



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE
MEXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN
INGENIERIA

FACULTAD DE INGENIERIA

**ANALISIS EXPERIMENTAL DE FLUJO A
SUPERFICIE LIBRE EN LA UNION DE DOS CANALES**

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE

MAESTRO EN INGENIERIA

INGENIERIA CIVIL – HIDRAULICA

P R E S E N T A :

MARIO ALFREDO GARCIA HERNANDEZ

TUTOR:

DR. OSCAR ARTURO FUENTES MARILES



2010

JURADO ASIGNADO:

Presidente: **DR. DOMÍNGUEZ MORA RAMÓN**

Secretario: **DR. GARCÍA SÁNCHEZ JESÚS**

Vocal: **DR. FUENTES MARILES OSCAR**

1er. Suplente: **DR. ESCALANTE SANDOVAL CARLOS**

2do. Suplente: **M.I. FRANCO VÍCTOR**

Lugar donde se realizó la tesis:

UNIDAD DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM, MÉXICO

TUTOR DE TESIS:

DR. OSCAR ARTURO FUENTES MARILES

FIRMA

Para Lorena

Agradecimientos

Un agradecimiento especial al Dr. Óscar A. Fuentes Mariles, así como a las instituciones que me brindaron su apoyo y confianza, la Universidad Nacional Autónoma de México, el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología y el Instituto de Ingeniería de la UNAM.

ANALISIS EXPERIMENTAL DE FLUJO A SUPERFICIE LIBRE EN LA UNION DE DOS CANALES

CONTENIDO

1.	Antecedentes	1
1.1.	Introducción	1
1.2.	Objetivo	5
1.3.	Justificación	5
1.4.	Descripción del trabajo	6
2.	Flujo a superficie libre en un canal	7
2.1.	Flujo en canales abiertos y su clasificación	7
2.2.	Ecuaciones del flujo unidimensional permanente	8
2.2.1.	Ecuación de conservación de la masa o de continuidad	8
2.2.1.1.	Distribución de la velocidad en la sección	9
2.2.2.	Ecuación de conservación de la energía	11
2.2.3.	Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento	12
2.2.3.1.	Principio de la cantidad de movimiento específica	13
3.	Flujo a superficie libre en la unión de dos canales	17
3.1.	Red abierta de canales	17
3.2.	Investigaciones del flujo a superficie libre en la unión de dos canales	19
3.3.	Zona de separación	21
3.4.	Modelos de unión de canales	22
3.4.1.	Modelos matemáticos de Gurram y Hsu	22
3.4.2.	Modelo matemático propuesto	24
4.	Dispositivo físico	31
4.1.	Características del dispositivo físico	31
4.2.	Variables de prueba	32
4.3.	Equipo de medición	35
4.4.	Procedimiento de prueba y resultados	36
5.	Modelo matemático	49
5.1.	Características del modelo matemático	49
5.2.	Aplicación del modelo matemático	50
5.3.	Resumen de resultados	51
6.	Análisis de resultados del dispositivo físico y del modelo matemático	61

7. Conclusiones y recomendaciones	63
7.1. Conclusiones	63
7.2. Recomendaciones	64
Anexo A. Resumen de perfiles de flujo calculados como Flujo Gradualmente Variado	65
Anexo B. Resumen de perfiles de flujo calculados con el método matemático propuesto	68
Referencias	71

1. Antecedentes

1.1. Introducción

Una red de canales abierta consiste en un canal principal al que se le unen varios canales. Las redes de canales se forman en los sistemas de alcantarillado, los sistemas de irrigación y drenaje, en ríos que confluyen o se bifurcan, entre otros.

Algunos ejemplos de unión de ríos y canales se presentan en las figuras 1.1 y 1.2. En ellas se muestra la unión del río el Carrizal y el río Grijalva, al noreste de la ciudad de Villahermosa, donde es posible observar en los ríos un ángulo de unión de 35° aproximadamente.



Fig. 1.1. Unión del río El Carrizal y el río Grijalva, Tabasco, México. (earth.google.es)



Fig. 1.2. Unión del río El Carrizal y el río Grijalva, Tabasco, México.

La figura 1.3 muestra las uniones entre los ríos Mezcalapa y Grijalva, y entre Mezcalapa y Pichucalco, al sureste de la ciudad de Villahermosa, con diferentes ángulos de unión.



Fig. 1.3. Unión del río Mezcalapa y el río Grijalva, Tabasco, México. (earth.google.es)

En la figura 1.4 se muestra la unión entre el río Caroní y el río Orinoco, en la Ciudad Guayana en Venezuela, se observa en la figura 1.5 una imagen de la unión de estos con la característica de que el río Caroní presenta un color oscuro, probablemente a causa del arrastre de sedimento.

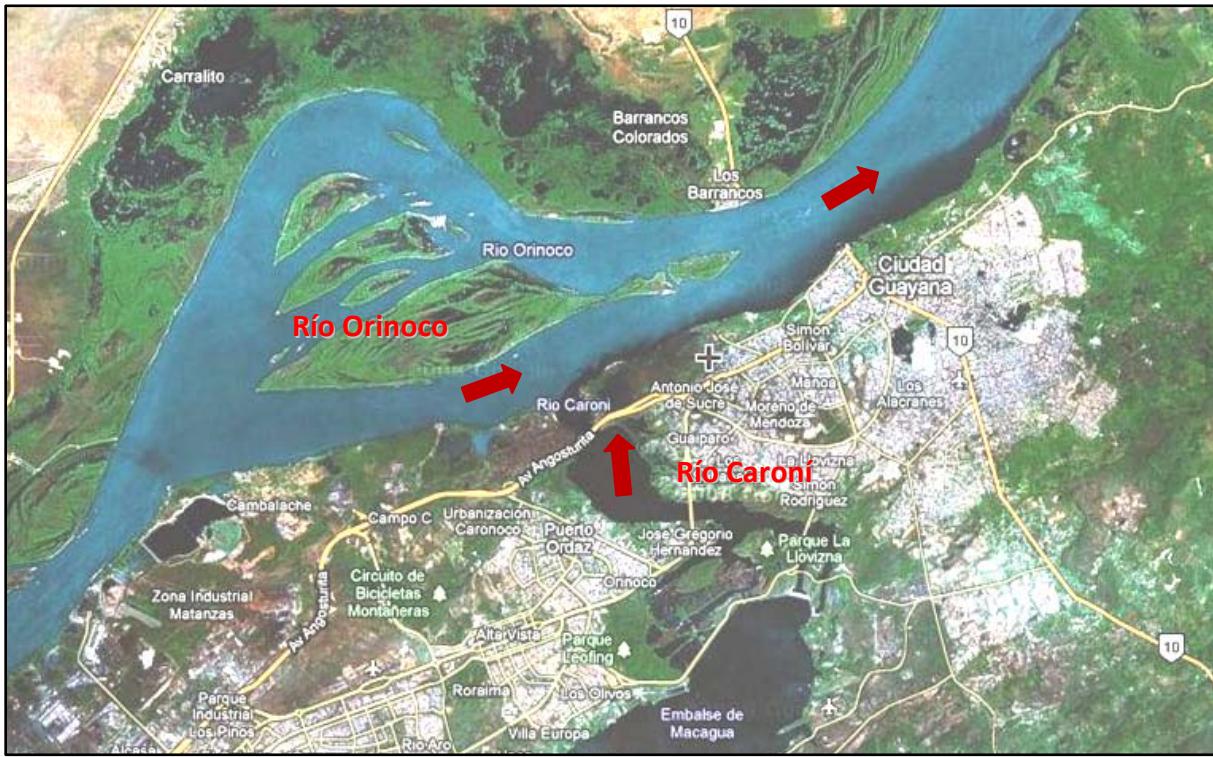


Fig. 1.4. Unión del río Caroní y el río Orinoco, Ciudad Guayana, Venezuela. (earth.google.es)



Fig. 1.5. Unión del río Caroní y el río Orinoco, Bolívar, Venezuela.



Fig. 1.6. Río Guaire, Caracas, Venezuela.



Fig. 1.7. Unión del río Rosas y el río Tula, Hidalgo, México.

Como se observa en las figuras anteriores, es común que en la unión de dos canales, el canal principal sea de mayor caudal y sección transversal que el canal que se conecta con él, por lo que esta característica se toma en cuenta en este trabajo.

En el estudio de la unión de flujo en canales existen diversos factores que condicionan el sistema de variables se puede describir como variables geométricas, tales como el tamaño, la forma, la pendiente y el ángulo entre los canales que se unen. Un segundo sistema de variables son de flujo, tales como el número de Froude del flujo aguas abajo, la rugosidad del canal, la relación de gasto entre los dos canales tributarios y la variación de las características del fluido.

La existencia de una unión presenta dificultades en el cálculo del flujo en el sistema porque generalmente no considera las condiciones internas del flujo en la zona de la unión. Sin embargo, existen algunos modelos matemáticos desarrollados en los últimos años que toman en cuenta esas condiciones por medio del principio la cantidad de movimiento específica.

El contenido de este trabajo está organizado de la siguiente manera: el capítulo 1 corresponde a los antecedentes, el objetivo, la justificación y descripción del trabajo; el capítulo 2 presenta el concepto y clasificación de flujo en canales abiertos, las ecuaciones fundamentales del flujo unidimensional permanente y la distribución de la velocidad en la sección de un canal; en el capítulo 3 se describen algunas investigaciones referentes al tema de unión de flujo de dos canales a superficie libre y un modelo matemático desarrollado para la unión de dos canales de secciones rectangulares diferentes, para flujo permanente en régimen subcrítico; en el capítulo 4 se presenta las características, variables, equipo, desarrollo y resumen de resultados del dispositivo físico; en el capítulo 5 se tratan las características, aplicación y resumen de resultados del modelo matemático; en el capítulo 6 se hace un análisis entre los resultados del dispositivo físico y el modelo matemático; y finalmente el capítulo 7 se incluyen las conclusiones y recomendaciones.

1.2. Objetivo

Analizar experimentalmente el flujo a superficie libre en la unión de dos canales y comparar con los resultados experimentales con los del modelo matemático propuesto para tal fin.

1.3. Justificación

El estudio de flujo a superficie libre en la unión de dos canales es de gran importancia en el cálculo hidráulico de las redes de canales que se presentan en numerosas obras hidráulicas.

Se muestra que el cálculo del tirante que existe en las uniones de los canales no debe hacerse con la ecuación de conservación de la energía, sino con la ecuación de conservación de cantidad de movimiento.

1.4. Descripción del trabajo

El trabajo consiste en proponer un dispositivo experimental para analizar el flujo a superficie libre en la unión de dos canales y proponer un modelo matemático para flujo unidimensional permanente en régimen subcrítico y comparar los resultados obtenidos entre el análisis experimental y el cálculo matemático.

El dispositivo, fabricado en el Instituto de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México e instalado en el laboratorio de Hidráulica de la Unidad de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la misma Universidad, está constituido por: un canal principal de 2.40 metros de longitud y sección rectangular de 30 cm de ancho, un canal tributario de 0.80 metros de longitud y sección rectangular de 20 cm de ancho, ambos canales fabricados con acrílico e instalados con pendientes de 0.00083 ($\delta \approx 0.0475^\circ$).

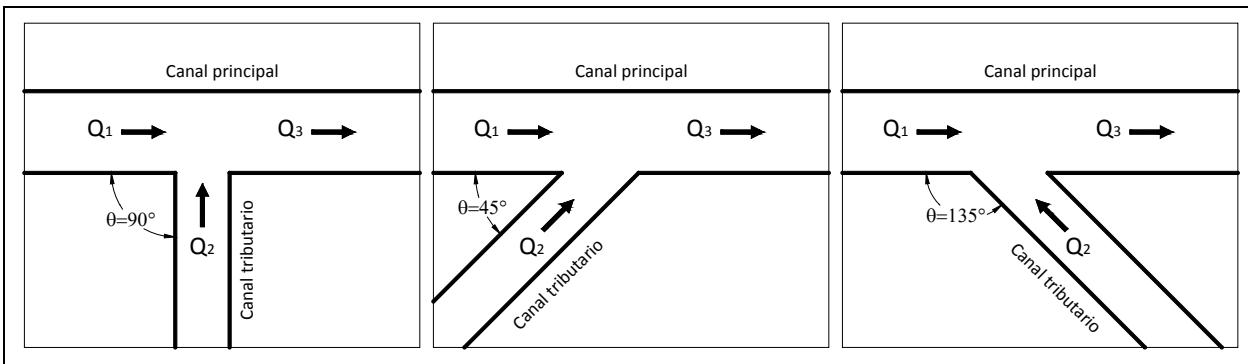


Fig. 1.8. Dispositivos con diferentes ángulos unión de canales.

Las pruebas se realizaron para ángulos de unión entre el canal tributario y el canal principal de 90°, 45° y 135°, tres diferentes gastos en el canal principal 4.0, 2.7 y 1.3 l/s, mientras el gasto en el canal tributario se conservó en 1.3 l/s, con un total de 9 pruebas. Ver figura 1.8.

Por otra parte, se desarrolló un modelo matemático basado en el principio de la cantidad de movimiento específica, para las condiciones del dispositivo físico mencionadas con ciertas consideraciones.

El modelo matemático se aplicó a las 9 condiciones de prueba, con estos resultados se comparan con los del estudio experimental.

2. Flujo a superficie libre en un canal

2.1. Flujo en un canal y su clasificación

El flujo en un canal se produce principalmente por la acción de la fuerza de gravedad y se caracteriza porque expone una superficie libre a la presión atmosférica.

Las fuerzas que actúan en el movimiento del agua a superficie libre, son:

- Fuerza de gravedad, como la más importante en el movimiento.
- Fuerza de resistencia ocasionada en las fronteras rígidas por la fricción y la naturaleza casi siempre turbulenta del flujo.
- Fuerza producida por la presión que se ejerce sobre las fronteras del canal, particularmente en las zonas donde cambia de geometría.
- Fuerza debida a la viscosidad del líquido.
- Fuerza de tensión superficial.
- Fuerzas ocasionales debidas al movimiento del sedimento arrastrado.

Los canales se clasifican de acuerdo a su origen en: naturales y artificiales.

Los canales naturales o ríos, son producidos por el movimiento del agua al paso de los siglos. Su perfil longitudinal es sinuoso, su sección transversal es irregular, tienen forma y dimensiones que varían continuamente a lo largo del mismo y con el tiempo.

Los canales artificiales, por lo general presentan secciones geométricas de forma y dimensiones constantes en tramos más o menos largos.

El flujo en canales abiertos se clasifica de acuerdo diferentes criterios, como: su comportamiento en el tiempo, a la forma como se mueve en el espacio, sus cambios en el espacio, a los efectos viscosos, a su vorticidad y a los efectos de las fuerzas gravitatorias.

- a. El tiempo
 - *Flujo permanente*, sucede cuando la profundidad del flujo no cambia o puede suponerse constante durante el intervalo de tiempo en consideración.
 - *Flujo no permanente*, sucede cuando la profundidad cambia con el tiempo.
- b. El esfuerzo
 - *Flujo uniforme*, se presenta cuando la velocidad media permanece constante en cualquier sección del canal.
 - *Flujo variado*, se presenta cuando la velocidad media cambia en las secciones a lo largo del canal. A la vez se clasifica en: flujo gradualmente variado, flujo rápidamente variado, y flujo espacialmente variado.
- c. El espacio
 - *Flujo unidimensional*, cuando las características del flujo varían como una función de una coordenada curvilínea en el espacio.
 - *Flujo bidimensional*, cuando las características del flujo son idénticas sobre una familia de planos paralelos.
 - *Flujo tridimensional*, cuando las características del flujo varían en cualquier dirección del espacio.
- d. Efectos viscosos
 - *Flujo laminar*, cuando las fuerzas viscosas predominan sobre las de inercia.
 - *Flujo turbulento*, cuando las fuerzas de inercia predominan sobre las fuerzas viscosas.
- e. Vorticidad
 - *Flujo irrotacional*, se presenta cuando las partículas del flujo que los constituyen se desplazan sin rotar.
 - *Flujo rotacional*, se presenta cuando las partículas del flujo que los constituyen se desplazan rotando o girando sobre sí mismas.
- f. Fuerzas gravitatorias
 - *Flujo subcrítico*, ocurre cuando las fuerzas gravitatorias son mayores a las de inercia.
 - *Flujo crítico*, ocurre cuando las fuerzas de inercia y gravitatorias son iguales.
 - *Flujo supercrítico*, ocurre cuando las fuerzas inercia son mayores a las gravitatorias.

2.2. Ecuaciones del flujo unidimensional permanente

2.2.1. Ecuación de conservación de masa o de continuidad

El flujo de agua a través de la sección de un canal es $\rho V A$, donde ρ es la densidad del líquido, V la velocidad media en la sección y A su área hidráulica. Cuando el flujo sigue la dirección del eje del canal según la coordenada curvilínea x sobre el fondo (figura 2.1), y no hay aportaciones y salidas de líquido en el trayecto, la forma matemática de la ecuación de continuidad para el flujo unidimensional permanente en toda su longitud es:

$$\frac{\partial(\rho V A)}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

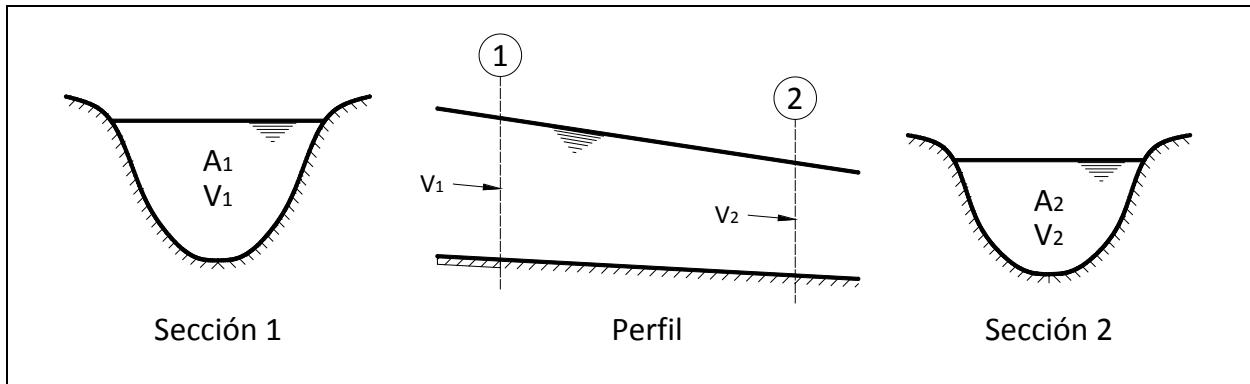


Fig. 2.1. Sección de control de flujo a superficie libre en un canal.

Es decir, el flujo de masa no cambia al variar x . En un flujo a superficie libre ρ es constante (incompresible) y se puede eliminar de la ecuación anterior, por lo que se tiene

$$\frac{\partial(VA)}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

Al integrar entre dos secciones 1 y 2 que limitan al volumen de control de la figura 2.1, resulta

$$V_1 A_1 = V_2 A_2 = C \quad (2.3)$$

donde C es una constante. Es decir, el gasto $Q=VA$ se mantiene constante a lo largo del canal.

2.2.1.1. Distribución de la velocidad en la sección

La presencia de la superficie libre, la forma y cambios de la sección, la rugosidad de las paredes, el gasto y la acción de corrientes secundarias en tramos curvos afectan la distribución de la velocidad en la sección.

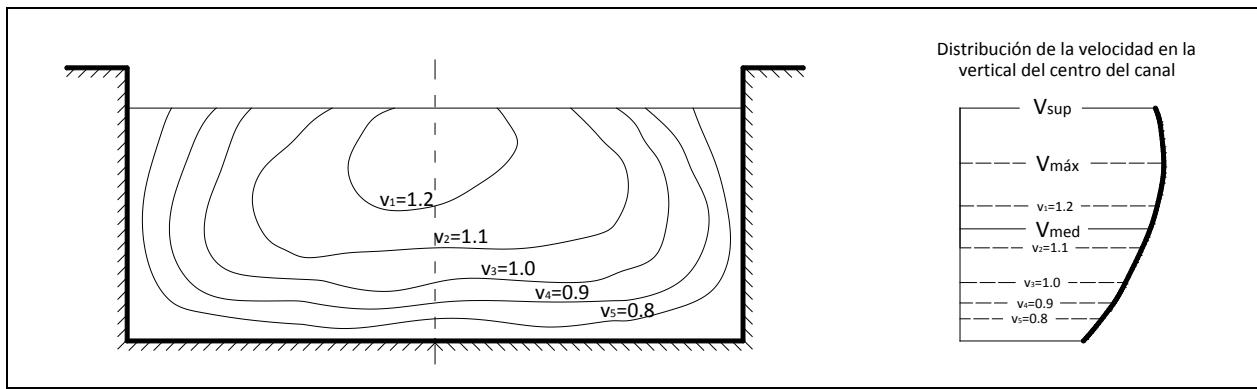


Fig. 2.2. Distribución de la velocidad en un canal rectangular.

En la figura 2.2 se muestra un modelo general de distribución de la velocidad en la sección de un canal rectangular. Se observa que en el fondo y paredes del canal la velocidad es mínima, mientras que la velocidad máxima se ubica ligeramente debajo de la superficie.

Como la distribución de la velocidad en una sección de canal no es uniforme y como en el cálculo de la energía se utiliza la velocidad media, esta debe corregirse mediante un factor llamado coeficiente de Coriolis y se calcula como

$$\alpha = \frac{1}{A} \iint_A \left[\frac{v}{V} \right]^3 dA \cong \frac{1}{AV^3} \sum_{i=1}^n v_i^3 \Delta A_i \quad (2.16)$$

Para aplicar esta ecuación es necesario conocer los valores medidos de la velocidad en diferentes puntos de la sección transversal.

De manera semejante ocurre con la velocidad media empleada en la ecuación del impulso y cantidad de movimiento, donde se aplica un factor de corrección de velocidad llamado coeficiente de Boussinesq y se obtiene con la expresión

$$\beta = \frac{1}{A} \iint_A \left[\frac{v}{V} \right]^2 dA \cong \frac{1}{AV^2} \sum_{i=1}^n v_i^2 \Delta A_i \quad (2.17)$$

donde A es el área total de la sección, V es la velocidad media en toda la sección ($V=Q/A$), ΔA_i es el área de la subsección i , v_i es la velocidad media de la subsección i , y n el número de subsecciones.

Ambos coeficientes se relacionan con la ecuación

$$\beta \cong 1 + \frac{\alpha - 1}{3} \quad (2.18)$$

Algunos valores de α y β se presentan a continuación

Tabla 2.1. Coeficientes α y β en canales, Chow (2004).

Canal	α	β
Canales rectangulares, canaletas y vertederos	1.10 – 1.20	1.03 – 1.07
Corrientes naturales y torrentes	1.15 – 1.50	1.10 – 1.17
Ríos bajo cubiertas de hielo	1.20 – 2.00	1.17 – 1.33
Valles de ríos, inundados	1.50 – 2.00	1.25 – 1.33

2.2.2. Ecuación de conservación de la energía

La energía total del agua en cualquier línea de corriente que pasa a través de una sección de canal puede expresarse como la altura total en metros de agua, que es igual a la suma de la elevación por encima del nivel de referencia, la carga de presión y carga de velocidad.

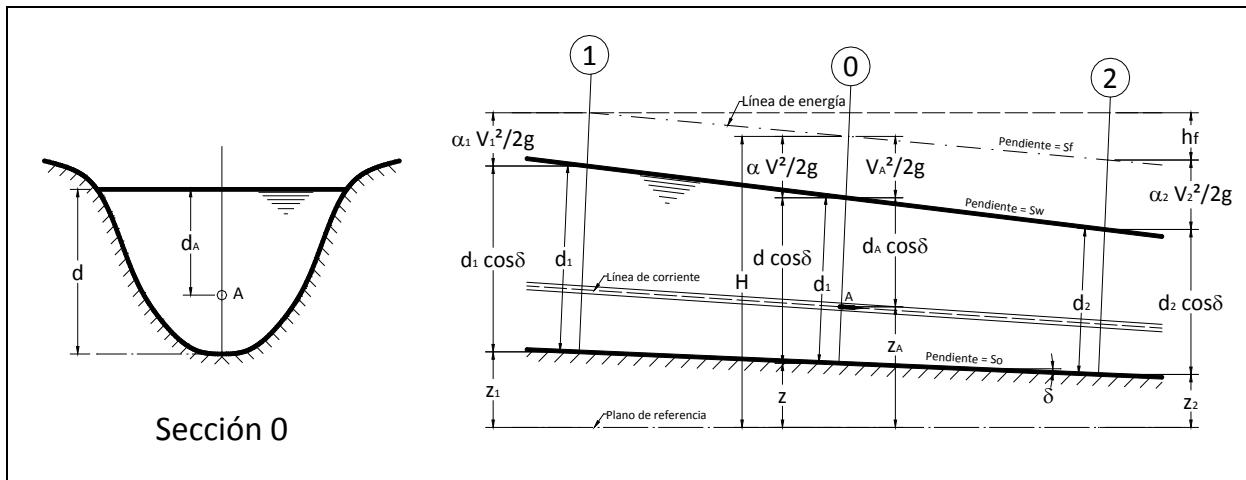


Fig. 2.3. Energía de un flujo gradualmente variado en canal abierto.

Para un plano de referencia, la carga total H de una sección 0 que contiene al punto A en una línea de corriente del flujo de un canal de pendiente alta (fig. 2.3), puede escribirse como

$$H = z_A + d_A \cos\delta + \alpha \frac{V_A^2}{2g} \quad (2.4)$$

donde z_A es la elevación del punto A por encima del plano de referencia, d_A es la profundidad del punto A por debajo de la superficie del agua medida a lo largo de la sección del canal, δ es el ángulo de la pendiente del fondo del canal, $V_A^2/2g$ es la carga de velocidad del flujo en la línea de corriente que pasa a través de A y α es el coeficiente de corrección de velocidad.

