



Universidad Nacional Autónoma de México

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO
EN INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA

ALGORITMO SUPER-TWISTING CON
CONVERGENCIA EXACTA Y UNIFORME

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN INGENIERÍA

INGENIERÍA ELÉCTRICA - CONTROL

P R E S E N T A:

EMMANUEL CRUZ ZAVALA

Dirigida por:

DR. JAIME A. MORENO PÉREZ



2010

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Leonid Fridman
Secretario: Dr. Marco A. Arteaga Pérez
Vocal: Dr. Jaime A. Moreno Pérez
1er Suplente: Dr. Jorge A. Dávila Montoya
2do Suplente: Dr. Jorge Isaac Chairez Oria

Lugar donde se realizó la tesis:
INSTITUTO DE INGENIERÍA
UNAM

TUTOR DE TESIS:

DR. JAIME A. MORENO PÉREZ

FIRMA

A mis padres, Cristina Zavala y Remedios Alfredo Cruz, y mi hermano.

A toda mi familia, ejemplo insuperable de unión y fuerza.

Y a todas aquellas personas que han puesto su confianza en mi.

Agradecimientos

Al Dr. Jaime A. Moreno Pérez y al Dr. Leonid Fridman, quiero agradecer el apoyo y las enseñanzas que me han brindado durante la elaboración del trabajo de tesis.

A mis compañeros de la maestría les agradezco el apoyo y el tiempo que me han soportado.

A mis amigos les agradezco su apoyo y amistad que es muy valiosa para mí. Se que cuento con ustedes, así como ustedes cuentan conmigo.

Mi agradecimiento más profundo es para mi familia. Gracias por su apoyo y comprensión. A mis padres y hermano, gracias por las sonrisas y palabras de aliento, y en especial por sus consejos y preocupaciones, por darme su tiempo, su espacio, su apoyo y comprensión. Me han enseñado a seguir siempre adelante sin importar que tan difícil parezca el camino y a dar siempre lo mejor de mí. Gracias por su amor incondicional.

Por ultimo agradezco el apoyo brindado por el Instituto de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México y al CONACYT, por todas las facilidades y apoyo económico que me han brindado durante el periodo de mis estudios de la maestría y elaboración de mi tesis.

Índice general

| | <u>Página</u> |
|--|---------------|
| Índice de figuras | v |
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. Estado del arte | 1 |
| 1.2. Motivación | 3 |
| 1.3. Planteamiento del problema | 4 |
| 1.4. Objetivos | 5 |
| 1.4.1. Objetivos Generales | 5 |
| 1.4.2. Objetivos Particulares | 6 |
| 1.4.3. Aportaciones de la tesis | 6 |
| 1.5. Contenido de la tesis | 6 |
| 1.6. Solución General Propuesta | 7 |
| 1.6.1. Caso particular de estudio | 8 |
| 1.7. Metodología | 9 |
| 2. Preliminares | 10 |
| 2.1. Estabilidad de sistemas no lineales | 10 |
| 2.1.1. Estabilidad en el sentido clásico | 10 |
| 2.1.2. Estabilidad en Tiempo Finito | 12 |
| 2.1.3. Sistemas homogéneos | 12 |
| 2.1.4. Funciones de Lyapunov homogéneas | 14 |
| 2.2. Caracterización de las no linealidades | 15 |
| 2.2.1. Condiciones de sector para funciones sin memoria | 15 |
| 2.2.2. Criterio del Círculo | 17 |
| 3. Algoritmo Super-Twisting con convergencia Exacta y Uniforme | 19 |
| 3.1. Introducción | 19 |
| 3.2. Análisis del Algoritmo Super-Twisting con convergencia exacta y uniforme sin perturbaciones | 20 |

| | | |
|-----------|---|-----------|
| 3.2.1. | Convergencia en tiempo finito del sistema no perturbado | 20 |
| 3.2.2. | Función de Lyapunov para el sistema homogéneo | 23 |
| 3.2.3. | Convergencia uniforme para el sistema no perturbado | 26 |
| 3.2.4. | Estimación del Tiempo de Convergencia del Sistema no Perturbado | 30 |
| 3.3. | Análisis del Algoritmo Super-Twisting con convergencia Exacta y Uniforme con perturbaciones | 31 |
| 3.3.1. | Caracterización de las perturbaciones | 32 |
| 3.3.2. | Análisis de Estabilidad en presencia de perturbaciones | 35 |
| 3.3.3. | Convergencia en tiempo finito | 36 |
| 3.3.4. | Diseño para garantizar convergencia en tiempo finito en presencia de perturbaciones | 37 |
| 3.3.5. | Convergencia uniforme | 42 |
| 3.3.6. | Estimación del Tiempo de Convergencia con perturbación acotada | 45 |
| 4. | Aplicación a Observación y Diferenciación | 46 |
| 4.1. | Introducción | 46 |
| 4.2. | Diferenciador de primer orden | 47 |
| 4.2.1. | Convergencia Exacta y Uniforme del Error de Diferenciación | 49 |
| 4.2.2. | Precisión del diferenciador | 50 |
| 4.2.3. | Ejemplo de Simulación | 50 |
| 4.3. | Observador Robusto Exacto y Uniforme para un sistema mecánico | 53 |
| 4.3.1. | Convergencia Exacta y Uniforme del error de observación | 54 |
| 4.3.2. | Ejemplo de Simulación | 56 |
| 5. | Conclusiones y Trabajo Futuro | 60 |
| 5.1. | Conclusiones | 60 |
| 5.2. | Trabajo Futuro | 61 |
| A. | | 62 |

Índice de figuras

| <u>Figura No.</u> | <u>Página</u> |
|--|---------------|
| 2.1. Sector $[\alpha, \beta]$ para una no linealidad con $\beta > \alpha > 0$ | 16 |
| 2.2. Representación gráfica de la tercera condición del criterio del círculo | 18 |
| 3.1. Representación geométrica de la estimación del tiempo de convergencia. | 30 |
| 3.2. Condiciones de sector para $\rho_i(t, x)$ con $\alpha = 0$ y $\beta = 1$ | 34 |
| 3.3. Condiciones de sector para $\rho_2(t, x)$ con $\alpha = 1$ y $\beta = 0$ | 34 |
| 3.4. Condiciones de sector para $\rho_2(t, x)$ con $\alpha = 1$ y $\beta = 0$ | 35 |
| 3.5. Región admisible de ganancias: condición 1 (verde) y condición 2 (rojo). | 40 |
| 3.6. Ganancias que aseguran la convergencia de algoritmo Super-Twisting: criterio del círculo (verde), condiciones de Levant (líneas azules) y condiciones de Dávila (líneas rojas). | 41 |
| 4.1. Gráficas comparativas entre el DREU (azul) y el diferenciador de Levant (verde). . . | 51 |
| 4.2. Tiempo de convergencia cuando las condiciones iniciales crecen en ambos diferencia- dores. | 51 |
| 4.3. Curvas de nivel. | 53 |
| 4.4. Error en la posición y velocidad estimada con condiciones iniciales $x_1(0) = -1$ y $x_2(0) = 2$ | 57 |
| 4.5. Error en la posición y velocidad estimada con condiciones iniciales $x_1(0) = -40$ y $x_2(0) = 100$ | 58 |
| 4.6. Tiempo de convergencia cuando las condiciones iniciales crecen. | 59 |

Resumen

En este trabajo de Tesis se propone un nuevo algoritmo que pertenece a los Modos Deslizantes de Segundo Orden (MDSO). El esquema propuesto está basado en una modificación del algoritmo Super-Twisting y es capaz de converger al punto de equilibrio en forma exacta y uniforme con respecto a las condiciones iniciales. Es decir, el tiempo de convergencia tiene una cota superior finita para cualquier condición inicial. Por otro lado, el empleo de funciones de Lyapunov ha sido una herramienta importante para el análisis y diseño de observadores y controladores en los sistemas dinámicos no lineales. Este método permite estudiar las propiedades de convergencia en tiempo finito, la robustez ante cierta clase de perturbaciones y hallar un estimado del tiempo de convergencia. El algoritmo propuesto se utiliza para proponer un observador de velocidad para sistemas mecánicos que es robusto ante entradas desconocidas acotadas y un diferenciador de primer orden que converge exacto cuando la segunda derivada de la señal a diferenciar es acotada.

Palabras clave: Modos Deslizantes de Segundo Orden, Convergencia Exacta, Métodos de Lyapunov, Convergencia Uniforme.

Capítulo 1

Introducción

El algoritmo Super-Twisting es uno de los algoritmos de Modos Deslizantes de Segundo Orden que ha sido ampliamente utilizado en control, diferenciación y observación. Debido a que permite sustituir controladores discontinuos por controladores absolutamente continuos, atenúa el efecto de *chattering* y permite implementar diferenciadores que ofrecen estimación exacta en tiempo finito de la derivada de una señal en ausencia de ruido y muestreo discreto de la misma. Además, ha permitido construir observadores robustos y exactos con convergencia en tiempo finito.

Por otro lado, el tiempo de convergencia de los algoritmos utilizados para el diseño de observadores/diferenciadores hasta ahora conocidos, depende de las condiciones iniciales, con lo que no es posible conocer el tiempo de convergencia de los observadores/diferenciadores sin el conocimiento previo de una cota de las condiciones iniciales. La importancia de lo anterior se ve reflejada, por ejemplo, en aplicaciones de control por retroalimentación de salida de sistemas no lineales o en el diseño de observadores/diferenciadores para sistemas híbridos.

1.1. Estado del arte

En el diseño de controladores y observadores con convergencia exacta, el modo deslizante es obtenido mediante la inyección de un término discontinuo en la dinámica del sistema, lo que permite que el sistema pueda admitir la existencia de alguna clase de incertidumbre o de perturbaciones acotadas que se presentan entre el modelo simplificado del sistema (modelo utilizado para el diseño) y el sistema real. El término de inyección se diseña de tal forma que las trayectorias del sistema sean forzadas a permanecer en alguna superficie deslizante en el espacio del error. El movimiento de las trayectorias en esta superficie se conoce como modo deslizante (Utkin 1992).

Los modos deslizantes de primer orden son robustos y precisos con respecto a varias clases de perturbaciones internas como externas, pero esta restringido a los casos con grado relativo 1. Para los modos deslizantes de primer orden, la estabilidad, robustez y velocidad de convergencia al punto

de equilibrio se pueden estudiar mediante una función de Lyapunov (Utkin 1992). En trabajos como (Xiong y Saif 2001) se diseñan observadores por modos deslizantes de primer orden a través de la adición de un término discontinuo tipo signo en la inyección de salida.

Esencialmente, los observadores/diferenciadores basados en modos deslizantes de segundo orden han mostrado que pueden ser exactos para una clase amplia de señales (Levant 1998), (Bartolini y E. 2000), (Bejarano, Fridman, y Poznyak 2007), (Pisano y Usai 2007). En particular, se ha mostrado que el algoritmo del Super-Twisting se puede adaptar muy bien para diseñar diferenciadores y en forma similar, este algoritmo también ha sido usado para construir observadores exactos y robustos con convergencia en tiempo finito (Dávila, Fridman, y Levant 2005), (Bejarano, Fridman, y Poznyak 2007), (Floquet y Barbot 2007).

Por ejemplo, en (Levant 1998) se propone un diferenciador de primer orden; y en (Dávila, Fridman, y Levant 2005), se propone un observador para una clase de sistema mecánico de segundo orden. En ambos casos, solo se admiten perturbaciones e incertidumbres acotadas y el análisis de la precisión, la convergencia en tiempo finito y la estabilidad en presencia de perturbaciones acotadas se lleva a cabo mediante criterios geométricos, en este caso se hace uso de una curva mayorante. Sin embargo, la estimación del tiempo de convergencia es bastante difícil utilizando este criterio.

Para aprovechar las ventajas que ofrece el análisis a través de métodos de Lyapunov, recientemente, se han desarrollado funciones fuertes de Lyapunov para el algoritmo Super-Twisting (Moreno y Osorio 2008), (Moreno 2009), (Polyakov y Poznyak 2009), permitiendo extender y analizar la robustez para una clase más amplia de perturbaciones e incertidumbres que originalmente no eran consideradas en el algoritmo.

Además, nuevos algoritmos han sido propuestos basados en el algoritmo Super-Twisting (ver (Moreno y Osorio 2008), (Moreno 2009)). Mediante la adición de términos de corrección lineales las perturbaciones con crecimiento lineal también pueden ser consideradas (Moreno y Osorio 2008). Estos términos de corrección proveen al algoritmo mayor fuerza de atracción cuando las trayectorias están muy alejadas del punto de equilibrio, ya que los términos lineales son más fuertes que los términos no lineales lejos del origen. Como la modificación del algoritmo resulta ser no homogénea, no es posible utilizar la teoría de homogeneidad para probar la estabilidad del algoritmo (Baccioti y Rosier 2005), (Levant 2005), (Levant 2007). Para asegurar la convergencia en tiempo finito y las características de robustez de estos nuevos algoritmos, se han empleado funciones estrictas de Lyapunov.

El empleo de funciones de Lyapunov permite obtener fórmulas para estimar el tiempo de convergencia. En (Polyakov y Poznyak 2009) se presenta una fórmula para estimar el tiempo de convergencia a través de una función de Lyapunov. La estructura de la función es complicada así como el procedimiento para obtener la estimación del tiempo de convergencia. En contraste con las funciones estrictas de Lyapunov propuestas en (Moreno y Osorio 2008) que son simples y similares a las utilizadas para probar la estabilidad en los sistemas lineales.

Las funciones de Lyapunov de (Moreno y Osorio 2008) y (Polyakov y Poznyak 2009) son

muy conservadoras por lo que no es posible obtener un buen estimado del tiempo de convergencia con alguna técnica de optimización. Por otro lado, en (Moreno 2009) se logró obtener toda una familia de funciones de Lyapunov que permiten mostrar la convergencia en tiempo finito del algoritmo Super-Twisting y del algoritmo Super-Twisting Generalizado, que es un algoritmo que tiene un proceso de construcción particular. Utilizando esta familia de funciones de Lyapunov, en (Dávila, Moreno, y Fridman 2009) se propone un método para seleccionar la función de Lyapunov fuerte que permite asegurar el mejor estimado del tiempo de convergencia.

Con el empleo de las funciones de Lyapunov es posible obtener una relación explícita para el diseño de las ganancias de los algoritmos (Moreno y Osorio 2008), (Moreno 2009).

1.2. Motivación

Existen trabajos enfocados al desarrollo de observadores/diferenciadores para cierta clase de sistemas, en los cuales el error de observación o el error de diferenciación converge en forma exacta (es decir, en tiempo finito aún en presencia de perturbaciones acotadas) o asintóticamente a cero (Dávila, Fridman, y Levant 2005), (Atassi y Khalil 2000), (Levant 1998). En este tipo de observadores/diferenciadores la estimación del tiempo de convergencia tanto del error de observación como del error de diferenciación es altamente dependiente de las condiciones iniciales del sistema. Esta limitación importante, hace que su aplicación a cierta clase de sistemas tenga un trato especial.

El principal inconveniente de todos los observadores/diferenciadores conocidos hasta ahora es que su tiempo de convergencia tiende a infinito cuando la norma de la condición inicial crece de forma no acotada. Determinar *a priori* el tiempo para el cual los errores de observación/diferenciación convergen a cero es imposible sin el conocimiento de alguna cota de la condición inicial (o algún conjunto de las condiciones iniciales).

Por otro lado, la uniformidad con respecto a las condiciones iniciales es una propiedad interesante, debido a que los tiempos de convergencia de todas las trayectorias que inician fuera de un conjunto compacto pueden acotarse por una sola constante. La importancia de tener algoritmos que puedan converger en forma exacta, y además con tiempo de convergencia independiente de las condiciones iniciales no es muy clara. Solo para ciertas aplicaciones las propiedades de convergencia en tiempo finito y con convergencia uniforme pueden ser de gran ayuda, como en aplicaciones para sistemas híbridos o para establecer propiedades de separación en sistemas no lineales. Por ejemplo, para sistemas no lineales, si se diseña un control por retroalimentación de salida basado en un observador de estados, si no se conoce alguna cota de las condiciones iniciales, no se puede asegurar que el observador converja, por ejemplo, antes de que las trayectorias de la planta se escapen a infinito. Ahora bien, para sistemas híbridos con ciclo de vida ('dwell time') estrictamente positivo, la convergencia en tiempo finito no es suficiente, debido a que los controladores y observadores para estos sistemas deben converger exactamente durante el ciclo de vida. Desde esta perspectiva la desventaja de los observadores y controladores basados en el algoritmo Super-Twisting es que

su tiempo de convergencia depende de las condiciones iniciales y para asegurar la convergencia durante el ciclo de vida se requiere tener algún conocimiento sobre el conjunto al que pertenecen las condiciones iniciales del sistema.

Por esta razón, se propone por primera vez, un nuevo algoritmo que posee la propiedad de convergencia exacta, con tiempo de convergencia independiente de las condiciones iniciales. El algoritmo es analizado a través de métodos de Lyapunov, los cuales son de gran ayuda y muy importantes para analizar la estabilidad de sistemas no lineales.

1.3. Planteamiento del problema

El problema específico que se quiere resolver en este trabajo de tesis es proponer y diseñar un nuevo algoritmo basado en el algoritmo Super-Twisting, que presente tiempo de convergencia independiente de las condiciones iniciales, que sea robusto ante perturbaciones acotadas y converja en tiempo finito al punto de equilibrio. Para establecer cuando un sistema presenta la propiedad de convergencia uniforme y cuando las trayectorias del sistema convergen en tiempo finito con tiempo de convergencia independiente de las condiciones iniciales se introducen las siguientes definiciones:

Definición 1.1 *Un sistema es **uniformemente convergente** (con respecto a las condiciones iniciales) si el tiempo de convergencia de cualquier trayectoria del sistema a un conjunto compacto arbitrario, que contiene el punto de equilibrio en su interior, está acotado por una constante que es independiente de las condiciones iniciales.*

▲

Definición 1.2 *Un sistema es **uniformemente convergente en tiempo finito** si converge al punto de equilibrio en tiempo finito y además el tiempo de convergencia de cualquier trayectoria del sistema al punto de equilibrio está acotado por una constante que es independiente de las condiciones iniciales.*

▲

Definición 1.3 *Un sistema **exactamente convergente** si todas sus trayectorias convergen al origen en tiempo finito en presencia de perturbaciones que no se desvanecen en el origen.*

▲

Definición 1.4 *Un sistema es **exacta y uniformemente convergente** (con respecto a las condiciones iniciales) si es **exactamente convergente** y además el tiempo de convergencia de cualquier trayectoria del sistema al origen está acotado por una constante que es independiente de las condiciones iniciales.*

▲

Considere la siguiente ecuación diferencial

$$\dot{x} = -k|x|^p \text{sign}(x) + \rho(x, t) \quad (1.1)$$

El comportamiento de las trayectorias solución del sistema (1.1) queda completamente caracterizado por el valor del exponente p . Suponga $\rho(x, t) = 0$:

- si $p = 0$, la convergencia al origen es en tiempo finito (el sistema (1.1) es un modo deslizante de primer orden) (Utkin 1992).
- si $0 < p < 1$, la convergencia al origen es en tiempo finito.
- si $p = 1$, la convergencia al origen es exponencial.
- si $p > 1$, la convergencia al origen es asintótica y uniforme (con respecto a la condición inicial) a un conjunto compacto.

Por otro lado, si $\rho(x, t)$ no se desvanece en el origen, el origen no es un punto de equilibrio. Suponiendo que $|\rho(x, t)| \leq r$, donde r es una constante que satisface $r < k$

- si $p = 0$, el sistema (1.1) converge exactamente al origen.
- si $0 < p < 1$, la convergencia a una vecindad del origen es en tiempo finito.
- si $p = 1$, la convergencia a una vecindad del origen es exponencial.
- si $p > 1$, la convergencia a una vecindad del origen es asintótica y uniforme (con respecto a la condición inicial) a un conjunto compacto.

La propuesta para resolver el problema utiliza básicamente la unión de dos propiedades: convergencia en tiempo finito y convergencia uniforme con respecto a las condiciones iniciales. El trabajo se ha enfocado en probar que la modificación propuesta al algoritmo del Super-Twisting converge en forma exacta y uniforme a través de funciones de Lyapunov y en diseñar observadores/diferenciadores que sean exactos y uniformemente convergentes.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivos Generales

Como parte de este trabajo de tesis se pretenden desarrollar los siguientes puntos:

- Proponer un nuevo algoritmo que sea exacto y uniformemente convergente.
- Analizar la estabilidad del algoritmo propuesto a través de funciones estrictas de Lyapunov.
- Desarrollar un método que permita estimar el tiempo de convergencia exacta y uniforme del algoritmo propuesto.

1.4.2. Objetivos Particulares

- Proponer una función estricta de Lyapunov que permita probar la convergencia en tiempo finito del algoritmo propuesto sin perturbaciones.
- Proponer una función estricta Lyapunov que permita probar la convergencia uniforme del algoritmo propuesto sin perturbaciones.
- Emplear ambas funciones de Lyapunov para estimar el tiempo de convergencia del algoritmo sin perturbaciones.
- Obtener una representación para las perturbaciones que se consideran en el algoritmo propuesto considerando que las perturbaciones satisfacen la condición de sector.
- Emplear ambas funciones de Lyapunov propuestas para el caso perturbado para probar la convergencia exacta y uniforme del algoritmo ante perturbación acotada.
- Diseñar un diferenciador de primer orden basado en el algoritmo propuesto y comparar su desempeño con otros diferenciadores con convergencia en tiempo finito.
- Diseñar un observador para un sistema mecánico de segundo orden basado en el algoritmo propuesto y comparar su desempeño con otros observadores con convergencia en tiempo finito.

1.4.3. Aportaciones de la tesis

Las principales aportaciones que presenta el trabajo son:

- * Se propone un nuevo algoritmo con tiempo de convergencia independiente de las condiciones iniciales.
- * Se realiza el análisis de estabilidad del algoritmo propuesto a través de funciones estrictas de Lyapunov.
- * Se introduce la noción de convergencia *exacta y uniforme* de un sistema.
- * Se realiza un observador para sistemas mecánicos y un diferenciador de primer orden basados en el algoritmo propuesto.

1.5. Contenido de la tesis

El presente trabajo de tesis esta dividido en 5 capítulos, a continuación se hace una breve descripción del contenido de cada uno de ellos:

- Capítulo I: Se establece el estado del arte y los motivos del desarrollo del trabajo de tesis, se plantea el problema a resolver, los objetivos contemplados, finalmente se propone una solución particular del problema y la metodología que se utilizara para resolver el problema.
- Capítulo II: Se establecen los preliminares necesarios, conceptos y definiciones empleados a largo del trabajo.
- Capítulo III: Se analiza el sistema no perturbado y perturbado a través de funciones de Lyapunov fuertes para estudiar sus propiedades: convergencia en tiempo finito, convergencia exacta y convergencia uniforme con respecto a las condiciones iniciales. Se investiga sobre el problema de la estimación del tiempo de convergencia. Y se aborda el problema de diseño del algoritmo cuando existen perturbaciones acotadas.
- Capítulo IV: Se realizan dos aplicaciones orientadas hacia observación y diferenciación de señales basadas en el algoritmo propuesto y se hace una comparación con otros observadores y diferenciadores exactos.
- Capítulo V: Se presentan las conclusiones que se han obtenido de la realización de la tesis y se plantea el posible trabajo futuro que se puede desprender de la misma.
- Apéndice I: Se describen algunas herramientas básicas utilizadas en la obtención de los resultados principales.

1.6. Solución General Propuesta

Debido a que recientemente se han desarrollado importantes avances en el análisis de estabilidad de algoritmo Super-Twisting a través de funciones estrictas de Lyapunov, es posible entender más claramente sus propiedades de robustez ante perturbaciones y tiempo de convergencia. Con la posibilidad de mejorar las propiedades mencionadas se pueden añadir términos de corrección al algoritmo Super-Twisting (Moreno y Osorio 2008) ,(Moreno 2009) que permiten, no solo ampliar la robustez del algoritmo a cierta clase de perturbaciones, sino también mejorar la velocidad de convergencia.

