2 - x_2^*) + \gamma_2 J_{13}(x_3 - x_3^*) \quad (4.20)$$

$$-(x_1 - x_1^*) - 2\zeta(x_2 - x_2^*) - \frac{x_3^2 - (x_3^*)^2}{3} = -J_{12}\gamma_1(x_1 - x_1^*) - r_2(x_2 - x_2^*) + \gamma_2 J_{23}(x_3 - x_3^*) \quad (4.21)$$

Ambas igualdades se deben satisfacer en todo el espacio de estados esto se consigue eligiendo valores para  $J_{12}$ ,  $J_{13}$ ,  $J_{23}$  que pueden ser constantes o variables, pero no negativas, de igual manera  $r_1$ ,  $r_2$ . La estrategia a seguir es elegir los valores de los elementos de las matrices deseadas de amortiguamiento,  $J_d$ , y de disipación,  $R_d$ , de tal manera que la dependencia en las variables de estado en ambos miembros de las ecuaciones se cancele.

Se proponen los siguiente parámetros para satisfacer las ecuaciones (4.20) y (4.21).

$$J_{12} = 1; J_{13} = 0; J_{23} = -\frac{x_3 + x_3^*}{3\gamma_2}; r_1 = 0; r_2 = 2\zeta; \gamma_1 = 1;$$

Esta es una posible elección, existen otros parámetros que satisfacen las desigualdades. Con estos valores la diferencia entre las matrices de interconexión y amortiguamiento ( $J_d - R_d$ ) queda de la siguiente manera:

$$J_d - R_d = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2\zeta & -\frac{x_3 + x_3^*}{3\gamma_2} \\ 0 & \frac{x_3 + x_3^*}{3\gamma_2} & -r_3 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

Finalmente se obtiene la ley de control  $\beta(x)$  (4.24) premultiplicando  $\dot{x}$  (4.10) por la matriz pseudoinversa  $g^\dagger(x)$  de  $g(x)$ , es decir  $g^\dagger(x)g(x) = [I]$



$$g^\dagger(x) = (g(x)^T g(x))^{-1} g(x)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3r}{2} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$u = \beta(x) = g^\dagger ([J_d(x) - R_d(x)] \nabla H_d - f(x)) + u_* \quad (4.24)$$

Sustituyendo los términos respectivos, el control obtenido de resolver la ecuación de *matching* por el método algebraico es (4.25).

$$u = \frac{3r}{2} \left( (x_2 - x_2^*) \left( \frac{x_3 + x_3^*}{3\gamma_2} \right) - r_3 \gamma_2 (x_3 - x_3^*) + \frac{x_1 x_3 - x_1^* x_3^*}{r} \right) + u_* \quad (4.25)$$

donde  $r_3 > 0$  y  $\gamma_2 > 0$  son parámetros libres sintonizables para adecuar el desempeño de la respuesta del controlador.

### 4.3.2. Análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov

El marco teórico necesario para establecer estabilidad en el sentido de Lyapunov se encuentra en el Apéndice B.

Una vez obtenida la función Hamiltoniana  $H_d$  es necesario verificar que tenga un punto mínimo que coincida con el punto de equilibrio deseado a estabilizar y que éste sea estable. Como se verificará a continuación el punto de equilibrio deseado  $x^*$  no sólo es estable sino asintóticamente estable.

La estabilidad en el sentido de Lyapunov del punto de equilibrio deseado  $x_d = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$  se establece a partir de la función Hamiltoniana  $H_d$  obtenida de resolver la ecuación de *matching* por el método algebraico (4.26) la cual se considera una función de Lyapunov.

Sea la función Hamiltoniana,  $H_d$ , (4.15) una función de Lyapunov

$$H_d(x_1, x_2, x_3) = \frac{(x_1 - x_1^*)^2}{2} + \frac{(x_2 - x_2^*)^2}{2} + \frac{\gamma_2 (x_3 - x_3^*)^2}{2} \quad (4.26)$$

Primero, se evalúa  $H_d$  en el punto de equilibrio  $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ , donde  $x_1^*$  es la posición del electrodo móvil a regular,  $x_2^* = 0$  y  $x_3^* = \sqrt{3(1 - x_1^*)}$ .

Evalutando (4.26) se cumple que  $H_d(x) = 0$  para  $x = x^*$ , como era de esperarse.

A continuación se demuestra que el Hessiano de  $H_d$  (4.26) es definido positivo. La matriz Hessiana está dada por (4.27)

$$\nabla^2 H_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

con  $\gamma_2 > 0$ , la función hamiltoniana (4.26) es definida positiva, es decir,  $H_d > 0$  para todo  $x \neq x^*$ .

Ahora se demuestra que la derivada de  $H_d$  es semidefinida positiva, con la finalidad de demostrar estabilidad.

La derivada de  $H_d$  a lo largo de las trayectorias del sistema está dada por

$$\dot{H}d = -2\zeta(x_2 - x_2^*)^2 - r_3\gamma_2^2(x_3 - x_3^*)^2 \quad (4.28)$$

con  $r_3$  y  $\gamma_2 > 0$ . De (4.28) se establece que la función  $\dot{H}d$  es semidefinida negativa,  $\dot{H}d(x^*) \leq 0$ , lo que implica estabilidad.

Por último, se establece estabilidad asintótica empleando el principio de invarianza de La Salle.

De (4.28) se tiene que  $\dot{H}d = 0$  cuando  $x_2 \equiv x_2^*$  y  $x_3 \equiv x_3^*$  para cualquier valor de  $x_1^*$ .

Por otro lado, de la ecuación (4.8) con  $x_2 \equiv x_2^* \Rightarrow \dot{x}_2 = 0$  se cumple que

$$\dot{x}_2 = -(x_1 - x_1^*) - 2\zeta(x_2 - x_2^*) - \frac{x_3^2 - (x_3^*)^2}{3} = 0 \quad (4.29)$$

así  $x_2 \equiv x_2^*$  y  $x_3 \equiv x_3^* \Rightarrow x_1 \equiv x_1^*$

Por lo tanto, el punto de equilibrio es asintóticamente estable.

## 4.4. Ley de Control por el Método Paramétrico

La solución de la ecuación de *matching* por el método paramétrico se basa en fijar parte de la estructura de la función Hamiltoniana deseada  $H_d$ . En este caso se propone mantener sin cambio la parte correspondiente a la energía cinética de (4.14) ya que la velocidad normalizada en el equilibrio es nula tanto para el sistema en lazo abierto como en lazo cerrado. Es decir, para obtener  $H_d$  por el método paramétrico se deja fijo el término  $\frac{(x_2 - x_2^*)^2}{2}$  de la función Hamiltoniana  $H$  (4.14) que a continuación se reproduce (4.30).

$$H = \frac{(x_1 - x_1^*)^2}{2} + \frac{(x_2 - x_2^*)^2}{2} + \frac{x_1(x_3^2 - (x_3^*)^2)}{3} - \frac{2x_1^*x_3^*x_3}{3} \quad (4.30)$$

Por lo que  $H_d$  toma la forma:

$$H_d = \frac{(x_2 - x_2^*)^2}{2} + \varphi(x_1, x_3) \quad (4.31)$$

### 4.4.1. Solución de la Ecuación de *Matching*

En esta subsección se resuelve la ecuación de *matching* (4.32) considerando como base la función Hamiltoniana deseada  $H_d$ , (4.31):

Sea la ecuación de *matching* (4.32).

$$g^\perp(x)((J(x) - R(x))\nabla H) = g^\perp(x)[J_d(x) - R_d(x)]\nabla H_d \quad (4.32)$$

Con matrices de interconexión y de disipación generalizadas  $J_d$  y  $R_d$ .

$$J_d = \begin{bmatrix} 0 & J_{12} & J_{13} \\ -J_{12} & 0 & J_{23} \\ -J_{13} & -J_{23} & 0 \end{bmatrix}; R_d = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Primero se desarrolla la parte derecha de (4.32).

$$(J_d - R_d)\nabla H_d = \begin{bmatrix} -r_1 \frac{\partial H_d}{\partial x_1} + J_{12}(x_2 - x_2^*) + J_{13} \frac{\partial H_d}{\partial x_3} \\ -J_{12} \frac{\partial H_d}{\partial x_1} - r_2(x_2 - x_2^*) + J_{23} \frac{\partial H_d}{\partial x_3} \\ -J_{13} \frac{\partial H_d}{\partial x_1} - J_{23}(x_2 - x_2^*) - r_3 \frac{\partial H_d}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

A continuación se premultiplica (4.34) por  $g^\perp(x)$ .

$$g^\perp(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde  $g^\perp(x)$  un aniquilador izquierdo de  $g(x)$ , es decir,  $g^\perp(x)g(x) = 0$ , por el cual se premultiplica para obtener la parte del sistema sobre la cual no se ejerce acción de control alguna (4.35) y (4.36).

$$x_2 - x_2^* = -r_1 \frac{\partial H_d}{\partial x_1} + J_{12}(x_2 - x_2^*) + J_{13} \frac{\partial H_d}{\partial x_3} \quad (4.35)$$

$$-(x_1 - x_1^*) - 2\zeta(x_2 - x_2^*) - \frac{x_3^2 - (x_3^*)^2}{3} = -J_{12} \frac{\partial H_d}{\partial x_1} - r_2(x_2 - x_2^*) + J_{23} \frac{\partial H_d}{\partial x_3} \quad (4.36)$$

Lo que genera un sistema de ecuaciones en derivadas parciales.

Para resolver el sistema de ecuaciones se observa que en (4.31), la función  $\varphi(x_1, x_3)$  sólo depende de  $x_1$  y  $x_3$ , por lo que  $\frac{\partial H_d}{\partial x_1}$  y  $\frac{\partial H_d}{\partial x_3}$  no generan términos adicionales en la función Hamiltoniana deseada,  $H_d$ , que contengan la variable  $x_2$ . Por lo tanto de (4.35):

$$J_{12}(x_2 - x_2^*) = (x_2 - x_2^*) \Rightarrow J_{12} = 1.$$

Y de (4.36):

$$r_2(x_2 - x_2^*) = -2\zeta(x_2 - x_2^*) \Rightarrow r_2 = 2\zeta$$

Además, en (4.35), con  $J_{12} = 1$  la ecuación queda:

$$-r_1 \frac{\partial H_d}{\partial x_1} + J_{13} \frac{\partial H_d}{\partial x_3} = 0$$

Ya que  $\frac{\partial H_d}{\partial x_1}$  y  $\frac{\partial H_d}{\partial x_3}$  son diferentes de cero, entonces,  $r_1 = 0$  y  $J_{13} = 0$  esto fija parte de la estructura de  $J_d - R_d$

$$J_d - R_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2\zeta & J_{23} \\ 0 & -J_{23} & -r_3 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Para obtener la forma general de  $H_d$  se resuelve la ecuación diferencial parcial resultante (4.38).

$$-\frac{\partial H_d}{\partial x_1} - 2\zeta(x_2 - x_2^*) + J_{23} \frac{\partial H_d}{\partial x_3} = -(x_1 - x_1^*) - 2\zeta(x_2 - x_2^*) - \frac{x_3^2 - (x_3^*)^2}{3} \quad (4.38)$$

De donde se obtiene (4.39):

$$H_d = \frac{(x_1 - x_1^*)^2}{2} + \frac{(x_2 - x_2^*)^2}{2} + \frac{x_1(x_3 - x_3^*)}{3} + \frac{J_{23}(x_1^*)^2}{3} \left( \frac{J_{23}x_1^*}{3} + x_3 \right) + \varphi(x_3 + J_{23}x_1) \quad (4.39)$$

La función (4.31) evaluada en el punto de equilibrio debe ser cero, evaluando obtenemos:

$$H_d(x^*) = \frac{J_{23}(x_1^*)^2}{3} \left( \frac{J_{23}x_1^*}{3} + x_3 \right) + \varphi(x_3 + J_{23}x_1) = 0 \quad (4.40)$$

Sin embargo, se observa que (4.40) no puede ser cero a menos que  $J_{23} = 0$ , con esto (4.31) toma la forma (4.41):

$$H_d = \frac{(x_1 - x_1^*)^2}{2} + \frac{(x_2 - x_2^*)^2}{2} + \frac{x_1(x_3 - x_3^*)}{3} + \varphi(x_3) \quad (4.41)$$

donde:  $\varphi(x_3)$  es una función que se elegirá con el fin de que la función Hamiltoniana  $H_d$  tenga un mínimo en el punto de equilibrio deseado  $x_* = \operatorname{argmin} H_d(x)$ . La estructura de  $J_d - R_d$  queda completamente fija (4.42):

$$J_d - R_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2\zeta & 0 \\ 0 & 0 & -r_3 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Se propone la siguiente función  $\varphi(x_3)$  con el fin de que la función Hamiltoniana  $H_d$  tenga el punto de equilibrio deseado en  $x_* = \operatorname{argmin} H_d(x)$ :

$$\varphi(x_3) = \frac{k_p(x_3 - x_3^*)^2}{2} - \frac{2x_1^*x_3^*(x_3 - x_3^*)}{3} \quad (4.43)$$

donde la constante  $k_p > 0$ .

La estructura final de la función Hamiltoniana deseada resultante en lazo cerrado por el método paramétrico tiene la siguiente estructura (4.44):

$$H_d = \frac{(x_1 - x_1^*)^2}{2} + \frac{(x_2 - x_2^*)^2}{2} + \frac{x_1(x_3 - x_3^*)}{3} + \frac{k_p(x_3 - x_3^*)^2}{2} - \frac{2x_1^*x_3^*(x_3 - x_3^*)}{3} \quad (4.44)$$

Por último, sólo resta obtener la ley de control  $\beta(x)$  (4.45) a partir de (4.11), (4.42) y (4.44)

Con  $g(x)^\dagger = (g^\perp(x)g(x))^{-1}g^\perp(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{3r} \end{bmatrix}$  la pseudoinversa de  $g(x)$ .

$$u = g(x)^\dagger ([J_d(x) - R_d(x)]\nabla H_d - f(x)) + u_* \quad (4.45)$$

Esto genera la ecuación corresponde a la parte actuada y de ella se obtiene la ley de control.

$$u = \frac{3r}{2} \left( -r_3 \left( k_p(x_3 - x_3^*) + \frac{2(x_1x_3 - x_1^*x_3^*)}{3} \right) + \frac{x_1x_3 - x_1^*x_3^*}{r} \right) + u_* \quad (4.46)$$

#### 4.4.2. Análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov

En esta subsección se establece estabilidad en el sentido de Lyapunov del punto de equilibrio deseado  $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$  utilizando la función Hamiltoniana  $H_d$ , obtenida de resolver la ecuación de *matching* por el método paramétrico (4.44), como una función de Lyapunov.

Sea la función Hamiltoniana,  $H_d$ , (4.44) una función de Lyapunov

$$H_d = \frac{(x_1 - x_1^*)^2}{2} + \frac{(x_2 - x_2^*)^2}{2} + \frac{x_1(x_3^2 - (x_3^*)^2)}{3} + \frac{k_p(x_3 - x_3^*)^2}{2} - \frac{2x_1^*x_3^*(x_3 - x_3^*)}{3} \quad (4.47)$$

Primero se evalúa  $H_d$  en el punto de equilibrio deseado  $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ . Es directo ver en (4.47) que se cumple  $H_d(x_*) = 0$ , como era de esperarse.

A continuación se demuestra que la matriz Hessiana de  $H_d$  es definida positiva localmente.

La matriz Hessiana evaluada en el punto de equilibrio:

$$\nabla^2 H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2x_3}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2x_3}{3} & 0 & \frac{2x_1}{3} + k_p \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

Cuyos menores son  $M_1 = 1$ ,  $M_2 = 1$  y  $M_3 = \frac{2x_1}{3} - \frac{4x_3^2}{9} + k_p$ , este último es mayor que cero cuando  $k_p > \frac{2x_1}{3} - \frac{4x_3^2}{9} + k_p$ . Evaluando el Hessiano (4.48) en el punto de equilibrio

$x^* = (x_1^*, 0, \sqrt{3(1-x_1^*)})$  resulta que  $k_p \geq \frac{4}{3} - 2x_1^*$ . Por lo tanto,  $H_d > 0$  para todo  $k_p > 0$ .

A continuación se demuestra que la derivada de  $H_d$  es semidefinida positiva y con ello estabilidad del punto de equilibrio.

La derivada de  $H_d$  a lo largo de las trayectorias del sistema es

$$\dot{H}d = -r_3 \left( \frac{2(x_1x_3 - x_1^*x_3^*)}{3} + k_p(x_3 - x_3^*) \right)^2 - 2\zeta(x_2 - x_2^*)^2 \quad (4.49)$$

Es claro que la función  $\dot{H}d$  es semidefinida negativa  $\dot{H}d \leq 0$ , lo que implica estabilidad.

Finalmente se establece estabilidad asintótica empleando el principio de invarianza de La Salle.

De (4.49) se tiene que  $\dot{H}d = 0$  cuando cada sumando es cero, ya que ambos son cuadrados, así,  $2\zeta(x_2 - x_2^*)^2 = 0 \Rightarrow x_2 \equiv x_2^*$

Por otro lado, de (4.8) con  $x_2 \equiv x_2^*$

$$\dot{x}_2 = -(x_1 - x_1^*) - 2\zeta(x_2 - x_2^*) - \frac{x_3^2 - (x_3^*)^2}{3} \Rightarrow$$

$$-(x_1 - x_1^*) - \frac{x_3^2 - (x_3^*)^2}{3} = 0 \quad (4.50)$$

De (4.49) con  $x_2 \equiv x_2^*$ , se tiene que

$$\dot{H}d = -r_3 \left( \frac{2(x_1x_3 - x_1^*x_3^*)}{3} + k_p(x_3 - x_3^*) \right)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{2(x_1x_3 - x_1^*x_3^*)}{3} + k_p(x_3 - x_3^*) = 0 \quad (4.51)$$

Con las ecuaciones (4.50) y (4.51) se forma un sistema de ecuaciones cuya solución real es  $x_1 \equiv x_1^*$  y  $x_3 \equiv x_3^*$ . Las otras dos soluciones resultan complejas conjugadas y se descartan.

Por lo tanto queda demostrado que el punto de equilibrio es asintóticamente estable.



# Capítulo 5

## Simulación Numérica

### 5.1. Introducción

En este capítulo se presentan simulaciones numéricas con el fin de visualizar el desempeño de las leyes de control desarrolladas en el Capítulo 4 basándose en la técnica IDA-PBC. En la sección 5.2 se presentan las simulaciones numéricas referentes a la ley de control obtenida resolviendo la ecuación de *matching* por el método algebraico y en la sección 5.3 las referentes a la ley de control obtenida de resolver la ecuación de *matching* por el método paramétrico. Finalmente, en la sección 5.4 se evalúa el desempeño de las leyes de control ante la presencia de incertidumbre paramétrica modificando los valores nominales de los parámetros del actuador electrostático. El análisis del comportamiento de los controladores ante la incertidumbre paramétrica es de vital importancia ya que cuando se fabrica un MEMS aún bajo un mismo proceso, con el mismo tipo de materiales y la misma geometría los parámetros varían considerablemente [12].

### 5.2. Ley de Control por Método Algebraico

En esta sección se presentan simulaciones numéricas a través de las cuales se visualiza el desempeño de la ley de control obtenida de resolver la ecuación de *matching* por el método algebraico (5.1).

$$u = \frac{3r}{2} \left( (x_2 - x_2^*) \left( \frac{x_3 + x_3^*}{3\gamma_2} \right) - r_3\gamma_2(x_3 - x_3^*) + \frac{x_1x_3 - x_1^*x_3^*}{r} \right) + u_* \quad (5.1)$$

se consideran  $r_3 = 1$  y  $\gamma_2 = 1$ .

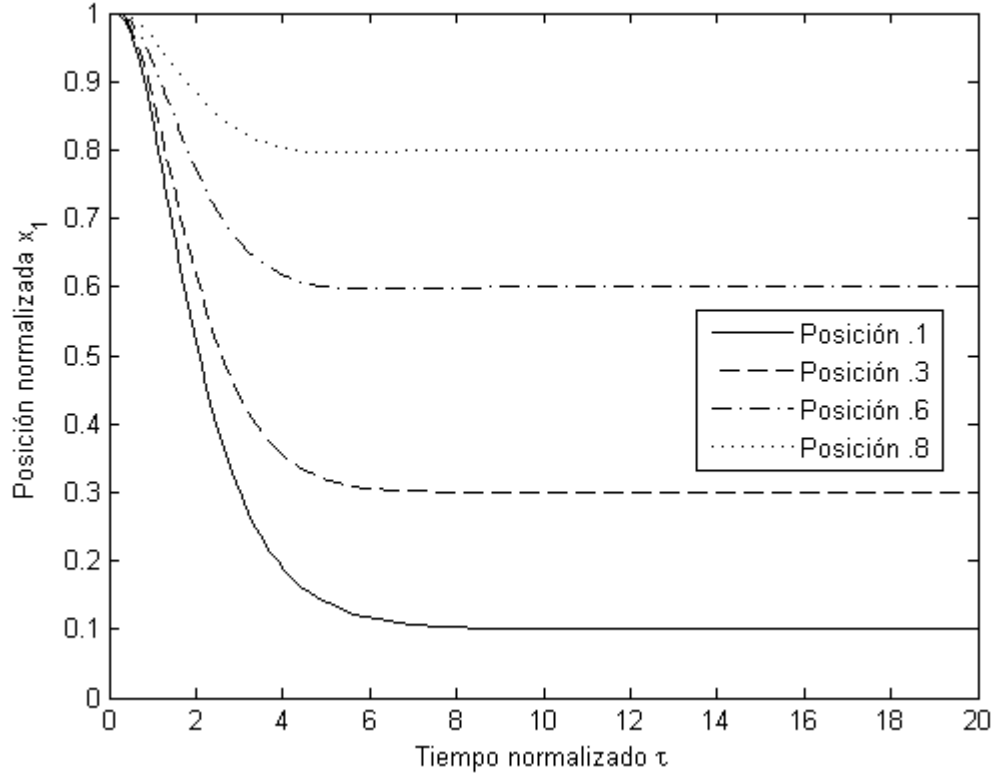


Figura 5.1: Posición del Electrodo Superior

En la Figura 5.1 se muestra el comportamiento de la posición normalizada  $x_1$  del electrodo superior para diferentes valores deseados  $x_1^*$ . Se consideran las mismas condiciones iniciales  $x(0) = (1, 0, 0)$  y los mismos valores de los parámetros  $r_3$  y  $\gamma_2$  en cada variación de la posición deseada  $x_1^*$ . Como se puede apreciar con la ley de control obtenida de resolver la ecuación de *matching* por el método algebraico (5.1) se logra regulación para posiciones mayores y menores a la posición de *pull-in*  $x_{pull-in} = \frac{2}{3}$ .

En el Capítulo 2 se determinó que en lazo abierto se logra regulación sólo para valores de la posición normalizada  $x_1$  ubicados en el intervalo  $\frac{2}{3} \leq x_1 \leq 1$ . En lazo cerrado se logra regulación de la posición deseada normalizada  $x_1^*$  en el intervalo  $1 \geq x_1^* \geq x_{1min}$ . Donde  $x_{1min}$  es el espesor de la película del aislante depositado sobre el electrodo inferior con el fin de evitar el contacto directo entre electrodos que produciría un corto circuito.

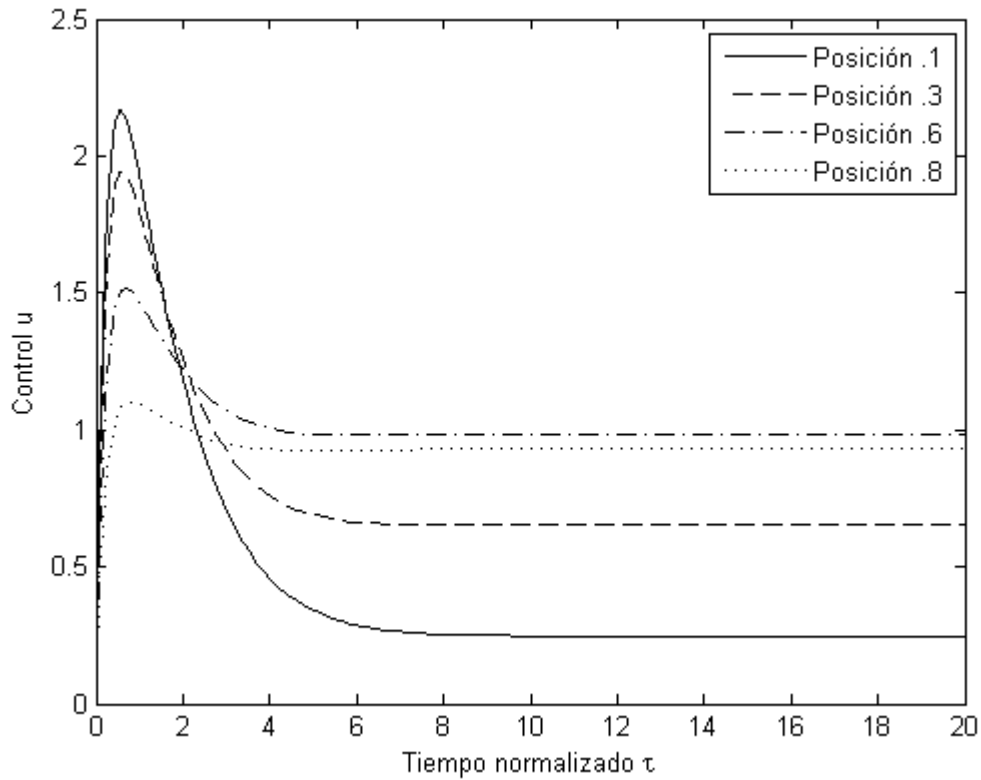


Figura 5.2: Ley de Control. Método Algebraico

En la Figura 5.2 se muestra el comportamiento de la señal de control requerida para estabilizar el electrodo movable en las posiciones normalizadas deseadas  $x_1^*$  propuestas.

Se observa que los valores de voltaje máximos requeridos de la fuente de suministro  $u$  aumentan a medida que se busca regulación a una distancia más próxima entre electrodos.

### 5.2.1. Superficies y Curvas de Nivel $H_d$ Método Algebraico

En esta subsección se presentan superficies y curvas de nivel de la función Hamiltoniana  $H_d$  obtenida de resolver la ecuación de *matching* por el método algebraico (4.15) que a continuación se reproduce

$$H_d(x_1, x_2, x_3) = \frac{(x_1 - x_1^*)^2}{2} + \frac{(x_2 - x_2^*)^2}{2} + \frac{\gamma_2(x_3 - x_3^*)^2}{2} \quad (5.2)$$

El propósito de mostrar estas gráficas es ilustrar de manera numérica que la función Hamiltoniana  $H_d$  obtenida de resolver la ecuación de *matching* por el método algebraico es definitida positiva y que tiene un punto de equilibrio en  $x_* = \operatorname{argmin} H_d(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ . En las simulaciones los valores de los parámetros normalizados  $\varsigma = 7.255 \times 10^{-1}$  y  $r = 9.318 \times 10^{-3}$  se calculan con base en los parámetros dimensionales nominales de la Tabla 2.1 y el valor de la constante  $\gamma_2 = 1$  utilizada en el controlador (5.1). El punto de equilibrio elegido con fines de simulación es  $x_* = \operatorname{argmin} H_d(0.1, 0, 1.643)$ .

En la Figura 5.3 se muestra una la superficie de nivel de (5.2) con  $x_3 = x_3^* = 1.643$  la cual debe tener un mínimo en  $x_*(x_1^* = 0.1, x_2^* = 0)$ . En la Figura 5.4 se aprecia en el plano  $x_1x_2$  que con  $x_3^* = 1.643$  el punto  $x_*(x_1^* = 0.1, x_2^* = 0)$  efectivamente es el punto mínimo deseado.

En la Figura 5.5 se muestra una la superficie de nivel de (5.2) con  $x_1 = x_1^* = 0.1$  la cual debe tener un mínimo en  $x_*(x_2^* = 0, x_3^* = 1.643)$ . En la Figura 5.6 se aprecia en el plano  $x_2x_3$  que con  $x_1^* = 0.1$  el punto  $x_*(x_2^* = 0, x_3^* = 1.643)$  efectivamente es el punto mínimo deseado.

En la Figura 5.7 se muestra una la superficie de nivel de (5.2) con  $x_2 = x_2^* = 0$  la cual debe tener un mínimo en  $x_*(x_1^* = 0.1, x_3^* = 1.643)$ . En la Figura 5.8 se aprecia en el plano  $x_1x_3$  que con  $x_2^* = 0$  el punto  $x_*(x_1^* = 0.1, x_3^* = 1.643)$  efectivamente es el punto mínimo deseado.