En general, cada línea de corriente que pasa a través de una sección de canal tendrá una carga de velocidad diferente, debido a la distribución no uniforme de velocidades en flujos reales. Solo en un flujo paralelo ideal con distribución uniforme de velocidades, la carga de velocidad puede ser idéntica para todos los puntos de la sección transversal. Para fines prácticos, puede proponerse que las cargas de velocidad para todos los puntos de la sección del canal son iguales y evitar considerar la distribución no uniforme de velocidades, para ello se puede utilizar el coeficiente de energía para corregir ese efecto. La energía total en la sección 0 del canal es

$$H = z + d\cos\delta + \alpha \frac{V^2}{2g} \quad (2.5)$$

Para canales donde el ángulo δ es pequeño ($\delta \leq 8^\circ$), se cumple que $\cos\delta \approx 1$, por lo tanto la ecuación anterior queda como

$$H = z + y + \alpha \frac{V^2}{2g} \quad (2.6)$$

La forma matemática del principio de la energía para flujo unidimensional permanente e incompresible se establece de la forma

$$\frac{d}{dx} \left(z + y + \alpha \frac{V^2}{2g} \right) = - \frac{dh_f}{dx} \quad (2.7)$$

Donde h_f corresponde a la perdida de energía. Integrando la ecuación anterior entre dos secciones 1 y 2 del volumen de control de la figura 2.2, se obtiene

$$z_1 + y_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + y_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + h_f \quad (2.8)$$

2.2.3. Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

La segunda ley de Newton señala que el cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz ejercida y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual aquella fuerza se ejerce.

En términos matemáticos esta ley se expresa mediante la relación:

$$\bar{F} = m \frac{d\bar{V}}{dt} \quad (2.9)$$

$$\bar{F} dt = m d\bar{V} \quad (2.10)$$

El primer término se le llama impulso y el segundo cantidad de movimiento. La ley del impulso y cantidad de movimiento expresa por la ecuación anterior indica que ambos términos deben ser iguales cuando se refieren a una partícula.

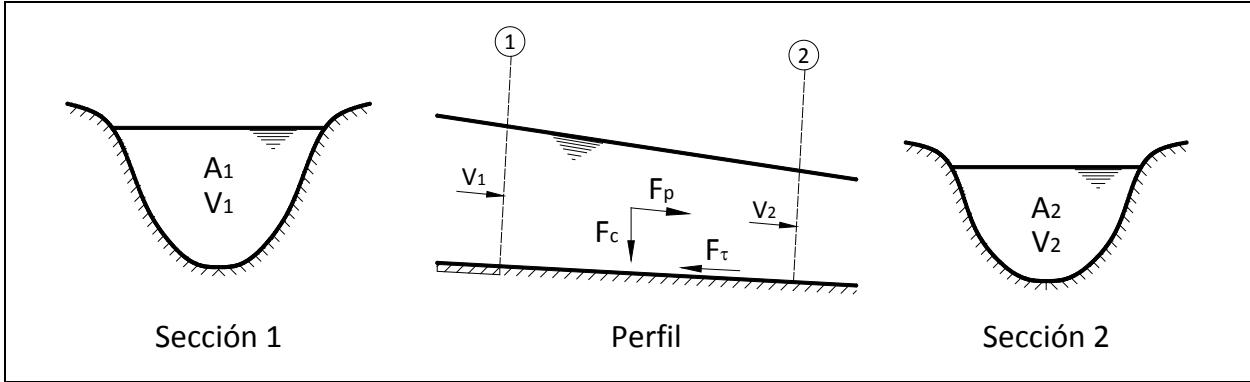


Fig. 2.4. Fuerzas que actúan en el volumen de control de un canal.

Si se considera el volumen de control limitado por las secciones 1 y 2, las paredes y la superficie libre de un flujo unidimensional permanente e incompresible (figura 2.4), donde el gasto es constante en toda la longitud. La masa que fluye por cualquier sección en un tiempo Δt , es

$$m = \rho Q \Delta t \quad (2.11)$$

$$\bar{F} = \rho Q d\bar{V} \quad (2.12)$$

La ecuación del impulso y cantidad de movimiento es

$$\sum \bar{F} = \dot{m}(\bar{V}_2 - \bar{V}_1) \quad (2.13)$$

$$\bar{F}_p + \bar{F}_t + \bar{F}_c = \dot{m}(\bar{V}_2 - \bar{V}_1) \quad (2.14)$$

$$\bar{F}_p + \bar{F}_t + \bar{F}_c = \rho Q \beta_2 \bar{V}_2 - \rho Q \beta_1 \bar{V}_1 \quad (2.15)$$

donde \bar{F}_p es la fuerza resultante de la presión, \bar{F}_t es la fuerza resultante producida por el esfuerzo tangencial generado sobre el fondo y paredes del volumen de control, \bar{F}_c es la fuerza de cuerpo debida al peso del volumen de control, $\dot{m} = \rho Q$ es el flujo másico, \bar{V}_1 es el vector de velocidad media en la entrada y \bar{V}_2 es el vector de velocidad media en la salida al volumen de control. Además del signo según la dirección y sentido de \bar{V} , se considera en cada término un signo, positivo cuando el gasto Q sale y negativo cuando entra al volumen de control.

2.2.3.1. Principio de cantidad de movimiento específica

Cuando el principio del impulso y cantidad de movimiento se expresa en una forma más adecuada para el análisis del flujo a superficie libre, se conoce como *principio de cantidad de movimiento específica o momentum*.

Las fuerzas debidas a la presión sobre las secciones 1 y 2 (ver figura 2.5), son

$$P_1 = g\rho y'_{G_1} A_1 \cos\delta \quad (2.19)$$

$$P_2 = g\rho y'_{G_2} A_2 \cos\delta \quad (2.20)$$

La primera en la dirección del flujo y la segunda en dirección opuesta. Y la fuerza resultante debida a la presión es

$$F_p = g\rho (y'_{G_1} A_1 \cos\delta - y'_{G_2} A_2 \cos\delta) \quad (2.21)$$

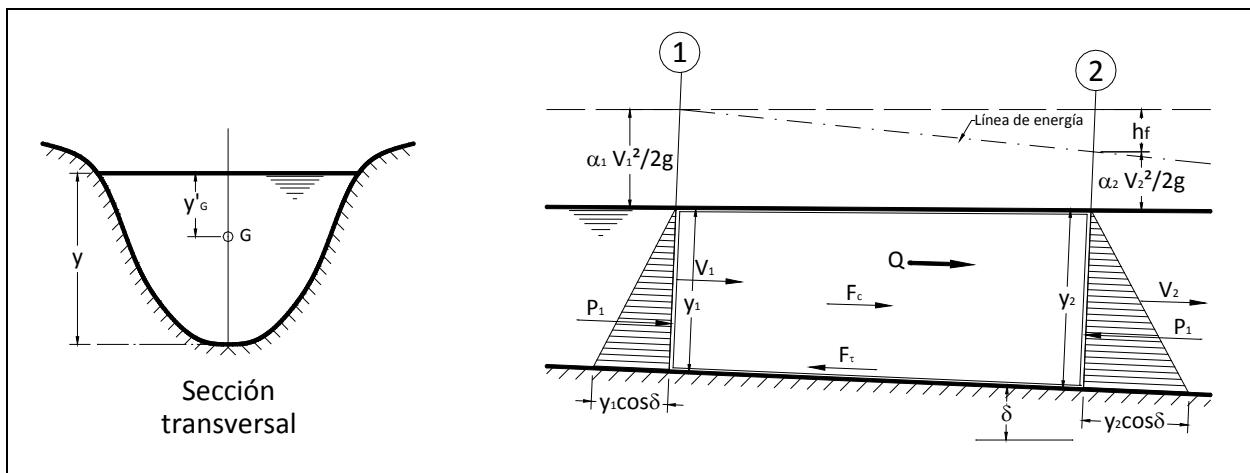


Fig. 2.5. Tramo de un canal para derivar el principio de la cantidad de movimiento.

Entre las dos secciones hay una fuerza de fricción F_t en dirección contraria al movimiento y un componente F_c del peso del agua contenida en el volumen de control en la misma dirección del movimiento.

Al aplicar la ecuación del impulso y cantidad de movimiento en la dirección del flujo, se tiene

$$\sum F = \dot{m}(V_2 - V_1) \quad (2.22)$$

$$F_p + F_t + F_c = \dot{m}(V_2 - V_1) \quad (2.23)$$

$$F_p + F_t + F_c = \rho Q (\beta_2 V_2 - \beta_1 V_1) \quad (2.24)$$

Al sustituir F_p y dividir por $g\rho$, resulta

$$(y'_{G_1}A_1\cos\delta - y'_{G_2}A_2\cos\delta) + \frac{1}{g\rho}(F_\tau + F_c) = \frac{1}{g}Q(\beta_2V_2 - \beta_1V_1) \quad (2.25)$$

De la ecuación de continuidad, $V_1=Q/A_1$, $V_2=Q/A_2$, de modo que

$$(y'_{G_1}A_1\cos\delta - y'_{G_2}A_2\cos\delta) + \frac{1}{g\rho}(F_\tau + F_c) = \frac{1}{g}Q\left(\beta_2\frac{Q}{A_2} - \beta_1\frac{Q}{A_1}\right) \quad (2.26)$$

Agrupando

$$\frac{F_\tau + F_c}{g\rho} = \left(\frac{\beta_2 Q^2}{g A_2} + y'_{G_2}A_2\cos\delta\right) - \left(\frac{\beta_1 Q^2}{g A_1} + y'_{G_1}A_1\cos\delta\right) \quad (2.27)$$

Considerando la resultante de las fueras de resistencia y de cuerpo, como

$$F_R = F_\tau + F_c \quad (2.28)$$

entonces

$$\frac{F_R}{g\rho} = \left(\frac{\beta_2 Q^2}{g A_2} + y'_{G_2}A_2\cos\delta\right) - \left(\frac{\beta_1 Q^2}{g A_1} + y'_{G_1}A_1\cos\delta\right) \quad (2.29)$$

Esta ecuación expresa el principio llamado de cantidad de movimiento específica, de manera más sencilla se escribe de la forma

$$\frac{F_R}{g\rho} = \frac{F_R}{\gamma} = M_2 - M_1 \quad (2.30)$$

Donde la función de cantidad de movimiento específica es

$$M = \frac{\beta Q^2}{g A} + y'_{G}A\cos\delta \quad (2.31)$$

Compuesta de dos términos, el primero es la cantidad de movimiento del flujo a través de una sección del canal, y el segundo es el empuje debido a la presión sobre el área de la sección.

3. Flujo unidimensional en la unión de dos canales

3.1. Red abierta de canales

En la red de canales abierta como el que se muestra en la figura 3.1, se puede aplicar el flujo gradualmente variado para el cálculo hidráulico. Cuando el flujo en la red es en régimen subcrítico, primero se calcula el perfil en el canal C (canal aguas abajo) y se procede en la dirección hacia aguas arriba. Los cálculos se realizan para cada canal individualmente. En la confluencia de canales donde dos o más canales se unen, se satisface la *ecuación de la continuidad*, para el flujo constante.

$$Q_C = Q_A + Q_B \quad (3.1)$$

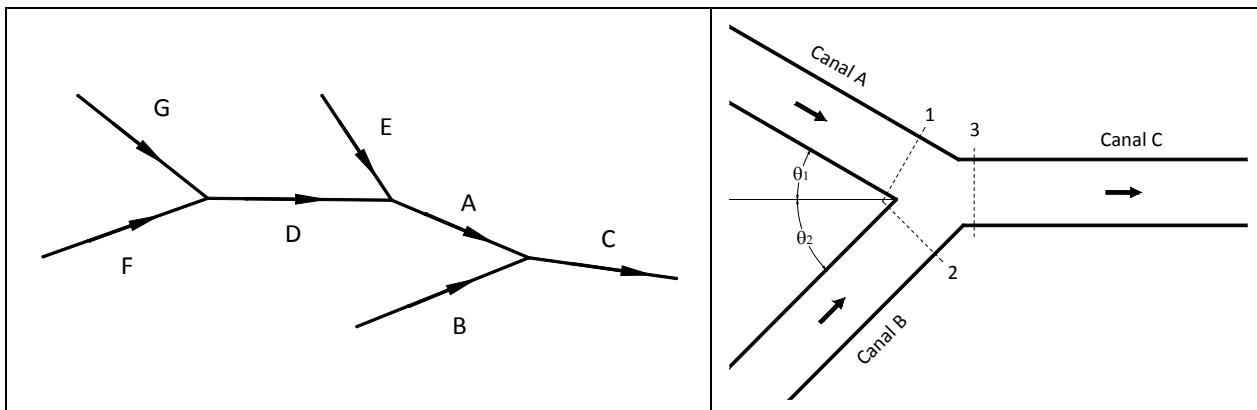


Fig. 3.1. Red de canales abierta (Akan, 2006).

Fig. 3.2. Unión de canales (Akan, 2006).

También es posible utilizar cualquier ecuación de la energía o del impulso y cantidad de movimiento en la unión. La figura 3.2 presenta un esquema de donde se unen tres canales. La sección 3 representa la sección aguas arriba del canal C, y las secciones 1 y 2, representan las secciones aguas abajo de los canales A y B, respectivamente. Entonces la ecuación de energía entre las secciones 1 y 3 se puede escribir como:

$$z_{b1} + y_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_{b3} + y_3 + \alpha_3 \frac{V_3^2}{2g} + h_f + h_l \quad (3.2)$$

Donde h_f es la pérdida de energía por fricción y se calcula usando la ecuación de Manning, como

$$h_f = \frac{1}{2} \left(\frac{V_1^2 n_1^2}{R_1^{4/3}} + \frac{V_3^2 n_3^2}{R_3^{4/3}} \right) L_{13} \quad (3.3)$$

Y h_l es la pérdida local debido a la unión. Esta pérdida es evaluada usando

$$h_l = k_l \left| \frac{V_1^2}{2g} - \frac{V_3^2}{2g} \right| \quad (3.4)$$

Por lo que la *ecuación de la energía* resulta

$$z_{b1} + y_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_{b3} + y_3 + \alpha_3 \frac{V_3^2}{2g} + \frac{1}{2} \left(\frac{V_1^2 n_1^2}{R_1^{4/3}} + \frac{V_3^2 n_3^2}{R_3^{4/3}} \right) L_{13} + k_l \left| \frac{V_1^2}{2g} - \frac{V_3^2}{2g} \right| \quad (3.5)$$

El coeficiente de pérdida por la unión, k_l tiene generalmente valor de entre 0 y 1, aunque este coeficiente es muy difícil de determinar.

Cuando se desconoce la perdida de energía es conveniente utilizar el *principio de cantidad de movimiento específica*, donde el balance de cantidad de movimiento específica para la unión se puede escribir como

$$M_1 + M_2 = M_3 \quad (3.6)$$

$$\left(\frac{\beta_1 Q_1^2}{g A_1} + y'_G A_1 \right) \cos \theta_1 + \left(\frac{\beta_2 Q_2^2}{g A_2} + y'_G A_2 \right) \cos \theta_2 = \left(\frac{\beta_3 Q_3^2}{g A_3} + y'_G A_3 \right) \quad (3.7)$$

donde M denota la cantidad de movimiento específica, θ_1 es el ángulo entre las direcciones de flujo de los canales A y C, y θ_2 es el ángulo entre las direcciones de flujo de los canales B y C, y'_G es la distancia de la superficie del agua al centroide de la sección.

Cuando se conoce y_3 y Q_3 en el canal C, se puede aplicar la ecuación de la energía o el principio de cantidad de movimiento específica para determinar el tirante en la sección 1 que será la condición límite aguas abajo del canal A, posteriormente se calcula como flujo gradualmente variado en dirección aguas arriba para conocer el perfil de flujo. Para el canal B, se obtiene el tirante en la sección 2 de la misma forma.

Sin embargo, con este procedimiento de cálculo se desprecian las condiciones internas del flujo en la unión de canales, que son necesarias tomar en cuenta. Como se verá en el capítulo 6, el tirante en la sección 1 es mayor que el calculado con las ecuaciones anteriores.

3.2. Investigaciones del flujo a superficie libre en la unión de dos canales

Las investigaciones del flujo a superficie libre en la unión de dos canales abiertos se basan en la experimentación, y en la aplicación de la ecuación de continuidad y el principio de cantidad de movimiento específica.

Taylor (Sotelo, 1990) presentó el primer estudio en 1944, para flujo en régimen subcrítico y específicamente el caso mostrado en la figura 3.1, con canales del mismo ancho y horizontales.

Taylor consideró, para el estudio teórico, que la velocidad se distribuye uniformemente en los canales antes y después de la unión, que la fuerza de fricción es despreciable en comparación con otras fuerzas y que los tirantes en los canales 1 y 2 son iguales.

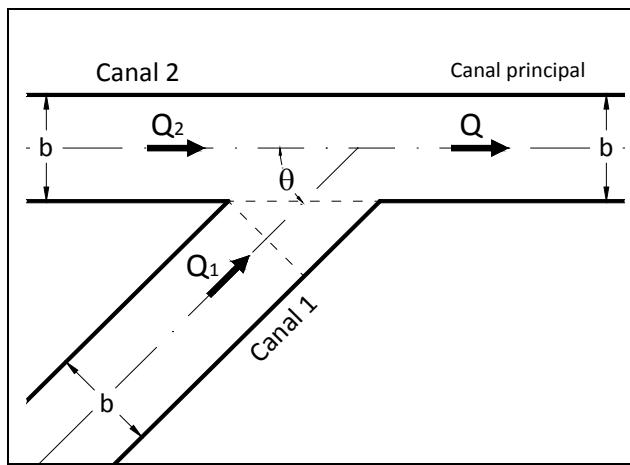


Fig. 3.1. Unión de canales estudiado por Taylor.

Con la aplicación de la ecuación del impulso y cantidad de movimiento a la unión, para la componente en la dirección del canal 2 al principal, Taylor obtuvo la ecuación siguiente

$$k_2 = \frac{n_q^2(n_y^2 - 1)}{4n_y^2[2n_q - n_q^2(1 + \cos\theta) + n_y - 1]} \quad (3.8)$$

Donde $k_2 = V_2^2/2g$ y y_2 , $n_q = Q_2/Q$, $n_y = y_a/y_b$, V_2 es la velocidad en el canal 2, y_2 el tirante en el canal 2, y_a el tirante antes de la unión, y_b después de la unión y θ el ángulo entre los canales secundarios.

La ecuación anterior fue verificada experimentalmente para uniones con $\theta = 45^\circ$ y 135° , donde la correlación entre la teoría y el experimento fue buena para $\theta = 45^\circ$, no así para $\theta = 135^\circ$. Esto probablemente se debió a la distorsión en la distribución de velocidades después de la unión y a que el flujo no permanecía paralelo a las paredes del canal.

Best y Reid (1984) analizaron de forma experimental la geometría de la zona de la separación en una unión simple de canales abiertos (figura 3.2), con número de Froude aguas abajo de la unión menor de 0.3.

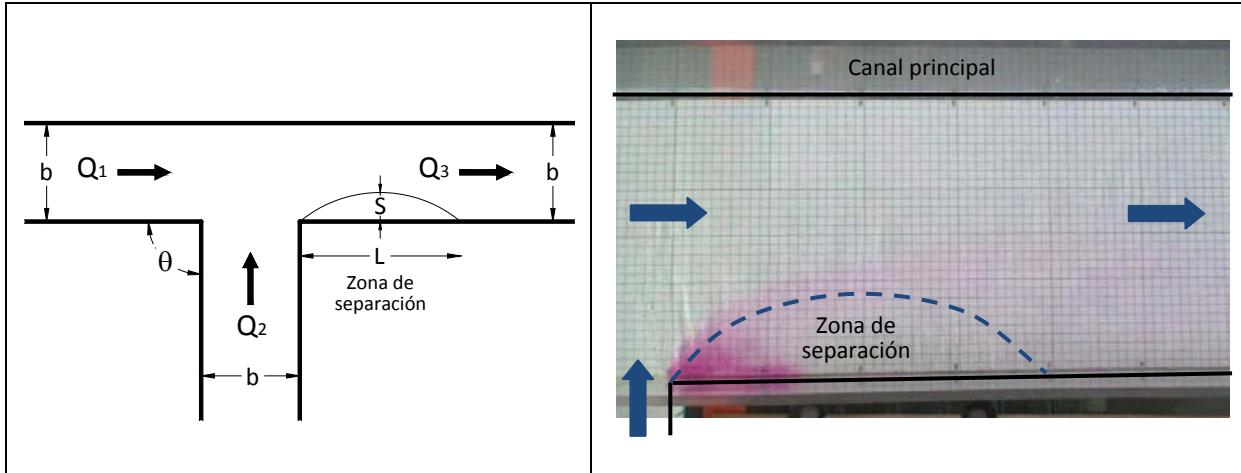


Fig. 3.2. Zona de separación estudiada por Best y Reid.

Fig. 3.3. Zona de separación observada experimentalmente en el presente estudio.

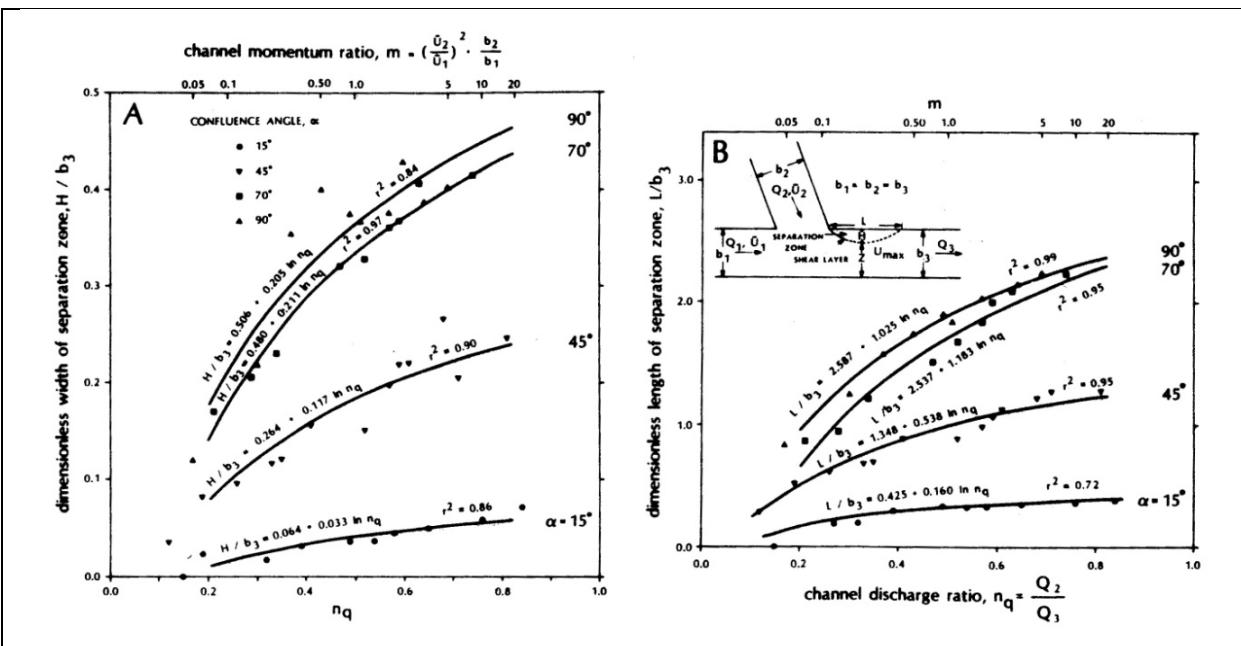


Fig. 3.4. A) Relación entre ancho máximo de la zona de separación, H/b_3 , y la relación de gasto del canal lateral y del canal principal aguas abajo de la unión, $n_q = Q_2/Q_3$; B) Relación entre la longitud de la zona de separación, L/b_3 , y $n_q = Q_2/Q_3$, para uniones de 15° , 45° , 70° y 90° (Best y Reid, 1984).

Los resultados incluye los datos de la longitud y el ancho máximo de la zona de la separación, donde ambos incrementan el valor con el aumento en el ángulo de unión y con la relación de gasto del canal lateral o tributario y el canal principal $n_q=Q_2/Q_3$, (ver figura 3.4). El índice de la forma de la zona de la separación fue definido como el cociente de la longitud L y el ancho aguas abajo de la unión de los canales b_3 .

Ramamurthy (1988) estudió el flujo en canales abiertos con la unión en 90° en base a la transferencia de impulso del canal lateral al canal principal. Aplicó la ecuación del impulso por separado para el flujo en el canal lateral y en el canal principal. Encontró que la contribución lateral del impulso aumenta cuando que el cociente de descarga lateral aumenta (Q_2/Q_3).

Por otra parte, Gurram et al. (1997) estudió las características del flujo lateral y de la contracción del flujo en el canal principal aguas abajo de la unión, también llamada zona de separación, también determinó las expresiones para los coeficientes de corrección del ímpetu y la fuerza de la presión de la pared lateral. Hsu et al. (1998) aplicó las ecuaciones de conservación de masa y de energía a la unión y el principio del impulso y cantidad de movimiento a dos volúmenes de control en la unión y obtenía un coeficiente de pérdida de energía así como una relación de tirantes. Todos estos estudios fueron para la unión de flujo en canales abiertos de mismos anchos ($b_1=b_2=b_3$) y asumen la igualdad de los tirantes aguas arriba de la unión del canal principal y del canal lateral o tributario ($y_1=y_2$).

3.3. Zona de separación

En el punto final de la unión el flujo se separa de la pared lateral para formar una recirculación en toda la zona, conocida como zona de separación (figura 3.2). Gurram et al. (1997) determinó dos expresiones para evaluar la geometría de la zona.

$$\frac{S}{b_3} = \frac{1}{2} \left(F_3 - \frac{2}{3} \right)^2 + 0.45 \left(\frac{Q_2}{Q_3} \right)^{1/2} \left(\frac{\theta}{90^\circ} \right) \quad (3.9)$$

$$\frac{L}{b_3} = 3.8 \operatorname{sen}^3 \theta \left(1 - \frac{1}{2} F_3 \right) \left(\frac{Q_2}{Q_3} \right)^{1/2} \quad (3.10)$$

donde L es la longitud, S es el ancho máximo de la zona de separación, b_3 , F_3 y Q_3 son el ancho, número de Froude y el gasto, respectivamente, del canal principal en una sección aguas abajo de la zona de separación, Q_2 es el gasto en el canal tributario y θ el ángulo de unión entre los canales. La segunda expresión se aplica en los casos en que $F_3 < 1$.

Behrangi et al. (2004) propuso otras expresiones para determinar la longitud de la zona de separación a partir de experimentos en unión de canales abiertos a 90°, no obstante, se omite presentar en este trabajo porque se muestran incompletas en la fuente de información.