El algoritmo que se analiza en este trabajo es un caso particular del siguiente sistema.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -k_1\phi_1(x_1) + x_2 + b_1\rho_1(t, x) \\ \dot{x}_2 &= -k_2\phi_2(x_1) + b_2\rho_2(t, x) ,\end{aligned}\tag{1.2}$$

donde x_1 y x_2 son los estados correspondientes, k_1 y k_2 son constantes positivas y las ganancias que se deben diseñar para estabilizar el sistema, b_1 y b_2 son constantes que pueden tomar cualquier valor mayor o igual a cero y ponderan las perturbaciones $\rho_1(t, x)$ y $\rho_2(t, x)$ que están presentes en

el sistema ,

$$\begin{aligned}\phi_1(x_1) &= \mu_1 |x_1|^q \text{sign}(x_1) + \mu_3 |x_1|^p \text{sign}(x_1) , \\ \phi_2(x_1) &= \phi_1'(x) \phi_1(x) = \left(q\mu_1 |x_1|^{q-1} + p\mu_3 |x_1|^{p-1} \right) (\mu_1 |x_1|^q \text{sign}(x_1) + \mu_3 |x_1|^p \text{sign}(x_1)) \\ &= q\mu_1^2 |x_1|^{2q-1} \text{sign}(x_1) + (q+p)\mu_1\mu_3 |x_1|^{q+p} \text{sign}(x_1) + p\mu_3^2 |x_1|^{2p-1} \text{sign}(x_1) ,\end{aligned}$$

son los términos estabilizantes no lineales, $\mu_1, \mu_3 \geq 0$ son escalares, y por ultimo, $1/2 < q \leq 1$ y $1 \leq p \leq 2$. Este algoritmo posee dos clases de términos estabilizantes: de bajo orden y de alto orden. Los términos estabilizantes de alto orden ayudan a las trayectorias del sistema a converger con mayor velocidad cuando éstas se encuentran lejos del origen. Los términos estabilizantes de bajo orden proveen la convergencia en tiempo finito de las trayectorias del sistema y las atraen con mayor fuerza cuando éstas se encuentran cerca del origen.

Cabe mencionar que a partir del sistema (1.2) se pueden recuperar diversos algoritmos propuestos por otros autores (Moreno 2009; Levant 1998). Por ejemplo, considerando que las perturbaciones no afectan el sistema, si $\mu_1 = 1, \mu_3 = 0$ y $q = 1/2$ el algoritmo Super-Twisting es recuperado. Por otra parte, si $\mu_1 = 1, \mu_3 = 1, q = 1/2$ y $p = 1$, el algoritmo Super-Twisting Generalizado estudiado en (Moreno 2009) también es recuperado. Cuando $\mu_1 = 0, \mu_3 = 1$ y $p > 0$ el sistema (1.2) se reduce al siguiente sistema homogéneo.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\tilde{k}_1 |x_1|^p \text{sign}(x_1) + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\tilde{k}_2 |x_1|^{2p-1} \text{sign}(x_1) ,\end{aligned}\tag{1.3}$$

donde $\tilde{k}_1 = k_1\mu_3$, y $\tilde{k}_2 = p\mu_3^2 k_2$. Todas las trayectorias solución de un sistema constituido como en (1.2) son soluciones en el sentido de Filippov (Filippov 1988) si $q = 1/2$. Todas las trayectorias solución de un sistema constituido como en (1.3) son soluciones en el sentido clásico. La noción de homogeneidad no puede ser empleada para analizar la estabilidad del sistema (1.2), debido a que no es homogéneo.

1.6.1. Caso particular de estudio

El sistema que se estudia en este trabajo es considerando $\mu_1 > 0, \mu_3 > 0, q = 1/2$ y $p = 3/2$, de tal manera que

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -k_1 \phi_1(x_1) + x_2 + b_1 \rho_1(t, x) \\ \dot{x}_2 &= -k_2 \phi_2(x_1) + b_2 \rho_2(t, x) ,\end{aligned}\tag{1.4}$$

donde

$$\begin{aligned}\phi_1(x_1) &= \mu_1 |x_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_1) + \mu_3 |x_1|^{\frac{3}{2}} \text{sign}(x_1) , \\ \phi_2(x_1) &= \frac{\mu_1^2}{2} \text{sign}(x_1) + 2\mu_1\mu_3 x_1 + \frac{3}{2}\mu_3^2 |x_1|^2 \text{sign}(x_1) ,\end{aligned}$$

Generalmente el análisis de algoritmos de modos deslizantes de segundo orden esta basado en criterios de homogeneidad (Levant 2007), el cual no permite estimar el tiempo de convergencia de esta clase

de algoritmos. En este trabajo, se propone un análisis de estabilidad empleando funciones estrictas de Lyapunov. Se busca demostrar que el tiempo de convergencia de cualquier trayectoria del sistema (1.4) efectivamente está acotado por la misma cota de tiempo, que es constante.

1.7. Metodología

Por motivos de simplicidad primero se analiza el sistema (1.4) cuando no existen perturbaciones presentes que afecten su dinámica. La metodología que se sigue para analizar el sistema no perturbado se divide en:

1. Proponer una función de Lyapunov que garantice la convergencia en tiempo finito al origen de cada trayectoria del sistema que comienza en algún conjunto compacto. A su vez se obtiene una fórmula que permite estimar el tiempo de convergencia.
2. Proponer una función de Lyapunov que muestre que todas las trayectorias del sistema en estudio convergen uniformemente a un conjunto compacto, el cual contiene al origen. Esta etapa está dividida en dos partes:
 - a) Se propone una función estricta de Lyapunov para el sistema homogéneo para mostrar que esta parte del sistema es responsable de la propiedad de convergencia uniforme.
 - b) La misma función de Lyapunov propuesta en el punto anterior se utiliza para mostrar que el sistema completo converge uniformemente a un conjunto compacto. A su vez se obtiene una fórmula que permite estimar el tiempo de convergencia al conjunto compacto.

Ambas funciones de Lyapunov garantizan la convergencia exacta y uniforme (con respecto a la condición inicial) del algoritmo propuesto. Se analiza el comportamiento del tiempo de convergencia del sistema con cada una de las funciones de Lyapunov propuestas. Esto permite estimar el tiempo de convergencia del sistema sin perturbaciones. Se analiza el sistema perturbado utilizando la misma metodología general. Durante el análisis del sistema perturbado se introduce la clase de perturbaciones que serán consideradas y se analiza un caso particular del sistema perturbado (1.4).

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo se establecerán algunas definiciones y conceptos que serán de gran utilidad en capítulos posteriores. Se describen algunas herramientas matemáticas que ayudaran a analizar y comprender mejor el problema en estudio.

2.1. Estabilidad de sistemas no lineales

La estabilidad de los puntos de equilibrio de un sistema no lineal puede ser estudiada en dos formas. La primera es a través de la noción de estabilidad interna, que simplemente es la noción clásica de estabilidad del sistema no forzado, es decir, cuando la entrada es nula. El segundo caso es utilizando la noción de estabilidad externa, que considera el caso cuando la entrada es distinta de cero en el sistema no lineal.

2.1.1. Estabilidad en el sentido clásico

En particular, en esta sección se hará uso de la noción de estabilidad interna en el sentido de Lyapunov (Bacciotti y Rosier 2005) . Considere el siguiente sistema

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.1}$$

donde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Las siguientes definiciones son tomadas de (Bacciotti y Rosier 2005) y (Osorio 2009).

Definición 2.1 *Se dice que el origen $x = 0$ es un punto de equilibrio de (2.1) si $f(0) = 0$.*

▲

Definición 2.2 *El origen de (2.1) es estable en el sentido de Lyapunov si para cada $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que para cada $x_0 = x(0)$, con $\|x_0\| < \delta$ y todo $t > 0$ se cumple que*

$$\|x(t)\| < \epsilon$$

para todas las soluciones $x(\cdot)$ de (2.1).

▲

Definición 2.3 Se dice que el origen de (2.1) es localmente atractivo si para $\forall t_0 \geq 0$ existe δ_0 tal que $\|x_0\| < \delta_0$ y cada solución $x(\cdot)$ de (2.1) satisface:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$$

▲

Definición 2.4 Se dice que el origen de (2.5) es Local y Asintóticamente Estable, si es estable en el sentido de Lyapunov y localmente atractivo. Y el origen es Global y Asintóticamente Estable, si δ_0 puede ser definido tan grande como se quiera.

▲

Definición 2.5 Una función real $V(x)$ se dice que es radialmente no acotada si la función se define sobre $B^r = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| > r\}$, para alguna $r > 0$, y

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty$$

▲

Definición 2.6 Una candidata a función estricta de Lyapunov es un mapeo real $V(x)$ el cual está definido sobre $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\}$, para alguna $r > 0$ y satisface las siguientes propiedades:

1. $V(0) = 0$
2. $V(x) > 0$ para $x \neq 0$ ($V(x)$ es positiva definida)
3. $V(x)$ es de clase C^1 sobre B_r
4. $\nabla V(x) \cdot f(x) < 0$ para cada $x \in B_r \setminus 0$ ($V(x)$ es negativa definida)

Si una función $V(x)$ está definida para toda $x \in \mathbb{R}^n$, es radialmente no acotada y satisface las propiedades 1, 2, 3 y 4 con B_r reemplazado por \mathbb{R}^n , se definirá como una función estricta de Lyapunov global.

▲

Teorema 2.1 (Segundo Teorema de Lyapunov) Si existe una función estricta de Lyapunov (global), entonces el punto de equilibrio de (2.1) es Local (Global) y Asintóticamente Estable.

▲

2.1.2. Estabilidad en Tiempo Finito

Considere ahora que el siguiente sistema tiene un punto de equilibrio Local y Asintóticamente Estable y cualquier trayectoria alcanza este punto en tiempo finito

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.2}$$

y suponga que

1. f es un campo vectorial bien definido en la vecindad de 0,
2. $f(0)=0$,
3. el sistema (2.2) posee solución única en tiempo hacia delante, esto es, si dos soluciones concuerdan en algunos tiempos t_0 , entonces, concorderán en cualquier tiempo $t \geq t_0$.

Denote $\phi(t, x)$ como el mapeo de flujo, el cual esta continuamente definido sobre el conjunto abierto en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$. Las siguientes definiciones son tomadas de (Bhat y Berstein 2000):

Definición 2.7 *El origen del sistema (2.2) es estable en tiempo finito si es estable y existe un conjunto abierto U que contiene al origen, y la función $T : U \setminus \{0\} \rightarrow (0, \infty)$ (conocida como función ‘settling-time’) tal que, para cada $x \in U \setminus \{0\}$, $\phi(\cdot, x)$ esta definido sobre $[0, T(x))$, $\phi(t, x) \in U \setminus \{0\} \forall t \in [0, T(x))$ y el $\lim_{t \rightarrow T(x)} \phi(t, x) = 0$.*

▲

Es posible caracterizar la estabilidad en tiempo finito de un sistema no lineal a través de una función de Lyapunov.

Teorema 2.2 *(Bhat y Berstein 2000) El origen es estable en tiempo finito y la función ‘settling-time’ es continua en cero, si y solo si, existen números reales $C > 0$ y $\alpha \in (0, 1)$, y una función continua V positiva definida sobre una vecindad abierta Ω de 0, tal que*

$$\dot{V}(x) \leq -CV(x)^\alpha, \forall x \in \Omega \setminus \{0\} \tag{2.3}$$

De ser así, la función ‘settling-time’ $T(x)$ es de hecho continua en una vecindad de 0 y satisface (para $\|x\|$ suficientemente pequeña)

$$T(x) \leq \frac{1}{C(1-\alpha)} V(x)^{1-\alpha}. \tag{2.4}$$

▲

2.1.3. Sistemas homogéneos

En el siguiente apartado se utilizaran fundamentalmente las definiciones y conceptos dados por (Bacciotti y Rosier 2005).

Definición 2.8 Dadas las coordenadas (x_1, \dots, x_n) pertenecientes a \mathbb{R}^n y $r = (r_1, \dots, r_n)$ números reales positivos.

- La dilatación $(d_k^r)_{k>0}$ (asociada con r) se define como

$$d_k^r(x) := (k^{r_1}x_1, \dots, k^{r_n}x_n), \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall k > 0$$

Las constantes r_i se conocen como los pesos de las coordenadas x_i .

- Una función $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es homogénea de grado m ($m \in \mathbb{R}$) si

$$V(d_k^r(x)) = k^m V(x), \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall k > 0$$

- Un campo vectorial $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dice que es homogéneo de grado q ($q \in \mathbb{R}$) si

$$f_i(d_k^r(x)) = k^{q+r_i} f_i(x), \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall k > 0, i = 1, \dots, n$$

▲

Ejemplo 2.1 Usando la definición de homogeneidad para un campo vectorial mostraremos que el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -k_3|x_1|^p \text{sign}(x_1) + x_2; \\ \dot{x}_2 &= -k_4|x_1|^n \text{sign}(x_1) \end{aligned} \quad (2.5)$$

es homogéneo si $n = 2p - 1$.

De la definición, debe cumplirse que

$$f_i(d_k^r(x)) = k^{q+r_i} f_i(x)$$

para $i = 1, 2$. El operador dilatación puede escribirse como

$$d_k^r(x) := \Delta_k x$$

donde

$$\Delta = \begin{bmatrix} k^{r_1} & 0 \\ 0 & k^{r_2} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\begin{aligned} f(\Delta_k x) &= k^q \Delta_k f(x) \\ \begin{bmatrix} -k_3 k^{r_1 p} |x_1|^p \text{sign}(x_1) + k^{r_2} x_2 \\ -k_4 k^{r_1 n} |x_1|^n \text{sign}(x_1) \end{bmatrix} &= k^q \begin{bmatrix} k^{r_1} & 0 \\ 0 & k^{r_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -k_3 |x_1|^p \text{sign}(x_1) + x_2 \\ -k_4 |x_1|^n \text{sign}(x_1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} k^q k^{r_1} \{-k_3 |x_1|^p \text{sign}(x_1) + x_2\} \\ k^q k^{r_2} \{-k_4 |x_1|^n \text{sign}(x_1)\} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De lo anterior se obtienen las siguientes restricciones

$$r_1 p = q + r_1$$

$$r_2 = q + r_1$$

$$r_1 n = q + r_2$$

que se satisfacen simultáneamente solamente si $n=2p-1$.

▲

Definición 2.9 La norma homogénea es un mapeo $x \mapsto \|x\|_{r,p}$, donde para cada $p \geq 0$

$$\|x\|_{r,p} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{p}{r_i}} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

▲

2.1.4. Funciones de Lyapunov homogéneas

Se sabe que un sistema lineal con punto de equilibrio asintóticamente estable posee una función estricta de Lyapunov, la cual tiene forma cuadrática. En el caso de sistemas homogéneos se admiten funciones estrictas de Lyapunov homogéneas. El siguiente teorema establece la existencia de una función estricta de Lyapunov para un sistema homogéneo.

Teorema 2.3 (Bacciotti y Rosier 2005) Sea f un campo vectorial continuo en \mathbb{R}^n tal que el punto de equilibrio es asintóticamente estable localmente. Asuma que f es homogénea de grado q para alguna $r \in (0, \infty)^n$. Entonces, para cualquier $p \in \mathbb{N}^*$ y cualquier $m > p \cdot \max_i \{r_i\}$, existe una función estricta de Lyapunov V para $\dot{x} = f(x)$, el cual es homogénea de grado m y de clase C^p . Como una consecuencia directa la derivada con respecto al tiempo $\dot{V} = \langle \nabla V, f \rangle$ es homogénea de grado $q + m$.

▲

Por otro lado, es posible caracterizar el tipo de convergencia que poseen las trayectorias del sistema homogéneo con punto de equilibrio asintóticamente estable solamente con el grado de homogeneidad del campo vectorial.

Corolario 2.1 Sea f como en el Teorema 2.3 y sea $\|\cdot\|_{r,p}$ cualquier norma homogénea:

- si $q > 0$ (q es el grado de homogeneidad f), entonces existen constantes $M_1, M_2 > 0$, tal que, para cualquier trayectoria y para todo $t \geq 0$

$$M_1(1 + \|x(0)\|_{r,p}^q t)^{-\frac{1}{q}} \|x(0)\|_{r,p}^q \leq \|x(t)\|_{r,p} \leq M_2(1 + \|x(0)\|_{r,p}^q t)^{-\frac{1}{q}} \|x(0)\|_{r,p}^q \quad (2.6)$$

- si $q = 0$, entonces existen constantes M_1, M_2 y D tal que

$$M_1 \exp(-Dt) \|x(0)\|_{r,p} \leq \|x(t)\|_{r,p} \leq M_2 \exp(-Dt) \|x(0)\|_{r,p} \quad (2.7)$$

- si $q < 0$, el origen es estable en tiempo finito.

Demostración. Acorde con el Teorema 2.3 existe una función de Lyapunov estricta V para $\dot{x} = f(x)$, la cual es homogénea de grado m , positiva definida y continua de clase C^1 . Además, \dot{V} es homogénea de grado $m + q$. Por homogeneidad de V y para algunas $C_1, C_2 > 0$

$$C_1 \|x\|_{r,p}^q \leq V(x) \leq C_2 \|x\|_{r,p}^q, \quad \forall x \quad (2.8)$$

y para algunas $C_3, C_4 > 0$

$$C_3 \|x\|_{r,p}^{q+m} \leq -\dot{V}(x) \leq C_4 \|x\|_{r,p}^{q+m}, \quad \forall x \quad (2.9)$$

Por lo que para algunas $C_5, C_6 > 0$

$$C_5 V(x)^{\frac{q+m}{m}} \leq -\dot{V}(x) \leq C_6 V(x)^{\frac{q+m}{m}}, \quad \forall x. \quad (2.10)$$

Si $q > 0$ (respectivamente, $q = 0$), una integración directa de (2.10) combinada con (2.8) da la expresión (2.6) (respectivamente, (2.7)). El resultado de $q < 0$ se obtiene de (2.10) y el Teorema 2.2. La prueba puede consultarse con detalle en (Bacciotti y Rosier 2005).

▲

2.2. Caracterización de las no linealidades

Es posible reemplazar las funciones matemáticas que describen las no linealidades involucradas por una caracterización sectorial de las mismas que facilita su tratamiento y comprensión. Los conceptos de las siguientes secciones se han tomado de (Khalil 2002).

2.2.1. Condiciones de sector para funciones sin memoria

Considere la siguiente función escalar $y = \psi(t, u)$, que satisface la siguiente desigualdad

$$\alpha u^2 \leq u\psi(t, u) \leq \beta u^2 \quad (2.11)$$

para toda (t, u) , donde α y β son números reales tal que $\beta \geq \alpha$. La interpretación gráfica de la definición anterior es la siguiente, dada una función $y = \psi(t, u)$. Su gráfica correspondiente esta contenida en un sector, el cual esta delimitado por las líneas $y = \alpha u$ y $y = \beta u$. De lo anterior se dice que ψ pertenece al sector $[\alpha, \beta]$. La Figura 2.1 muestra el sector $[\alpha, \beta]$ para $\beta > 0$. La desigualdad también puede ser expresada como

$$[\psi(t, u) - \alpha u][\psi(t, u) - \beta u] \leq 0 \quad (2.12)$$

para toda (t, u) . Para el caso vectorial, considerando que

$$\psi(t, u) = \begin{bmatrix} \psi_1(t, u_1) \\ \psi_2(t, u_2) \\ \vdots \\ \psi_p(t, u_p) \end{bmatrix}$$

y suponiendo que cada componente ψ_i satisface la condición de sector (2.11) con constantes α_i y $\beta_i > \alpha_i$. Además tomando en cuenta que

$$K_1 = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p), \quad K_2 = \text{diag}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$$

Definición 2.10 Una función sin memoria $\psi : [0, \infty) \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ se dice que pertenece al sector

- $[0, \infty]$ si $u\psi(t, h) \geq 0$
- $[K_1, \infty]$ si $u[\psi(t, h) - K_1 u] \geq 0$
- $[0, K_2]$ con $K_2 = K_2^T$ si $\psi^T(t, h)[\psi(t, h) - K_2 u] \leq 0$
- $[K_1, K_2]$ con $K = K_2 - K_1 = K^T$ si $[\psi(t, h) - K_1 u]^T [\psi(t, h) - K_2 u] \leq 0$

Para todos los casos debe satisfacerse para toda (t, u) . Si en algunos casos la desigualdad es estricta, se puede escribir el sector como $(0, \infty), (K_1, \infty), (0, K_2)$ o (K_1, K_2) . En forma similar, para el caso escalar, se dice que ψ pertenece a los sectores $(\alpha, \beta), [\alpha, \beta), (\alpha, \beta]$ si uno o ambos lado de (2.11) se satisfacen en forma estricta.

▲

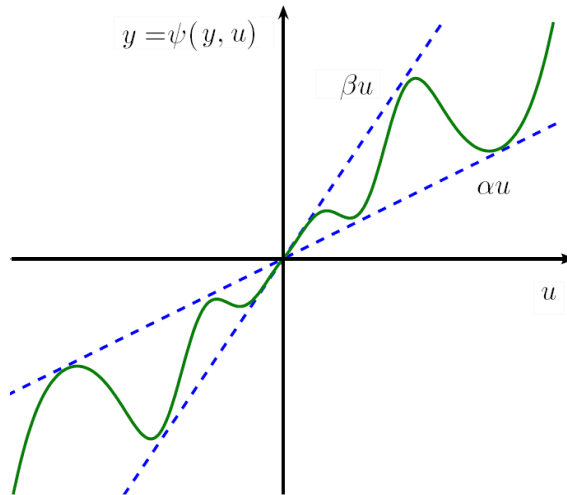


Figura 2.1: Sector $[\alpha, \beta]$ para una no linealidad con $\beta > \alpha > 0$.

2.2.2. Criterio del Círculo

Considere el sistema Σ representado como interconexión de un sistema lineal en el lazo directo y una no linealidad sin memoria en el lazo de retroalimentación

$$\Sigma = \begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu, \quad x(0) = x_0 \\ y &= Cx + Du \\ u &= \psi(t, y) \end{cases} \quad (2.13)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$. En el caso general $u, y \in \mathbb{R}^p$, la pareja (A, B) es controlable, la pareja (A, C) es observable y $\psi : [0, \infty) \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ es una función no lineal sin memoria. La función de transferencia del sistema lineal

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} + D$$

es propia. Las suposiciones de controlabilidad y observabilidad aseguran que $\{A, B, C, D\}$ es una realización mínima de $G(s)$. La función no lineal ψ debe satisfacer la condición de sector (2.11). El estudio de la estabilidad del punto de equilibrio puede realizarse para toda una clase de no linealidades que satisfagan la condición de sector. La forma del sistema Σ se conoce como forma de Lur'e.

Definición 2.11 *Considere el sistema (2.13), donde ψ satisface la condición de sector de la Definición 2.10. El sistema es absolutamente estable si el origen es global y asintóticamente estable para cualquier no linealidad en un sector dado.*

▲

El siguiente teorema se conoce como Criterio del Círculo para el caso escalar (caso SISO, Single-Input-Single-Output).

Teorema 2.4 *Considere Σ un sistema escalar, donde A, B, C, D es la realización mínima de $G(s)$ y $\psi \in [\alpha, \beta]$. Entonces el sistema es absolutamente estable si una de las siguientes condiciones se satisface apropiadamente*

1. Si $0 < \alpha < \beta$, el Diagrama de Nyquist de $G(j\omega)$ no entra al disco $D(\alpha, \beta)$ y lo encircula m veces en dirección de las manecillas del reloj, donde m es el número de polos de $G(s)$ con parte real positiva.
2. Si $0 = \alpha < \beta$, $G(s)$ es Hurwitz y el Diagrama de Nyquist de $G(j\omega)$ permanece en el lado derecho de la línea vertical definida por $\text{Re}[s] = -1/\beta$.
3. Si $\alpha < 0 < \beta$, $G(s)$ es Hurwitz y el Diagrama de Nyquist de $G(j\omega)$ permanece en el interior del disco $D(\alpha, \beta)$.