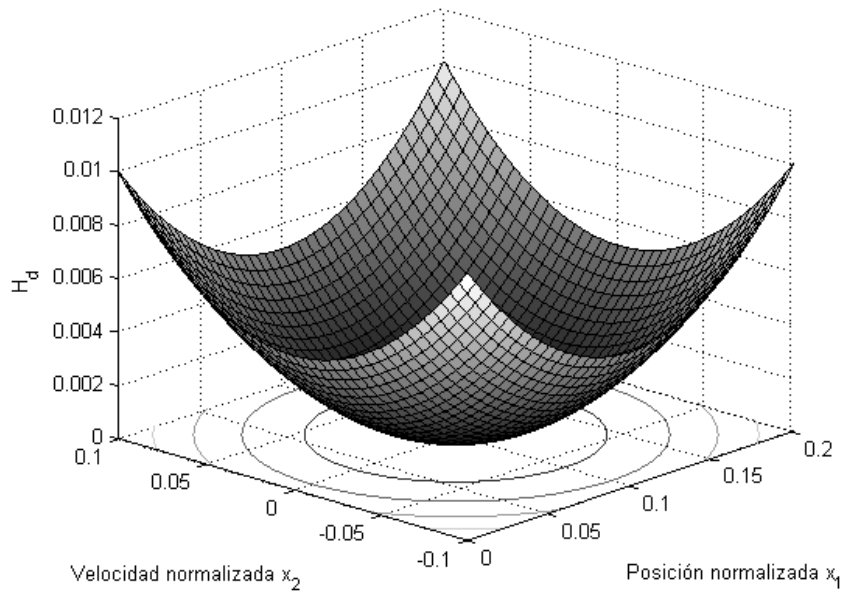


Figura 5.3: Superficie de nivel para  $x_3 = x_3^* = 1.643$

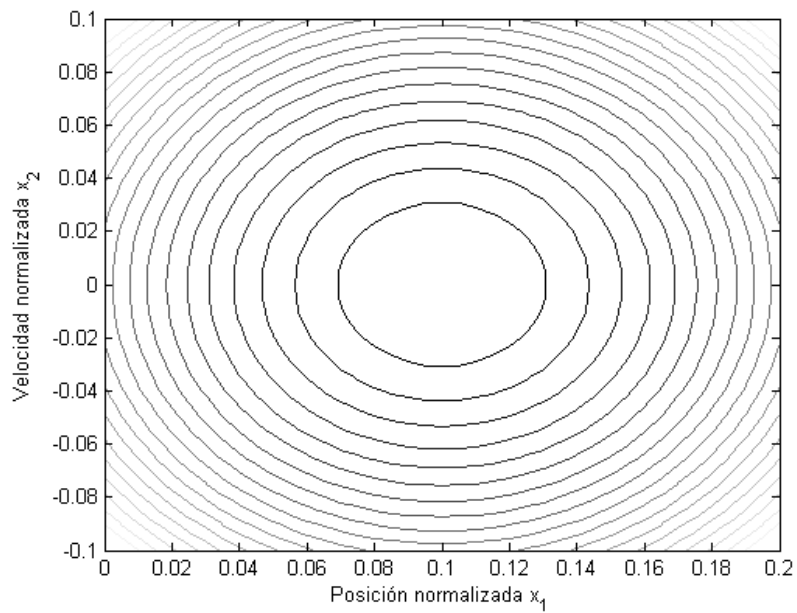


Figura 5.4: Curvas de nivel en el plano  $x_1x_2$  con origen en  $x_*(x_1^* = 0.1, x_2^* = 0)$

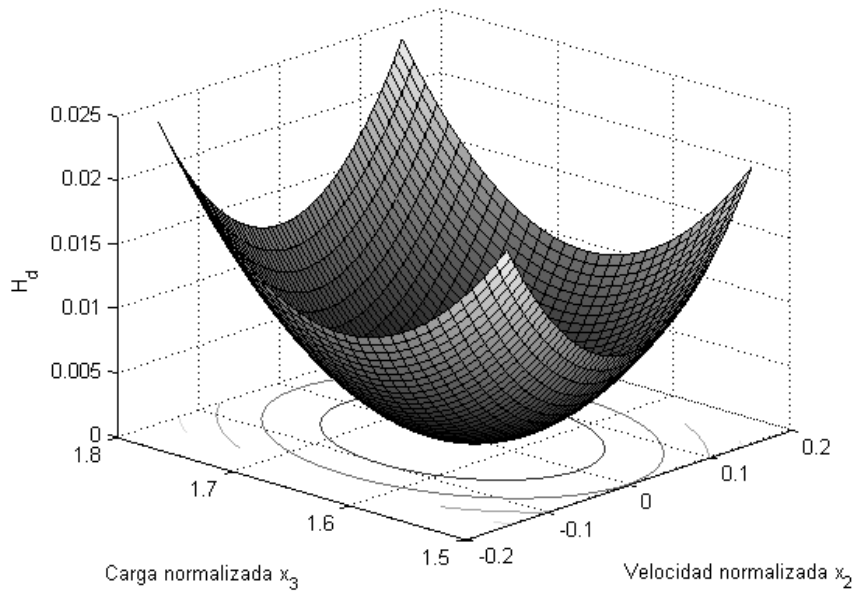


Figura 5.5: Superficie de nivel para  $x_1 = x_1^* = 0.1$

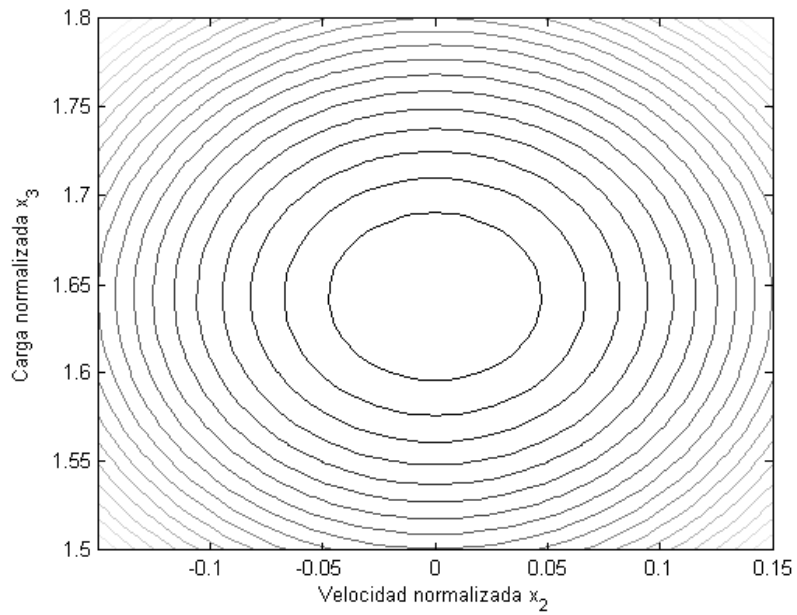


Figura 5.6: Curvas de nivel en el plano  $x_2x_3$  con origen en  $x_*(x_2^* = 0, x_3^* = 1.643)$

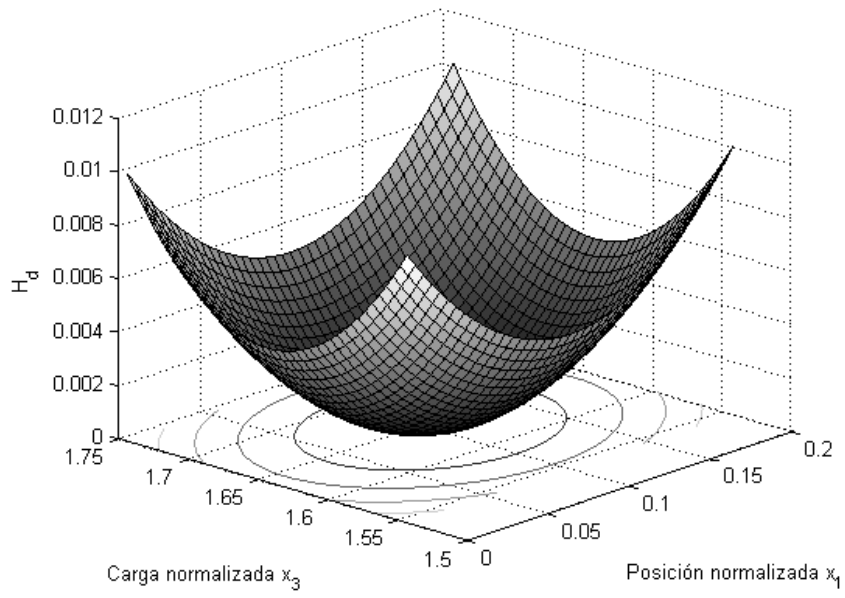


Figura 5.7: Superficie de nivel para  $x_2 = x_2^* = 0$

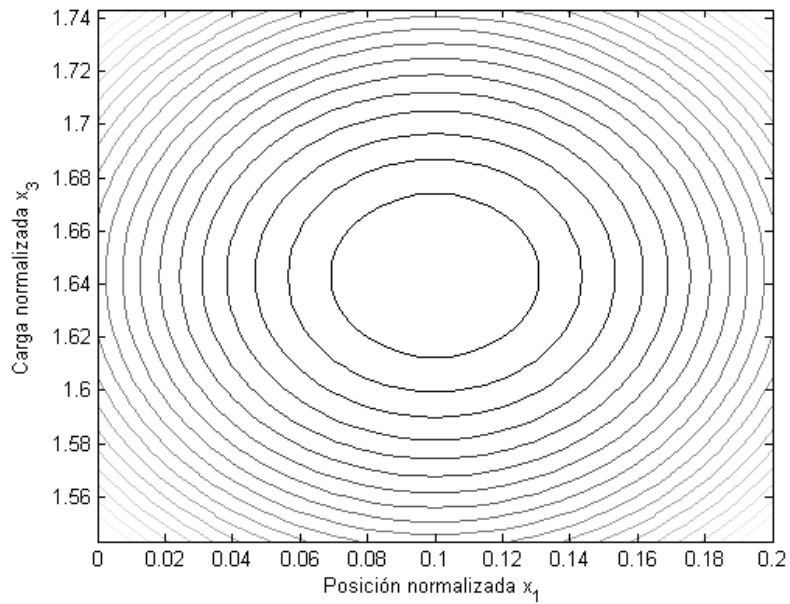


Figura 5.8: Curvas de nivel en el plano  $x_1x_3$  con origen en  $x_*(x_1^* = 0.1, x_3^* = 1.643)$

### 5.3. Ley de Control por Método Paramétrico

En esta sección se presentan las simulaciones numéricas referentes al controlador obtenido de resolver la ecuación de *matching* por el método paramétrico. El análisis se lleva a cabo siguiendo los pasos realizados en la sección 5.2.

La ley de control obtenida de resolver la ecuación *matching* por el método paramétrico está dada por (5.3).

$$u = \frac{3r}{2} \left( -r_3 \left( k_p(x_3 - x_3^*) + \frac{2(x_1x_3 - x_1^*x_3^*)}{3} \right) + \frac{x_1x_3 - x_1^*x_3^*}{r} \right) + u_* \quad (5.3)$$

se considera  $r_3 = 3$  y  $k_p = 10$ .

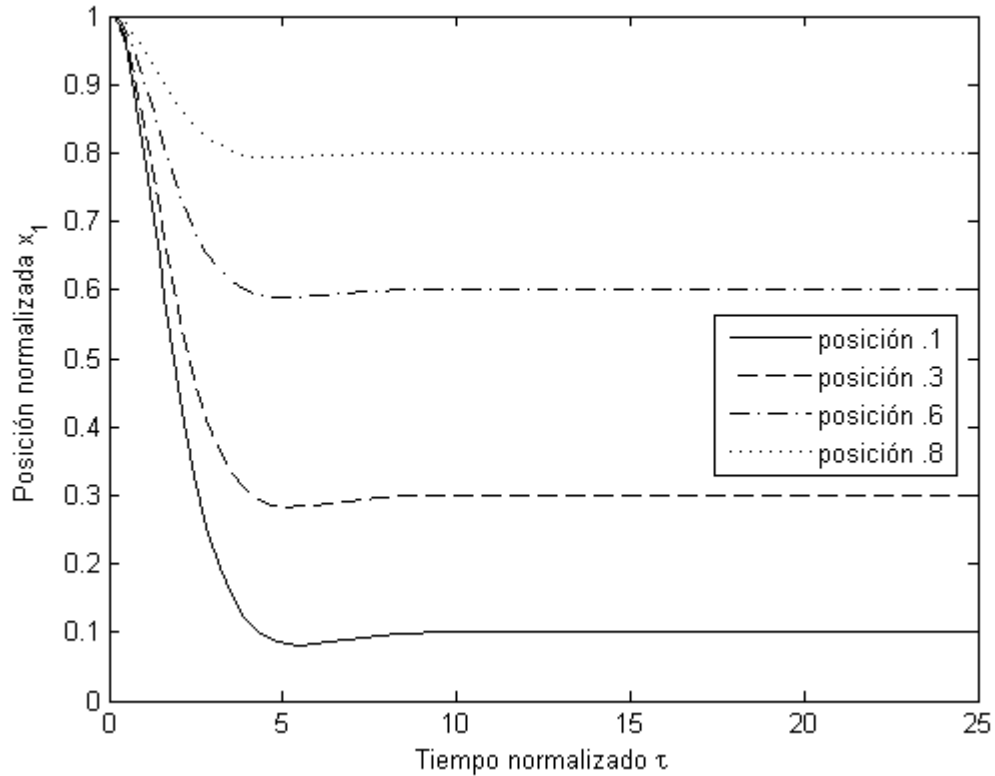


Figura 5.9: Posición del Electrodo Superior



En la Figura 5.9 se muestra el comportamiento de la posición normalizada  $x_1$  del electrodo superior para diferentes valores deseados  $x_1 = x_1^*$ . Se consideran las mismas condiciones iniciales  $x(0) = (1, 0, 0)$  en cada variación de la posición deseada  $x_1^*$ . Asimismo, se observa que con la ley de control obtenida de resolver la ecuación de *matching* por el método paramétrico (5.3) efectivamente se consigue regulación de la posición del electrodo superior en posiciones deseadas  $x_1^*$  por encima y por debajo de la posición de *pull-in*  $x_{pull-in} = \frac{2}{3}$ .

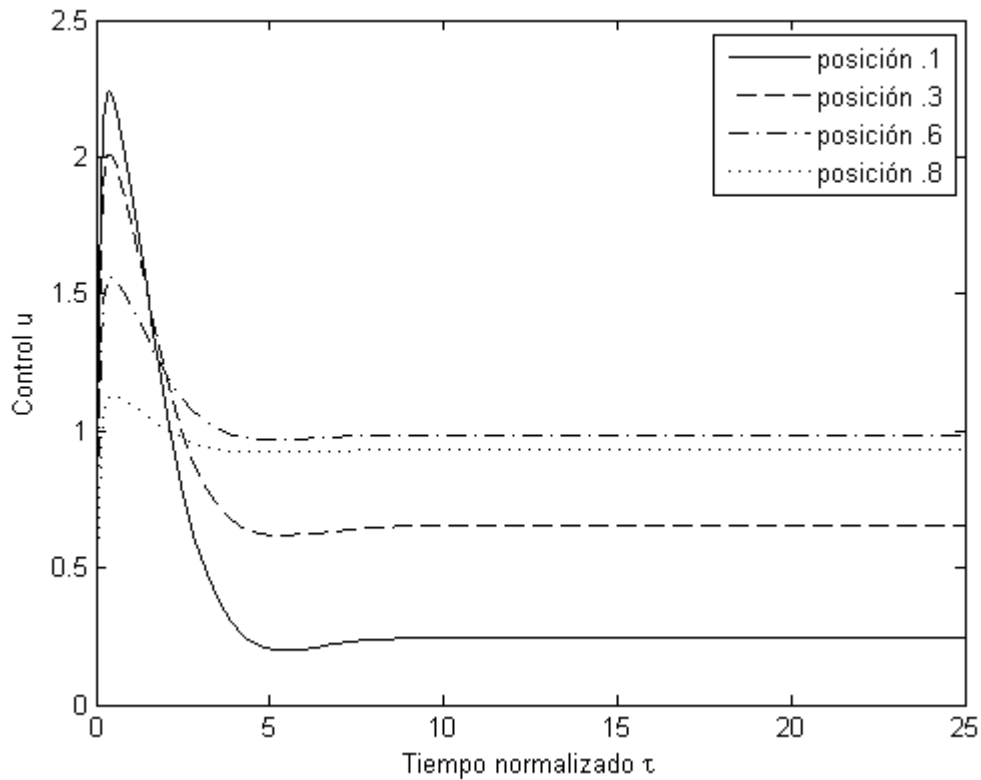


Figura 5.10: Ley de Control. Método Paramétrico

En la Figura 5.10 se muestra el comportamiento de la señal de control requerida para equilibrar el electrodo móvil en las posiciones deseadas  $x_1^*$  propuestas.

### 5.3.1. Superficies y Curvas de Nivel $H_d$ Método Paramétrico

En esta subsección al igual que en la 5.3.1 se presentan superficies y curvas de nivel de la función Hamiltoniana  $H_d$  (5.4) obtenida de resolver la ecuación de *matching* por el método paramétrico. El objetivo de estas simulaciones es demostrar que  $H_d$  efectivamente es positiva definida y que tiene un mínimo en el punto de equilibrio deseado. Con fines de simulación se propone el punto de equilibrio deseado  $x_*(0.1, 0, 1.643)$

$$H_d = \frac{(x_1 - x_1^*)^2}{2} + \frac{(x_2 - x_2^*)^2}{2} + \frac{x_1(x_3 - x_3^*)}{3} + \frac{k_p(x_3 - x_3^*)^2}{2} - \frac{2x_1^*x_3^*(x_3 - x_3^*)}{3} \quad (5.4)$$

En la Figura 5.11 se muestra una la superficie de nivel de (5.4) con  $x_3 = x_3^* = 1.643$  la cual debe tener un mínimo en  $x_*(x_1^* = 0.1, x_2^* = 0)$ . En la Figura 5.12 se puede ver en el plano  $x_1x_2$  que con  $x_3^* = 1.643$  el punto  $x_*(x_1^* = 0.1, x_2^* = 0)$  efectivamente es el punto mínimo deseado.

En la Figura 5.13 se muestra una la superficie de nivel de (5.4) con  $x_1 = x_1^* = 0.1$  la cual debe tener un mínimo en  $x_*(x_2^* = 0, x_3^* = 1.643)$ . En la Figura 5.14 se puede ver en el plano  $x_2x_3$  que con  $x_1^* = 0.1$  el punto  $x_*(x_2^* = 0, x_3^* = 1.643)$  efectivamente es el punto mínimo deseado.

En la Figura 5.15 se muestra una la superficie de nivel de (5.4) con  $x_2 = x_2^* = 0$  la cual debe tener un mínimo en  $x_*(x_1^* = 0.1, x_3^* = 1.643)$ . En la Figura 5.16 se puede ver en el plano  $x_1x_3$  que con  $x_2^* = 0$  el punto  $x_*(x_1^* = 0.1, x_3^* = 1.643)$  efectivamente es el punto mínimo deseado. Como detalle adicional se señala que el eje mayor de las elipses de nivel está rotado, esto se debe a los términos cruzados  $x_1x_3$  en la función Hamiltoniana  $H_d$  (5.4).

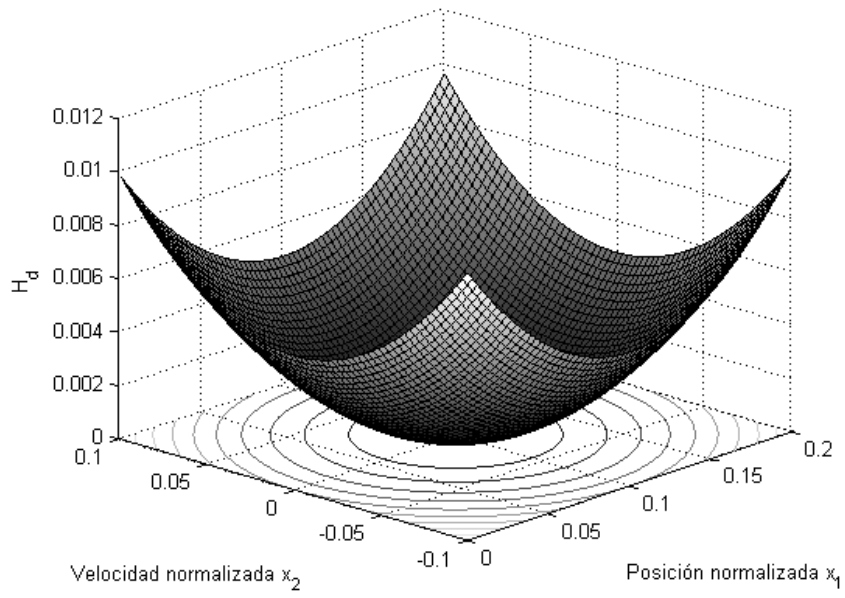


Figura 5.11: Superficie de nivel para  $x_3 = x_3^* = 1.643$

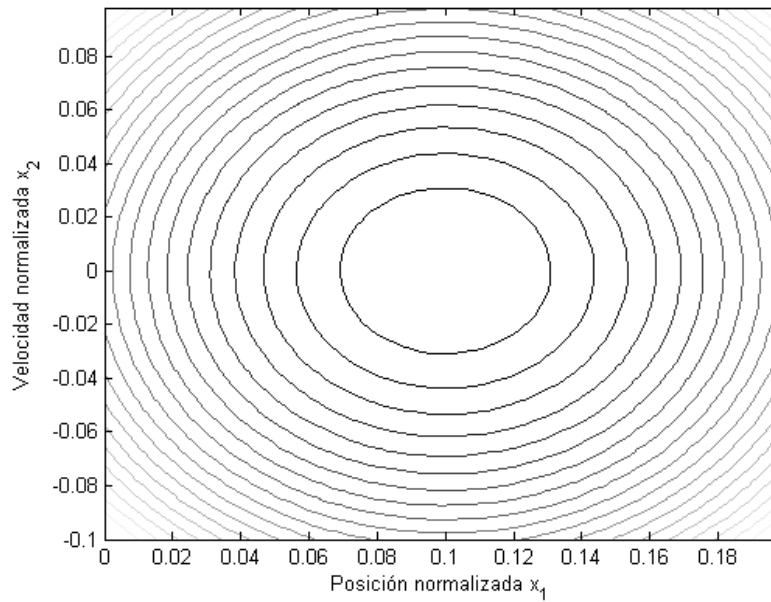


Figura 5.12: Curvas de nivel en el plano  $x_1x_2$  con origen en  $x_*(x_1^* = 0.1, x_2^* = 0)$

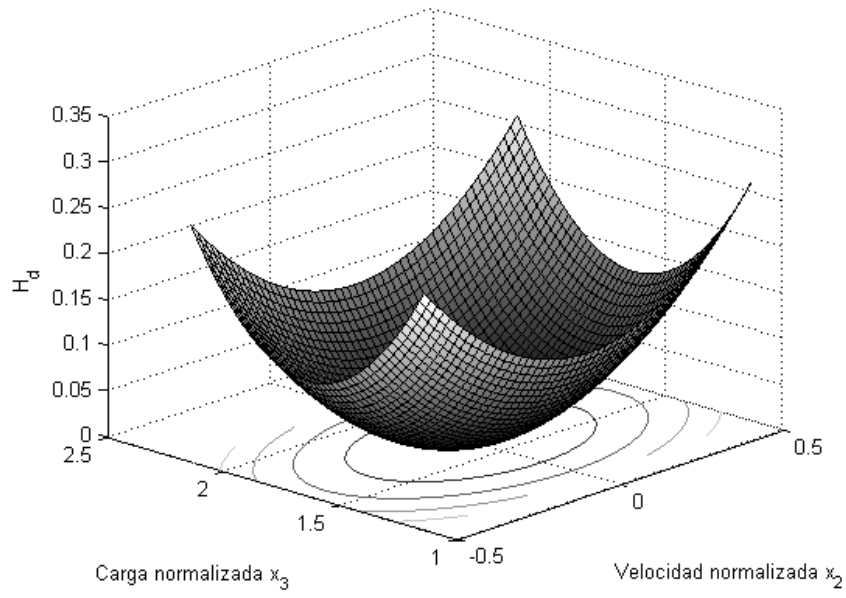


Figura 5.13: Superficie de nivel para  $x_1 = x_1^* = 0.1$

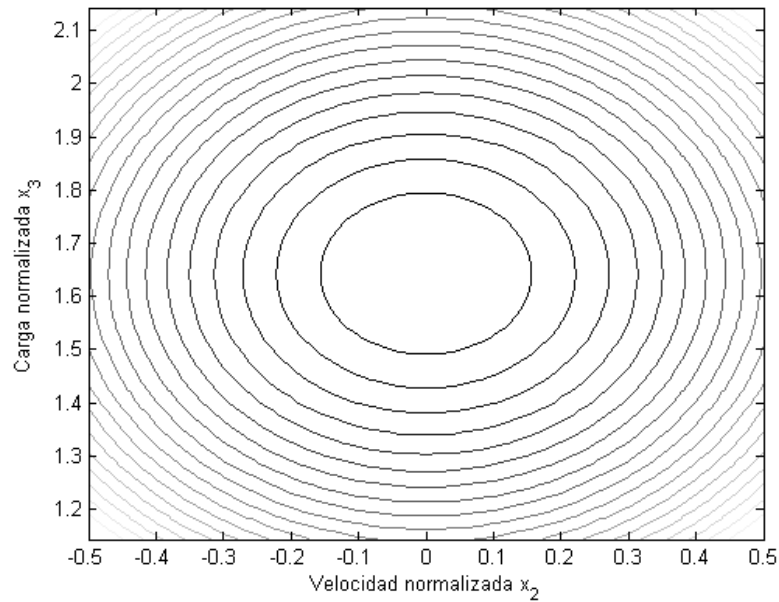


Figura 5.14: Curvas de nivel en el plano  $x_2x_3$  con origen en  $x_*(x_2^* = 0, x_3^* = 1.643)$

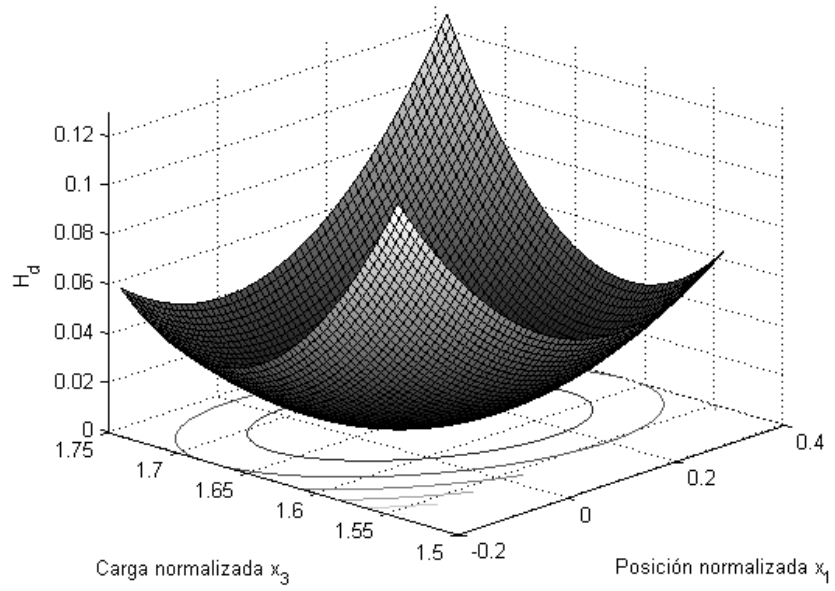


Figura 5.15: Superficie de nivel para  $x_2 = x_2^* = 0$

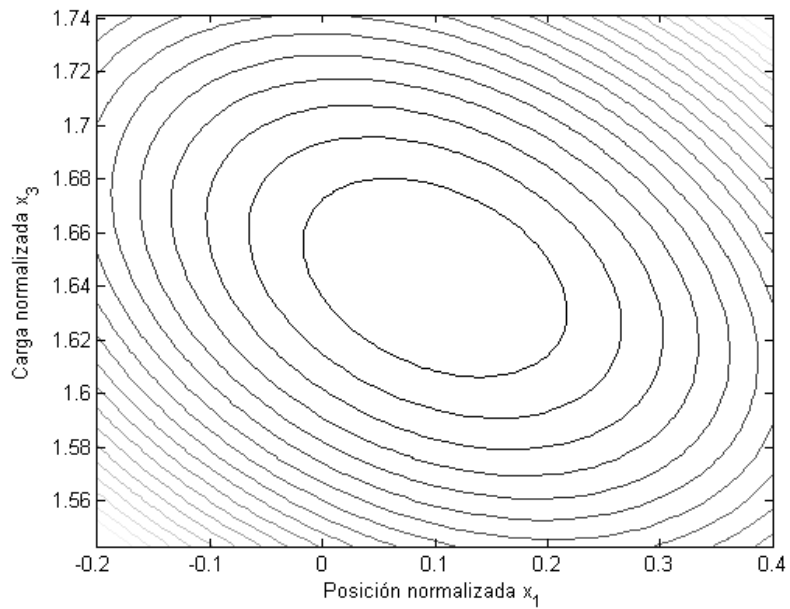


Figura 5.16: Curvas de nivel en el plano  $x_1x_3$  con origen en  $x_*(x_1^* = 0.1, x_3^* = 1.643)$

## 5.4. Desempeño de los Controladores a Variaciones de los Parámetros

Uno de los aspectos de mayor peso a considerar en el diseño de un MEMS es el proceso de fabricación. En la mayoría de los casos el diseño se basa en cierto proceso de fabricación que reduce la libertad de elegir el tipo de materiales y la geometría del dispositivo. La incertidumbre paramétrica entre MEMS fabricadas en un mismo proceso con el mismo tipo de materiales y misma geometría, es considerable. Por lo que resulta de vital importancia analizar el comportamiento de los controladores a variaciones paramétricas.

En esta sección se evalúa el desempeño de los controladores a variaciones de los parámetros normalizados nominales  $\zeta$  y  $r$  obtenidos a partir de los parámetros dimensionales de la Tabla 2.1. En la subsección 5.4.1 se presentan simulaciones numéricas para evaluar el desempeño del controlador (5.1) a variaciones de los parámetros normalizados. De igual manera en la subsección 5.4.2 se evalúa el desempeño del controlador (5.3) a variaciones de los parámetros normalizados. En ambos casos se regula la posición normalizada  $x_1$  en un valor deseado  $x_1^*$  mayor y otro menor de la posición de *pull-in*  $x_{pull-in} = \frac{2}{3}$ .

### 5.4.1. Respuesta del Controlador Método Algebraico

En la Figura 5.17 se muestra la evolución de la posición normalizada para un valor deseado mayor al de *pull-in*  $x_1^* = 0.8$  y en la Figura 5.19 para un valor deseado menor al de *pull-in*  $x_1^* = 0.2$ . En ambas gráficas la señal continua representa el comportamiento de la posición utilizando los parámetros normalizados nominales  $\zeta = 7.255 \times 10^{-1}$  y  $r = 9.318 \times 10^{-3}$  del actuador electrostático basados en los valores de la Tabla 2.1. La señal punteada describe el comportamiento de la posición para valores de mitad de los parámetros nominales  $\frac{1}{2}\zeta$  y  $\frac{1}{2}r$  y la señal segmentada se describe el comportamiento de la posición con valores de los parámetros del doble de los nominales  $2\zeta$  y  $2r$ .

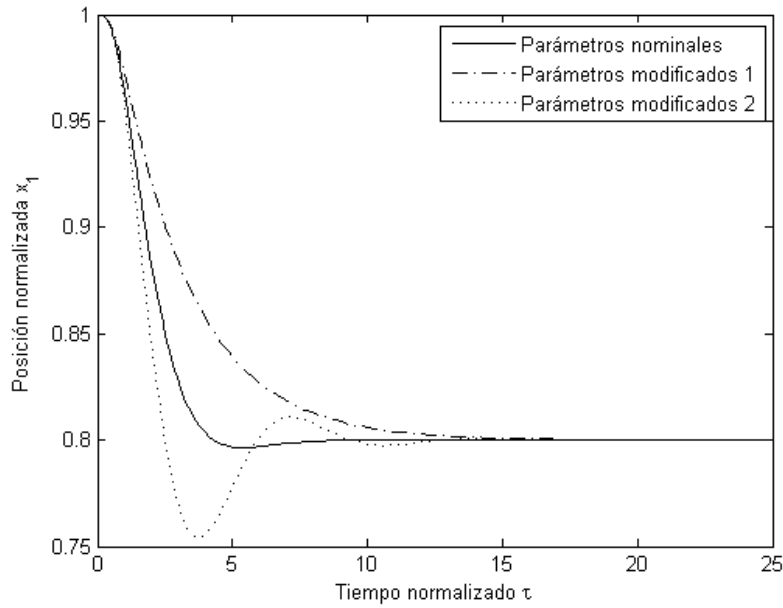


Figura 5.17: Posición normalizada deseada  $x_1^* = 0.8$  para  $(\frac{1}{2}\zeta, \frac{1}{2}r)$  y  $(2\zeta, 2r)$

En la Figura 5.18 se presentan las señales de control requeridas para estabilizar al electrodo movable en la posición deseada  $x_1^* = 0.8$  y en la Figura 5.20 para  $x_1^* = 0.2$ . Al igual que para las señales de posición; la señal continua corresponde al modelo con parámetros nominales  $\zeta$  y  $r$ , la señal punteada para parámetros del 50 por ciento de los nominales  $(\frac{1}{2}\zeta, \frac{1}{2}r)$  y la señal segmentada para parámetros del 200 por ciento de los nominales  $(2\zeta, 2r)$ .

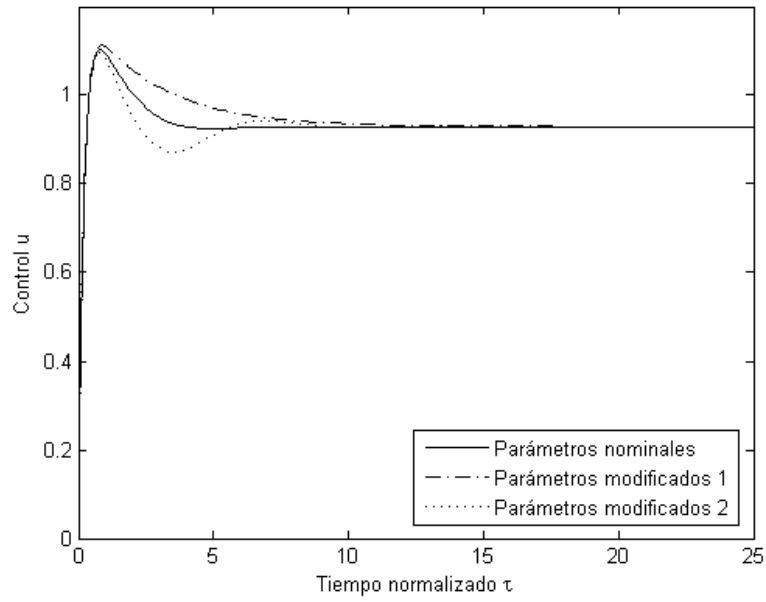


Figura 5.18: Desempeño del controlador por método algebraico para  $x_1^* = 0.8$

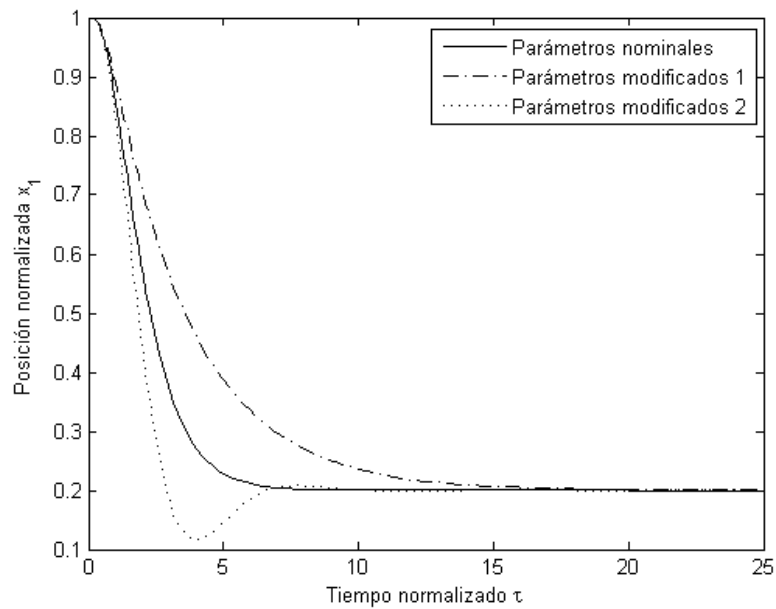


Figura 5.19: Posición normalizada deseada  $x_1^* = 0.2$  para  $(\frac{1}{2}\zeta, \frac{1}{2}r)$  y  $(2\zeta, 2r)$



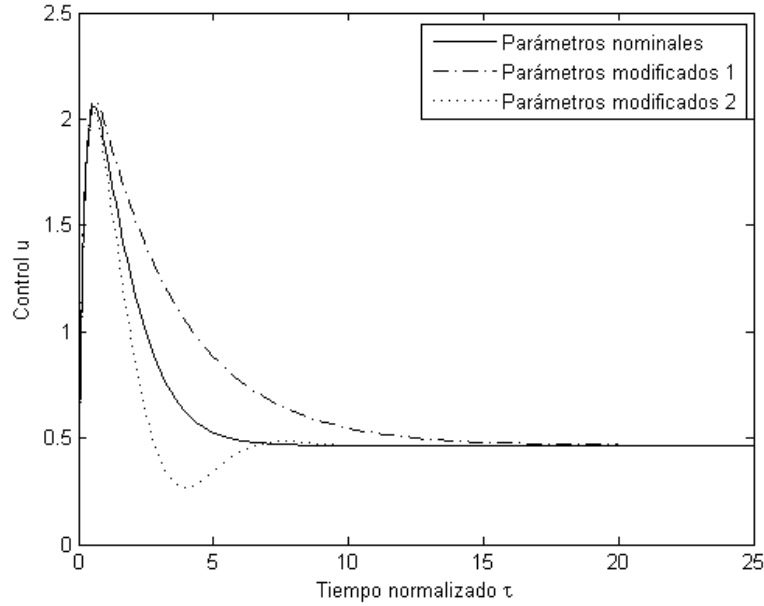


Figura 5.20: Desempeño del controlador por método algebraico para  $x_1^* = 0.2$

### 5.4.2. Respuesta del Controlador Método Paramétrico

Ahora se evaluará el desempeño del controlador obtenido de resolver la ecuación de *matching* por el método paramétrico a variaciones en los parámetros normalizados nominales del dispositivo MEMS. Al igual que en caso del controlador algebraico se consideran los casos de controlar la posición a un valor deseado mayor  $x_1^* = 0.8$  y otro menor  $x_1^* = 0.2$  al de la posición de *pull-in*  $x_1 = \frac{2}{3}$ . Las variaciones de los parámetros consideradas son del doble  $2\zeta$  y  $2r$  y la mitad  $\frac{1}{2}\zeta$  y  $\frac{1}{2}r$  de los parámetros nominales normalizados  $\zeta = 7.255 \times 10^{-1}$  y  $r = 9.318 \times 10^{-3}$ .

