PROGRAMACION DE INVERSIONES

Fecha	Duración	Tema	Profesor
Agosto 21	3 Hs.	INTRODUCCION La ingeniería de sistemas. Objetivos y manera de proceder de la ingeniería. El análisis de inversiones y la ingeniería de sistemas. Tipos de problemas de inversión. Jerarquía, independencia, divisibilidad, horizonte de planeación, características de los beneficios (deterministas o aleatorios).	DR. FELIPE OCHOA ROSSO
Ago.23 y 28	3 Hs. c/clase	MODELOS LINEALES DE LEONTIEF Introducción a los sistemas de contabilidad interindustrial y de contabilidad nacional. Modelos fundamentales de insumo-producto. Notación matricial y solución general. Demanda final e insumos primarios. Consumo inducido y creación del ingreso. Análisis interregional.	ING. FRANCISCO ESCUTIA E ING. JORGE LUIS VARGAS
Ago. 30 y Sep. 4	3 Hs. c/clase	EVALUACION DE PROYECTOS Interés. Tasas de interés nominal y efectiva. Equivalencias financieras. Necesidad del cálculo monetario y su papel. Valor y precio de costo - Composición de un proyecto. La evaluación. Método del valor presente. Evaluación por incrementos de inversión. Análisis beneficio-costo. El beneficio a escala nacional. El beneficio a escala de una empresa. Teoría de la utilidad. Análisis efectividad-costo.	ING. GUILLERMO CASTELLANOS GUZMA
Sep. 6 y 11	3 Hs. c/clase	ANALISIS DE INVERSIONES, MODELOS DETERMINISTAS La programación lineal. La programación dinámica. Análisis de insumo-producto y programación lineal. Elección por el lado de la demanda. Elección por el lado de la oferta. Modelos para proyectos independientes divisibles y de un sólo pe-	ING. JESUS ACOSTA

Fecha	Duración	Tema	Profesor
		ríodo; proyectos indivisibles. Modelos para proyectos dependientes, indivisibles y de un sólo período. Modelos para proyectos independientes, indivisibles y de períodos múltiples; proyectos dependientes. Modelos interindustriales alternativos.	
Sep. 13 y 18	3 Hs. c/clase	ANALISIS DE INVERSIONES, MODELOS ALEATORIOS Nociones de probabilidad y estadística. Distribuciones de probabilidad subjetivas. Decisiones bajo certeza, riesgo e incertidumbre. Modelos con horizonte de planeación finito: factor de descuento por riesgo, análisis de sensibilidad. Modelos para un proyecto aislado. Modelos para proyectos múltiples. La programación lineal cuando los coeficientes de la función objetivo son variables aleatorias. Modelos de tipo Bayesiano. Análisis de decisiones.	ING. SERGIO ZUÑIGA BARRERA E ING. HUMBERTO VALDEZ
Sep. 20,25,27 y Oct. 2	3 Hs. c/clase	APLICACIONES Aplicaciones a problemas de inversión en los sectores: de transportes y comunicaciones, industrial, de bienestar social y agropecuario.	ING. PEDRO REYES, ING. JORGE LUIS VARGAS ING. EDUARDO MAC GREGOR DR. REYNALDO ANGULO TORRES ING. ALEJANDRO GONZALEZ CUETO DR. FELIPE OCHOA E ING. ALBERTO MORENO BONETT

centro de educación contínua
facultad de ingeniería, unam

PROGRAMACION DE INVERSIONES

EL MODELO BASICO DE INSUMO-PRODUCTO

ING. JORGE LUIS VARGAS ROMERO

Tacuba 5, primer piso. México 1, D.F.
Teléfonos: 521-30-95 y 513-27-95

Ing. Jorge Luis Vargas Romero

1.- EL MODELO BASICO DE INSUMO-PRODUCTO.

Como todos los modelos económicos, el sistema de insumo-producto se deriva de supuestos sobre el comportamiento económico y de las definiciones de las variables empleadas en el análisis. Es por ésto que conviene establecer desde un principio la diferencia entre el cuadro insumo-producto y el sistema analítico correspondiente. El cuadro es una descripción estadística de los insumos y productos de los diferentes sectores de un sistema económico en un determinado período de tiempo. El sistema de insumo-producto es un esquema teórico, un sistema de ecuaciones lineales simultáneas, en el que las incógnitas son los niveles de producto de los diversos sectores.

1.1. EL CUADRO DE INSUMO PRODUCTO

Puesto que el análisis intersectorial se ocupa de las interrelaciones que surgen de la producción, la función primordial de las cuentas intersectoriales es investigar el curso de las corrientes de bienes y servicios en su paso de uno a otro sector de la producción. Las principales características de las cuentas intersectoriales se esquematizan en el Cuadro 1. Este cuadro, llamado matríz de transacciones o de insumo-producto, abarca todos los sectores de la economía, cada uno de los cuales está representado por un renglón y una columna. En cada renglón se distribuye el producto corriente de un sector, mientras que en la columna correspondiente se indican los insumos corrientes del sector de que se trate. Así, el elemento situado en la entersección del "i-ésimo" renglón y de la "j-ésima" columna representa la cantidad de producto del sector -

NOTACION PARA EL CUADRO 1:

C_g = Consumo de Gobierno.

C_p = Consumo personal.

E = Exportaciones.

I = Inversión.

M = Importaciones.

U = Total de insumos intermedios.

W = Demanda intermedia.

Y = Demanda final.

X = Producción total.

X_{ij} = Ventas del sector "i" al sector "j".

Cuadrante I .- Producción y consumos intermedios.

Cuadrante II .- Producto final de los sectores de producción.

Cuadrante III .- Insumos primarios de la producción.

Cuadrante IV .- Insumos primarios de la demanda final.

MATRIZ INSUMO – PRODUCTO ESQUEMATICA.

Sectores	1	2	. . .	j	. . .	n	W	I	C_p	C_g	E	Y	X
1	X_{11}	X_{12}	. . .	X_{1j}	. . .	X_{1n}	W_1	I_1	C_{p1}	C_{g1}	E_1	Y_1	X_1
2	X_{21}	X_{22}	. . .	X_{2j}	. . .	X_{2n}	W_2	I_2	C_{p2}	C_{g2}	E_2	Y_2	X_2
⋮	⋮					⋮	⋮	⋮			⋮	⋮	⋮
i	X_{i1}	X_{i2}	. . .	X_{ij}	. . .	X_{in}	W_i	I_i	C_{pi}	C_{gi}	E_i	Y_i	X_i
⋮	⋮	(CUADRANTE I)				⋮	⋮	⋮	(CUADRANTE II)		⋮	⋮	⋮
n	X_{n1}	X_{n2}	. . .	X_{nj}	. . .	X_{nn}	W_n	I_n	C_{pn}	C_{gn}	E_n	Y_n	X_n
U	U_1	U_2	. . .	U_j	. . .	U_n							
M	M_1	M_2	. . .	M_j	. . .	M_n	M_w	M_I	M_p	M_g	M_E	M_Y	M
V	V_1	V_2	. . .	V_j	. . .	V_n	V_w	V_I	V_p	V_g	V_E	V_Y	V
		(CUADRANTE III)							(CUADRANTE IV)				
X	X_1	X_2	. . .	X_j	. . .	X_n		I	C_p	C_g	E		W

"i" que absorbe como insumo el sector "j". Dicha transacción entre dos sectores de producción se suele denotar por el símbolo "X_{ij}", en tanto que el producto total del sector "i" se representa por "X_i". La separación entre consumo intermedio y final de producción, y entre insumos producidos y primarios conduce a la formación de cuatro tipos de transacciones, que se indican en los cuatro cuadrantes del cuadro.

EL CUADRANTE I contiene las transacciones intermedias; es decir, las corrientes de bienes y servicios que se producen y consumen en el proceso de producción corriente.

EL CUADRANTE II contiene el consumo final de las mercancías y servicios producidos en la economía, y está subdividido en inversión, consumo personal, consumo de gobierno y exportaciones.

En el CUADRANTE III se incluyen los insumos que son "primarios', en el sentido de que no son producidos dentro del sistema, como son el valor agregado (pago a la tierra, trabajo y capital) y las importaciones que se usan como insumos de la producción.

El CUADRANTE IV se omite a veces en los cuadros insumo-producto publicados, pero merece ser mencionado para que el cuadro esté completo. Dicho cuadrante corresponde a los insumos primarios en los sectores de demanda final e incluye asientos tan característicos como el ingreso de los empleados del gobierno y las importaciones consumidas directamente por las unidades familiares.

Conviene señalar que, para cada uno de los sectores de producción, el valor total del producto (el total del renglón) debe ser igual a los gastos totales (el total de la columna), mientras que esa igualdad no se impone en cada uno de los sectores de insumos primarios y finales. Basta con que el total de todos los sectores finales en conjunto sea igual al total de los insumos primarios.

1.2. EL SISTEMA INSUMO-PRODUCTO

El objetivo principal del modelo de insumo-producto es explicar las magnitudes de las corrientes intersectoriales en función de los niveles de producción de cada sector. A fin de que este procedimiento adquiera amplia significación teórica es necesario establecer varios supuestos. Primero, debe ser posible formar los sectores productivos de tal manera que en cada uno de ellos pueda suponerse una sola función de producción. En las aplicaciones, este supuesto implica que todas las actividades productivas afines se identifiquen como pertenecientes a un sector específico.

El modelo de insumo-producto de Leontief hace también otros supuestos especiales, siendo los más importantes: i) que un producto dado es suministrado únicamente por un sector; ii) que no existen coproductos; y, iii) que la cantidad de cada uno de los insumos utilizados en la producción por un sector, está totalmente determinada por el nivel de producción de dicho sector.