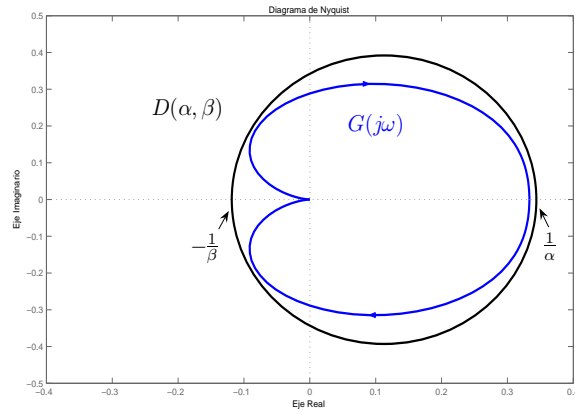


Figura 2.2: Representación gráfica de la tercera condición del criterio del círculo

Nota 2.1 Cuando $\alpha = -\beta$ el centro del círculo $D(\alpha, \beta)$ coincide con el origen del Diagrama de Nyquist.



Capítulo 3

Algoritmo Super-Twisting con convergencia Exacta y Uniforme

3.1. Introducción

En este capítulo se presentará el análisis del sistema perturbado y del sistema no perturbado del algoritmo Super-Twisting con convergencia exacta y uniforme. El análisis se lleva a cabo en primera instancia para el sistema no perturbado a través de dos funciones de Lyapunov propuestas para mostrar la convergencia en tiempo finito y la convergencia uniforme con respecto a las condiciones iniciales. La unión de ambas afirmaciones permite concluir que el sistema posee la propiedad de convergencia exacta y uniforme.

Para el sistema perturbado se considera una clase amplia de perturbaciones, que pueden ser representadas a través de las condiciones de sector en un vector de coordenadas distinto al del sistema original. Representar las condiciones de sector en este vector de coordenadas permite expresar las condiciones de sector en una forma cuadrática, que es de gran utilidad en el análisis de la robustez del algoritmo, permitiendo obtener la función de Lyapunov robusta resolviendo una Desigualdad Matricial Lineal (LMI, por sus siglas en inglés) en donde se toman en cuenta las perturbaciones (que cumplen con la condición de sector) o su correspondiente Desigualdad Algebraica de Riccati (ARI, por sus siglas en inglés). Además, siempre es posible obtener la representación de las perturbaciones en las coordenadas originales.

A partir de las funciones estrictas de Lyapunov se puede obtener una fórmula que permite estimar una cota conservadora del tiempo de convergencia del algoritmo Super-Twisting con convergencia exacta y uniforme al origen.

3.2. Análisis del Algoritmo Super-Twisting con convergencia exacta y uniforme sin perturbaciones

En ausencia de perturbaciones, el comportamiento de las trayectorias del sistema (1.4) queda descrito por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -k_1\phi_1(x_1) + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_2\phi_2(x_1) ,\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde

$$\begin{aligned}\phi_1(x_1) &= \mu_1 |x_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_1) + \mu_3 |x_1|^{\frac{3}{2}} \text{sign}(x_1) \\ \phi_2(x_1) &= \frac{\mu_1^2}{2} \text{sign}(x_1) + 2\mu_1\mu_3 x_1 + \frac{3}{2}\mu_3^2 |x_1|^2 \text{sign}(x_1) .\end{aligned}$$

Primero se mostrará que las trayectorias del sistema (3.1) tienen convergencia global y en tiempo finito al origen a través de una función estricta de Lyapunov. Una segunda función estricta de Lyapunov muestra la convergencia uniforme (con respecto a las condiciones iniciales) de cualquier trayectoria del sistema a un conjunto compacto arbitrario.

Ambos resultados prueban la convergencia en tiempo finito y uniforme del algoritmo propuesto. Por lo tanto, el tiempo en que las trayectorias convergen al origen no depende de la condición inicial, y esta acotado por una constante, que solamente depende de los parámetros del sistema.

3.2.1. Convergencia en tiempo finito del sistema no perturbado

Para mostrar que el sistema (3.1) converge en tiempo finito se propone la siguiente función estricta de Lyapunov

$$V_1(x) = \zeta^T P \zeta ,\tag{3.2}$$

El vector ζ está definido como $\zeta^T = \varphi^T(x) = [\phi_1(x_1) , x_2]$, $\varphi(x)$ viene a ser un homeomorfismo global y P es una matriz simétrica positiva definida. La estructura de la función de Lyapunov (3.2) ha sido utilizada en (Moreno 2009) para analizar la estabilidad y el tiempo de convergencia del algoritmo Super-Twisting Generalizado. De forma similar, la construcción de las matrices $P = P^T > 0$, para la función de Lyapunov también se reduce a hallar una solución a la Ecuación Algebraica de Lyapunov (ALE, por sus siglas en inglés)

$$A^T P + P A = -Q\tag{3.3}$$

eligiendo correctamente la matriz A y proponiendo $Q = Q^T > 0$.

Proposición 3.1 *Considere que el matriz A es*

$$A = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & 0 \end{bmatrix} ,\tag{3.4}$$

tal que $k_1 > 0$, $k_2 > 0$. Para cada matriz simétrica positiva definida $Q = Q^T > 0$ que se elige, la función (3.2) es una función estricta de Lyapunov global, para el sistema (3.1), donde $P = P^T > 0$ es la única matriz simétrica positiva definida solución de la ALE (3.3). Además, la derivada \dot{V}_1 de la función de Lyapunov tomada a lo largo de las trayectorias del sistema satisface la desigualdad diferencial

$$\dot{V}_1 \leq -\gamma_1(Q, \mu_1) V_1^{\frac{1}{2}}(x) - \gamma_3(Q, \mu_3) |x|^{\frac{1}{2}} V_1(x), \quad (3.5)$$

donde

$$\begin{aligned} \gamma_1(Q, \mu_1) &\triangleq \mu_1^2 \frac{\lambda_{\min}\{Q\}}{2\lambda_{\max}^{1/2}\{P\}}, \\ \gamma_3(Q, \mu_3) &\triangleq \mu_3 \frac{3\lambda_{\min}\{Q\}}{2\lambda_{\max}\{P\}} \end{aligned}$$

son escalares que dependen de la selección de la matriz Q y los parámetros μ_1 y μ_3 . Más aún, las trayectorias del sistema (3.1) que comienzan en la condición inicial $x_0 \in \mathbb{R}^2$ convergen en tiempo finito al origen si $\mu_1 > 0$, y la cota superior del tiempo de convergencia T_1 de las trayectorias del sistema se puede estimar como

$$T_1 = \frac{2}{\gamma_1(Q, \mu_1)} V^{1/2}(x_0) \quad \text{para } \mu_1 > 0. \quad (3.6)$$

▲

Demostración. Seleccione $Q = Q^T > 0$ arbitrariamente. A es Hurwitz para cualquier $k_1 > 0$ y $k_2 > 0$, dado que el polinomio característico de esta matriz es $p(s) = s^2 + k_1 s + k_2$. Bajo estas condiciones la solución P de (3.3) satisface propiedades estándar en control (Khalil 2002), por lo tanto, $P = P^T > 0$ es una matriz constante simétrica positiva definida, y la función continua

$$V_1(x) = \zeta^T P \zeta,$$

donde

$$\zeta^T = [\phi_1(x_1), x_2]$$

es una función candidata de Lyapunov para el sistema (3.1). Dado que $\phi_2(x_1) = \phi_1'(x_1) \phi_1(x_1)$, y $\phi_1'(x_1) = \left(\frac{\mu_1}{2|x_1|^{\frac{1}{2}}} + \frac{3\mu_3}{2} |x_1|^{\frac{1}{2}} \right)$. Se puede reescribir el sistema (3.1) como

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= \begin{bmatrix} \phi_1'(x_1) \{-k_1 \phi_1(x_1) + x_2\} \\ -k_2 \phi_2(x_1) \end{bmatrix} \\ &= \phi_1'(x_1) \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & 0 \end{bmatrix} \zeta = \phi_1'(x_1) A \zeta. \end{aligned}$$

Tomando la derivada de $V_1(x)$

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(x) &= \dot{\zeta}^T P \zeta + \zeta^T P \dot{\zeta} \\ &= \phi_1'(x_1) \zeta^T (A^T P + P A) \zeta = -\phi_1'(x_1) \zeta^T Q \zeta \end{aligned}$$

donde Q satisface (3.3). Recordando que la desigualdad estándar para formas cuadráticas es

$$\lambda_{\min} \{P\} \|\zeta\|_2^2 \leq \zeta^T P \zeta \leq \lambda_{\max} \{P\} \|\zeta\|_2^2, \quad (3.7)$$

donde

$$\|\zeta\|_2^2 = \zeta_1^2 + \zeta_2^2 = \phi_1^2(x_1) + x_2^2 = \mu_1^2 |x_1| + 2\mu_1\mu_3 |x_1|^2 + \mu_3^2 |x_1|^3 + x_2^2$$

es la norma Euclidiana de ζ , y que la siguiente desigualdad

$$\mu_1 |x_1|^{\frac{1}{2}} \leq \|\zeta\|_2$$

se satisface. Se muestra que

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -\phi_1'(x_1) \zeta^T Q \zeta \leq -\lambda_{\min} \{Q\} \phi_1'(x_1) \|\zeta\|_2^2 \\ &= -\mu_1 \frac{\lambda_{\min} \{Q\}}{2|x_1|^{\frac{1}{2}}} \|\zeta\|_2^2 - \mu_3 \frac{3\lambda_{\min} \{Q\}}{2} |x_1|^{\frac{1}{2}} \|\zeta\|_2^2 \leq -\mu_1^2 \frac{\lambda_{\min} \{Q\}}{2} \|\zeta\|_2^2 - \mu_3 \frac{3\lambda_{\min} \{Q\}}{2} |x_1|^{\frac{1}{2}} \|\zeta\|_2^2 \\ &\leq -\mu_1^2 \frac{\lambda_{\min} \{Q\}}{2\lambda_{\max}^{\frac{1}{2}} \{P\}} V_1^{\frac{1}{2}}(x) - \mu_3 \frac{3\lambda_{\min} \{Q\}}{2\lambda_{\max} \{P\}} |x_1|^{\frac{1}{2}} V_1(x). \end{aligned}$$

Se observa que $V(x)$ es una función de Lyapunov estricta y que las trayectorias de (3.1) convergen en tiempo finito al origen. Para estimar el tiempo de convergencia, se sabe que

$$\dot{V}_1 \leq -\gamma_1(Q, \mu_1) V_1^{\frac{1}{2}}(x) - \gamma_3(Q, \mu_3) |x|^{\frac{1}{2}} V_1(x) \leq -\gamma_1(Q, \mu_1) V_1^{\frac{1}{2}}(x),$$

Del principio de comparación (Khalil 2002), $V(t) \leq v(t)$ cuando $V(x_0) \leq v_0$. Entonces, solución de la ecuación diferencial

$$\dot{v} = -\gamma_1 v^{\frac{1}{2}} - \gamma_3 |x_1|^{\frac{1}{2}} v, \quad v(0) = v_0 \geq 0$$

esta dada por

$$v(t) = \left(v_0^{\frac{1}{2}} - \frac{\gamma_1}{2} t \right)^2 \quad \text{si } \gamma_1 > 0, \quad \gamma_2 = 0$$

Hay que notar que $x(t)$ converge a cero en tiempo finito solamente cuando $\gamma_1 > 0$ y la estimación del tiempo de convergencia esta dado por (3.6).

▲

A pesar de que la función de Lyapunov (3.2) permite concluir convergencia global en tiempo finito, que se observa claramente en el exponente fraccional 1/2 del primer término de la derivada $V_1(x)$ de la función de Lyapunov (3.2). No es posible concluir nada acerca de la convergencia uniforme que presenta el sistema cuando $\mu_1 = 0$ y $\mu_3 > 0$, ya que para este caso, la función de Lyapunov solo es negativa semidefinida.

Nota 3.1 Como el segundo término de la derivada $V_1(x)$ de la función de Lyapunov (3.2) no esta elevado a un exponente mayor que uno, la convergencia asintótica del sistema homogéneo no puede

ser concluida a partir de la función (3.2). De hecho, solo es posible concluir que el sistema homogéneo es estable. Para este caso, el teorema de La Salle (Khalil 2002) se requeriría para probar la convergencia asintótica del sistema homogéneo. La desigualdad de Lyapunov (3.5) permite estimar una cota superior del tiempo de convergencia en tiempo finito de las trayectorias del sistema (3.1), cuando la condición inicial pertenece a un conjunto compacto. Además, la función de Lyapunov es global, por lo tanto, el conjunto compacto puede hacerse arbitrariamente grande, por lo que para cualquier condición inicial arbitraria existe un conjunto compacto que contiene esta condición inicial.

▲

3.2.2. Función de Lyapunov para el sistema homogéneo

Cuando $\mu_1 = 0$, $\mu_3 = 1$ y $p = 3/2$ el sistema (3.1) se reduce al siguiente sistema homogéneo.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\tilde{k}_1 |x_1|^{\frac{3}{2}} \text{sign}(x_1) + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\tilde{k}_2 |x_1|^2 \text{sign}(x_1) , \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde $\tilde{k}_1 = k_1\mu_3$, y $\tilde{k}_2 = \frac{3}{2}\mu_3^2k_2$. Para analizar, el tipo de convergencia que presenta el sistema homogéneo (3.8) se propone una nueva candidata a función de Lyapunov. La primera función de Lyapunov propuesta sólo permite mostrar la convergencia global en tiempo finito del sistema no perturbado. Sin embargo, la estructura de esta función no corresponde con el comportamiento que se espera cuando se considera solamente el sistema homogéneo. Esto es porque en la derivada de la función (3.2) está presente el estado x_1 multiplicando a una función de $V_1(x)$ y solo se puede concluir que el sistema es estable cuando $\mu_1 = 0$ y $\mu_3 > 0$. El comportamiento del sistema homogéneo no se ve reflejado en la función (3.2) y no es válida por sí sola para probar la convergencia asintótica del sistema homogéneo. Además, la función (3.2) no muestra nada a cerca de la propiedad de convergencia uniforme que también posee el sistema (3.1). Por ello, en esta sección solo se analiza el sistema homogéneo (3.8).

Proposición 3.2 *La función continua*

$$V_2(x) = \frac{\delta}{3}\tilde{k}_2|x_1|^3 - x_1|x_2|^{\frac{4}{3}}\text{sign}(x_2) + \frac{\delta}{2}|x_2|^2 , \quad (3.9)$$

es una función estricta de Lyapunov para el sistema (3.8) si $\delta > 0$ es suficientemente grande. Además

$$\dot{V}_2(x) \leq -C_1 \left(\frac{V_2(x)}{2C_4} \right)^{\frac{7}{6}}$$

y el sistema (3.8) es uniformemente convergente y el tiempo de convergencia uniforme esta dado por

$$t(\varepsilon) = \frac{6}{C_1} \left(\frac{2^7 C_4^7}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{6}} \quad \text{para cualquier } \varepsilon > 0 ,$$

donde

$$C_1 = \min \left\{ \delta \tilde{k}_1 \tilde{k}_2 - \frac{3\gamma_1^{\frac{7}{3}} \tilde{k}_1}{7} - \frac{8\gamma_2^{\frac{7}{6}} \tilde{k}_2}{7}, 1 - \frac{4\gamma_1^{-\frac{7}{4}} \tilde{k}_1}{7} - \frac{4\gamma_2^{-7} \tilde{k}_2}{21} \right\}$$

$$C_4 = \max \left\{ \left(\frac{\delta}{3} \tilde{k}_2 + \frac{\gamma_3^3}{3} \right), \left(\frac{\delta}{2} + \frac{2}{3} \gamma_3^{-\frac{3}{2}} \right) \right\}$$

son escalares que dependen de la selección de los parámetros \tilde{k}_1, \tilde{k}_2 y $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 > 0$.

▲

Demostración. Se tiene que probar que $V_2(x)$ es positiva definida y $\dot{V}_2(x)$ es negativa definida. Para hacerlo, se hace uso de las siguientes desigualdades, que se derivan de la desigualdad clásica de Young (ver Apéndice A)

$$|x_1|^{\frac{3}{2}} |x_2|^{\frac{4}{3}} \leq \frac{\gamma_1^r}{r} |x_1|^{\frac{r}{2}} + \frac{\gamma_1^{-s}}{s} |x_2|^{\frac{r}{3}}, \quad r = \frac{7}{3}, \quad s = \frac{7}{4}, \quad \forall \gamma_1 > 0$$

$$|x_1|^3 |x_2|^{\frac{1}{3}} \leq \frac{\gamma_2^r}{r} |x_1|^{\frac{r}{2}} + \frac{\gamma_2^{-s}}{s} |x_2|^{\frac{r}{3}}, \quad r = \frac{7}{6}, \quad s = 7, \quad \forall \gamma_2 > 0$$

$$|x_1| |x_2|^{\frac{4}{3}} \leq \frac{\gamma_3^r}{r} |x_1|^3 + \frac{\gamma_3^{-s}}{s} |x_2|^2, \quad r = 3, \quad s = \frac{3}{2}, \quad \forall \gamma_3 > 0,$$

además

$$x_1 |x_2|^{\frac{4}{3}} \text{sign}(x_2) \leq |x_1| |x_2|^{\frac{4}{3}}$$

Utilizando las desigualdades anteriores

$$V_2(x) = \frac{\delta}{3} \tilde{k}_2 |x_1|^3 - x_1 |x_2|^{\frac{4}{3}} \text{sign}(x_2) + \frac{\delta}{2} |x_2|^2 \geq \frac{\delta}{3} \tilde{k}_2 |x_1|^3 - |x_1| |x_2|^{\frac{4}{3}} + \frac{\delta}{2} |x_2|^2$$

$$\geq \frac{\delta}{3} \tilde{k}_2 |x_1|^3 - \frac{\gamma_3^3}{3} |x_1|^3 - \frac{2}{3} \gamma_3^{-\frac{3}{2}} - |x_2|^2 = \left(\frac{\delta}{3} \tilde{k}_2 - \frac{\gamma_3^3}{3} \right) |x_1|^3 + \left(\frac{\delta}{2} - \frac{2}{3} \gamma_3^{-\frac{3}{2}} \right) |x_2|^2,$$

$\forall \gamma_3 > 0, \forall x, y$

$$V_2(x) \leq \left(\frac{\delta}{3} \tilde{k}_2 + \frac{\gamma_3^3}{3} \right) |x_1|^3 + \left(\frac{\delta}{2} + \frac{2}{3} \gamma_3^{-\frac{3}{2}} \right) |x_2|^2, \quad \forall \gamma_3 > 0, \forall x.$$

Para que $V_2(x) > 0$, se debe satisfacer

$$\delta > \max \left\{ \frac{\gamma_3^3}{\tilde{k}_2}, \frac{4}{3} \gamma_3^{-\frac{3}{2}} \right\}.$$

Si se selecciona $\gamma_3 = \left(\frac{4}{3} \tilde{k}_2 \right)^{\frac{2}{9}}$ (que es el punto donde ambas curvas se intersecan), $V_2(x) > 0$ si

$$\delta > \left(\frac{4}{3} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\tilde{k}_2 \right)^{-\frac{1}{3}}.$$

Tomando la derivada de $V_2(x)$ a lo largo de las trayectorias del sistema (3.8) y usando las desigualdades anteriores

$$\dot{V}_2(x) = -\delta \tilde{k}_1 \tilde{k}_2 |x_1|^{\frac{7}{2}} + \tilde{k}_1 |x_1|^{\frac{3}{2}} \text{sign}(x_1) |x_2|^{\frac{4}{3}} \text{sign}(x_2) + \frac{4}{3} \tilde{k}_2 |x_1|^3 |x_2|^{\frac{1}{3}} - |x_2|^{\frac{7}{3}}$$

$$\leq -\alpha_1 |x_1|^{\frac{7}{2}} - \alpha_2 |x_2|^{\frac{7}{3}}$$

donde

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \delta k_1 \tilde{k}_2 - \frac{3\gamma_1^{\frac{7}{3}}}{7} \tilde{k}_1 - \frac{8\gamma_2^{\frac{7}{6}}}{7} \tilde{k}_2 \\ \alpha_2 &= 1 - \frac{4\gamma_1^{-\frac{7}{4}}}{7} \tilde{k}_1 - \frac{4\gamma_2^{-7}}{21} \tilde{k}_2,\end{aligned}$$

por lo tanto $\dot{V}_2(x) < 0$ si

$$\begin{aligned}\delta &> \frac{3\gamma_1^{\frac{7}{3}}}{7\tilde{k}_2} + \frac{8\gamma_2^{\frac{7}{6}}}{7\tilde{k}_1} \\ 1 &> \frac{4\gamma_1^{-\frac{7}{4}}}{7} \tilde{k}_1 + \frac{4\gamma_2^{-7}}{21} \tilde{k}_2.\end{aligned}$$

Para cualquier $\tilde{k}_1 > 0$, $\tilde{k}_2 > 0$ ambas desigualdades siempre se pueden satisfacer seleccionando $(\delta, \gamma_1, \gamma_2)$ apropiadamente. Los parámetros γ_1, γ_2 y γ_3 son grados de libertad introducidos para lograr satisfacer las restricciones correspondientes. De ser así, $V_2(x)$ es una función estricta de Lyapunov. Usando la norma homogénea (Sección 2.9) y los Lemas A.2, A.3, es posible acotar $V_2(x)$. Para este caso

$$\|x\|_{r,p} = \left(|x_1|^{\frac{p}{r_1}} + |x_2|^{\frac{p}{r_2}} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

donde $p \geq 1$ es la norma y r_1 y r_2 , son los pesos de cada x_i . Si $r_1 = 1, r_2 = \frac{3}{2}$ y $p = \frac{7}{2}$ se puede establecer que

$$\begin{aligned}|x_1|^{\frac{7}{2}} + |x_2|^{\frac{7}{3}} &= \|x\|_{\frac{7}{2},p}^{\frac{7}{2}} \\ \|x\|_{\frac{7}{2},p}^{\frac{5}{2}} &\leq |x_1|^{\frac{5}{2}} + |x_2|^{\frac{5}{3}} \leq 2\|x\|_{\frac{7}{2},p}^{\frac{5}{2}} \\ \|x\|_{\frac{7}{2},p}^{\frac{3}{2}} &\leq |x_1|^{\frac{3}{2}} + |x_2| \leq 2\|x\|_{\frac{7}{2},p}^{\frac{3}{2}} \\ \|x\|_{\frac{7}{2},p}^3 &\leq |x_1|^3 + |x_2|^2 \leq 2\|x\|_{\frac{7}{2},p}^3\end{aligned}$$

Nota 3.2 Se pueden elegir otras combinaciones de pesos y normas para acotar las desigualdades anteriores.

▲

La función de Lyapunov (3.9) puede acotarse como

$$C_3 \|x\|_{r,p}^3 \leq V_2(x) \leq 2C_4 \|x\|_{r,p}^3 \quad (3.10)$$

y

$$\dot{V}_2(x) \leq -C_1 \|x\|_{r,p}^{\frac{7}{2}}$$

donde

$$\begin{aligned}C_1 &= \min \{ \alpha_1, \alpha_2 \} \\ C_3 &= \min \left\{ \left(\frac{\delta}{3} \tilde{k}_2 - \frac{\gamma_3^3}{3} \right), \left(\frac{\delta}{2} - \frac{2}{3} \gamma_3^{-\frac{3}{2}} \right) \right\} \\ C_4 &= \max \left\{ \left(\frac{\delta}{3} \tilde{k}_2 + \frac{\gamma_3^3}{3} \right), \left(\frac{\delta}{2} + \frac{2}{3} \gamma_3^{-\frac{3}{2}} \right) \right\}\end{aligned}$$

y la derivada $\dot{V}_2(x)$ queda expresada en términos de $V_2(x)$

$$\dot{V}_2(x) \leq -C_1 \left(\frac{V_2(x)}{2C_4} \right)^{\frac{7}{6}}, \quad (3.11)$$

por lo tanto, $V_2(x)$ es una función estricta de Lyapunov. Utilizando el principio de comparación (Khalil 2002), $V(t) \leq v(t)$ cuando $V(x_0) \leq v_0$, la solución de la ecuación diferencial esta dada por

$$v_f(t) = \left(\frac{C_1}{(2C_4)^{\frac{7}{6}}} t + \frac{1}{v_0^{\frac{1}{6}}} \right)^{-6} \quad (3.12)$$

que se obtiene . Sea $v_f = \varepsilon > 0$ y sea v_0 la condición inicial de la trayectoria, entonces

$$t(\varepsilon, v_0) = \frac{6(2C_4)^{\frac{7}{6}}}{C_1} \left(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{6}}} - \frac{1}{v_0^{\frac{1}{6}}} \right)$$

Si la condición inicial de la trayectoria del sistema tiende a infinito, el sistema (3.8) converge a ε en tiempo finito.