En la Figura 5.21 se muestra la evolución de la posición normalizada para un valor deseado mayor al de *pull-in*  $x_1^* = 0.8$  y en la Figura 5.23 para un valor deseado menor al de *pull-in*  $x_1^* = 0.2$ . En ambas gráficas la señal continua representa el comportamiento de la posición utilizando los parámetros normalizados nominales  $\zeta$  y  $r$  del actuador

electrostático basados en los valores de la Tabla 2.1. La señal punteada describe el comportamiento de la posición para valores de mitad de los parámetros nominales  $\frac{1}{2}\zeta$  y  $\frac{1}{2}r$  y la señal segmentada se describe el comportamiento de la posición con valores de los parámetros del doble de los nominales  $2\zeta$  y  $2r$ .

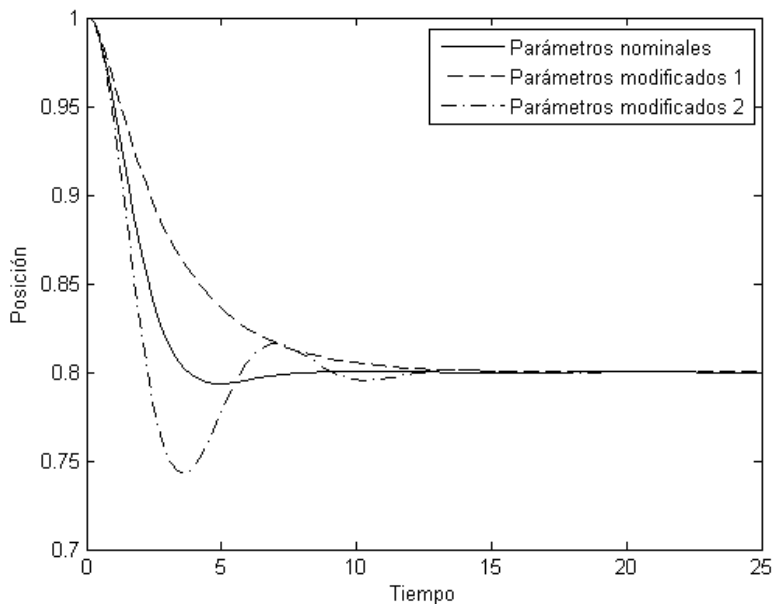


Figura 5.21: Posición normalizada deseada  $x_1^* = 0.8$  para  $(\frac{1}{2}\zeta, \frac{1}{2}r)$  y  $(2\zeta, 2r)$

En la Figura 5.22 se presentan las señales de control requeridas para estabilizar al electrodo móvil en la posición deseada  $x_1^* = 0.8$  y en la Figura 5.24 para  $x_1^* = 0.2$ . Al igual que para las señales de posición; la señal continua corresponde al modelo con parámetros nominales  $\zeta$  y  $r$ , la señal punteada para parámetros del 50 por ciento de los nominales  $(\frac{1}{2}\zeta, \frac{1}{2}r)$  y la señal segmentada para parámetros del 200 por ciento de los nominales  $(2\zeta, 2r)$ .

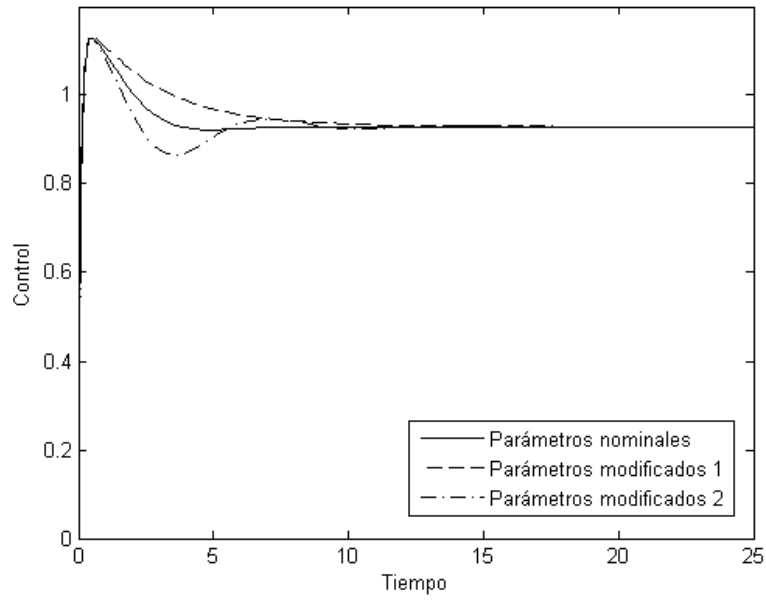


Figura 5.22: Desempeño del controlador por método algebraico para  $x_1^* = 0.8$

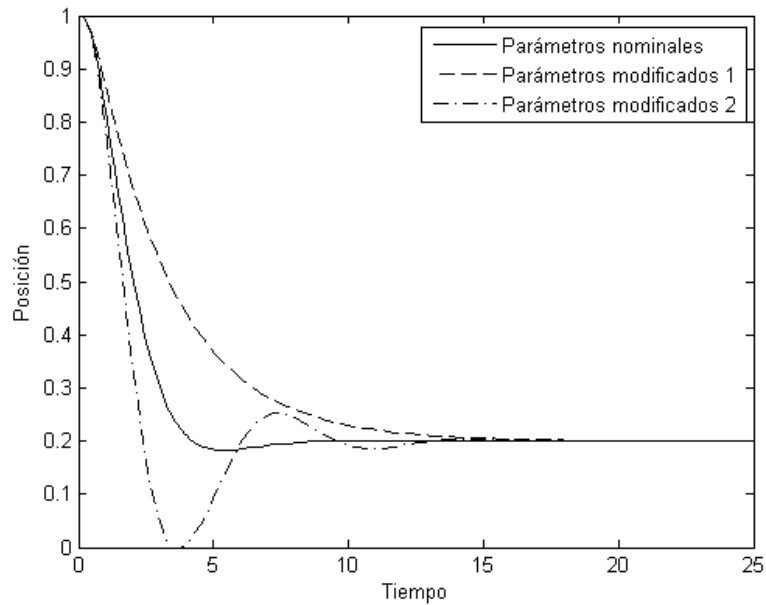


Figura 5.23: Posición normalizada deseada  $x_1^* = 0.2$  para  $(\frac{1}{2}\zeta, \frac{1}{2}r)$  y  $(2\zeta, 2r)$

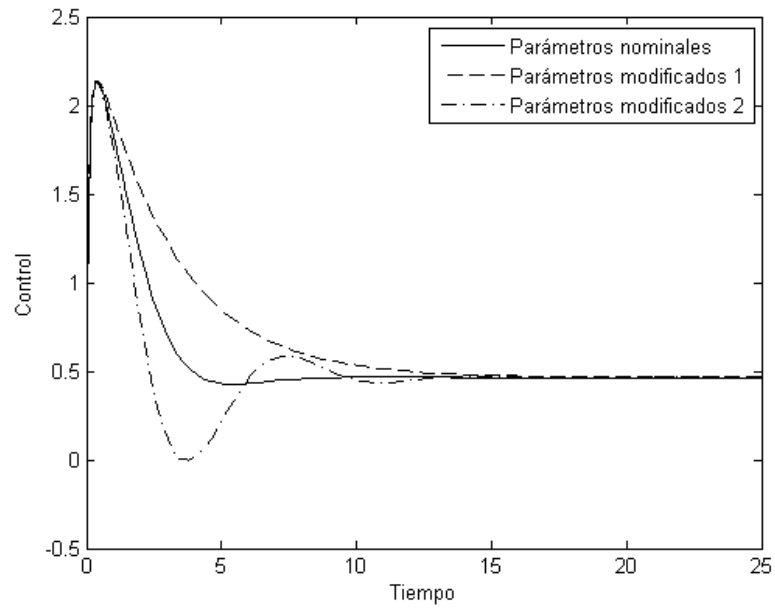


Figura 5.24: Desempeño del controlador por método algebraico para  $x_1^* = 0.2$

# Capítulo 6

## Conclusiones

El campo de los sistemas MEMS ofrece en la actualidad grandes oportunidades de interacción con todos aquellos que poseen conocimientos en el campo de control. Un paso importante se logra en este trabajo de tesis al diseñar un par de controladores basándose en la técnica IDA-PBC cuyo objetivo principal es conseguir regulación de la posición del electrodo superior móvil del dispositivo MEMS. No sólo se satisface el objetivo de regulación sino también se logra que en el proceso de regulación de producirse contacto entre electrodos éste sea mínimo y que la magnitud del voltaje requerido de la fuente para lograr el objetivo de control sea el menor posible.

Se logró superar el efecto de *pull-in* inherente a los actuadores electrostáticos y como consecuencia se consiguió regulación en toda la banda de voltaje cero  $z_0$  que separa los electrodos del actuador electrostático. Asimismo, como se mencionó anteriormente, en el proceso de regulación el contacto entre los electrodos es mínimo con lo cual se evita el desgaste prematuro del actuador.

A lo largo del desarrollo de este trabajo queda constancia de la interacción entre diferentes campos de conocimiento. En la primera parte se obtiene el modelo matemático que modela la dinámica del actuador formado por un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden. En el modelado se utilizan las ecuaciones de Euler-Lagrange basadas en el concepto de transformación de energía de sistemas de diferente naturaleza. Es importante resaltar que pese a la sencillez de modelo, éste describe los principales

efectos no lineales del sistema. El artilugio matemático de normalización es significativo ya que trabajar con el modelo normalizado evita complicaciones numéricas y reduce el número de parámetros del sistema.

En la obtención de las leyes de control, tanto por el método algebraico como por el paramétrico, se resolvió la ecuación de *matching* expresada en un sistema de ecuaciones en derivadas parciales.

Una vez obtenido el comportamiento en lazo cerrado del sistema se demostró estabilidad asintótica en el sentido de Lyapunov utilizando las funciones Hamiltonianas obtenidas, que tienen un punto de equilibrio en el punto de operación deseado, como funciones de Lyapunov.

Finalmente se presentaron los resultados en forma numérica mediante simulaciones realizadas con el *tool box* SIMULINK de MATLAB.

## 6.1. Trabajo Futuro

El diseño y la implementación de los controladores, ya sea desde la perspectiva de circuitos integrados o desde la perspectiva de física de semiconductores, queda como trabajo futuro. Un primer paso para lograr el cometido de construir los controladores podría basarse en simulaciones numéricas empleando software especializado que permita efectuar análisis estructural del dispositivo MEMS tales como COVENTOR, ANSYS entre otros. Una dificultad a considerar en la implementación de los controladores es el hecho de requerir sensores para medir tanto la posición, la capacitancia y en el caso de la ley de control obtenida de resolver la ecuación de *matching* por el método algebraico incluso la velocidad.

# Apéndice A

## Normalización de las Ecuaciones Diferenciales

En este apéndice se desarrolla paso a paso la normalización de las ecuaciones diferenciales que modelan la dinámica del actuador electrostático.

El desplazamiento del electrodo superior relativo al inferior fijo,  $z$ , se normaliza con respecto a la distancia máxima de separación,  $z_0$ , a la que están separados los electrodos cuando no se aplica voltaje a la entrada del actuador,  $V_s = 0$  (A.1). La carga acumulada entre las placas,  $Q$ , el voltaje de actuación,  $V_a$ , y el voltaje de la fuente,  $V_s$ , se normalizan con respecto a los valores que presentan al producirse el fenómeno de *pull-in* (A.2), (A.3), (A.4). Finalmente, el tiempo  $t$  se normaliza con respecto a la frecuencia natural del sistema  $\omega_0$  (A.5).

$$x_1 = z/z_0 \tag{A.1}$$

$$x_3 = Q/Q_{pull-in} \tag{A.2}$$

$$u_a = V_a/V_{pull-in} \tag{A.3}$$

$$u_s = V_s/V_{pull-in} \tag{A.4}$$

$$\tau = \omega_0 t \tag{A.5}$$

El voltaje de *pull-in*,  $V_{pull-in}$ , la carga almacenada en los actuadores al momento de

producirse el fenómeno de *pull-in*,  $Q_{pull-in}$ , así como, la capacitancia de banda completa,  $C_0$ , están dadas por (A.6), (A.7), (A.8).

$$V_{pull-in} = \sqrt{\frac{8kz_0^2}{27C_0}} \quad (\text{A.6})$$

$$Q_{pull-in} = \frac{3}{2}C_0V_{pull-in} \quad (\text{A.7})$$

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{z_0} \quad (\text{A.8})$$

Las ecuaciones diferenciales no lineales que modelan la dinámica del actuador están dadas en, (A.9), (A.10).

$$m\ddot{z} = -k(z - z_0) - b\dot{z} - \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A} \quad (\text{A.9})$$

$$\dot{Q} = \frac{1}{R} \left( V_s - \frac{zQ}{\varepsilon_0 A} \right) \quad (\text{A.10})$$

Primero se normaliza la ecuación (A.9) que describe el movimiento del electrodo superior del actuador electrostático empleando las ecuaciones de (A.1) a (A.8).

$$m \frac{d^2(z_0 x_1)}{d\left(\frac{\tau}{\omega_0}\right)^2} = -k(z_0 x_1 - z_0) - b \frac{d(z_0 x_1)}{d\left(\frac{\tau}{\omega_0}\right)} - \frac{(Q_{pull-in} x_3)^2}{2\varepsilon_0 A} \quad (\text{A.11})$$

Como  $z_0$  y  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  son constantes (A.11) queda de la siguiente manera

$$mz_0\omega_0^2 \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} = -kz_0(x_1 - 1) - bz_0\omega_0 \frac{dx_1}{d\tau} - \frac{(Q_{pull-in} x_3)^2}{2\varepsilon_0 A} \quad (\text{A.12})$$

Dividiendo (A.12) entre  $mz_0\omega_0^2$  y sustituyendo  $Q_{pull-in}$

$$\frac{d^2 x_1}{d\tau^2} = -(x_1 - 1) - 2 \left( \frac{b}{2m\omega_0} \right) \frac{dx_1}{d\tau} - \frac{1}{2\varepsilon_0 A} \left( \frac{\frac{3}{2}C_0 \sqrt{\frac{8kz_0^2}{27C_0}}}{mz_0\omega_0^2} \right)^2 x_3^2 \quad (\text{A.13})$$



Finalmente de simplificar (A.13) y haciendo  $\varsigma = \frac{b}{2m\omega_0}$  resulta la ecuación diferencial normalizada que define el movimiento del electrodo superior del actuador electrostático (A.14).

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2} = -(x_1 - 1) - 2\varsigma \frac{dx_1}{d\tau} - \frac{1}{3}x_3^2 \quad (\text{A.14})$$

Ahora se normaliza la ecuación (A.10) que relaciona el voltaje de la fuente con la carga acumulada entre las placas. Por conveniencia se reescribe

$$\dot{Q} = \frac{1}{R} \left( V_s - \frac{zQ}{\varepsilon_0 A} \right) \quad (\text{A.15})$$

Haciendo uso de (A.1) a (A.8) la ecuación (A.15) queda de la siguiente manera (A.16)

$$\frac{d(Q_{pull-in}x_3)}{d\left(\frac{\tau}{\omega_0}\right)} = \frac{1}{R} \left( V_s - \frac{(z_0x_1)(Q_{pull-in}x_3)}{\varepsilon_0 A} \right) \quad (\text{A.16})$$

Al reescribir la ecuación (A.16) se obtiene (A.17)

$$\frac{dx_3}{d\tau} = \frac{1}{R} \left( \frac{2}{3} \frac{V_s}{C_0\omega_0 V_{pull-in}} - \frac{z_0 Q_{pull-in}}{\varepsilon_0 A \omega_0 Q_{pull-in}} x_1 x_3 \right) \quad (\text{A.17})$$

Finalmente de simplificar (A.17) y haciendo  $r = RC_0\omega_0$  se obtiene la ecuación diferencial normalizada que relaciona el voltaje de la fuente con la carga acumulada entre las placas (A.18).

$$\frac{dx_3}{d\tau} = \frac{1}{r} \left( \frac{2}{3} u_s - x_1 x_3 \right) \quad (\text{A.18})$$

Una forma equivalente de representar a (A.14) y (A.18) está dada por las ecuaciones (A.19), (A.20) y (A.21).

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{A.19}$$

$$\dot{x}_2 = -(x_1 - 1) - 2\zeta x_2 - \frac{1}{3}x_3^2 \tag{A.20}$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{r} \left( \frac{2}{3}u_s - x_1x_3 \right) \tag{A.21}$$

donde: la variable  $x_1$  representa la posición normalizada del electrodo movable,  $x_2$  su velocidad normalizada y  $x_3$  la carga normalizada almacenada entre las placas. Los parámetros constantes  $\zeta = \frac{b}{2m\omega_0}$  y  $r = RC_0\omega_0$  representan el factor de amortiguamiento normalizado y la resistencia normalizada respectivamente. El parámetro  $u_s$  representa el voltaje de la fuente normalizado. Las ecuaciones diferenciales normalizadas resultantes varían con respecto al tiempo normalizado  $\tau$ .

# Apéndice B

## Estabilidad en el sentido de Lyapunov

En este apéndice se presentan los conceptos de la teoría de estabilidad en el sentido de Lyapunov utilizados en las pruebas de estabilidad de este trabajo de tesis, basado en [11]. Las funciones Hamiltonianas,  $H_d$ , obtenidas al resolver la ecuación de matching por el método IDA-PBC hacen las veces de funciones de Lyapunov.

### B.1. Condiciones de Estabilidad en el Sentido de Lyapunov

Considérese un sistema dinámico autónomo:

$$\dot{x} = f(x) \tag{B.1}$$

donde  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un mapeo localmente Lipchitz de un dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^n$ . Supóngase que  $x_* \in D$  es un punto de equilibrio de (B.1) es decir,  $f(x_*) = 0$ . Sin pérdida de generalidad, se considera que el punto de equilibrio está en el origen,  $x_* = 0$ .

*Definición B.1.* El punto de equilibrio  $x_*$  de (B.1) es:

- Estable si, para toda  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tal que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq 0 \quad (\text{B.2})$$

- Inestable si no es estable.
- Asintóticamente estable si es estable y  $\delta$  puede elegirse tal que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (\text{B.3})$$

*Teorema B.1.* Sea  $x = 0$  un punto de equilibrio de  $\dot{x} = f(x)$  y  $D \subset \mathbb{R}^n$  un dominio que contiene a  $x = 0$ . Sea  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y diferenciable tal que

$$V(0) = 0 \quad y \quad V(x) > 0, \quad en \quad D - \{0\} \quad (\text{B.4})$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad en \quad D \quad (\text{B.5})$$

Entonces,  $x = 0$  es estable. Más aún, si:

$$\dot{V}(x) < 0 \quad en \quad D - \{0\} \quad (\text{B.6})$$

Entonces  $x = 0$  es asintóticamente estable. La función  $V(x)$  es una función de Lyapunov.

*Teorema B.2.* Sea  $x = 0$  un punto de equilibrio de  $\dot{x} = f(x)$  y  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y diferenciable tal que:

$$V(0) = 0 \quad y \quad V(x) > 0, \quad \forall x \neq 0 \quad (\text{B.7})$$

$$\|x(0)\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty \quad (\text{B.8})$$

$$\dot{V}(x) \leq 0, \quad \forall x \neq 0 \quad (\text{B.9})$$

Entonces  $x = 0$  es globalmente asintóticamente estable.

*Teorema B.3* (Teorema de La Salle). Sea  $\Omega \subset D$  un conjunto compacto positivamente invariante con respecto a  $\dot{x} = f(x)$ . Sea  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y diferenciable tal que  $\dot{V}(x) \leq 0$  en  $\Omega$ . Sea  $E$  el conjunto de todos los puntos en  $\Omega$  donde  $\dot{V}(x) = 0$ . Sea  $M$  el conjunto invariante más grande en  $E$ . Entonces en todas las soluciones que comienzan en  $\Omega$  tienden a  $M$  cuando  $t \rightarrow \infty$

*Corolario B.1.* Sea  $x = 0$  un punto de equilibrio de  $\dot{x} = f(x)$  y  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, diferenciable y definida positiva en un dominio  $D$  que contiene al origen  $x = 0$ , tal que  $\dot{V}(x) \leq 0$  en  $D$ . Sea  $S = \{x \in D \mid \dot{V}(x) = 0\}$  y suponga que no hay soluciones que puedan permanecer en  $S$ , a parte de la solución trivial  $x \equiv 0$ . Entonces, el origen es asintóticamente estable.

*Corolario B.2.* Sea  $x = 0$  un punto de equilibrio de  $\dot{x} = f(x)$ . Sea  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, diferenciable, radialmente no acotada y definida positiva tal que  $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ . Sea  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \dot{V}(x) = 0\}$  y suponga que no existe solución que pueda permanecer en  $S$ , diferente de la trivial  $x \equiv 0$ . Entonces el origen es globalmente asintóticamente estable

# Bibliografía

- [1] J. A. Acosta, R. Ortega, and A. Astolfi. Interconnection and damping assignment passivity-based control of mechanical systems with underactuation degree one. *in Proc. Amer. Control Conf. Boston, MA*, 2004.
- [2] C. Batlle, A. Dòria-Cerezo, and R. Ortega. Power flow control of a doubly-fed induction machine coupled to a flywheel. *European Journal of Control*, 11(3):209–221, 2005.
- [3] B. Borovic, A. Q. Liu, D. Popa, H. Cai, and F. L. Lewis. open-loop versus closed-loop control of mems devices: choices and issues. *Journal of micromechanics and Microengineering*, 15:1917–1924, 2005.
- [4] J. Bryzek, E. Abbott, and A. Flannery. Control issues for mems. *Proc. Conf. Decision and Control*, 2004.
- [5] E. K. Chan and R. W. Dutton. Electrostatic micromechanical actuator with extended range of travel. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 9(3):321–328, 2000.
- [6] K. Fujimoto and T. Sugie. Canonical transformations and stabilization of generalized hamiltonian systems. *Syst Control Lett*, 42(3):217–227, 2001.
- [7] M. Galaz, R. Ortega, A. Bazanella, and A. Stankovic. An energy-shaping approach to excitation control of synchronous generators. *Automatica*, 39(1):111–119, 2003.

- [8] H. Rodriguez H, R. Ortega, and G. Escobar. Energy-shaping control of switched power converters. *Proceedings of the IEEE International Symposium on Industrial Electronics ISIE, Pusan, Korea, 2001*.
- [9] H. Rodriguez H, R. Ortega, G. Escobar, and N. A. Baranov. Robustly stable output feedback saturated controller for the boost dc-to-dc converter. *Syst Control Lett*, 40(1):1–8, 2000.
- [10] E. S. Hung and S. D. Senturia. Extending the travel range of analog-tuned electrostatic actuators. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 8(4):497–505, Dec. 1999.
- [11] Hassan K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 3a. Ed. 2002.
- [12] G. T. Kovacs. *Micromachined Transducer Sourcebook*. McGraw-Hill, New York, 1998.
- [13] P. Maya and G. Espinosa. Output feedback excitation control of synchronous generators. *Int J. Robust Nonlinear Control*, 14:879–890, 2004.
- [14] R. Ortega and Eloisa García-Canseco. Interconnection and damping assignment passivity-based control: A survey. *European Journal of Control*, pages 432–450, 2004.
- [15] R. Ortega and M. Spong. Adaptive motion control of rigid robots: A tutorial. *Automatica*, 25:877–888, 1989.
- [16] R. Ortega, M. Spong, F. Gomez, and G. Blankenstein. Stabilization of underactuated mechanical systems via interconnection and damping assignment. *IEEE Trans. Automatic Control*, 47:1218–1233, August 2002.
- [17] R. Ortega, A. van der Schaft, B. Maschke, and G. Escobar. Energy shaping of port-controlled hamiltonian systems by interconnection. *IEEE Conf. Dec. and Control, Phoenix, AZ, USA*, 25:7–10, 1999.

- [18] R. Ortega, A. van der Schaft, B. Maschke, and G. Escobar. Interconnection and damping assignment passivity-based control of port controlled hamiltonian systems. *Automatica*, 38:585–596, April 2002.
- [19] V. Petrovic, R. Ortega, and A. Stankovic. Interconnection and damping assignment approach to control of permanent magnet synchronous motor. *IEEE Trans. Control Systems Technology*, 9(6):811–820, 2001.
- [20] H. Rodríguez, R. Ortega, and I Mareels. A novel passivity-based controller for an active magnetic bearing benchmark experiment. *In Proc. of the American Control Conference*, 2000.
- [21] H. Rodríguez, H. Siguerdidjane, and R. Ortega. Experimental comparison of linear and nonlinear controllers for a magnetic suspension. *In IEEE Proc. Conference on Control Applications*, 2000.
- [22] Domingo Teodoro Mendoza Rosales. Desarrollo de un interruptor mems para la banda ka utilizando tecnología flexible de circuito impreso. Master’s thesis, UNAM, 2007.
- [23] J. Seeger. Charge control of parallel-plate, electrostatic actuators and tip-in instability. *Journal of Microelectromechanical systems*, 12(5):656–871, Oct. 2003.
- [24] J. Seeger and S. B. Crary. Stabilization of electrostatically actuated mechanical devices. *Proc. of the Ninth Int. Conf. on Solid-States Sensors and Actuators*, pages 1133–1136, 1997.
- [25] S. D. Senturia. *Microsystem Design*. Kluwer Academic Publisher, 4a Ed. 2002.
- [26] Jean-Jacques E. Slotine. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1991.
- [27] A. J. van der Schaft. *L<sub>2</sub>-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control*. Lect. Notes in Contr. and Inf. Sc., Vol. 218, Springer-Verlag, Berlin, 2000.



- [28] G. Zhu, J. Lévine, and L. Praly. Improving the performance of an electrostatically actuated mems by nonlinear control: Some advances and comparisons. *in Proc. of the 44th IEEE conference on Decision and Control*, pages 7534–7539, Dec. 2005.
- [29] G. Zhu, J. Lévine, and L. Praly. On the differential flatness and control of electrostatically actuated mems. *American Control conference*, 2005.
- [30] G. Zhu, J. Lévine, and L. Praly. Robust control of an electrostatically actuated mems in the presence of parasitics and parametric uncertainty. *in Proc. of the 2006 American Control Conference*, pages 1233–1238, Jun. 2006.



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO  
EN INGENIERÍA

## CONTROL BASADO EN PASIVIDAD DE DISPOSITIVOS MEMS

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

INGENIERÍA ELÉCTRICA - CONTROL

PRESENTA:

JOSÉ MIGUEL DÍAZ ANTÚNEZ

TUTOR:

DR. GERARDO RENÉ ESPINOSA PÉREZ

2010

## **Jurado:**

**Presidente:** Dr. Alvarez-Icaza Longoría Luis A.

**Secretario:** Dr. Moreno Pérez Jaime Alberto

**Vocal:** Dr. Espinosa Pérez Gerardo René

**1er. Suplente:** Dr. Rodríguez Cuevas Jorge

**2do. Suplente:** Dr. Benítez Pérez Héctor

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: Ciudad Universitaria, D.F. Facultad de Ingeniería, UNAM.

## **Tutor:**

**Dr. Espinosa Pérez Gerardo René**

# Dedicatorias

A mi mamá que tanto quiero y admiro, por su guía y el consejo dado.

A mis hermanas y hermanos, por el apoyo y cariño incondicionales que siempre me brindan.

A mi amada Olivia, por el amor, comprensión y aliento con los que en todo tiempo me abriga. A su familia por sus atenciones para conmigo.

A la memoria de mi papá y de Rafita mi entrañable hermano de eterna sonrisa.

# Agradecimientos

Al Dr. Gerardo Espinosa, por haber depositado su confianza en mí aceptando ser mi director de tesis.

A mis profesores del posgrado, por compartir sus conocimientos y por la actitud amable que mostraron cada vez que les solicite su valiosa ayuda.

A mis compañeros de generación, por su disposición al trabajo en equipo y al debate de ideas, pero sobretodo, por su sólida camaradería.

Al Dr. Alvarez-Icaza Longoría Luis A., al Dr. Moreno Pérez Jaime Alberto, al Dr. Rodríguez Cuevas Jorge y al Dr. Benítez Pérez Héctor, por formar parte de mi jurado de titulación y enriquecer este trabajo con sus correcciones y sugerencias.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, UNAM, por abrirme una vez más sus puertas de par en par. En esta ocasión las del Posgrado de la Facultad de Ingeniería.

Al consejo Nacional de ciencia y Tecnología, CONACYT, por la beca que me concedió durante tres semestres de mis estudios de maestría.

Al Dr. Alvarez-Icaza, también le agradezco la invaluable asistencia que me brindó en la recta final de mi proceso de titulación.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes y motivación . . . . .	1
1.1.1. Modelo Matemático . . . . .	1
1.1.2. Normalización del Modelo . . . . .	2
1.1.3. Fenómeno de <i>Pull-in</i> . . . . .	3
1.2. Control de Actuadores Electrostáticos . . . . .	4
1.2.1. Control de MEMS en Lazo Abierto . . . . .	4
1.2.2. Control de MEMS en Lazo Cerrado . . . . .	5
1.3. Contribución . . . . .	6
1.4. Estructura de la tesis . . . . .	6
<b>2. Modelo Matemático</b>	<b>8</b>
2.1. Introducción . . . . .	8
2.2. Representación Esquemática del MEMS . . . . .	9
2.3. Modelo de la Dinámica del Actuador . . . . .	11
2.3.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange . . . . .	12
2.3.2. Modelo Dinámico Basado en las Ecuaciones de EL . . . . .	12
2.4. Análisis del Fenómeno de <i>Pull-In</i> . . . . .	14
2.4.1. Voltaje $V_{pull-in}$ y desplazamiento $z_{pull-in}$ . . . . .	15
2.5. Representación de la Dinámica en Ecuaciones Normalizadas . . . . .	17
2.6. Ilustración del fenómeno de <i>Pull-In</i> . . . . .	18

2.7.	Análisis de Estabilidad por el Método de Linealización . . . . .	20
2.7.1.	Linealización de un sistema no lineal . . . . .	21
2.8.	Puntos de Equilibrio del Actuador Electrostático . . . . .	22
2.9.	Simulación Numérica . . . . .	24
<b>3.</b>	<b>Metodología IDA-PBC</b>	<b>29</b>
3.1.	Introducción . . . . .	29
3.2.	Control Basado en Pasividad, PBC . . . . .	29
3.3.	Metodología IDA-PBC para PCHS . . . . .	30
3.3.1.	Metodología IDA-PBC Representación General . . . . .	31
3.3.2.	Prueba de Estabilidad . . . . .	32
3.4.	Métodos para Resolver la Ecuación de <i>Matching</i> . . . . .	33
<b>4.</b>	<b>Diseño de los Controladores por IDA-PBC</b>	<b>34</b>
4.1.	Introducción . . . . .	34
4.2.	Modelo de la Dinámica del Error . . . . .	34
4.3.	Ley de Control por el Método Algebraico . . . . .	36
4.3.1.	Solución de la Ecuación de <i>Matching</i> . . . . .	37
4.3.2.	Análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov . . . . .	39
4.4.	Ley de Control por el Método Paramétrico . . . . .	41
4.4.1.	Solución de la Ecuación de <i>Matching</i> . . . . .	41
4.4.2.	Análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov . . . . .	45
<b>5.</b>	<b>Simulación Numérica</b>	<b>47</b>
5.1.	Introducción . . . . .	47
5.2.	Ley de Control por Método Algebraico . . . . .	47
5.2.1.	Superficies y Curvas de Nivel $H_d$ Método Algebraico . . . . .	50
5.3.	Ley de Control por Método Paramétrico . . . . .	54
5.3.1.	Superficies y Curvas de Nivel $H_d$ Método Paramétrico . . . . .	56
5.4.	Desempeño de los Controladores a Variaciones de los Parámetros . . . . .	60

5.4.1. Respuesta del Controlador Método Algebraico . . . . .	60
5.4.2. Respuesta del Controlador Método Paramétrico . . . . .	63
<b>6. Conclusiones</b>	<b>67</b>
6.1. Trabajo Futuro . . . . .	68
<b>A. Normalización de las Ecuaciones Diferenciales</b>	<b>69</b>
<b>B. Estabilidad en el sentido de Lyapunov</b>	<b>73</b>
B.1. Condiciones de Estabilidad en el Sentido de Lyapunov . . . . .	73
<b>Bibliografía</b>	<b>76</b>



# Índice de figuras

2.1. Representación esquemática típica de un actuador electrostático con un grado de libertad [25] . . . . .	10
2.2. Equilibrio de Fuerzas (mecánica y electrostática) . . . . .	20
2.3. Trayectorias de las raíces . . . . .	25
2.4. Gráfica de las raíces $x_{eq}$ positivas . . . . .	26
2.5. Parte real de los eigenvalores del punto de equilibrio estable . . . . .	26
2.6. Parte real de los eigenvalores del punto de equilibrio inestable . . . . .	27
2.7. Posición del electrodo superior . . . . .	28
5.1. Posición del Electrodo Superior . . . . .	48
5.2. Ley de Control. Método Algebraico . . . . .	49
5.3. Superficie de nivel para $x_3 = x_3^* = 1.643$ . . . . .	51
5.4. Curvas de nivel en el plano $x_1x_2$ con origen en $x_*(x_1^* = 0.1, x_2^* = 0)$ . . . . .	51
5.5. Superficie de nivel para $x_1 = x_1^* = 0.1$ . . . . .	52
5.6. Curvas de nivel en el plano $x_2x_3$ con origen en $x_*(x_2^* = 0, x_3^* = 1.643)$ . . . . .	52
5.7. Superficie de nivel para $x_2 = x_2^* = 0$ . . . . .	53
5.8. Curvas de nivel en el plano $x_1x_3$ con origen en $x_*(x_1^* = 0.1, x_3^* = 1.643)$ . . . . .	53
5.9. Posición del Electrodo Superior . . . . .	54
5.10. Ley de Control. Método Paramétrico . . . . .	55
5.11. Superficie de nivel para $x_3 = x_3^* = 1.643$ . . . . .	57
5.12. Curvas de nivel en el plano $x_1x_2$ con origen en $x_*(x_1^* = 0.1, x_2^* = 0)$ . . . . .	57
5.13. Superficie de nivel para $x_1 = x_1^* = 0.1$ . . . . .	58

5.14. Curvas de nivel en el plano $x_2x_3$ con origen en $x_*(x_2^* = 0, x_3^* = 1.643)$ . . . . .	58
5.15. Superficie de nivel para $x_2 = x_2^* = 0$ . . . . .	59
5.16. Curvas de nivel en el plano $x_1x_3$ con origen en $x_*(x_1^* = 0.1, x_3^* = 1.643)$ . . . . .	59
5.17. Posición normalizada deseada $x_1^* = 0.8$ para $(\frac{1}{2}\varsigma, \frac{1}{2}r)$ y $(2\varsigma, 2r)$ . . . . .	61
5.18. Desempeño del controlador por método algebraico para $x_1^* = 0.8$ . . . . .	62
5.19. Posición normalizada deseada $x_1^* = 0.2$ para $(\frac{1}{2}\varsigma, \frac{1}{2}r)$ y $(2\varsigma, 2r)$ . . . . .	62
5.20. Desempeño del controlador por método algebraico para $x_1^* = 0.2$ . . . . .	63
5.21. Posición normalizada deseada $x_1^* = 0.8$ para $(\frac{1}{2}\varsigma, \frac{1}{2}r)$ y $(2\varsigma, 2r)$ . . . . .	64
5.22. Desempeño del controlador por método algebraico para $x_1^* = 0.8$ . . . . .	65
5.23. Posición normalizada deseada $x_1^* = 0.2$ para $(\frac{1}{2}\varsigma, \frac{1}{2}r)$ y $(2\varsigma, 2r)$ . . . . .	65
5.24. Desempeño del controlador por método algebraico para $x_1^* = 0.2$ . . . . .	66

# Resumen

La presencia del fenómeno de *pull-in* representa el principal inconveniente al trabajar con actuadores electrostáticos. Debido a esta limitante, en lazo abierto sólo se consigue regulación en el primer tercio de la banda de voltaje cero  $z_0$ .