Además de los supuestos previos, es necesario convenir sobre la unidad de medida para expresar las variables que aparecen en la matríz insumo-pro ducto (cuadro I). Podemos dar el volumen de producción ya sea en unidades físicas (toneladas, metros, etc.) o en unidades monetarias. Si se expresa el producto en unidades físicas, entonces los elementos de todos los renglones de la matríz pueden sumarse, ya que los términos de cualquier renglón dado son homogéneos debido a que se refieren al producto del mismo sector. Sin embargo, será imposible sumar los términos de las diferentes columnas, ya que ellos se refieren a los productos de diferentes sectores y, por lo tanto, están dados en diferentes unidades de medida. Sin embargo, si suponemos que el producto se expresa en unidades de valor monetario, podemos sumar tanto horizontal como verticalmente.

Por lo tanto, ya sea que el producto se exprese en una forma o en la otra, la suma horizontal de cada renglón da las sgiuientes "n" relaciones:

$$X_i = \sum_{n=1}^{n} X_{ij} + Y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (1)$$

Cada una de estas relaciones nos dicen que el producto total del sector considerado es igual a la suma de las cantidades consumidas por cada sector de producción, incluso el mismo sector, más la cantidad consumida por todos los componentes de la demanda final.

El sistema de insumo-producto se basa en la hipótesis concreta de que el insumo que el "j-ésimo" sector de producción absorbe del "i-ésimo" es directamente proporcional al producto del sector "j". Esta hipótesis se puede expresar en la siguiente ecuación:

$$X_{ij} = A_{ij} X_j \qquad (2)$$

donde de acuerdo a la notación indicada anteriormente, X_{ij} designa la corriente de producto del sector "i" al sector "j", X_j es el producto total del sector "j" y, por consiguiente, A_{ij} el insumo que el sector "i" vende al sector "j" por peso de producto de este último. Al coeficiente A_{ij} se le denomina <u>Coeficiente Técnico de Producción</u>.

Substituyendo en la expresión (1) el valor X_{ij} dado por (2) se obtiene:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} X_j + Y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

o bien,

$$X_i - \sum_{j=1}^{n} A_{ij} X_j = Y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (3)$$

Ahora bien, supóngase que los coeficientes técnicos de producción son conocidos; entonces, el sistema de relaciones (3) formado por "n" ecuaciones de primer grado contiene las siguientes "2n" incógnitas.

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \quad y \quad Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$$

A fin de resolver el sistema de ecuaciones podemos suponer que:

1) Conocemos, por ejemplo, los productos brutos de los diferentes sectores según han sido fijados en el plan económico y entonces, con las ecuaciones (3) encontramos las demandas finales $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ de los sectores.

2) Las demandas finales son conocidas; por ejemplo, han sido establecidas en el plan. Entonces, con las ecuaciones (3) podemos calcular los productos brutos $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o, finalmente,

3) Han sido fijados en el plan algunos productos brutos y algunas demandas finales en número "n" en total. En este caso, el producto bruto y la demanda final restantes se encontrarán únicamente con las ecuaciones (3).

En el plan de producción que abarca "n" sectores tenemos, por lo tanto, "2n" incógnitas de las cuales sólamente "n" pueden ser establecidas arbitrariamente. Los valores de las incógnitas restantes están impuestas por las condiciones técnicas de la producción, es decir, por los coeficientes A_{ij}. Sobre esta base decimos que el plan de producción tiene "n grados de libertad".

Particularmente, hagamos el supuesto que el valor de las demandas finales Y_i ha sido fijado en el plan de producción y con base en las relaciones (3) queremos encontrar los productos brutos X_i. Podemos también escribir las ecuaciones (3) de la siguiente forma:

$$(1-A_{ii})\,X_i - \sum_{j\neq i}^{n} A_{ij}X_j = Y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3a}$$

En forma más clara, cambiando el orden de algunos términos, el sistema de ecuaciones queda:

$$\begin{array}{lllll}
(1-A_{11})\,X_1 - & A_{12}\;X_2 - \ldots - & A_{1j}\;X_j - \ldots - & A_{1n}X_n = Y_n & \\
-A_{21}\;X_1 + & (1-A_{22})\,X_2 - \ldots - & A_{2j}\;X_j - \ldots - & A_{2n}X_n = Y_n & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
-A_{i1}\;X_1 - & A_{12}\;X_2 - \ldots + & (1-A_{jj})X_j - \ldots - & A_{in}\;X_n = Y_n & (3b) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
-A_{n1}\;X_1 - & A_{n2}\;X_2 - \ldots - & A_{nj}\;X_j - \ldots + & (1-A_{nn})X_n = Y_n &
\end{array}$$

A continuación, si llamamos a la matriz de coeficientes técnicos A, -

tenemos que:

$$A = \begin{matrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & & A_{nn} \end{matrix}$$

Por lo tanto el sistema de ecuaciones (3b) puede expresarse matricialmente como sigue:

$$(I - A)X = Y \qquad (3c)$$

donde:

I = Matriz identidad

X = Vector columna de elementos $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de producto total de cada sector.

Y = Vector columna de elementos $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ de demanda final de cada sector.

Al resolver el sistema de ecuaciones se tiene:

$$X = (I - A)^{-1}Y$$

y si llamamos

$$R = (I - A)^{-1} \qquad (4)$$

se tiene que

$$X = RY \qquad (5)$$

Nótese que la solución del sistema depende única y exclusivamente de la matriz R, la que a su vez depende de los coeficientes técnicos. Por lo tanto para una economía dada y en cierto período de tiempo, el producto total de cada sector sólo depende de los niveles que tome la demanda final.

A partir de (5) puede escribirse el producto total del sector "i",

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} R_{ij} Y_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (5a)$$

donde R_{ij} representa el elemento que está en el asiento del cruce del "i-ésimo" renglón y la "j-ésima" columna de la matriz R.

De esta última expresión podemos ver que el producto del sector dado es la suma ponderada de las demandas finales de todos los sectores. El producto total, por ejemplo, del sector carbón de piedra es la suma ponderada de las demandas finales de acero, máquinas, vagones, casas, etc.

El significado económico de los coeficientes R_{ij} puede interpretarse de la siguiente manera. Nótese, antes que nada, que si incrementamos la demanda final de uno de los sectores, por ejemplo, el sector "k" en una unidad, el producto total del sector "i" se incrementa en R_{ik}.

En efecto, podemos escribir la expresión (5a) de la siguiente manera:

$$X_i = \sum_{j \neq k}^{n} R_{ij} Y_j + R_{ik} Y_k \qquad (5b)$$

Incrementando la demanda final del sector k en una unidad; esto es, reemplazando Y_k por $(Y_k + 1)$

obtenemos

$$
\begin{aligned}
X_i + \Delta X_i &= \sum_{j \neq k} R_{ij}\, Y_j + R_{ik}\,(Y_k + 1) \\
&= \sum_{j=1}^{n} R_{ij}\, Y_j + R_{ik} \qquad (6) \\
&= X_i + R_{ik}
\end{aligned}
$$

o también

$$\Delta X_i = R_{ik} \qquad (7)$$

Por lo tanto, el incremento del producto total del sector "i" es igual - al elemento "i,k" de la matriz R, o sea que $\Delta X_i = R_{ik}$ y consecuentemente, el - producto total X_i en verdad se incrementa R_{ik} como resultado del incremento de Y_k en 1.

Los coeficientes R_{ik} se llaman <u>coeficientes de demanda adicional</u> o - <u>coeficientes de requerimiento de producto</u>. Explicaremos el sentido de este nombre con un ejemplo. Supóngase que el sector "i" produce carbón de piedra y el sector "k", acero. Si deseamos incrementar la demanda final de acero Y_k en una tonelada, el producto total de carbón de piedra debe incrementarse en R_{ik}, y de ahí el nombre que se da a estos coeficientes.

Sin embargo los resultados obtenidos al momento no son suficientes - para el análisis, porque no hay expresión que ligue a la matriz R con las variables conocidas de producto total y demanda final.

Con este propósito, la expresión (5a) puede escribirse de la siguiente forma:

$$X_i = R_{i1} Y_1 + R_{i2} Y_2 + \ldots + R_{ik} Y_k + \ldots + R_{in} Y_n \qquad (8)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

Si hacemos la hipótesis que las variables Y_i y X_i son continuas y pone mos como restricción que todas las Y_i permanecen constantes excepto Y_k, interesa conocer cual es el cambio diferencial que experimenta X_i cuando hay un cambio diferencial en Y_k.

Por lo tanto, tomando derivadas parciales en (8) llegamos a

$$\frac{\partial X_i}{\partial Y_k} = R_{ik} \qquad (9)$$

Nótese finalmente, que cuando incrementamos la demanda final de todos los sectores de la economía en dY_1, dY_2, ..., dY_n, el producto total del sector "i" debe incrementarse en

$$dX_i = \frac{\partial X_i}{\partial Y_1} dY_1 + \frac{\partial X_i}{\partial Y_2} dY_2 + \ldots + \frac{\partial X_i}{\partial Y_n} dY_n$$

o también,

$$dX_i = R_{i1} dY_1 + R_{i2} dY_2 + \ldots + R_{in} dY_n \qquad (10)$$

Esta misma expresión simplificada con símbolos de sumatoria nos queda de la siguiente manera:

$$dX_i = \sum_{j=1}^{n} R_{ij} dY_j \qquad (10a)$$

Así, si el sector "i" produce carbón de piedra, cada uno de los coeficientes R_{ij} pueden llamarse coeficientes de requerimiento de carbón de los diferentes sectores de la producción.

Este razonamiento indica que los elementos de la matriz $R = (I - A)^{-1}$ tienen un significado económico específico.