3.4. Modelos de unión de canales

3.4.1. Modelos matemáticos de Gurram y Hsu

Los modelos matemáticos derivados por Gurram et al. (1997) y por Hsu et al. (1998), son fórmulas que se basan en el principio de cantidad de movimiento específica. Sin embargo, se restringen al asumir la igualdad de tirantes de los canales principal y tributario aguas arriba de la unión y de la igualdad de anchos de los canales. Las ecuaciones que se muestran a continuación están con la nomenclatura de la figura 3.2.

Gurram et al. (1997):

$$y_1 = y_2$$

$$Y_1^3 - Y_1(1 + 2F_3^2) + 2F_3^2(q_1^2 + q_2 \cos\gamma) = 0 \quad (3.11)$$

donde y_1 es el tirante aguas arriba en el canal principal, y_2 el tirante aguas arriba en el canal tributario, y_3 el tirante aguas abajo en el canal principal, $Y_1=y_1/y_3$, $Y_2=y_2/y_3$, Q_1 el gasto en el canal principal antes de la unión, Q_2 el gasto en el canal tributario, Q_3 el gasto en el canal principal después de la unión, $q_1=Q_1/Q_3$, $q_2=Q_2/Q_3$, θ el ángulo de unión, y F_3 el numero de Froude en la sección aguas abajo de la unión. De acuerdo con Hager (1987), γ es el ángulo de la línea de corriente y se relaciona con θ por $\gamma = 8\theta/9$.

Hsu et al. (1998):

$$y_1 = y_2$$

$$Y_1^3 - Y_1 \left(1 + 2\frac{\beta}{\alpha}F_3^2\right) + 2\frac{\beta}{\alpha}F_3^2[q_1^2 + (1 - q_1)^2 \cos\theta] = 0 \quad (3.12)$$

donde α y β son los coeficientes de corrección de la energía y de la cantidad de movimiento. Valores medios de α y β son 1.27 y 1.12, respectivamente.

Se observa que, la ecuación de Hsu es semejante a la de ecuación de Gurram, con la diferencia de que en la segunda ecuación se consideran los coeficientes de corrección de la energía y de la cantidad de movimiento.

Como se muestra en el estudio experimental de Shumate et al. (2000) en un modelo de combinación de flujo en la unión de canales abiertos a 90°, la distribución de la velocidad en la secciones aguas abajo de la unión (figura 3.5), difiere en la forma de distribución de la velocidad que se presenta en flujo de un canal (figura 2.4).

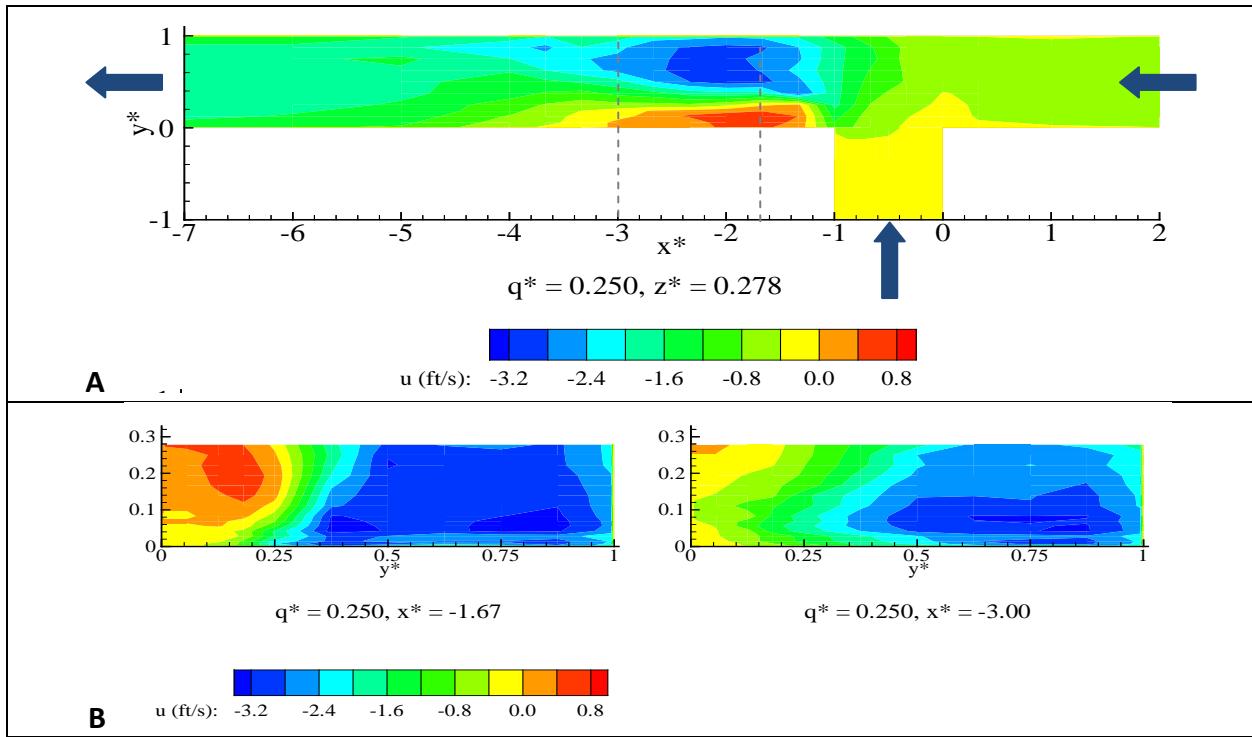


Fig. 3.5. Distribución de la velocidad en un modelo de combinación de flujo en la unión de canales abiertos. A) Vista en planta de una prueba ($q^*=Q_1/Q_3=0.25$), B) Secciones transversales (en $x^*=-1.67 \text{ ft}$ y $x^*=-3.00 \text{ ft}$), (Shumate, 2000).

Por lo que, los coeficientes α y β requieren ser considerados en el flujo a superficie libre en la unión de canales. En el estudio de Gurram et al. (1997) presenta una ecuación para determinar el factor de corrección de la cantidad de movimiento de una sección posterior a la zona de separación, que es

$$\beta_3 = [1 + 0.12(q_2 \operatorname{sen}^2 \theta)^2] F_3^{-0.02} \quad (3.13)$$

Con θ en rad.

En el estudio de Hsu et al. se presentan ecuaciones de los coeficientes de corrección de la energía y de la cantidad de movimiento, para la sección de máxima contracción de flujo, es decir, donde se presenta el mayor ancho de la zona de separación, y son

$$\alpha_c = 1 + 0.06 \left(\frac{1}{q_1} \right) \quad (3.14)$$

$$\beta_c = 1 + 0.03 \left(\frac{1}{q_1} \right) \quad (3.15)$$

Con $q_1=Q_1/Q_3$.

3.4.2. Modelo matemático propuesto

Como en los modelos matemáticos de Gurram y Hsu consideran en el modelo de unión de canales de igual ancho, ahora se realiza un análisis para canales de diferente ancho (figura 3.6). Con la hipótesis de igualdad en los tirantes de los canales principal y tributario aguas arriba de la unión $y_1=y_2$ y para flujo en régimen subcrítico.

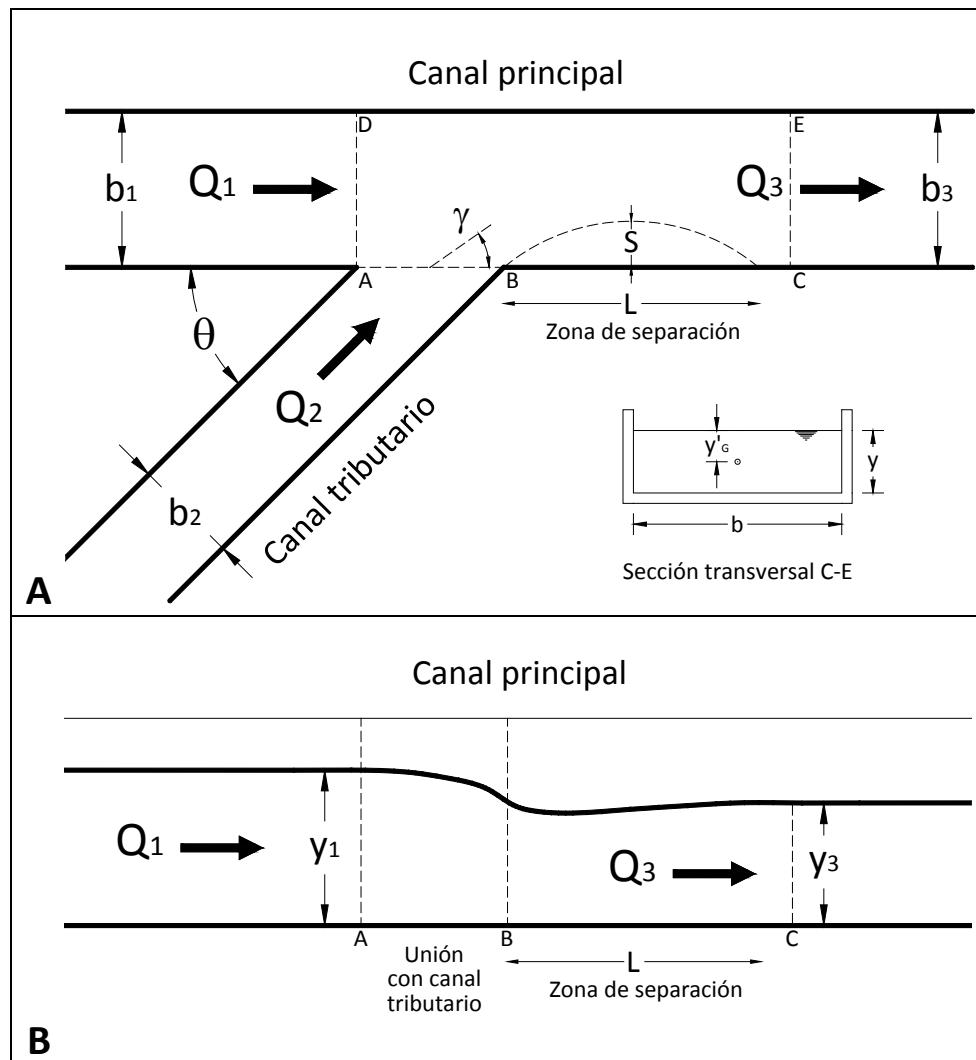


Fig. 3.6. Esquema de unión de canales. A) Vista en planta y B) vista en perfil.

En el modelo se consideran los vértices de la unión en ángulos recto, agudo y obtuso, sin redondeos o chaflanes.

Al aplicar el principio de cantidad de movimiento específica al volumen de control ACDE, despreciando las fuerzas de resistencia y de cuerpo (F_r y F_c), se tiene:

$$M_1 + M_2 = M_3 \quad (3.16)$$

Como

$$M = \frac{\beta Q^2}{g A} + y' G A \quad (3.17)$$

Resulta

$$\left(\frac{\beta_1 Q_1^2}{g A_1} + y' G_1 A_1 \right) + \left(\frac{\beta_2 Q_2^2}{g A_2} + y' G_2 A_2 \right) \cos \theta = \left(\frac{\beta_3 Q_3^2}{g A_3} + y' G_3 A_3 \right) \quad (3.18)$$

donde M denota la cantidad de movimiento específica, θ el ángulo geométrico entre el canal tributario y el canal principal, β el coeficiente de corrección de cantidad de movimiento, g la aceleración de la gravedad, Q el gasto a través del canal, A el área de la sección transversal, $y' G$ es la distancia de la superficie del agua al centroide de la sección.

Como la sección transversal es de forma rectangular, se tiene que

$$A = by \quad (3.19)$$

$$y' G = y/2 \quad (3.20)$$

Siendo b el ancho del canal.

Al considerar el flujo unidimensional, la fuerza de presión del flujo en el canal tributario aplicada en la sección AB será siempre perpendicular a la dirección del flujo en el canal principal, por lo cual

$$y' G_2 A_2 \cos 90^\circ = 0 \quad (3.21)$$

Sustituyendo

$$\left(\frac{\beta_1 Q_1^2}{g b_1 y_1} + \frac{b_1 y_1^2}{2} \right) + \left(\frac{\beta_2 Q_2^2}{g b_2 y_2} \right) \cos \theta = \left(\frac{\beta_3 Q_3^2}{g b_3 y_3} + \frac{b_3 y_3^2}{2} \right) \quad (3.22)$$

Es importante considerar las características del flujo en el canal tributario a lo largo de la línea de unión AB, pues las líneas de corriente tienen una tendencia a girar en dirección del flujo del canal principal, además de que la velocidad de llegada es variable en esa misma línea de unión.

Un ejemplo se muestra en la figura 3.7, donde se observa la variación en dirección de las líneas de corriente para diferentes ángulos de unión, también la velocidad del canal tributario presenta variación, aumentando en magnitud de A hacia B.

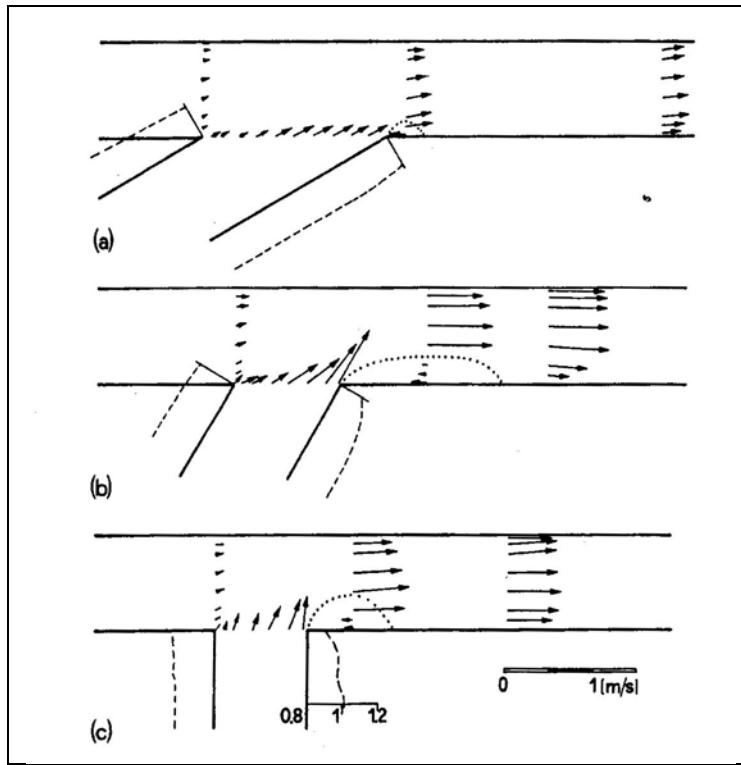


Fig. 3.7. Observaciones típicas en unión de flujo (Gurram, 1997).

Por lo que es incorrecto asumir que el ángulo de la línea de corriente γ a lo largo de la línea de unión AB es igual al ángulo θ de la unión.

La cantidad de movimiento específica en el canal tributario, aguas arriba y lejos de la unión, es

$$M_2 = \frac{\beta_2}{g} \frac{Q_2^2}{b_2 y_2} \cos \theta \quad (3.23)$$

Como la dirección y la velocidad adquieren importancia es necesario considerar los valores representativos de estos.

La dirección representativa del flujo en el canal tributario es el ángulo de la línea de corriente γ , que difiere al ángulo geométrico θ .

En la unión, los flujos en el canal principal y tributario aumentan de velocidad debido a la contracción del flujo en la zona de separación. Además, a partir del punto de unión A inicia la mezcla de flujos, la velocidad representativa del flujo en el canal tributario es mayor a V_2 y se puede considerar como

$$V_{2'} = \frac{Q_1 + Q_2}{A_2} = \frac{Q_3}{b_2 y_2} \quad (3.24)$$

Reemplazando la velocidad $Q_2/(b_2y_2)$ por $Q_3/(b_2y_2)$, y el ángulo θ por γ , resulta

$$M_2 = \frac{\beta_2}{g} \frac{Q_2 Q_3}{b_2 y_2} \cos \gamma \quad (3.25)$$

En el estudio de Gurram (1997), el ángulo $\gamma = \sigma\theta$, donde el coeficiente σ es $\sigma=0.85$ y de acuerdo con Hager (1987) tiene el valor de $\sigma= 8/9$. Sin embargo, como se observa en el capítulo 6, el coeficiente σ depende de la relación de gasto $q_2=Q_2/Q_3$.

Ahora, al sustituir la cantidad de movimiento específica del canal tributario, resulta

$$\left(\frac{\beta_1}{g} \frac{Q_1^2}{b_1 y_1} + \frac{b_1 y_1^2}{2} \right) + \frac{\beta_2}{g} \frac{Q_2 Q_3}{b_2 y_2} \cos \gamma = \left(\frac{\beta_3}{g} \frac{Q_3^2}{b_3 y_3} + \frac{b_3 y_3^2}{2} \right) \quad (3.26)$$

Asumiendo que $y_2 = y_1$

$$\left(\frac{\beta_1}{g} \frac{Q_1^2}{b_1 y_1} + \frac{b_1 y_1^2}{2} \right) + \frac{\beta_2}{g} \frac{Q_2 Q_3}{b_2 y_1} \cos \gamma = \left(\frac{\beta_3}{g} \frac{Q_3^2}{b_3 y_3} + \frac{b_3 y_3^2}{2} \right) \quad (3.27)$$

Multiplicando por y_1

$$\left(\frac{\beta_1}{g} \frac{Q_1^2}{b_1} + \frac{b_1 y_1^3}{2} \right) + \frac{\beta_2}{g} \frac{Q_2 Q_3}{b_2} \cos \gamma = \left(\frac{\beta_3}{g} \frac{Q_3^2}{b_3 y_3} y_1 + \frac{b_3 y_3^2}{2} y_1 \right) \quad (3.28)$$

Dividiendo por $b_3 y_3^3/2$, tenemos

$$\frac{2}{b_3 y_3^3} \left(\frac{\beta_1}{g} \frac{Q_1^2}{b_1} + \frac{b_1 y_1^3}{2} \right) + \frac{2}{b_3 y_3^3} \frac{\beta_2}{g} \frac{Q_2 Q_3}{b_2} \cos \gamma = \frac{2}{b_3 y_3^3} \left(\frac{\beta_3}{g} \frac{Q_3^2 y_1}{b_3 y_3} + \frac{b_3 y_3^2 y_1}{2} \right) \quad (3.29)$$

$$2 \frac{\beta_1}{g} \frac{Q_1^2}{b_1 b_3 y_3^3} + \frac{b_1 y_1^3}{b_3 y_3^3} + 2 \frac{\beta_2}{g} \frac{Q_2 Q_3}{b_2 b_3 y_3^3} \cos \gamma = 2 \frac{\beta_3}{g} \frac{Q_3^2 y_1}{b_3^2 y_3^4} + \frac{b_3 y_3^2 y_1}{b_3 y_3^3} \quad (3.30)$$

$$2 \frac{\beta_1}{g} \frac{Q_1^2}{b_1 b_3 y_3^3} + \frac{b_1 y_1^3}{b_3 y_3^3} + 2 \frac{\beta_2}{g} \frac{Q_2 Q_3}{b_2 b_3 y_3^3} \cos \gamma = 2 \frac{\beta_3}{g} \frac{Q_3^2 y_1}{b_3^2 y_3^4} + \frac{y_1}{y_3} \quad (3.31)$$

$$\frac{b_1 y_1^3}{b_3 y_3^3} - \left(1 + 2 \frac{\beta_3}{g} \frac{Q_3^2}{b_3^2 y_3^3} \right) \frac{y_1}{y_3} + \frac{2}{g b_3 y_3^3} \left(\beta_1 \frac{Q_1^2}{b_1} + \beta_2 \frac{Q_2 Q_3}{b_2} \cos \gamma \right) = 0 \quad (3.32)$$

Multiplicando por Q_3^2/Q_3^2 al tercer término, da

$$\frac{b_1 y_1^3}{b_3 y_3^3} - \left(1 + 2 \frac{\beta_3}{g} \frac{Q_3^2}{b_3^2 y_3^3} \right) \frac{y_1}{y_3} + \frac{2}{g b_3 y_3^3} \left(\frac{Q_3^2}{Q_3^2} \right) \left(\beta_1 \frac{Q_1^2}{b_1} + \beta_2 \frac{Q_2 Q_3}{b_2} \cos \gamma \right) = 0 \quad (3.33)$$

$$\frac{b_1 y_1^3}{b_3 y_3^3} - \left(1 + 2 \frac{\beta_3}{g} \frac{Q_3^2}{b_3^2 y_3^3} \right) \frac{y_1}{y_3} + \frac{2 Q_3^2}{g b_3 y_3^3} \left(\frac{\beta_1 Q_1^2}{b_1 Q_3^2} + \frac{\beta_2 Q_2 Q_3}{b_2 Q_3^2} \cos \gamma \right) = 0 \quad (3.34)$$

$$\frac{b_1 y_1^3}{b_3 y_3^3} - \left(1 + 2 \frac{\beta_3}{g} \frac{Q_3^2}{b_3^2 y_3^3} \right) \frac{y_1}{y_3} + \frac{2 Q_3^2}{g b_3 y_3^3} \left(\frac{\beta_1 Q_1^2}{b_1 Q_3^2} + \frac{\beta_2 Q_2}{b_2 Q_3} \cos \gamma \right) = 0 \quad (3.35)$$

Por otra parte, el número de Froude es

$$\begin{aligned} F &= \frac{V}{\sqrt{\frac{g}{\alpha} y}} = \frac{Q}{A \sqrt{\frac{g}{\alpha} y}} = \frac{Q}{b y \sqrt{\frac{g}{\alpha} y}} \\ F^2 &= \frac{Q^2}{b^2 y^2 \frac{g}{\alpha} y} = \frac{\alpha Q^2}{g b^2 y^3} \\ \frac{F^2}{\alpha} &= \frac{Q^2}{g b^2 y^3} \end{aligned} \quad (3.36)$$

y

$$b \frac{F^2}{\alpha} = \frac{Q^2}{g b y^3} \quad (3.37)$$

Sustituyendo en la ecuación

$$\frac{b_1}{b_3} \left(\frac{y_1}{y_3} \right)^3 - \left(1 + 2 \frac{\beta_3}{g} \frac{F_3^2}{\alpha_3} \right) \left(\frac{y_1}{y_3} \right) + 2 \frac{b_3}{\alpha_3} F_3^2 \left(\frac{\beta_1 Q_1^2}{b_1 Q_3^2} + \frac{\beta_2 Q_2}{b_2 Q_3} \cos \gamma \right) = 0 \quad (3.38)$$

Multiplicando por b_3/b_1

$$\left(\frac{y_1}{y_3} \right)^3 - \frac{b_3}{b_1} \left(1 + 2 \frac{\beta_3}{g} \frac{F_3^2}{\alpha_3} \right) \left(\frac{y_1}{y_3} \right) + 2 \frac{b_3}{b_1} \frac{b_3}{\alpha_3} F_3^2 \left(\frac{\beta_1 Q_1^2}{b_1 Q_3^2} + \frac{\beta_2 Q_2}{b_2 Q_3} \cos \gamma \right) = 0 \quad (3.39)$$

$$\left(\frac{y_1}{y_3}\right)^3 - \frac{b_3}{b_1} \left(1 + 2 \frac{\beta_3}{\alpha_3} F_3^2\right) \left(\frac{y_1}{y_3}\right) + 2 \frac{b_3^2}{b_1} \frac{F_3^2}{\alpha_3} \left(\frac{\beta_1}{b_1} \frac{Q_1^2}{Q_3^2} + \frac{\beta_2}{b_2} \frac{Q_2}{Q_3} \cos\gamma\right) = 0 \quad (3.40)$$

$$Y_1^3 - \frac{b_3}{b_1} \left(1 + 2 \frac{\beta_3}{\alpha_3} F_3^2\right) Y_1 + \frac{2}{\alpha_3} F_3^2 \left(\beta_1 \frac{b_3^2}{b_1^2} q_1^2 + \beta_2 \frac{b_3^2}{b_1 b_2} q_2 \cos\gamma\right) = 0 \quad (3.41)$$

donde y_1 es el tirante aguas arriba en el canal principal, y_2 el tirante aguas arriba en el canal tributario, y_3 el tirante aguas abajo en el canal principal, $Y_1=y_1/y_3$, $Y_2=y_2/y_3$, Q_1 el gasto en el canal principal antes de la unión, Q_2 el gasto en el canal tributario, Q_3 el gasto en el canal principal después de la unión, $q_1=Q_1/Q_3$, $q_2=Q_2/Q_3$, θ el ángulo de unión, y F_3 el número de Froude en la sección aguas abajo de la unión, y γ es el ángulo de la línea de corriente.

Esta ecuación, muy semejante a las ecuaciones de Gurram y Hsu, es válida para flujo subcrítico.

4. Dispositivo físico

4.1. Características del dispositivo físico

El dispositivo físico mostrado en las figuras 4.1 y 4.2, fabricado en el Instituto de Ingeniería de la UNAM, está instalado en el laboratorio de Hidráulica de la Unidad de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, está compuesto por: un canal principal de 2.40 metros de longitud y sección rectangular de 30 cm de ancho, un canal tributario de 0.80 metros de longitud y sección rectangular de 20 cm de ancho, dos depósitos para flujo constante de agua a los canales, un depósito general para recirculación del fluido, tres conectores para unión de los canales (90°, 45° y 135°), y dos bombas centrífugas para circulación del agua hacia los canales.