El objetivo de este trabajo de tesis es lograr regulación en toda la banda de voltaje cero  $z_0$  del actuador electrostático. Como primer paso se obtiene el modelo matemático que describe la dinámica de un actuador electrostático MEMS basándose en el enfoque de las ecuaciones de Euler-Lagrange. El modelo matemático resultante es un conjunto de ecuaciones diferenciales que contienen los principales efectos no lineales del dispositivo. Con el fin de disminuir la propagación del error numérico en las simulaciones debido a la precisión numérica del simulador empleado, éste se normaliza. A partir del modelo normalizado se analiza el fenómeno de *pull-in* y se diseñan dos controladores con los cuales en lazo cerrado se consigue el objetivo de control. Ambos se obtienen empleando la metodología IDA-PBC. El primero resolviendo la ecuación de *matching* por el método algebraico y la segunda por el método paramétrico. Además de lograr regulación en toda la banda de voltaje cero  $z_0$  se consigue que el contacto entre electrodos sea mínimo y que el voltaje de control este dentro de un rango factible. Finalmente, se verifican los resultados analíticos mediante simulaciones numéricas.

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Antecedentes y motivación

Dentro de los principales métodos de actuación desarrollados para Sistemas Micro-Electro-Mecánicos (MEMS, por sus siglas en inglés), se encuentran los siguientes: piezoresistivos, piezoeléctricos, térmicos, ópticos, electromagnéticos y electrostáticos [4]. Los actuadores electrostáticos son los de mayor uso debido a que son de estructura geométrica relativamente sencilla y se pueden fabricar de manera estándar mediante procesos en lote con materiales bien caracterizados. Estas cualidades del sistema permiten disminuir de manera significativa el tiempo y los costos de fabricación. La utilización en gran escala de este tipo de actuadores no sólo se debe a estas ventajas, sino también al gran número de aplicaciones que se tienen de ellos, de las cuales destacan las siguientes: arreglos de micro-espejos, rejillas ópticas, capacitores variables, micro-acelerómetros, micro-interruptores [23].

#### 1.1.1. Modelo Matemático

Sin lugar a dudas, el estudio de los MEMS es un campo multidisciplinario se requieren especialistas de los diferentes campos de conocimiento, no sólo del de la ingeniería, sino también físicos, químicos, matemáticos por mencionar algunos. Las matemáticas son el campo de conocimiento que enlaza las diferentes especialidades. La

relevancia de las matemáticas se pone de manifiesto desde la primera etapa en el estudio de los sistemas dinámicos, incluidos los MEMS entre ellos, el modelado matemático. Antes de fabricar cualquier prototipo, primero se analiza su comportamiento a partir de un modelo matemático que de él se tenga. El análisis de un modelo matemático reduce costos de tiempo y dinero. Es por eso que como primera parte de este trabajo de tesis se plantea el modelo matemático que describe la dinámica del dispositivo MEMS.

En el Capítulo 2 se presenta el modelo matemático del actuador electrostático. Este modelo, pese a su simplicidad, contiene las principales no linealidades del sistema. El modelo es un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales ordinarias no lineales. Se origina a partir de considerar al actuador como un capacitor de placas planas paralelas, la superior movable y la inferior fija. La placa superior está sostenida por soportes y se modela como un sistema masa-resorte-amortiguador. Si se aplica una diferencia de potencial entre las placas se generan cargas eléctricas inducidas que dan lugar a una fuerza atractiva de origen electrostático. En otras palabras, los actuadores electrostáticos hacen uso de la fuerza de atracción de Coulomb que se genera entre dos conductores cuando existe una diferencia de potencial entre ellos.

### **1.1.2. Normalización del Modelo**

Se utiliza el enfoque basado en las ecuaciones de Euler-Lagrange para obtener el modelo matemático que describe el comportamiento dinámico del actuador. El modelo resultante es un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales. Las unidades de medida de los parámetros del modelo varían considerablemente unos con respecto a los otros, además de ser del orden de los micros o nanos incluso teras. Por lo que, con el fin de disminuir la propagación del error numérico en las simulaciones debido al número máximo de dígitos significativos que determinan la precisión numérica del simulador empleado, éste se normaliza. Una ventaja adicional de normalizar el modelo es que se reduce el número de parámetros. Tanto el diseño de los controladores como el análisis de la dinámica y las simulaciones numéricas se obtienen a partir del modelo normalizado.

### 1.1.3. Fenómeno de *Pull-in*

El fenómeno de *pull-in* constituye la principal desventaja que se presenta al trabajar con actuadores electrostáticos. Como se podrá constatar en el análisis del modelo matemático del actuador, si se aplica un voltaje al dispositivo se manifiestan dos fuerzas una de atracción de origen electrostático la cual provoca que la placa superior móvil se aproxime a la placa inferior fija y una fuerza mecánica debida al resorte que contrarresta el efecto de la fuerza electrostática. La fuerza mecánica del resorte crece de manera lineal mientras que la electrostática lo hace de forma cuadrática. Por este motivo es de esperarse que al aumentar el voltaje en cierto momento la fuerza lineal del resorte sea superada por la electrostática cuadrática. Cuando la fuerza del resorte es insuficiente para contrarrestar el efecto de la fuerza electrostática se produce el denominado fenómeno de *pull-in*. En este momento la fuerza de atracción electrostática es dominante y provoca que la placa móvil se colapse de súbito hacia la inferior. El voltaje en el cual se produce el fenómeno de *pull-in* se le conoce como el voltaje de *pull-in*.

Otra cantidad importante de determinar es la distancia a la cual están separadas las placas cuando se produce el fenómeno de *pull-in*. Cuando no se aplica voltaje el sistema está en equilibrio y las placas están separadas una distancia constante, denominada distancia de voltaje cero  $z_0$ . Al aplicarse un voltaje constante a la entrada la distancia entre las placas disminuye, la placa superior se aproxima a la inferior, debido a la fuerza de atracción de Coulomb. Podría pensarse que se puede fijar la distancia entre placas en cualquier punto de la banda cero  $z_0$  suministrando cantidades constantes de voltaje a la entrada. Sin embargo, no es así, en el Capítulo 2 se demostrará que aplicando un voltaje constante a la entrada tan sólo se logra equilibrar el electrodo superior en el primer tercio superior de la banda cero  $z_0$ . También se determinará que, si el voltaje de entrada es el de *pull-in*, entonces la distancia entre placas es  $z = \frac{2}{3}z_0$ . A esta distancia se le denomina distancia de *pull-in*. Y representa la distancia mínima teórica a la cual se pueden equilibrar las placas con un voltaje de entrada constante.

## 1.2. Control de Actuadores Electrostáticos

La mayor parte de los trabajos en control de dispositivos MEMS se realizan en lazo abierto, [3]. A medida que el nivel de sofisticación de los dispositivos MEMS se ha incrementado se exigen mejoras sustanciales en los controladores. Lo que se busca es implementar el controlador junto con el MEMS en un mismo dispositivo. Existe una lenta aceptación del control en lazo cerrado en el campo de los MEMS. Esta lenta aceptación se da principalmente por la complejidad que se presenta al implementar los controladores en lazo cerrado [4]. A diferencia de los sistemas en nivel macro donde el lugar de implementación de los controladores es relativamente simple. La inclusión de los controladores en un mismo dispositivo MEMS cambian el comportamiento dinámico del sistema de manera considerable.

### 1.2.1. Control de MEMS en Lazo Abierto

La solución más sencilla que se reporta para regular la posición una distancia  $d$ , consiste en fabricar el MEMS con una distancia de voltaje cero de, por lo menos, el triple de la distancia a regular,  $3d$ . La principal desventaja de este procedimiento radica en que, generalmente no se puede asignar de manera arbitraria la distancia de voltaje cero debido a restricciones en el proceso de fabricación, además se requeriría mayor voltaje de actuación [24].

Otra propuesta es modificar el comportamiento mecánico del actuador [10]. La idea es compensar el efecto de *pull-in* aplicando la fuerza electrostática sólo a una porción de la estructura y se utiliza la otra para apuntalar partes específicas. La idea es que una porción de la estructura se flexiona menos del límite de *pull-in* mientras la otra porción de la estructura se puede mover la distancia de voltaje cero por completo. Su principal desventaja radica en que se requiere voltaje de actuación mayor.

En las anteriores soluciones se ha modificado la parte mecánica del actuador. Algunos intentos se han hecho modificando el voltaje de actuación. Esta técnica de control

se denomina premoldeo [3]. La idea es utilizar el modelo dinámico del dispositivo para construir una señal de entrada que mejore el desempeño del actuador. Con la técnica de premoldeo se mejora significativamente el comportamiento dinámico del actuador. Sin embargo, la implementación de la señal de control se basa en la suma de pulsos y es una tarea complicada de implementar.

### 1.2.2. Control de MEMS en Lazo Cerrado

Otra posible solución consiste en colocar un capacitor en serie con la fuente de voltaje de control [5, 24]. El voltaje de actuación depende de la capacitancia del actuador y de la capacitancia del capacitor en serie con la fuente de alimentación. con esta técnica se ha logrado regular a 30, 60 y 90 por ciento de la distancia con voltaje cero. Su desventajas son: se requiere mayor voltaje de actuación y el capacitor en serie con la fuente de alimentación cambia de dispositivo a dispositivo.

Se ha abordado el problema desde enfoques basados en control no lineal. Las técnicas de *back-stepping* y *flatness* se aplican en [28]. En [30] se diseñan los controladores basados en la técnica de estabilización de entrada salida y la de *back-stepping* tomando en cuenta los efectos parásitos provocados por los efectos de borde del campo eléctrico. Dentro de las ventajas de utilizar estos controladores es que se logra robustez en el comportamiento de los controladores y que operan con voltajes de actuación adecuados. Su principal desventaja se presenta en la implementación de los controladores. Es importante señalar que la implementación de los controladores es tema abierto. Lo deseable es implementar el controlador y el actuador en un mismo dispositivo, pero la dinámica del actuador se altera considerablemente. Por otro lado, si se utiliza electrónica externa al actuador el controlador es de un tamaño muy superior al sistema a controlar.



### 1.3. Contribución

El objetivo de este trabajo de tesis es diseñar un par de leyes de Control Basadas en Pasividad por Asignación de Interconexión y Amortiguamiento (IDA-PBC, por sus siglas en inglés), [15].

Con cada una de las leyes de control se busca cumplir con tres objetivos principales. Primero, regular la posición de la placa superior móvil con respecto a la inferior fija en cualquier punto de la distancia nominal de voltaje cero. Segundo, los actuadores electrostáticos tienen un tiempo de vida corto debido al frecuente contacto entre los electrodos, por lo que también se busca que el contacto entre electrodos sea mínimo. Tercero, se busca que el controlador opere con un voltaje de actuación aceptable.

Una limitante del enfoque de control IDA-PBC es que requiere amortiguamiento natural del sistema, en este caso el amortiguamiento del subsistema mecánico. En las simulaciones se emplean parámetros basados en un microinterruptor construido en el laboratorio de UNAMEMS [22]. Estos dispositivos tienen una constante de amortiguamiento pequeña. Por lo que resulta interesante diseñar los controladores bajo el esquema de la metodología IDA-PBC.

### 1.4. Estructura de la tesis

En el Capítulo 2 se analiza de manera analítica la dinámica del MEMS. A partir del esquema típico del actuador electrostático, basándose en el enfoque de modelado de las ecuaciones de Euler-Lagrange, se obtiene un modelo matemático que describe su comportamiento dinámico. El modelo que describe la dinámica del actuador es un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales. Este modelo se normaliza con el fin de evitar inconsistencias en las simulaciones numéricas. Posteriormente, utilizando el modelo normalizado se realiza un estudio detallado del fenómeno de *pull-in* y de los puntos de equilibrio del sistema. Por último se visualizan mediante simulaciones numéricas los resultados obtenidos analíticamente.

En el Capítulo 3 se presentan los preliminares matemáticos y los conceptos a considerar en el diseño de los controladores basados en la técnica de Control Basado en Pasividad por Asignación de Interconexión y Amortiguamiento (IDA-PBC, por sus siglas en inglés).

En el Capítulo 4 se diseñan las leyes de control basadas en la técnica IDA-PBC. En la primera sección se obtiene una ley de control basada en resolver la ecuación de *matching* por el método algebraico. Por otra parte en la siguiente sección se obtiene una ley de control basada en resolver la ecuación de *matching* por el método paramétrico. En cada una de las secciones se muestran las pruebas de estabilidad en el sentido de Lyapunov.

En las primeras dos secciones del Capítulo 5 se presentan simulaciones numéricas que muestran el comportamiento de las leyes de control obtenidas. En la tercera y última sección se muestra el desempeño de los controladores ante la presencia de incertidumbre paramétrica. Las simulaciones se llevaron a cabo utilizando la herramienta SIMULINK de MATLAB.

Las conclusiones generales se presentan en el Capítulo 6.

# Capítulo 2

## Modelo Matemático

### 2.1. Introducción

El objetivo principal de este capítulo es analizar a detalle el comportamiento dinámico del dispositivo MEMS que se estudia en este trabajo. En principio se obtiene un modelo matemático, basado en la representación esquemática típica del actuador electrostático, que describe su comportamiento dinámico empleando las ecuaciones de Euler-Lagrange. A partir de éste se analiza el fenómeno de *pull-in* el cual representa el principal inconveniente de trabajar con actuadores electrostáticos. A continuación se normaliza el modelo matemático y se obtiene un sistema equivalente en ecuaciones diferenciales adimensionales. Finalmente, se obtienen simulaciones numéricas a través de las cuales se visualiza el comportamiento dinámico del actuador.

En la sección 2.2 se presenta el modelo esquemático típico de los actuadores electrostáticos. En la siguiente sección 2.3 se obtiene el modelo matemático del actuador electrostático basado en el enfoque de ecuaciones de Euler-Lagrange. El modelo matemático obtenido está expresado en ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales. Este modelo comprende los efectos no lineales más relevantes del actuador. En la sección 2.4 se obtienen de manera analítica las expresiones de voltaje a la entrada y posición a la cual se produce el fenómeno de *pull-in*. Para evitar complicaciones en la simulaciones debido al rango micrométrico de los parámetros en la sección 2.5 se obtiene

un modelo matemático normalizado equivalente que describe la dinámica del actuador electrostático. Las simulaciones numéricas y diseño de los controladores se basan en este último modelo normalizado. En la sección 2.6 se visualiza mediante simulaciones numéricas el momento en el cual se produce el fenómeno de *pull-in*. Este fenómeno se presenta en el momento en el que la fuerza mecánica del resorte es insuficiente para equilibrar la fuerza electrostática presente en el electrodo movable. El desarrollo del capítulo continúa de la siguiente manera: En la sección 2.7 se analizan los equilibrios del actuador mediante la técnica de linealización. Posteriormente, en la sección 2.8 se obtienen los puntos de equilibrio del sistema en lazo abierto de manera analítica, los equilibrios son tres uno de los cuales queda fuera del intervalo de operación del MEMS y por lo tanto se descarta, de los dos restantes uno es estable y el otro inestable. Finalmente, en la sección 2.9 se presentan simulaciones numéricas referentes a los puntos de equilibrio.

## 2.2. Representación Esquemática del MEMS

En la Figura 2.1 se muestra la representación esquemática típica del actuador electrostático con un grado de libertad [25]. La parte mecánica del actuador se representa como un sistema masa, resorte y amortiguador. La placa superior es movable y se supone sujeta por el resorte y el amortiguador. La placa inferior se considera fija. El actuador es controlado por una fuente de voltaje. Sobre la placa inferior fija se deposita una película de material dieléctrico para evitar el contacto directo entre placas que provocaría un corto circuito.

En la Figura 2.1 se presentan los parámetros del sistema:  $V_s(t)$  es el voltaje de la fuente con resistencia interna  $R$ ,  $V_a(t)$  el voltaje de actuación,  $z_0$  la separación de las placas cuando el voltaje de actuación es cero,  $A$  el área de las placas,  $\epsilon_0$  la permitividad del dieléctrico entre placas,  $m$  la masa de la placa superior movable,  $b$  la constante de amortiguamiento,  $k$  la rigidez del resorte,  $Q(t)$  la carga del capacitor,  $z(t)$  el despla-

miento de la placa superior e  $i(t)$  la corriente que circula por la resistencia interna de la fuente.

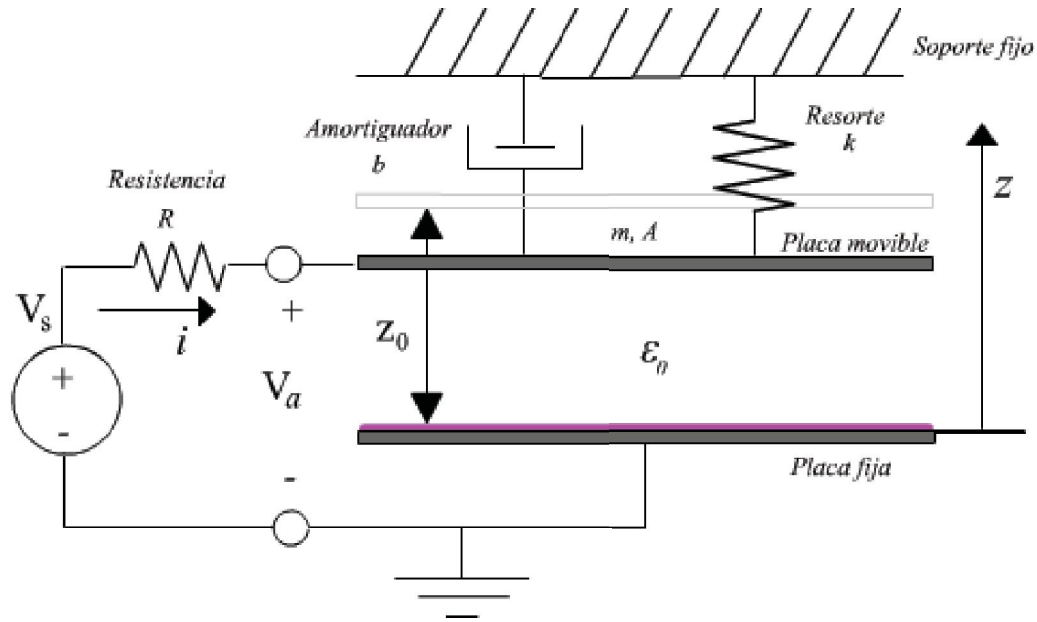


Figura 2.1: Representación esquemática típica de un actuador electrostático con un grado de libertad [25]

Como se puede ver en la Figura 2.1, se tiene un capacitor de placas planas paralelas de área  $A$  separadas una distancia  $z$  el dieléctrico entre placas es aire de constante dieléctrica  $\epsilon_0$ . Si se aplica un voltaje  $V_s$  a la entrada del actuador entre las placas se almacenan cargas eléctricas inducidas de signo contrario. La resistencia interna de la fuente  $R$  provoca que haya un tiempo de retraso entre el momento de aplicar un voltaje  $V_s$  a la entrada y el momento en el cual se empieza a almacenar la carga  $Q$  en las placas. Debido a que las cargas almacenadas entre las placas son de signo contrario se presenta una fuerza de atracción electrostática entre ellas. Por otro lado, la carga,  $Q$  y el voltaje  $V$  están relacionados por la capacitancia,  $C$ .

$$Q = CV \quad (2.1)$$

La capacitancia,  $C$ , de un capacitor de placas planas paralelas depende del área,  $A$ , y

la distancia entre las placas,  $z$ . Como se puede ver en (2.2) la capacitancia sólo depende de la geometría del capacitor y no del voltaje entre placas o de la carga inducida de origen eléctrico entre ellas.

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{z(t)} \quad (2.2)$$

En general, la corriente a la entrada,  $i(t)$ , y el voltaje de actuación,  $V_a(t)$ , se pueden medir. También es posible medir la capacitancia del dispositivo,  $C(t) = \frac{\varepsilon A}{z(t)}$ . A partir de esta medición se pueden deducir tanto la carga del dispositivo,  $Q(t)$ , como la posición de la placa superior  $z(t)$ , [29].

### 2.3. Modelo de la Dinámica del Actuador

En el modelado de sistemas físicos de parámetros concentrados destacan dos corrientes principales: el método de redes y las ecuaciones de Euler-Lagrange (EL). En el método de redes se plantean en primer lugar las ecuaciones de elementos y a partir de estas las ecuaciones de conjunto. La alternativa se basa en las ecuaciones de Euler-Lagrange. En el modelado de sistemas formados por elementos de la misma naturaleza el método de redes es adecuado. Por ejemplo, para modelar sistemas puramente mecánicos o puramente eléctricos, la segunda ley de Newton o las leyes de Kirchhoff respectivamente, son suficientes para obtener el modelo matemático. Incluso desde la perspectiva del método de redes se pueden modelar sistemas con componentes eléctricos y componentes mecánicos, pero la complejidad aumenta considerablemente. El enfoque de las ecuaciones de EL se basa en que el concepto de transformación de energía se comparte entre subsistemas de diferente naturaleza. Por lo tanto, parece natural formular el problema de modelado basándose en el concepto de transformación de energía. Para obtener el modelo matemático del actuador electrostático de este trabajo de tesis se elige la opción del enfoque basado en las ecuaciones de EL. En la dinámica del actuador

interactúan una parte de naturaleza eléctrica y una parte de naturaleza mecánica por lo que el enfoque de ecuaciones de EL es el más apropiado.

### 2.3.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange

Planteamiento general de las ecuaciones de Euler-Lagrange. Las ecuaciones de EL se expresan de la siguiente manera (2.3)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial P}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad (2.3)$$

donde:  $Q_i$  representa el vector de las fuerzas externas que actúan sobre el sistema,  $q_i = (q_1, \dots, q_n)$  es el vector de coordenadas generalizadas del sistema con  $n$  grados de libertad,  $L$  es el Lagrangiano del sistema y  $P$  la función de potencia que describe la disipación de energía del sistema. En el caso del actuador electrostático la fuente de voltaje  $V_s$  es una fuerza externa ( $Q_i$ ) y se puede elegir el desplazamiento  $z$  y la carga  $Q$  como las coordenadas generalizadas ( $q_i$ ) del sistema. El Lagrangiano  $L$  del sistema representa la diferencia entre la energía cinética  $T$  y la energía potencial  $V$  (2.4).

$$L = T - V \quad (2.4)$$

### 2.3.2. Modelo Dinámico Basado en las Ecuaciones de EL

En esta subsección, basándose en las ecuaciones de Euler-Lagrange, se obtiene el modelo matemático en parámetros concentrados del actuador electrostático.

La energía cinética del sistema está dada por (2.5)

$$T = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 \quad (2.5)$$

donde  $m$  representa la masa de la placa superior móvil. La energía potencial (2.6) tiene una componente eléctrica y una componente mecánica debido a la capacitancia y

al resorte respectivamente.

$$V = \frac{1}{2C}Q^2 + \frac{1}{2}k(z - z_0)^2 \quad (2.6)$$

La capacitancia  $C$  (2.7) del actuador de placas planas paralelas depende del área de las placas  $A$ , de la permitividad eléctrica  $\varepsilon_0$  del medio que las separa y de la distancia  $z$  a la que se encuentran una de otra.

$$C = \frac{\varepsilon A}{z} \quad (2.7)$$

Sustituyendo (2.7) en (2.6) resulta

$$V = \frac{1}{2\varepsilon A}zQ^2 + \frac{1}{2}k(z - z_0)^2 \quad (2.8)$$

La función de disipación de potencia  $P$  (2.9) incluye una parte de origen eléctrico y una parte de origen mecánico. La potencia de origen eléctrico se disipa a través de la resistencia interna de la fuente  $R$ , mientras que la potencia de origen mecánico se disipa a través del amortiguador con factor de amortiguamiento  $b$ .

$$P = \frac{1}{2}R\dot{Q}^2 + \frac{1}{2}b\dot{z}^2 \quad (2.9)$$

De (2.5) y (2.8) el Lagrangiano  $L$  (2.4) queda de la siguiente manera

$$L = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - \left( \frac{1}{2\varepsilon A}zQ^2 + \frac{1}{2}k(z - z_0)^2 \right) \quad (2.10)$$

De las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.3) se derivan parcialmente la ecuación de potencia (2.9) y el Lagrangiano (2.10) con respecto a las variables generalizadas  $z$  y  $Q$  y con respecto a sus derivadas temporales  $\dot{z}$  y  $\dot{Q}$ . El resultado de realizar estas derivadas se presenta en (2.11) y (2.12)



$$\frac{\partial L}{\partial z} = -\left(\frac{Q^2}{2\varepsilon A} + k(z - z_0)\right), \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}, \frac{\partial P}{\partial \dot{z}} = b\dot{z} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Q} = \frac{zQ}{\varepsilon A}, \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} = 0, \frac{\partial P}{\partial \dot{Q}} = R\dot{Q} \quad (2.12)$$

A continuación se realizan las derivadas temporales de las derivadas parciales del Lagrangiano con respecto a las coordenadas generalizadas  $\dot{z}$  y  $\dot{Q}$ .

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) = m\ddot{z}, \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} \right) = 0 \quad (2.13)$$

Finalmente, sustituyendo (2.11), (2.12) y (2.13) en (2.3) se obtiene el modelo matemático en ecuaciones diferenciales no lineales que describen el comportamiento dinámico del actuador a electrostático.

$$m\ddot{z} = -k(z - z_0) - b\dot{z} - \frac{Q^2}{2\varepsilon A} \quad (2.14)$$

$$\dot{Q} = \frac{1}{R} \left( V_s - \frac{zQ}{\varepsilon A} \right) \quad (2.15)$$

## 2.4. Análisis del Fenómeno de *Pull-In*

En esta sección se evidencia con base en el modelo obtenido el fenómeno de *pull-in* que se presenta en actuadores electrostáticos y que reduce de manera significativa su rango de operación en lazo abierto.

El fenómeno de *pull-in* se puede constatar de la siguiente manera: si se aplica un voltaje de entrada  $V_s$  al sistema en reposo entonces circulará un flujo de cargas eléctricas las cuales se almacenarán en las placas del capacitor. Las cargas eléctricas almacenadas en las placas son de signo contrario por lo que se genera una diferencia de potencial entre ellas. La diferencia de potencial da lugar a que se presente una fuerza de atracción de origen electrostático entre placas. La placa superior es movable por lo que al presentarse

la fuerza de atracción electrostática la distancia entre las placas disminuye, es decir, la placa superior móvil se aproxima a la inferior fija. A la par se generará una fuerza restauradora en el resorte que se opone al movimiento del electrodo superior móvil. La fuerza restauradora del resorte es lineal y la fuerza de origen electrostático que estira al resorte es cuadrática. Si se aumenta paulatinamente el voltaje de entrada  $V_s$  hasta alcanzar un valor crítico, denominado voltaje de *pull-in*, el electrodo superior colisiona súbitamente con el inferior fijo. Este efecto se produce cuando la fuerza restauradora lineal del resorte es completamente desbordada por la fuerza electrostática cuadrática del capacitor. A partir de ese instante la fuerza del resorte es incapaz de equilibrar la fuerza de electrostática entre placas. Como ya se dijo, cuando se presenta el fenómeno de *pull-in* la placa superior móvil colisiona de súbito con la inferior. Para evitar que se produzca un corto circuito al ponerse en contacto directo las placas conductoras se deposita una película aislante en la placa inferior.

#### 2.4.1. Voltaje $V_{pull-in}$ y desplazamiento $z_{pull-in}$

En esta subsección se obtienen las expresiones  $V_{pull-in}$  y  $z_{pull-in}$ . Estas son útiles para identificar el momento en el cual se produce el fenómeno de *pull-in*.

La fuerza neta de la placa superior está dada por (2.16)

$$F_{net} = - \left( k(z - z_0) + b\dot{z} + \frac{\varepsilon AV_a^2}{2z^2} \right) \quad (2.16)$$

Cuando la placa está en equilibrio se cumple que:

$$F_{net} = 0 \quad (2.17)$$

y

$$\dot{z} = 0 \quad (2.18)$$

De (2.16), (2.17) y (2.18) se tiene

$$- \left( k(z - z_0) + \frac{\varepsilon A V_a^2}{2z^2} \right) = 0 \quad (2.19)$$

Si se considera al voltaje  $V_a$  constante, se multiplica (2.19) por  $z^2$  y se deriva con respecto  $z$  se obtiene la distancia a la cual se produce el fenómeno de *pull-in*. A este valor se le conoce como la distancia de *pull-in*.

$$z_{pull-in} = \frac{2}{3}z_0 \quad (2.20)$$

Sustituyendo (2.20) en (2.19) se obtiene el valor crítico del voltaje al cual se produce el fenómeno de *pull-in*, por eso se le conoce como voltaje de *pull-in*.

$$V_{pull-in} = \sqrt{\frac{8kz_0^2}{27C_0}}; \quad \text{con } C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{z_0} \quad (2.21)$$

Otra cantidad a considerar es la carga de *pull-in*,  $Q_{pull-in}$ , ésta se da cuando se produce el voltaje de *pull-in*,  $V_{pull-in}$  (2.21) y las placas están separadas una distancia  $z_{pull-in}$  (2.20). La capacitancia en ese instante está dada por (2.22)

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{z_{pull-in}} = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_0 A}{z_0} = \frac{3}{2} C_0 \quad (2.22)$$

Por otro lado, la carga está relacionada con la capacitancia y el voltaje por  $Q = CV$  de donde se deriva (2.23)

$$Q_{pull-in} = \frac{3}{2} C_0 V_{pull-in} \quad (2.23)$$

Es importante remarcar que inmediatamente después de que se produce el fenómeno de *pull-in* la placa superior se colapsa abruptamente hacia la placa inferior fija. Es en este momento en el cual la fuerza restauradora del resorte, que se opone al libre movimiento de la placa superior no puede contrarrestar la fuerza electrostática entre placas.