Por otra parte, conviene ver cual es el método de cálculo del nivel de utilización de insumos primarios correspondiente a los niveles computados de producto de los sectores de producción. Así, definiendo F_{hj} como la cantidad de cualquier insumo primario "h" (por ejemplo horas-hombre de trabajo) absorbida en el sector "j", y suponiendo que dicha cantidad es directamente proporcional al nivel de producto del sector "j", se puede escribir

$$F_{hj} = f_{hj} X_j \qquad (11)$$

donde f_{hj} es un coeficiente de insumo primario que indica la cantidad de factor "h" que el sector "j" absorbe para producir una unidad de producto.

Así, una vez conocidos los niveles de la demanda final, con la expresión (5) es posible determinar los niveles de producción de los diferentes sectores y con (11) cuáles serán los requerimientos de insumos primarios que cada sector demandará para poder cumplir con el plan de producción. Por lo tanto la utilización total F_h de insumos primarios está dada por

$$F_h = f_{h1} X_1 + f_{h2} X_2 + \ldots + f_{hn} X_n + Y_h \qquad (12)$$

donde Y_h representa la cantidad de factor primario absorbido por la demanda final. Para simplificar, la expresión anterior puede escribirse

$$F_h = \sum_{j=1}^{n} f_{hj} X_j + Y_h \qquad (12a)$$

Si lo que interesa es conocer el nivel de utilización de insumos cuando hay un cambio diferencial en la demanda final de uno o varios de los sectores de la economía, tenemos que:

$$dF_h = \sum_{j=1}^{n} f_{hj} dX_j + dY_h \qquad (12b)$$

donde el valor de dX_j puede calcularse a partir de la expresión (10a).

Dentro de las limitaciones que tiene el modelo de insumo-producto, es conveniente mencionar que para hacer homogéneos los elementos de la matriz y así poder proceder a calcular la inversa de (I - A), se les ha asignado a cada uno un valor. Así, en un cuadro de transacciones análogo al cuadro 1, cualquier elemento puede definirse como $X_{ij}P_i$, una corriente física multiplicada por su precio; si cada elemento del cuadro se divide por X_jP_j, el resultado será una serie de <u>coeficientes de valor</u> que pueden denotarse por $\bar{A}_{ij}$, de modo que

$$\bar{A}_{ij} = \frac{X_{ij} \; P_i}{X_j \; P_j} \qquad (13)$$

Substituyendo a partir de (2) tenemos

$$\bar{A}_{ij} = A_{ij} \cdot \frac{P_i}{P_j} \qquad (14)$$

o, en otras palabras, los <u>coeficientes de valor</u> $\bar{A}_{ij}$ son iguales a los coeficientes técnicos de producción A_{ij} multiplicados por la relación de precios $\frac{P_i}{P_j}$.

El razonamiento anterior conduce a las siguientes conclusiones:

1) Si los precios son proporcionales al valor, la matriz de valor de coeficientes $\bar{A}_{ij}$ está determinada por las condiciones técnicas de la producción.

2) Si los precios no son proporcionales al valor, hay dos casos:

i) Los precios corresponden a los "precios de producción" y entonces los elementos de la matriz de valor dependen indirectamente de las condiciones técnicas de la producción;

ii) Los precios (o por lo menos algunos de ellos) son de naturaleza monopólica y entonces los elementos de la matriz de valor también dependen del grado de monopolización de los precios o, en otras palabras, de las condiciones del mercado.

El esquema teórico antes descrito se ha denominado "sistema insumo-producto". Más exactamente debería denominarse "sistema insumo-producto estático abierto" para distinguirlo de otras variantes y ampliaciones de este método analítico. El sistema estático abierto aquí expuesto es en realidad el núcleo de todas las formas de análisis insumo-producto. Generalmente, los cuadros de transacciones se compilan para un año determinado, conocido como base, y las matrices de coeficientes derivadas del cuadro se emplean para efectuar operaciones con datos que pueden referirse al año base o a años posteriores. En tales operaciones, los niveles de producto de los "n" sectores de producción se suelen considerar como variables dependientes o incógnitas, mientras que las partidas de demanda final se consideran como variables exógenas; esto es suelen especificarse mediante un cálculo separado y son, por consiguiente, constantes del análisis insumo-producto. Una vez conocida la producción total de cada sector, por medio de otros dos sistemas de ecuaciones es posible calcular los valores del consumo intermedio y el valor agregado de cada sector.

Esquemáticamente, esta secuencia se representa en la siguiente figura:

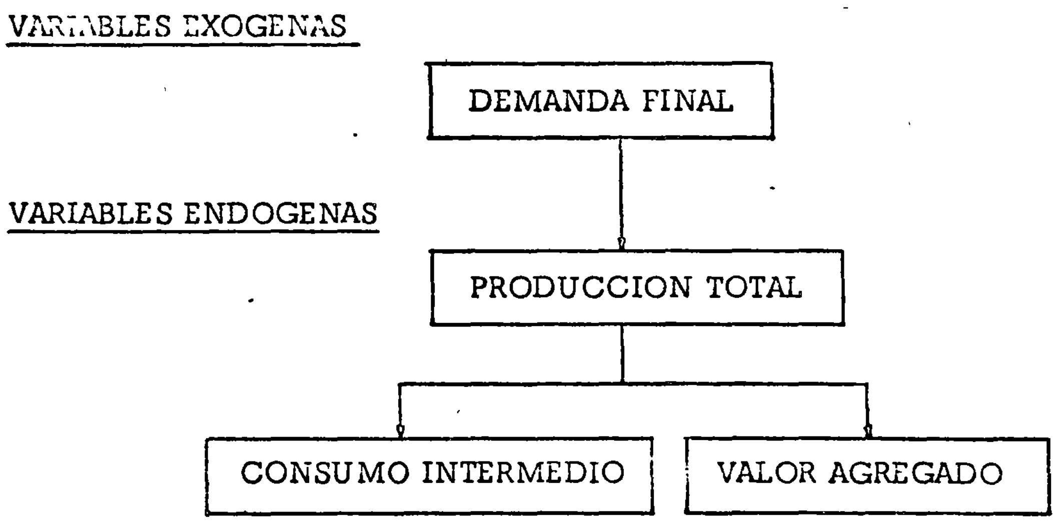


Figura 1.1.- Representación esquemática de la forma como opera el modelo de insumo-producto de W. Leontief.

Sin embargo, desde el punto de vista algebráico, no hay diferencia alguna entre que se especifiquen los productos o las demandas finales de cada sector, y cualesquiera "k" de las "n" variables de producto y "l" de las correspondientes variables de demanda final se pueden considerar como incógnitas, en tanto que k + l = n. La designación de las variables como dependientes o independientes obedece por completo al problema especial que se estudie; en la mayoría de los casos puede ser conveniente tratar el nivel de producto de un sector de producción como incógnita, pero para otros fines, puede convenir considerar la producción del mismo sector como determinada independientemente. Por lo tanto, la asignación de los sectores a la categoría de sectores de producción o sectores autónomos en un cuadro de transacciones es algo arbitrario. Por ejemplo, el sector unidades familiares (C_p) del cuadro 1 se incluye en la categoría autónoma, de modo que los insumos a las unidades familiares se registran en una columna de demanda final, mientras que los productos de dichas unidades, en forma de servicios o trabajo, se inscriben en un renglón de insumo primario. Si los insumos de las unidades familiares (gastos de consumo privado) se suponen dependientes del nivel de producto de ese sector (volumen de empleo), como en efecto pueden considerarse para ciertos fines, las unidades familiares se convierten en realidad en un sector de producción, y tanto el renglón como la columna deberán pasar al primer cuadrante con objeto de que se incluyan en la matriz los coeficientes apropiados. Mientras quede por lo menos un sector en la categoría autónoma, el sistema insumo-producto se conoce como sistema insumo-producto abierto (en realidad es parcialmente abierto); si todos los productos del sector se interpretan como variables dependientes se dice que el sistema es cerrado.

Cuadro 3.1.- Matriz Insumo-Producto de la Zona de los Mochis.

(Millones de Pesos)

Sectores	1	2	3	4	5	6	Demanda	Producto bruto total
1	20.6	14.3	0	104.0	0	0.9	640.5	790.3
2	0.5	0.6	0.1	90.5	4.1	0.8	78.6	175.2
3	36.2	5.4	0	5.5	7.7	18.5	24.2	97.5
4	0.9	16.1	0	39.5	0.3	28.6	475.5	560.9
5	117.0	11.9	0.4	28.3	63.7	73.7	374.5	669.5
6	126.1	15.5	2.1	22.6	52.7	54.2	322.7	595.9
Total insumos locales.	301.3	63.8	2.6	290.4	128.5	176.7		
Total insumos importados.	19.4	17.0	85.8	96.8	331.1	52.3		
Valor agregado.	469.6	94.4	9.1	173.7	209.7	366.9		
Producto bruto total.	790.3	175.2	97.5	560.9	669.5	595.9		

FUENTE: Banco de México, S.A., 1960.

18

3-4

Cuadro 3.2.- Matriz de Coeficientes Técnicos de la Zona de los Mochis.

Sectores	1	2	3	4	5	6
1	0.0261	0.0916	0	0.1854	0	0.0015
2	0.0006	0.0034	0.0010	0.1613	0.0061	0.0013
3	0.0458	0.0308	0	0.0098	0.0115	0.0310
4	0.0011	0.0919	0	0.0704	0.0004	0.0480
5	0.1480	0.0679	0.0041	0.0505	0.0951	0.1237
6	0.1596	0.0885	0.0215	0.0403	0.0787	0.0910
Total insumos locales	0.3812	0.3642	0.0266	0.5177	0.1918	0.2965
Total insumos importados.	0.0246	0.0970	0.8801	0.1726	0.4948	0.0878
Valor agregado	0.5942	0.5388	0.0933	0.3097	0.3134	0.6157

FUENTE: Calculada por la Dirección de Estudios Específicos, S.R.H.