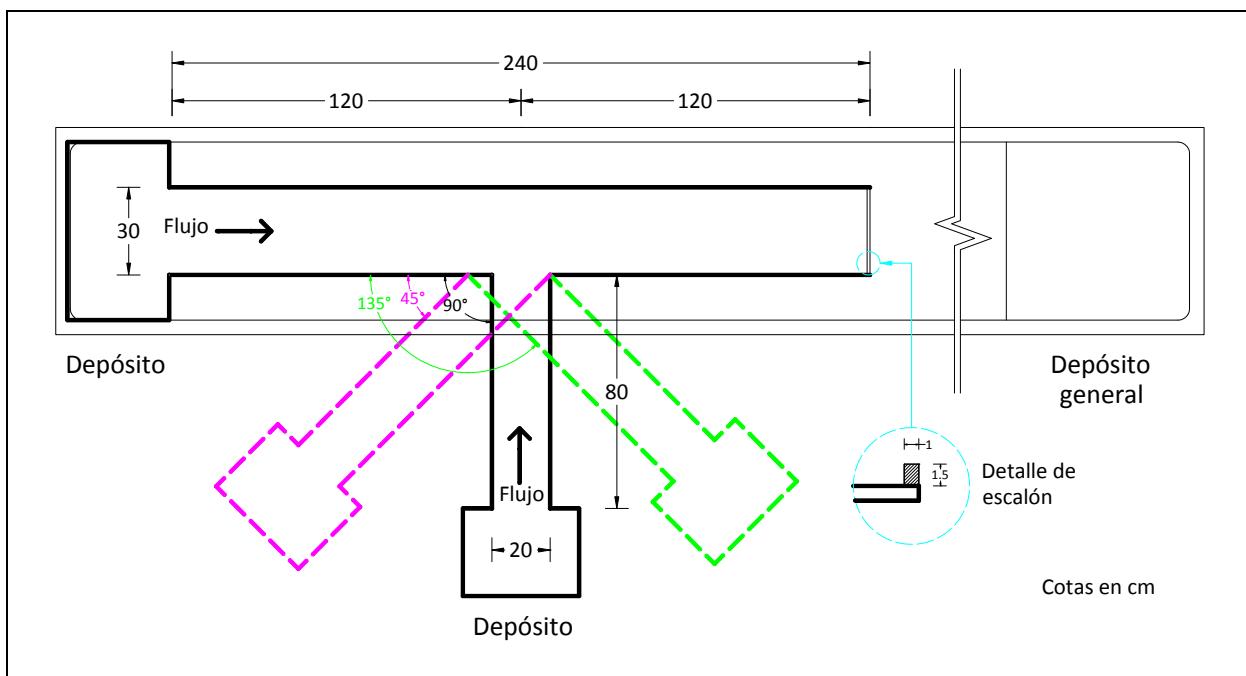


Fig. 4.1. Esquema general del dispositivo físico.

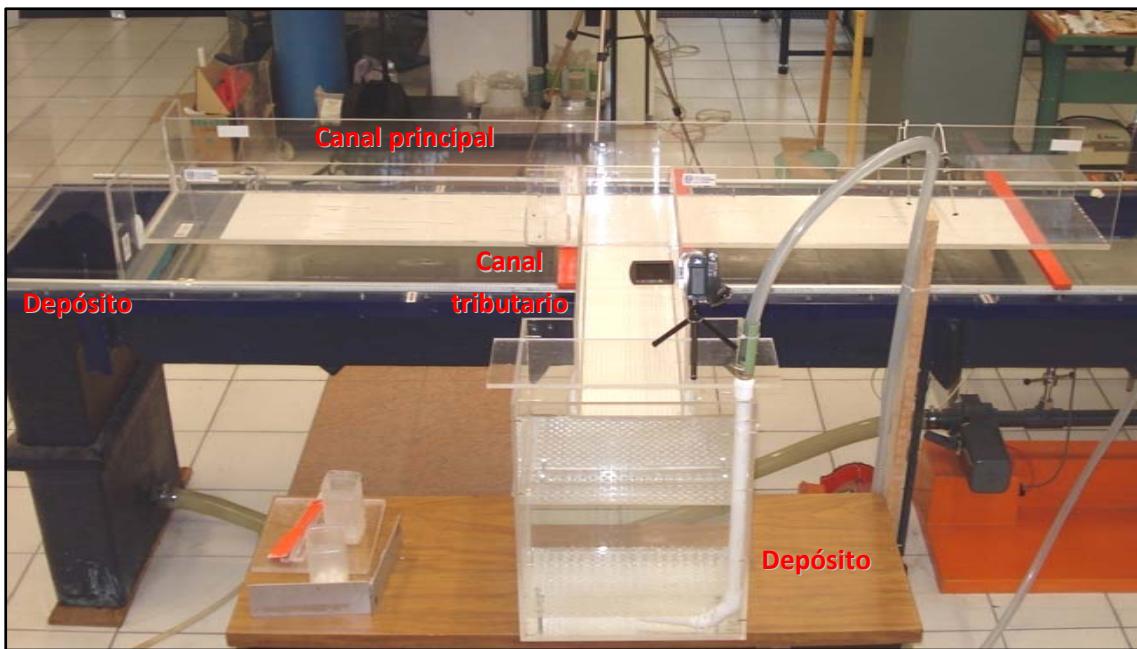


Fig. 4.2. Vista del dispositivo físico.

El dispositivo es de acrílico y ambos canales fueron instalados con pendiente de $S_0=0.00083$ ($\delta\approx0.0475^\circ$). Por las dimensiones del modelo fue necesario colocar un escalón o vertedor de 1.00 cm de ancho por 1.50 cm de alto en la parte final del canal principal, con el fin de reducir el número de Froude del flujo aguas abajo de la unión, es decir, conservar el flujo en régimen subcrítico.

4.2. Variables de prueba

Las variables de prueba que se consideraron en el presente estudio, son:

- El ángulo de unión entre los canales, $\theta = 90^\circ, 45^\circ$ y 135° (figura 4.3)
- El gasto en el canal principal, $Q_1 = 4.0 \text{ l/s}, 2.7 \text{ l/s}$ y 1.3 l/s (tabla 4.1)

Con un total de nueve pruebas de flujo a superficie libre en la unión de dos canales.

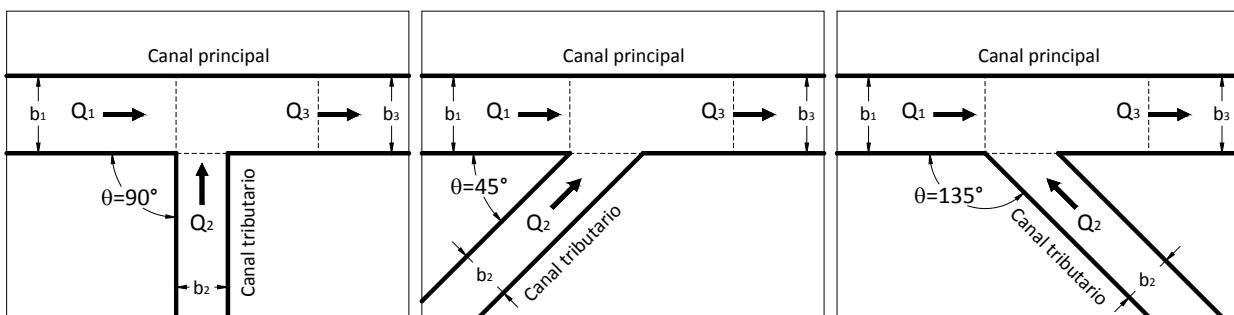


Fig. 4.3. Dispositivos de unión de canales.

Donde Q_1 es el gasto en el canal principal aguas arriba de la unión, Q_2 el gasto en el canal tributario, Q_3 el gasto total combinado, q_1 relación de gasto Q_1/Q_3 , q_2 relación de gasto Q_2/Q_3 , b_1 el ancho del canal principal aguas arriba de la unión, b_2 el ancho del canal tributario, b_3 el ancho del canal principal aguas abajo de la unión, θ el ángulo de unión.

Tabla 4.1. Variables de prueba.

Prueba No.	θ (°)	Q_1 (l/s)	Q_2 (l/s)	Q_3 (l/s)	q_1 (adim.)	q_2 (adim.)
01	90	4.0	1.3	5.3	0.75	0.25
02	90	2.7	1.3	4.0	0.67	0.33
03	90	1.3	1.3	2.6	0.50	0.50
04	45	4.0	1.3	5.3	0.75	0.25
05	45	2.7	1.3	4.0	0.67	0.33
06	45	1.3	1.3	2.6	0.50	0.50
07	135	4.0	1.3	5.3	0.75	0.25
08	135	2.7	1.3	4.0	0.67	0.33
09	135	1.3	1.3	2.6	0.50	0.50

Las figuras 4.4, 4.5 y 4.6 ilustran el dispositivo físico con los tres diferentes ángulos de unión de prueba.



Fig. 4.4. Dispositivo físico con ángulo de unión de 90°.

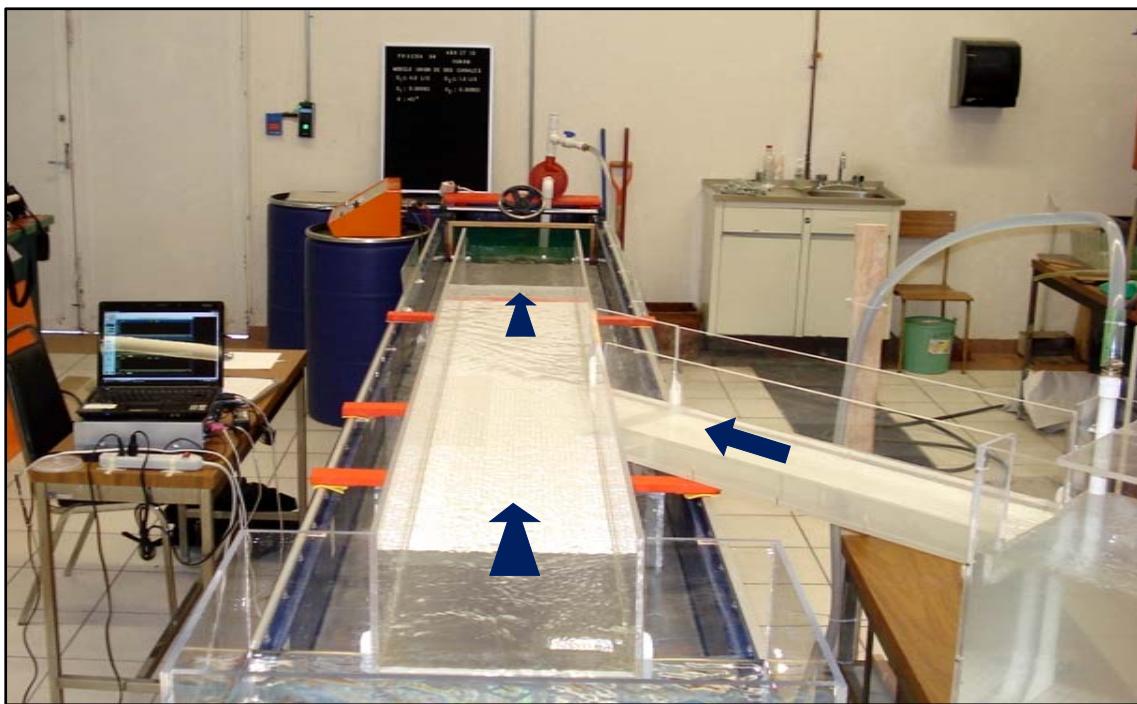


Fig. 4.5. Dispositivo físico con ángulo de unión de 45°.

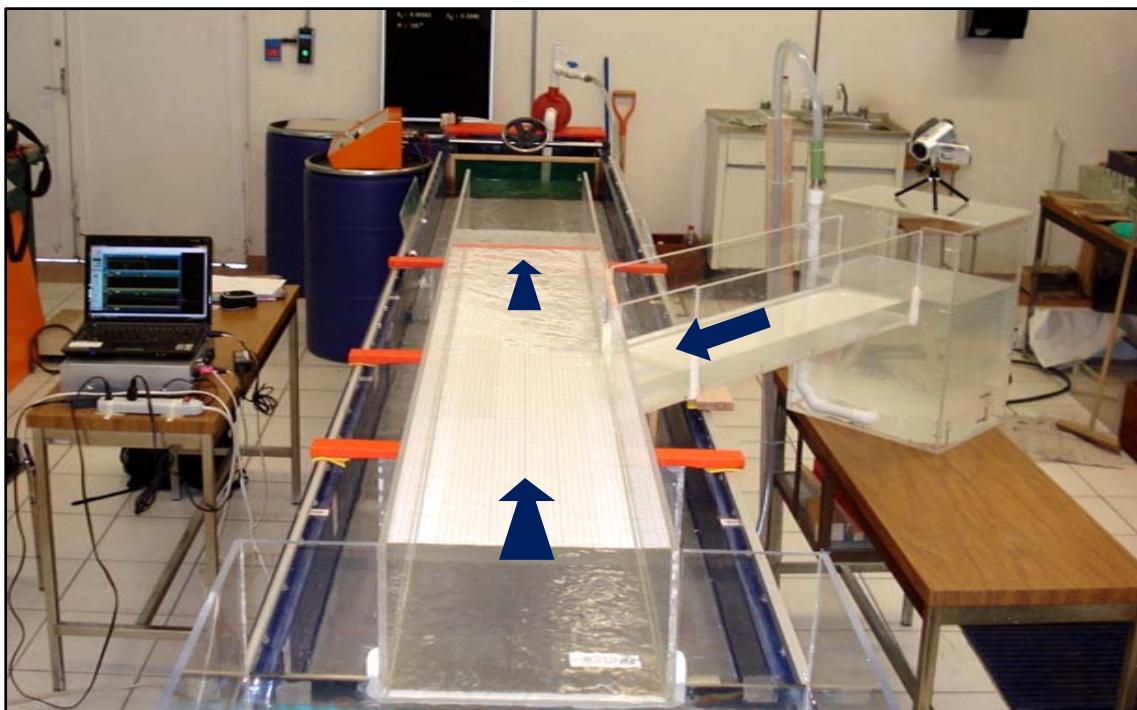


Fig. 4.6. Dispositivo físico con ángulo de unión de 135°.

4.3. Equipo de medición

Como el parámetro a medir en el dispositivo físico es el *tirante*, se empleó un instrumento de medición de niveles de agua. El equipo se basa en el principio de conductividad eléctrica entre dos varillas metálicas y permite hacer lecturas a cada un segundo y con aproximación de 1 mm (figura 4.7). Conectado a un equipo de cómputo portátil y con el programa *Sistema de adquisición de medición de nivel*, permite visualizar y almacenar las mediciones (figura 4.8).



Fig. 4.7. Equipo de medición de tirantes.

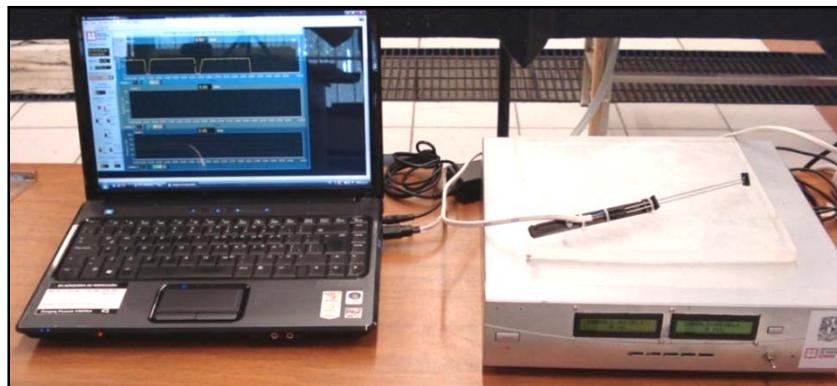


Fig. 4.8. Equipo de medición y programa de grabación de tirantes.

A continuación se muestra la forma en que se realiza la medición de tirantes.

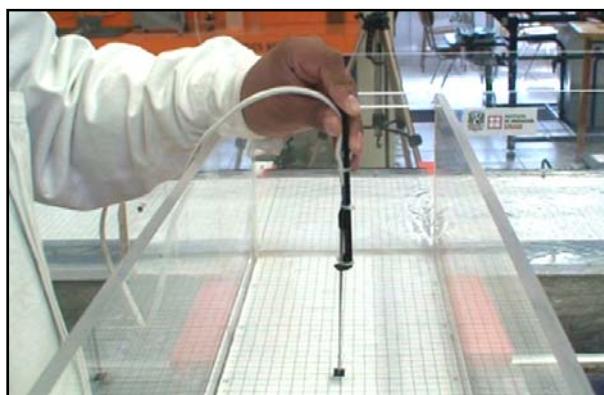


Fig. 4.9. Medición de nivel de agua en el canal tributario.

4.4. Procedimiento de prueba y resultados

La medición de tirantes se realizó a lo largo del canal principal a partir del depósito a una distancia de 70 cm, con un espaciamiento entre las secciones de medición de 10 cm, además de registrar en tres secciones adicionales, una ubicada a 1 cm aguas arriba de la unión y dos a 1 y 5 cm aguas abajo de la unión. En cada sección se midieron tres puntos, dos de ellos cerca de las paredes y el otro al centro del canal. De igual manera se realizaron las mediciones en el canal tributario. Ver la figura siguiente.

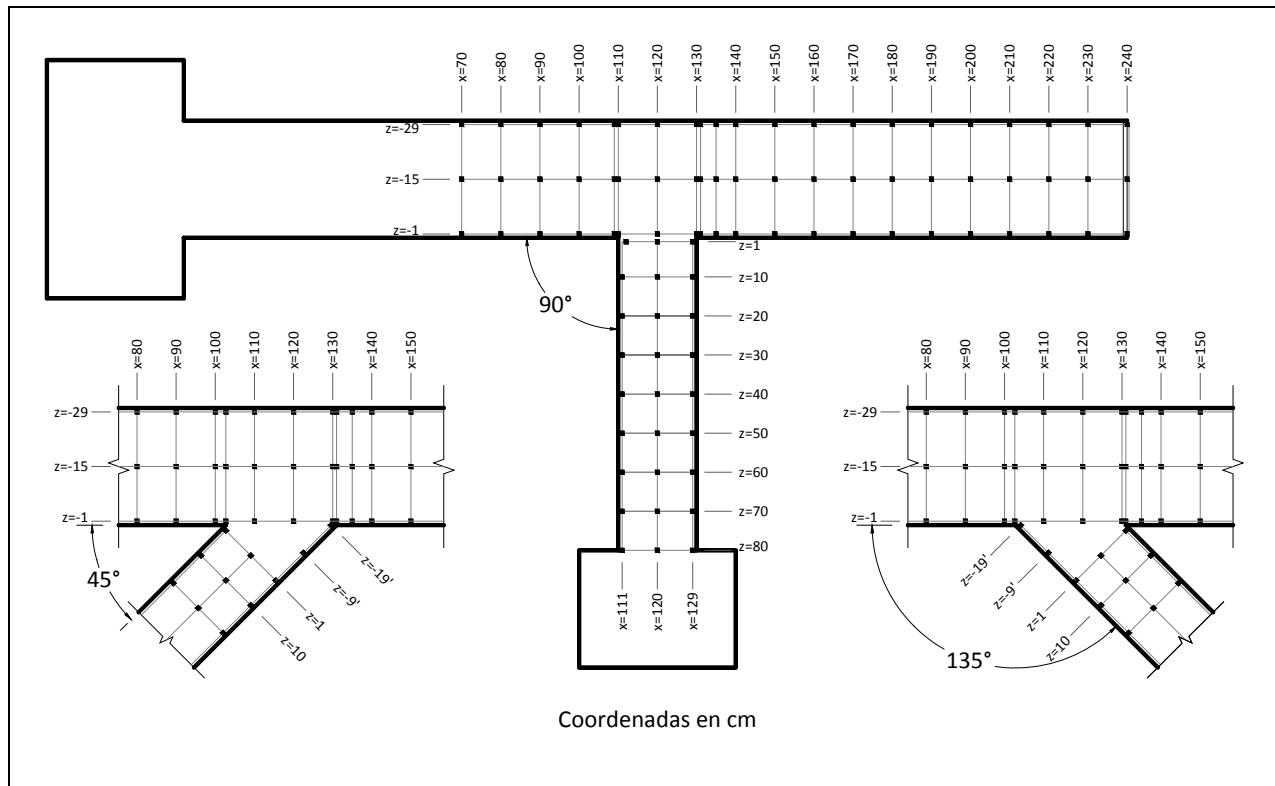


Fig. 4.10. Distribución de puntos medidos en el dispositivo.

Las pruebas efectuadas en el dispositivo físico permitieron determinar los perfiles de flujo al centro y próximos a las paredes de los canales, así mismo, observar y medir los tirantes de la zona de separación.

En las figuras 4.11 a 4.19 se presentan los resultados de la medición de tirantes en centímetros en todas las pruebas y la documentación fotográfica correspondiente.

Figura 4.11. Resultados de la medición de tirantes y documentación fotográfica de la prueba 01.

Prueba:	01	Ángulo:	$\theta = 90^\circ$	Gastos:	$Q_1 = 4 \text{ l/s}$	$Q_2 = 1.3 \text{ l/s}$	$Q_3 = 5.3 \text{ l/s}$	$q_1 = 0.75$	$q_2 = 0.25$
----------------	-----------	----------------	---------------------	----------------	-----------------------	-------------------------	-------------------------	--------------	--------------

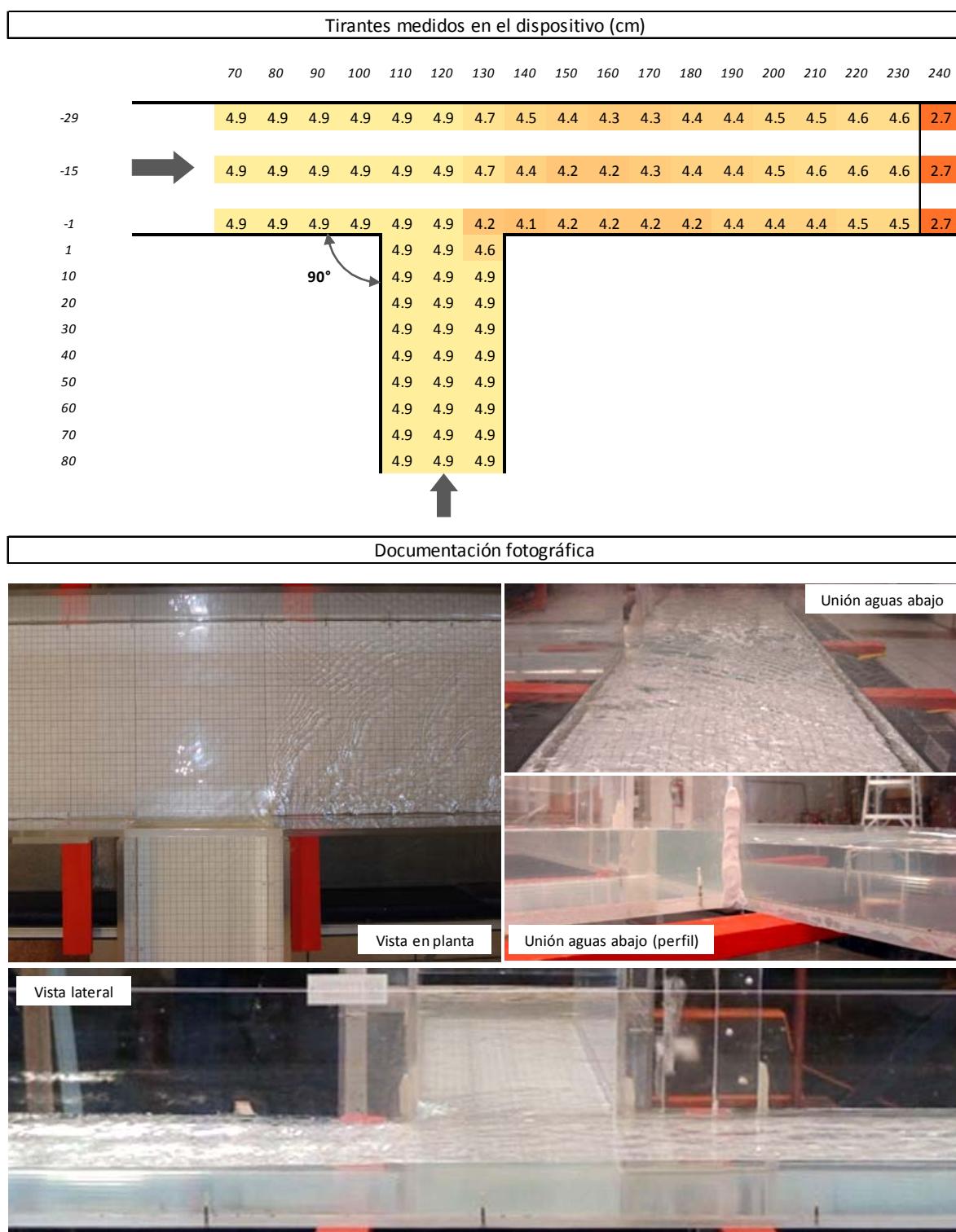


Figura 4.12. Resultados de la medición de tirantes y documentación fotográfica de la prueba 02.