## 2.5. Representación de la Dinámica en Ecuaciones Normalizadas

En esta sección se presentan las ecuaciones normalizadas de la dinámica del actuador electrostático. El objetivo principal de normalizar las ecuaciones es simplificar el análisis de la dinámica y diseño de los controladores. Al normalizar el modelo; primero se reduce el número de parámetros y segundo se evitan complicaciones numéricas en las simulaciones.

A continuación se presenta los factores con los cuales se normalizarán las variables y los parámetros de las ecuaciones diferenciales que modelan la dinámica del actuador.

$$x_1 = \frac{z}{z_0} \quad (2.24)$$

$$u_s = \frac{V_s}{V_{pull-in}} \quad (2.25)$$

$$x_3 = \frac{Q}{Q_{pull-in}} \quad (2.26)$$

$$\tau = \omega_0 t; \text{ con } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.27)$$

La posición de la placa  $z$  (2.24) se normalizó con respecto a la distancia de voltaje cero  $z_0$ , el voltaje de la fuente  $V_s$  (2.25) con respecto al voltaje de *pull-in*  $V_{pull-in}$  (2.21), la carga acumulada en el capacitor de placas planas paralelas  $Q$  (2.26) con respecto a la carga de *pull-in*  $Q_{pull-in}$  (2.23) y el tiempo  $t$  (2.27) con respecto a la frecuencia natural del sistema  $\omega_0$ .

El modelo matemático normalizado que describe la dinámica del actuador electrostático está dado por (2.28), (2.29) y (2.30).

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2.28)$$

$$\dot{x}_2 = -(x_1 - 1) - 2\zeta x_2 - \frac{1}{3}x_3^2 \quad (2.29)$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{r} \left( \frac{2}{3} u_s - x_1 x_3 \right) \quad (2.30)$$

donde:  $x_1$  representa la posición normalizada,  $x_2$  la velocidad normalizada,  $x_3$  la carga normalizada. El parámetro  $\zeta = \frac{b}{2m\omega_0}$  representa el factor de amortiguamiento normalizado y  $r = \omega_0 C_0 R$  la resistencia normalizada.

En el Apéndice A se presenta de manera detallada la obtención de las ecuaciones normalizadas (2.28), (2.29) y (2.30).

Si bien es cierto que al normalizar el sistema dimensional los parámetros resultantes son adimensionales, éstos no dejan de ser una combinación de los parámetros dimensionales. En la Tabla 2.1 se presentan los valores de los parámetros dimensionales a partir de los cuales se obtuvieron los parámetros adimensionales utilizados en las simulaciones de este trabajo de tesis [22].

Parámetro	Símbolo	Valor
Permitividad del aire	$\varepsilon_0$	$8.85 \times 10^{-12} \frac{Nm^2}{C^2}$
Área de la placa móvil	A	$100 \times 300 \times 10^{-12} m^2$
Masa de la placa móvil	m	$2.16 \times 10^{-10} \text{ Kg}$
Constante de viscosidad	b	$2.75 \times 10^{-5} \frac{Ns}{m}$
Posición con $V_s = 0$	$z_0$	$5 \times 10^{-6} m$
Resistencia de la fuente	R	$2 \times 10^6 \Omega$
Constante del resorte	k	$1.663 \frac{N}{m}$

Tabla 2.1: Valores de los parámetros

## 2.6. Ilustración del fenómeno de *Pull-In*

En esta sección, empleando el modelo matemático normalizado, se ilustra de manera numérica el momento en el cual la fuerza restauradora del resorte es incapaz de contrarrestar la fuerza electrostática del capacitor. Esto ocurre cuando el voltaje de actuación

normalizado  $u_a > 1$ , es decir,  $V_{actuacion} > V_{pull-in}$ . Cuando el voltaje de actuación sobrepasa al voltaje de *pull-in* no hay manera de equilibrar al electrodo superior y éste se colapsa abruptamente hacia el inferior.

La fuerza neta normalizada está dada por la ecuación (2.31)  $F_{netnorm}$ .

$$F_{netnorm} = -(x_1 - 1) - 2\zeta x_2 - \frac{4}{27} \left( \frac{u_a}{x_1} \right)^2 \quad (2.31)$$

donde:  $u_a = \frac{V_a}{V_{pull-in}}$  representa el voltaje de actuación normalizado.

Cuando el electrodo esta en estado estable  $x_2 = 0$  y la fuerza normalizada del resorte  $F_{mnorm}$  es equivalente a la fuerza normalizada electrostática  $F_{enorm}$ .

$$F_{mnorm} = 1 - x_1 \quad (2.32)$$

$$F_{enorm} = -\frac{4}{27} \left( \frac{u_a}{x_1} \right)^2 \quad (2.33)$$

En la Figura 2.2 se aprecia que para valores de  $u_a < 1$  ( $V_a < V_{pull-in}$ ) la fuerza mecánica restauradora del resorte puede contrarrestar el efecto de la fuerza de atracción electrostática presente entre los electrodos. Se tienen dos puntos de equilibrio para la fuerza neta normalizada en estado estable, es decir, cuando  $x_2 = 0$  y  $F_{mnorm} = F_{enorm}$ . Cuando  $u_a = 1$  ( $V_a = V_{pull-in}$ ) se tiene un solo punto de equilibrio. Por último, cuando  $u_a > 1$  ( $V_a > V_{pull-in}$ ) no existe ningún punto de equilibrio, es decir, no hay manera de que la fuerza mecánica restauradora del resorte pueda contrarrestar la fuerza electrostática entre electrodos. Es en este momento en el cual la fuerza de atracción electrostática sobrepasa a la fuerza mecánica y domina el comportamiento de los electrodos provocando que el electrodo superior se colapse súbitamente hacia el inferior. En el capítulo 2.7 se determina la naturaleza de los puntos de equilibrio, es decir, si son estables o inestables.

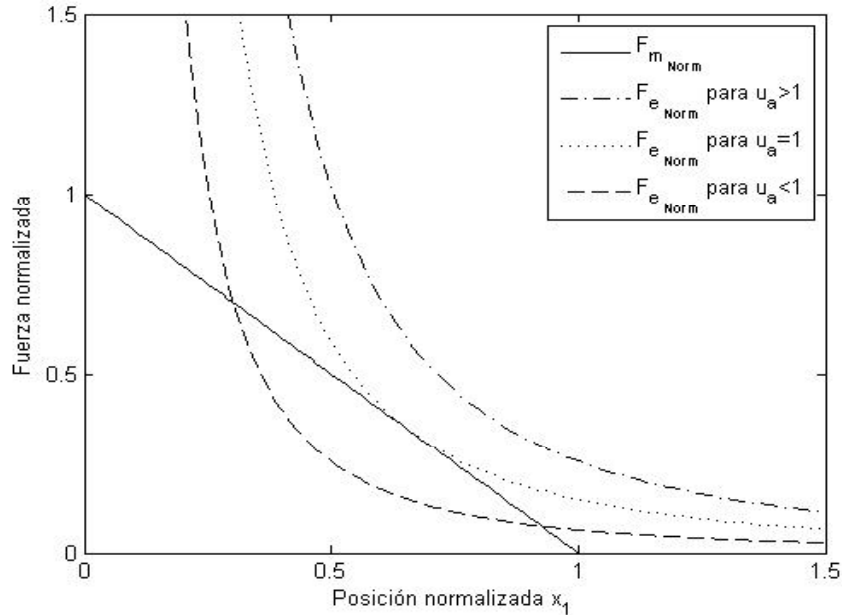


Figura 2.2: Equilibrio de Fuerzas (mecánica y electrostática)

## 2.7. Análisis de Estabilidad por el Método de Linealización

El objetivo de esta sección, y las subsiguientes de este capítulo, es analizar el comportamiento de los puntos de equilibrio del actuador electrostático.

Dado un sistema de control, la primera y más importante cuestión es si es o no estable en el punto de operación, ya que un sistema inestable no sólo no es útil sino también potencialmente peligroso. Cualitativamente, un sistema es estable si las trayectorias temporales que empiezan en las cercanías de un punto de operación permanecen en sus cercanías. El método de linealización fue introducido por el matemático ruso Lyapunov. Este método permite obtener conclusiones acerca de la estabilidad local de un sistema no lineal a partir de su aproximación lineal [26].

### 2.7.1. Linealización de un sistema no lineal

La dinámica de un sistema no lineal se puede representar como un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales de la forma

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2.34)$$

$$y = g(x, u) \quad (2.35)$$

donde  $f$  es un vector de  $n \times 1$  funciones,  $x$  es un vector de  $n \times 1$  estados,  $u$  es un vector de  $n \times 1$  entradas. Las funciones  $f$  y  $g$  son funciones no lineales del estado y las entradas. El número de estados  $n$  indica el orden del sistema.

Un estado  $x_*$  es un punto de equilibrio del sistema si una vez que  $x(t)$  es igual a  $x_*$ , éste permanece igual  $x_*$  para todo tiempo futuro [26]. Matemáticamente los puntos de equilibrio de un sistema no lineal se pueden obtener resolviendo la ecuación (2.36).

$$f(x_*, u_*) = 0 \quad (2.36)$$

#### 2.7.1.1. Técnica de linealización

Mediante la técnica de linealización, excepto para algunos casos especiales, es posible determinar el comportamiento cualitativo de un sistema no lineal en las cercanías de un punto de equilibrio [11]. Esta técnica se emplea para determinar si un punto de equilibrio es estable o inestable siempre que la parte real de los eigenvalores resultantes sea diferente de cero. Supóngase que

$$x(t) = X_0 + \delta x(t) \quad (2.37)$$

y

$$u(t) = U_0 + \delta u(t) \quad (2.38)$$



donde  $X_0$  y  $U_0$  es el punto de operación. Si se sustituyen (2.37) y (2.38) en (2.34) y se desarrolla en series de Taylor

$$\delta\dot{x}(t) = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \bigg|_{X_0, U_0} \right) \delta x(t) + \left( \frac{\partial f}{\partial u} \bigg|_{X_0, U_0} \right) \delta u(t) \quad (2.39)$$

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{x}_1 \\ \vdots \\ \delta\dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \bigg|_{X_0, U_0} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \vdots \\ \delta x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{pmatrix} \bigg|_{X_0, U_0} \begin{pmatrix} \delta u_1 \\ \vdots \\ \delta u_n \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

donde el primer Jacobiano es una matriz de  $n \times n$ ,  $n$  representa el número de variables del estado. El segundo Jacobiano es una matriz de  $n \times m$ ,  $m$  representa el número de entradas.

Una vez linealizado el sistema se evalúa el Jacobiano del sistema en los equilibrios resultantes de resolver (2.36) con entrada cero. Si todos los eigenvalores resultantes del Jacobiano tienen parte real negativa, es decir, están en la parte izquierda del plano complejo, el punto de equilibrio es estable. Si alguno de los eigenvalores tiene parte real positiva el punto de equilibrio es inestable [11], [26].

## 2.8. Puntos de Equilibrio del Actuador Electroestático

En esta sección se obtienen los puntos de equilibrio del actuador electrostático y se determina si son estables o inestables de acuerdo a la teoría presentada en la sección (2.7).

Por conveniencia se reproducen nuevamente las ecuaciones dinámicas normalizadas del actuador (2.28), (2.29) y (2.30).

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2.41)$$

$$\dot{x}_2 = -(x_1 - 1) - 2\zeta x_2 - \frac{1}{3}x_2^2 \quad (2.42)$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{r} \left( \frac{2}{3} u_s - x_1 x_3 \right) \quad (2.43)$$

- Primero se obtienen los puntos de equilibrio.

Para lograr este propósito se igualan (2.41), (2.42) y (2.43) a cero y se resuelve el sistema algebraico resultante.

$$0 = x_{2eq} \quad (2.44)$$

$$0 = -(x_{1eq} - 1) - 2\zeta x_{2eq} - \frac{1}{3} x_{3eq}^2 \quad (2.45)$$

$$0 = \frac{1}{r} \left( \frac{2}{3} u_s - x_{1eq} x_{3eq} \right) \quad (2.46)$$

Despejando  $x_{1eq}$  de (2.45) y como  $x_{2eq} = 0$  (2.44)

$$x_{1eq} = 1 - \frac{1}{3} x_{3eq}^2 \quad (2.47)$$

Ahora se sustituye (2.47) en (2.46) y se obtiene una ecuación de tercer grado. Las tres raíces resultantes de resolver la ecuación (2.48) son los puntos de equilibrio del actuador. Para resolver la ecuación (2.48) se considera el voltaje normalizado  $u_s$  como una constante positiva.

$$x_{3eq}^3 - 3x_{3eq} + 2u_s = 0 \quad (2.48)$$

Las tres raíces resultantes de resolver (2.48) están dadas por (2.49), (2.50) y (2.51).

$$x_{3eq1} = \psi + \frac{1}{\psi} \quad (2.49)$$

$$x_{3eq2} = -\frac{1}{2} \left( \psi + \frac{1}{\psi} \right) + \frac{i\sqrt{3}}{2} \left( \psi - \frac{1}{\psi} \right) \quad (2.50)$$

$$x_{3eq3} = -\frac{1}{2} \left( \psi + \frac{1}{\psi} \right) - \frac{i\sqrt{3}}{2} \left( \psi - \frac{1}{\psi} \right) \quad (2.51)$$

donde:  $\psi = \left(-u_s + \sqrt{u_s^2 - 1}\right)^{\frac{1}{3}}$

- Segundo se obtiene el Jacobiano del actuador a partir de (2.41), (2.42) y (2.43).

Una vez obtenido el Jacobiano se evalúan los puntos de equilibrio,  $x_{eq} = (x_{1eq}, x_{2eq}, x_{3eq})$ .

Si la parte real de al menos uno de los tres eigenvalores resultantes del Jacobiano es positiva se tiene un punto de equilibrio inestable. Si la parte real de los tres eigenvalores es negativa se tiene un punto de equilibrio estable. En caso de tener eigenvalores con parte real cero este criterio de estabilidad no es suficiente para establecer si la naturaleza del punto de equilibrio.

$$Jacobian = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2\zeta & -\frac{2}{3}x_{3eq} \\ -\frac{x_{3eq}}{r} & 0 & -\frac{x_{1eq}}{r} \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

## 2.9. Simulación Numérica

En esta sección se visualizan mediante simulaciones numéricas los resultados analíticos de la sección (2.8). Los parámetros utilizados en las simulaciones tanto el factor de amortiguamiento normalizado  $\zeta$  como la resistencia normalizada  $r$  se toman de acuerdo a los parámetros de la Tabla 2.1.

En la Figura 2.3 se observa el comportamiento de las raíces (2.49), (2.50) y (2.51) conforme varía el valor de  $u_s$  en el intervalo  $0 \leq u_s \leq 1$ . La carga eléctrica normalizada  $x_3$  almacenada en la placa móvil debe ser positiva o nula debido a que el voltaje de entrada  $u_s$  es positivo o cero. Como se aprecia en la Figura 2.3 la raíz  $x_{3eq2}$  es negativa y por lo tanto se descarta. Se puede comprobar que está raíz genera posiciones negativas  $x_{1eq2}$  numéricamente posibles, no así físicamente.

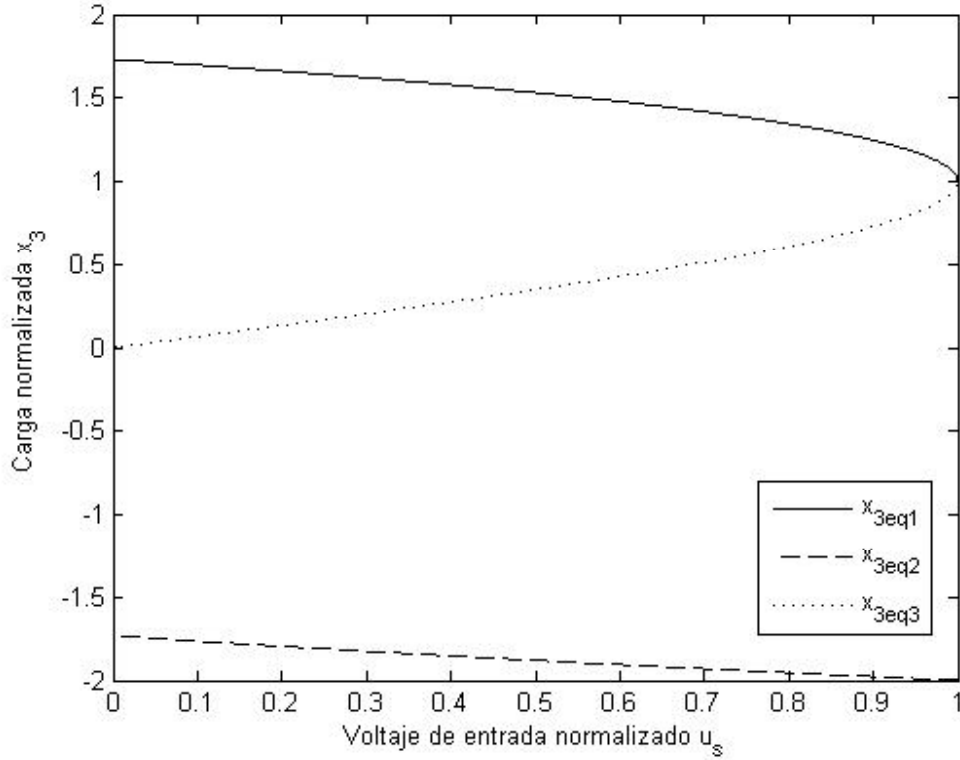


Figura 2.3: Trayectorias de las raíces

En la Figura 2.4 se observa el comportamiento de la posición  $x_{1eq1}$  y de la posición  $x_{1eq3}$ . Conforme el voltaje  $u_s$  se aproxima al valor crítico  $u_s = 1$  las dos trayectorias se aproximan entre sí. En la gráfica se aprecia que el momento en el que las trayectorias se intersectan se da en  $x_1 = \frac{2}{3}$ .

En la Figura 2.5 se presentan las trayectorias de la parte real de los eigenvalores resultantes de evaluar el punto de equilibrio  $P(x_{1eq3}, 0, x_{3eq3})$ . Las tres trayectorias son negativas, por lo tanto, el punto de equilibrio es estable.

En la Figura 2.6 se presentan las trayectorias de la parte real de los eigenvalores resultantes de evaluar el punto de equilibrio  $P(x_{1eq1}, 0, x_{3eq1})$ . Una de las tres trayectorias es positiva, por lo tanto, el punto de equilibrio es inestable.

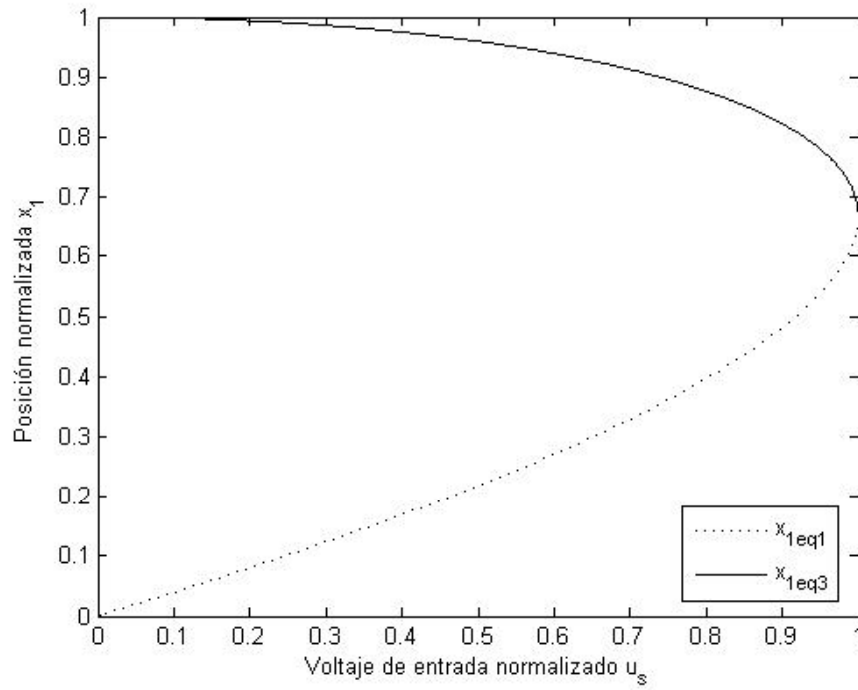


Figura 2.4: Gráfica de las raíces  $x_{eq}$  positivas

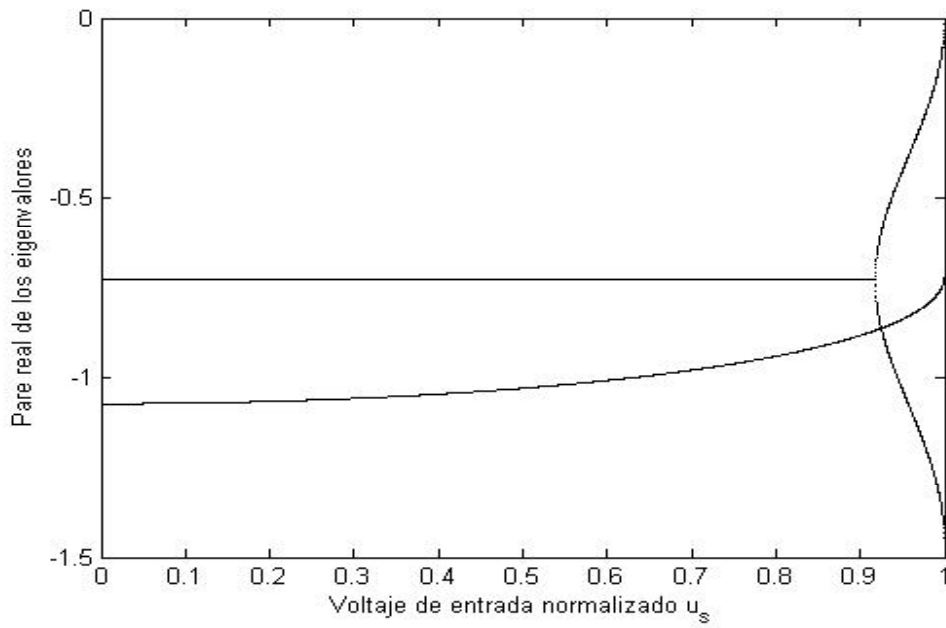


Figura 2.5: Parte real de los eigenvalores del punto de equilibrio estable

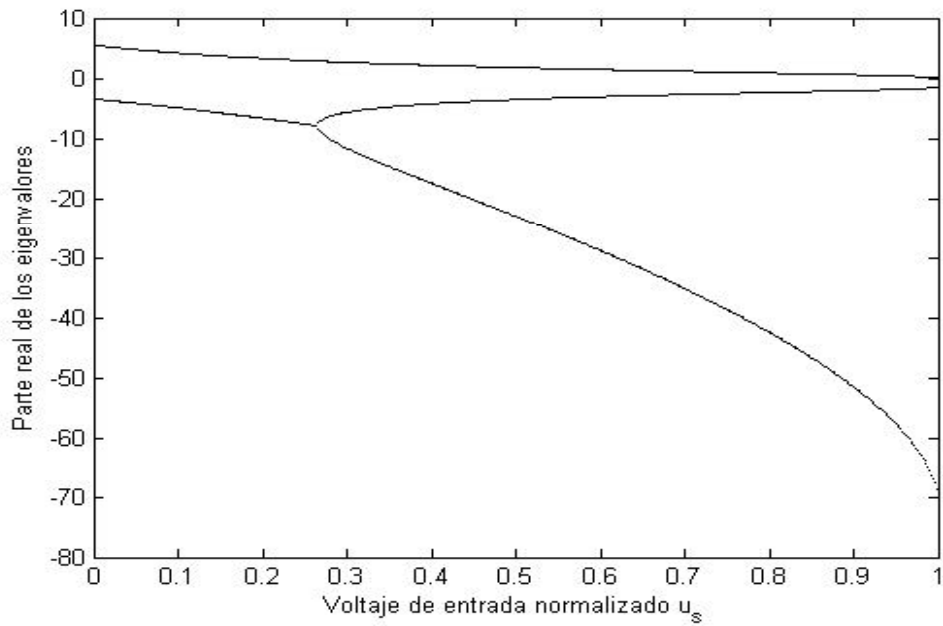


Figura 2.6: Parte real de los eigenvalores del punto de equilibrio inestable

En la Figura 2.7 se verifica el fenómeno de pull-in de manera gráfica. Se aplican diferentes valores constantes de voltaje  $u_s$  a la entrada del actuador. Como se ve en la figura cuando el voltaje  $u_s$  es mayor a uno el electrodo movable colisiona con el inferior, mientras que para valores de  $u_s$  menores a uno el electrodo movable se equilibra. El rango para el cual se logra equilibrar el electrodo movable es  $\frac{2}{3} \leq x_1 \leq 1$ , como era de esperarse.

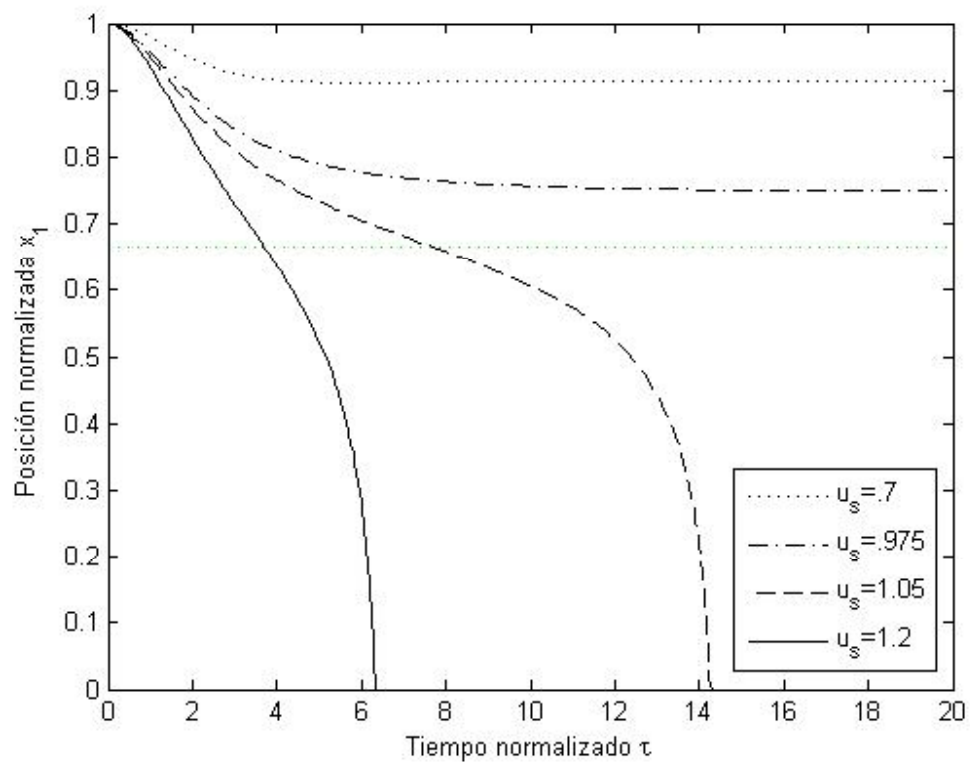


Figura 2.7: Posición del electrodo superior

# Capítulo 3

## Metodología IDA-PBC

### 3.1. Introducción

### 3.2. Control Basado en Pasividad, PBC

El Control Basado en Pasividad (PBC, por sus siglas en inglés), introducido en [15], es el nombre genérico dado a una familia de técnicas de diseño de controladores que logran la estabilidad del sistema vía las propiedades de sistemas pasivos. La estructura del sistema en lazo cerrado es pasiva con respecto a una función de almacenamiento deseada (función que usualmente califica como una función de Lyapunov en el análisis de estabilidad).

La característica principal de esta metodología en el diseño del controlador se basa en el uso de las propiedades de almacenamiento y disipación de energía del sistema.

La metodología aplica de manera adecuada en aquellos sistemas que pueden ser modelados por ecuaciones de Euler-Lagrange o ecuaciones Hamiltonianas. Cuando se describen los sistemas físicos con este tipo de representaciones matemáticas quedan visibles ciertas propiedades estructurales que pueden ser explotadas en el diseño de los esquemas de control.

Una vez modelado el sistema pasivo se verifica que las trayectorias (las soluciones de las ecuaciones diferenciales del modelo matemático que describe el comportamiento



del sistema físico) tiendan al punto mínimo de energía a una velocidad proporcional a la cantidad de energía disipada.

Como consecuencia inmediata en el PBC se proponen como pasos básicos para el diseño de leyes de control las siguientes dos etapas:

Moldeo de energía. Modificar la entrada de control del sistema a controlar de tal manera que el sistema en lazo cerrado posea una función de energía tal que su valor mínimo coincida con un punto de operación deseado.

Inyección de amortiguamiento. Lograr que el sistema en lazo cerrado disipe la mayor cantidad de energía de tal forma que el punto de operación deseado se alcance en el menor tiempo posible.

El PBC se puede clasificar en dos ramas principales:

PBC estándar, en el cual se selecciona a priori una función de almacenamiento, típicamente cuadrática, y posteriormente se diseña el controlador que logra que la función de almacenamiento sea no creciente. Esta rama está fuertemente ligada al concepto de estabilidad en el sentido de Lyapunov.

En la segunda rama de PBC no se fija la función de almacenamiento en lazo cerrado, sino que se busca una estructura PCH deseada y después caracterizar todas las funciones de energía asignables compatibles con esta estructura. Esta caracterización se logra resolviendo un conjunto de Ecuaciones diferenciales Parciales, PDE.

### 3.3. Metodología IDA-PBC para PCHS

La metodología IDA-PBC fue introducida en [17, 18] como un procedimiento para controlar sistemas físicos descritos por Sistemas Hamiltonianos Controlados por Puerto, PCHS, representados de la forma

$$PCHS = \begin{cases} \dot{x} = (J(x) - R(x))\nabla H + g(x)u \\ y = g^T(x)\nabla H \end{cases} \quad (3.1)$$

donde:  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$  es el vector de estados,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ ,  $m < n$  es la acción de control,  $\mathbf{H} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es la energía total almacenada,  $J(x) = -J^T$ ,  $R(x) = R^T \geq$  son las matrices naturales de interconexión y de amortiguamiento, respectivamente, además,  $\mathbf{u}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  son variables conjugadas, es decir, su producto resulta en unidades de potencia. La elección de PCHS se debe a que un gran número de sistemas físicos se pueden modelar bajo esta estructura, ampliamente discutida en [27]. Con esta técnica de control lo que se busca es regular el comportamiento de un sistema no lineal asignándole una estructura Hamiltoniana deseada en lazo cerrado [14].

Con la técnica de IDA-PBC se busca regulación del comportamiento de sistemas no lineales asignando una estructura Hamiltoniana Controlada por Puerto, PCH, deseada en lazo cerrado. La estructura PCH deseada en lazo cerrado permite apreciar propiedades del sistema descritas por las matrices de interconexión y amortiguamiento.

Esta técnica de control ha sido aplicada para controlar sistemas físicos de diferente naturaleza: sistemas mecánicos [1, 16], sistemas magnéticos de levitación [20, 21], máquinas eléctricas [2, 19], convertidores de potencia [8, 9], sistemas de potencia [7, 13].

La propiedad de Pasividad juega un rol central en esta técnica de diseño de controladores.

### 3.3.1. Metodología IDA-PBC Representación General

La metodología IDA-PBC se puede aplicar a una clase más general de sistemas físicos. A continuación se demuestra que la metodología IDA-PBC permite el diseño por realimentación de estados de sistemas de la forma

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (3.2)$$

donde:  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$  es el vector de estados,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ ,  $m < n$  es la acción de control. Se propone una estructura en lazo cerrado de la forma

$$\dot{x} = (J_d(x) - R_d(x))\nabla H_d \quad (3.3)$$

donde:  $J_d(x) = -J_d^T(x)$  y  $R_d(x) = R_d^T(x) \geq 0$ , representan las matrices deseadas de interconexión y disipación respectivamente, de ahí el nombre de IDA, y  $H_d : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es la función de energía deseada.

Si se cumple que la Ecuación Diferencial Parcial, (EDP).

$$g^\perp(x)f(x) = g^\perp(x)(J_d(x) - R_d(x))\nabla H_d \quad (3.4)$$

donde:  $g^\perp(x)$  es un aniquilador izquierdo de  $g(x)$ , es decir,  $g^\perp(x)g(x) = 0$  y  $H_d(x)$  es tal que

$$x_* = \operatorname{argmin} H_d(x) \quad (3.5)$$

con  $\mathbf{x}_* \in \mathbb{R}^n$  representa el equilibrio a estabilizar. Entonces el sistema (3.2) en lazo cerrado con  $u = \beta(x)$ , toma la forma (3.3)

$$\beta(x) = [g^\perp(x)g(x)]^{-1}g^\top(x) \{[J_d(x) - R_d(x)]\nabla H_d - f(x)\} \quad (3.6)$$

con  $\mathbf{x}_*$  un punto de equilibrio estable. El punto de equilibrio  $\mathbf{x}_*$  será asintóticamente estable, si además, es un mínimo de  $H_d(x)$  y el conjunto invariante más grande de la dinámica en lazo cerrado de (3.3) contenido en

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid [\nabla H_d]^\top R_d \nabla H_d = 0\} \quad (3.7)$$

es igual a  $\{\mathbf{x}_*\}$ .