19

ponde la columna.

Así pues, a través de esta matriz se pueden cuantificar los efectos que origina un estímulo en las demandas finales tanto del sector Agricultura como del sector de Industria Alimenticia. La comparación permite establecer cual de los dos sectores responde en mejor forma al logro de los objetivos nacionales.

Cuadro 3.3.- Matriz de Requerimientos de Producción para la Zona de los Mochis.

	1	2	3	4	5	6
1	1.02974	0.10642	0.00042	0.22456	0.0020	0.01400
2	0.00409	1.02192	0.00131	0.17911	0.0080	0.01206
3	0.05588	0.04294	1.00093	0.03169	0.01634	0.03819
4	0.01204	0.10814	0.00141	1.09982	0.00638	0.05917
5	0.19701	0.11867	0.00815	0.12774	1.11996	0.15993
6	0.20011	0.13426	0.02464	0.11743	0.09877	1.12112

FUENTE: Calculada por la Dirección de Estudios Específicos, S.R.H.

Por lo tanto, si se considera que el incremento en las demandas de los sectores mencionados es de \$1,000.00, los niveles de producción bruta total de toda la zona ascienden a \$1,499.00 y \$1,781.00 para la Agricultura e Industria Alimenticia respectivamente. En la figura 3.1 se esquematiza cual es la composición de estos productos brutos totales entre los seis sectores considerados en el análisis. Para facilitar la comparación se incluyen juntos los impactos de las dos alternativas de cambios.

HOLLIS B. CHENERY

PAUL G. CLARK

ECONOMIA INTERINDUSTRIAL INSUMO PRODUCTO Y PROGRAMACION LINEAL

FONDO DE CULTURA ECONOMICA

Segunda Edición

Ing. Francisco Escutía N.

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

La economía interindustrial se ocupa del análisis cuantitativo de la interdependencia de las unidades de producción y de consumo en una economía moderna. Estudia, en particular, las interrelaciones que existen entre los productores en su carácter de compradores de sus producciones mutuas, como consumidores de recursos escasos, y como vendedores a los consumidores finales.

El análisis interindustrial es necesario para una serie de problemas empíricos para los que resultan inadecuadas las técnicas del análisis del ingreso nacional, y las del análisis de equilibrio parcial. Por ejemplo, un incremento en la demanda de automóviles producirá un efecto completamente distinto en sectores específicos de una economía, al de un aumento en la demanda de alojamientos o de ropa, pero en un análisis en conjunto no se distinguen estas diferencias. De modo semejante, no puede hacerse muy adecuadamente una estimación de la demanda futura de energía eléctrica tomando sólo como base el estudio de un equilibrio parcial del mercado, sino que también deben tenerse en cuenta las probables variaciones de la producción en las industrias que utilizan la energía eléctrica. En ambos ejemplos se hace necesaria cierta clase de análisis de las relaciones interindustriales.

Los modelos de equilibrio general de Walras y Pareto nos proporcionan el fundamento teórico de la economía interindustrial. Estas teorías tan comprensivas deben restringirse en su alcance y simplificarse en su forma con el fin de permitir que puedan ser determinadas estadísticamente las relaciones funcionales, precisamente como se simplifica la teoría keynesiana en el análisis del ingreso nacional, o la teoría marshalliana en los estudios de los mercados individuales. En cada caso, los conceptos teóricos tienen que volverse a formular, hasta cierto punto, para facilitar la medición, y los modelos resultantes adquieren caracteres propios. Como hay simplificaciones alternativas que pueden hacerse, cada una de ellas debe confrontarse con los datos disponibles para poder determinar su utilidad. Por consiguiente, tales sistemas deben considerarse como postulados que se emplean para orientar la investigación empírica y que, como resultado de ello, se encuentran sujetos a revisión.

El primer modelo empírico interindustrial fue formulado por el

profesor Wassily Leontief, cuyo sistema se conoce con el nombre de "análisis de insumo-producto". Recientes adelantos teóricos, en particular el descubrimiento de las técnicas matemáticas de la programación lineal y no-lineal, han sugerido modelos interindustriales alternativos. Por lo tanto, emplearemos el término "economía interindustrial" en sentido general para indicar cualquier análisis empírico de los fenómenos económicos que explícitamente toma en cuenta la interdependencia entre las unidades productivas de una economía. El análisis de insumo-producto probablemente es sólo el primero de varios métodos cuantitativos para el tratamiento de esta clase de problemas.

A. *Evolución histórica de la economía interindustrial*

Aunque los modelos intersectoriales en economía tienen comúnmente como antecedentes el *Tableau Economique* de Quesnay, publicado en 1758, la inspiración de los trabajos modernos en este campo parte de Leon Walras (1877). El sistema de Walras expone la interdependencia entre los sectores productivos de la economía en función de las demandas competitivas que hace cada industria de factores de producción, y de la capacidad de sustitución que hay entre sus producciones en consumo. El modelo de Walras contiene series de ecuaciones para el ingreso y los gastos del consumidor, el costo de producción en cada sector, y la oferta y demanda totales de mercancías y factores de producción.[1]

El uso principal de este tipo de formulación matemática ha sido demostrar la existencia de determinadas soluciones para las cantidades y precios en el sistema, de acuerdo con supuestos de funcionamiento llevado al máximo. El modelo walrasiano se ha presentado también como un ejemplo de la futilidad de la teoría económica considerada a este nivel de abstracción, ya que son pocas las conclusiones interesantes que pueden deducirse, respecto a la realidad económica, de las propiedades formales del modelo y, tal como está formulado, el sistema no se presta para la verificación empírica.

Como forma de economía aplicada el análisis interindustrial se inicia con el trabajo de Leontief. Comenzó sus investigaciones en un modelo empírico de la economía norteamericana en 1931, y dio a la publicidad sus primeros resultados en 1936 y 1941. El procedi-

[1] El sistema walrasiano fue perfeccionado por Pareto y Cassel, y una exposición más precisa de las propiedades matemáticas de su solución fue dada por Wald. La relación del sistema walrasiano con los modernos modelos interindustriales se discute en la obra de Bilderston (1954), de Kuenne (1954), y en el capítulo 13 de la obra de Dorfman, Samuelson y Solow (1958).

miento de Leontief consistió en simplificar el sistema de Walras al grado necesario para poder obtener, por una observación separada de cada una de las transacciones interindustriales en la economía, un conjunto de parámetros para su modelo. Por lo tanto, omitió de su sistema los efectos de las ofertas limitadas de factores. Utilizó también el supuesto original walrasiano de "coeficientes de producción" fijos, en lugar de tener en cuenta la sustitución entre los insumos. Al eliminar, de este modo, todos los efectos de los precios sobre la composición de la demanda del consumidor, en la compra de productos intermedios, y en la oferta de mano de obra y de otros factores, el modelo de Leontief suprime muchos de los ajustes que caracterizan al concepto walrasiano del equilibrio general.

Uno de los más valiosos resultados del primer estudio de Leontief fue el de estimular los trabajos empíricos sobre las relaciones interindustriales en cierto número de países.[2] Actualmente se han compilado cuadros de insumo-producto en más de veinte países, siendo el más detallado el estudio que hizo el gobierno de los Estados Unidos para el año de 1947. Los principales trabajos de investigación se discutirán en el capítulo 7. Como en el caso de la investigación del ingreso nacional, la acumulación de material estadístico ha sugerido técnicas alternativas de análisis, y existen ahora en uso una considerable variedad de modelos de insumo-producto. Para distinguirlos del original, emplearemos el término "modelo de Leontief" para designar al sistema analítico desarrollado por el profesor Leontief, tal como fue presentado en la segunda edición de *The Structure of the American Economy* (1951).

La más reciente contribución en el campo de la economía interindustrial está representada por la técnica matemática del análisis por actividades, o de programación lineal, desarrollado primeramente por Dantzig y Koopmans (*véase* Koopmans, 1951). Aunque la mayor parte de las aplicaciones de esta técnica han sido sobre problemas de una sola empresa o planta, de las que no nos ocuparemos aquí, el método por sí mismo es útil también para los problemas de la industria en general y para el análisis interindustrial. La programación lineal ofrece un medio para eludir el supuesto limitativo de coeficientes constantes de insumo en cada sector, al mismo tiempo que retiene una formulación que permite realizar la medida estadística. Este tipo de modelo interindustrial se discutirá en el capítulo 4.

[2] En algunos países, como Dinamarca y los Países Bajos, los trabajos sobre estadística interindustrial son anteriores a la formulación de los modelos econométricos para su uso.

B. *Análisis parcial, interindustrial y de agregados*

Una introducción conveniente al estudio metodológico del análisis interindustrial nos la ofrece su comparación con los métodos más conocidos de los análisis parcial y de agregados. De modo particular, nos interesa contrastar sus propósitos, supuestos básicos y limitaciones en el trabajo empírico.

Al sistema de equilibrio parcial de Marshall, y sus derivados, se les puede considerar como un modelo de simplificación de la teoría del equilibrio general, y al sistema de Leontief como el tipo opuesto. El objeto principal del análisis del equilibrio parcial es explicar las reacciones de la conducta mutua de productores y consumidores de una mercancía dada y, con ello, determinar los niveles de precios y de producción en un mercado dado. El análisis de equilibrio parcial se concentra, así, en uno de los sectores walrasianos. Especifica las relaciones que existen entre esta industria y sus abastecedores y consumidores a través de conjuntos de funciones de oferta y demanda. Cada una de estas funciones no supone cambios de significación en los demás sectores. Las variaciones en los niveles de producción de las industrias consumidoras, o en los ingresos de las unidades familiares, aparecen (sin explicación) como cambios en las funciones de la demanda. De manera semejante, las variaciones en otros usos de los insumos pueden ocasionar cambios en las funciones de oferta para el sector dado.