▲

La función de Lyapunov propuesta asegura la convergencia uniforme con respecto a las condiciones iniciales de todas las trayectorias del sistema (3.8) a un conjunto compacto ε . De hecho como lo muestra la derivada de la función de Lyapunov (3.11) las trayectorias del sistema (3.8) convergen asintóticamente al origen, lo cual no era claro en la derivada de la función de Lyapunov (3.2).

3.2.3. Convergencia uniforme para el sistema no perturbado

La función (3.9) muestra la convergencia asintótica del sistema homogéneo y produce un término de orden mayor a uno en la derivada de la función de Lyapunov que corresponde al comportamiento esperado del sistema (3.8). Ya que el sistema homogéneo forma parte del sistema (3.1), es de esperarse que la propiedad de convergencia uniforme se conserve en el sistema (3.1). Para mostrar esto, se realiza el mismo análisis de la sección anterior pero utilizando la función de Lyapunov (3.9) para el sistema completo.

Proposición 3.3 *La función continua (3.9) es una función de Lyapunov para el sistema (3.1). Además, el sistema (3.1) es uniformemente convergente y el tiempo de convergencia uniforme T_2 esta dado por*

$$T_2(\varepsilon) = \frac{12}{C_1} \left(\frac{2^7 C_4^7}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{6}} \quad \text{para } \varepsilon > 0 \quad (3.13)$$

donde

$$\begin{aligned}
C_2 &= \text{máx} \left\{ \frac{4}{9} \mu_1^2 k_2 \gamma_5^{\frac{3}{2}}, \frac{2}{9} \mu_1^2 k_2 \gamma_5^{-3} + \frac{\mu_1^2}{2} \delta k_2 \right\} \\
C_3 &= \text{mín} \left\{ \left(\frac{\delta}{3} \tilde{k}_2 - \frac{\gamma_3^3}{3} \right), \left(\frac{\delta}{2} - \frac{2}{3} \gamma_3^{-\frac{3}{2}} \right) \right\} \\
\varepsilon &= C_3 \left(\frac{\beta_2}{C_1} + \sqrt{\left(\frac{\beta_2}{C_1} \right)^2 + 2 \frac{C_2}{C_1}} \right)^3 \\
\beta_2 &= k_1 \mu_1 \frac{4\gamma_4^{-\frac{5}{4}}}{5} + \frac{8}{3} k_2 \mu_1 \mu_2 \frac{\gamma_6^{-5}}{5} + 2\delta k_2 \mu_1 \mu_2 \frac{3\gamma_7^{-\frac{5}{3}}}{5}
\end{aligned}$$

son escalares que dependen de la selección de los parámetros k_1, k_2, μ_1, μ_2 y de $\gamma_i > 0$, para $i = 1, \dots, 7$.

▲

Demostración. Tomando la derivada de $V_2(x)$ a lo largo de las trayectorias del sistema (3.1) se tiene

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2(x) &= -k_1 \delta \tilde{k}_2 |x_1|^2 \phi_1(x_1) \text{sign}(x_1) + \delta \tilde{k}_2 |x_1|^2 \text{sign}(x_1) x_2 + k_1 \phi_1(x_1) |x_2|^{\frac{4}{3}} \text{sign}(x_2) - |x_2|^{\frac{7}{3}} + \\
&+ \frac{4}{3} k_2 \phi_2(x_1) x_1 |x_2|^{\frac{1}{3}} - \delta k_2 \phi_2(x_1) x_2 \\
&= -k_1 \delta \tilde{k}_2 \mu_1 |x_1|^{\frac{5}{2}} + k_1 \mu_1 |x_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_1) |x_2|^{\frac{4}{3}} \text{sign}(x_2) + \frac{2}{3} \mu_1^2 k_2 |x_1| |x_2|^{\frac{1}{3}} + \frac{8}{3} k_2 \mu_1 \mu_3 x_1^2 |x_2|^{\frac{1}{3}} + \\
&- \frac{\mu_1^2}{2} \delta k_2 \text{sign}(x_1) x_2 - 2\delta k_2 \mu_1 \mu_3 x_1 x_2 \\
&- \delta \tilde{k}_1 \tilde{k}_2 |x_1|^{\frac{7}{2}} + \tilde{k}_1 |x_1|^{\frac{3}{2}} \text{sign}(x_1) |x_2|^{\frac{4}{3}} \text{sign}(x_2) + \frac{4}{3} \tilde{k}_2 |x_1|^3 |x_2|^{\frac{1}{3}} - |x_2|^{\frac{7}{3}}
\end{aligned}$$

Usando las siguientes desigualdades que se derivan de la desigualdad clásica de Young (ver Apéndice A)

$$\begin{aligned}
|x_1|^{\frac{1}{2}} |x_2|^{\frac{4}{3}} &\leq \frac{\gamma_4^p}{p} |x_1|^{\frac{5}{2}} + \frac{\gamma_4^{-q}}{q} |x_2|^{\frac{5}{3}}, \quad p = 5, \quad q = \frac{5}{4}, \quad \forall \gamma_4 > 0 \\
|x_1| |x_2|^{\frac{1}{3}} &\leq \frac{\gamma_5^p}{p} |x_1|^{\frac{3}{2}} + \frac{\gamma_5^{-q}}{q} |x_2|, \quad p = \frac{3}{2}, \quad q = 3, \quad \forall \gamma_5 > 0 \\
|x_1|^2 |x_2|^{\frac{1}{3}} &\leq \frac{\gamma_6^p}{p} |x_1|^{\frac{5}{2}} + \frac{\gamma_6^{-q}}{q} |x_2|^{\frac{5}{3}}, \quad p = \frac{5}{4}, \quad q = 5, \quad \forall \gamma_6 > 0 \\
|x_1| |x_2| &\leq \frac{\gamma_7^p}{p} |x_1|^{\frac{5}{2}} + \frac{\gamma_7^{-q}}{q} |x_2|^{\frac{5}{3}}, \quad p = \frac{5}{2}, \quad q = \frac{5}{3}, \quad \forall \gamma_7 > 0,
\end{aligned}$$

la derivada puede escribirse como

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2(x) &\leq -k_1 \delta \tilde{k}_2 \mu_1 |x_1|^{\frac{5}{2}} + k_1 \mu_1 \left(\frac{\gamma_4^5}{5} |x_1|^{\frac{5}{2}} + \frac{4\gamma_4^{-\frac{5}{4}}}{5} |x_2|^{\frac{5}{3}} \right) + \frac{2}{3} \mu_1^2 k_2 \left(\frac{2\gamma_5^{\frac{3}{2}}}{3} |x_1|^{\frac{3}{2}} + \frac{\gamma_5^{-3}}{3} |x_2| \right) + \\
&+ \frac{8}{3} k_2 \mu_1 \mu_2 \left(\frac{4\gamma_6^{\frac{5}{2}}}{5} |x_1|^{\frac{5}{2}} + \frac{\gamma_6^{-5}}{5} |x_2|^{\frac{5}{3}} \right) + \frac{\mu_1^2}{2} \delta k_2 |x_2| + 2\delta k_2 \mu_1 \mu_2 \left(\frac{2\gamma_7^{\frac{5}{2}}}{5} |x_1|^{\frac{5}{2}} + \frac{3\gamma_7^{-\frac{5}{3}}}{5} |x_2|^{\frac{5}{3}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\delta \tilde{k}_1 \tilde{k}_2 - \frac{3\gamma_1^{\frac{7}{5}}}{7} \tilde{k}_1 - \frac{8\gamma_2^{\frac{7}{5}}}{7} \tilde{k}_2 \right) |x_1|^{\frac{7}{2}} - \left(1 - \frac{4\gamma_1^{-\frac{7}{4}}}{7} \tilde{k}_1 - \frac{4\gamma_2^{-7}}{21} \tilde{k}_2 \right) |x_2|^{\frac{7}{3}} \\
& \leq -\alpha_1 |x_1|^{\frac{7}{2}} - \alpha_2 |x_2|^{\frac{7}{3}} - \beta_1 |x_1|^{\frac{5}{2}} + \beta_2 |x_2|^{\frac{5}{3}} + \beta_3 |x_1|^{\frac{3}{2}} + \beta_4 |x_2|
\end{aligned}$$

donde las constantes α_1 y α_2 están definidas de igual forma que en la sección anterior y

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= k_1 \delta \tilde{k}_2 \mu_1 - k_1 \mu_1 \frac{\gamma_4^5}{5} - \frac{8}{3} k_2 \mu_1 \mu_2 \frac{4\gamma_6^{\frac{5}{2}}}{5} - 2\delta k_2 \mu_1 \mu_2 \frac{2\gamma_7^{\frac{5}{2}}}{5} \\
\beta_2 &= k_1 \mu_1 \frac{4\gamma_4^{-\frac{5}{4}}}{5} + \frac{8}{3} k_2 \mu_1 \mu_2 \frac{\gamma_6^{-5}}{5} + 2\delta k_2 \mu_1 \mu_2 \frac{3\gamma_7^{-\frac{5}{3}}}{5} \\
\beta_3 &= \frac{4}{9} \mu_1^2 k_2 \gamma_5^{\frac{3}{2}} \\
\beta_4 &= \frac{2}{9} \mu_1^2 k_2 \gamma_5^{-3} + \frac{\mu_1^2}{2} \delta k_2
\end{aligned}$$

La derivada con respecto al tiempo de $\dot{V}_2(x)$ puede ser escrita

$$\dot{V}_2(x) \leq -C_1 \|x\|_{r,p}^{\frac{7}{2}} + \beta_2 \|x\|_{r,p}^{\frac{5}{2}} + C_2 \|x\|_{r,p}^{\frac{3}{2}} \quad (3.14)$$

donde

$$C_1 = \min \{ \alpha_1, \alpha_2 \} \quad ,$$

$$C_2 = \max \{ \beta_3, \beta_4 \} \quad .$$

Reescribiendo la desigualdad (3.14)

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2(x) &\leq -\frac{C_1}{2} \|x\|_{r,p}^{\frac{7}{2}} - \frac{C_1}{2} \|x\|_{r,p}^{\frac{7}{2}} + \beta_2 \|x\|_{r,p}^{\frac{5}{2}} + C_2 \|x\|_{r,p}^{\frac{3}{2}} \\
&\leq -\frac{C_1}{2} \|x\|_{r,p}^{\frac{7}{2}} - \frac{C_1}{2} \|x\|_{r,p}^{\frac{3}{2}} \left(\|x\|_{r,p}^2 - 2\frac{\beta_2}{C_1} \|x\|_{r,p} - 2\frac{C_2}{C_1} \right)
\end{aligned}$$

y $V_2(x) < 0$ si

$$\|x\|_{r,p}^2 - 2\frac{\beta_2}{C_1} \|x\|_{r,p} - 2\frac{C_2}{C_1} \geq 0$$

La solución se encuentra como la solución general a una ecuación cuadrática, por lo tanto, para satisfacer la desigualdad anterior se debe cumplir que

$$\|x\|_{r,p} \geq \left(\frac{\beta_2}{C_1} + \sqrt{\left(\frac{\beta_2}{C_1} \right)^2 + 2\frac{C_2}{C_1}} \right)$$

Entonces

$$\dot{V}_2(x) \leq -\frac{C_1}{2} \|x\|_{r,p}^{\frac{7}{2}}, \quad \forall \|x\|_{r,p} \geq \epsilon \quad (3.15)$$

que se satisface globalmente con

$$\epsilon = \left(\frac{\beta_2}{C_1} + \sqrt{\left(\frac{\beta_2}{C_1} \right)^2 + 2\frac{C_2}{C_1}} \right)$$

Lo que permite concluir que las trayectorias solución del sistema (3.1) convergen a un conjunto compacto. De la desigualdad (3.10), se puede escribir (3.15) como

$$\dot{V}_2(x) \leq -\frac{C_1}{2} \left(\frac{V_2(x)}{2C_4} \right)^{\frac{7}{6}}, \quad \forall x \in \Gamma_\epsilon \quad (3.16)$$

donde el conjunto $\Gamma_\epsilon = \{x | V_2(x) \geq C_3\epsilon^3\}$. La desigualdad (3.39) permite estimar el tiempo de convergencia uniforme al conjunto compacto $\varepsilon = C_3\epsilon^3$. Utilizando el principio de comparación (Khalil 2002), $V(t) \leq v(t)$ cuando $V(x_0) \leq v_0$, la solución de la ecuación diferencial esta dada por (3.39) esta dada por

$$v_f(t) = \left(\frac{C_1}{(2C_4)^{\frac{7}{6}}} \frac{t}{12} + \frac{1}{v_0^{\frac{1}{6}}} \right)^{-6}$$

donde v_f es la ultima cota de la trayectoria, del análisis previo, esta cota puede tomarse como $v_f = \varepsilon$. Por lo tanto

$$t(\varepsilon, v_0) = \frac{12(2C_4)^{\frac{7}{6}}}{C_1} \left(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{6}}} - \frac{1}{v_0^{\frac{1}{6}}} \right)$$

Tomando el limite cuando la condición inicial v_0 tiende a infinito, la expresión anterior muestra que toda trayectoria que inicia cerca de infinito entra al conjunto Γ_ϵ en tiempo acotado.

▲

Nota 3.3 Las constantes C_1 y C_4 se definen de igual forma que en la proposición 3.2.

▲

El análisis del sistema no perturbado (3.1) con ambas funciones de Lyapunov muestra dos cosas interesantes. Por un lado, la convergencia en tiempo finito de un conjunto compacto arbitrario al origen se debe a los términos de bajo orden, estos términos son mucho más fuertes cerca del origen comparado con los términos de alto orden del sistema. Como puede deducirse de la función de Lyapunov (3.2), toda trayectoria del sistema (3.1) que comienza con alguna condición inicial que pertenece a algún conjunto compacto va a converger al origen en tiempo finito y este tiempo de convergencia puede ser estimado por la fórmula (3.6). Por otro lado, los términos de alto orden del sistema no perturbado son los responsables de que las trayectorias que inician fuera de un conjunto compacto arbitrario tengan una convergencia muy rápida a este conjunto compacto, aunque la razón principal de introducir los términos de alto orden es brindar al sistema la propiedad de convergencia uniforme, la cual se concluye mediante el empleo de la función de Lyapunov (3.9).

Teorema 3.1 Para cualquier $k_1 > 0$ y $k_2 > 0$ el sistema (3.1) es **uniformemente convergente en tiempo finito**.

▲

Demostración. La propiedad de convergencia en tiempo finito es establecida en la proposición (3.1) y la propiedad de convergencia uniforme con respecto a las condiciones iniciales se establece en la proposición (3.3). Las afirmaciones de ambas proposiciones muestran que el sistema no perturbado (3.1) converge exacta y uniformemente al punto de equilibrio y los tiempos de convergencia de todas las trayectorias del sistema al origen están acotados por una constante que no depende de las condiciones iniciales.

▲

3.2.4. Estimación del Tiempo de Convergencia del Sistema no Perturbado

Una estimación del tiempo de convergencia del sistema (3.1) puede ser obtenida a través de las funciones de Lyapunov (3.2) y (3.9). La idea básica es bastante sencilla. Supóngase que el conjunto compacto ε , que es el conjunto a donde llegan todas las trayectorias que han sido iniciadas en infinito, es conocido. Debido a que se cuenta con una función estricta de Lyapunov (3.9) que garantiza la convergencia uniforme de las trayectorias solución $\varphi(t_2, x_{20})$ del sistema (3.1) a un conjunto compacto, se puede encontrar un conjunto invariante Γ_2 que contiene en su interior al conjunto compacto ε . El tiempo de convergencia T_2 de todas las trayectorias que inician fuera del conjunto compacto Γ_2 puede ser estimado con la expresión (3.13). La función de Lyapunov (3.2) asegura la convergencia en tiempo finito de cualquier trayectoria solución $\varphi(t_1, x_{10})$ iniciada en un conjunto compacto al origen. Con esta función se puede hallar otro conjunto invariante Γ_1 que contenga en su interior al conjunto Γ_2 . El tiempo de convergencia T_1 del conjunto invariante Γ_1 al origen puede ser calculado con la formula (3.6). Lo anterior se ilustra en la Figura 3.1. La suma de T_1

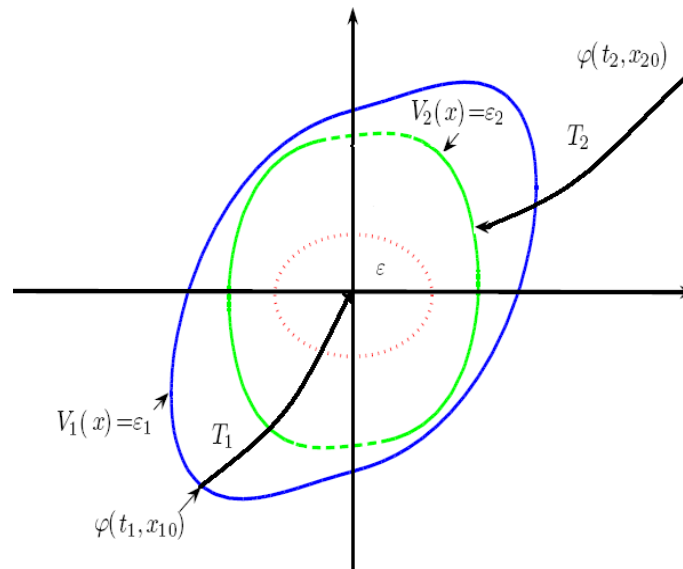


Figura 3.1: Representación geométrica de la estimación del tiempo de convergencia.

y T_2 es un estimado del tiempo de convergencia del algoritmo Super-Twisting con convergencia exacta y uniforme. El procedimiento para calcular el tiempo de convergencia es presentado esencialmente en el siguiente algoritmo:

- Seleccionar las ganancias como en el Teorema 3.1 y seleccionar $\delta > 0$ y $\gamma_i > 0, i = 1, \dots, 7$ apropiadamente.
- Calcular el conjunto compacto ε como en la Proposición 3.3.
- Elegir $\varepsilon_2 > \varepsilon$ y calcular el conjunto $\Gamma_2 = \{(x_1, x_2) : V_2(x_1, x_2) \leq \varepsilon_2\}$. El tiempo de convergencia de este conjunto compacto se calcula como

$$T_2(\varepsilon_2) = \frac{12}{C_1} \left(\frac{2^7 C_4^7}{\varepsilon_2} \right)^{\frac{1}{6}}$$

- Encontrar el conjunto Γ_1 tal que $\Gamma_2 \subset \Gamma_1$ y $\Gamma_1 = \{(x_1, x_2) : V_1(x_1, x_2) \leq \varepsilon_1\}$. Entonces, el tiempo de convergencia de este conjunto compacto al origen puede ser calculado como

$$T_1 = \frac{4\lambda_{\max}^{1/2} \{P\}}{\mu_1^2 \lambda_{\min} \{Q\}} \varepsilon_1^{1/2}$$

- La estimación del tiempo de convergencia esta dada por

$$T = T_1 + T_2 \tag{3.17}$$

Nota 3.4 De la ecuación (3.17) es claro ver que el tiempo de convergencia uniforme esta acotado por una constante. Además, esta constante solo depende de los parámetros del sistema y de los grados de libertad δ y γ_i . Con una selección apropiada de las ganancias k_1 y k_2 el tiempo de convergencia uniforme puede hacerse arbitrariamente pequeño.

▲

3.3. Análisis del Algoritmo Super-Twisting con convergencia Exacta y Uniforme con perturbaciones

Para analizar el caso perturbado se sigue básicamente la misma metodología que se utilizó para el sistema no perturbado. El siguiente análisis es retomado de (Moreno 2009). Recordando que $\zeta^T = \phi^T(x) = [\phi(x_1), x_2]$, el sistema perturbado (1.4) puede ser escrito en términos de las nuevas coordenadas como

$$\dot{\zeta} = \phi'_1(x_1) \begin{bmatrix} -k_1\phi_1(x_1) + x_2 + b_1\rho_1(t, x) \\ -k_1\phi_2(x_1) + b_2\frac{\rho_2(t, x)}{\phi_1(x_1)} \end{bmatrix} = \phi'_1(x_1)(A\zeta + B\tilde{\rho}) \tag{3.18}$$

donde

$$\tilde{\rho}(t, \zeta) = \begin{bmatrix} \rho_1(t, x) \\ \left(\frac{2|x_1|^{1/2}}{\mu_1 + 3\mu_3|x_1|^{1/2}} \right) \rho_2(t, x) \end{bmatrix}_{x=\phi^{-1}(\zeta)}, B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Si solamente una perturbación esta presente en el sistema, la matriz B toma alguna de las siguientes formas

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Expresar las perturbaciones en términos de las coordenadas ζ , permite expresar las condiciones de sector del sistema original de una manera sencilla, permitiendo estudiar la estabilidad del sistema perturbado a través de desigualdades matriciales. Además, es posible obtener los sectores correspondientes de las perturbaciones en coordenadas originales.

3.3.1. Caracterización de las perturbaciones

La perturbaciones consideradas en coordenadas originales pueden ser descritas en términos de las coordenadas ζ . El vector de perturbaciones del sistema en las nuevas coordenadas esta definido como $\tilde{\rho}(t, \zeta)$. Para tomar en cuenta gran parte del tipo de perturbaciones existentes, las perturbaciones para el sistema deben satisfacer las condiciones de sector. Basándonos en la ec. (2.12), las condiciones de sector pueden expresarse como

$$[\tilde{\rho}_i(t, \zeta) - L_{i1}^T \zeta][\tilde{\rho}_i(t, \zeta) - L_{i2}^T \zeta] \leq 0, \forall \geq 0, \forall \zeta \in \mathbb{R}^2$$

donde $\tilde{\rho}_i(t, \zeta), i = 1, 2$, son las componentes el vector $\tilde{\rho}(t, \zeta)$, ζ es el vector de estados en las nuevas coordenadas y L_{i1}^T y L_{i2}^T definen el sector de la perturbación.

El objetivo de este apartado es reescribir las condiciones de sector en forma cuadrática y mostrar que a través de perturbaciones expresadas en las nuevas coordenadas es posible obtener los sectores de las perturbaciones en coordenadas originales.