### 3.3.2. Prueba de Estabilidad

Sustituyendo (3.6) en el lado derecho de (3.2), con  $u = \beta(x)$ , e igualando con (3.3) se obtiene la ecuación de *matching*.

$$f(x) + g(x)\beta(x) = [J_d(x) - R_d(x)]\nabla H_d \quad (3.8)$$

premultiplicando por  $g^\perp(x)$  se obtiene la EDP (3.4). La ley de control se obtiene pre-multiplicando por la pseudoinversa de  $g(x)$ . La estabilidad de  $\mathbf{x}_*$  se establece porque a lo largo de las trayectorias de (3.3), se tiene que

$$\dot{H}_d = -[\nabla H_d]^\top R(x) \nabla H_d \leq 0 \quad (3.9)$$

Por lo tanto,  $H_d$  califica como una función de Lyapunov. La estabilidad asintótica se puede establecer por medio del principio de invariancia de La Salle y la condición (3.7).

### 3.4. Métodos para Resolver la Ecuación de *Matching*

La clave en la obtención de la ley de control empleando la metodología IDA-PBC se basa en la solución de la ecuación de *matching* (3.4).

Se han propuesto varias técnicas en la literatura para seleccionar las matrices  $J_d$ ,  $R_d$  de interconexión y amortiguamiento deseadas, respectivamente, así como de la función de energía deseada  $H_d$  que satisfacen  $J_d(x) = -J_d^T(x)$ ,  $R_d(x) = R_d^T(x) \geq 0$  y  $x_* = \operatorname{argmin} H_d(x)$ . Los diferentes procedimientos se discuten con mayor detalle en [14].

- Método Algebraico: Originalmente propuesto en [6]. Se selecciona la ecuación Hamiltoniana deseada  $H_d(x)$  y a partir de ella se resuelven las ecuaciones algebraicas resultantes para  $J_d(x)$  y  $R_d(x)$ .
- Parametrizado: Originalmente propuesto en [16]. Se aplica principalmente a sistemas mecánicos subactuados, es indispensable tener conocimiento a priori de la estructura Hamiltoniana deseada el cual se utiliza para obtener una EDP menos compleja de resolver.

# Capítulo 4

## Diseño de los Controladores por IDA-PBC

### 4.1. Introducción

En este Capítulo 4 se diseñan un par de controladores basados en la técnica IDA-PBC, de acuerdo al marco teórico expuesto en el Capítulo 3.

El punto donde la energía en lazo abierto es mínima usualmente no es el punto que interesa controlar, es entonces que se introducen técnicas de control para operar alrededor de un punto de equilibrio deseado  $x^*$  [16].

En general la función de energía total de los sistemas físicos es buena candidata como función de almacenamiento  $H(x)$ . Sin embargo, la función de energía total del actuador electrostático no es definida positiva en todos los puntos de equilibrio deseados. Por lo que es necesario moldear la función de energía total, tal que sea semidefinida positiva o incluso definida positiva para los puntos de equilibrio deseados.

### 4.2. Modelo de la Dinámica del Error

El objetivo de los controladores de este trabajo de tesis es lograr regulación en cualquier posición dentro de la distancia  $z_0$  que separa a las placas cuando no se le aplica voltaje alguno a la entrada. El diseño de los controladores se obtiene a partir de las

ecuaciones dinámicas del error. Éstas se contruyen con la diferencia entre las ecuaciones diferenciales normalizadas que describen la dinámica del actuador y las ecuaciones algebraicas que describen el conjunto de puntos de equilibrio.

Las ecuaciones diferenciales normalizadas que describen la dinámica del actuador están dadas por (4.1), (4.2) y (4.3).

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4.1)$$

$$\dot{x}_2 = -(x_1 - 1) - 2\zeta x_2 - \frac{x_3^2}{3} \quad (4.2)$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{x_1 x_3}{r} + \frac{2u}{3r} \quad (4.3)$$

Por otro lado, las ecuaciones algebraicas que describen el conjunto de puntos de equilibrio posibles del sistema están dadas por (4.4), (4.5) y (4.6).

$$x_2^* = 0 \quad (4.4)$$

$$-(x_1^* - 1) - 2\zeta x_2^* - \frac{(x_3^*)^2}{3} = 0 \quad (4.5)$$

$$-\frac{x_1^* x_3^*}{r} + \frac{2u^*}{3r} = 0 \quad (4.6)$$

donde:  $x^* = (x_1^*, 0, \sqrt{3(1-x_1^*)})$  representa el conjunto de equilibrios y  $x_1^*$  la posición deseada del electrodo movable del actuador electrostático. El control constante correspondiente está dado por  $u_* = \frac{3x_1^* \sqrt{3(1-x_1^*)}}{2}$ .

Finalmente, sustrayendo las ecuaciones algebraicas en el equilibrio a las ecuaciones dinámicas del sistema se obtiene el modelo que describe el comportamiento dinámico en términos del error (4.7), (4.8) y (4.9).

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_2^* \quad (4.7)$$

$$\dot{x}_2 = -(x_1 - x_1^*) - 2\zeta(x_2 - x_2^*) - \frac{x_3^2 - (x_3^*)^2}{3} \quad (4.8)$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{x_1x_3 - x_1^*x_3^*}{r} + \frac{2(u - u^*)}{3r} \quad (4.9)$$

El sistema de ecuaciones (4.7), (4.8) y (4.9) se puede representar de la forma:

$$\dot{x} = f(x) - g(x)u = (J - R)\nabla H + g(x)u \quad (4.10)$$

donde:

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 - x_2^* \\ -(x_1 - x_1^*) - 2\zeta(x_2 - x_2^*) - \frac{x_3^2 - (x_3^*)^2}{3} \\ -\frac{x_1x_3 - x_1^*x_3^*}{r} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{3r} \end{bmatrix}^T \quad (4.12)$$

$$J - R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2\zeta & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2r} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$H = \frac{(x_1 - x_1^*)^2}{2} + \frac{(x_2 - x_2^*)^2}{2} + \frac{x_1(x_3^2 - (x_3^*)^2)}{3} - \frac{2x_1^*x_3^*x_3}{3} \quad (4.14)$$

### 4.3. Ley de Control por el Método Algebraico

Como primer paso en la solución de la ecuación de *matching* por el método algebraico se propone una función Hamiltoniana deseada  $H_d$  que tenga un mínimo en el punto de equilibrio a estabilizar  $x^* = \operatorname{argmin} H_d(x)$ .

Una elección recomendable de la función Hamiltoniana deseada  $H_d$  es considerarla cuadrática en términos del error (4.15).

$$H_d(x_1, x_2, x_3) = \frac{\gamma_1(x_1 - x_1^*)^2}{2} + \frac{(x_2 - x_2^*)^2}{2} + \frac{\gamma_2(x_3 - x_3^*)^2}{2} \quad (4.15)$$

donde;  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son parámetros constantes positivos.

De (4.15) se tiene que

$$\nabla H_d = [\gamma_1(x_1 - x_1^*), x_2 - x_2^*, \gamma_2(x_3 - x_3^*)]^T \quad (4.16)$$

Asimismo, es necesario proponer las matrices de interconexión y de disipación generalizadas  $J_d$  y  $R_d$ .

$$J_d = \begin{bmatrix} 0 & J_{12} & J_{13} \\ -J_{12} & 0 & J_{23} \\ -J_{13} & -J_{23} & 0 \end{bmatrix}; \quad R_d = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

### 4.3.1. Solución de la Ecuación de *Matching*

Ahora se resolverá la ecuación de *matching* (4.18) por el método algebraico haciendo uso de la función Hamiltoniana deseada  $H_d$  (4.15) y de las matrices deseadas de interconexión  $J_d$  y de disipación  $R_d$  (4.17) propuestas en conjunto con las ecuaciones (4.13) y (4.14) dadas. Lo que se busca es que la estructura del sistema en lazo cerrado esté dada de la forma (4.18)

$$g^\perp(x)((J(x) - R(x))\nabla H) = g^\perp(x)[J_d(x) - R_d(x)]\nabla H_d \quad (4.18)$$

donde:  $g^\perp(x)$  es un aniquilador izquierdo de  $g(x)$ , es decir,  $g^\perp(x)g(x) = 0$ .

$$g^\perp(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$



El objetivo de premultiplicar  $\dot{x}$  (4.10) por el aniquilador izquierdo  $g^\perp$  (4.19) es desacoplar la parte subactuada de la actuada. Las ecuaciones (4.20) y (4.21) describen la dinámica de la parte subactuada.

$$x_2 - x_2^* = -r_1\gamma_1(x_1 - x_1^*) + J_{12}(x_2 - x_2^*) + \gamma_2 J_{13}(x_3 - x_3^*) \quad (4.20)$$

$$-(x_1 - x_1^*) - 2\zeta(x_2 - x_2^*) - \frac{x_3^2 - (x_3^*)^2}{3} = -J_{12}\gamma_1(x_1 - x_1^*) - r_2(x_2 - x_2^*) + \gamma_2 J_{23}(x_3 - x_3^*) \quad (4.21)$$

Ambas igualdades se deben satisfacer en todo el espacio de estados esto se consigue eligiendo valores para  $J_{12}$ ,  $J_{13}$ ,  $J_{23}$  que pueden ser constantes o variables, pero no negativas, de igual manera  $r_1$ ,  $r_2$ . La estrategia a seguir es elegir los valores de los elementos de las matrices deseadas de amortiguamiento,  $J_d$ , y de disipación,  $R_d$ , de tal manera que la dependencia en las variables de estado en ambos miembros de las ecuaciones se cancele.

Se proponen los siguiente parámetros para satisfacer las ecuaciones (4.20) y (4.21).

$$J_{12} = 1; J_{13} = 0; J_{23} = -\frac{x_3 + x_3^*}{3\gamma_2}; r_1 = 0; r_2 = 2\zeta; \gamma_1 = 1;$$

Esta es una posible elección, existen otros parámetros que satisfacen las desigualdades. Con estos valores la diferencia entre las matrices de interconexión y amortiguamiento ( $J_d - R_d$ ) queda de la siguiente manera:

$$J_d - R_d = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2\zeta & -\frac{x_3 + x_3^*}{3\gamma_2} \\ 0 & \frac{x_3 + x_3^*}{3\gamma_2} & -r_3 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

Finalmente se obtiene la ley de control  $\beta(x)$  (4.24) premultiplicando  $\dot{x}$  (4.10) por la matriz pseudoinversa  $g^\dagger(x)$  de  $g(x)$ , es decir  $g^\dagger(x)g(x) = [I]$

$$g^\dagger(x) = (g(x)^T g(x))^{-1} g(x)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3r}{2} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$u = \beta(x) = g^\dagger ([J_d(x) - R_d(x)] \nabla H_d - f(x)) + u_* \quad (4.24)$$

Sustituyendo los términos respectivos, el control obtenido de resolver la ecuación de *matching* por el método algebraico es (4.25).

$$u = \frac{3r}{2} \left( (x_2 - x_2^*) \left( \frac{x_3 + x_3^*}{3\gamma_2} \right) - r_3 \gamma_2 (x_3 - x_3^*) + \frac{x_1 x_3 - x_1^* x_3^*}{r} \right) + u_* \quad (4.25)$$

donde  $r_3 > 0$  y  $\gamma_2 > 0$  son parámetros libres sintonizables para adecuar el desempeño de la respuesta del controlador.

### 4.3.2. Análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov

El marco teórico necesario para establecer estabilidad en el sentido de Lyapunov se encuentra en el Apéndice B.

Una vez obtenida la función Hamiltoniana  $H_d$  es necesario verificar que tenga un punto mínimo que coincida con el punto de equilibrio deseado a estabilizar y que éste sea estable. Como se verificará a continuación el punto de equilibrio deseado  $x^*$  no sólo es estable sino asintóticamente estable.

La estabilidad en el sentido de Lyapunov del punto de equilibrio deseado  $x_d = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$  se establece a partir de la función Hamiltoniana  $H_d$  obtenida de resolver la ecuación de *matching* por el método algebraico (4.26) la cual se considera una función de Lyapunov.

Sea la función Hamiltoniana,  $H_d$ , (4.15) una función de Lyapunov

$$H_d(x_1, x_2, x_3) = \frac{(x_1 - x_1^*)^2}{2} + \frac{(x_2 - x_2^*)^2}{2} + \frac{\gamma_2 (x_3 - x_3^*)^2}{2} \quad (4.26)$$

Primero, se evalúa  $H_d$  en el punto de equilibrio  $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ , donde  $x_1^*$  es la posición del electrodo móvil a regular,  $x_2^* = 0$  y  $x_3^* = \sqrt{3(1 - x_1^*)}$ .

Evaluando (4.26) se cumple que  $H_d(x) = 0$  para  $x = x^*$ , como era de esperarse.

A continuación se demuestra que el Hessiano de  $H_d$  (4.26) es definido positivo. La matriz Hessiana está dada por (4.27)

$$\nabla^2 H_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

con  $\gamma_2 > 0$ , la función hamiltoniana (4.26) es definida positiva, es decir,  $H_d > 0$  para todo  $x \neq x^*$ .

Ahora se demuestra que la derivada de  $H_d$  es semidefinida positiva, con la finalidad de demostrar estabilidad.

La derivada de  $H_d$  a lo largo de las trayectorias del sistema está dada por

$$\dot{H}d = -2\zeta(x_2 - x_2^*)^2 - r_3\gamma_2^2(x_3 - x_3^*)^2 \quad (4.28)$$

con  $r_3$  y  $\gamma_2 > 0$ . De (4.28) se establece que la función  $\dot{H}d$  es semidefinida negativa,  $\dot{H}d(x^*) \leq 0$ , lo que implica estabilidad.

Por último, se establece estabilidad asintótica empleando el principio de invarianza de La Salle.

De (4.28) se tiene que  $\dot{H}d = 0$  cuando  $x_2 \equiv x_2^*$  y  $x_3 \equiv x_3^*$  para cualquier valor de  $x_1^*$ .

Por otro lado, de la ecuación (4.8) con  $x_2 \equiv x_2^* \Rightarrow \dot{x}_2 = 0$  se cumple que

$$\dot{x}_2 = -(x_1 - x_1^*) - 2\zeta(x_2 - x_2^*) - \frac{x_3^2 - (x_3^*)^2}{3} = 0 \quad (4.29)$$

así  $x_2 \equiv x_2^*$  y  $x_3 \equiv x_3^* \Rightarrow x_1 \equiv x_1^*$

Por lo tanto, el punto de equilibrio es asintóticamente estable.

## 4.4. Ley de Control por el Método Paramétrico

La solución de la ecuación de *matching* por el método paramétrico se basa en fijar parte de la estructura de la función Hamiltoniana deseada  $H_d$ . En este caso se propone mantener sin cambio la parte correspondiente a la energía cinética de (4.14) ya que la velocidad normalizada en el equilibrio es nula tanto para el sistema en lazo abierto como en lazo cerrado. Es decir, para obtener  $H_d$  por el método paramétrico se deja fijo el término  $\frac{(x_2 - x_2^*)^2}{2}$  de la función Hamiltoniana  $H$  (4.14) que a continuación se reproduce (4.30).

$$H = \frac{(x_1 - x_1^*)^2}{2} + \frac{(x_2 - x_2^*)^2}{2} + \frac{x_1(x_3^2 - (x_3^*)^2)}{3} - \frac{2x_1^*x_3^*x_3}{3} \quad (4.30)$$

Por lo que  $H_d$  toma la forma:

$$H_d = \frac{(x_2 - x_2^*)^2}{2} + \varphi(x_1, x_3) \quad (4.31)$$

### 4.4.1. Solución de la Ecuación de *Matching*

En esta subsección se resuelve la ecuación de *matching* (4.32) considerando como base la función Hamiltoniana deseada  $H_d$ , (4.31):

Sea la ecuación de *matching* (4.32).

$$g^\perp(x)((J(x) - R(x))\nabla H) = g^\perp(x)[J_d(x) - R_d(x)]\nabla H_d \quad (4.32)$$

Con matrices de interconexión y de disipación generalizadas  $J_d$  y  $R_d$ .

$$J_d = \begin{bmatrix} 0 & J_{12} & J_{13} \\ -J_{12} & 0 & J_{23} \\ -J_{13} & -J_{23} & 0 \end{bmatrix}; R_d = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Primero se desarrolla la parte derecha de (4.32).

$$(J_d - R_d)\nabla H_d = \begin{bmatrix} -r_1 \frac{\partial H_d}{\partial x_1} + J_{12}(x_2 - x_2^*) + J_{13} \frac{\partial H_d}{\partial x_3} \\ -J_{12} \frac{\partial H_d}{\partial x_1} - r_2(x_2 - x_2^*) + J_{23} \frac{\partial H_d}{\partial x_3} \\ -J_{13} \frac{\partial H_d}{\partial x_1} - J_{23}(x_2 - x_2^*) - r_3 \frac{\partial H_d}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

A continuación se premultiplica (4.34) por  $g^\perp(x)$ .

$$g^\perp(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde  $g^\perp(x)$  un aniquilador izquierdo de  $g(x)$ , es decir,  $g^\perp(x)g(x) = 0$ , por el cual se premultiplica para obtener la parte del sistema sobre la cual no se ejerce acción de control alguna (4.35) y (4.36).

$$x_2 - x_2^* = -r_1 \frac{\partial H_d}{\partial x_1} + J_{12}(x_2 - x_2^*) + J_{13} \frac{\partial H_d}{\partial x_3} \quad (4.35)$$

$$-(x_1 - x_1^*) - 2\zeta(x_2 - x_2^*) - \frac{x_3^2 - (x_3^*)^2}{3} = -J_{12} \frac{\partial H_d}{\partial x_1} - r_2(x_2 - x_2^*) + J_{23} \frac{\partial H_d}{\partial x_3} \quad (4.36)$$

Lo que genera un sistema de ecuaciones en derivadas parciales.

Para resolver el sistema de ecuaciones se observa que en (4.31), la función  $\varphi(x_1, x_3)$  sólo depende de  $x_1$  y  $x_3$ , por lo que  $\frac{\partial H_d}{\partial x_1}$  y  $\frac{\partial H_d}{\partial x_3}$  no generan términos adicionales en la función Hamiltoniana deseada,  $H_d$ , que contengan la variable  $x_2$ . Por lo tanto de (4.35):

$$J_{12}(x_2 - x_2^*) = (x_2 - x_2^*) \Rightarrow J_{12} = 1.$$

Y de (4.36):

$$r_2(x_2 - x_2^*) = -2\zeta(x_2 - x_2^*) \Rightarrow r_2 = 2\zeta$$

Además, en (4.35), con  $J_{12} = 1$  la ecuación queda:

$$-r_1 \frac{\partial H_d}{\partial x_1} + J_{13} \frac{\partial H_d}{\partial x_3} = 0$$

Ya que  $\frac{\partial H_d}{\partial x_1}$  y  $\frac{\partial H_d}{\partial x_3}$  son diferentes de cero, entonces,  $r_1 = 0$  y  $J_{13} = 0$  esto fija parte de la estructura de  $J_d - R_d$

$$J_d - R_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2\zeta & J_{23} \\ 0 & -J_{23} & -r_3 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Para obtener la forma general de  $H_d$  se resuelve la ecuación diferencial parcial resultante (4.38).

$$-\frac{\partial H_d}{\partial x_1} - 2\zeta(x_2 - x_2^*) + J_{23} \frac{\partial H_d}{\partial x_3} = -(x_1 - x_1^*) - 2\zeta(x_2 - x_2^*) - \frac{x_3^2 - (x_3^*)^2}{3} \quad (4.38)$$

De donde se obtiene (4.39):

$$H_d = \frac{(x_1 - x_1^*)^2}{2} + \frac{(x_2 - x_2^*)^2}{2} + \frac{x_1(x_3 - x_3^*)}{3} + \frac{J_{23}(x_1^*)^2}{3} \left( \frac{J_{23}x_1^*}{3} + x_3 \right) + \varphi(x_3 + J_{23}x_1) \quad (4.39)$$

La función (4.31) evaluada en el punto de equilibrio debe ser cero, evaluando obtenemos:

$$H_d(x^*) = \frac{J_{23}(x_1^*)^2}{3} \left( \frac{J_{23}x_1^*}{3} + x_3 \right) + \varphi(x_3 + J_{23}x_1) = 0 \quad (4.40)$$

Sin embargo, se observa que (4.40) no puede ser cero a menos que  $J_{23} = 0$ , con esto (4.31) toma la forma (4.41):

$$H_d = \frac{(x_1 - x_1^*)^2}{2} + \frac{(x_2 - x_2^*)^2}{2} + \frac{x_1(x_3 - x_3^*)}{3} + \varphi(x_3) \quad (4.41)$$

donde:  $\varphi(x_3)$  es una función que se elegirá con el fin de que la función Hamiltoniana  $H_d$  tenga un mínimo en el punto de equilibrio deseado  $x_* = \operatorname{argmin} H_d(x)$ . La estructura de  $J_d - R_d$  queda completamente fija (4.42):

$$J_d - R_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2\zeta & 0 \\ 0 & 0 & -r_3 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Se propone la siguiente función  $\varphi(x_3)$  con el fin de que la función Hamiltoniana  $H_d$  tenga el punto de equilibrio deseado en  $x_* = \operatorname{argmin} H_d(x)$ :

$$\varphi(x_3) = \frac{k_p(x_3 - x_3^*)^2}{2} - \frac{2x_1^*x_3^*(x_3 - x_3^*)}{3} \quad (4.43)$$

donde la constante  $k_p > 0$ .

La estructura final de la función Hamiltoniana deseada resultante en lazo cerrado por el método paramétrico tiene la siguiente estructura (4.44):

$$H_d = \frac{(x_1 - x_1^*)^2}{2} + \frac{(x_2 - x_2^*)^2}{2} + \frac{x_1(x_3 - x_3^*)}{3} + \frac{k_p(x_3 - x_3^*)^2}{2} - \frac{2x_1^*x_3^*(x_3 - x_3^*)}{3} \quad (4.44)$$

Por último, sólo resta obtener la ley de control  $\beta(x)$  (4.45) a partir de (4.11), (4.42) y (4.44)

Con  $g(x)^\dagger = (g^\perp(x)g(x))^{-1}g^\perp(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{3r} \end{bmatrix}$  la pseudoinversa de  $g(x)$ .

$$u = g(x)^\dagger ([J_d(x) - R_d(x)]\nabla H_d - f(x)) + u_* \quad (4.45)$$

Esto genera la ecuación corresponde a la parte actuada y de ella se obtiene la ley de control.

$$u = \frac{3r}{2} \left( -r_3 \left( k_p(x_3 - x_3^*) + \frac{2(x_1x_3 - x_1^*x_3^*)}{3} \right) + \frac{x_1x_3 - x_1^*x_3^*}{r} \right) + u_* \quad (4.46)$$

#### 4.4.2. Análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov

En esta subsección se establece estabilidad en el sentido de Lyapunov del punto de equilibrio deseado  $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$  utilizando la función Hamiltoniana  $H_d$ , obtenida de resolver la ecuación de *matching* por el método paramétrico (4.44), como una función de Lyapunov.

Sea la función Hamiltoniana,  $H_d$ , (4.44) una función de Lyapunov

$$H_d = \frac{(x_1 - x_1^*)^2}{2} + \frac{(x_2 - x_2^*)^2}{2} + \frac{x_1(x_3^2 - (x_3^*)^2)}{3} + \frac{k_p(x_3 - x_3^*)^2}{2} - \frac{2x_1^*x_3^*(x_3 - x_3^*)}{3} \quad (4.47)$$

Primero se evalúa  $H_d$  en el punto de equilibrio deseado  $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ . Es directo ver en (4.47) que se cumple  $H_d(x_*) = 0$ , como era de esperarse.

A continuación se demuestra que la matriz Hessiana de  $H_d$  es definida positiva localmente.

La matriz Hessiana evaluada en el punto de equilibrio:

$$\nabla^2 H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2x_3}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2x_3}{3} & 0 & \frac{2x_1}{3} + k_p \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

Cuyos menores son  $M_1 = 1$ ,  $M_2 = 1$  y  $M_3 = \frac{2x_1}{3} - \frac{4x_3^2}{9} + k_p$ , este último es mayor que cero cuando  $k_p > \frac{2x_1}{3} - \frac{4x_3^2}{9} + k_p$ . Evaluando el Hessiano (4.48) en el punto de equilibrio



$x^* = (x_1^*, 0, \sqrt{3(1-x_1^*)})$  resulta que  $k_p \geq \frac{4}{3} - 2x_1^*$ . Por lo tanto,  $H_d > 0$  para todo  $k_p > 0$ .

A continuación se demuestra que la derivada de  $H_d$  es semidefinida positiva y con ello estabilidad del punto de equilibrio.

La derivada de  $H_d$  a lo largo de las trayectorias del sistema es

$$\dot{H}d = -r_3 \left( \frac{2(x_1x_3 - x_1^*x_3^*)}{3} + k_p(x_3 - x_3^*) \right)^2 - 2\zeta(x_2 - x_2^*)^2 \quad (4.49)$$

Es claro que la función  $\dot{H}d$  es semidefinida negativa  $\dot{H}d \leq 0$ , lo que implica estabilidad.

Finalmente se establece estabilidad asintótica empleando el principio de invarianza de La Salle.

De (4.49) se tiene que  $\dot{H}d = 0$  cuando cada sumando es cero, ya que ambos son cuadrados, así,  $2\zeta(x_2 - x_2^*)^2 = 0 \Rightarrow x_2 \equiv x_2^*$

Por otro lado, de (4.8) con  $x_2 \equiv x_2^*$

$$\dot{x}_2 = -(x_1 - x_1^*) - 2\zeta(x_2 - x_2^*) - \frac{x_3^2 - (x_3^*)^2}{3} \Rightarrow$$

$$-(x_1 - x_1^*) - \frac{x_3^2 - (x_3^*)^2}{3} = 0 \quad (4.50)$$

De (4.49) con  $x_2 \equiv x_2^*$ , se tiene que

$$\dot{H}d = -r_3 \left( \frac{2(x_1x_3 - x_1^*x_3^*)}{3} + k_p(x_3 - x_3^*) \right)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{2(x_1x_3 - x_1^*x_3^*)}{3} + k_p(x_3 - x_3^*) = 0 \quad (4.51)$$

Con las ecuaciones (4.50) y (4.51) se forma un sistema de ecuaciones cuya solución real es  $x_1 \equiv x_1^*$  y  $x_3 \equiv x_3^*$ . Las otras dos soluciones resultan complejas conjugadas y se descartan.

Por lo tanto queda demostrado que el punto de equilibrio es asintóticamente estable.

# Capítulo 5

## Simulación Numérica

### 5.1. Introducción

En este capítulo se presentan simulaciones numéricas con el fin de visualizar el desempeño de las leyes de control desarrolladas en el Capítulo 4 basándose en la técnica IDA-PBC. En la sección 5.2 se presentan las simulaciones numéricas referentes a la ley de control obtenida resolviendo la ecuación de *matching* por el método algebraico y en la sección 5.3 las referentes a la ley de control obtenida de resolver la ecuación de *matching* por el método paramétrico. Finalmente, en la sección 5.4 se evalúa el desempeño de las leyes de control ante la presencia de incertidumbre paramétrica modificando los valores nominales de los parámetros del actuador electrostático. El análisis del comportamiento de los controladores ante la incertidumbre paramétrica es de vital importancia ya que cuando se fabrica un MEMS aún bajo un mismo proceso, con el mismo tipo de materiales y la misma geometría los parámetros varían considerablemente [12].

### 5.2. Ley de Control por Método Algebraico

En esta sección se presentan simulaciones numéricas a través de las cuales se visualiza el desempeño de la ley de control obtenida de resolver la ecuación de *matching* por el método algebraico (5.1).

$$u = \frac{3r}{2} \left( (x_2 - x_2^*) \left( \frac{x_3 + x_3^*}{3\gamma_2} \right) - r_3\gamma_2(x_3 - x_3^*) + \frac{x_1x_3 - x_1^*x_3^*}{r} \right) + u_* \quad (5.1)$$

se consideran  $r_3 = 1$  y  $\gamma_2 = 1$ .

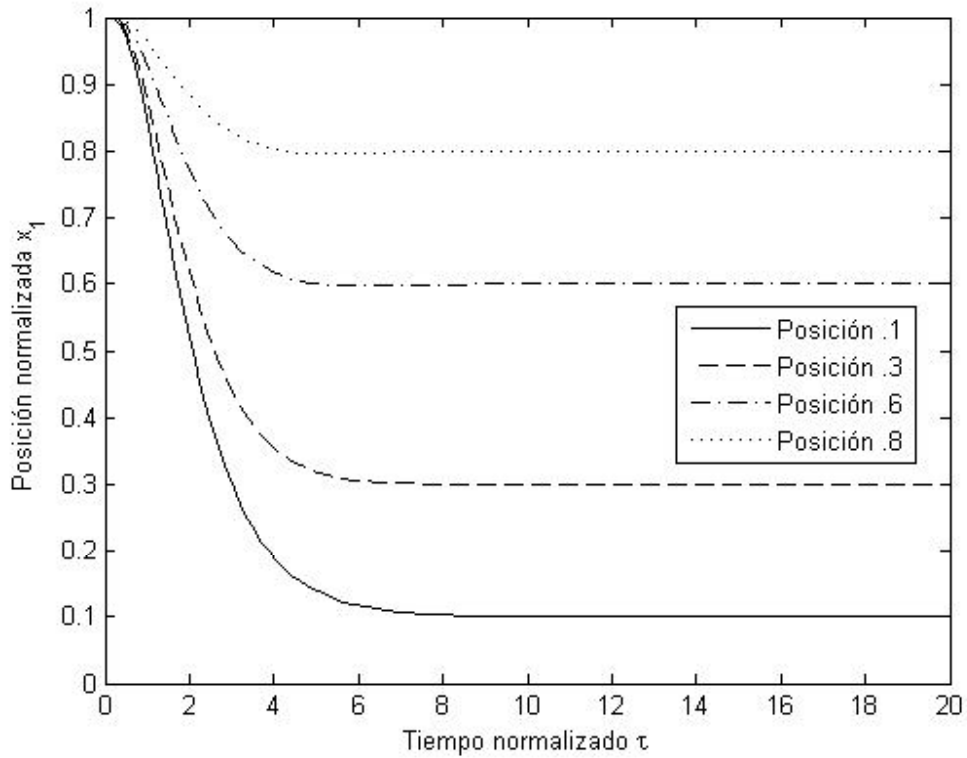


Figura 5.1: Posición del Electrodo Superior

En la Figura 5.1 se muestra el comportamiento de la posición normalizada  $x_1$  del electrodo superior para diferentes valores deseados  $x_1^*$ . Se consideran las mismas condiciones iniciales  $x(0) = (1, 0, 0)$  y los mismos valores de los parámetros  $r_3$  y  $\gamma_2$  en cada variación de la posición deseada  $x_1^*$ . Como se puede apreciar con la ley de control obtenida de resolver la ecuación de *matching* por el método algebraico (5.1) se logra regulación para posiciones mayores y menores a la posición de *pull-in*  $x_{pull-in} = \frac{2}{3}$ .

En el Capítulo 2 se determinó que en lazo abierto se logra regulación sólo para valores de la posición normalizada  $x_1$  ubicados en el intervalo  $\frac{2}{3} \leq x_1 \leq 1$ . En lazo cerrado se logra regulación de la posición deseada normalizada  $x_1^*$  en el intervalo  $1 \geq x_1^* \geq x_{1min}$ . Donde  $x_{1min}$  es el espesor de la película del aislante depositado sobre el electrodo inferior con el fin de evitar el contacto directo entre electrodos que produciría un corto circuito.

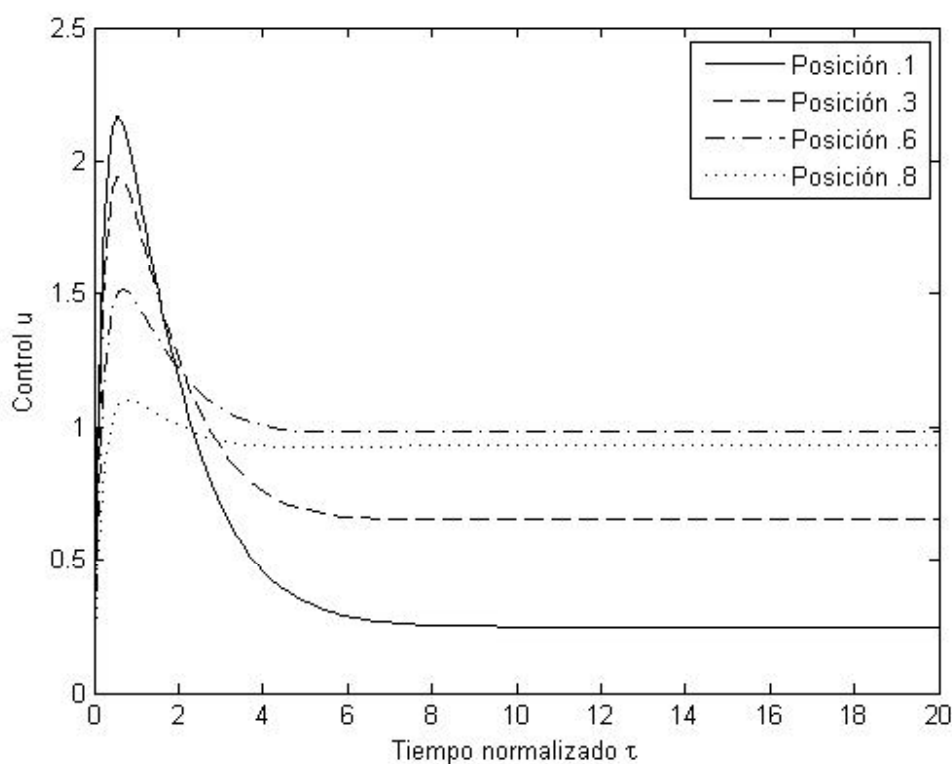


Figura 5.2: Ley de Control. Método Algebraico

En la Figura 5.2 se muestra el comportamiento de la señal de control requerida para estabilizar el electrodo móvil en las posiciones normalizadas deseadas  $x_1^*$  propuestas.