Prueba:	02	Ángulo:	$\theta = 90^\circ$	Gastos:	$Q_1 = 2.7 \text{ l/s}$	$Q_2 = 1.3 \text{ l/s}$	$Q_3 = 4 \text{ l/s}$	$q_1 = 0.67$	$q_2 = 0.33$
---------	-----------	---------	---------------------	---------	-------------------------	-------------------------	-----------------------	--------------	--------------

		Tirantes medidos en el dispositivo (cm)																					
		70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240				
-29		4.3	4.3	4.3	4.3	4.3	4.2	4.2	4.0	3.9	3.9	3.9	3.9	3.9	4.0	4.0	4.0	4.0	2.1				
-15	→	4.3	4.3	4.3	4.3	4.3	4.3	4.2	4.0	3.9	3.9	3.9	3.9	3.9	4.0	4.0	4.0	4.0	2.1				
-1		4.3	4.3	4.3	4.3	4.3	4.3	3.7	3.6	3.7	3.7	3.8	3.8	3.9	3.9	3.9	3.9	4.0	4.0	2.1			
1								4.3	4.3	4.2													
10								4.3	4.3	4.3													
20								4.3	4.3	4.3													
30								4.3	4.3	4.3													
40								4.3	4.3	4.3													
50								4.3	4.3	4.3													
60								4.3	4.3	4.3													
70								4.3	4.3	4.3													
80								4.3	4.3	4.3													

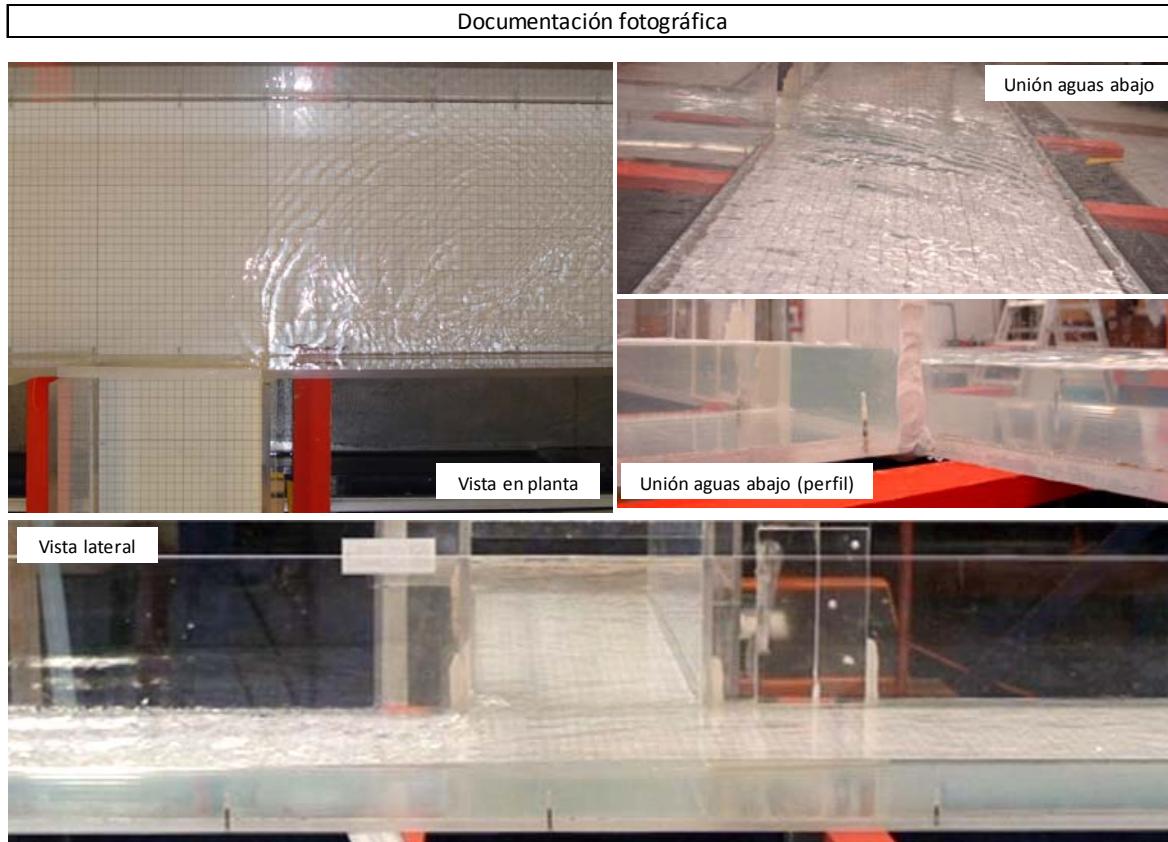


Figura 4.13. Resultados de la medición de tirantes y documentación fotográfica de la prueba 03.

Prueba:	03	Ángulo:	$\theta = 90^\circ$	Gastos:	$Q_1 = 1.3 \text{ l/s}$	$Q_2 = 1.3 \text{ l/s}$	$Q_3 = 2.6 \text{ l/s}$	$q_1 = 0.50$	$q_2 = 0.50$
----------------	-----------	----------------	---------------------	----------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	--------------	--------------

		Tirantes medidos en el dispositivo (cm)																						
		70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240					
-29		3.8	3.8	3.8	3.8	3.8	3.7	3.7	3.5	3.3	3.3	3.3	3.3	3.3	3.4	3.4	3.4	3.4	1.6					
-15	→	3.8	3.8	3.8	3.8	3.8	3.8	3.7	3.4	3.3	3.3	3.3	3.3	3.3	3.4	3.4	3.4	3.4	1.6					
-1		3.8	3.8	3.8	3.8	3.8	3.8	3.2	3.1	3.1	3.1	3.1	3.2	3.3	3.3	3.3	3.4	3.4	1.6					
1		3.8	3.8	3.7																				
10																								
20																								
30																								
40																								
50																								
60																								
70																								
80																								

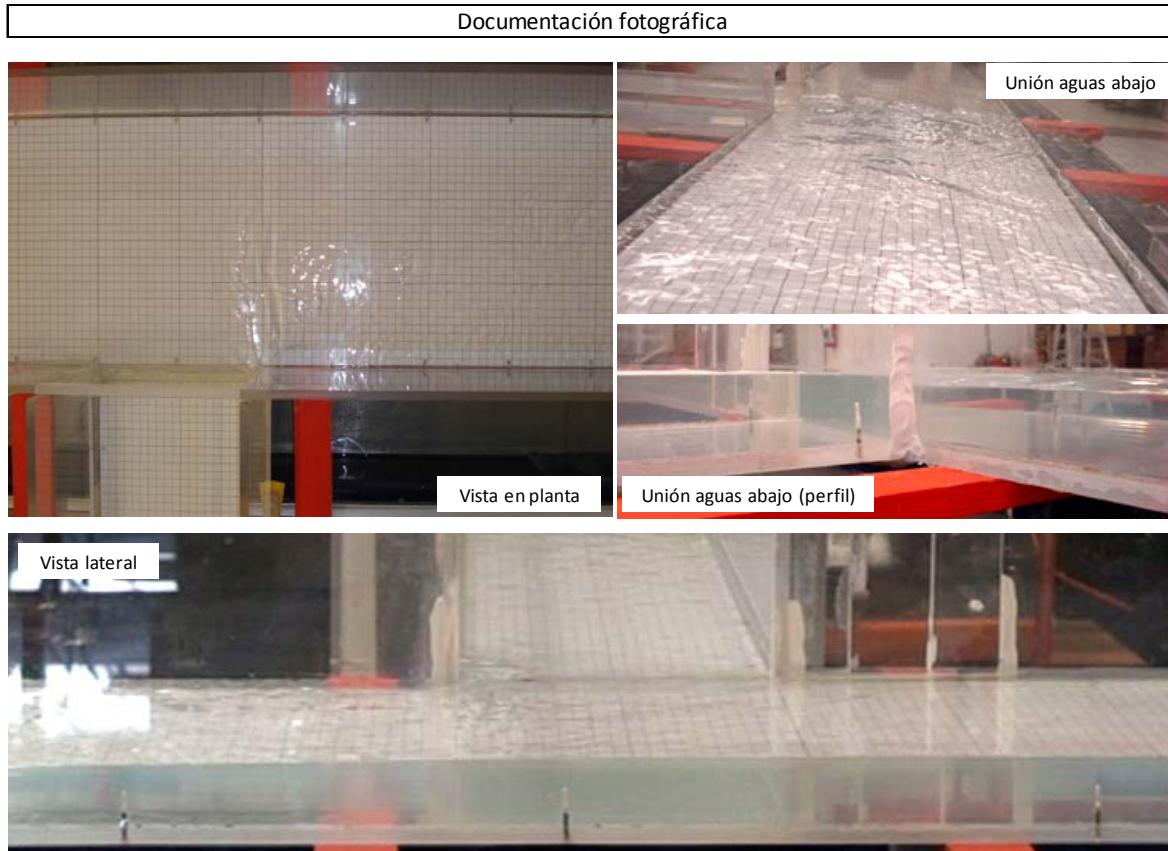
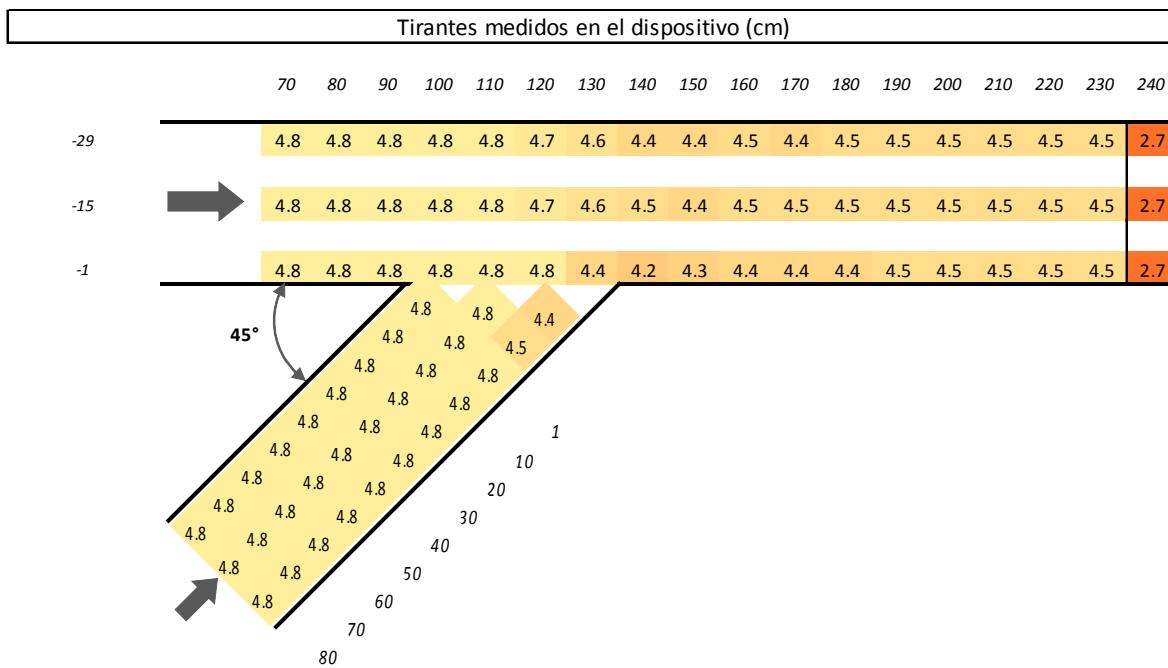


Figura 4.14. Resultados de la medición de tirantes y documentación fotográfica de la prueba 04.

Prueba:	04	Ángulo:	$\theta = 45^\circ$	Gastos:	$Q_1 = 4 \text{ l/s}$	$Q_2 = 1.3 \text{ l/s}$	$Q_3 = 5.3 \text{ l/s}$	$q_1 = 0.75$	$q_2 = 0.25$
---------	-----------	---------	---------------------	---------	-----------------------	-------------------------	-------------------------	--------------	--------------



Documentación fotográfica

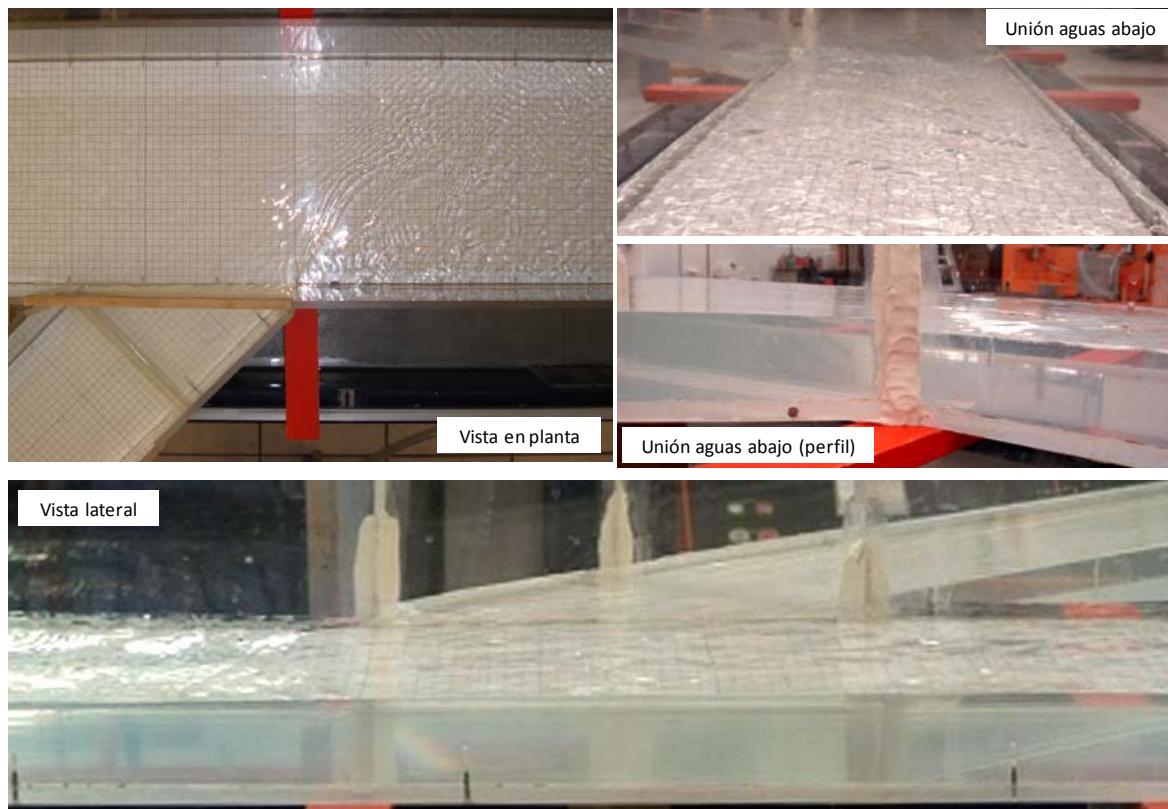


Figura 4.15. Resultados de la medición de tirantes y documentación fotográfica de la prueba 05.

Prueba:	05	Ángulo:	$\theta = 45^\circ$	Gastos:	$Q_1 = 2.7 \text{ l/s}$	$Q_2 = 1.3 \text{ l/s}$	$Q_3 = 4 \text{ l/s}$	$q_1 = 0.67$	$q_2 = 0.33$
----------------	-----------	----------------	---------------------	----------------	-------------------------	-------------------------	-----------------------	--------------	--------------

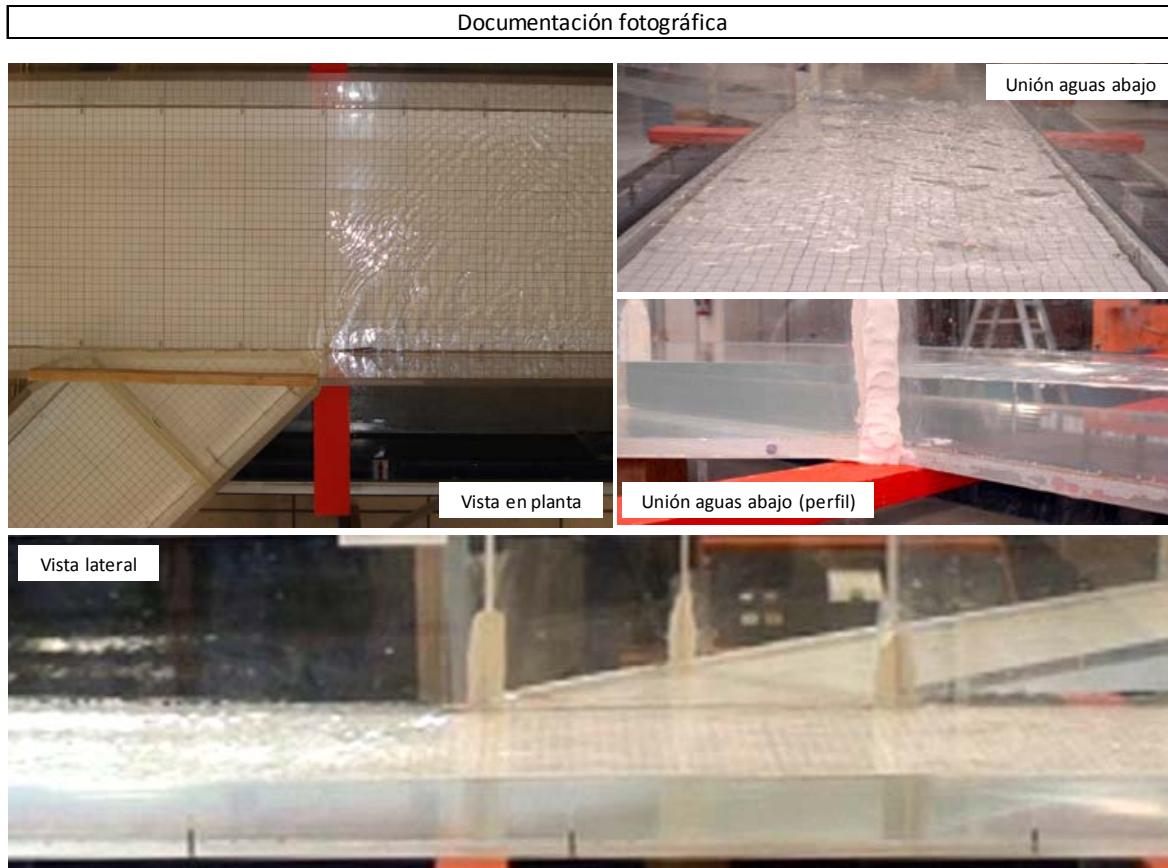
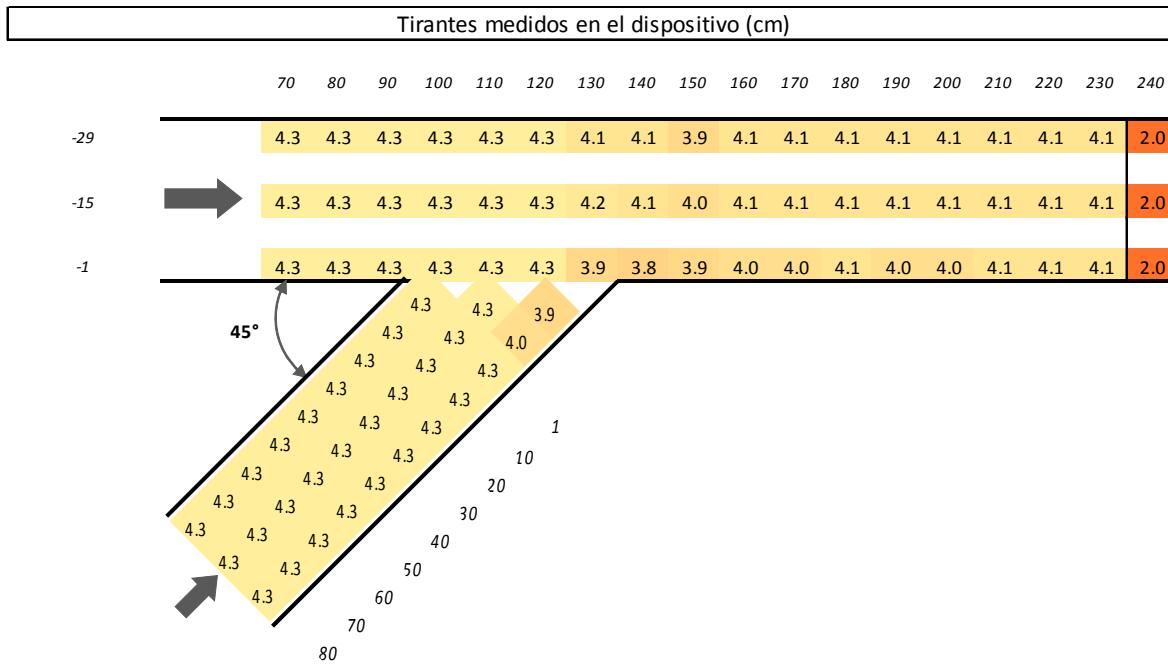
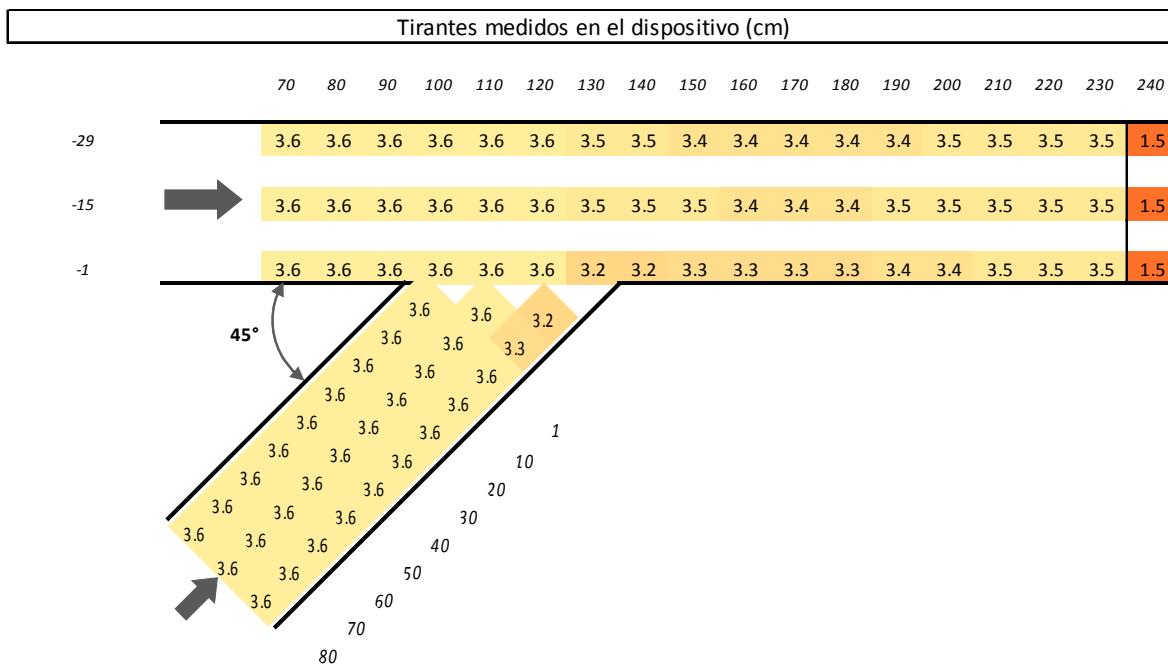


Figura 4.16. Resultados de la medición de tirantes y documentación fotográfica de la prueba 06.

Prueba:	06	Ángulo:	$\theta = 45^\circ$	Gastos:	$Q_1 = 1.3 \text{ l/s}$	$Q_2 = 1.3 \text{ l/s}$	$Q_3 = 2.6 \text{ l/s}$	$q_1 = 0.50$	$q_2 = 0.50$
----------------	-----------	----------------	---------------------	----------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	--------------	--------------

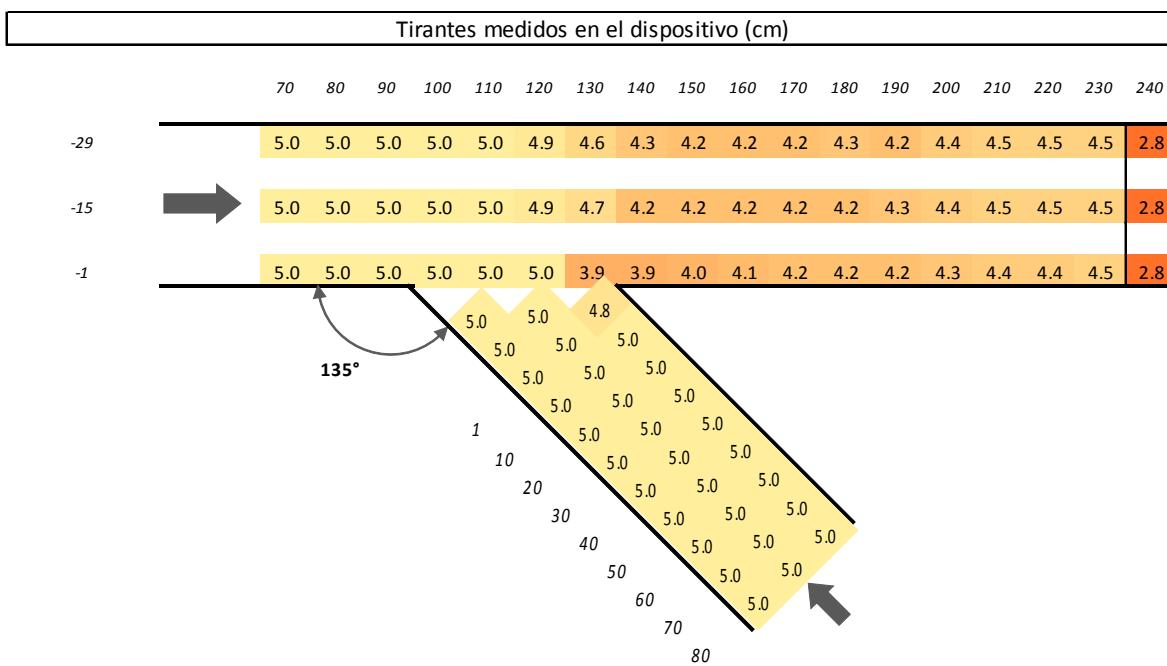


Documentación fotográfica



Figura 4.17. Resultados de la medición de tirantes y documentación fotográfica de la prueba 07.

Prueba:	07	Ángulo:	$\theta = 135^\circ$	Gastos:	$Q_1 = 4 \text{ l/s}$	$Q_2 = 1.3 \text{ l/s}$	$Q_3 = 5.3 \text{ l/s}$	$q_1 = 0.75$	$q_2 = 0.25$
---------	-----------	---------	----------------------	---------	-----------------------	-------------------------	-------------------------	--------------	--------------

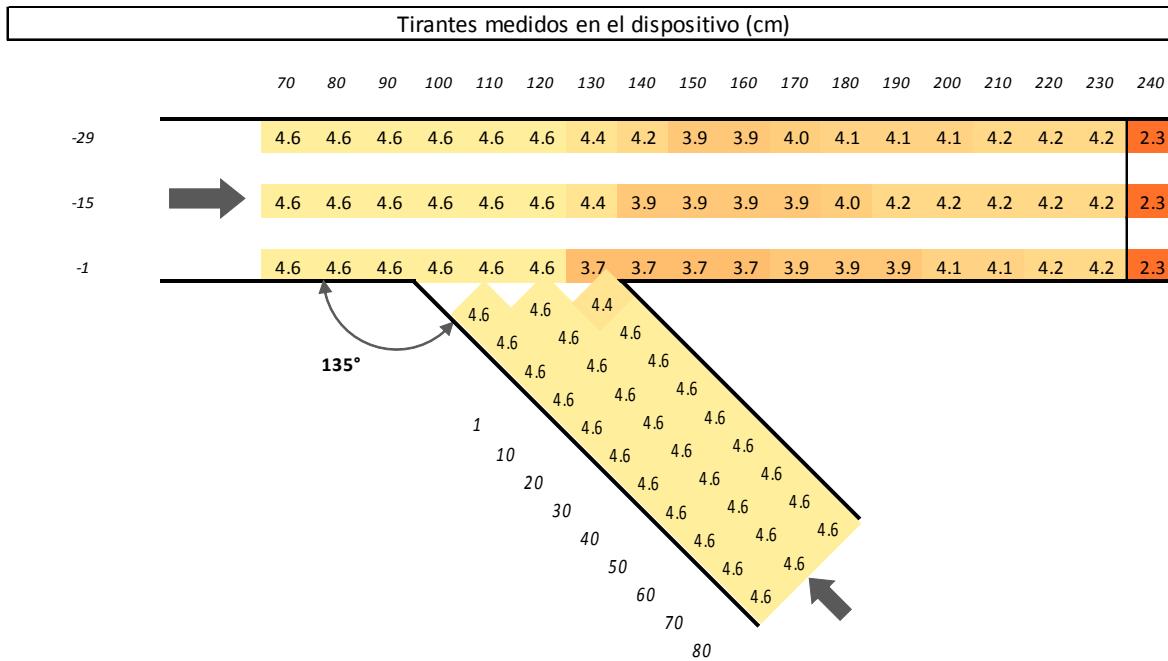


Documentación fotográfica



Figura 4.18. Resultados de la medición de tirantes y documentación fotográfica de la prueba 08.