Multiplicando ambos lados de la desigualdad anterior por -1 y definiendo esta condición de sector como $\omega_i(\tilde{\rho}_i, \zeta)$ se tiene

$$\omega_i(\tilde{\rho}_i, \zeta) = [\tilde{\rho}_i(t, \zeta) - L_{i1}^T \zeta][L_{i2}^T \zeta - \tilde{\rho}_i(t, \zeta)] = -\tilde{\rho}_i^2(t, \zeta) + \tilde{\rho}_i(t, \zeta)(L_{i1}^T \zeta + L_{i2}^T \zeta) - L_{i1}^T \zeta L_{i2}^T \zeta \geq 0 \quad (3.19)$$

Dado que el producto $L_{i1}^T \zeta$ es un escalar, este termino se puede transponer. Cualquier matriz puede ser descompuesta en su parte simétrica y antisimétrica, la parte antisimétrica es cero al ser premultiplicada por ζ^T y postmultiplicada por ζ . Aprovechando este hecho,

$$L_{i1}^T \zeta L_{i2}^T \zeta = \zeta^T L_{i1} L_{i2}^T \zeta = \frac{1}{2} \zeta^T (L_{i1} L_{i2}^T + L_{i2} L_{i1}^T) \zeta,$$

y el lado izquierdo de la desigualdad (3.19) puede ser representado como

$$\omega_i(\tilde{\rho}_i, \zeta) = \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_i \\ \zeta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2}(L_{i1}^T \zeta + L_{i2}^T \zeta) \\ \frac{1}{2}(L_{i1}^T \zeta + L_{i2}^T \zeta) & -\frac{1}{2}(L_{i1} L_{i2}^T + L_{i2} L_{i1}^T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_i \\ \zeta \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.20)$$

La condición de sector de cada perturbación puede ser representada a través de una matriz con estructura cuadrática; sin embargo, lo que se necesita para tener una descripción completa de ambas perturbaciones es agrupar ambas condiciones de sector en una sola representación. Si se define a $\omega(\tilde{\rho}, \zeta)$ como el termino que agrupa ambas condiciones, entonces

$$\omega(\tilde{\rho}, \zeta) = \theta_1 \omega_1(\tilde{\rho}_1, \zeta) + \theta_2 \omega_2(\tilde{\rho}_2, \zeta) \geq 0, \forall \theta_i \geq 0, i = 1, 2.$$

Reescribiendo $\omega(\tilde{\rho}, \zeta)$ en forma cuadrática

$$\omega(\tilde{\rho}, \zeta) = \begin{bmatrix} \tilde{\rho}(t\zeta) \\ \zeta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\Theta & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\rho}(t\zeta) \\ \zeta \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

donde

$$\Theta = \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 \\ 0 & \theta_2 \end{bmatrix}, R = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} L_{12}L_{11}^T + L_{11}L_{12}^T \\ L_{22}L_{21}^T + L_{21}L_{22}^T \end{bmatrix}, S = \frac{1}{2} \Theta \begin{bmatrix} L_{11}^T + L_{12}^T \\ L_{21}^T + L_{22}^T \end{bmatrix}$$

La ventaja de utilizar las condiciones de sector en términos de las perturbaciones transformadas $\tilde{\rho}(t, \zeta)$ es que facilitan en cierto sentido la obtención de una función estricta de Lyapunov y además robusta, que muestra la convergencia en tiempo finito para el sistema perturbado. Un hecho importante que se tiene que tomar en cuenta es que las perturbaciones en coordenadas transformadas $\tilde{\rho}(t, \zeta)$ necesitan ser transformadas a coordenadas originales $\rho(t, x)$ para estudiar su comportamiento.

Con efectos de ilustración se analizarán solamente casos de las condiciones de sector donde la cota superior e inferior son simétricas, es decir, $L_{i1}^T = -L_{i2}^T$, lo que permite hacer algunas simplificaciones, debido a que $S = 0$, y $R = \theta_1 L_{11}L_{11}^T + \theta_2 L_{22}L_{22}^T$.

Primer caso cuando $\mu_1 = 0$ y $\mu_3 = 1$

La transformación de coordenadas es $\zeta^T = \begin{bmatrix} x_1^{\frac{2}{3}} \text{sign}(x) & x_2 \end{bmatrix}^T$ y el vector de perturbaciones

$$\tilde{\rho}(t, \zeta) = \begin{bmatrix} \rho_1(t, x_1, x_2) \\ \frac{2}{|3x_1|^{1/2}} \rho_2(t, x_1, x_2) \end{bmatrix}_{x=\phi^{-1}(\zeta)} = \begin{bmatrix} \rho_1(t, \zeta_1^{\frac{2}{3}} \text{sign}(\zeta_1), \zeta_2) \\ \frac{2}{3|\zeta_1|^{1/3}} \rho_2(t, \zeta_1^{\frac{2}{3}} \text{sign}(\zeta_1), \zeta_2) \end{bmatrix}$$

Si se considera que $L_{i1}^T = -L_{i2}^T = g_i \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix}$, con $g_i > 0$ y α, β constantes mayores o iguales a 0, realizando las operaciones correspondientes se llega a

$$\omega_i(\tilde{\rho}, \zeta) = -\tilde{\rho}_i^2(t, \zeta) + (\alpha\zeta_1 + \beta\zeta_2)^2 \geq 0 \quad (3.22)$$

Se puede observar que $|\rho_i(t, \zeta)| \leq g_i(\alpha|\zeta_1| + \beta|\zeta_2|)$, por lo tanto la gráfica de la perturbación $|\rho_i(t, \zeta)|$ pertenece al sector que esta limitado por las curvas $(\alpha\zeta_1 + \beta\zeta_2)$ y $-(\alpha\zeta_1 + \beta\zeta_2)$. Si $\alpha = 1$ y $\beta = 0$, $|\rho_i(t, \zeta)| \leq g_i|\zeta_1|$, en coordenadas originales $|\rho_i(t, x)| \leq \frac{3}{2}g_i|x_1|^{\frac{3}{2}}$, por otro lado, si $\alpha = 0$ y $\beta = 1$, $|\rho_i(t, \zeta)| \leq g_i|\zeta_2|$, en coordenadas originales $|\rho_i(t, x)| \leq g_i|x_2|$, que representan las condiciones de sector para una no linealidad en su forma usual, como se muestra en la Figura 3.2.

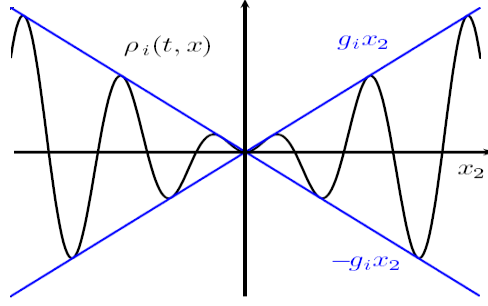


Figura 3.2: Condiciones de sector para $\rho_i(t, x)$ con $\alpha = 0$ y $\beta = 1$.

Segundo caso Super-Twisting clasico

Cuando $\mu_1 > 0$ y $\mu_3 = 0$ en el algoritmo (1.4), la transformación de coordenadas es $\zeta^T = \phi^T = \begin{bmatrix} |x_1|^{1/2} \text{sign}(x_1) & x_2 \end{bmatrix}$. De la Sección 3.3, y tomando las consideraciones anteriores

$$\tilde{\rho}(t, \zeta) = \begin{bmatrix} \rho_1(t, x_1, x_2) \\ 2|x_1|^{1/2} \rho_2(t, x_1, x_2) \end{bmatrix}_{x=\phi^{-1}(\zeta)} = \begin{bmatrix} \rho_1(t, \zeta_1^2 \text{sign}(\zeta_1), \zeta_2) \\ 2|\zeta_1| \rho_2(t, \zeta_1^2 \text{sign}(\zeta_1), \zeta_2) \end{bmatrix}$$

Entonces suponiendo que $L_{i1}^T = -L_{i2}^T = g_i \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix}$ y $g_i > 0$, la condición de sector queda definida por la desigualdad (3.22). Estas condiciones de sector en coordenadas originales considerando $i = 1, 2$, son

$$\begin{aligned} |\rho_1(t, x)| &\leq g_1(\alpha|x_1|^{1/2} + \beta|x_2|) \\ |\rho_2(t, x)| &\leq \frac{g_2}{2}(\alpha + \beta \frac{|x_2|}{|x_1|^{1/2}}) \end{aligned}$$

Para $i = 1$, cuando $\alpha = 1$ y $\beta = 0$, $|\rho_1(t, x)| \leq g_1|x_1|^{1/2}$, el sector donde vive ésta no linealidad esta limitado por las curvas $g_1|x_1|^{1/2} \text{sign}(x_1)$ y $-g_1|x_1|^{1/2} \text{sign}(x_1)$. Considerando $i = 2$, $\alpha = 1$ y $\beta = 0$, $|\rho_2(t, x)| \leq \frac{g_2}{2}$, por lo tanto $\rho_2(t, x)$ esta acotada como se muestra en la Figura 3.3.

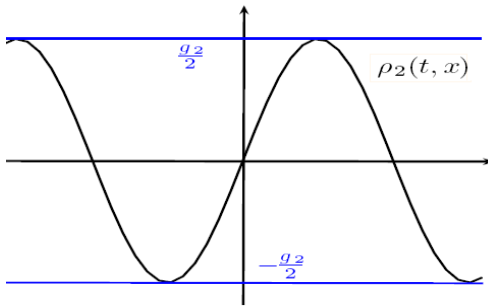


Figura 3.3: Condiciones de sector para $\rho_2(t, x)$ con $\alpha = 1$ y $\beta = 0$.

Tercer caso, cuando $\mu_1 = 1$ y $\mu_3 > 0$

La transformación esta dada por $\zeta^T = \phi^T = \begin{bmatrix} |x_1|^{1/2} \text{sign}(x_1) + \mu_3 |x_1|^{3/2} \text{sign}(x_1) & x_2 \end{bmatrix}$, y el vector de perturbaciones en las nuevas coordenadas puede expresarse como

$$\tilde{\rho}(t, \zeta) = \begin{bmatrix} \rho_1(t, x) \\ \left(\frac{2|x_1|^{1/2}}{1+3\mu_3|x_1|} \right) \rho_2(t, x) \end{bmatrix}_{x=\phi^{-1}(\zeta)}$$

De manera similar considerando $L_{i1}^T = -L_{i2}^T = g_i \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix}$ y $g_i > 0$, la condición de sector en las nuevas coordenadas esta definida por la desigualdad (3.22). En coordenadas originales las condiciones de sector para $i = 1, 2$ son

$$\begin{aligned} |\rho_1(t, x)| &\leq g_1 \alpha (|x_1|^{1/2} + \mu_3 |x_1|^{3/2}) + g_1 \beta |x_2| \\ |\rho_2(t, x)| &\leq g_2 \alpha \left(\frac{1}{2} + 2\mu_3 |x_1| + \mu_3^2 |x_1|^2 \right) + g_2 \beta \left(\frac{|x_2|}{2|x_1|^{1/2}} + \frac{3}{2} \mu_3 |x_2|^{1/2} |x_2| \right) \end{aligned}$$

Nuevamente para $i = 1, \alpha = 1$ y $\beta = 0$, la perturbación $\rho_1(t, x)$ esta contenida en el sector limitado por las curvas $g_1(|x_1|^{1/2} + \mu_3|x_1|^{3/2}) \text{sign}(x_1)$ y $-g_1(|x_1|^{1/2} + \mu_3|x_1|^{3/2}) \text{sign}(x_1)$. Además, si $i = 2, \alpha = 1$ y $\beta = 0$, la perturbación $\rho_2(t, x)$ pertenece al sector limitado por $\frac{g_2}{2} + (2\mu_3|x_1| + \mu_3^2|x_1|^2) \text{sign}(x_1)$ y $-\frac{g_2}{2} + (2\mu_3|x_1| + \mu_3^2|x_1|^2) \text{sign}(x_1)$, $\rho_2(t, x)$ esta acotado por $\frac{g_2}{2}$ cerca del origen y crece aproximadamente de manera cuadrática como se muestra en la Figura 3.4.

Expresar las perturbaciones en las nuevas coordenadas facilita el estudio de estabilidad y robustez del sistema original cuando se presentan dichas perturbaciones. Además, se pueden obtener los sectores correspondientes en coordenadas originales, aun cuando algunos de estos sectores difieren de la definición original de sector (ya que no pasan por el origen), permiten tener cotas de las perturbaciones y considerar perturbaciones que no se desvanecen en el origen.

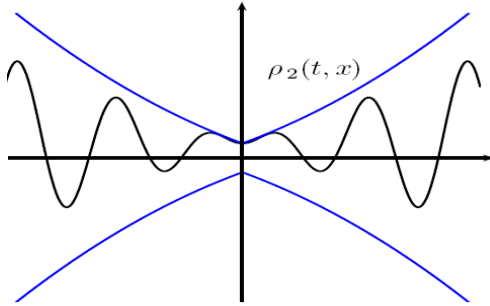


Figura 3.4: Condiciones de sector para $\rho_2(t, x)$ con $\alpha = 1$ y $\beta = 0$.

3.3.2. Análisis de Estabilidad en presencia de perturbaciones

Básicamente se consideran dos tipos de análisis, uno para probar convergencia en tiempo finito y otro para probar convergencia uniforme de las trayectorias del sistema. En esta sección, se

demuestra que las dos funciones de Lyapunov propuestas para el sistema no perturbado, representan bien el comportamiento del sistema cuando hay perturbaciones presentes.

3.3.3. Convergencia en tiempo finito

En (Moreno 2009) se propone una función estricta de Lyapunov para analizar el algoritmo Super-Twisting Generalizado, cuando se presentan cierto tipo de perturbaciones. La estructura del algoritmo Super-Twisting con convergencia exacta y uniforme permite utilizar la misma función estricta de Lyapunov para analizar la convergencia en tiempo finito del sistema perturbado (1.4). Si se considera el sistema perturbado expresado en el vector ζ y la siguiente función de Lyapunov

$$V_1(x) = \zeta^T P \zeta \quad (3.23)$$

se puede probar la convergencia en tiempo finito del sistema (3.18). Derivando la función (3.23) a lo largo de las trayectorias de (3.18) se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \phi'_1(x_1) \{ \zeta^T (A^T P + PA) \zeta + \tilde{\rho} B^T P \zeta + \zeta^T P B \tilde{\rho} \} = \phi'_1(x_1) \begin{bmatrix} \zeta \\ \tilde{\rho} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \tilde{\rho} \end{bmatrix} \\ &\leq \phi'_1 \left\{ \begin{bmatrix} \zeta \\ \tilde{\rho} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \tilde{\rho} \end{bmatrix} + \omega(\tilde{\rho}, \zeta) \right\} \\ &= \phi'_1(x_1) \begin{bmatrix} \zeta \\ \tilde{\rho} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P + PA + R & PB + S^T \\ B^T P + S & -\Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \tilde{\rho} \end{bmatrix} \\ &\leq -\phi'_1(x_1) \begin{bmatrix} \zeta \\ \tilde{\rho} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \epsilon P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \tilde{\rho} \end{bmatrix} \leq -\phi'_1(x_1) \epsilon V_1 \end{aligned}$$

como $\phi'_1 = \mu_1 \frac{1}{2|x_1|^{1/2}} + \frac{3}{2}\mu_3|x_1|^{1/2}$

$$\dot{V}_1(x) \leq -\frac{\mu_1 \epsilon \lambda_{\min}^{1/2} \{P\}}{2} V_1^{1/2} - \frac{3}{2} \mu_3 \epsilon |x_1|^{1/2} V_1(x) \leq -\frac{\mu_1 \epsilon \lambda_{\min}^{1/2} \{P\}}{2} V_1(x)^{1/2} \quad (3.24)$$

El sistema (1.4) es robusto ante perturbaciones $\rho_1(t, x)$ y $\rho_2(t, x)$ que satisfacen las condiciones de sector $\omega(\tilde{\rho}, \zeta)$. Además se puede obtener $P = P^T > 0$ que garantiza que la función (3.23) es una función estricta de Lyapunov, asegurando la estabilidad en tiempo finito del sistema a pesar de perturbaciones, sí la desigualdad matricial (3.25) se satisface dadas ciertas ganancias k_1 y k_2 . Para este caso, Θ es un grado de libertad que se emplea para lograr satisfacer la desigualdad matricial

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + \epsilon P + R & PB + S^T \\ B^T P + S & -\Theta \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.25)$$

En forma equivalente, se puede garantizar la estabilidad robusta de (1.4), resolviendo la siguiente Desigualdad Algebraica de Riccati (DAR)

$$A^T P + PA + \epsilon P + R + (PB + S^T) \Theta^{-1} (B^T P + S) \leq 0 \quad (3.26)$$

que se obtiene al usar el complemento de Shur (Poznyak 2007) en la desigualdad matricial (3.25). Las desigualdades (3.26) y (3.25) son equivalentes. La desigualdad (3.24) permite estimar una cota del tiempo de convergencia, por lo tanto las trayectorias del sistema (1.4) convergen al origen en un tiempo menor a T_1 (que depende de la condición inicial x_0), donde

$$T_1 = \frac{4}{\mu_1 \epsilon \lambda_{\min}^{1/2}\{P\}} V_1^{1/2}(x_0) \quad \text{para } \mu_1 > 0. \quad (3.27)$$

3.3.4. Diseño para garantizar convergencia en tiempo finito en presencia de perturbaciones

Para calcular la función estricta de Lyapunov que garantiza la convergencia en tiempo finito del algoritmo Super-Twisting con convergencia exacta y uniforme cuando se tienen presentes perturbaciones que cumplen con la condición de sector, es necesario conocer estas perturbaciones y las constantes k_1 y k_2 . Si se encuentra $P = P^T > 0$ que satisfaga la Desigualdad Matricial Lineal (3.25) o la Desigualdad Algebraica de Riccati (3.26), se garantiza que la función (3.23) es una función estricta de Lyapunov y además, que el algoritmo presenta la característica de tener estabilidad robusta con convergencia en tiempo finito. Sin embargo, una característica de las Desigualdades Matriciales es que pueden ser resueltas para casos donde se presentan varias matrices con parámetros desconocidos, de hecho, se pueden resolver a través de algoritmos de optimización tomando en cuenta las restricciones correspondientes.

La importancia de los resultados anteriores radica en el diseño del algoritmo Super-Twisting con convergencia exacta y uniforme, es decir, encontrar las constantes k_1 y k_2 cuando se conocen las perturbaciones que afectan al sistema. Si estas constantes existen, entonces se puede garantizar la estabilidad robusta y en tiempo finito del algoritmo. Por el otro lado, es posible estimar el tiempo de convergencia.

Método de diseño

Considerando que la matriz que involucra las constantes de diseño puede descomponerse de la siguiente forma

$$A = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & 0 \end{bmatrix} = A_0 - KC_0 \quad (3.28)$$

donde

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

sustituyendo (3.28) en la desigualdad matricial (3.25) y desarrollando cada uno de los productos, se llega al siguiente resultado

$$\begin{bmatrix} A_0^T P + P A_0 - C_0^T K_0^T - K_0 C_0 + \epsilon P + R & P B + S^T \\ B^T P + S & -\Theta \end{bmatrix} \leq 0, K_0 = P K. \quad (3.29)$$

El problema se reduce a encontrar una matriz positiva definida y simétrica $P = P^T > 0$, constantes positivas $\theta_i > 0$, con $i = 1, 2$, $\epsilon > 0$ y la matriz de ganancias K , de tal manera que la desigualdad anterior se satisfaga. Reemplazar ϵP por ϵI no afecta la solubilidad de (3.29). En forma equivalente, existe una matriz positiva definida y simétrica $P = P^T > 0$, una matriz diagonal $\Theta \geq 0$, una constante $\epsilon > 0$ y una matriz de ganancias K , tal que

$$A_0^T P + P A_0 - C_0^T K_0^T - K_0 C_0 + \epsilon P + R + (PB + S^T)\Theta^{-1}(B^T P + S) \leq 0 \quad (3.30)$$

sea satisfecha.

Caso particular con solo una perturbación

Esta sección solo presenta un resultado previo de (Moreno 2009) cuando se considera una sola perturbación. La solución se aborda desde dos criterios que parecen diferentes pero que en realidad están conectados. El sistema considerado es el siguiente

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -k_1 \phi_1(x_1) + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_2 \phi_2(x_1) + \rho_2(t, x) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Se supone que la perturbación $\rho_2(t, x)$ está uniformemente acotada, es decir, que para todo par (t, x) se satisface $|\rho_2(t, x)| \leq \rho(\frac{1}{2} + 2\mu_3|x_1| + \mu_3^2|x_1|^2)$. Es necesario transformar la perturbación $\rho_2(t, x)$ a $\tilde{\rho}_2(t, \zeta)$, de la Sección 3.3.1, se sabe que $|\tilde{\rho}_2(t, \zeta)| \leq \rho|\zeta_1|$, es decir la condición de sector para esta perturbación queda determinada por $\omega_2(\tilde{\rho}_2\zeta) = -\tilde{\rho}_2^2(t, \zeta) + \rho^2\zeta_1^2 \geq 0$. Para obtener las ganancias correspondientes se necesita hacer uso de la desigualdad matricial (3.29). En este caso Θ es un escalar y sin pérdida de generalidad puede establecerse como

$$\begin{bmatrix} A_0^T P + P A_0 - C_0^T K_0^T - K_0 C_0 + \epsilon P + \rho^2 C^T C & P B \\ B^T P & -1 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.32)$$

donde

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0], B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para obtener las matrices correspondientes P, R , y la constante ϵ , se puede usar el *LMI Toolbox* de *Matlab*. Para resolver la desigualdad (3.32), es necesario establecer las siguientes restricciones: $P > 0, R > 0, \epsilon > 0$. O expresada como una Desigualdad Algebraica de Riccati (ARI)

$$A_0^T P + P A_0 - C_0^T K_0^T - K_0 C_0 + \epsilon P + \rho^2 C^T C + P B B^T P \leq 0 \quad (3.33)$$

y las ganancias se obtienen de $K = P^{-1}K_0$. Por otro lado, desde el punto de vista del dominio de la frecuencia, usando el criterio del círculo, y recordando que $A = A_0 - K C_0$, la desigualdad matricial lineal (3.32) puede reescribirse como

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A + \epsilon P + \rho^2 C^T C & P B \\ B^T P & -1 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.34)$$

y se satisface si y solo si el diagrama de Nyquist de la función de transferencia $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ esta contenida dentro de un círculo de radio δ , centrado en el origen, es decir, que el Diagrama de Nyquist estará contenido dentro del círculo si

$$\max_{\omega} |G(j\omega)| < \frac{1}{\rho} \quad (3.35)$$

La función de transferencia es

$$G(s) = \frac{1}{s + k_1 s + k_2}$$

Para facilitar los cálculos se toma el cuadrado de la magnitud de $|G(j\omega)|$, de esta manera

$$|G(j\omega)|^2 = \frac{1}{(k_2 - \omega^2)^2 + (k_1\omega)^2}$$

Para conocer los máximos de $|G(j\omega)|^2$, se requiere derivar dos veces la expresión anterior con respecto a ω , la primera derivada dice que punto puede ser un máximo o un mínimo. La segunda derivada determina el máximo o mínimo de la función. La primera derivada es

$$\frac{d}{d\omega} |G(j\omega)|^2 = -4 \frac{\omega(\omega^2 - k_2 + \frac{1}{2}k_1^2)}{[(k_2 - \omega^2)^2 + (k_1\omega)^2]^2}$$

Por lo tanto, hay dos puntos que pueden ser máximos (o mínimos), uno en $\omega_1 = 0$ y otro en $\omega_2^2 = k_2 - \frac{1}{2}k_1^2$. La segunda derivada con respecto a ω es

$$\frac{d^2}{d\omega^2} |G(j\omega)|^2 = \frac{2[3\omega^2 k_1^4 + 2(\omega^2 - k_2)^2(5\omega^2 + k_2) + k_1^2(9\omega^4 - k_2(12\omega^2 + k_2))]}{[\omega^2 k_1^2 + (\omega^2 - k_2)^2]^3}$$

para calcular los máximos de $|G(j\omega)|^2$ es necesario que la segunda derivada valuada en ω_1 y ω_2 sea menor a cero.

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\omega^2} |G(j\omega)|^2|_{\omega_1} &= -\frac{2(k_1^2 - 2k_2)}{k_2^4} \\ \frac{d^2}{d\omega^2} |G(j\omega)|^2|_{\omega_2} &= \frac{64(k_1^2 - 2k_2)}{k_1^4(k_1^2 - 4k_2)^2} \end{aligned}$$

Para garantizar que estos puntos son máximos

$$\begin{aligned} -\frac{2(k_1^2 - 2k_2)}{k_2^4} &< 0 \\ \frac{64(k_1^2 - 2k_2)}{k_1^4(k_1^2 - 4k_2)^2} &< 0 \end{aligned}$$

La condición necesaria para que exista un máximo en $\omega_2 = k_2 - \frac{1}{2}k_1^2$ es que la desigualdad $k_1^2 - 2k_2 < 0$ ó de forma equivalente $k_2 - k_1^2/2 > 0$. Para que exista un máximo en $\omega = 0$ se debe cumplir que $-(k_1^2 - 2k_2) < 0$, o de igual manera que $k_2 - \frac{1}{2}k_1^2 < 0$. Entonces

$$\max_{\omega} |G(j\omega)|^2 = \begin{cases} \frac{1}{k_2^2} & \text{si } k_2 - \frac{k_1^2}{2} < 0 \\ \frac{1}{k_1^2(k_2 - \frac{k_1^2}{4})} & \text{si } k_2 - \frac{k_1^2}{2} > 0 \end{cases}$$

Basados en el análisis anterior, existen dos formas de seleccionar las ganancias $k_1 > 0$ y $k_2 > 0$, que garantizan la convergencia exacta del sistema (3.31) ante perturbaciones acotadas.