Se observa que los valores de voltaje máximos requeridos de la fuente de suministro  $u$  aumentan a medida que se busca regulación a una distancia más próxima entre electrodos.

### 5.2.1. Superficies y Curvas de Nivel $H_d$ Método Algebraico

En esta subsección se presentan superficies y curvas de nivel de la función Hamiltoniana  $H_d$  obtenida de resolver la ecuación de *matching* por el método algebraico (4.15) que a continuación se reproduce

$$H_d(x_1, x_2, x_3) = \frac{(x_1 - x_1^*)^2}{2} + \frac{(x_2 - x_2^*)^2}{2} + \frac{\gamma_2(x_3 - x_3^*)^2}{2} \quad (5.2)$$

El propósito de mostrar estas gráficas es ilustrar de manera numérica que la función Hamiltoniana  $H_d$  obtenida de resolver la ecuación de *matching* por el método algebraico es definita positiva y que tiene un punto de equilibrio en  $x_* = \operatorname{argmin} H_d(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ . En las simulaciones los valores de los parámetros normalizados  $\zeta = 7.255 \times 10^{-1}$  y  $r = 9.318 \times 10^{-3}$  se calculan con base en los parámetros dimensionales nominales de la Tabla 2.1 y el valor de la constante  $\gamma_2 = 1$  utilizada en el controlador (5.1). El punto de equilibrio elegido con fines de simulación es  $x_* = \operatorname{argmin} H_d(0.1, 0, 1.643)$ .

En la Figura 5.3 se muestra una la superficie de nivel de (5.2) con  $x_3 = x_3^* = 1.643$  la cual debe tener un mínimo en  $x_*(x_1^* = 0.1, x_2^* = 0)$ . En la Figura 5.4 se aprecia en el plano  $x_1x_2$  que con  $x_3^* = 1.643$  el punto  $x_*(x_1^* = 0.1, x_2^* = 0)$  efectivamente es el punto mínimo deseado.

En la Figura 5.5 se muestra una la superficie de nivel de (5.2) con  $x_1 = x_1^* = 0.1$  la cual debe tener un mínimo en  $x_*(x_2^* = 0, x_3^* = 1.643)$ . En la Figura 5.6 se aprecia en el plano  $x_2x_3$  que con  $x_1^* = 0.1$  el punto  $x_*(x_2^* = 0, x_3^* = 1.643)$  efectivamente es el punto mínimo deseado.

En la Figura 5.7 se muestra una la superficie de nivel de (5.2) con  $x_2 = x_2^* = 0$  la cual debe tener un mínimo en  $x_*(x_1^* = 0.1, x_3^* = 1.643)$ . En la Figura 5.8 se aprecia en el plano  $x_1x_3$  que con  $x_2^* = 0$  el punto  $x_*(x_1^* = 0.1, x_3^* = 1.643)$  efectivamente es el punto mínimo deseado.

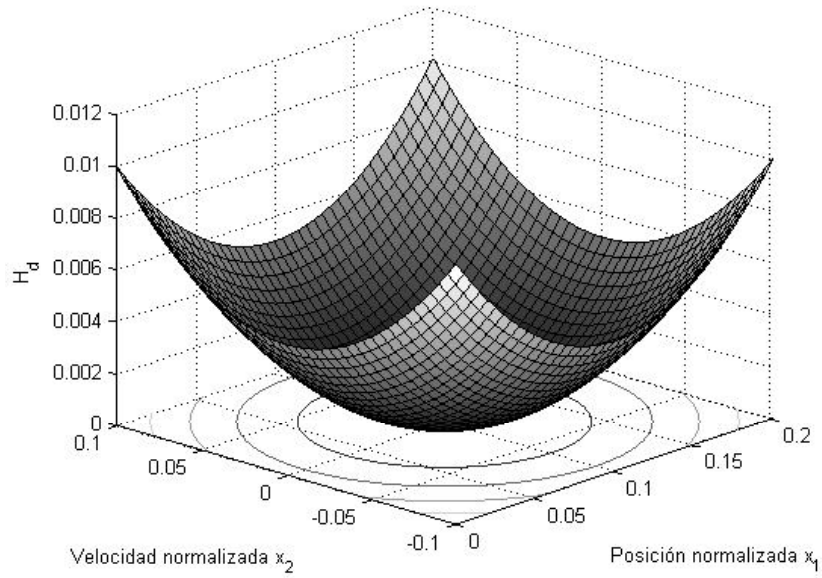


Figura 5.3: Superficie de nivel para  $x_3 = x_3^* = 1.643$

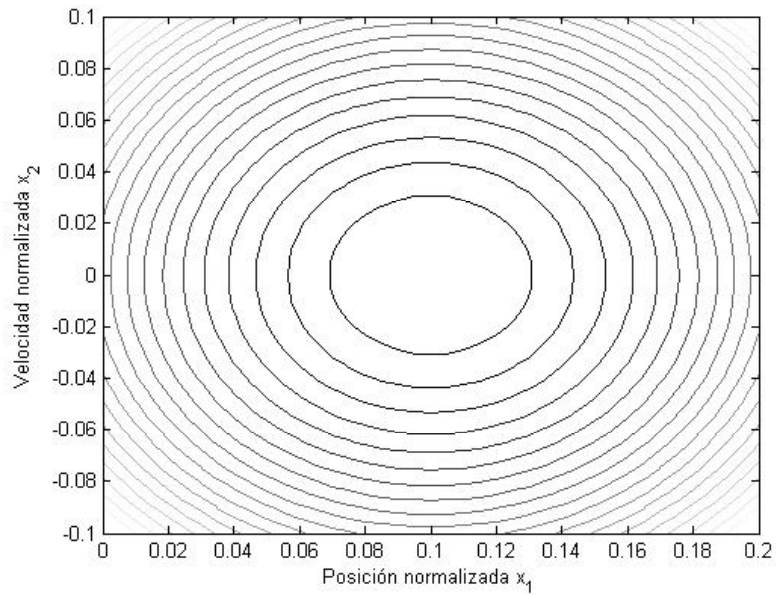


Figura 5.4: Curvas de nivel en el plano  $x_1x_2$  con origen en  $x_*(x_1^* = 0.1, x_2^* = 0)$

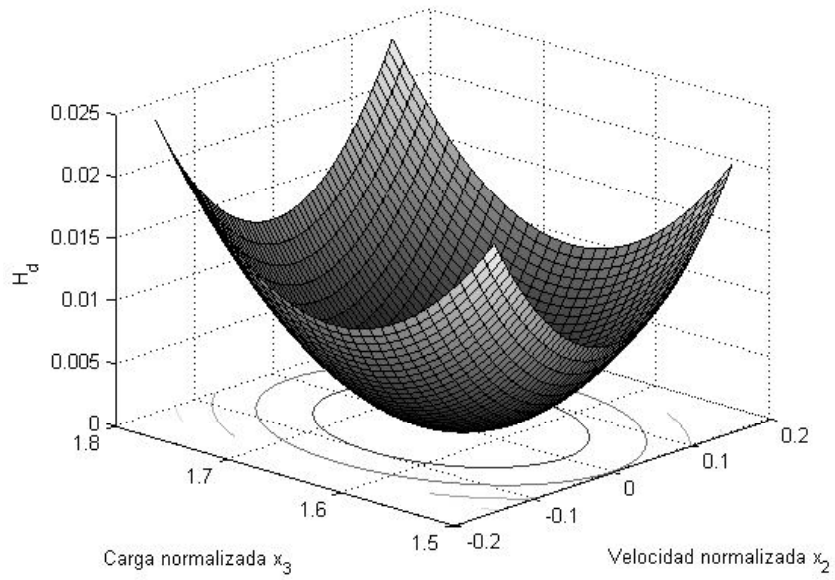


Figura 5.5: Superficie de nivel para  $x_1 = x_1^* = 0.1$

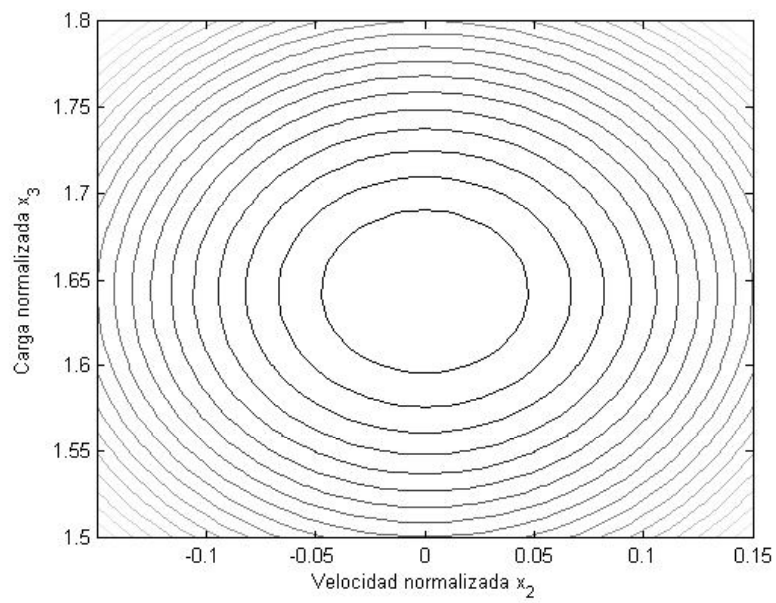


Figura 5.6: Curvas de nivel en el plano  $x_2x_3$  con origen en  $x_*$  ( $x_2^* = 0$ ,  $x_3^* = 1.643$ )

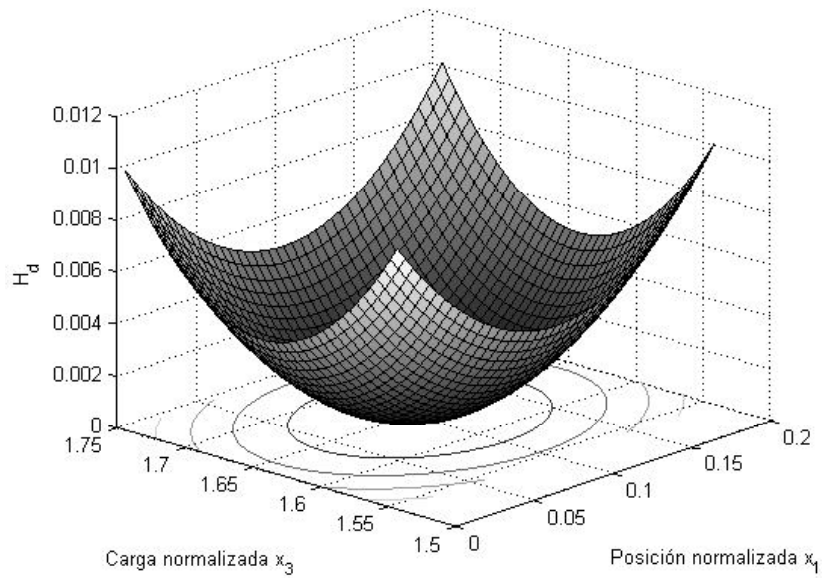


Figura 5.7: Superficie de nivel para  $x_2 = x_2^* = 0$

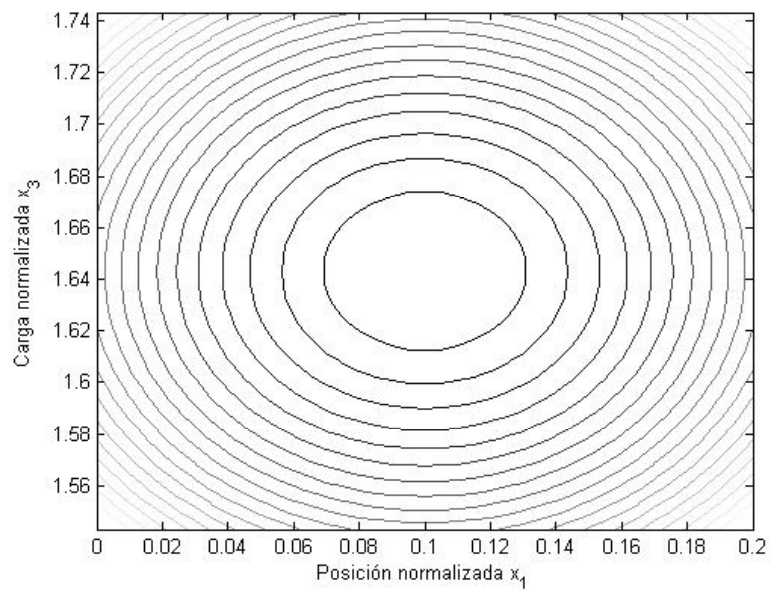


Figura 5.8: Curvas de nivel en el plano  $x_1x_3$  con origen en  $x_*(x_1^* = 0.1, x_3^* = 1.643)$



### 5.3. Ley de Control por Método Paramétrico

En esta sección se presentan las simulaciones numéricas referentes al controlador obtenido de resolver la ecuación de *matching* por el método paramétrico. El análisis se lleva a cabo siguiendo los pasos realizados en la sección 5.2.

La ley de control obtenida de resolver la ecuación *matching* por el método paramétrico está dada por (5.3).

$$u = \frac{3r}{2} \left( -r_3 \left( k_p(x_3 - x_3^*) + \frac{2(x_1x_3 - x_1^*x_3^*)}{3} \right) + \frac{x_1x_3 - x_1^*x_3^*}{r} \right) + u_* \quad (5.3)$$

se considera  $r_3 = 3$  y  $k_p = 10$ .

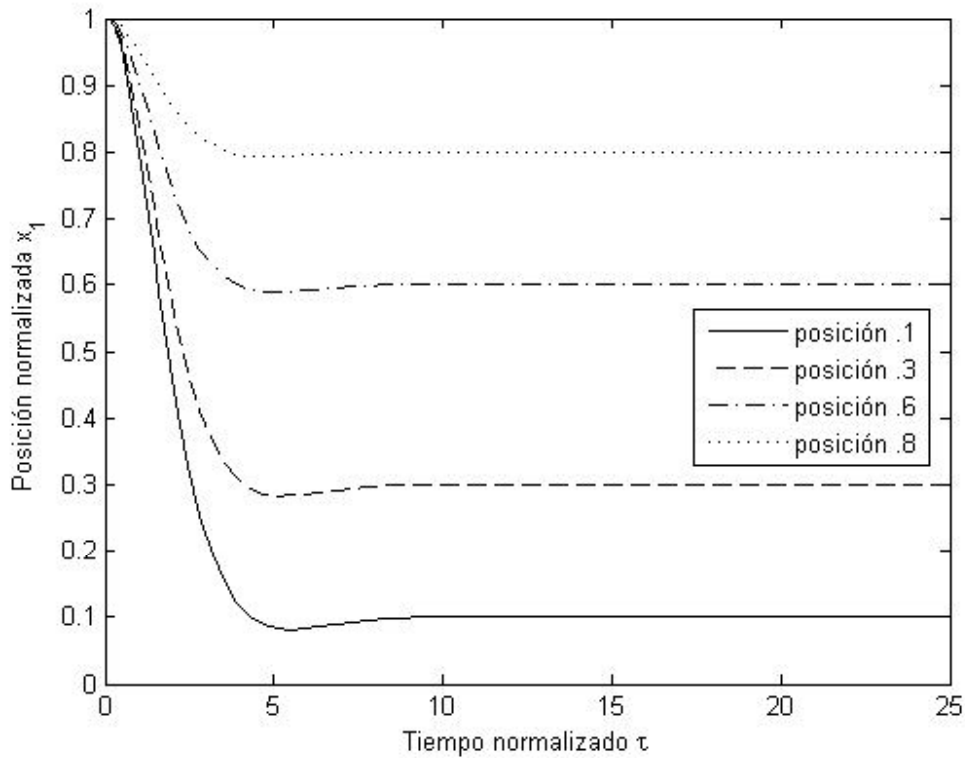


Figura 5.9: Posición del Electrodo Superior

En la Figura 5.9 se muestra el comportamiento de la posición normalizada  $x_1$  del electrodo superior para diferentes valores deseados  $x_1 = x_1^*$ . Se consideran las mismas condiciones iniciales  $x(0) = (1, 0, 0)$  en cada variación de la posición deseada  $x_1^*$ . Asimismo, se observa que con la ley de control obtenida de resolver la ecuación de *matching* por el método paramétrico (5.3) efectivamente se consigue regulación de la posición del electrodo superior en posiciones deseadas  $x_1^*$  por encima y por debajo de la posición de *pull-in*  $x_{pull-in} = \frac{2}{3}$ .

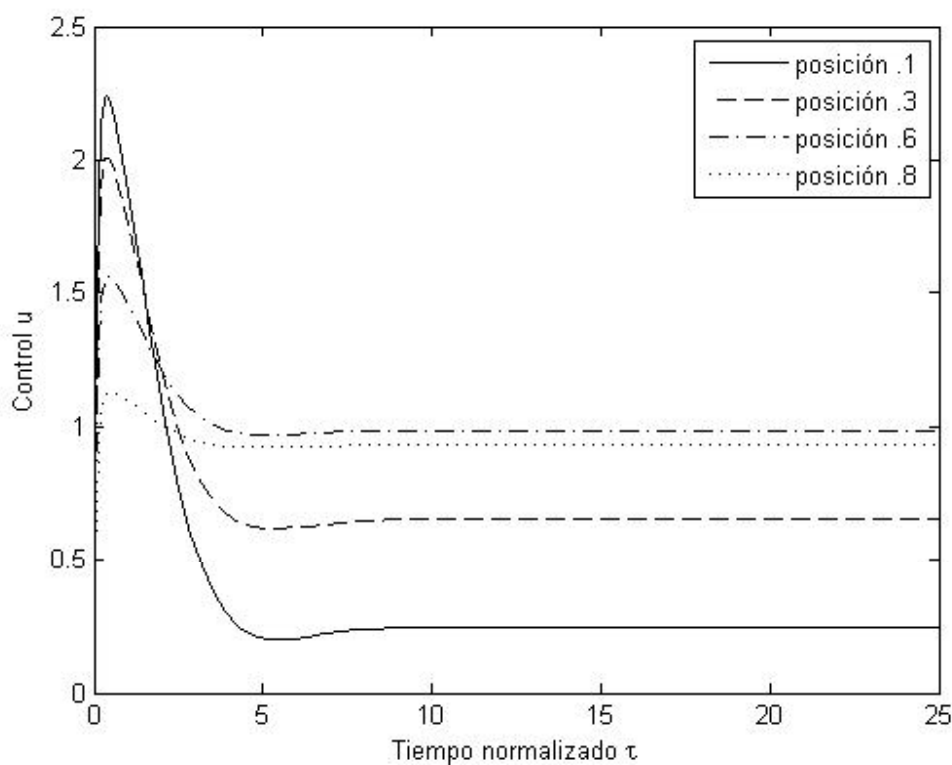


Figura 5.10: Ley de Control. Método Paramétrico

En la Figura 5.10 se muestra el comportamiento de la señal de control requerida para equilibrar el electrodo móvil en las posiciones deseadas  $x_1^*$  propuestas.

### 5.3.1. Superficies y Curvas de Nivel $H_d$ Método Paramétrico

En esta subsección al igual que en la 5.3.1 se presentan superficies y curvas de nivel de la función Hamiltoniana  $H_d$  (5.4) obtenida de resolver la ecuación de *matching* por el método paramétrico. El objetivo de estas simulaciones es demostrar que  $H_d$  efectivamente es positiva definida y que tiene un mínimo en el punto de equilibrio deseado. Con fines de simulación se propone el punto de equilibrio deseado  $x_*(0.1, 0, 1.643)$

$$H_d = \frac{(x_1 - x_1^*)^2}{2} + \frac{(x_2 - x_2^*)^2}{2} + \frac{x_1(x_3 - x_3^*)}{3} + \frac{k_p(x_3 - x_3^*)^2}{2} - \frac{2x_1^*x_3^*(x_3 - x_3^*)}{3} \quad (5.4)$$

En la Figura 5.11 se muestra una la superficie de nivel de (5.4) con  $x_3 = x_3^* = 1.643$  la cual debe tener un mínimo en  $x_*(x_1^* = 0.1, x_2^* = 0)$ . En la Figura 5.12 se puede ver en el plano  $x_1x_2$  que con  $x_3^* = 1.643$  el punto  $x_*(x_1^* = 0.1, x_2^* = 0)$  efectivamente es el punto mínimo deseado.

En la Figura 5.13 se muestra una la superficie de nivel de (5.4) con  $x_1 = x_1^* = 0.1$  la cual debe tener un mínimo en  $x_*(x_2^* = 0, x_3^* = 1.643)$ . En la Figura 5.14 se puede ver en el plano  $x_2x_3$  que con  $x_1^* = 0.1$  el punto  $x_*(x_2^* = 0, x_3^* = 1.643)$  efectivamente es el punto mínimo deseado.

En la Figura 5.15 se muestra una la superficie de nivel de (5.4) con  $x_2 = x_2^* = 0$  la cual debe tener un mínimo en  $x_*(x_1^* = 0.1, x_3^* = 1.643)$ . En la Figura 5.16 se puede ver en el plano  $x_1x_3$  que con  $x_2^* = 0$  el punto  $x_*(x_1^* = 0.1, x_3^* = 1.643)$  efectivamente es el punto mínimo deseado. Como detalle adicional se señala que el eje mayor de las elipses de nivel está rotado, esto se debe a los términos cruzados  $x_1x_3$  en la función Hamiltoniana  $H_d$  (5.4).

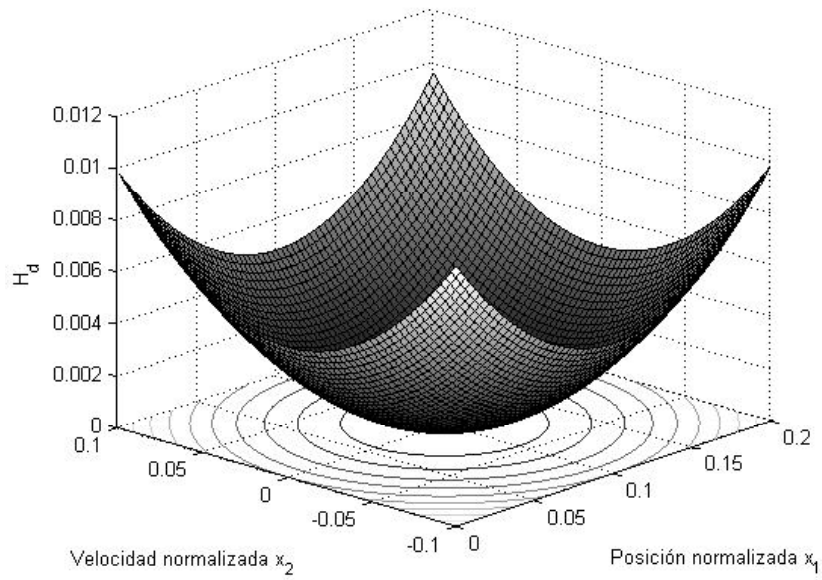


Figura 5.11: Superficie de nivel para  $x_3 = x_3^* = 1.643$

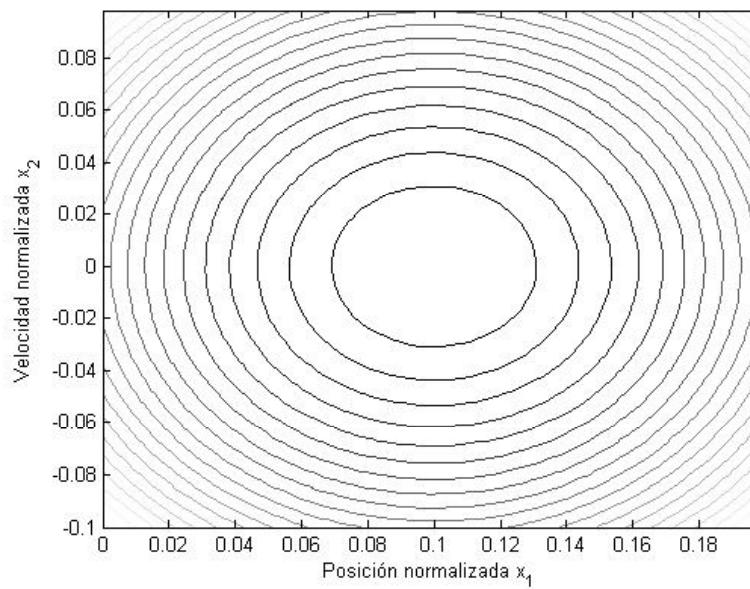


Figura 5.12: Curvas de nivel en el plano  $x_1x_2$  con origen en  $x_*(x_1^* = 0.1, x_2^* = 0)$

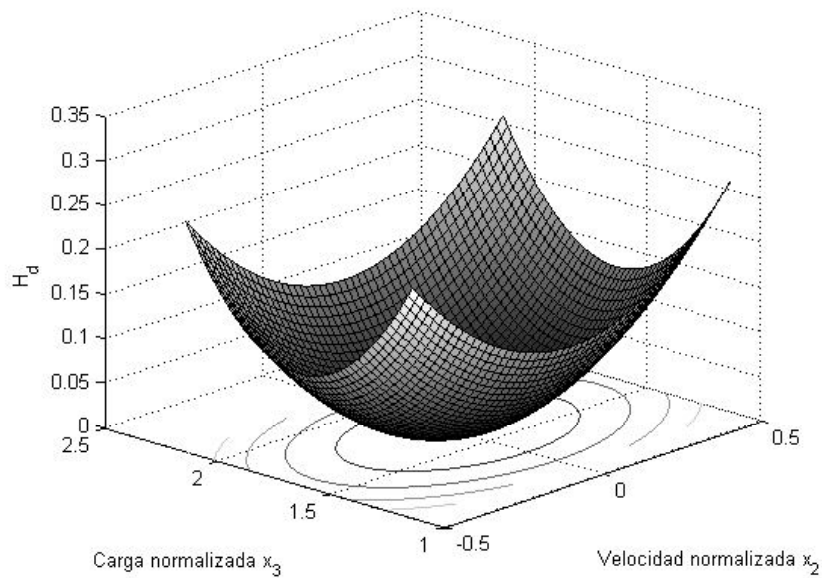


Figura 5.13: Superficie de nivel para  $x_1 = x_1^* = 0.1$

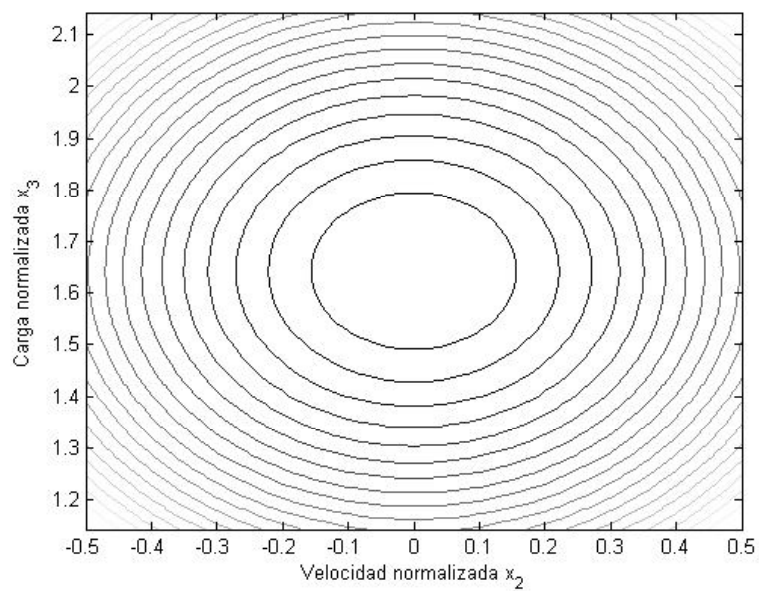


Figura 5.14: Curvas de nivel en el plano  $x_2x_3$  con origen en  $x_*$  ( $x_2^* = 0, x_3^* = 1.643$ )

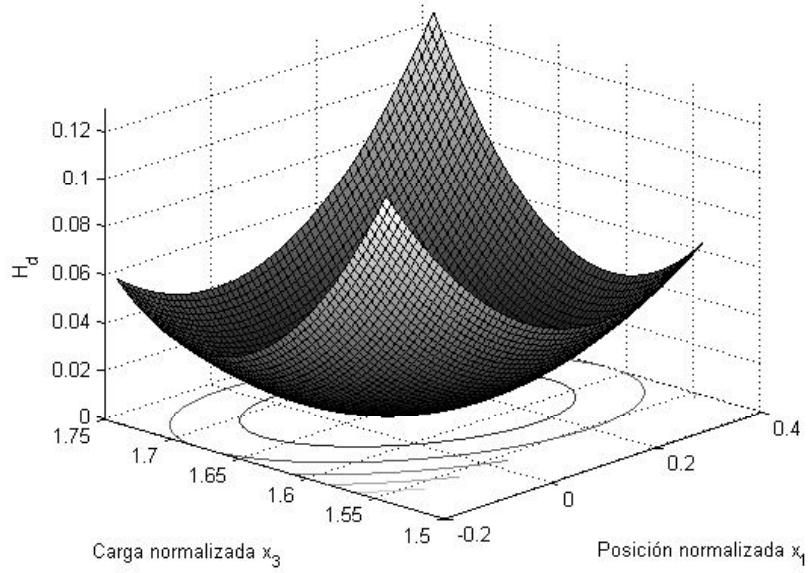


Figura 5.15: Superficie de nivel para  $x_2 = x_2^* = 0$

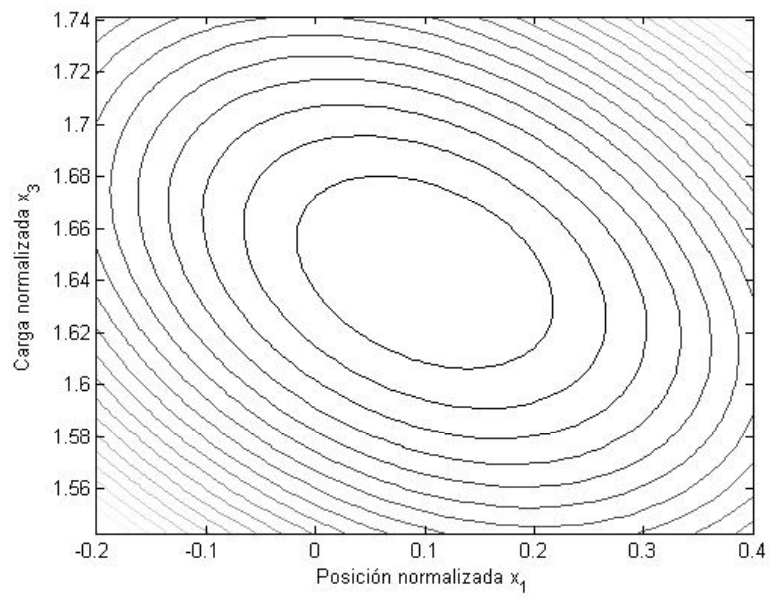


Figura 5.16: Curvas de nivel en el plano  $x_1x_3$  con origen en  $x_*(x_1^* = 0.1, x_3^* = 1.643)$

## 5.4. Desempeño de los Controladores a Variaciones de los Parámetros

Uno de los aspectos de mayor peso a considerar en el diseño de un MEMS es el proceso de fabricación. En la mayoría de los casos el diseño se basa en cierto proceso de fabricación que reduce la libertad de elegir el tipo de materiales y la geometría del dispositivo. La incertidumbre paramétrica entre MEMS fabricadas en un mismo proceso con el mismo tipo de materiales y misma geometría, es considerable. Por lo que resulta de vital importancia analizar el comportamiento de los controladores a variaciones paramétricas.

En esta sección se evalúa el desempeño de los controladores a variaciones de los parámetros normalizados nominales  $\zeta$  y  $r$  obtenidos a partir de los parámetros dimensionales de la Tabla 2.1. En la subsección 5.4.1 se presentan simulaciones numéricas para evaluar el desempeño del controlador (5.1) a variaciones de los parámetros normalizados. De igual manera en la subsección 5.4.2 se evalúa el desempeño del controlador (5.3) a variaciones de los parámetros normalizados. En ambos casos se regula la posición normalizada  $x_1$  en un valor deseado  $x_1^*$  mayor y otro menor de la posición de *pull-in*  $x_{pull-in} = \frac{2}{3}$ .

### 5.4.1. Respuesta del Controlador Método Algebraico

En la Figura 5.17 se muestra la evolución de la posición normalizada para un valor deseado mayor al de *pull-in*  $x_1^* = 0.8$  y en la Figura 5.19 para un valor deseado menor al de *pull-in*  $x_1^* = 0.2$ . En ambas gráficas la señal continua representa el comportamiento de la posición utilizando los parámetros normalizados nominales  $\zeta = 7.255 \times 10^{-1}$  y  $r = 9.318 \times 10^{-3}$  del actuador electrostático basados en los valores de la Tabla 2.1. La señal punteada describe el comportamiento de la posición para valores de mitad de los parámetros nominales  $\frac{1}{2}\zeta$  y  $\frac{1}{2}r$  y la señal segmentada se describe el comportamiento de la posición con valores de los parámetros del doble de los nominales  $2\zeta$  y  $2r$ .