Prueba:	08	Ángulo:	$\theta = 135^\circ$	Gastos:	$Q_1 = 2.7 \text{ l/s}$	$Q_2 = 1.3 \text{ l/s}$	$Q_3 = 4 \text{ l/s}$	$q_1 = 0.67$	$q_2 = 0.33$
----------------	-----------	----------------	----------------------	----------------	-------------------------	-------------------------	-----------------------	--------------	--------------



Documentación fotográfica



Figura 4.19. Resultados de la medición de tirantes y documentación fotográfica de la prueba 09.

Prueba:	09	Ángulo:	$\theta = 135^\circ$	Gastos:	$Q_1 = 1.3 \text{ l/s}$	$Q_2 = 1.3 \text{ l/s}$	$Q_3 = 2.6 \text{ l/s}$	$q_1 = 0.50$	$q_2 = 0.50$
----------------	-----------	----------------	----------------------	----------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	--------------	--------------

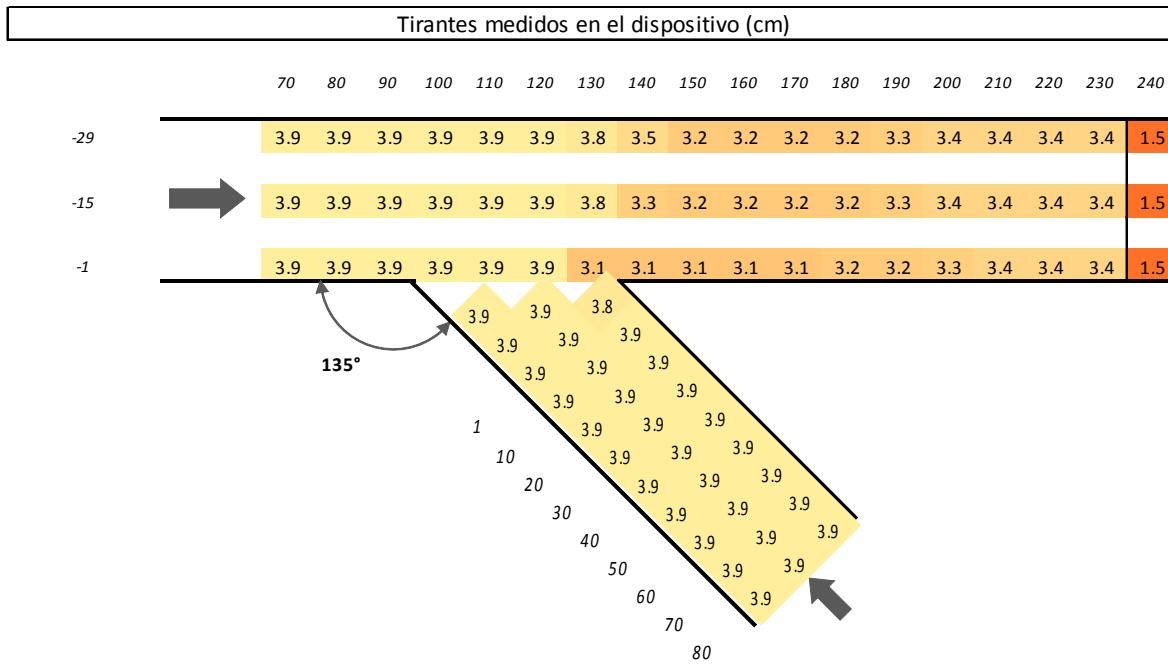


Tabla 4.4. Velocidad media calculada y número de Froude. Pruebas 07, 08 y 09.

Referencias			Prueba 07						Prueba 08						Prueba 09					
Canal	Distancia (m)	Elevación (m)	Tirante (m)	Área (m^2)	Velocidad (m/s)	Gasto (m^3/s)	Froude (adim.)	Tirante (m)	Área (m^2)	Velocidad (m/s)	Gasto (m^3/s)	Froude (adim.)	Tirante (m)	Área (m^2)	Velocidad (m/s)	Gasto (m^3/s)	Froude (adim.)			
Principal	0.70	0.0014	0.050	0.0150	0.267	0.004	0.38	0.046	0.0138	0.196	0.0027	0.29	0.039	0.0117	0.111	0.0013	0.18			
	0.80	0.0013	0.050	0.0150	0.267	0.004	0.38	0.046	0.0138	0.196	0.0027	0.29	0.039	0.0117	0.111	0.0013	0.18			
	0.90	0.0013	0.050	0.0150	0.267	0.004	0.38	0.046	0.0138	0.196	0.0027	0.29	0.039	0.0117	0.111	0.0013	0.18			
	1.00	0.0012	0.050	0.0150				0.046	0.0138			0.039	0.0117							
	1.09	0.0011	0.050	0.0150				0.046	0.0138			0.039	0.0117							
	1.10	0.0011	0.050	0.0150				0.046	0.0138			0.039	0.0117							
	1.20	0.0010	0.049	0.0147				0.046	0.0138			0.039	0.0117							
	1.30	0.0009	0.047	0.0141				0.044	0.0132			0.038	0.0114							
	1.31	0.0009	0.046	0.0138	0.384	0.0053	0.57	0.043	0.0129	0.310	0.004	0.48	0.037	0.0111	0.234	0.0026	0.39			
	1.35	0.0009	0.045	0.0135	0.393	0.0053	0.59	0.042	0.0126	0.317	0.004	0.49	0.035	0.0105	0.248	0.0026	0.42			
	1.40	0.0008	0.042	0.0126	0.421	0.0053	0.66	0.039	0.0117	0.342	0.004	0.55	0.033	0.0099	0.263	0.0026	0.46			
	1.50	0.0008	0.042	0.0126	0.421	0.0053	0.66	0.039	0.0117	0.342	0.004	0.55	0.032	0.0096	0.271	0.0026	0.48			
	1.60	0.0007	0.042	0.0126	0.421	0.0053	0.66	0.039	0.0117	0.342	0.004	0.55	0.032	0.0096	0.271	0.0026	0.48			
	1.70	0.0006	0.042	0.0126	0.421	0.0053	0.66	0.039	0.0117	0.342	0.004	0.55	0.032	0.0096	0.271	0.0026	0.48			
	1.80	0.0005	0.042	0.0126	0.421	0.0053	0.66	0.040	0.0120	0.333	0.004	0.53	0.032	0.0096	0.271	0.0026	0.48			
	1.90	0.0004	0.043	0.0129	0.411	0.0053	0.63	0.042	0.0126	0.317	0.004	0.49	0.033	0.0099	0.263	0.0026	0.46			
	2.00	0.0003	0.044	0.0132	0.402	0.0053	0.61	0.042	0.0126	0.317	0.004	0.49	0.034	0.0102	0.255	0.0026	0.44			
	2.10	0.0003	0.045	0.0135	0.393	0.0053	0.59	0.042	0.0126	0.317	0.004	0.49	0.034	0.0102	0.255	0.0026	0.44			
	2.20	0.0002	0.045	0.0135	0.393	0.0053	0.59	0.042	0.0126	0.317	0.004	0.49	0.034	0.0102	0.255	0.0026	0.44			
	2.30	0.0000	0.045	0.0135	0.393	0.0053	0.59	0.042	0.0126	0.317	0.004	0.49	0.034	0.0102	0.255	0.0026	0.44			
	2.40	0.0150	0.028	0.0084	0.631	0.0053	1.20	0.023	0.0069	0.580	0.004	1.22	0.015	0.0045	0.578	0.0026	1.51			
Tributario	0.80	0.0017	0.050	0.01	0.130	0.0013	0.19	0.046	0.0092	0.141	0.0013	0.21	0.039	0.0078	0.167	0.0013	0.27			
	0.70	0.0016	0.050	0.01	0.130	0.0013	0.19	0.046	0.0092	0.141	0.0013	0.21	0.039	0.0078	0.167	0.0013	0.27			
	0.60	0.0015	0.050	0.01	0.130	0.0013	0.19	0.046	0.0092	0.141	0.0013	0.21	0.039	0.0078	0.167	0.0013	0.27			
	0.50	0.0014	0.050	0.01	0.130	0.0013	0.19	0.046	0.0092	0.141	0.0013	0.21	0.039	0.0078	0.167	0.0013	0.27			
	0.40	0.0013	0.050	0.01	0.130	0.0013	0.19	0.046	0.0092	0.141	0.0013	0.21	0.039	0.0078	0.167	0.0013	0.27			
	0.30	0.0013	0.050	0.01	0.130	0.0013	0.19	0.046	0.0092	0.141	0.0013	0.21	0.039	0.0078	0.167	0.0013	0.27			
	0.20	0.0012	0.050	0.01	0.130	0.0013	0.19	0.046	0.0092	0.141	0.0013	0.21	0.039	0.0078	0.167	0.0013	0.27			
	0.10	0.0011	0.050	0.01	0.130	0.0013	0.19	0.046	0.0092	0.141	0.0013	0.21	0.039	0.0078	0.167	0.0013	0.27			
	0.01	0.0010	0.050	0.01	0.130	0.0013	0.19	0.046	0.0092	0.141	0.0013	0.21	0.039	0.0078	0.167	0.0013	0.27			

De la observación de las mediciones en la serie de pruebas, el tirante medido al centro del canal principal y el medido al centro del canal tributario, inmediatamente aguas arriba de la unión de los canales, se aprecia que son de igual magnitud; por lo tanto, es correcto asumir que $y_1=y_2$.

Con lo que respecta al cambio de tirante en los canales aguas arriba hacia aguas abajo de la unión, es mayor en las pruebas con ángulo de unión de 135° debido al choque de flujos, caso contrario en las pruebas con ángulo de unión de 45° donde el cambio es menor.

La documentación fotográfica muestra las características del flujo a superficie libre en la unión de dos canales. Cuando la relación de gasto q_2 es igual a 0.25, es muy evidente el cambio en la forma del flujo, pues aguas arriba de la unión la superficie del flujo es relativamente lisa e inmediatamente después de la unión se observan oleajes en la superficie del agua, generadas por el flujo del canal tributario.

Para la unión a 90° , el impacto del flujo del canal tributario en la pared opuesta es insignificante para una relación de gasto pequeña ($q_2 = 0.25$).

Para la unión a 45° , disminuye la longitud y el ancho de la zona de separación, debido a que el flujo del canal tributario prácticamente cambia en la dirección del flujo del canal principal.

Para la unión a 135° , la zona de separación presenta una longitud pequeña y un ancho grande, esto posiblemente por la forma de la llegada del flujo del canal tributario, pues se presenta en forma de contraflujo.

5. Modelo matemático

5.1. Características del modelo matemático

El cálculo hidráulico del flujo en la unión de dos canales se realizó por dos métodos, el primero con el uso de las ecuaciones de flujo gradualmente variado sin considerar las condiciones internas del flujo ni pérdida local, el segundo método con la aplicación del modelo matemático propuesto (capítulo 3), con el fin de comparar la importancia de considerar las condiciones internas.

a) Teoría del flujo gradualmente variado (FGV)

Para el cálculo hidráulico se consideró el flujo como gradualmente variado, utilizando el programa SUBCRIS Versión No 2/21 JUL 98/OAFM (elaborado por el Dr. Óscar A. Fuentes), que obtiene las condiciones de flujo permanente en un canal trapecial en régimen subcrítico. Se basa en el método del paso estándar:

$$H_1 = H_2 + h_f \quad (5.1)$$

donde H_1 corresponde a la energía total en la sección 1, H_2 a la energía total en la sección 2 y h_f a la perdida de energía por fricción. Se obtienen con las expresiones:

$$H_1 = z_1 + y_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} \quad (5.1)$$

$$H_2 = z_2 + y_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} \quad (5.2)$$

$$h_f = S_f \Delta x \quad (5.3)$$

La pendiente de fricción S_f se calcula mediante la ecuación de Manning:

$$S_f = \left(\frac{nV}{R^{2/3}} \right)^2 \quad (5.4)$$

donde n es el coeficiente de rugosidad, V es la velocidad media y R es el radio hidráulico.

b) *Modelo matemático propuesto*

El segundo método de cálculo corresponde a la aplicación de la ecuación (3.41)

$$Y_1^3 - \frac{b_3}{b_1} \left(1 + 2 \frac{\beta_3}{\alpha_3} F_3^2 \right) Y_1 + \frac{2}{\alpha_3} F_3^2 \left(\beta_1 \frac{b_3^2}{b_1^2} q_1^2 + \beta_2 \frac{b_3^2}{b_1 b_2} q_2 \cos \gamma \right) = 0 \quad (5.5)$$

Donde y_1 es el tirante aguas arriba en el canal principal, y_2 el tirante aguas arriba en el canal tributario, y_3 el tirante aguas abajo en el canal principal, $Y_1=y_1/y_3$, $Y_2=y_2/y_3$, Q_1 el gasto en el canal principal antes de la unión, Q_2 el gasto en el canal tributario, Q_3 el gasto en el canal principal después de la unión, $q_1=Q_1/Q_3$, $q_2=Q_2/Q_3$, θ el ángulo de unión, y F_3 el numero de Froude en la sección aguas abajo de la unión, y γ es el ángulo de la línea de corriente.

5.2. Aplicación del modelo matemático

El procedimiento de cálculo como flujo gradualmente variado, es el siguiente:

- Generación de un archivo de datos del canal principal, que incluye las características geométricas como distancia, pendiente, ancho y gasto en las secciones transversales del canal. Las secciones transversales se tomaron a cada 5 cm.
- Determinación de una sección de control para inicio del cálculo del perfil. En este caso se consideró la sección localizada aguas arriba de la descarga final ($x=2.30$ m). En las secciones que coinciden con la unión con el canal tributario, los gastos considerados con una distribución de forma lineal.
- Es necesario conocer el tirante inicial que corresponde al tirante de la sección de control.
- Se ingresan los datos al programa SUBCRIS.
- Se obtiene el cálculo hidráulico del canal principal a partir de la sección de control hacia aguas arriba.
- Para el cálculo hidráulico del canal tributario, se realiza el mismo procedimiento descrito, considerando el tirante inicial con el mismo valor del tirante calculado en el canal principal en la sección inmediatamente aguas arriba de la unión. Es decir, se asume también que $y_1 = y_2$.

El procedimiento de cálculo con el modelo matemático propuesto, es el siguiente:

- Generación de un archivo de datos del canal principal, que incluye las características geométricas como distancia, pendiente, ancho y gasto en las secciones transversales del canal.
- Cálculo de las características geométricas de la zona de separación con las ecuaciones de Gurram.
- Cálculo de los coeficientes de corrección de la energía y de la cantidad de movimiento (α y β), para la sección aguas abajo de la zona de separación (sección 3).
- El cálculo se realiza a partir de la sección de control, con la utilización del programa SUBCRIS, se realiza el cálculo como flujo gradualmente variado hasta la sección donde termina la zona de separación, es decir hasta obtener y_3 , a partir de esta sección se aplica la ecuación del modelo matemático propuesto para obtener el tirante y_1 correspondiente a la sección inmediata aguas arriba de la unión ($x=1.09$ m). Pero como se tienen los valores medidos experimentalmente, el tirante y_1 calculado se ajusta al valor y_1 medido por medio de la variable γ (ángulo de la línea de corriente).
- A partir de la sección inmediata aguas arriba de la unión ($x=1.09$ m), se realiza el cálculo hacia aguas arriba hasta la sección $x=0.70$ m con la aplicación del programa SUBCRIS y el tirante inicial y_1 .
- Para el cálculo hidráulico del canal tributario, se aplica el programa SUBCRIS considerando el tirante inicial como $y_2 = y_1$.

5.3. Resumen de resultados

El resumen del perfil de flujo medido, perfil de flujo calculado como flujo gradualmente variado, perfil de flujo calculado con el modelo matemático propuesto, y las características de la zona de separación calculadas, de todas las pruebas se presentan en las figuras 5.1 a 5.9.

Figura 5.1. Resumen del perfil de flujo medido, perfiles de flujo calculados con el método del FGV y el modelo matemático propuesto, y las características de la zona de separación calculadas. Prueba 01.

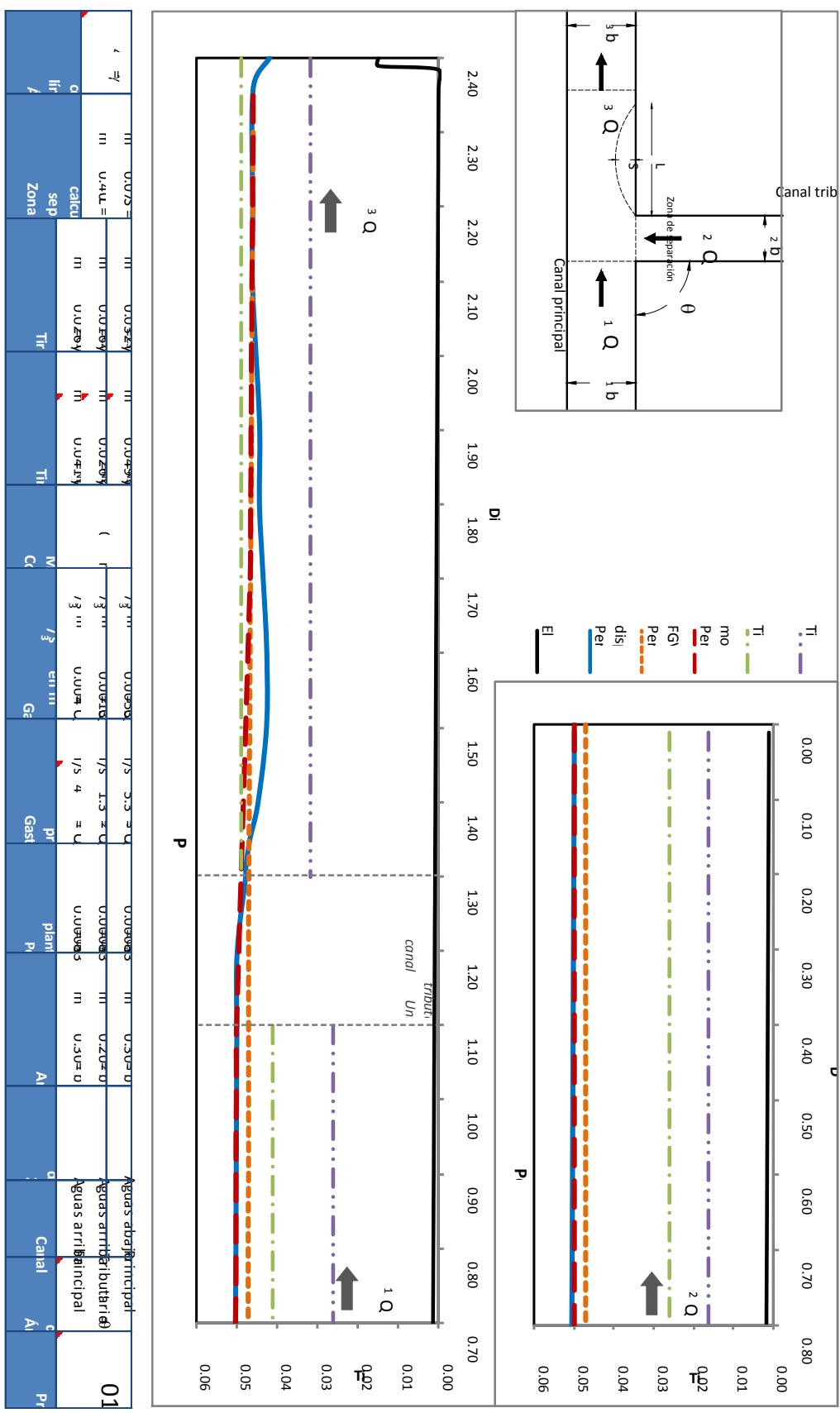


Figura 5.2. Resumen del perfil de flujo medido, perfiles de flujo calculados con el método del FGV y el modelo matemático propuesto, y las características de la zona de separación calculadas. Prueba 02.

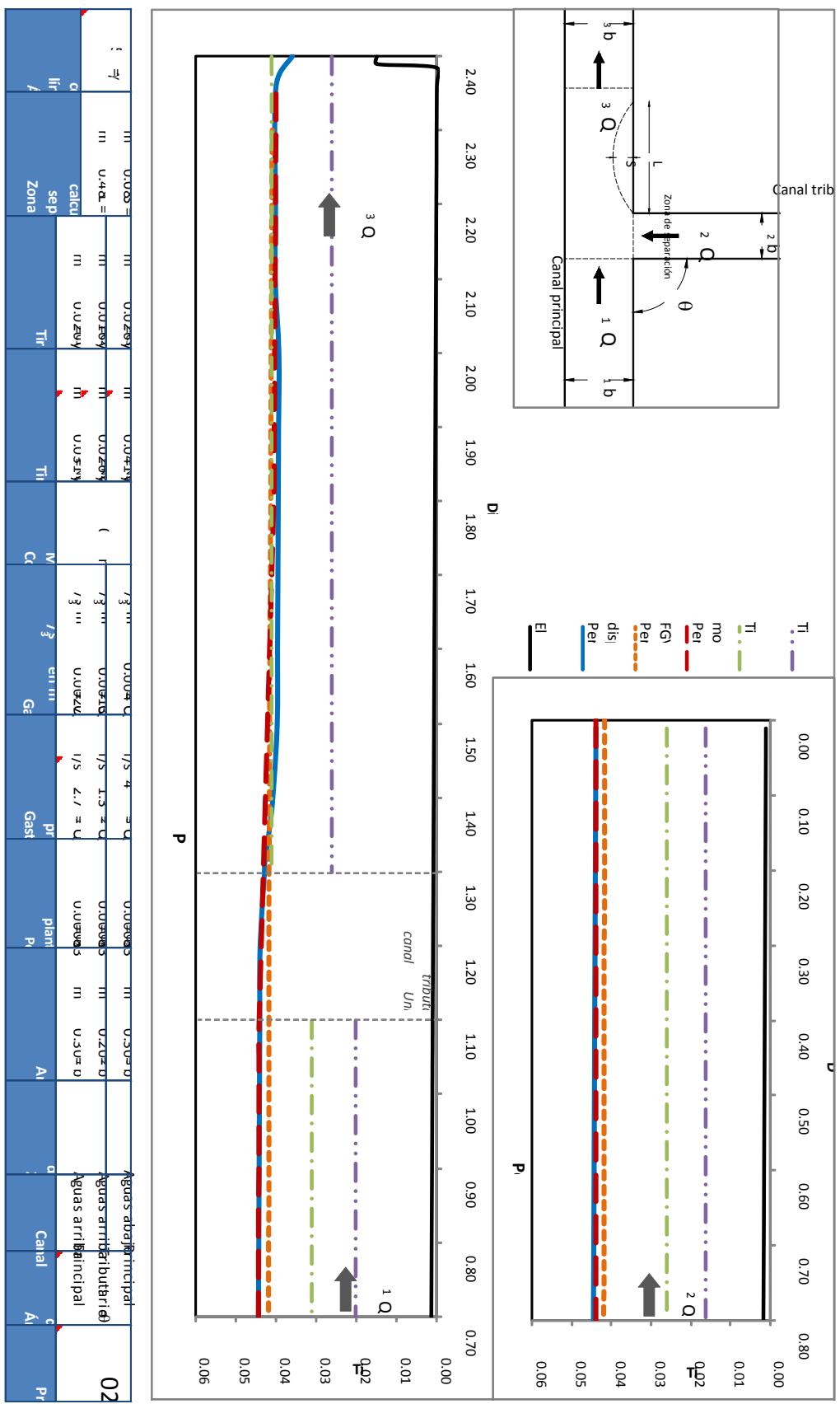


Figura 5.3. Resumen del perfil de flujo medido, perfiles de flujo calculados con el método del FGV y el modelo matemático propuesto, y las características de la zona de separación calculadas. Prueba 03.