El sistema de Leontief se ocupa, esencialmente, de esta variación en elementos que, en el análisis parcial, se consideran fijos. Por otra parte, Leontief admite como conocido e invariable en todo el análisis, al ajuste del equilibrio de las proporciones de los insumos en la producción. En cada mercado se igualan la oferta y la demanda, no por medio de variaciones en el precio y por los movimientos resultantes a lo largo de las curvas de oferta y demanda, sino a través de un cambio horizontal en la función demanda de cada industria, que proviene de los cambios en los niveles de producción de otros sectores. El supuesto de conducta hacia el máximo rendimiento, que es fundamental en el análisis del equilibrio parcial, no desempeña un papel explícito en el sistema de Leontief. Se supone que los productores tienen muy poca o ninguna elección en lo que respecta a las proporciones de los factores en el plazo corto, y reaccionan a las variaciones de la demanda cambiando más bien la producción que el precio. (Los supuestos conforme a los cuales este tipo de reacción es compatible con la elevación de las utilidades al máximo se tratarán en el capítulo siguiente.)

A priori, estos dos modelos parecen ser simplificaciones drásticas del sistema de equilibrio general. Bajo ese aspecto, tienen valor explicativo para aislar los efectos de un conjunto particular de variables y para la ejecución de sus acciones recíprocas en condiciones *ceteris paribus*. El que tengan o no valor práctico para explicar los fenómenos observados o para predecir acontecimientos futuros, depende en gran parte de la pericia del analista, bien sea en la identificación de casos en los cuales las violaciones a los supuestos no tienen relativamente importancia o para poderlos compensar cuando éstas no son insignificantes. Debe ser obvio, sin embargo, que una combinación de ambos tipos de análisis producirá, en general, mejores resultados que cualquiera de ellos por separado.

Los estudios econométricos ideados para calcular los parámetros de las funciones que se emplean en el análisis parcial, en su mayor parte han sido desalentadores. Ni la curva de la oferta ni la de la demanda han demostrado poderse someter a una medición estadística digna de confianza. En el lado de la oferta el estudio más prometedor se ha realizado para plantas industriales aisladas, calculándose, en primer lugar, las funciones fundamentales de costo y producción, determinadas tecnológicamente. La derivación de las funciones de producción para una industria en su totalidad presenta, no obstante, obstáculos que, en muchos casos, todavía no han sido superados satisfactoriamente. Más que la necesidad teórica, ha sido esta dificultad empírica la principal responsable del uso continuo, en la mayoría de los análisis interindustriales, del supuesto original de Leontief de los coeficientes fijos de insumo.

Desde el punto de vista metodológico, el análisis de agregados del ingreso se encuentra más íntimamente relacionado al sistema de insumo-producto que el análisis parcial. Tanto los análisis del ingreso como los de insumo-producto dependen en mayor grado de las uniformidades determinadas estadísticamente en la conducta de los agregados que de las deducciones de las proposiciones teóricas concernientes a los actos racionales de las unidades representativas. El análisis del ingreso determina el nivel de la producción total o del ingreso, partiendo de supuestos relativos a sus elementos "autónomos", y de las respuestas inducidas de los componentes restantes. En forma similar, el análisis interindustrial determina niveles de producción en cada sector partiendo del cálculo de los consumos "finales" del producto y de la supuesta estructura de la producción. En el siguiente capítulo se pone de manifiesto que estos dos tipos de modelos son muy semejantes en su estructura matemática. Para cada tipo de modelo keynesiano —es decir, de consumo inducido, de inversión inducida, etc.—

existe un modelo correspondiente de insumo-producto en el que se encuentran desagregadas las variables keynesianas.

La diferencia fundamental entre sistemas interindustriales y modelos de naturaleza más colectiva es el reconocimiento explícito que se hace en el análisis interindustrial de mercancías específicas que tienen usos y requisitos distintos de producción. El sistema interindustrial, por tanto, es susceptible de mostrar los efectos divergentes que produce sobre el resto de la economía un incremento en la demanda de determinadas mercancías, que en un modelo keynesiano, constituirían partes indistinguibles de la producción y del consumo. En capítulos posteriores consideraremos la elección entre los dos enfoques para los diferentes tipos de problemas. En éste, podemos indicar que las dos técnicas son totalmente complementarias. El empleo conjunto de ambas no requiere de una revisión de la trama conceptual del análisis interindustrial, la que se haría necesaria si con él se combinara el análisis marshalliano.

C. *Usos de la economía interindustrial*

Las aplicaciones del análisis económico pertenecen a varias categorías según sus objetivos y la naturaleza de los supuestos formulados. Para los estudios interindustriales es útil distinguir tres tipos:

1) Análisis de la estructura económica;
2) Formulación de los programas de acción;
3) Predicción de acontecimientos futuros.

El primero —análisis estructural— está proyectado para revelar las propiedades de un modelo dado, o de un principio económico en un contexto particular. Para este fin, es conveniente hacer abstracción de factores que no se hallan relacionados necesariamente con el mecanismo que se estudia; de aquí el supuesto familiar *ceteris paribus*. En modelos de alguna complejidad, la importancia se encuentra vinculada a las acciones recíprocas entre los parámetros. A la investigación de dicha acción recíproca de varios valores hipotéticos de las variables autónomas puede llamársele análisis estructural. Un excelente ejemplo está constituido por el estudio de Samuelson sobre la acción recíproca del multiplicador-acelerador, en el que se demuestra que la estabilidad del sistema depende de los valores adoptados por ambos parámetros. En el sistema de insumo-producto, un análisis estructural típico sería el del efecto de un incremento en las exportaciones sobre una industria dada o sobre un factor de producción.

La formulación de programas para el gobierno o las empresas requiere de un análisis de los efectos de un tipo dado de acción sobre ciertas variables económicas. En general, un modelo que cuando menos abarque parte del sistema económico debe ser analizado en términos cuantitativos. Por ejemplo, las políticas restrictivas de las importaciones o con miras a expansionar la producción de acero deben tener en cuenta las necesidades de los sectores consumidores de este metal. De modo ideal, el análisis debe formularse de tal manera que ayude para hacer la elección entre políticas alternativas y que sirva de guía en la ejecución de la política convenida. El tipo de modelo económico que se necesite depende, por consiguiente, tanto de la índole del problema como de los medios disponibles para llegar a una solución.

La principal distinción entre la formulación de un programa y la predicción es que para esta última debe hacerse cierta clase de análisis de *todo* los factores que influyen sobre un resultado dado. La formulación de un programa puede considerarse, por lo tanto, como una predicción condicional, llegando a ser idénticas las dos únicamente en el caso de que se cumplan realmente las condiciones supuestas en el programa.

Las técnicas interindustriales son útiles tanto para el análisis estructural como para la orientación de la política económica. Hasta ahora, sólo han demostrado escaso valor en la predicción. La prueba principal de su contribución en un caso particular es el grado hasta el cual puede esperarse que la estructura de las transacciones interindustriales sea un factor de importancia. La demanda de acero, por ejemplo, es probable que dependa más del nivel de producción de las industrias consumidoras que de su precio. Las simplificaciones del modelo de insumo-producto (es decir, omitiendo los efectos del precio) tendrán, por lo tanto, menos efecto sobre el resultado, en este caso, del que producirán las del modelo de equilibrio parcial (o sea, suponiendo constantes todas las demás demandas). Sin embargo, lo contrario sería cierto en un análisis de las demandas respectivas de mantequilla y margarina. En forma similar, el análisis del ingreso presenta graves deficiencias cuando se toma como base para un programa de industrialización o de movilización, porque no toma en cuenta los "estrangulamientos" que puedan ocurrir como resultado de cambios rápidos en la composición de la oferta o la demanda. En cambio, los modelos de agregados pueden ser muy adecuados (y de más fácil aplicación) para el análisis de los acontecimientos cíclicos, en los cuales no es factor de importancia el cambio en la composición de la producción.

La mayoría de las investigaciones académicas en este campo han sido proyectadas para poner de manifiesto la significación cuantitativa de varios tipos de interdependencias. Esta clase de estudio es inapreciable para la valorización y el mejoramiento de estas técnicas, pero no se ocupa directamente de la política económica. Tanto en los Estados Unidos como en el extranjero se han estimulado otros trabajos en el campo interindustrial, esencialmente por las perspectivas que ofrecen de llegar a desarrollar una técnica de valor práctico para servir de guía en las decisiones del gobierno y los negocios. El programa de investigaciones del gobierno de los Estados Unidos durante los años de 1950 a 1954 fue planeado para analizar problemas de movilización. La mira principal de las investigaciones interindustriales patrocinadas por los gobiernos de Dinamarca, Noruega, Italia, los Países Bajos y el Japón, ha sido determinar la relación que guardan las importaciones y exportaciones con la producción nacional, y para servir de orientación a la política que influye en ellas. En países menos desarrollados —la Argentina, Colombia, México, el Perú, Puerto Rico, la India, Yugoslavia, y otros— se han llevado a cabo trabajos de análisis de insumo-producto como una ayuda en la planeación de la evolución económica.

D. *Plan general de la obra*

El empleo de un instrumento analítico requiere de la comprensión tanto de su aspecto teórico como de su contenido empírico. Éstos se examinarán en la Parte I de nuestro estudio. Presentamos la teoría interindustrial en tres capítulos, partiendo de los modelos más sencillos hasta los más complicados. Desde el principio se han presentado métodos de solución para que el lector pueda resolver ejemplos numéricos a medida que avanza. En los capítulos 2 y 3 se discute la teoría del insumo-producto derivada del sistema de Leontief, y en el 4, se desarrollan las técnicas de programación lineal para emplearse dentro de una estructura empírica interindustrial. En el capítulo 5 se discuten los principales problemas estadísticos que implica la construcción de modelos de insumo-producto, y los méritos de las soluciones adoptadas en varios países. Finalmente, en el capítulo 6 tratamos de valuar las pruebas que se han hecho de la validez de los supuestos de insumo-producto, y la posibilidad de idear pruebas más útiles.