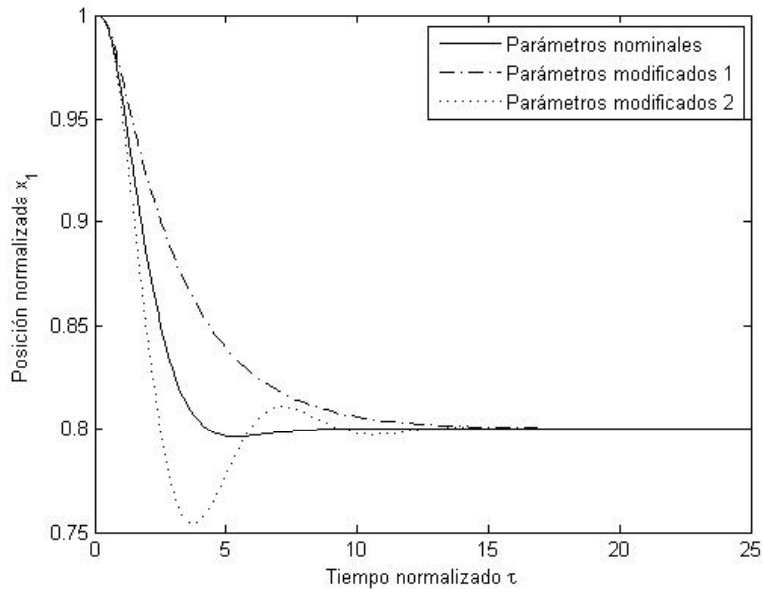


Figura 5.17: Posición normalizada deseada  $x_1^* = 0.8$  para  $(\frac{1}{2}\zeta, \frac{1}{2}r)$  y  $(2\zeta, 2r)$

En la Figura 5.18 se presentan las señales de control requeridas para estabilizar al electrodo movable en la posición deseada  $x_1^* = 0.8$  y en la Figura 5.20 para  $x_1^* = 0.2$ . Al igual que para las señales de posición; la señal continua corresponde al modelo con parámetros nominales  $\zeta$  y  $r$ , la señal punteada para parámetros del 50 por ciento de los nominales  $(\frac{1}{2}\zeta, \frac{1}{2}r)$  y la señal segmentada para parámetros del 200 por ciento de los nominales  $(2\zeta, 2r)$ .



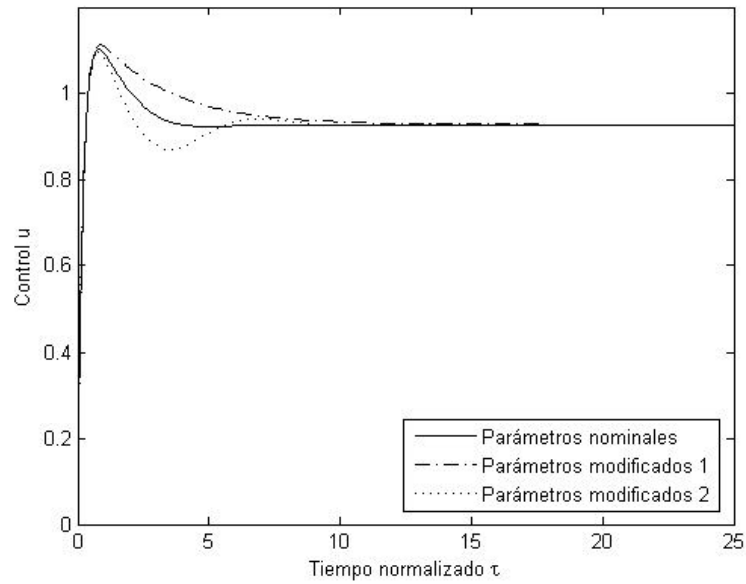


Figura 5.18: Desempeño del controlador por método algebraico para  $x_1^* = 0.8$

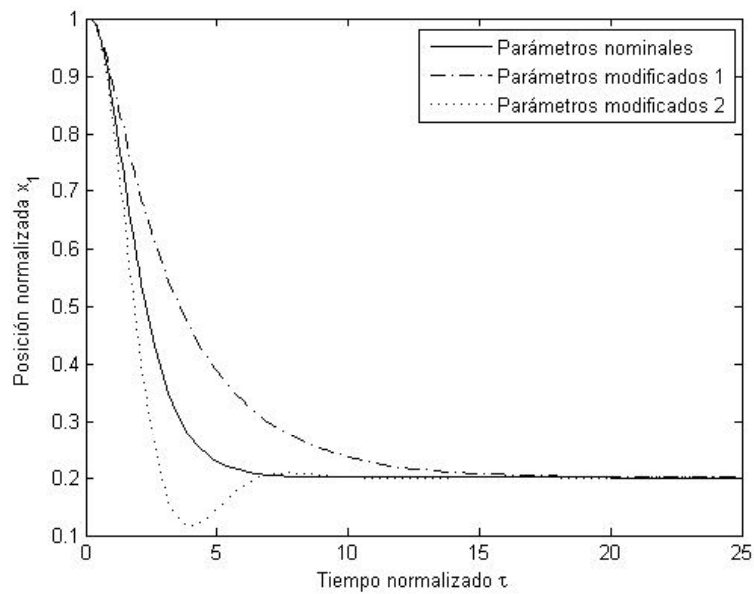


Figura 5.19: Posición normalizada deseada  $x_1^* = 0.2$  para  $(\frac{1}{2}\zeta, \frac{1}{2}r)$  y  $(2\zeta, 2r)$

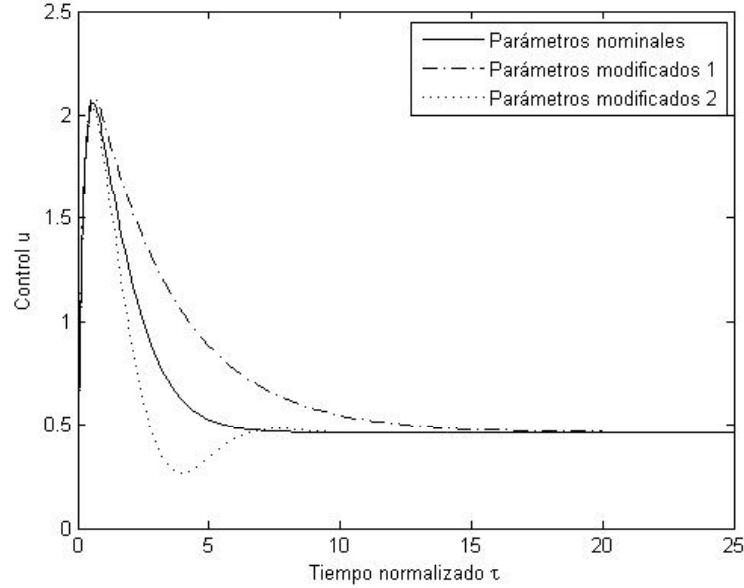


Figura 5.20: Desempeño del controlador por método algebraico para  $x_1^* = 0.2$

### 5.4.2. Respuesta del Controlador Método Paramétrico

Ahora se evaluará el desempeño del controlador obtenido de resolver la ecuación de *matching* por el método paramétrico a variaciones en los parámetros normalizados nominales del dispositivo MEMS. Al igual que en caso del controlador algebraico se consideran los casos de controlar la posición a un valor deseado mayor  $x_1^* = 0.8$  y otro menor  $x_1^* = 0.2$  al de la posición de *pull-in*  $x_1 = \frac{2}{3}$ . Las variaciones de los parámetros consideradas son del doble  $2\zeta$  y  $2r$  y la mitad  $\frac{1}{2}\zeta$  y  $\frac{1}{2}r$  de los parámetros nominales normalizados  $\zeta = 7.255 \times 10^{-1}$  y  $r = 9.318 \times 10^{-3}$ .

En la Figura 5.21 se muestra la evolución de la posición normalizada para un valor deseado mayor al de *pull-in*  $x_1^* = 0.8$  y en la Figura 5.23 para un valor deseado menor al de *pull-in*  $x_1^* = 0.2$ . En ambas gráficas la señal continua representa el comportamiento de la posición utilizando los parámetros normalizados nominales  $\zeta$  y  $r$  del actuador

electrostático basados en los valores de la Tabla 2.1. La señal punteada describe el comportamiento de la posición para valores de mitad de los parámetros nominales  $\frac{1}{2}\zeta$  y  $\frac{1}{2}r$  y la señal segmentada se describe el comportamiento de la posición con valores de los parámetros del doble de los nominales  $2\zeta$  y  $2r$ .

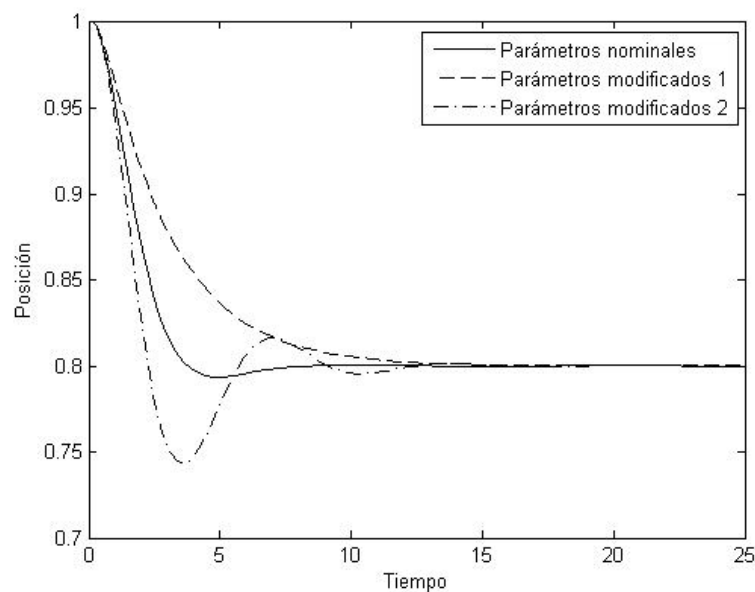


Figura 5.21: Posición normalizada deseada  $x_1^* = 0.8$  para  $(\frac{1}{2}\zeta, \frac{1}{2}r)$  y  $(2\zeta, 2r)$

En la Figura 5.22 se presentan las señales de control requeridas para estabilizar al electrodo móvil en la posición deseada  $x_1^* = 0.8$  y en la Figura 5.24 para  $x_1^* = 0.2$ . Al igual que para las señales de posición; la señal continua corresponde al modelo con parámetros nominales  $\zeta$  y  $r$ , la señal punteada para parámetros del 50 por ciento de los nominales  $(\frac{1}{2}\zeta, \frac{1}{2}r)$  y la señal segmentada para parámetros del 200 por ciento de los nominales  $(2\zeta, 2r)$ .

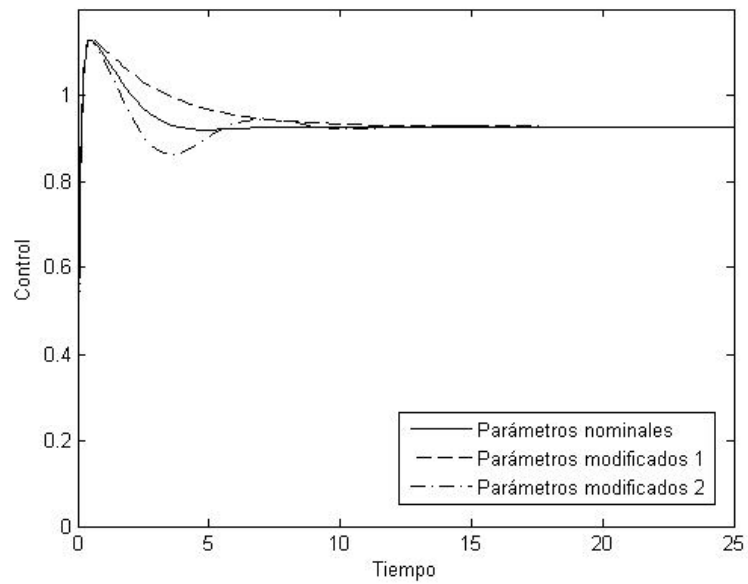


Figura 5.22: Desempeño del controlador por método algebraico para  $x_1^* = 0.8$

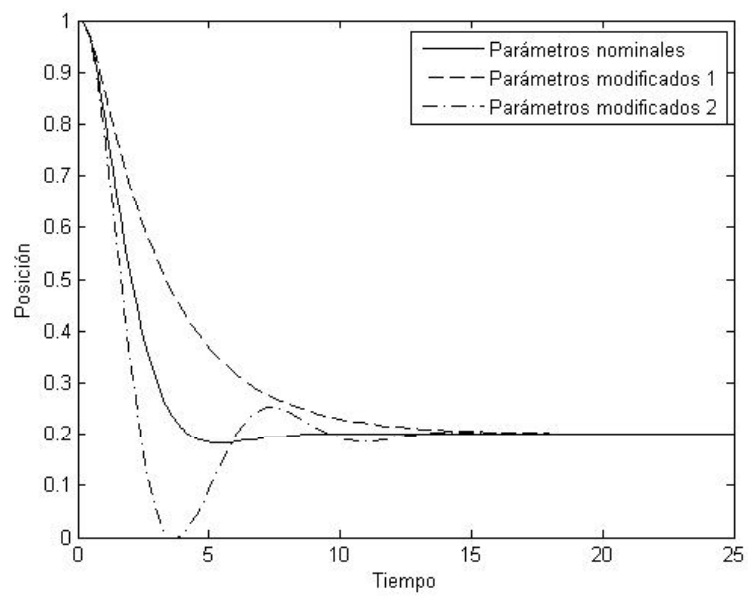


Figura 5.23: Posición normalizada deseada  $x_1^* = 0.2$  para  $(\frac{1}{2}\zeta, \frac{1}{2}r)$  y  $(2\zeta, 2r)$

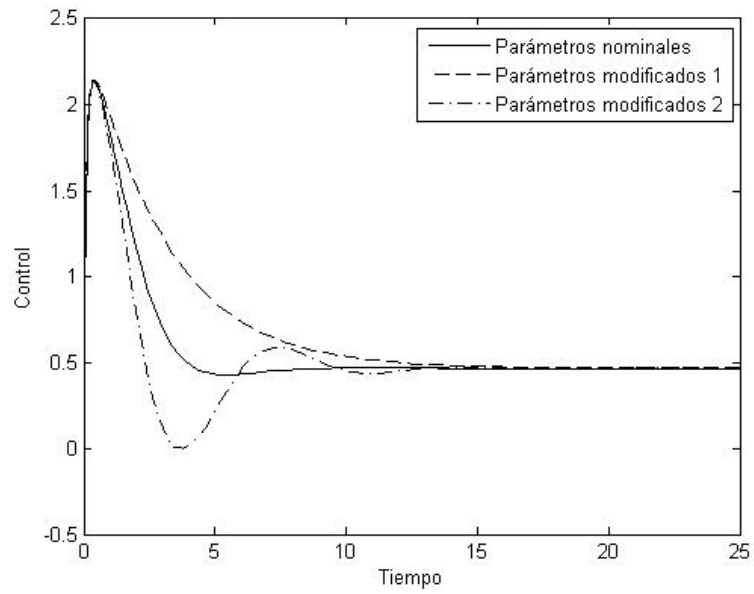


Figura 5.24: Desempeño del controlador por método algebraico para  $x_1^* = 0.2$

# Capítulo 6

## Conclusiones

El campo de los sistemas MEMS ofrece en la actualidad grandes oportunidades de interacción con todos aquellos que poseen conocimientos en el campo de control. Un paso importante se logra en este trabajo de tesis al diseñar un par de controladores basándose en la técnica IDA-PBC cuyo objetivo principal es conseguir regulación de la posición del electrodo superior móvil del dispositivo MEMS. No sólo se satisface el objetivo de regulación sino también se logra que en el proceso de regulación de producirse contacto entre electrodos éste sea mínimo y que la magnitud del voltaje requerido de la fuente para lograr el objetivo de control sea el menor posible.

Se logró superar el efecto de *pull-in* inherente a los actuadores electrostáticos y como consecuencia se consiguió regulación en toda la banda de voltaje cero  $z_0$  que separa los electrodos del actuador electrostático. Asimismo, como se mencionó anteriormente, en el proceso de regulación el contacto entre los electrodos es mínimo con lo cual se evita el desgaste prematuro del actuador.

A lo largo del desarrollo de este trabajo queda constancia de la interacción entre diferentes campos de conocimiento. En la primera parte se obtiene el modelo matemático que modela la dinámica del actuador formado por un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden. En el modelado se utilizan las ecuaciones de Euler-Lagrange basadas en el concepto de transformación de energía de sistemas de diferente naturaleza. Es importante resaltar que pese a la sencillez de modelo, éste describe los principales

efectos no lineales del sistema. El artilugio matemático de normalización es significativo ya que trabajar con el modelo normalizado evita complicaciones numéricas y reduce el número de parámetros del sistema.

En la obtención de las leyes de control, tanto por el método algebraico como por el paramétrico, se resolvió la ecuación de *matching* expresada en un sistema de ecuaciones en derivadas parciales.

Una vez obtenido el comportamiento en lazo cerrado del sistema se demostró estabilidad asintótica en el sentido de Lyapunov utilizando las funciones Hamiltonianas obtenidas, que tienen un punto de equilibrio en el punto de operación deseado, como funciones de Lyapunov.

Finalmente se presentaron los resultados en forma numérica mediante simulaciones realizadas con el *tool box* SIMULINK de MATLAB.

## 6.1. Trabajo Futuro

El diseño y la implementación de los controladores, ya sea desde la perspectiva de circuitos integrados o desde la perspectiva de física de semiconductores, queda como trabajo futuro. Un primer paso para lograr el cometido de construir los controladores podría basarse en simulaciones numéricas empleando software especializado que permita efectuar análisis estructural del dispositivo MEMS tales como COVENTOR, ANSYS entre otros. Una dificultad a considerar en la implementación de los controladores es el hecho de requerir sensores para medir tanto la posición, la capacitancia y en el caso de la ley de control obtenida de resolver la ecuación de *matching* por el método algebraico incluso la velocidad.

# Apéndice A

## Normalización de las Ecuaciones Diferenciales

En este apéndice se desarrolla paso a paso la normalización de las ecuaciones diferenciales que modelan la dinámica del actuador electrostático.

El desplazamiento del electrodo superior relativo al inferior fijo,  $z$ , se normaliza con respecto a la distancia máxima de separación,  $z_0$ , a la que están separados los electrodos cuando no se aplica voltaje a la entrada del actuador,  $V_s = 0$  (A.1). La carga acumulada entre las placas,  $Q$ , el voltaje de actuación,  $V_a$ , y el voltaje de la fuente,  $V_s$ , se normalizan con respecto a los valores que presentan al producirse el fenómeno de *pull-in* (A.2), (A.3), (A.4). Finalmente, el tiempo  $t$  se normaliza con respecto a la frecuencia natural del sistema  $\omega_0$  (A.5).

$$x_1 = z/z_0 \tag{A.1}$$

$$x_3 = Q/Q_{pull-in} \tag{A.2}$$

$$u_a = V_a/V_{pull-in} \tag{A.3}$$

$$u_s = V_s/V_{pull-in} \tag{A.4}$$

$$\tau = \omega_0 t \tag{A.5}$$

El voltaje de *pull-in*,  $V_{pull-in}$ , la carga almacenada en los actuadores al momento de



producirse el fenómeno de *pull-in*,  $Q_{pull-in}$ , así como, la capacitancia de banda completa,  $C_0$ , están dadas por (A.6), (A.7), (A.8).

$$V_{pull-in} = \sqrt{\frac{8kz_0^2}{27C_0}} \quad (\text{A.6})$$

$$Q_{pull-in} = \frac{3}{2}C_0V_{pull-in} \quad (\text{A.7})$$

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{z_0} \quad (\text{A.8})$$

Las ecuaciones diferenciales no lineales que modelan la dinámica del actuador están dadas en, (A.9), (A.10).

$$m\ddot{z} = -k(z - z_0) - b\dot{z} - \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A} \quad (\text{A.9})$$

$$\dot{Q} = \frac{1}{R} \left( V_s - \frac{zQ}{\varepsilon_0 A} \right) \quad (\text{A.10})$$

Primero se normaliza la ecuación (A.9) que describe el movimiento del electrodo superior del actuador electrostático empleando las ecuaciones de (A.1) a (A.8).

$$m \frac{d^2(z_0 x_1)}{d\left(\frac{\tau}{\omega_0}\right)^2} = -k(z_0 x_1 - z_0) - b \frac{d(z_0 x_1)}{d\left(\frac{\tau}{\omega_0}\right)} - \frac{(Q_{pull-in} x_3)^2}{2\varepsilon_0 A} \quad (\text{A.11})$$

Como  $z_0$  y  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  son constantes (A.11) queda de la siguiente manera

$$mz_0\omega_0^2 \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} = -kz_0(x_1 - 1) - bz_0\omega_0 \frac{dx_1}{d\tau} - \frac{(Q_{pull-in} x_3)^2}{2\varepsilon_0 A} \quad (\text{A.12})$$

Dividiendo (A.12) entre  $mz_0\omega_0^2$  y sustituyendo  $Q_{pull-in}$

$$\frac{d^2 x_1}{d\tau^2} = -(x_1 - 1) - 2 \left( \frac{b}{2m\omega_0} \right) \frac{dx_1}{d\tau} - \frac{1}{2\varepsilon_0 A} \left( \frac{\frac{3}{2}C_0 \sqrt{\frac{8kz_0^2}{27C_0}}}{mz_0\omega_0^2} \right)^2 x_3^2 \quad (\text{A.13})$$

Finalmente de simplificar (A.13) y haciendo  $\varsigma = \frac{b}{2m\omega_0}$  resulta la ecuación diferencial normalizada que define el movimiento del electrodo superior del actuador electrostático (A.14).

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2} = -(x_1 - 1) - 2\varsigma \frac{dx_1}{d\tau} - \frac{1}{3}x_3^2 \quad (\text{A.14})$$

Ahora se normaliza la ecuación (A.10) que relaciona el voltaje de la fuente con la carga acumulada entre las placas. Por conveniencia se reescribe

$$\dot{Q} = \frac{1}{R} \left( V_s - \frac{zQ}{\varepsilon_0 A} \right) \quad (\text{A.15})$$

Haciendo uso de (A.1) a (A.8) la ecuación (A.15) queda de la siguiente manera (A.16)

$$\frac{d(Q_{pull-in}x_3)}{d\left(\frac{\tau}{\omega_0}\right)} = \frac{1}{R} \left( V_s - \frac{(z_0x_1)(Q_{pull-in}x_3)}{\varepsilon_0 A} \right) \quad (\text{A.16})$$

Al reescribir la ecuación (A.16) se obtiene (A.17)

$$\frac{dx_3}{d\tau} = \frac{1}{R} \left( \frac{2}{3} \frac{V_s}{C_0\omega_0 V_{pull-in}} - \frac{z_0 Q_{pull-in}}{\varepsilon_0 A \omega_0 Q_{pull-in}} x_1 x_3 \right) \quad (\text{A.17})$$

Finalmente de simplificar (A.17) y haciendo  $r = RC_0\omega_0$  se obtiene la ecuación diferencial normalizada que relaciona el voltaje de la fuente con la carga acumulada entre las placas (A.18).

$$\frac{dx_3}{d\tau} = \frac{1}{r} \left( \frac{2}{3} u_s - x_1 x_3 \right) \quad (\text{A.18})$$

Una forma equivalente de representar a (A.14) y (A.18) está dada por las ecuaciones (A.19), (A.20) y (A.21).

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{A.19}$$

$$\dot{x}_2 = -(x_1 - 1) - 2\zeta x_2 - \frac{1}{3}x_3^2 \tag{A.20}$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{r} \left( \frac{2}{3}u_s - x_1 x_3 \right) \tag{A.21}$$

donde: la variable  $x_1$  representa la posición normalizada del electrodo movable,  $x_2$  su velocidad normalizada y  $x_3$  la carga normalizada almacenada entre las placas. Los parámetros constantes  $\zeta = \frac{b}{2m\omega_0}$  y  $r = RC_0\omega_0$  representan el factor de amortiguamiento normalizado y la resistencia normalizada respectivamente. El parámetro  $u_s$  representa el voltaje de la fuente normalizado. Las ecuaciones diferenciales normalizadas resultantes varían con respecto al tiempo normalizado  $\tau$ .

# Apéndice B

## Estabilidad en el sentido de Lyapunov

En este apéndice se presentan los conceptos de la teoría de estabilidad en el sentido de Lyapunov utilizados en las pruebas de estabilidad de este trabajo de tesis, basado en [11]. Las funciones Hamiltonianas,  $H_d$ , obtenidas al resolver la ecuación de matching por el método IDA-PBC hacen las veces de funciones de Lyapunov.

### B.1. Condiciones de Estabilidad en el Sentido de Lyapunov

Considérese un sistema dinámico autónomo:

$$\dot{x} = f(x) \tag{B.1}$$

donde  $f : D \rightarrow \mathfrak{R}^n$  es un mapeo localmente Lipchitz de un dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^n$ . Supóngase que  $x_* \in D$  es un punto de equilibrio de (B.1) es decir,  $f(x_*) = 0$ . Sin pérdida de generalidad, se considera que el punto de equilibrio está en el origen,  $x_* = 0$ .

*Definición B.1.* El punto de equilibrio  $x_*$  de (B.1) es:

- Estable si, para toda  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tal que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq 0 \quad (\text{B.2})$$

- Inestable si no es estable.
- Asintóticamente estable si es estable y  $\delta$  puede elegirse tal que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (\text{B.3})$$

*Teorema B.1.* Sea  $x = 0$  un punto de equilibrio de  $\dot{x} = f(x)$  y  $D \subset \mathbb{R}^n$  un dominio que contiene a  $x = 0$ . Sea  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y diferenciable tal que

$$V(0) = 0 \quad y \quad V(x) > 0, \quad en \quad D - \{0\} \quad (\text{B.4})$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad en \quad D \quad (\text{B.5})$$

Entonces,  $x = 0$  es estable. Más aún, si:

$$\dot{V}(x) < 0 \quad en \quad D - \{0\} \quad (\text{B.6})$$

Entonces  $x = 0$  es asintóticamente estable. La función  $V(x)$  es una función de Lyapunov.

*Teorema B.2.* Sea  $x = 0$  un punto de equilibrio de  $\dot{x} = f(x)$  y  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y diferenciable tal que:

$$V(0) = 0 \quad y \quad V(x) > 0, \quad \forall x \neq 0 \quad (\text{B.7})$$

$$\|x(0)\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty \quad (\text{B.8})$$

$$\dot{V}(x) \leq 0, \quad \forall x \neq 0 \quad (\text{B.9})$$

Entonces  $x = 0$  es globalmente asintóticamente estable.

*Teorema B.3* (Teorema de La Salle). Sea  $\Omega \subset D$  un conjunto compacto positivamente invariante con respecto a  $\dot{x} = f(x)$ . Sea  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y diferenciable tal que  $\dot{V}(x) \leq 0$  en  $\Omega$ . Sea  $E$  el conjunto de todos los puntos en  $\Omega$  donde  $\dot{V}(x) = 0$ . Sea  $M$  el conjunto invariante más grande en  $E$ . Entonces en todas las soluciones que comienzan en  $\Omega$  tienden a  $M$  cuando  $t \rightarrow \infty$

*Corolario B.1.* Sea  $x = 0$  un punto de equilibrio de  $\dot{x} = f(x)$  y  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, diferenciable y definida positiva en un dominio  $D$  que contiene al origen  $x = 0$ , tal que  $\dot{V}(x) \leq 0$  en  $D$ . Sea  $S = \{x \in D \mid \dot{V}(x) = 0\}$  y suponga que no hay soluciones que puedan permanecer en  $S$ , a parte de la solución trivial  $x \equiv 0$ . Entonces, el origen es asintóticamente estable.

*Corolario B.2.* Sea  $x = 0$  un punto de equilibrio de  $\dot{x} = f(x)$ . Sea  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, diferenciable, radialmente no acotada y definida positiva tal que:  $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ . Sea  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \dot{V}(x) = 0\}$  y suponga que no existe solución que pueda permanecer en  $S$ , diferente de la trivial  $x \equiv 0$ . Entonces el origen es globalmente asintóticamente estable

# Bibliografía

- [1] J. A. Acosta, R. Ortega, and A. Astolfi. Interconnection and damping assignment passivity-based control of mechanical systems with underactuation degree one. *in Proc. Amer. Control Conf. Boston, MA, 2004.*
- [2] C. Batlle, A. Dòria-Cerezo, and R. Ortega. Power flow control of a doubly-fed induction machine coupled to a flywheel. *European Journal of Control*, 11(3):209–221, 2005.
- [3] B. Borovic, A. Q. Liu, D. Popa, H. Cai, and F. L. Lewis. open-loop versus closed-loop control of mems devices: choices and issues. *Journal of micromechanics and Microengineering*, 15:1917–1924, 2005.
- [4] J. Bryzek, E. Abbott, and A. Flannery. Control issues for mems. *Proc. Conf. Decision and Control*, 2004.
- [5] E. K. Chan and R. W. Dutton. Electrostatic micromechanical actuator with extended range of travel. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 9(3):321–328, 2000.
- [6] K. Fujimoto and T. Sugie. Canonical transformations and stabilization of generalized hamiltonian systems. *Syst Control Lett*, 42(3):217–227, 2001.
- [7] M. Galaz, R. Ortega, A. Bazanella, and A. Stankovic. An energy-shaping approach to excitation control of synchronous generators. *Automatica*, 39(1):111–119, 2003.

- [8] H. Rodriguez H, R. Ortega, and G. Escobar. Energy-shaping control of switched power converters. *Proceedings of the IEEE International Symposium on Industrial Electronics ISIE, Pusan, Korea, 2001.*
- [9] H. Rodriguez H, R. Ortega, G. Escobar, and N. A. Baranov. Robustly stable output feedback saturated controller for the boost dc-to-dc converter. *Syst Control Lett*, 40(1):1–8, 2000.
- [10] E. S. Hung and S. D. Senturia. Extending the travel range of analog-tuned electrostatic actuators. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 8(4):497–505, Dec. 1999.
- [11] Hassan K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 3a. Ed. 2002.
- [12] G. T. Kovacs. *Micromachined Transducer Sourcebook*. McGraw-Hill, New York, 1998.
- [13] P. Maya and G. Espinosa. Output feedback excitation control of synchronous generators. *Int J. Robust Nonlinear Control*, 14:879–890, 2004.
- [14] R. Ortega and Eloisa García-Canseco. Interconnection and damping assignment passivity-based control: A survey. *European Journal of Control*, pages 432–450, 2004.
- [15] R. Ortega and M. Spong. Adaptive motion control of rigid robots: A tutorial. *Automatica*, 25:877–888, 1989.
- [16] R. Ortega, M. Spong, F. Gomez, and G. Blankenstein. Stabilization of underactuated mechanical systems via interconnection and damping assignment. *IEEE Trans. Automatic Control*, 47:1218–1233, August 2002.
- [17] R. Ortega, A. van der Schaft, B. Maschke, and G. Escobar. Energy shaping of port-controlled hamiltonian systems by interconnection. *IEEE Conf. Dec. and Control, Phoenix, AZ, USA*, 25:7–10, 1999.



- [18] R. Ortega, A. van der Schaft, B. Maschke, and G. Escobar. Interconnection and damping assignment passivity-based control of port controlled hamiltonian systems. *Automatica*, 38:585–596, April 2002.
- [19] V. Petrovic, R. Ortega, and A. Stankovic. Interconnection and damping assignment approach to control of permanent magnet synchronous motor. *IEEE Trans. Control Systems Technology*, 9(6):811–820, 2001.
- [20] H. Rodríguez, R. Ortega, and I Mareels. A novel passivity-based controller for an active magnetic bearing benchmark experiment. *In Proc. of the American Control Conference*, 2000.
- [21] H. Rodríguez, H. Siguerdidjane, and R. Ortega. Experimental comparison of linear and nonlinear controllers for a magnetic suspension. *In IEEE Proc. Conference on Control Applications*, 2000.
- [22] Domingo Teodoro Mendoza Rosales. Desarrollo de un interruptor mems para la banda ka utilizando tecnología flexible de circuito impreso. Master’s thesis, UNAM, 2007.
- [23] J. Seeger. Charge control of parallel-plate, electrostatic actuators and tip-in instability. *Journal of Microelectromechanical systems*, 12(5):656–871, Oct. 2003.
- [24] J. Seeger and S. B. Crary. Stabilization of electrostatically actuated mechanical devices. *Proc. of the Ninth Int. Conf. on Solid-States Sensors and Actuators*, pages 1133–1136, 1997.
- [25] S. D. Senturia. *Microsystem Design*. Kluwer Academic Publisher, 4a Ed. 2002.
- [26] Jean-Jacques E. Slotine. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1991.
- [27] A. J. van der Schaft. *L<sub>2</sub>-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control*. Lect. Notes in Contr. and Inf. Sc., Vol. 218, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

- [28] G. Zhu, J. Lévine, and L. Praly. Improving the performance of an electrostatically actuated mems by nonlinear control: Some advances and comparisons. *in Proc. of the 44th IEEE conference on Decision and Control*, pages 7534–7539, Dec. 2005.
- [29] G. Zhu, J. Lévine, and L. Praly. On the differential flatness and control of electrostatically actuated mems. *American Control conference*, 2005.
- [30] G. Zhu, J. Lévine, and L. Praly. Robust control of an electrostatically actuated mems in the presence of parasitics and parametric uncertainty. *in Proc. of the 2006 American Control Conference*, pages 1233–1238, Jun. 2006.