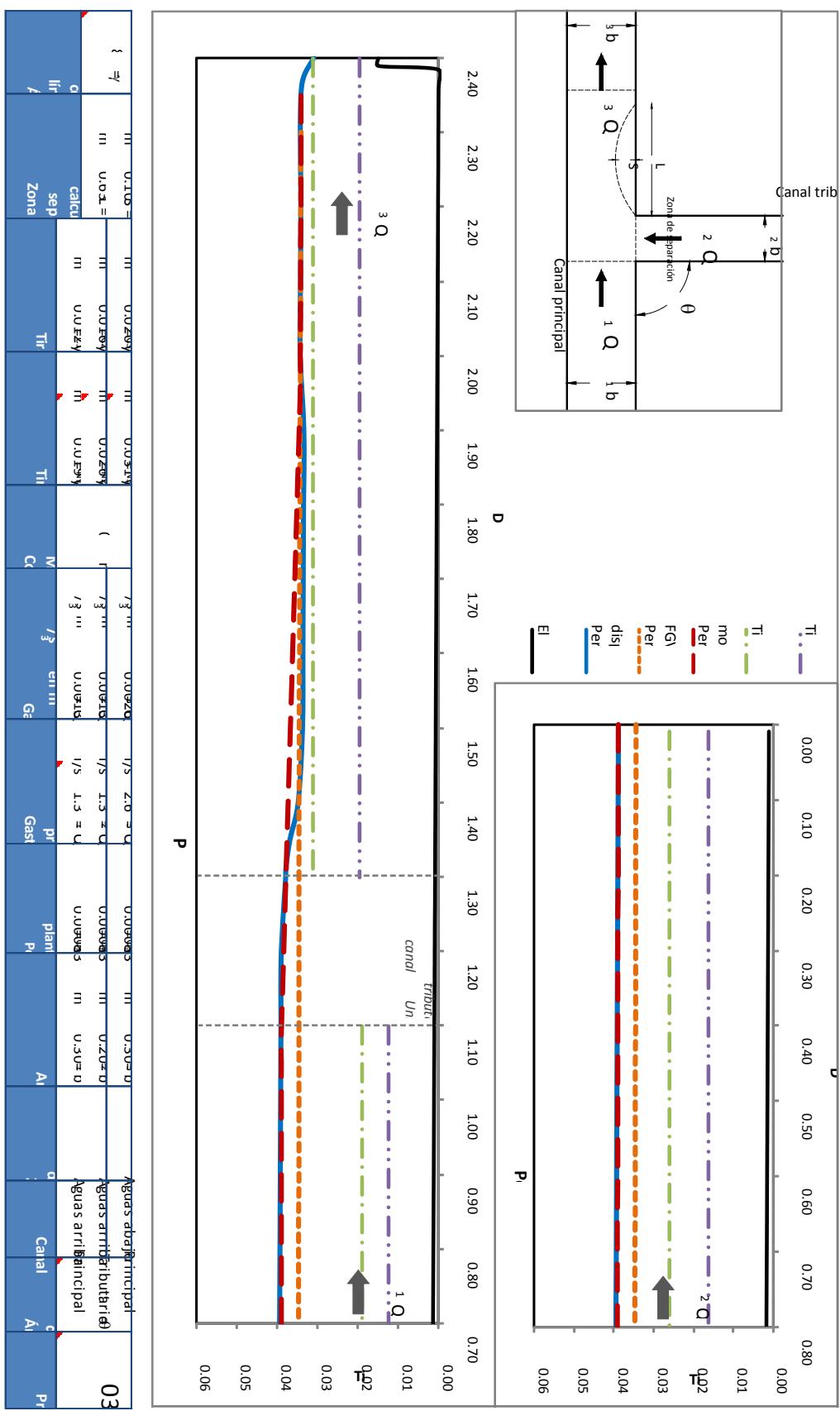


Figura 5.4. Resumen del perfil de flujo medido, perfiles de flujo calculados con el método del FGV y el modelo matemático propuesto, y las características de la zona de separación calculadas. Prueba 04.

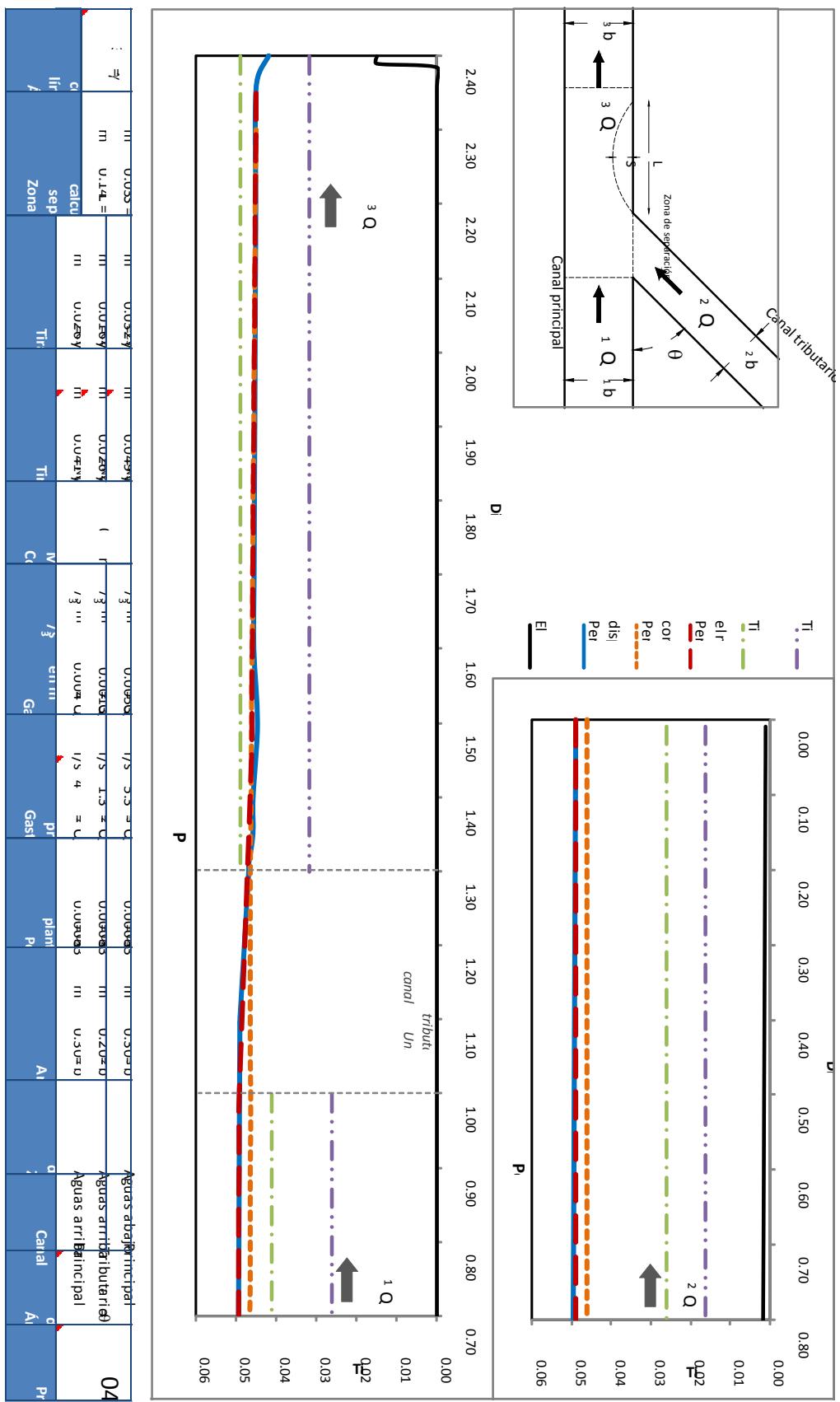


Figura 5.5. Resumen del perfil de flujo medido, perfiles de flujo calculados con el método del FGV y el modelo matemático propuesto, y las características de la zona de separación calculadas. Prueba 05.

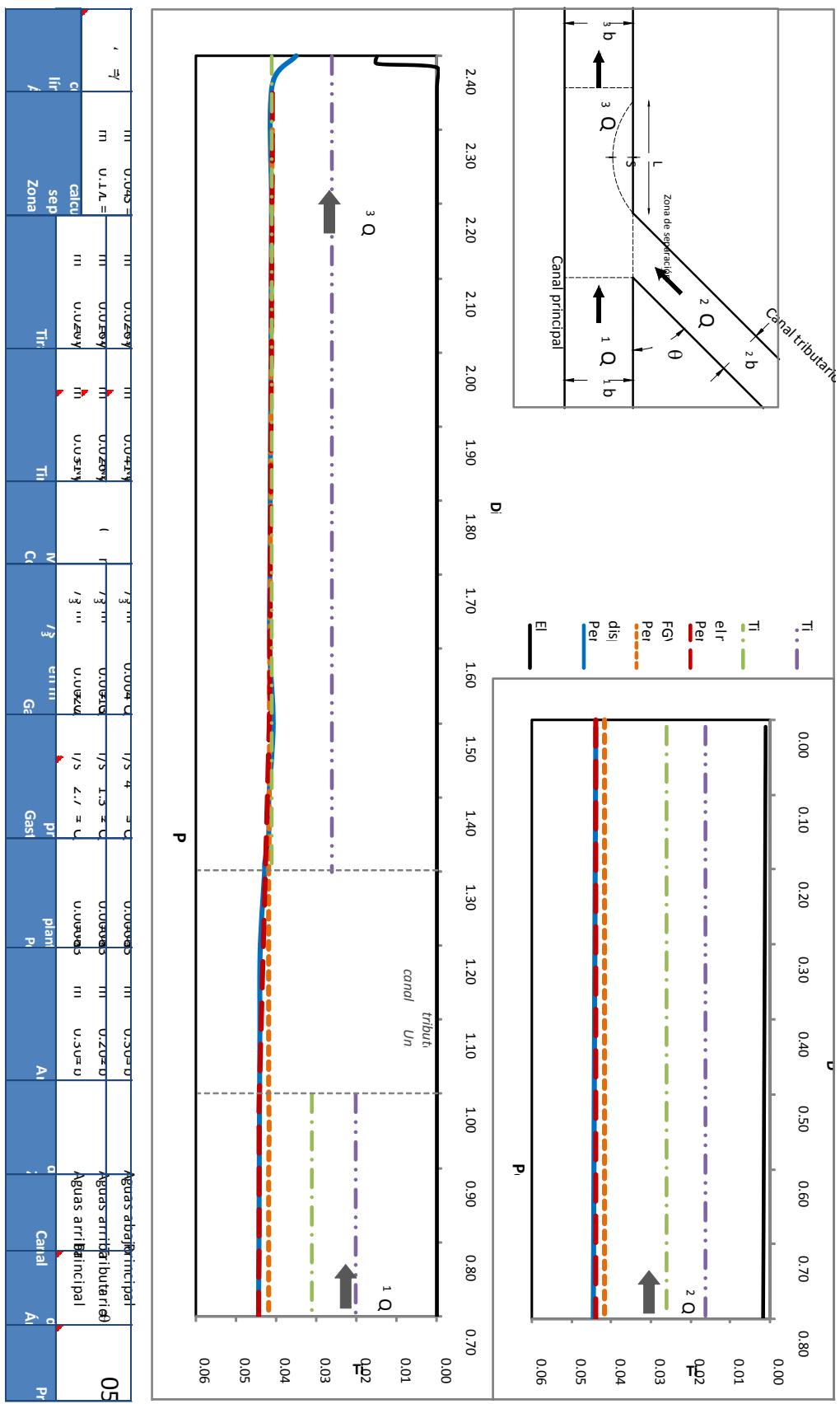


Figura 5.6. Resumen del perfil de flujo medido, perfiles de flujo calculados con el método del FGV y el modelo matemático propuesto, y las características de la zona de separación calculadas. Prueba 06.

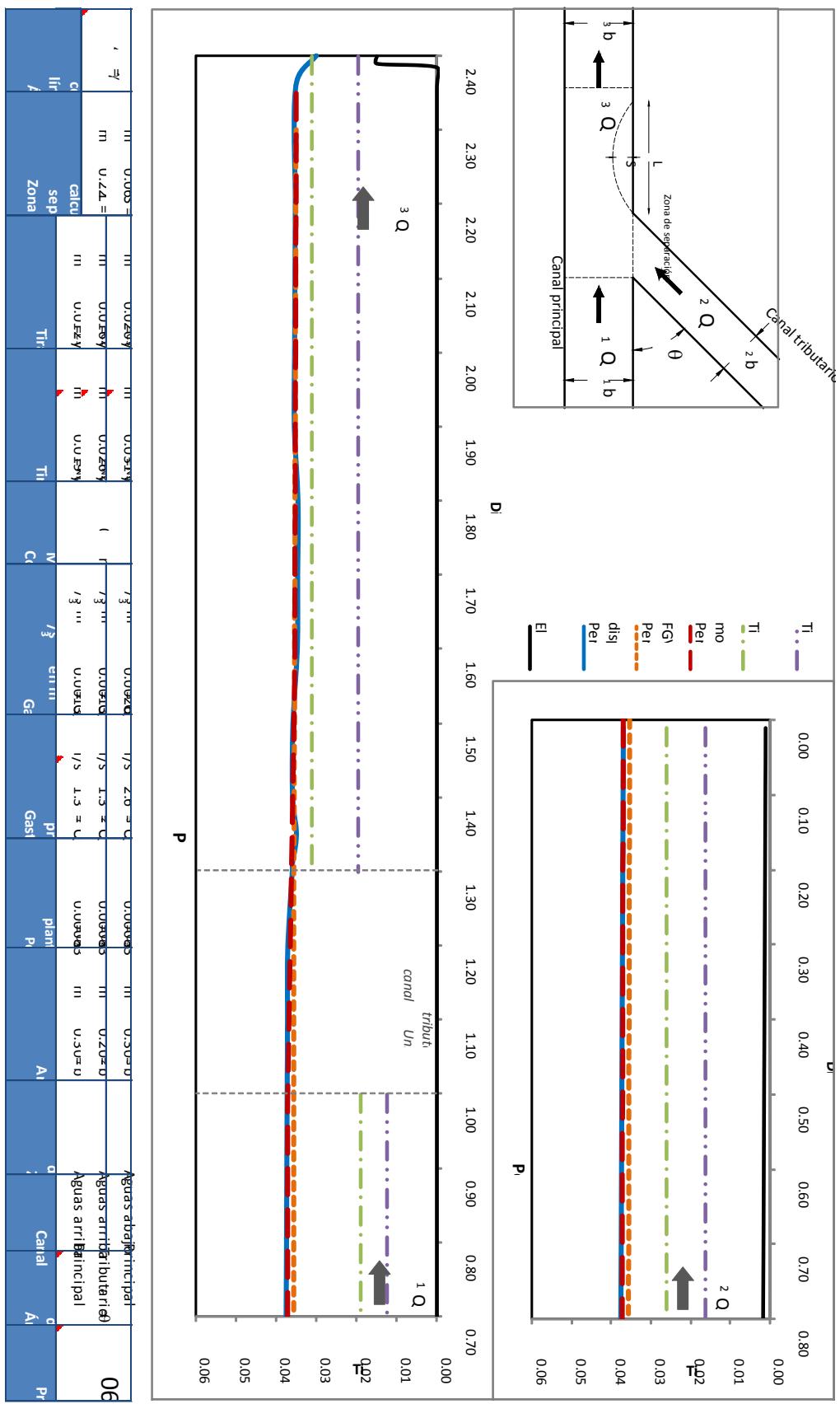


Figura 5.7. Resumen del perfil de flujo medido, perfiles de flujo calculados con el método del FGV y el modelo matemático propuesto, y las características de la zona de separación calculadas. Prueba 07.

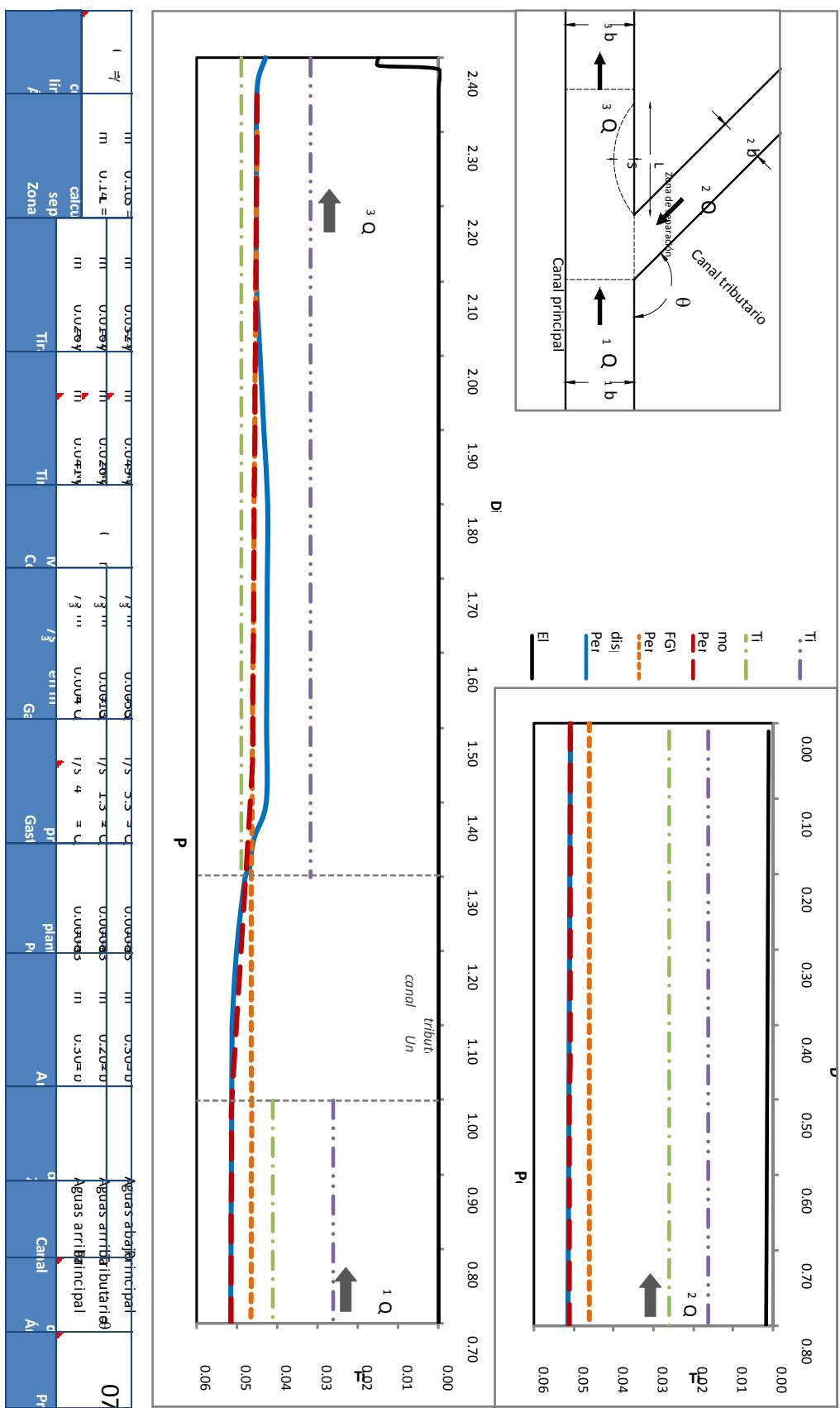


Figura 5.8. Resumen del perfil de flujo medido, perfiles de flujo calculados con el método del FGV y el modelo matemático propuesto, y las características de la zona de separación calculadas. Prueba 08.

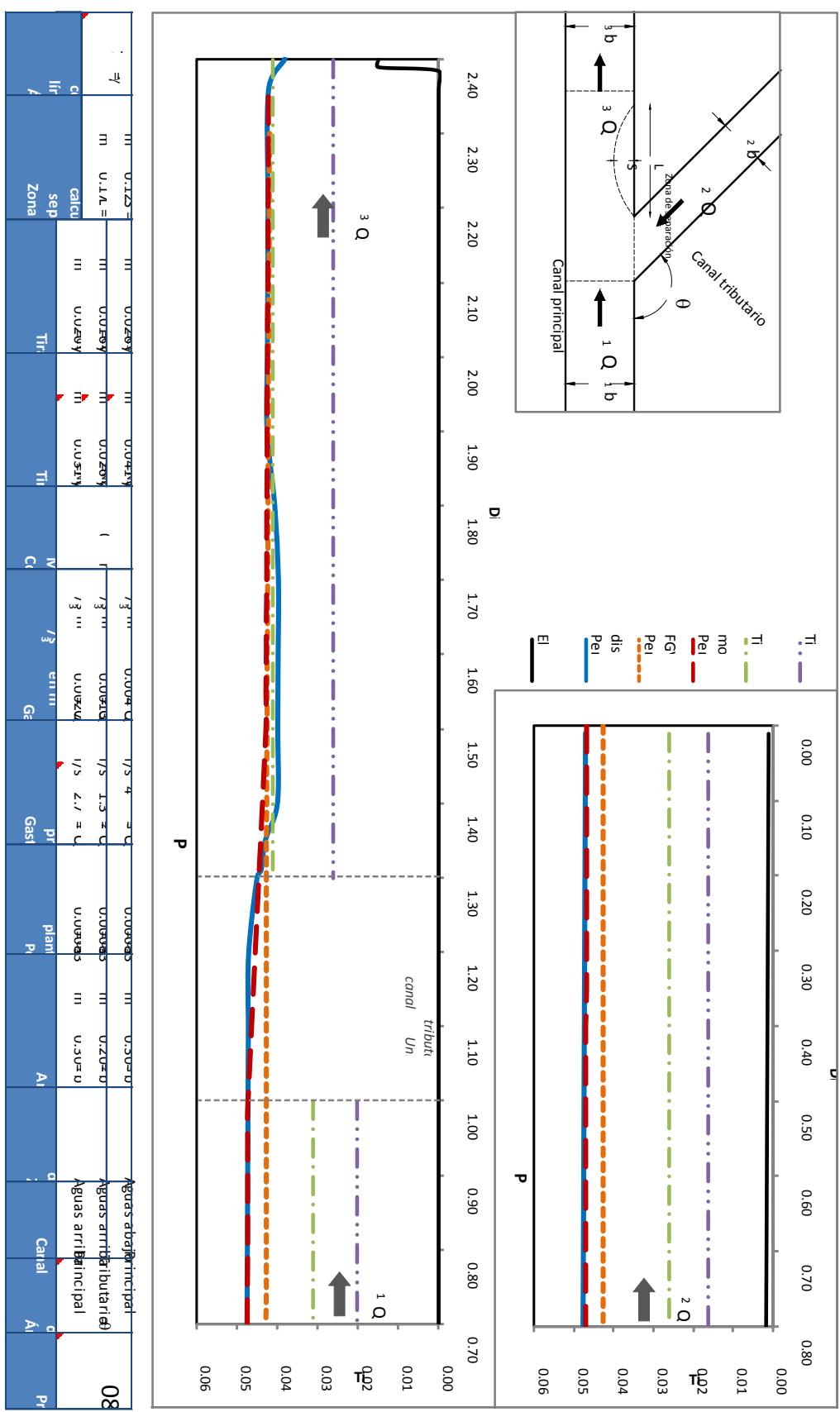
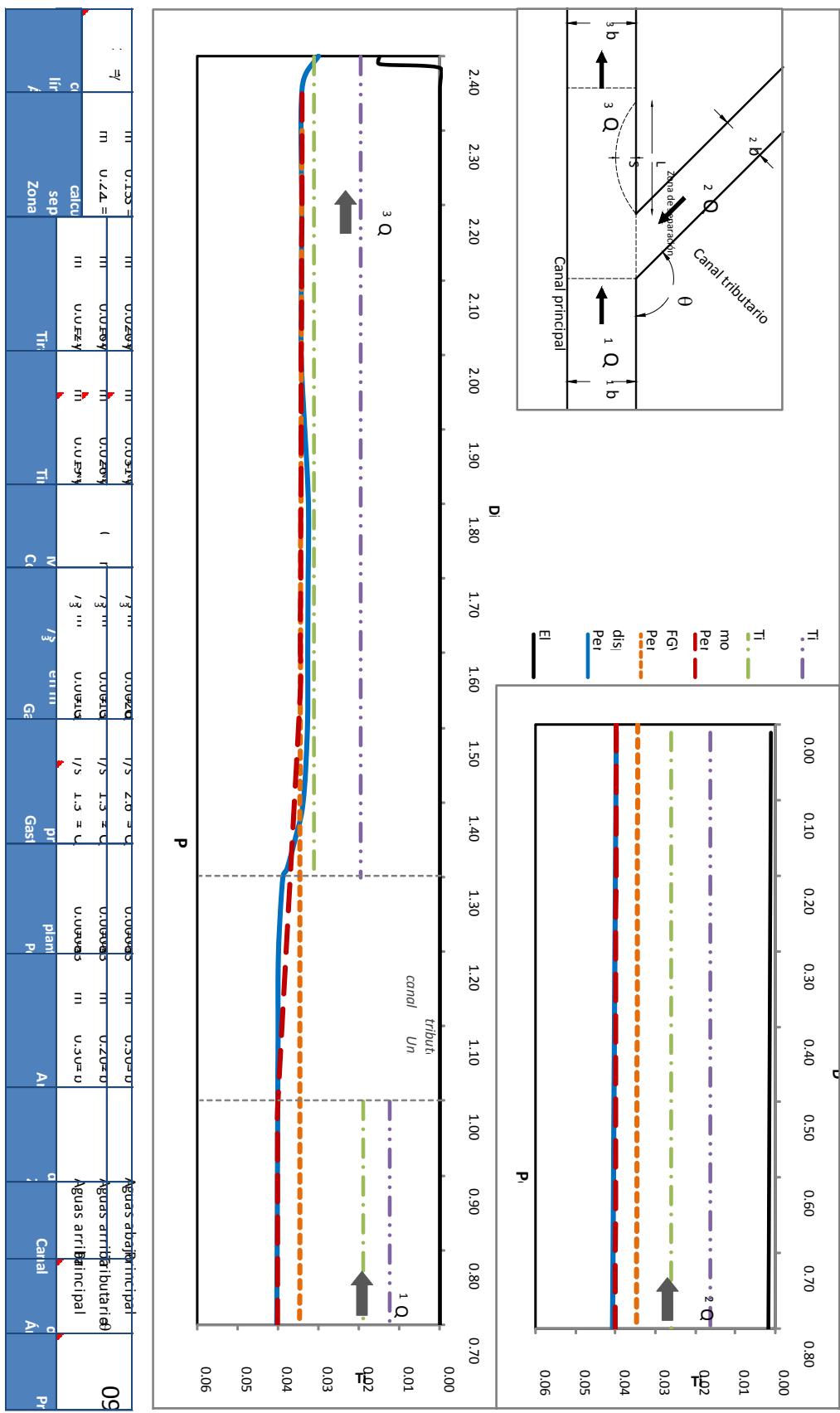


Figura 5.9. Resumen del perfil de flujo medido, perfiles de flujo calculados con el método del FGV y el modelo matemático propuesto, y las características de la zona de separación calculadas. Prueba 09.



6. Análisis de resultados del dispositivo físico y del modelo matemático

Al realizar la comparación entre los perfiles de flujo medidos y los perfiles calculados como flujo gradualmente variado, se presentan diferencias importantes en la zona de la unión de los canales y aguas arriba de la misma. Estas diferencias se indican en la tabla siguiente.

Tabla 6.1. Diferencia entre el tirante y_1 medido y el tirante y_1 calculado como FGV.

Prueba	Tirante y_1 medido	Tirante y_1 calculado FGV	Diferencia	% Dif.
01	0.049	0.0461	0.0029	6%
02	0.043	0.0408	0.0022	5%
03	0.038	0.0336	0.0044	12%
04	0.048	0.0452	0.0028	6%
05	0.043	0.0408	0.0022	5%
06	0.036	0.0345	0.0015	4%
07	0.05	0.0452	0.0048	10%
08	0.046	0.0418	0.0042	9%
09	0.039	0.0336	0.0054	14%

Por lo que es importante considerar las condiciones internas del flujo en la unión de canales, ya que en estas la diferencia es mínima.