1. Cuando $k_2 - \frac{k_1^2}{2} < 0$

De la desigualdad (3.35) se observa que

$$\begin{aligned} \max_{\omega_1} |G(j\omega_1)|^2 &< \frac{1}{\rho^2} \\ \frac{1}{k_2^2} &< \frac{1}{\rho^2} \end{aligned}$$

Se debe elegir $k_2 > \rho$ y $k_1^2 > 2k_2$.

2. Cuando $k_2 - \frac{k_1^2}{2} > 0$

De la desigualdad (3.35) se observa que

$$\begin{aligned} \max_{\omega_2} |G(j\omega_2)|^2 &< \frac{1}{\rho^2} \\ \frac{1}{k_1^2(k_2 - \frac{k_1^2}{4})} &< \frac{1}{\rho^2} \end{aligned}$$

Elegir la ganancias de tal forma que $k_1^2(k_2 - \frac{k_1^2}{4}) > \rho^2$ y $2k_2 > k_1^2$ se satisfagan simultaneamente.

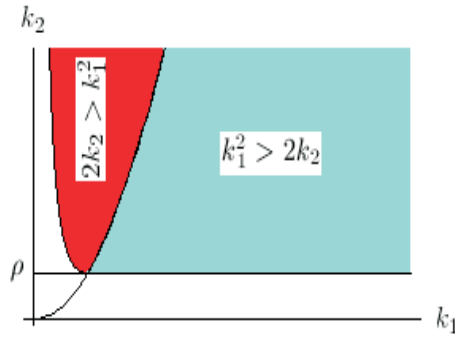


Figura 3.5: Región admisible de ganancias: condición 1 (verde) y condición 2 (rojo).

Nota 3.5 También se asegura la convergencia exacta del sistema (3.31) si las ganancias satisfacen las restricciones $k_2 > \rho$ y $k_1^2 = 2k_2$.

▲

Nota 3.6 En (Levant 1998) y (Dávila, Fridman, y Levant 2005) se proponen dos formas de elegir las ganancias que garantizan la convergencia de un diferenciador y un observador basados en el algoritmo Super-Twisting cuando aparecen términos desconocidos pero acotados en x_2 , Cuadro 3.1. La región de ganancias encontrada en el análisis previo contiene en su interior a las ganancias propuestas en (Levant 1998) y (Dávila, Fridman, y Levant 2005), Figura 3.6.

▲

Cuadro 3.1: Tabla de ganancias.

| Autor | Ganancias | Considerando $\alpha = k_2/2$ $\lambda = k_1$ y $C = f^+ = \rho/2$ |
|--------|---|--|
| Levant | $\alpha > C$ $\lambda^2 > 4C \frac{\alpha+C}{\alpha-C}$ | $k_2 > \rho$ $k_1^2 > 4\rho \frac{2k_2+\rho}{2k_2-\rho}$ |
| Dávila | $\alpha > f^+$ $\lambda > 4C \frac{\alpha+C}{\alpha-C} \sqrt{\frac{2}{\alpha-f^+} \frac{(\alpha+f^+)(1+p)}{(1-p)}}$, $0 < p < 1$ | $k_2 > \rho$ $k_1^2 > \frac{(2k_2+\delta)^2}{2k_2-\delta}$, $p = 0$ |

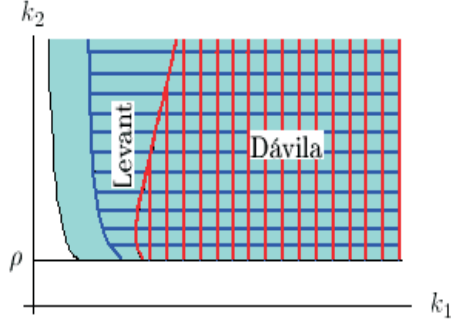


Figura 3.6: Ganancias que aseguran la convergencia de algoritmo Super-Twisting: criterio del círculo (verde), condiciones de Levant (líneas azules) y condiciones de Dávila (líneas rojas).

Nota 3.7 Hay dos posibles formas de seleccionar las ganancias $k_1 > 0$ y $k_2 > 0$ para que el algoritmo Super-Twisting con convergencia exacta y uniforme pueda converger al origen a pesar de perturbaciones, si estas satisfacen $|\rho_2(t, x)| \leq \rho(\frac{1}{2} + 2\mu_3|x_1| + \mu_3^2|x_1|^2)$. Los resultados anteriores son válidos si se presentan perturbaciones acotadas por una constante en el sistema (3.31), es decir, $|\rho_2(t, x)| \leq \frac{\rho}{2}$.

▲

El análisis anterior permite establecer la siguiente proposición

Proposición 3.4 Existe una matriz simétrica positiva definida $P = P^T > 0$ y $\epsilon > 0$ que satisfacen la desigualdad matricial (3.34) cuando $|\rho_2(t, x)| \leq \rho(\frac{1}{2} + 2\mu_3|x_1| + \mu_3^2|x_1|^2)$, si las ganancias se seleccionan

- $k_2 > \rho$ y $k_1^2 > 2k_2$
- o k_1 y k_2 de tal forma que ambas desigualdades $k_1^2(k_2 - \frac{1}{4}k_1^2) > \rho^2$ y $2k_2 > k_1^2$ se satisfagan simultáneamente,

y la función $V_1(x) = \zeta^T P \zeta$ es una función estricta de Lyapunov que garantiza convergencia exacta del sistema (3.31), y el tiempo de convergencia T_1 de las trayectorias del sistema al origen esta acotado por

$$T_1 = \frac{4}{\epsilon \lambda_{\min}^{1/2}\{P\}} V_1^{1/2}(x_0) \quad (3.36)$$

donde x_0 es la condición inicial de la trayectoria. ▲

3.3.5. Convergencia uniforme

Al igual que en el caso sin perturbaciones, la derivada (3.24) de la función estricta de Lyapunov (3.23) no permite concluir nada acerca de la propiedad de convergencia uniforme (con respecto a la condición inicial) que posee el sistema (1.4). Usando la función de Lyapunov (3.9) se puede probar que el sistema (3.31) sigue presentando convergencia uniforme a un conjunto compacto a pesar de perturbaciones.

Caso particular con perturbación acotada por una constante

Para analizar la convergencia uniforme del sistema (3.31) se usa la función de Lyapunov (3.9). Únicamente se considera el caso de perturbación acotada por una constante.

Proposición 3.5 *La función continua (3.9) es una función estricta de Lyapunov para el sistema (3.31). Además, el sistema (3.31) es uniformemente convergente si la perturbación satisface $|\rho_2(t, x)| \leq \frac{\rho}{2}$ y el tiempo de convergencia uniforme esta dado por (3.13), donde $C_2 = \max\{\beta_3, \beta_4\}$ y*

$$\begin{aligned}\beta_3 &= \frac{4}{9}\mu_1^2 k_2 \gamma_5^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{9}\rho \gamma_5^{\frac{3}{2}} \\ \beta_4 &= \frac{2}{9}\mu_1^2 k_2 \gamma_5^{-3} + \frac{\mu_1^2}{2}\delta k_2 + \frac{2}{9}\rho \gamma_5^{-3} + \delta \frac{\rho}{2}.\end{aligned}$$

▲

Demostración. *Tomando la derivada de $V_2(x)$ a lo largo de las trayectorias del sistema (3.31) se tiene que*

$$\begin{aligned}\dot{V}_2(x) &= -k_1 \delta \tilde{k}_2 |x_1|^2 \phi_1(x_1) \text{sign}(x_1) + \delta \tilde{k}_2 |x_1|^2 \text{sign}(x_1) x_2 + k_1 \phi_1(x_1) |x_2|^{\frac{4}{3}} \text{sign}(x_2) - |x_2|^{\frac{7}{3}} + \\ &+ \frac{4}{3} k_2 \phi_2(x_1) x_1 |x_2|^{\frac{1}{3}} - \delta k_2 \phi_2(x_1) x_2 - \frac{4}{3} \rho_2(t, x_1, x_2) x_1 |x_2|^{\frac{1}{3}} + \delta \rho_2(t, x_1, x_2) x_2 \\ &= -k_1 \delta \tilde{k}_2 \mu_1 |x_1|^{\frac{5}{2}} + k_1 \mu_1 |x_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_1) |x_2|^{\frac{4}{3}} \text{sign}(x_2) + \frac{2}{3} \mu_1^2 k_2 |x_1| |x_2|^{\frac{1}{3}} + \frac{8}{3} k_2 \mu_1 \mu_2 x_1^2 |x_2|^{\frac{1}{3}} + \\ &- \frac{\mu_1^2}{2} \delta k_2 \text{sign}(x_1) x_2 - 2\delta k_2 \mu_1 \mu_2 x_1 x_2 + \frac{4}{3} \rho_2(t, x_1, x_2) x_1 |x_2|^{\frac{1}{3}} + \delta \rho_2(t, x_1, x_2) x_2 \\ &- \delta \tilde{k}_1 \tilde{k}_2 |x_1|^{\frac{7}{2}} + \tilde{k}_1 |x_1|^{\frac{3}{2}} \text{sign}(x_1) |x_2|^{\frac{4}{3}} \text{sign}(x_2) + \frac{4}{3} \tilde{k}_2 |x_1|^3 |x_2|^{\frac{1}{3}} - |x_2|^{\frac{7}{3}}\end{aligned}$$

usando las siguientes desigualdades que se derivan de la desigualdad clásica de Young (ver Apéndice A)

$$\begin{aligned}|x_1|^{\frac{1}{2}} |x_2|^{\frac{4}{3}} &\leq \frac{\gamma_4^p}{p} |x_1|^{\frac{5}{2}} + \frac{\gamma_4^{-q}}{q} |x_2|^{\frac{5}{3}}, \quad p = 5, \quad q = \frac{5}{4}, \quad \forall \gamma_4 > 0 \\ |x_1| |x_2|^{\frac{1}{3}} &\leq \frac{\gamma_5^p}{p} |x_1|^{\frac{3}{2}} + \frac{\gamma_5^{-q}}{q} |x_2|, \quad p = \frac{3}{2}, \quad q = 3, \quad \forall \gamma_5 > 0\end{aligned}$$

$$|x_1|^2 |x_2|^{\frac{1}{3}} \leq \frac{\gamma_6^p}{p} |x_1|^{\frac{5}{2}} + \frac{\gamma_6^{-q}}{q} |x_2|^{\frac{5}{3}}, \quad p = \frac{5}{4}, \quad q = 5, \quad \forall \gamma_6 > 0$$

$$|x_1| |x_2| \leq \frac{\gamma_7^p}{p} |x_1|^{\frac{5}{2}} + \frac{\gamma_7^{-q}}{q} |x_2|^{\frac{5}{3}}, \quad p = \frac{5}{2}, \quad q = \frac{5}{3}, \quad \forall \gamma_7 > 0,$$

la derivada

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(x) &\leq -k_1 \delta \tilde{k}_2 \mu_1 |x_1|^{\frac{5}{2}} + k_1 \mu_1 \left(\frac{\gamma_4^5}{5} |x_1|^{\frac{5}{2}} + \frac{4\gamma_4^{-\frac{5}{4}}}{5} |x_2|^{\frac{5}{3}} \right) + \frac{2}{3} \mu_1^2 k_2 \left(\frac{2\gamma_5^{\frac{3}{2}}}{3} |x_1|^{\frac{3}{2}} + \frac{\gamma_5^{-3}}{3} |x_2| \right) + \\ &+ \frac{8}{3} k_2 \mu_1 \mu_2 \left(\frac{4\gamma_6^{\frac{5}{2}}}{5} |x_1|^{\frac{5}{2}} + \frac{\gamma_6^{-5}}{5} |x_2|^{\frac{5}{3}} \right) + \frac{\mu_1^2}{2} \delta k_2 |x_2| + 2\delta k_2 \mu_1 \mu_2 \left(\frac{2\gamma_7^{\frac{5}{2}}}{5} |x_1|^{\frac{5}{2}} + \frac{3\gamma_7^{-\frac{5}{3}}}{5} |x_2|^{\frac{5}{3}} \right) + \\ &- \left(\delta \tilde{k}_1 \tilde{k}_2 - \frac{3\gamma_1^{\frac{7}{2}}}{7} \tilde{k}_1 - \frac{8\gamma_2^{\frac{7}{5}}}{7} \tilde{k}_2 \right) |x_1|^{\frac{7}{2}} - \left(1 - \frac{4\gamma_1^{-\frac{7}{4}}}{7} \tilde{k}_1 - \frac{4\gamma_2^{-7}}{21} \tilde{k}_2 \right) |x_2|^{\frac{7}{3}} + \\ &+ \frac{4}{3} \frac{\rho}{2} \left(\frac{2\gamma_5^{\frac{3}{2}}}{3} |x_1|^{\frac{3}{2}} + \frac{\gamma_5^{-3}}{3} |x_2| \right) + \delta \frac{\rho}{2} |x_2|. \end{aligned}$$

Definiendo las siguientes constantes

$$\begin{aligned} \beta_1 &= k_1 \delta \tilde{k}_2 \mu_1 - k_1 \mu_1 \frac{\gamma_4^5}{5} - \frac{8}{3} k_2 \mu_1 \mu_2 \frac{4\gamma_6^{\frac{5}{2}}}{5} - 2\delta k_2 \mu_1 \mu_2 \frac{2\gamma_7^{\frac{5}{2}}}{5} \\ \beta_2 &= k_1 \mu_1 \frac{4\gamma_4^{-\frac{5}{4}}}{5} + \frac{8}{3} k_2 \mu_1 \mu_2 \frac{\gamma_6^{-5}}{5} + 2\delta k_2 \mu_1 \mu_2 \frac{3\gamma_7^{-\frac{5}{3}}}{5} \\ \beta_3 &= \frac{4}{9} \mu_1^2 k_2 \gamma_5^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{9} \rho \gamma_5^{\frac{3}{2}} \\ \beta_4 &= \frac{2}{9} \mu_1^2 k_2 \gamma_5^{-3} + \frac{\mu_1^2}{2} \delta k_2 + \frac{2}{9} \rho \gamma_5^{-3} + \delta \frac{\rho}{2} \\ \alpha_1 &= \delta k_1 \tilde{k}_2 - \frac{3\gamma_1^{\frac{7}{2}}}{7} \tilde{k}_1 - \frac{8\gamma_2^{\frac{7}{5}}}{7} \tilde{k}_2 \\ \alpha_4 &= 1 - \frac{4\gamma_1^{-\frac{7}{4}}}{7} \tilde{k}_1 - \frac{4\gamma_2^{-7}}{21} \tilde{k}_2 \end{aligned}$$

se puede expresar $\dot{V}_2(x)$ como

$$\dot{V}_2(x) \leq -\alpha_1 \beta_1 |x_1|^{\frac{7}{2}} - \alpha_2 |x_2|^{\frac{7}{3}} - \beta_1 |x_1|^{\frac{5}{2}} + \beta_2 |x_2|^{\frac{5}{3}} + \beta_3 |x_1|^{\frac{3}{2}} + \beta_4 |x_2|$$

La derivada $\dot{V}_2(x)$ puede ser escrita en términos de la norma homogénea como

$$\dot{V}_2(x) \leq -C_1 \|x\|_{r,p}^{\frac{7}{2}} + \beta_2 \|x\|_{r,p}^{\frac{5}{3}} + C_2 \|x\|_{r,p}^{\frac{3}{2}} \quad (3.37)$$

donde

$$C_1 = \min \{ \alpha_1, \alpha_2 \},$$

$$C_2 = \max \{ \beta_3, \beta_4 \}.$$

Reescribiendo la desigualdad (3.37)

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(x) &\leq -\frac{C_1}{2} \|x\|_{r,p}^{\frac{7}{2}} - \frac{C_1}{2} \|x\|_{r,p}^{\frac{7}{2}} + \beta_2 \|x\|_{r,p}^{\frac{5}{3}} + C_2 \|x\|_{r,p}^{\frac{3}{2}} \\ &\leq -\frac{C_1}{2} \|x\|_{r,p}^{\frac{7}{2}} - \frac{C_1}{2} \|x\|_{r,p}^{\frac{3}{2}} \left(\|x\|_{r,p}^2 - 2\frac{\beta_2}{C_1} \|x\|_{r,p} - 2\frac{C_2}{C_1} \right) \end{aligned}$$

y $V_2(x) < 0$ si

$$\|x\|_{r,p}^2 - 2\frac{\beta_2}{C_1}\|x\|_{r,p} - 2\frac{C_2}{C_1} \geq 0$$

Resolviendo como una ecuación cuadrática, se establece que para satisfacer la desigualdad se debe cumplir que

$$\|x\|_{r,p} \geq \left(\frac{\beta_2}{C_1} + \sqrt{\left(\frac{\beta_2}{C_1}\right)^2 + 2\frac{C_2}{C_1}} \right)$$

Entonces

$$\dot{V}_2(x) \leq -\frac{C_1}{2}\|x\|_{r,p}^{\frac{7}{2}} \quad \forall \|x\|_{r,p} \geq \epsilon. \quad (3.38)$$

se satisface globalmente con

$$\epsilon = \left(\frac{\beta_2}{C_1} + \sqrt{\left(\frac{\beta_2}{C_1}\right)^2 + 2\frac{C_2}{C_1}} \right)$$

Se puede concluir que las soluciones del sistema (3.31) convergen a un conjunto compacto. De la desigualdad (3.10), se puede escribir (3.38) como

$$\dot{V}_2(x) \leq -\frac{C_1}{2} \left(\frac{V_2(x)}{C_4} \right)^{\frac{7}{2}} \quad \forall x \in \Gamma_\epsilon \quad (3.39)$$

donde $\Gamma_\epsilon = \{x | V_2(x) \geq C_3\epsilon^3\}$ y se puede estimar el tiempo de convergencia al conjunto compacto $\epsilon = C_3\epsilon^3$. Del principio de comparación (Khalil 2002), $V(t) \leq v(t)$ cuando $V(x_0) \leq v_0$. Entonces, la solución de la ecuación diferencial esta dada por

$$v_f(t) = \left(\frac{C_1}{(2C_4)^{\frac{7}{6}}} \frac{t}{12} + \frac{1}{v_0^{\frac{1}{6}}} \right)^{-6}$$

donde v_f es la ultima cota de la trayectoria. Del análisis previo $v_f = \epsilon$, y

$$t(\epsilon, v_0) = \frac{12(2C_4)^{\frac{7}{6}}}{C_1} \left(\frac{1}{\epsilon^{\frac{1}{6}}} - \frac{1}{v_0^{\frac{1}{6}}} \right)$$

Tomando el limite cuando la condición inicial tiende a infinito

$$t(\epsilon) = \frac{12(2C_4)^{\frac{7}{6}}}{C_1} \frac{1}{\epsilon^{\frac{1}{6}}}$$

se muestra que todas las trayectorias que comienzan en infinito llegan a Γ_ϵ en tiempo acotado. ▲

Nota 3.8 Se puede observar que la fórmula para estimar el conjunto compacto guarda la misma estructura que la encontrada en el análisis del sistema sin perturbaciones, solo que ahora depende de la cota de la perturbación $\rho_2(t, x)$. ▲

Teorema 3.2 *El sistema (3.31) es exacta y uniformemente convergente si se seleccionan*

- $k_2 > \rho$ y $k_1^2 > 2k_2$
- ó k_1 y k_2 son seleccionadas tal que ambas desigualdades $k_1^2(k_2 - \frac{1}{4}k_1^2) > \rho^2$ y $2k_2 > k_1^2$ se satisfagan.

▲

Demostración. *La función de Lyapunov presentada en la proposición (3.4) garantiza la convergencia exacta de las trayectorias del sistema (3.31). La proposición (3.5) garantiza que el sistema (3.31) converge uniformemente cuando las perturbaciones acotadas por una constante son consideradas en la dinámica del sistema. Ambas proposiciones garantizan que el sistema perturbado (3.31) converge exacta y uniformemente al origen. Además, los tiempos de convergencia de todas las trayectorias del sistema al origen están acotados por una constante que no depende de las condiciones iniciales.*

▲

3.3.6. Estimación del Tiempo de Convergencia con perturbación acotada

El algoritmo para estimar tiempo de convergencia del sistema perturbado (3.31), es idéntico al mostrado en la sección (3.2.4).

- Seleccionar las ganancias como en el teorema (3.2) y seleccionar $\delta > 0$ y $\gamma_i > 0$, con $i = 1, \dots, 7$, apropiadamente.
- Calcular el conjunto compacto ε como en la proposición (3.5).
- Elegir $\varepsilon_2 > \varepsilon$ y calcular el conjunto $\Gamma_2 = \{(x_1, x_2) : |V_2(x_1, x_2)| \leq \varepsilon_2\}$. El tiempo de convergencia de este conjunto compacto se calcula como

$$T_2(\varepsilon) = \frac{12}{C_1} \left(\frac{2^7 C_4^7}{\varepsilon_2} \right)^{\frac{1}{6}}$$

- Encontrar el conjunto Γ_1 tal que $\Gamma_2 \subset \Gamma_1$ y $\Gamma_1 = \{(x_1, x_2) : V_1(x_1, x_2) \leq \varepsilon_1\}$. Entonces, el tiempo de convergencia de este conjunto compacto al origen puede ser calculado como

$$T_1 = \frac{4}{\epsilon \lambda_{\min}^{1/2}\{P\}} \varepsilon_1^{1/2}$$

- La estimación del tiempo de convergencia esta dada por

$$T = T_1 + T_2 \tag{3.40}$$

Capítulo 4

Aplicación a Observación y Diferenciación

4.1. Introducción

La diferenciación en tiempo real es un problema viejo e importante. Para controlar los diferenciadores son ampliamente utilizados: son una parte importante de los controladores PID clásicos; generalmente, son parte esencial en el control por retroalimentación de salida de sistema no lineales (Atassi y Khalil 2000; Levant 2003); o son usados como observadores. El principal reto en el diseño del diferenciador es mantener tanto la exactitud como la robustez ante el ruido (Levant 1998; Levant 2003). En sistemas lineales, la aproximación de la función de transferencia en una banda de frecuencia ha sido extensamente usada (Rabiner y Steiglitz 1970; Kumar y Roy 1988). Los observadores de alta ganancia también han sido muy utilizados como diferenciadores en tiempo real, y aplicados al control por retroalimentación de salida, dando algunos resultados de separación en esquemas de control no lineal (Atassi y Khalil 2000; Khalil 2002). Una limitación de observadores/diferenciadores lineales y suaves es que son exactos para una clase muy pequeña de señales y sus propiedades de aproximación para una clase amplia de señales es razonablemente buena solamente cuando se usan ganancias muy grandes. No obstante, en este caso, la sensibilidad al ruido es fuertemente amplificada y la presencia del efecto pico deteriora aún más su desempeño (Atassi y Khalil 2000; Khalil 2002).

Por otro lado, los observadores exactos por modos deslizantes presentan la característica de rechazar perturbaciones y responder en forma robusta ante algunos tipos de incertidumbres del modelo del sistema debido a que presentan una inyección de salida a través de un término discontinuo. El diseño de los observadores exactos se reduce a garantizar que el vector de error de estimación de los estados permanezca en una trayectoria dada por el error cero (Osorio 2009). En particular, se ha mostrado que el algoritmo del Super-Twisting se adapta muy bien como diferenciador (Levant 1998; Levant 2003) ya que ofrece la mejor convergencia posible en presencia de ruidos acotados medibles

en el sentido de Lebesgue, cuando la segunda derivada de la señal base (desconocida) es acotada (Levant 2003). Esta clase de diferenciadores ha sido usada para construir observadores exactos y robustos con convergencia en tiempo finito (Dávila, Fridman, y Levant 2005; Floquet y Barbot 2007; Bejarano, Fridman, y Poznyak 2007). La convergencia en tiempo finito es una propiedad crucial empleada en la estimación de estados en sistema híbridos, o para propiedades de separación de sistemas no lineales.