La Parte II se ocupa de varios tipos de aplicación que se han hecho de las técnicas interindustriales. Las investigaciones llevadas a cabo en diez países principales se examinan en el capítulo 7, en el cual se indican la diversidad de propósitos y de enfoques estadísticos que actualmente existen. En el capítulo 8 utilizamos los datos estadísticos de cuatro países —los Estados Unidos, el Japón, Noruega e Italia— como una base de comparación de sus estructuras económicas. Nuestro objeto es averiguar las semejanzas y diferencias que existen en las relaciones interindustriales, y proporcionar al lector cierto sentido de los datos interindustriales.

El resto de la Parte II ejemplifica tipos específicos de problemas para los que parece especialmente prometedor el análisis interindustrial. Cada capítulo reseña los métodos empleados para un tipo dado de estudio y luego discute, con algún detalle, dos o tres ejemplos. La mayoría de éstos se han seleccionado de los países para los que se ha publicado la más grande variedad de aplicaciones —los Estados Unidos e Italia—. Los capítulos 9 y 12 abarcan varios tipos de análisis estructural; el 10 y el 11 se ocupan de la formulación de programas económicos.

Como la experimentación en gran escala con las tecnicas interindustriales data solamente de unos diez años, se han dedicado los principales esfuerzos a las estadísticas de insumo-producto, y menos se ha hecho por lo que respecta a las aplicaciones. Los trabajos que comúnmente se realizan en el Japón, el Reino Unido, Noruega, Australia, América Latina, la India y otras regiones nos sugieren, sin embargo, que se está corrigiendo este equilibrio y que, en un futuro próximo, será asequible una variedad muchísimo mayor de aplicaciones

BIBLIOGRAFIA [3]

Balderston, J., "Models of General Economic Equilibrium", *Economic Activity Analysis* (O. Morgenstern, ed.), John Wiley and Sons, Nueva York, 1954.

* Barna, T., "Introduction", *The Structural Interdependence of the Economy* (T. Barna, ed.), John Wiley and Sons, Nueva York, 1956.

Dorfman, R., P. Samuelson y R. Solow, *Linear Programming and Economic Analysis*, McGraw-Hill Company, Nueva York, 1958.

Koopmans, T. C. (ed.), *Activity Analysis of Production and Allocation*, Cowles Commission Monograph, Núm. 13, John Wiley and Sons, Nueva York, 1951.

* Kuenne, R., "Walras, Leontief, and the Interdependence of Economic

[3] Al final de cada capítulo se proporcionarán bibliografías seleccionadas, dando una referencia completa la primera vez que se hace mención de un concepto En la Parte I se marcan con un asterisco las selecciones que se recomiendan particularmente como lecturas suplementarias sobre teoría interindustrial. Se encontrará una bibliografía más completa en *Interindustry Economic Studies*, de V. Riley y R. L. Allen, Operations Research Office, Johns Hopkins University, 1955.

Activities", *Quarterly Journal of Economics*, LXVIII, Núm. 3, páginas 323-54 (agosto de 1954).

Leontief, W. (1936), "Quantitative Input-Output Relations in the Economic System of the United States", *Review of Economics and Statistics*, XVIII, Núm. 3, pp. 105-25 (agosto de 1936).

* —— (1951), *The Structure of the American Economy, 1919-1939*, Oxford University Press, Nueva York, segunda edición, 1951.

(Las tres primeras partes de este libro reproducen el texto de la edición de 1941 sin ninguna variación; la Parte IV comprende cuatro capítulos que originalmente aparecieron en artículos periodísticos sobre la aplicación del sistema de insumo-producto.)

Phillips, A., "The Tableau Économique as a Simple Leontief Model", *Quarterly Journal of Economics*, LXIX, Núm. 1, pp. 137-44 (febrero de 1955).

Walras, L., *Elements of Pure Economics* (trad. al inglés de W. Jaffe), Richard D. Irwin, Homewood, Illinois, 1954.

11

PARTE I

MODELOS DE INTERDEPENDENCIA ESTRUCTURAL

12

CAPÍTULO 2

TEORIA BASICA DE INSUMO-PRODUCTO

Este capítulo describe los elementos teóricos fundamentales de la clase más sencilla de análisis interindustrial —el modelo de insumo-producto de Leontief—. Son muy extensas las posibilidades de hacer formulaciones más complejas para aumentar el realismo del sistema, pero la gran mayoría de ellas pueden conceptuarse como generalizaciones de este sencillo modelo. Presentamos, en primer lugar, la forma más elemental —y, por ende, menos realista— del modelo de insumo-producto. A semejanza del más sencillo de los modelos keynesianos, se encuentra basado en un solo tipo de relación estructural y sirve, principalmente, como introducción a un cuerpo de teoría. Una variedad de estudios detallados se tratarán en los dos capítulos siguientes.

Como todos los modelos formales económicos el sistema de insumo-producto se deriva de supuestos acerca de la conducta económica y y de las definiciones de las variables empleadas en el análisis. Será conveniente principiar este estudio por la base conceptual del sistema contable de insumo-producto, el cual, simplemente, suministra la estructura para medir las corrientes de insumos y de productos comunes que circulan entre los distintos sectores de la economía. Una comparación de este sistema contable con la formulación del mismo conjunto de datos en el ingreso nacional debe poner de manifiesto la relación complementaria que hay entre las dos clases de análisis. Consideramos después los supuestos de Leontief respecto a las relaciones de insumo-producto dentro de los distintos sectores. La combinación de estos supuestos con las definiciones contables, cuando se reduce a forma algebraica, constituye el modelo de insumo-producto. Tras una breve introducción a los métodos de solución de las ecuaciones de dicho modelo, procedemos a examinar la justificación económica de la simplificación de la realidad hecha en esta forma particular.

A. *Sistema de contabilidad interindustrial* [1]

Puesto que el análisis interindustrial se ocupa de las interrelaciones que surgen de la producción, la función primordial de las cuentas

[1] Aunque el sistema de contabilidad de insumo-producto tiene considerable interés

interindustriales es investigar el curso de las corrientes de bienes y servicios en su paso de uno a otro sector de la producción. Las principales características de las cuentas interindustriales se indican en el ejemplo del cuadro 2-1. Este cuadro, llamado matriz de transacciones, abarca todos los bienes y servicios producidos en una economía. Se distingue por el hecho de que las actividades productivas se han agrupado juntas en cierto número de sectores, de los que, en este caso, se presentan cuatro (servicios, agricultura, industria básica, productos terminados). Los cuadros para el uso real varían en dimensión de 20 a 200 sectores productivos.[2]

CUADRO 2-1. *Ejemplo de cuentas interindustriales* *

Sectores de producción	*Sectores de consumo*				*Uso intermedio total* (W_i)	*Uso final* (Y_i)	*Uso total* (Z_i)
	S	*A*	*B*	*F*			
Servicios	20	25	15	80	140	60	200
Agricultura	0	25	0	120	145	105	250
Industria básica	0	25	45	40	110	40	150
Productos terminados	0	0	0	80	80	320	400
Compras totales (U_j)	20	75	60	320	475		
Insumos primarios (V_j)	180	175	90	80		525	
Producto total (X_j)	200	250	150	400			1 000

* Basado en los datos de insumo-producto italiano que se presentan más adelante en el cuadro 8-12. Para simplificar, se omiten las importaciones. Se han supuesto unidades de valor arbitrario.

En el sistema de contabilidad cada sector aparece dos veces, como creador de una producción y como usuario de insumos. Los elementos en cada hilera o renglón del cuadro muestran la forma cómo se distribuye la producción de cada sector durante el periodo contable dado. Por ejemplo, del total disponible de los productos de la industria básica (150 unidades), 25 los emplea la agricultura; 45 los establecimientos en el mismo sector de la industria básica, y 40 los productores de artículos terminados. El total de consumo intermedio —o sea, el uso para otras producciones— es, por lo tanto, de 110.

aparte del de su empleo en un modelo económico, es este último aspecto únicamente el que aquí nos interesa. En el capítulo 5 trataremos el sistema desde un punto de vista estadístico.

2 El lector debe consultar los cuatro cuadros reales de insumo-producto que se presentan en el capítulo 8.

Los consumos remanentes —en inversiones, consumo privado, consumo del gobierno o exportaciones— se han agrupado juntos bajo el rubro de "consumo final". Las unidades empleadas pueden ser o valores (por ejemplo, de un millón de dólares) o cantidades físicas, pero seguiremos el criterio de Leontief utilizando unidades de valor (determinadas a precios constantes).

El papel de la industria básica como compradora de insumos se indica por medio de la columna *B*. El total comprado de todas las industrias es de 60; el residuo de 90 unidades consiste de insumos "primarios" o no producidos. En sentido contable, este pago directo por factores primarios —tierra, trabajo y capital— comprende el valor agregado en el sector. Como de este ejemplo se han omitido las importaciones, el valor total de la producción de cada mercancía es igual a su consumo total.[3]

La importancia relativa de los consumos intermedio y final, y el orden de magnitud de las ventas de uno a otro sector en una economía industrial, se encuentran también ilustrados en el cuadro 2-1, que está basado en el cuadro real del insumo-producto para Italia, que se presenta en el capítulo 8. La proporción media del consumo intermedio con el consumo total, que en este caso es de 475 de cada 1 000, varía entre el 40 y 50 % en los cuatro casos que se estudian más adelante. Existe, no obstante, una variación considerable en esta proporción para sectores individuales, representada aquí por la escala que va del 20 % para artículos terminados al 73 % para productos de la industria básica.