En la tabla 6.2 se resume las variables de prueba, el ángulo de la línea de corriente obtenido, los coeficientes de corrección de la energía y de la cantidad de movimiento y el número de Froude de la sección 3, así como la longitud y ancho de la zona de separación calculados, de todas las pruebas.

Tabla 6.2. Resumen de las variables de prueba y características del modelo matemático propuesto.

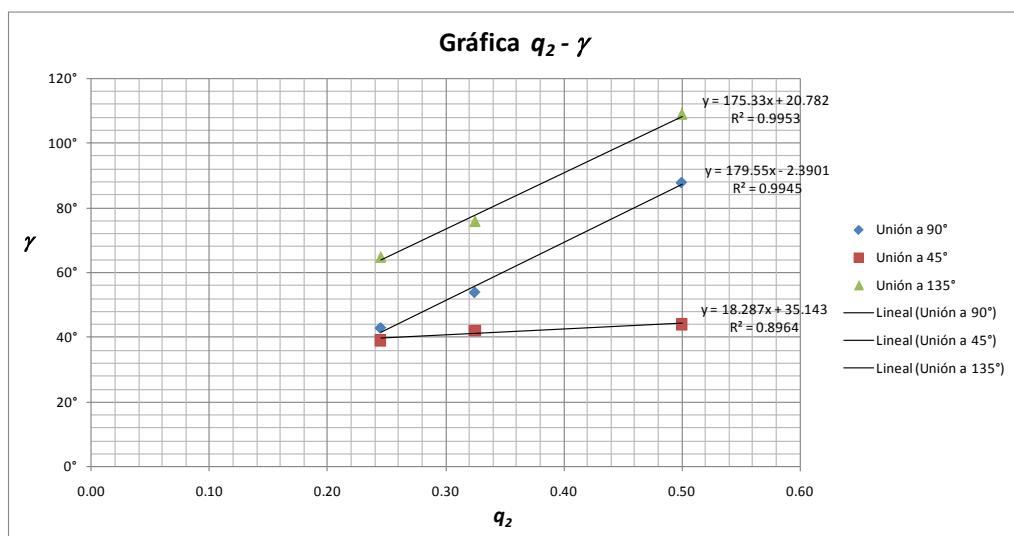
Prueba	θ	Q_1 (l/s)	Q_2 (l/s)	Q_3 (l/s)	q_1	q_2	γ	α_3	β_3	F_3	L (m)	S (m)
01	90°	4.0	1.3	5.3	0.75	0.25	43°	1.12	1.04	0.57	0.40	0.07
02	90°	2.7	1.3	4.0	0.68	0.33	54°	1.16	1.05	0.53	0.48	0.08
03	90°	1.3	1.3	2.6	0.50	0.50	88°	1.23	1.08	0.44	0.63	0.10
04	45°	4.0	1.3	5.3	0.75	0.25	39°	1.08	1.03	0.58	0.14	0.03
05	45°	2.7	1.3	4.0	0.68	0.33	42°	1.10	1.03	0.51	0.17	0.04
06	45°	1.3	1.3	2.6	0.50	0.50	44°	1.14	1.05	0.43	0.22	0.06
07	135°	4.0	1.3	5.3	0.75	0.25	65°	1.08	1.03	0.60	0.14	0.10
08	135°	2.7	1.3	4.0	0.68	0.33	76°	1.10	1.03	0.50	0.17	0.12
09	135°	1.3	1.3	2.6	0.50	0.50	109°	1.14	1.05	0.47	0.22	0.15

Al observar la tabla anterior, para las pruebas donde el ángulo de unión θ es 90° se tiene un ángulo de la línea de corriente γ mayor cuando la relación de gastos q_2 es 0.5 que cuando q_2 es igual a 0.25, esto probablemente a la variación de la cantidad de movimiento específica presentado en el canal tributario.

En el caso de las pruebas con ángulo de unión de 45°, el rango de variación del ángulo de la línea de corriente es pequeño, esto posiblemente a causa de la dirección del flujo del canal tributario puesto que es muy próximo a la dirección del flujo del canal principal.

Para las pruebas con ángulo de unión de 135°, el rango de variación del ángulo de la línea de corriente es grande, esto ocasionado al choque de flujos entre el canal tributario y el canal principal.

Al utilizar el ángulo de la línea de corriente del canal tributario γ como una variable, con la cual se realizó una mejor aproximación del tirante y_1 calculado con el tirante medido, se encontró que es una variable que está en función de la relación de gastos q_2 .



6.2. Gráfica entre el ángulo de la línea de corriente obtenido γ y la relación de gastos q_2 .

7. Conclusiones y recomendaciones

7.1. Conclusiones

Para llevar a cabo el análisis del flujo a superficie libre en la unión de dos canales, fue necesario diseñar un dispositivo físico a partir de las condiciones de la mesa de trabajo del Laboratorio de Hidráulica de la Unidad de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México, con la característica de que los anchos de los canales principal y tributario son diferentes.

Se propuso un modelo matemático que se basa en el principio de cantidad de movimiento específica, con la hipótesis de igualdad entre tirantes de los canales principal y tributario inmediatamente aguas arriba de la unión ($y_1=y_2$).

Al comparar los resultados del análisis experimental con los resultados del modelo matemático, para el caso del método que no toma en cuenta las condiciones internas. Es decir, calculado como flujo gradualmente variado, presenta grandes diferencias respecto al perfil de flujo medido en la zona de unión y aguas arriba de esta. Aplicando el modelo matemático propuesto se presenta una buena aproximación con el perfil de flujo medido, con la consideración del ángulo de la línea de corriente como variable y en función de la relación de gastos q_2 .

Por otra parte, la zona de la separación es particularmente importante para el flujo a superficie libre en la unión de dos canales, por su efecto de contracción, aceleración del flujo, turbulencia y forma de movimiento.

7.2. Recomendaciones

Elaborar un análisis experimental con diferentes anchos del canal tributario, así como incrementar el gasto en el canal tributario de manera que la relación de gastos q_2 sea mayor a 0.5. Así como analizar con otros ángulos de unión.

Por la diversidad de variables, puede llevarse a cabo una gran cantidad de estudios del flujo en la unión de canales, como puede ser por ejemplo cambiar la sección de rectangular a trapecial, diferentes materiales del dispositivo, pendientes de los canales, entre otros.

Complementar el análisis experimental de las líneas de corriente del flujo en la unión de dos canales, con la medición de velocidades en múltiples puntos con el equipo PIV láser de Armfield o incrementar las dimensiones y gastos del dispositivo para utilizar el equipo ADV (Acoustic Doppler Velocimeter).

Estudiar de forma detallada las características de la zona de separación.

Desarrollar un programa de cómputo para el cálculo hidráulico del flujo a superficie libre en la unión de dos canales que tome en cuenta las condiciones internas del flujo.

Anexo A. Resumen de perfiles de flujo calculados como Flujo Gradualmente Variado

A.1. Resumen de perfiles de flujo calculados como Flujo Gradualmente Variado de las pruebas 01, 02 y 03.

B.2. Resumen de perfiles de flujo calculados con el método matemático propuesto de las pruebas 04, 05 y 06.

Perfil calculado cocon el modelo matemático propuesto																				
Referencias			Prueba 04						Prueba 05						Prueba 06					
Canal	Distancia (m)	Elevación (m)	Tirante (m)	Área (m ²)	Velocidad (m/s)	Gasto (m ³ /s)	Froude (adim.)	Tirante (m)	Área (m ²)	Velocidad (m/s)	Gasto (m ³ /s)	Froude (adim.)	Tirante (m)	Área (m ²)	Velocidad (m/s)	Gasto (m ³ /s)	Froude (adim.)			
Principal	2.35	0.0001	0.045	0.0135	0.392	0.0053	0.59	0.041	0.0123	0.325	0.004	0.51	0.035	0.0105	0.248	0.0026	0.42			
	2.30	0.0001	0.045	0.0135	0.392	0.0053	0.59	0.041	0.0123	0.325	0.004	0.51	0.035	0.0105	0.248	0.0026	0.42			
	2.25	0.0001	0.045	0.0135	0.392	0.0053	0.59	0.041	0.0123	0.325	0.004	0.51	0.035	0.0105	0.248	0.0026	0.42			
	2.20	0.0002	0.045	0.0135	0.392	0.0053	0.59	0.041	0.0123	0.325	0.004	0.51	0.035	0.0105	0.248	0.0026	0.42			
	2.15	0.0002	0.045	0.0135	0.392	0.0053	0.59	0.041	0.0123	0.325	0.004	0.51	0.035	0.0105	0.248	0.0026	0.42			
	2.10	0.0003	0.045	0.0135	0.392	0.0053	0.59	0.041	0.0123	0.325	0.004	0.51	0.035	0.0105	0.248	0.0026	0.42			
	2.05	0.0003	0.045	0.0135	0.391	0.0053	0.59	0.041	0.0123	0.325	0.004	0.51	0.035	0.0105	0.248	0.0026	0.42			
	2.00	0.0004	0.045	0.0135	0.391	0.0053	0.59	0.041	0.0123	0.325	0.004	0.51	0.035	0.0105	0.249	0.0026	0.42			
	1.95	0.0004	0.045	0.0136	0.391	0.0053	0.59	0.041	0.0123	0.325	0.004	0.51	0.035	0.0105	0.249	0.0026	0.43			
	1.90	0.0004	0.045	0.0136	0.391	0.0053	0.59	0.041	0.0123	0.325	0.004	0.51	0.035	0.0105	0.249	0.0026	0.43			
	1.85	0.0005	0.045	0.0136	0.391	0.0053	0.59	0.041	0.0123	0.325	0.004	0.51	0.035	0.0104	0.249	0.0026	0.43			
	1.80	0.0005	0.045	0.0136	0.391	0.0053	0.59	0.041	0.0123	0.325	0.004	0.51	0.035	0.0104	0.249	0.0026	0.43			
	1.75	0.0006	0.045	0.0136	0.390	0.0053	0.59	0.041	0.0123	0.325	0.004	0.51	0.035	0.0104	0.249	0.0026	0.43			
	1.70	0.0006	0.045	0.0136	0.390	0.0053	0.59	0.041	0.0123	0.325	0.004	0.51	0.035	0.0104	0.249	0.0026	0.43			
	1.65	0.0006	0.045	0.0136	0.390	0.0053	0.59	0.041	0.0123	0.325	0.004	0.51	0.035	0.0104	0.249	0.0026	0.43			
	1.60	0.0007	0.045	0.0136	0.390	0.0053	0.58	0.041	0.0123	0.325	0.004	0.51	0.035	0.0104	0.249	0.0026	0.43			
	1.55	0.0007	0.045	0.0136	0.390	0.0053	0.58	0.041	0.0123	0.325	0.004	0.51	0.035	0.0104	0.250	0.0026	0.43			
	1.50	0.0008	0.045	0.0136	0.390	0.0053	0.58	0.041	0.0123	0.325	0.004	0.51								
	1.45	0.0008	0.045	0.0136	0.389	0.0053	0.58													
	0.99	0.0012	0.048	0.0144	0.278	0.004	0.40	0.043	0.0129	0.209	0.0027	0.32	0.036	0.0108	0.120	0.0013	0.20			
	0.95	0.0012	0.048	0.0144	0.278	0.004	0.40	0.043	0.0129	0.209	0.0027	0.32	0.036	0.0108	0.121	0.0013	0.20			
	0.90	0.0013	0.048	0.0144	0.278	0.004	0.41	0.043	0.0129	0.210	0.0027	0.32	0.036	0.0108	0.121	0.0013	0.20			
	0.85	0.0013	0.048	0.0144	0.278	0.004	0.41	0.043	0.0129	0.210	0.0027	0.32	0.036	0.0108	0.121	0.0013	0.20			
	0.80	0.0014	0.048	0.0144	0.278	0.004	0.41	0.043	0.0129	0.210	0.0027	0.32	0.036	0.0108	0.121	0.0013	0.20			
	0.75	0.0014	0.048	0.0144	0.278	0.004	0.41	0.043	0.0129	0.210	0.0027	0.32	0.036	0.0107	0.121	0.0013	0.20			
	0.70	0.0014	0.048	0.0144	0.278	0.004	0.41	0.043	0.0129	0.210	0.0027	0.32	0.036	0.0107	0.121	0.0013	0.20			
Tributario	0.00	0.0010	0.048	0.0096	0.135	0.0013	0.20	0.043	0.0086	0.151	0.0013	0.23	0.036	0.0072	0.181	0.0013	0.30			
	0.05	0.0010	0.048	0.0096	0.136	0.0013	0.20	0.043	0.0086	0.151	0.0013	0.23	0.036	0.0072	0.181	0.0013	0.30			
	0.10	0.0011	0.048	0.0096	0.136	0.0013	0.20	0.043	0.0086	0.151	0.0013	0.23	0.036	0.0072	0.181	0.0013	0.30			
	0.15	0.0011	0.048	0.0096	0.136	0.0013	0.20	0.043	0.0086	0.152	0.0013	0.23	0.036	0.0072	0.181	0.0013	0.30			
	0.20	0.0012	0.048	0.0096	0.136	0.0013	0.20	0.043	0.0086	0.152	0.0013	0.23	0.036	0.0072	0.181	0.0013	0.31			
	0.25	0.0012	0.048	0.0096	0.136	0.0013	0.20	0.043	0.0086	0.152	0.0013	0.23	0.036	0.0072	0.181	0.0013	0.31			
	0.30	0.0012	0.048	0.0096	0.136	0.0013	0.20	0.043	0.0086	0.152	0.0013	0.23	0.036	0.0072	0.181	0.0013	0.31			
	0.35	0.0013	0.048	0.0096	0.136	0.0013	0.20	0.043	0.0086	0.152	0.0013	0.23	0.036	0.0072	0.182	0.0013	0.31			
	0.40	0.0013	0.048	0.0095	0.136	0.0013	0.20	0.043	0.0085	0.152	0.0013	0.23	0.036	0.0072	0.182	0.0013	0.31			
	0.45	0.0014	0.048	0.0095	0.136	0.0013	0.20	0.043	0.0085	0.152	0.0013	0.24	0.036	0.0072	0.182	0.0013	0.31			
	0.50	0.0014	0.048	0.0095	0.136	0.0013	0.20	0.043	0.0085	0.152	0.0013	0.24	0.036	0.0071	0.182	0.0013	0.31			
	0.55	0.0015	0.048	0.0095	0.137	0.0013	0.20	0.043	0.0085	0.153	0.0013	0.24	0.036	0.0071	0.182	0.0013	0.31			
	0.60	0.0015	0.048	0.0095	0.137	0.0013	0.20	0.043	0.0085	0.153	0.0013	0.24	0.036	0.0071	0.182	0.0013	0.31			
	0.65	0.0015	0.048	0.0095	0.137	0.0013	0.20	0.043	0.0085	0.153	0.0013	0.24	0.036	0.0071	0.182	0.0013	0.31			
	0.70	0.0016	0.048	0.0095	0.137	0.0013	0.20	0.043	0.0085	0.153	0.0013	0.24	0.036	0.0071	0.183	0.0013	0.31			
	0.75	0.0016	0.048	0.0095	0.137	0.0013	0.20	0.043	0.0085	0.153	0.0013	0.24	0.036	0.0071	0.183	0.0013	0.31			
	0.80	0.0017	0.047	0.0095	0.137	0.0013	0.20	0.043	0.0085	0.153	0.0013	0.24	0.036	0.0071	0.183	0.0013	0.31			

B.3. Resumen de perfiles de flujo calculados con el método matemático propuesto de las pruebas 07, 08 y 09.

Perfil calculado cocon el modelo matemático propuesto																				
Referencias			Prueba 07						Prueba 08						Prueba 09					
Canal	Distancia (m)	Elevación (m)	Tirante (m)	Área (m ²)	Velocidad (m/s)	Gasto (m ³ /s)	Froude (adim.)	Tirante (m)	Área (m ²)	Velocidad (m/s)	Gasto (m ³ /s)	Froude (adim.)	Tirante (m)	Área (m ²)	Velocidad (m/s)	Gasto (m ³ /s)	Froude (adim.)			
Principal	2.35	0.0001	0.045	0.0135	0.392	0.0053	0.59	0.042	0.0126	0.318	0.004	0.49	0.034	0.0102	0.255	0.0026	0.44			
	2.30	0.0001	0.045	0.0135	0.392	0.0053	0.59	0.042	0.0126	0.318	0.004	0.49	0.034	0.0102	0.255	0.0026	0.44			
	2.25	0.0001	0.045	0.0135	0.392	0.0053	0.59	0.042	0.0126	0.318	0.004	0.49	0.034	0.0102	0.255	0.0026	0.44			
	2.20	0.0002	0.045	0.0135	0.392	0.0053	0.59	0.042	0.0126	0.318	0.004	0.49	0.034	0.0102	0.255	0.0026	0.44			
	2.15	0.0002	0.045	0.0135	0.392	0.0053	0.59	0.042	0.0126	0.318	0.004	0.49	0.034	0.0102	0.255	0.0026	0.44			
	2.10	0.0003	0.045	0.0135	0.392	0.0053	0.59	0.042	0.0126	0.318	0.004	0.50	0.034	0.0102	0.256	0.0026	0.44			
	2.05	0.0003	0.045	0.0135	0.391	0.0053	0.59	0.042	0.0126	0.318	0.004	0.50	0.034	0.0102	0.256	0.0026	0.44			
	2.00	0.0004	0.045	0.0135	0.391	0.0053	0.59	0.042	0.0126	0.318	0.004	0.50	0.034	0.0102	0.256	0.0026	0.44			
	1.95	0.0004	0.045	0.0136	0.391	0.0053	0.59	0.042	0.0126	0.318	0.004	0.50	0.034	0.0102	0.256	0.0026	0.44			
	1.90	0.0004	0.045	0.0136	0.391	0.0053	0.59	0.042	0.0126	0.318	0.004	0.50	0.034	0.0102	0.256	0.0026	0.44			
	1.85	0.0005	0.045	0.0136	0.391	0.0053	0.59	0.042	0.0126	0.318	0.004	0.50	0.034	0.0102	0.256	0.0026	0.44			
	1.80	0.0005	0.045	0.0136	0.391	0.0053	0.59	0.042	0.0126	0.318	0.004	0.50	0.034	0.0102	0.256	0.0026	0.44			
	1.75	0.0006	0.045	0.0136	0.390	0.0053	0.59	0.042	0.0126	0.318	0.004	0.50	0.034	0.0102	0.256	0.0026	0.44			
	1.70	0.0006	0.045	0.0136	0.390	0.0053	0.59	0.042	0.0126	0.318	0.004	0.50	0.034	0.0101	0.256	0.0026	0.44			
	1.65	0.0006	0.045	0.0136	0.390	0.0053	0.59	0.042	0.0126	0.318	0.004	0.50	0.034	0.0101	0.256	0.0026	0.44			
	1.60	0.0007	0.045	0.0136	0.390	0.0053	0.58	0.042	0.0126	0.318	0.004	0.50	0.034	0.0101	0.256	0.0026	0.45			
	1.55	0.0007	0.045	0.0136	0.390	0.0053	0.58	0.042	0.0126	0.318	0.004	0.50	0.034	0.0101	0.257	0.0026	0.45			
	1.50	0.0008	0.045	0.0136	0.390	0.0053	0.58	0.042	0.0126	0.318	0.004	0.50								
	1.45	0.0008	0.045	0.0136	0.389	0.0053	0.58													
	0.99	0.0012	0.050	0.0150	0.267	0.004	0.38	0.046	0.0138	0.196	0.0027	0.29	0.039	0.0117	0.111	0.0013	0.18			
	0.95	0.0012	0.050	0.0150	0.267	0.004	0.38	0.046	0.0138	0.196	0.0027	0.29	0.039	0.0117	0.111	0.0013	0.18			
	0.90	0.0013	0.050	0.0150	0.267	0.004	0.38	0.046	0.0138	0.196	0.0027	0.29	0.039	0.0117	0.111	0.0013	0.18			
	0.85	0.0013	0.050	0.0150	0.267	0.004	0.38	0.046	0.0138	0.196	0.0027	0.29	0.039	0.0117	0.111	0.0013	0.18			
	0.80	0.0014	0.050	0.0150	0.267	0.004	0.38	0.046	0.0138	0.196	0.0027	0.29	0.039	0.0117	0.112	0.0013	0.18			
	0.75	0.0014	0.050	0.0150	0.267	0.004	0.38	0.046	0.0138	0.196	0.0027	0.29	0.039	0.0116	0.112	0.0013	0.18			
	0.70	0.0014	0.050	0.0150	0.267	0.004	0.38	0.046	0.0137	0.196	0.0027	0.29	0.039	0.0116	0.112	0.0013	0.18			
Tributario	0.00	0.0010	0.050	0.01	0.130	0.0013	0.19	0.046	0.0092	0.141	0.0013	0.21	0.039	0.0078	0.167	0.0013	0.27			
	0.05	0.0010	0.050	0.01	0.130	0.0013	0.19	0.046	0.0092	0.141	0.0013	0.21	0.039	0.0078	0.167	0.0013	0.27			
	0.10	0.0011	0.050	0.01	0.130	0.0013	0.19	0.046	0.0092	0.142	0.0013	0.21	0.039	0.0078	0.167	0.0013	0.27			
	0.15	0.0011	0.050	0.01	0.130	0.0013	0.19	0.046	0.0092	0.142	0.0013	0.21	0.039	0.0078	0.167	0.0013	0.27			
	0.20	0.0012	0.050	0.01	0.130	0.0013	0.19	0.046	0.0092	0.142	0.0013	0.21	0.039	0.0078	0.167	0.0013	0.27			
	0.25	0.0012	0.050	0.01	0.131	0.0013	0.19	0.046	0.0092	0.142	0.0013	0.21	0.039	0.0078	0.167	0.0013	0.27			
	0.30	0.0012	0.050	0.01	0.131	0.0013	0.19	0.046	0.0092	0.142	0.0013	0.21	0.039	0.0078	0.167	0.0013	0.27			
	0.35	0.0013	0.050	0.0099	0.131	0.0013	0.19	0.046	0.0092	0.142	0.0013	0.21	0.039	0.0078	0.168	0.0013	0.27			
	0.40	0.0013	0.050	0.0099	0.131	0.0013	0.19	0.046	0.0091	0.142	0.0013	0.21	0.039	0.0078	0.168	0.0013	0.27			
	0.45	0.0014	0.050	0.0099	0.131	0.0013	0.19	0.046	0.0091	0.142	0.0013	0.21	0.039	0.0077	0.168	0.0013	0.27			
	0.50	0.0014	0.050	0.0099	0.131	0.0013	0.19	0.046	0.0091	0.142	0.0013	0.21	0.039	0.0077	0.168	0.0013	0.27			
	0.55	0.0015	0.050	0.0099	0.131	0.0013	0.19	0.046	0.0091	0.143	0.0013	0.21	0.039	0.0077	0.168	0.0013	0.27			
	0.60	0.0015	0.050	0.0099	0.131	0.0013	0.19	0.046	0.0091	0.143	0.0013	0.21	0.039	0.0077	0.168	0.0013	0.27			
	0.65	0.0015	0.050	0.0099	0.131	0.0013	0.19	0.046	0.0091	0.143	0.0013	0.21	0.039	0.0077	0.168	0.0013	0.27			
	0.70	0.0016	0.050	0.0099	0.131	0.0013	0.19	0.046	0.0091	0.143	0.0013	0.21	0.039	0.0077	0.169	0.0013	0.27			
	0.75	0.0016	0.050	0.0099	0.131	0.0013	0.19	0.046	0.0091	0.143	0.0013	0.21	0.039	0.0077	0.169	0.0013	0.27			
	0.80	0.0017	0.050	0.0099	0.132	0.0013	0.19	0.045	0.0091	0.143	0.0013	0.21	0.039	0.0077	0.169	0.0013	0.27			

Referencias

- Akan, O.** (2006). *Open Channel Hydraulics*. Butterworth-Heinemann/Elsevier, Canada.
- Behrangi, A., Borghei, S., Daemi, A.** (2004). "Sub-critical flow in open channel junction". *Proceedings of the International Conference on Hydraulics of Dams and River Structures, Iran*, April 2004, pp. 393-400.
- Best J. and Reid I.** (1984). "Separation zone at open-channel junctions". *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 110, No. 11, November 1984, pp. 1588-1594.
- Camargo, J. y Franco, V.** (1999). *Hidráulica de canales*. Instituto de Ingeniería, UNAM, México.
- Chaudhry, M.** (1993). *Open-Channel Flow*. Prentice Hall, U.S.A.
- Chow, V.** (2004). *Hidráulica de canales abiertos*. Mc Graw Hill, Colombia.
- Echávez, G.** (1996). *Introducción a los modelos hidráulicos de fondo fijo y a la ingeniería experimental*. UNAM, CONACYT y AMH. México.
- Gardea, H.** (1999). *Hidráulica de canales*. Facultad de Ingeniería, UNAM, México.
- Gurram, S., Karki, K., Hager, W.** (1997) "Subcritical junction flow". *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 123, No. 5, May 1997, pp. 447-455.
- Hager, W.** (1987). "Discussion of Separation zone at open-channel junctions, by JL Best and I Reid". *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 113, No. 4, pp. 539-543.
- Hsu, C., Lee, W., Chang, C.** (1998). "Subcritical open-channel junction flow". *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 124, No. 8, August 1998, pp. 847-855.

Hsu, C., Wu, F., Lee, W. (1998). "Flow at 90° equal-width open-channel junction". *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 124, No. 2, February 1998, pp. 186-191.

Kesserwani, G., Ghostine, R., Vazquez, J., Mosé, R., Abdallah, M. and Ghenaïm, A. (2007). "Simulation of subcritical flow at open-channel junction". ScienceDirect, www.sciencedirect.com, Advances in Water Resources 31 (2008) 287-297.

Ramamurthy A., Carballada L., Tran D. (1988). "Combining open-channel flow at right-angled junctions". *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 114, No. 12, December 1988, pp. 1449-1460.

Sotelo, G. (1990). *Apuntes de hidráulica II*. Facultad de Ingeniería, UNAM, México.

Sotelo, G. (2001). *Hidráulica de canales*. Facultad de Ingeniería, UNAM, México.

Weber, L., Shumate, E. and Mawer, N. (2000). "Experiments on Flow at a 90° Open-Channel Junction". *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 127, No. 5, May 2000, pp. 340-350.