El principal inconveniente de todos los resultados previos es que el tiempo de convergencia de estos observadores/diferenciadores tiende a infinito cuando la norma de la condición inicial crece sin cota. Esto significa, que para sistemas híbridos no se puede garantizar que el estimador brinde el valor exacto de los estados entre cada conmutación (modo de operación), si la cota para las condiciones iniciales no es conocida a priori. O para control por retroalimentación de salida basado en un observador de estados significa que no se puede asegurar que el observador converja antes de que las trayectorias de la planta se escapen a infinito, si una cota de las condiciones iniciales no es dada a priori. Esto motiva la importancia de tener observadores/diferenciadores que converjan exacta y robustamente en tiempo finito, con tiempo de convergencia independiente de las condiciones iniciales.

El objetivo de este capítulo es diseñar un diferenciador de primer orden y un observador para sistemas mecánicos, que además de tener la característica de convergencia exacta y en tiempo finito de la estimación, el diferenciador y observador propuestos presentan la propiedad de convergencia uniforme con respecto a las condiciones iniciales, es decir, que el error de diferenciación/observación alcanza exacta y robustamente el origen en un tiempo de convergencia que esta uniformemente acotada para todas las condiciones iniciales del diferenciador/observador. Por lo que la convergencia exacta de ambos se alcanza en un tiempo prefijado, independientemente de la condición inicial.

4.2. Diferenciador de primer orden

En esta sección se propone un diferenciador de primer orden basado en el algoritmo Super-Twisting con convergencia exacta y uniforme, el Diferenciador Robusto Exacto y Uniforme (DREU). El diferenciador de Levant brinda convergencia exacta y en tiempo finito a la derivada de la señal de entrada, cuando la derivada es Lipschitz. Sin embargo, el tiempo de convergencia crece sin cota con la norma de las condiciones iniciales en el diferenciador. El DREU incluye términos de alto orden, los cuales proveen convergencia uniforme con respecto a las condiciones iniciales, tal que el DREU converge uniformemente y además, exactamente a la derivada de la señal de entrada en tiempo finito, y el tiempo de convergencia es independiente de las condiciones iniciales. El tiempo de convergencia puede ser ajustado con las ganancias del diferenciador.

Considere que la señal $f(t)$ que entra al diferenciador (o que se quiere diferenciar) es una función definida en el intervalo $[0, \infty)$. La función $f(t)$ se asume que es una función medible en el sentido de Lebesgue y se define como $f(t) = f_0(t) + v(t)$. El primer termino de la señal consiste

en una función base $f_0(t)$ que es desconocida y que tiene una derivada con constante de Lipschitz $\rho > 0$, la cual se supone conocida. El segundo termino corresponde al ruido $v(t)$ que aparece en la señal base $f_0(t)$, el cual para el análisis se considera desconocido, pero que puede ser acotado por una constante. Cuando se hacen mediciones discretas de la señal de entrada $f(t)$, el proceso de discretización también puede ser interpretado como una clase ruido que afecta a la señal de entrada.

Considerando que el ruido esta ausente en la señal que entra al diferenciador, y definiendo $\varsigma_0 = f_0(t)$ y $\varsigma_1 = \dot{f}_0(t)$ como las nuevas variables, se puede tener la siguiente representación en el espacio de estados de la señal $f_0(t)$

$$\begin{aligned}\dot{\varsigma}_0 &= \varsigma_1; \\ \dot{\varsigma}_1 &= \ddot{f}_0 ,\end{aligned}\tag{4.1}$$

Para diferenciar la señal base $f_0(t)$, la cual es desconocida, se puede considerar la siguiente ecuación auxiliar

$$\dot{x} = \dot{z}_0$$

donde \dot{z}_0 es la señal de salida que se obtendrá del diferenciador propuesto. El objetivo principal es diseñar un diferenciador que de una estimación robusta de $\dot{f}_0(t)$ usando solamente mediciones continuas de la señal $f_0(t)$, que se traduce que el error de estimación entre la señal base y su derivada y la salidas del diferenciador van a converger exacto y uniformemente, por lo tanto el tiempo de convergencia es uniforme con respecto a las condiciones iniciales.

Considerando que $\sigma_0 = z_0 - \varsigma_0$ es el error de estimación entre la señal base y la integral de la salida diferenciador, aplicando el algoritmo Super-Twisting con convergencia exacta y uniforme, se obtiene el siguiente esquema para el DREU

$$\begin{aligned}\dot{z}_0 &= -k_1\phi_1(\sigma_0) + z_1; \\ \dot{z}_1 &= -k_2\phi_2(\sigma_0) ,\end{aligned}\tag{4.2}$$

k_1 y k_2 son las ganancias positivas del diferenciador que se tienen que diseñar apropiadamente,

$$\begin{aligned}\phi_1(\sigma_0) &= \mu_1 |\sigma_0|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma_0) + \mu_3 |\sigma_0|^{\frac{3}{2}} \text{sign}(\sigma_0) , \\ \phi_2(\sigma_0) &= \frac{\mu_1^2}{2} \text{sign}(\sigma_0) + 2\mu_1\mu_3\sigma_0 + \frac{3}{2}\mu_3^2 |\sigma_0|^2 \text{sign}(\sigma_0) ,\end{aligned}$$

$\mu_1 \geq 0$ y $\mu_2 \geq 0$ son escalares. Hay que notar que cuando $\mu_1 = 1$ y $\mu_2 = 0$, el diferenciador robusto propuesto en (Levant 1998) es recuperado. Las ganancias del diferenciador son diseñadas de manera sencilla, para este caso, el diseño del diferenciador requiere solamente del conocimiento de un parámetro, ρ , el cual se necesita para sintonizar el diferenciador, y que tiene que satisfacer solamente la siguiente condición $|\ddot{f}_0| \leq \rho/2$. Respectivamente, z_0 y z_1 son las estimaciones de $f_0(t)$ y $\dot{f}_0(t)$. Las estimaciones son teóricamente exactas en ausencia de ruido si $z_0 = f_0(t)$ y $\dot{z}_0 = \dot{f}_0(t)$. Además, \dot{z}_0 y \dot{z}_1 pueden tomarse como las salidas del diferenciador (Levant 1998),(Levant 2003).

Se pueden definir $\sigma_1 = z_1 - \varsigma_1$ como el error de estimación entre la salida del diferenciador y la primera derivada de la señal base. Con las coordenadas σ_0 y σ_1 se puede obtener la dinámica

del error de diferenciación, la cual toma la forma

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_0 &= -k_1\phi_1(\sigma_0) + \sigma_1 \\ \dot{\sigma}_1 &= -k_2\phi_2(\sigma_0) - \ddot{f}_0(t)\end{aligned}\tag{4.3}$$

donde $\ddot{f}_0(t)$ satisface $|\ddot{f}_0(t)| < \rho/2$, y $\sigma_0 = 0$ y $\sigma_1 = 0$ se establecen en tiempo finito. El resultado de la siguiente sección muestra que el DREU es robusto y que el error de diferenciación realmente converge exacta y uniformemente a cero.

4.2.1. Convergencia Exacta y Uniforme del Error de Diferenciación

Teorema 4.1 *Suponga que $|\ddot{f}_0(t)| \leq \rho/2$. Entonces, el error de diferenciación (4.3) es exacta y uniformemente convergente, asegurando la estimación de f_0 y \dot{f}_0 si se seleccionan las ganancias*

- $k_2 > \rho$ y $k_1^2 > 2k_2$
- o k_1 y k_2 son seleccionadas de tal forma que ambas desigualdades $k_1^2(k_2 - \frac{1}{4}k_1^2) > \rho^2$ y $2k_2 > k_1^2$ se satisfagan simultáneamente.

▲

Demostración. *El procedimiento para construir un función de Lyapunov robusta que pruebe convergencia en tiempo finito del error de diferenciación fue introducida en la Sección 3.3.4. La Proposición 3.4 garantiza que el error de observación converge exacto si $|\ddot{f}_0(t)| \leq \rho/2$. La construcción de $V_1 = \zeta^T P \zeta$, con $P = P^T$ y $\epsilon > 0$, se reduce a satisfacer la desigualdad matricial*

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + \epsilon P + \rho^2 C^T C & PB \\ B^T P & -1 \end{bmatrix} \leq 0\tag{4.4}$$

donde

$$A_0 = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

reemplazar ϵP por ϵI no afecta la solubilidad de (4.4). La estabilidad robusta y en tiempo finito del error de diferenciación se garantiza si se eligen las ganancias $k_1 > 0$ y $k_2 > 0$ tal que :

- $k_2 > \rho$ y $k_1^2 > 2k_2$
- k_1 y k_2 se han seleccionadas de manera que ambas desigualdades $k_1^2(k_2 - \frac{1}{4}k_1^2) > \rho^2$ y $2k_2 > k_1^2$ se satisfagan.

Usando la Proposición 3.5 se garantiza que el error de diferenciación converge uniformemente cuando $|\ddot{f}_0(t)| \leq \rho/2$. Por lo tanto, la dinámica del error de diferenciación (4.3) es exacta y uniformemente convergente (con respecto a las condiciones iniciales), por lo tanto todas las trayectorias solución del sistema (4.2) convergen a la derivada de la señal en tiempo finito menor a T , el cual es independiente de la condición inicial y esta acotado por una constante que depende de las ganancias del diferenciador.



Nota 4.1 *El algoritmo desarrollado en la Sección 3.2.4 sirve para estimar el tiempo de convergencia uniforme del error de diferenciación.*



4.2.2. Precisión del diferenciador

Cuando la estimación de la derivada del diferenciador (4.2) es cercana a la derivada de la señal de entrada (que se quiere diferenciar), los términos de bajo orden dominan el comportamiento del error de diferenciación cuando el error se aproxima a cero. Lo que implica que el DREU se puede aproximar al diferenciador de Levant. Entonces, el DREU tiene la misma precisión que el diferenciador de Levant con respecto a ruidos y mediciones discretas de $f_0(t)$.

Si la señal de entrada tiene la forma $f(t) = f_0(t) + v(t)$ y $v(t)$ es una función medible en el sentido de Lebesgue con magnitud $|v(t)| \leq \nu$, las desigualdades $|z_0 - f_0(t)| < \mu_0\nu$, $|z_1 - \dot{f}_0(t)| < \mu_2\nu^{1/2}$ son establecidas con constantes positivas $\mu_0 > 0$ y $\mu_2 > 0$. Si $f_0(t)$ es muestreada con intervalos de muestreo constante $\tau > 0$, las desigualdades $|z_0 - f_0(t)| < \gamma_0\tau^2$, $|z_1 - \dot{f}_0(t)| < \gamma_1\tau$ son establecidas con constantes positivas γ_0, γ_1 , (Levant 2005).

4.2.3. Ejemplo de Simulación

En el siguiente ejemplo de simulación se compara el diferenciador propuesto con el diferenciador de Levant (Levant 1998). Las ganancias del diferenciador fueron seleccionadas como en el Teorema 4.1 para asegurar la convergencia del diferenciador. Las ganancias que se eligieron fueron: $k_1^2 = 2k_2$ y $k_2 = 6$. Para la simulación, se han tomado dos condiciones iniciales para los diferenciadores, $z(0) = 0$ y $z(0) = 10$. La señales de entrada fueron tomadas de (Levant 1998), las cuales son $f(t) = 5t + \sin t + 0.01 \cos 10t$ y $f(t) = 5t + \sin t + 0.001 \cos 30t$. Los resultados que se obtienen se muestran en la Figura 4.1.

Ambos diferenciadores convergen en tiempo finito, como se muestra en la Figura 4.1. Se observa que el DREU converge más rápido que el diferenciador de Levant. La desventaja del diferenciador propuesto radica en que la respuesta transitoria del mismo crece cuando las condiciones iniciales crecen. Una conjetura que se puede hacer es que la selección de las ganancias puede afectar el comportamiento transitorio del diferenciador, de ser así, la respuesta transitoria del diferenciador puede mejorarse eligiendo otro par de ganancias.

A pesar de que el diferenciador de Levant es exacto, no posee la propiedad de convergencia uniforme, por lo tanto cuando la condición inicial crece en forma no acotada, el tiempo de convergencia del diferenciador crece de forma no acotada también, esto se muestra en la Figura 4.2. El tiempo de convergencia es enormemente mejorado debido a los términos de alto orden en caso del DREU, y el tiempo de convergencia de cualquier trayectoria (no importando donde inicie) esta acotada por

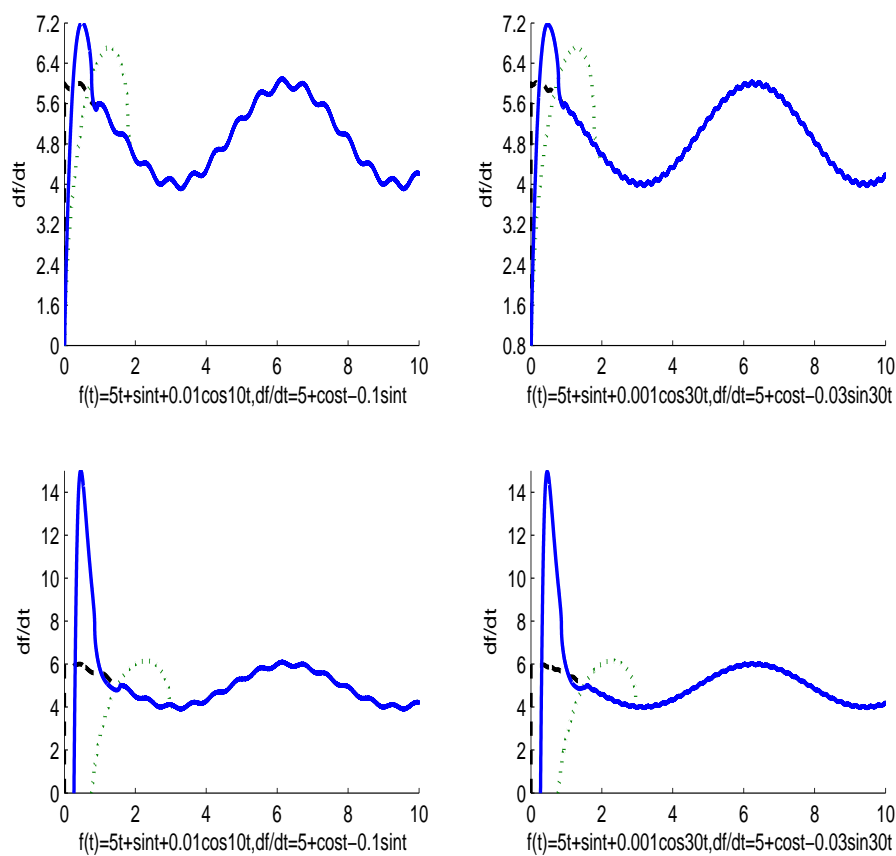


Figura 4.1: Gráficas comparativas entre el DREU (azul) y el diferenciador de Levant (verde).

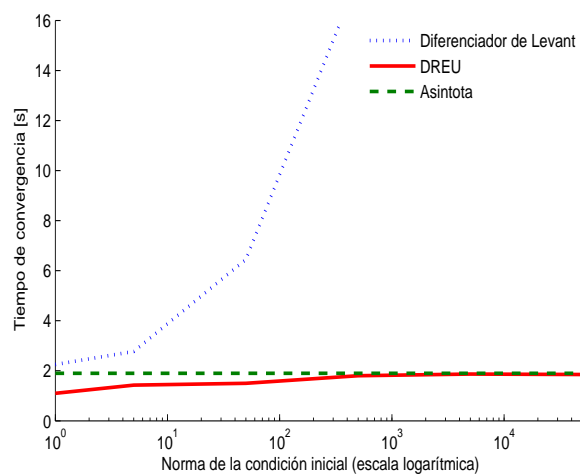


Figura 4.2: Tiempo de convergencia cuando las condiciones iniciales crecen en ambos diferenciadores.

una constante, aun en presencia de ruido, como se observa en la Figura 4.2. La señal de entrada $f(t) = 5t + \sin t + 0.01 \cos 10t$ fue usada para obtener los resultados mostrados en la Figura 4.2.

Enseguida se estima el tiempo de convergencia uniforme y se compara con el obtenido en simulación. Siguiendo los pasos del algoritmo propuesto en la sección 3.3.6 se tiene

- Como $k_2 = 6$ y $k_1^2 = 2k_2$ y eligiendo

$$\gamma_1 = \left(\frac{24\bar{k}_1}{7}\right)^{\frac{4}{7}}, \quad \gamma_2 = \left(\frac{32\bar{k}_2}{7}\right)^{\frac{1}{7}}, \quad \gamma_3 = \left(\frac{\bar{k}_2}{28}\right)^{\frac{2}{9}}, \quad \gamma_4 = (k_1)^{\frac{1}{5}}, \quad \gamma_5 = \left(\mu_1^2 k_2^{\frac{1}{15}}\right)^{\frac{1}{5}},$$

$$\gamma_6 = \left(\frac{3\mu_2 k_1}{2}\right)^{\frac{2}{5}}, \quad \gamma_7 = \left(\frac{3\mu_2 k_1}{2\delta}\right)^{\frac{2}{5}}, \quad \delta = \frac{3}{7k_2} \left(\frac{24\bar{k}_1}{7}\right)^{\frac{4}{3}} + \frac{8}{7k_1} \left(\frac{32\bar{k}_2}{7}\right)^{\frac{1}{6}} + 0.05,$$

con base en simulaciones, se tiene que $C_1 = 0.791667, C_2 = 8.35489, C_3 = 0.00345866, C_4 = 6.01652$ y $\beta_2 = 9.47561$.

- Como en la Proposición 3.5.

$$\varepsilon = C_3 \left(\frac{\beta_2}{C_1} + \sqrt{\left(\frac{\beta_2}{C_1}\right)^2 + 2\frac{C_2}{C_1}} \right)^3 = 52.6901$$

- Elegir $\varepsilon_2 > 52.6901$, para este ejemplo $\varepsilon_2 = 53$ y el conjunto $\Gamma_2 = \{(x_1, x_2) : |V_2(x_1, x_2)| \leq 53\}$, Figura (4.3). El tiempo de convergencia de este conjunto compacto es

$$T_2(\varepsilon_2) = \frac{12}{C_1} \left(\frac{2^7 C_4^7}{\varepsilon_2}\right)^{\frac{1}{6}} = 142.601$$

- Para encontrar el conjunto Γ_1 tal que $\Gamma_2 \subset \Gamma_1$ con $\Gamma_2 = \{(x_1, x_2) : V_1(x_1, x_2) \leq \varepsilon_1\}$. Para ello se debe hallar $P = P^T > 0$ y $\epsilon > 0$ que satisfagan

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A + \epsilon I + \rho^2 C^T C & P B \\ B^T P & -1 \end{bmatrix} \leq 0$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} -3.4641 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \rho = 5$$

Utilizando el LMI Toolbox de Matlab para resolver la desigualdad matricial

$$P = \begin{bmatrix} 10.4315 & -2.7068 \\ -2.7068 & 2.0680 \end{bmatrix}, \epsilon = 0.6042$$

y $\lambda_{\min}\{P\} = 1.2684, \lambda_{\max}\{P\} = 11.2311$. Por lo tanto

$$V_1(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \phi_1(x_1) \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 10.4315 & -2.7068 \\ -2.7068 & 2.0680 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1(x_1) \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Para encontrar Γ_1 tal que $\Gamma_2 \subset \Gamma_1$ se utilizan las curvas de nivel de $V_1(x_1, x_2)$, que se muestran en la Figura 4.3. Eligiendo $\varepsilon_1 = 160$, el tiempo de convergencia de este conjunto compacto al origen puede ser calculado como

$$T_1 = \frac{4}{\epsilon \lambda_{\min}^{1/2}\{P\}} \varepsilon_1^{1/2} = 74.355$$

- La estimación del tiempo de convergencia es

$$T = 142.601 + 74.355 = 216.956$$

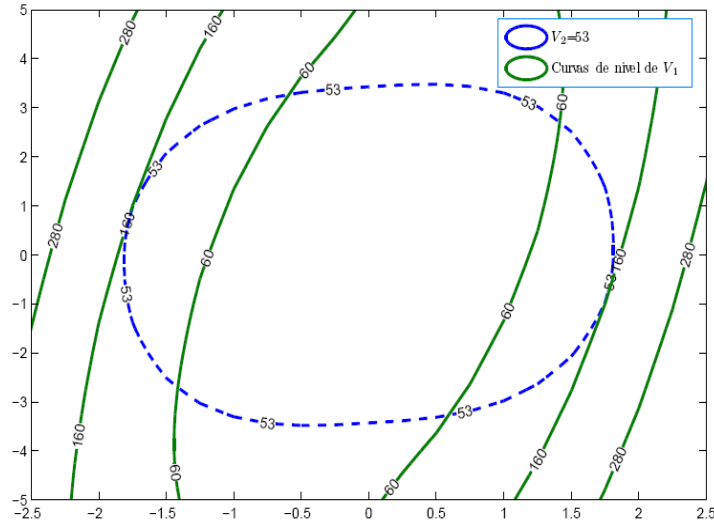


Figura 4.3: Curvas de nivel.

Nota 4.2 Como se observa la estimación es demasiado conservadora comparada con la calculada en simulación que es aproximadamente de 2 segundos y en gran parte se debe a la selección de los parámetros. Se puede utilizar algún proceso de optimización para obtener la mejor estimación posible del tiempo de convergencia. Para obtener el tiempo de convergencia uniforme del observador se puede proceder de la misma manera.

▲

4.3. Observador Robusto Exacto y Uniforme para un sistema mecánico

En esta sección se propone un Observador Robusto Exacto y Uniforme (OREU) basado en algoritmo Super-Twisting con convergencia exacta y uniforme. Ambas funciones de Lyapunov del capítulo anterior permiten concluir la convergencia exacta y uniforme del OREU. De hecho, el error de observación tiene convergencia exacta y uniforme a cero, aun en presencia de entradas desconocidas acotadas. Supóngase que el modelo general para un sistema mecánico esta dado por

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + P(\dot{\mathbf{q}}) + G(\mathbf{q}) + \Delta(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \tau \quad (4.5)$$

donde $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de coordenadas generalizadas, $M(\mathbf{q})$ es la matriz de inercias, $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es la matriz que contiene los términos de fuerza centrífuga y de efecto de Coriolis, $P(\dot{\mathbf{q}})$ es la fricción de Coulomb, $G(\mathbf{q})$ es el termino de las fuerza debidas a la gravedad, $\Delta(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es el termino de incertidumbres del modelo y τ es el vector de torques. Además, $M_n(\mathbf{q}), C_n(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), P_n(\dot{\mathbf{q}}), G_n(\mathbf{q})$ son las matrices nominales del modelo que se suponen conocidas. Definiendo $\mathbf{x}_1 = \mathbf{q}, \mathbf{x}_2 = \dot{\mathbf{q}}, \tau = u$, el modelo (4.5) puede ser escrito en variables de estado como

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= f(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, u) + \xi(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, u), \quad u = U(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{x}_1\end{aligned}\tag{4.6}$$

donde la parte nominal del sistema dinámico es

$$f(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, u) = -M_n^{-1}(\mathbf{x}_1)[C_n(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\mathbf{x}_2 + P(\mathbf{x}_2) + G_n(\mathbf{x}_1) - u]$$

y las incertidumbres están concentradas en el termino $\xi(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, u)$. El objetivo es diseñar un observador de velocidad basado en el algoritmo Super-Twisting con convergencia exacta y uniforme para el sistema (4.5). Solamente el caso escalar es considerado $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ por motivos de simplicidad. En el caso vectorial, los observadores pueden ser construidos de manera paralela para cada variable de posición de \mathbf{x}_1 exactamente en la misma forma. El OREU para el caso escalar (ver (Dávila, Fridman, y Levant 2005) para el caso de Observador robusto basado en el Super-Twisting clásico (OST)) esta descrito por

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + k_1 \phi_1(\tilde{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= f(t, x_1, \hat{x}_2, u) + k_2 \phi_2(\tilde{x}_1)\end{aligned}\tag{4.7}$$

donde \hat{x}_1, \hat{x}_2 son la estimación de los estados, $\tilde{x}_1 = x_1 - \hat{x}_1$ y $\tilde{x}_2 = x_2 - \hat{x}_2$ son los errores de estimación, k_1 y k_2 son ganancias positivas que se tienen que diseñar,

$$\begin{aligned}\phi_1(\tilde{x}_1) &= \mu_1 |\tilde{x}_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\tilde{x}_1) + \mu_2 |\tilde{x}_1|^{\frac{3}{2}} \text{sign}(\tilde{x}_1), \\ \phi_2(\tilde{x}_1) &= \frac{\mu_1^2}{2} \text{sign}(\tilde{x}_1) + 2\mu_1 \mu_2 \tilde{x}_1 + \frac{3}{2} \mu_2^2 |\tilde{x}_1|^2 \text{sign}(\tilde{x}_1),\end{aligned}$$

son los términos de inyección de salida, y $\mu_1 \geq 0$ y $\mu_2 \geq 0$ son escalares positivos arbitrarios. Se puede observar que cuando $\mu_1 = 1$ y $\mu_2 = 0$ el observador presentado en (Dávila, Fridman, y Levant 2005) es recobrado. La dinámica del error de observación esta dada por

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1 &= -k_1 \phi_1(\tilde{x}_1) + \tilde{x}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= -k_2 \phi_2(\tilde{x}_1) + F(t, x_1, x_2, \hat{x}_2)\end{aligned}\tag{4.8}$$

donde $F(t, x_1, x_2, \hat{x}_2) = f(t, x_1, x_2, u) - f(t, x_1, \hat{x}_2, u) + \xi(t, x_1, \hat{x}_2, u)$.