El plan fundamental de estas cuentas interindustriales se deriva de la división de los consumos en dos categorías —intermedio y final— y la correspondiente división de los insumos en "primarios" y "producidos". La primera distinción es lógicamente semejante a la que se hace en el análisis keynesiano del ingreso entre elementos "inducidos" y "autónomos". En ambos modelos hay cierta opción en relación con los consumos que se considerarán autónomos (o "fina-

3 Los siguientes convencionalismos contables, que se tratan en el capítulo 5, los enumeramos aquí para proporcionar una mejor comprensión de los ejemplos de insumo-producto que se ofrecen en estos primeros capítulos:

1) Comúnmente se anotan las transacciones al precio del productor más que al costo del comprador, lo que quiere decir que los márgenes comerciales y de transportación se atribuyen a los sectores consumidores.

2) En principio, las corrientes de productos deben estar relacionadas con el empleo de insumos en la producción corriente, más que con el momento en que son comprados. Las diferencias que hay entre compra y consumo se ven reflejadas en los cambios de existencias, las que forman parte del consumo final.

3) Las compras realizadas a cuenta de capital se cargan, normalmente, en su totalidad, al consumo final, y las reservas de depreciación se incluyen, por tanto, en los insumos primarios.

les", según la terminología del insumo-producto), que deben determinarse partiendo de consideraciones tanto teóricas como empíricas.[4] Por ahora nos ocuparemos del modelo "abierto" de Leontief, en el cual, consumo final total tiene, aproximadamente, la misma significación que producto nacional bruto.

CUADRO 2 2. *Sistema de contabilidad interindustrial*

		Sectores de compra									
		Consumo intermedio		*Consumo final*						*Oferta*	
		Sector 1...*j*...*n*	*Consumo intermedio total*	*Inversión*	*Consumo*	*Gobierno*	*Exportaciones*	*Uso final total*	*Uso total = oferta total*	*Importaciones*	*Producción*
Sector de producción	1	$X_{11} \ldots X_{1j} \ldots X_{1n}$	W_1	I_1	C_1	G_1	E_1	Y_1	Z_1	M_1	X_1
	2	. .									
	.	(Cuadrante II)		(Cuadrante I)							
	i	$X_{i1} \ldots X_{ij} \ldots X_{in}$	W_i	I_i	C_i	G_i	E_i	Y_i	Z_i	M_i	X_i
	.	. .									
	n	$X_{n1} \ldots X_{nj} \ldots X_{nn}$	W_n	I_n	C_n	G_n	E_n	Y_n	Z_n	M_n	X_n
Insumos producidos totales		U_1 U_j U_n									
Insumos primarios (valor agregado)		V_1 V_j V_n (Cuadrante III)		V_I	V_C	V_G	V_E (Cuadrante IV)		V		V
Produccion total		X_1 X_j X_n		I	C	G	E	Y	Z	M	X

Las propiedades formales del sistema de contabilidad se manifiestan en el cuadro 2-2, que presenta una notación que se continuará

[4] Sin embargo, el enfoque de los correspondientes sistemas de contabilidad es completamente diferente. El análisis de insumo producto tiene por objeto determinar niveles de pr ción total para cada uno de los sectores de la economía, y la elección

en lo sucesivo. La separación entre consumo intermedio y final de producción, y entre insumos producidos y primarios conduce a la formación de cuatro tipos de transacciones, que se indican en los cuatro cuadrantes del cuadro.

El *cuadrante I* contiene el consumo final de mercancías y servicios producidos, subdivididos en tipos principales de consumo. (Más del 90 % del producto nacional bruto aparece dentro de esta categoría.)

El *cuadrante II* comprende la parte esencial de las cuentas interindustriales. Cada asiento X_{ij}, indica la cantidad de mercancía *i* consumida por el sector *j*, determinada a precios constantes. El consumo intermedio total de cualquier mercancía se encuentra identificado como W_i, y el total de compras hechas a otros sectores por una industria dada, como U_j.

El *cuadrante III* contiene el empleo de insumos que son "primarios", en el sentido de que no son producidos dentro del sistema. En un modelo estático el empleo del acervo existente de capital es un insumo primario, como lo es el consumo de los factores primarios habituales, tierra y trabajo. (Cuando la producción se valoriza a los precios corrientes del mercado, para equilibrar las cuentas los impuestos indirectos deben tratarse también como insumos primarios) El pago total de insumos primarios por cada sector corresponde, por lo tanto, aproximadamente al valor agregado en la producción, representando la diferencia que hay entre el valor de la producción y el costo de los insumos producidos fuera de un establecimiento dado. Salvo cuando es necesario hacer por separado las mediciones de los insumos (como en los capítulos 3 y 4), emplearemos el término valor agregado (V_j) para indicar el consumo total de insumos primarios por un sector dado.

El *cuadrante IV* contiene el insumo directo de factores primarios en el consumo final, cuyos principales ejemplos son los empleos del gobierno y los servicios nacionales. Estas transacciones no se incluyen en la mayoría de los modelos interindustriales, pero deben registrarse para poder hacer compatibles a los totales con los totales nacionales.

Las dos últimas columnas del cuadro 2-2 subdividen a la oferta

de elementos autónomos es, en esencia, cuestión de conveniencia. En el sistema de contabilidad del ingreso nacional se atribuye importancia al producto nacional bruto como medida del funcionamiento de la economía, y como un pronóstico de la conducta de sus componentes. Bajo el aspecto estadístico conviene, sin embargo, definir al consumo final en la misma forma que en el análisis de insumo-producto, como medida tendiente a la realización de un sistema unificado de contabilidad nacional. En nuestra exposición emplearemos el término demanda "autónoma" más que el de demanda "final" para todos los casos en que se aparta mucho del concepto de las cuentas nacionales.

17

total de cada mercancía entre importaciones y producción interna.[5] Si cada mercancía se produce únicamente por un sector y no existen coproductos, como se supuso en el ejemplo anterior, la oferta total de la mercancía i es igual a la producción en el sector i, más las importaciones de i. Estos supuestos se formularán en el resto de este capítulo.[6]

La estructura formal de las cuentas de insumo-producto puede expresarse mejor por medio de símbolos. Los elementos esenciales se definen de la manera siguiente: [7]

Z_i = oferta total de la mercancía i
X_i = producción total de la mercancía i
M_i = importaciones de la mercancía i
X_{ij} = cantidad de la mercancía i consumida en el sector j
Y_i = demanda final de la mercancía i
W_i = consumo intermedio total de la mercancía i $(\sum_j X_{ij})$[8]
U_j = consumo total por el sector j de los insumos comprados de otras industrias $(\sum_i X_{ij})$
V_j = consumo total de insumos primarios (valor agregado) en el sector j

Estos conceptos conducen a dos ecuaciones de equilibrio. La primera se aplica a las hileras en el cuadro 2-2. Expresa que para cada mercancía la oferta total es igual a la demanda total, la que está compuesta de la demanda intermedia más la demanda final:

$$\begin{array}{c} \textit{Oferta} \qquad \textit{Demanda} \\ Z_i = M_i + X_i = \sum_j X_{ij} + Y_i = W_i + Y_i \quad (i = 1 \cdots n) \end{array} \tag{2.1}$$

5 En forma alternativa, pueden tratarse las importaciones como una deducción del consumo final (como se hace en la contabilidad del ingreso nacional) o agregarse a los insumos primarios. En este caso, cada total de columna representa más la oferta total que la producción nacional.

6 Éstos son los supuestos del modelo de insumo-producto, tal como se explican en la sección siguiente. Cuando éstos no se formulan, es necesario tener notaciones por separado para las mercancías y los sectores, porque una mercancía determinada, como el acero, puede ser producida por varios sectores. En un sistema más generalizado de contabilidad interindustrial, se diferencian las producciones de cada mercancía realizadas por cada sector.

7 Nuestra notación es similar a la de Leontief (1951), con la excepción de que él no distingue entre los insumos primarios y los producidos, y de que iguala la oferta total con la producción total. La utilidad de estas distinciones se verá más adelante.

8 $\sum_j X_{ij}$ indica la suma para todos los valores de j, es decir, la suma de la hilera $X_{i1} + X_{i2} + \ldots + X_{in}$. De modo similar, $\sum_i X_{ij}$, es la suma de la columna $X_{1j} + X_{2j} + X_{3j} + \ldots X_{nj}$.

18

La segunda ecuación se aplica a las columnas del cuadro 2-2. Expresa que la producción total en cada sector es igual al valor de los insumos comprados de otros sectores más el valor agregado en ese sector: [9]

$$X_j = \sum_i X_{ij} + V_j = U_j + V_j \quad (j = 1 \cdots n) \tag{2.2}$$

Estas dos ecuaciones pueden aceptarse como definiciones de demanda final (Y_i) y del valor de insumos primarios (V_j), respectivamente. La demanda final (o consumo final) es la diferencia entre la oferta total de una mercancía disponible y la cantidad consumida en la producción y, por ende, incluye los cambios en las existencias. El valor de los insumos primarios (valor agregado se define como la diferencia que hay entre el valor de la producción en un sector y los pagos por los insumos comprados de otros sectores productivos. Estas definiciones corresponden muy de cerca a los conceptos de producción final y de valor agregado que se emplean en el análisis del ingreso nacional.

Partiendo de estas definiciones es fácil demostrar la relación que existe entre las cuentas de insumo-producto y los totales del ingreso nacional. Sumando las ecuaciones de equilibrio (2.1) para cada hilera, y tratando a las importaciones como una deducción de la demanda final, nos da:

$$\sum_i X_i = \sum_i \sum_j X_{ij} + \sum_i Y_i - \sum_i M_i$$

(En el cuadro 2-1, $1000 = 475 + 525$.)