4.3.1. Convergencia Exacta y Uniforme del error de observación

1. Convergencia Exacta y Uniforme del error de observación sin perturbación

La ecuación dinámica de error cuando el termino $F(t, x_1, x_2, \hat{x}_2)$ no afecta al sistema (4.8) esta

dada por

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1 &= -k_1\phi_1(\tilde{x}_1) + \tilde{x}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= -k_2\phi_2(\tilde{x}_1),\end{aligned}\tag{4.9}$$

Con base en el teorema (3.1) se puede concluir que el sistema (4.9) es uniformemente convergente en tiempo finito para $k_1, k_2 > 0$.

2. Convergencia Exacta y Uniforme del error de observación bajo perturbación acotada

La convergencia exacta y uniforme del error de observación bajo perturbación acotada se establece al siguiente teorema

Teorema 4.2 *Suponga que $|F(t, x_1, x_2, \hat{x}_2)| \leq \rho/2$. Entonces, el observador (4.7) asegura la convergencia bajo perturbaciones acotadas y error de observación tiene convergencia exacta y uniforme si se seleccionan las ganancias*

- $k_2 > \rho$ y $k_1^2 > 2k_2$
- O k_1 y k_2 son seleccionadas de tal forma tal que ambas desigualdades $k_1^2(k_2 - \frac{1}{4}k_1^2) > \rho^2$ y $2k_2 > k_1^2$ sean satisfechas.

▲

Demostración. *El procedimiento para construir un función de Lyapunov robusta que garantice la convergencia en tiempo finito del error de observación cuando las perturbaciones son uniformemente acotadas, es decir, que para todo t y x se satisface $2|\rho_2(t, x)| \leq \rho$, fue introducida en Sección 3.3.4. La Proposición 3.4 garantiza que el error de observación converge exacto cuando entradas desconocidas pero acotadas aparecen en la dinámica del error de observación. La Proposición 3.5 garantiza que el error de observación converge uniformemente exacto cuando existen entradas desconocidas en la dinámica del error de observación.*

▲

La dinámica del error de observación (4.8) es *exacta y uniformemente convergente* con respecto a las condiciones iniciales, por lo tanto todas las trayectorias solución del sistema (4.7) convergen a los estados del sistema mecánico (4.6) en tiempo finito menor a T , el cual es independiente de la condición inicial y esta acotado por una constante que depende de las ganancias del observador.

Nota 4.3 *Los algoritmos desarrollados en las Secciones 3.2.4 y 3.3.6 sirven para estimar el tiempo de convergencia uniforme del error de observación.*

▲

4.3.2. Ejemplo de Simulación

Para ilustrar las propiedades del observador propuesto se desarrolla un ejemplo simple, considere el sistema del péndulo el cual puede ser representado en variables de estado como

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{J}u - \frac{g}{L}\sin(x_1) - \frac{V_s}{J}x_2 + \rho \\ y &= x_1\end{aligned}$$

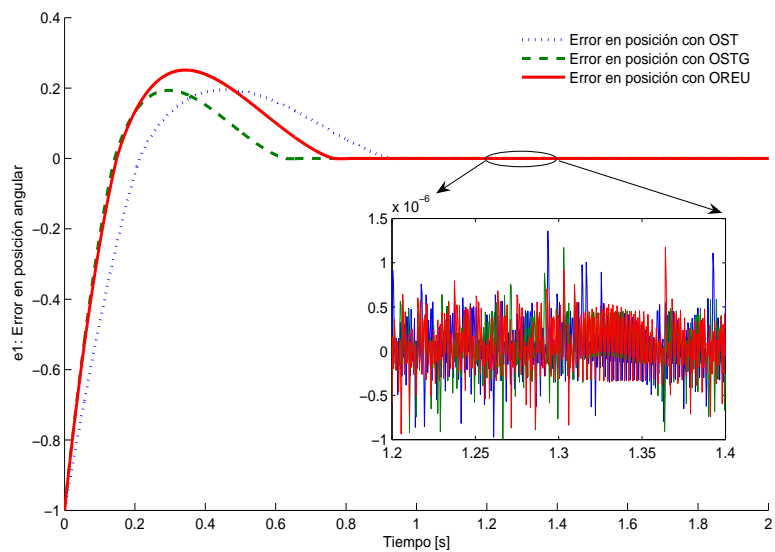
donde $x_1 = \theta_1$ es la posición angular, $x_2 = \theta_2$ es la velocidad angular y ρ es una perturbación acotada, lo cual para el presente ejemplo se considera como $\rho = 0.5 \sin(2t) + 0.5 \cos(5t)$. Este sistema ha sido utilizado en (Dávila, Fridman, y Levant 2005), (Moreno y Osorio 2008) para diseñar observadores basados en el algoritmo Super-Twisting y observadores basados en modos deslizantes de segundo orden con termino lineal. El OREU es

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + k_1\phi_1(e_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \frac{1}{J}u - \frac{g}{L}\sin(\hat{x}_1) - \frac{V_s}{J}\hat{x}_2 + k_2\phi_2(e_1)\end{aligned}$$

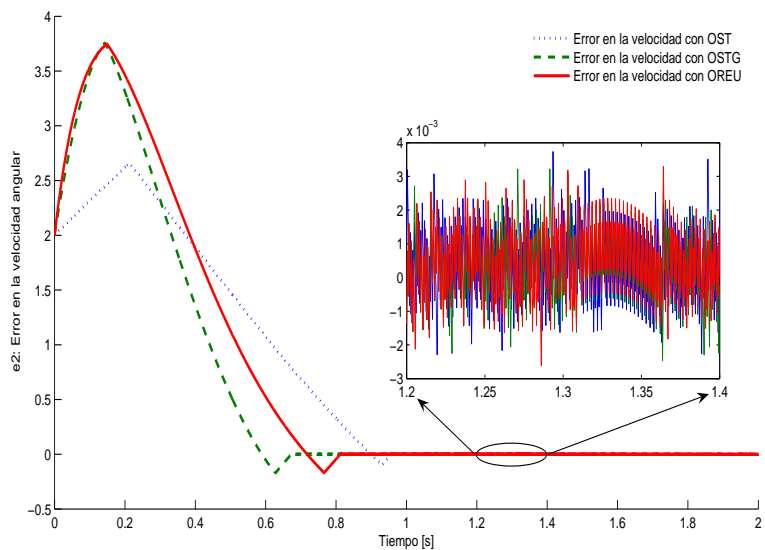
donde $e_1 = x_1 - \hat{x}_1$, $\phi_1(e_1) = |e_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_1) + |e_1|^{\frac{3}{2}} \text{sign}(e_1)$ y $\phi_2(e_1) = \frac{1}{2} \text{sign}(e_1) + 2e_1 + \frac{3}{2} |e_1|^2 \text{sign}(e_1)$, con $\mu_1 = \mu_2 = 1$. La dinámica del error de observación es descrita por

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= -k_1\phi_1(e_1) + e_2 \\ \dot{e}_2 &= -k_2\phi_2(e_1) + \varrho(t, e)\end{aligned}$$

donde $\varrho(t, e) = \rho - \frac{g}{L}(\sin(\hat{x}_1) - \sin(x_1)) - \frac{V_s}{J}e_2$, es el término de perturbación. Las ganancias del observador se eligen como en el Teorema 4.2 para asegurar la convergencia del error de observación. Para la simulación $k_2 = 10$ y $k_1^2 = 2k_2$, las condiciones iniciales utilizadas en el observador fueron $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ y $\hat{x}_1 = -40$, $\hat{x}_2 = 100$. Para el sistema péndulo $g = 9.815[m/s^2]$, $J = 0.891[Kgm^2]$ y $V_s = 0.18[kgm/s^2]$. El Observador basado en el algoritmo Super-Twisting Generalizado (Moreno 2009) (OSTG) también fue diseñado para propósitos de comparación. Los resultados obtenidos se muestran en las Figuras 4.4 y 4.5. Tanto el OST y el OSTG, tienen convergencia en tiempo finito. Sin embargo, como se observa en las gráficas, estos observadores no tienen convergencia uniforme con respecto a la condición inicial, por lo tanto cuando la condiciones iniciales crecen en el observador o en el sistema el tiempo de convergencia del error de estimación crece también, esto se muestra en la Figura 4.6. El tiempo de convergencia es mejorado gracias a los términos de alto orden que posee el observador en el caso del OREU, y el tiempo de convergencia para cualquier trayectoria del sistema dinámico del error esta acotado por una constante.

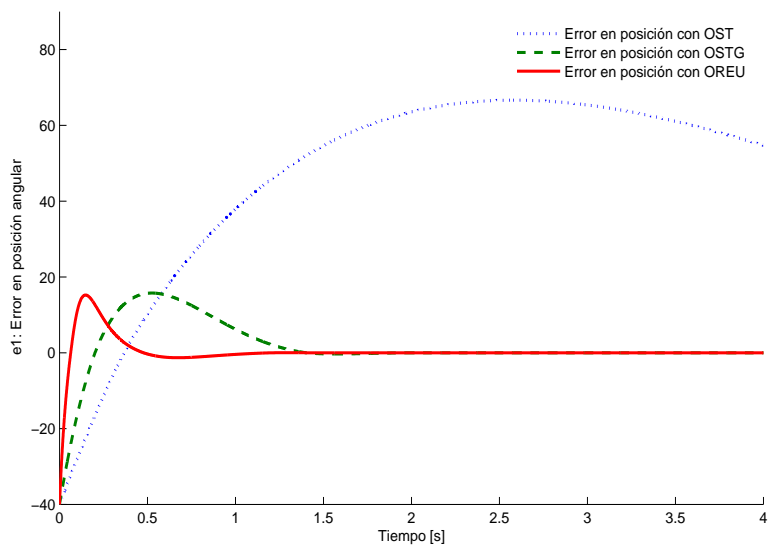


(a)

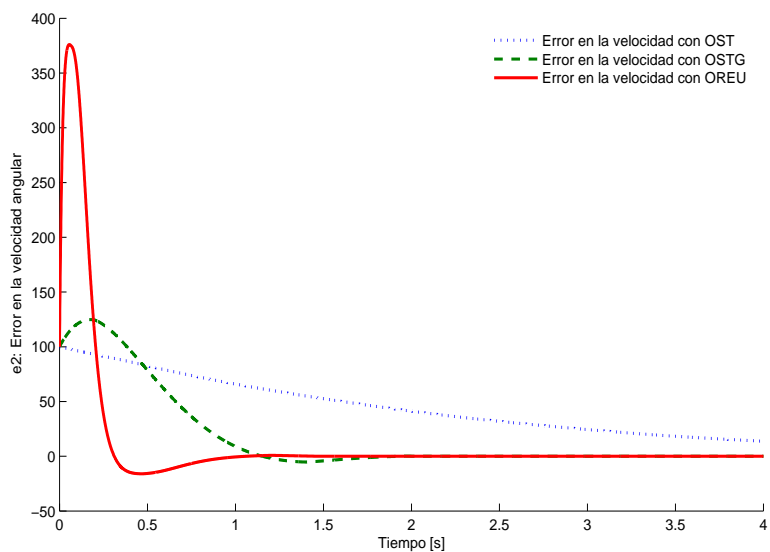


(b)

Figura 4.4: Error en la posición y velocidad estimada con condiciones iniciales $x_1(0) = -1$ y $x_2(0) = 2$.



(a)



(b)

Figura 4.5: Error en la posición y velocidad estimada con condiciones iniciales $x_1(0) = -40$ y $x_2(0) = 100$.

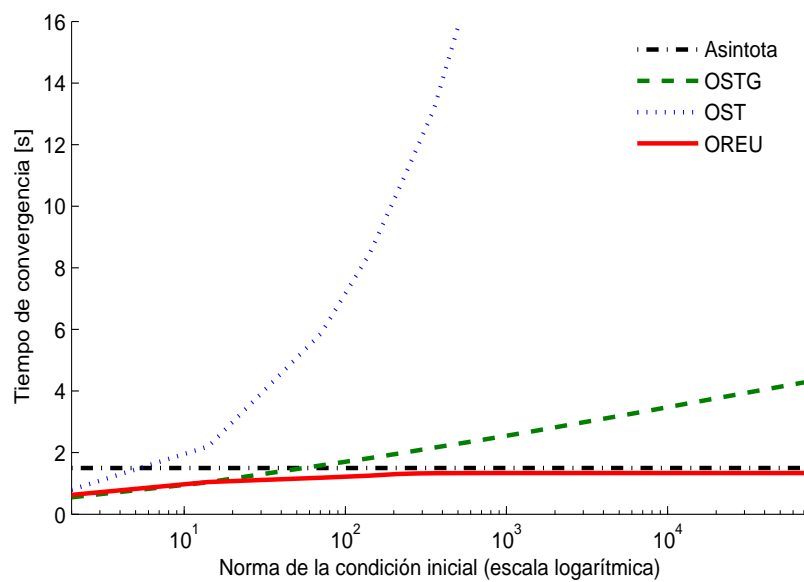


Figura 4.6: Tiempo de convergencia cuando las condiciones iniciales crecen.

Capítulo 5

Conclusiones y Trabajo Futuro

5.1. Conclusiones

- Se ha introducido un nuevo concepto, la *convergencia exacta y uniforme* con respecto a la condición inicial de las trayectorias del sistema al origen. Agregando términos de alto orden al algoritmo Super-Twisting se logra que la propiedad de *convergencia exacta y uniforme* se presente en el sistema.
- El análisis y diseño del algoritmo Super-Twisting con convergencia exacta y uniforme han sido desarrollados con base en métodos de Lyapunov. Este enfoque permite diseñar de forma explícita las ganancias del nuevo algoritmo que garantizan la convergencia exacta y uniforme. En particular, dos funciones de Lyapunov han sido propuestas. Una de ellas muestra la convergencia exacta del algoritmo, la otra muestra la propiedad de convergencia uniforme.
- Con las funciones de Lyapunov propuestas se puede hacer un estimado del tiempo de convergencia, el cual está acotado por una constante.
- La propiedad de convergencia exacta y uniforme puede ser de gran importancia para establecer propiedades de separación en sistemas no lineales y para diseñar estimadores con tiempo de convergencia preescrito para sistemas híbridos.
- Se desarrollaron aplicaciones orientadas a observación y diferenciación con el algoritmo propuesto. Específicamente, se obtuvieron las condiciones para el diseño de un observador para un sistema mecánico de segundo orden y para el diseño de un diferenciador de primer orden. Los resultados de simulación permiten hacer una comparación con otros observadores y diferenciadores exactos existentes.

5.2. Trabajo Futuro

Como posible trabajo futuro se sugiere:

- Realizar un análisis más completo de la convergencia uniforme de las trayectorias del sistema en presencia de perturbaciones no acotadas por una constante.
- Analizar la posibilidad de conectar el algoritmo Super-Twisting con convergencia exacta y uniforme en cascada a través de métodos de Lyapunov.
- Ampliar y estudiar el algoritmo Super-Twisting con convergencia exacta y uniforme aplicado a sistemas de orden mayor de dos y dar continuidad al análisis de estabilidad con métodos de Lyapunov.
- Desarrollar observadores exactos y uniformes fuertemente observables y controladores exactos y uniformes para cierta clase de sistemas no lineales.
- Diseño de controladores por retroalimentación de salida exactos y uniformes.

Apéndice A

Los siguientes lemas son ampliamente usados en el análisis del presente trabajo.

Lema A.1 *Para cada número real $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $p > 1$, $q > 1$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ la siguiente desigualdad se satisface*

$$ab \leq c^p \frac{a^p}{p} + c^{-q} \frac{b^q}{q} .$$

▲

Demostración. *La desigualdad clásica de Young es*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} .$$

La desigualdad deseada se puede escribir

$$ab = (ca) \left(\frac{b}{c} \right) \leq \frac{(ca)^p}{p} + \frac{\left(\frac{b}{c} \right)^q}{q} = c^p \frac{a^p}{p} + c^{-q} \frac{b^q}{q} .$$

▲

Lema A.2 *(Yu 2005) Suponga $a > 0$, $b > 0$, y $0 < c < 1$, entonces la siguiente desigualdad de satisface*

$$(a + b)^c \leq a^c + b^c .$$

▲

Lema A.3 *(Yu 2005) Suponga $a_1 > 0$, $a_2 > 0, \dots, a_n > 0$ y $0 < c < 2$, son todos números positivos; entonces la siguiente desigualdad de satisface*

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)^c \leq (a_1^c + a_2^c + \dots + a_n^c)^2 .$$

▲

Usando el lemma anterior

$$|x_1|^{\frac{3}{2}} + |x_2| = |x_1|^{\frac{7}{4}s} + |x_2|^{\frac{7}{6}s} \geq (|x_1|^{\frac{7}{4}2} + |x_2|^{\frac{7}{6}2})^{\frac{s}{2}} = (|x_1|^{\frac{7}{2}} + |x_2|^{\frac{7}{3}})^{\frac{s}{2}}, s = \frac{6}{7}$$

$$|x_1|^{\frac{3}{2}} + |x_2| \geq \|x\|_{r,p}^{\frac{3}{2}}$$

$$|x_1|^{\frac{5}{2}} + |x_2|^{\frac{5}{3}} = |x_1|^{\frac{7}{4}s} + |x_2|^{\frac{7}{6}s} \geq (|x_1|^{\frac{7}{4}2} + |x_2|^{\frac{7}{6}2})^{\frac{s}{2}} = (|x_1|^{\frac{7}{2}} + |x_2|^{\frac{7}{3}})^{\frac{s}{2}}, s = \frac{10}{7}$$

$$|x_1|^{\frac{5}{2}} + |x_2|^{\frac{5}{3}} \geq \|x\|_{r,p}^{\frac{5}{2}}$$

$$|x_1|^3 + |x_2|^2 = |x_1|^{\frac{7}{4}s} + |x_2|^{\frac{7}{6}s} \geq (|x_1|^{\frac{7}{4}2} + |x_2|^{\frac{7}{6}2})^{\frac{s}{2}} = (|x_1|^{\frac{7}{2}} + |x_2|^{\frac{7}{3}})^{\frac{s}{2}}, s = \frac{12}{7}$$

$$|x_1|^3 + |x_2|^2 \geq \|x\|_{r,p}^3$$

Referencias

- Atassi, A. y H. Khalil (2000). Separation results for the stabilization of nonlinear systems using different high-gain observer designs. *Systems & Control Letters* vol.39, 183–191.
- Bacciotti, A. y L. Rosier (2005). Lyapunov functions and stability in control theory, 2nd ed. ed.. New York, Springer-Verlag.
- Bartolini, G., P. A. y U. E. (2000). First and second derivative estimation by sliding mode technique. *Journal of Signal Processing* vol.34 no. 2, 167–176.
- Bejarano, J. F., L. Fridman, y A. Poznyak (2007). Exact state estimation for linear systems with unknown inputs based on hierarchical super-twisting algorithm. *International Journal on Robust and Nonlinear Control* 17 (18), 1734–1753.
- Bhat, S. y D. Berstein (2000). Finite-time stability of continuous autonomous systems. *SIAM Journal on Control and Optimization* 38, 751–766.
- Dávila, I. A., J. A. Moreno, y L. Fridman (2009). Optimal lyapunov function selection for reaching time estimation of super twisting algorithm (i). en *Proceedings from the Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference*, Shanghai, P.R. China, pp. 6405–6410.
- Dávila, J., L. Fridman, y A. Levant (2005). Second-order sliding- modes observer for mechanical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* vol. 50 no. 11, 1785–1789.
- Filippov, A. (1988). Differential equations with discontinuous righthand side. *Kluwer. Dordrecht, The Netherlands*.
- Floquet, T. y J. P. Barbot (2007). Super twisting algorithm-based step-by-step sliding mode observers for nonlinear systems with unknown inputs. *International Journal of System Science* 38 (10), 803 – 815.
- Khalil, H. (2002). *Nonlinear Systems*, Third ed. ed.. New Jersey, Prentice–Hall.
- Kumar, B. y S. Roy (1988). Design of digital differentiators for low frequencies. en *Proc. IEEE*, vol. 76, pp. 287–289.

- Levant, A. (1998). Robust exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica* 34 (3), 379–384.
- Levant, A. (2003). *High-order sliding modes: differentiation and output-feedback control*. International Journal of Control vol. 76, 924–941.
- Levant, A. (2005). Homogeneity approach to high-order sliding mode design. *Automatica* vol. 41, 823–830.
- Levant, A. (2007). *Construction principles of 2-sliding mode design*. Automatica 43, 576 – 586.
- Moreno, J. (2009). A linear framework for the robust stability analysis of a generalized super-twisting algorithm. en *6th International Conference on Electrical Engineering*, pp. 12–17.
- Moreno, J. y M. Osorio (2008). A lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers. en *47th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 2856–2861.
- Osorio, M. (2009). Diseño de observadores con no linealidades fuertes. Master’s thesis, Instituto de Ingenieria, UNAM.
- Pisano, A. y E. Usai (2007). Globally convergent real-time differentiation via second order sliding modes. *International Journal of Systems Science* Vol. 38 No. 10, 833844.
- Polyakov, A. y A. Poznyak (2009, August). *Reaching time estimation for super-twisting*. IEEE Transactions on Automatic Control 54 (8), 1951–1955.
- Poznyak, A. S. (2007). *ADVANCED MATHEMATICAL TOOLS FOR AUTOMATIC CONTROL ENGINEERS*, vol. 1: Deterministic Techniques. Elsevier Science.
- Rabiner, L. y K. Steiglitz (1970). The design of wide-band recursive and nonrecursive digital differentiators. en *IEEE Trans. Audio Electroacoust.*, vol. vol. 18, pp. 204–209.
- Utkin, V. (1992). *Sliding Modes in Control and Optimization*. Berlin, Springer-Verlag.
- Xiong, Y. y M. Saif (2001). Sliding mode observer for nonlinear uncertain systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 46 (12), 2012–2017.
- Yu, S. (2005). *Continuous finite-time control for robotic manipulators with terminal sliding mode*. Automatica vol. 41, 1957–1964.