Sumando, en forma similar, a través de todas las columnas da:

$$\sum_j X_j = \sum_j \sum_i X_{ij} + \sum_j V_j$$

Puesto que $\sum_i X_i = \sum_j X_j$, estas ecuaciones son iguales entre sí. Combinándolas y eliminando de ambas partes el total de todas las transacciones interindustriales, nos proporcionan la identidad de las cuentas básicas nacionales:

$$\sum_i Y_i - \sum_i M_i = \sum_j V_j \tag{2.3}$$

9 En la exposición se supone que la producción y el consumo están determinados en unidades de valor. Conviene a menudo, sin embargo, considerar las relaciones de insumo-producto en términos físicos, y a los valores, representando 1 000 000 de dólares de cada mercancía a los precios básicos anuales. También es posible construir cuadros de insumo-producto directamente en unidades físicas para muchas mercancías. En este caso podemos emplear las ecuaciones (2.1) y la (2.4) que siguen, pero no la (2.2).

19

En el cuadro 2-1, el total de pagos de factores (525) corresponde al ingreso nacional bruto, en tanto que la demanda final total (525) menos las importaciones (0) corresponde, por el consumo, al producto nacional bruto.

Es importante observar que no existe necesaria relación entre los totales de las columnas individuales de la demanda final y del consumo total de cualquier insumo primario aislado. Desde el punto de vista contable la diferencia importante entre los dos tipos de sectores es que los sectores productivos deben tener presupuestos equilibrados (insumo total igual a producto total), pero los valores de los insumos primarios y de los consumos finales únicamente deben equilibrarse en el total global.

Puede realizarse una comparación empírica de los dos sistemas de contabilidad por medio de la consolidación del mismo conjunto de datos, primero en la forma interindustrial y después en forma de cuentas nacionales. Liebling (1955) ha proporcionado dicha comparación utilizando el cuadro de insumo-producto de los Estados Unidos para 1947, y cuyos resultados se reproducen en los cuadros 2-3(a) y 2-3(b).

El cuadro 2-3(a) es similar al ejemplo anterior del cuadro 2-1, pero además de las partidas en los cuadrantes I, II y III, da en el cuadrante IV un total de transacciones de 71 mil millones de dólares. Los componentes de este total se indican en el cuadro 2-3(b). Este último se encuentra compuesto de las cinco cuentas de sectores que se emplean en la contabilidad del ingreso nacional, de las cuales una (negocios) incluye todos los sectores productivos, y las demás proporcionan las subdivisiones del consumo final y de insumos primarios.

En ambos cuadros el producto nacional bruto puede computarse en dos formas por medio de la ecuación (2.3). En cualquiera de los dos casos, la demanda final total de mercancías producidas y de servicios es la suma de las partidas del cuadrante I ($ 222). A esto debemos añadir el consumo directo de insumos primarios, que es de $ 21 en el cuadrante IV ($ 19 de las unidades familiares y $ 2 de las importaciones), para obtener un consumo final total de 243 mil millones de dólares. El producto nacional bruto es igual a esta cifra menos las importaciones ($ 9), o sean $ 234 mil millones de dólares. (Las partidas restantes, que se encuentran entre paréntesis en el cuadrante IV, son impuestos y transferencias que no entran en el PNB.) Puede obtenerse el mismo total del cuadro 2-3(b) sumando el valor agregado neto de las importaciones ($ 215 en el cuadrante III, más $ 19 en el cuadrante IV).

Este ejemplo demuestra que la demanda final apropiada para el

20

CUADRO 2-3. *Consolidaciones alternativas de los datos interindustriales de los Estados Unidos para 1947* * *(en miles de millones de dólares)*

A) *Forma de insumo-producto*

Sector de compras / *Sector de producción*	*Agricultura*	*Industria*	*Servicios*	*Uso final*	*Consumo total*
Agricultura	11	19	1	10	41
Industria	5	89	40	106	240
Servicios	5	37	37	106	185
Insumos primarios	20	95	107	21 (50)	243 (293)
Producto total	41	240	185	243 (293)	709 (759)

B) *Forma de cuentas nacionales*

Sector de compras / *Sector de producción*	*Negocios*	*Gobierno*	*Comercio exterior (exportaciones)*	*Unidades familiares (consumo)*	*Inversión bruta*	*Ingresos totales*
Negocios	244	16	16	157	33	466
Gobierno	28	(4)	(1)	(31)		28 (64)
Comercio exterior (importaciones)	7	1		1		9
Unidades familiares	187	16 (14)	1	2		206 (220)
Pagos totales	466	33 (51)	17 (18)	160 (191)	33	709 (759)

* FUENTE: Liebling (1955). Cuadros 6 y 7. Los cambios de existencias se han tratado sobre una baso neta y han sido incluidos en la inversión bruta. Se han empleado los datos de las cuentas nacionales para la subdivisión del cuadrante IV, en el que se presentan entre paréntesis las partidas que no están incluidas en el PNB. Liebling demuestra que en el cuadro (b) hay diferencias sustanciales de los conceptos del Departamento de Comercio, aunque el PNB total es, más o menos, el mismo.

sistema de insumo-producto —demanda total de bienes y servicios menos consumo intermedio— responde del 90 %, aproximadamente, del producto nacional bruto en los Estados Unidos. El resto está representado por el empleo directo de factores primarios hecho principalmente por el gobierno.[10] Con el objeto de completar el sistema de contabilidad interindustrial debe incluirse este consumo, pero no tendrá ningún efecto en la solución del modelo de insumo-producto.

En estos cuadros también se ilustra la naturaleza complementaria de los dos sistemas contables. La clasificación de mercancías utilizada para las cuentas interindustriales proporciona una subdivisión detallada del cuadrante II, mientras que la subdivisión funcional del consumo final y de los insumos primarios ofrece más detalles en los otros tres cuadrantes.[11]

B. *Modelos fundamentales de insumo-producto*

El objetivo principal del modelo de insumo-producto es explicar las magnitudes de las corrientes interindustriales en función de los niveles de producción en cada sector. Varios supuestos son necesarios a fin de que tal procedimiento adquiera amplia significación teórica.[12] Primero, debe ser posible formar los *sectores productivos* de tal manera que para cada uno de ellos pueda suponerse una sola función de producción. Se hace este supuesto en todos los modelos de equilibrio general así como en el análisis de equilibrio parcial de Marshall. En las aplicaciones empíricas implica que a todas las actividades productivas se las identifique como pertenecientes a un sector específico.

El modelo de insumo-producto de Leontief hace también varios supuestos especiales que no se encuentran necesariamente en otros modelos interindustriales. Los más importantes de éstos son, *i)* que un producto dado es suministrado únicamente por un sector; *ii)* que no existen coproductos; y, *iii)* que la cantidad de cada uno de los insumos utilizados en la producción por un sector, está totalmente determinada por el nivel de producción de dicho sector.

Estos supuestos hacen posible realizar importantes simplificaciones en las ecuaciones walrasianas del equilibrio general. Todas las actividades productivas que tienen un producto determinado, tal como el acero, se consolidan en un solo sector productor de acero. Por consiguiente, es posible referirse al acero como *industria* y al acero como mercancía. En tanto que el modelo walrasiano trata de las relaciones que existen entre las unidades productivas individuales (plantas), el modelo de Leontief se ocupa únicamente de las relaciones entre los grupos de unidades productivas o industrias.[13]

10 En los casos en que el gobierno produce un artículo de comercio, como la energía eléctrica, esta actividad se incluye en los sectores productivos

11 Cuando cualquiera de los dos sistemas de contabilidad se modifica para mejorar la estabilidad de las relaciones en un modelo dado, puede perderse el nexo entre ambos, pero existen ventajas evidentes en la conservación de una estructuración total compatible con la compilación inicial de los datos. Siegel (1955), Liebling (1955) y Stone (1956), proporcionan una exposición de las diferencias teóricas y estadísticas que hay entre los dos sistemas.

12 Leontief (1951), pp 35-8 Los supuestos se tratan en la sección D de este libro

Estos supuestos del modelo de insumo-producto hacen posible formular una ecuación para la demanda (X_{ij}) de cada industria (j) de cada mercancía (i), como una función de su propio nivel de producción (X_j). Por razones de cómputo y de conveniencia estadística se supone que estas funciones de insumo son lineales en el curso de una serie dada de producciones y, por tanto, que tienen la forma siguiente:[14]

$$X_{ij} = \overline{X}_{ij} + a_{ij}X_j \qquad (2.4)$$

Al parámetro a_{ij} se le da el nombre de *coeficiente marginal de insumo*. La constante $\overline{X}_{ij}$ incluye a cualesquiera elementos de costo fijo que no varíen con el nivel de producción. Cuando ésta es igual a cero, la función insumo resulta:

$$X_{ij} = a_{ij}X_j \qquad (2.4a)$$

El modelo original de Leontief es el resultado de la combinación de las relaciones contables, dadas en la ecuación (2.1), de cada mercancía con las funciones de insumo de la ecuación (2.4*a*).[15] En la forma más simplificada del modelo, las importaciones son determinadas fuera del sistema. Sustituyendo el valor de X_{ij} de la ecuación (2.4*a*) en la ecuación (2.1) y cambiando el orden de los términos, nos da una ecuación de equilibrio para cada mercancía o sector:

$$X_i - \sum_j a_{ij}X_j = Y_i - M_i \quad (i = 1 \cdots n) \qquad (2.5)$$

En este sistema de n ecuaciones, hay n niveles incógnitos de producción (X_j), n^2 parámetros (a_{ij}) que describen las funciones de insumo, y dos series de n variables autónomas (Y_i y M_i), cuyos valores están

13 Cuando no se han formulado los supuestos especiales del modelo de insumo-producto, para el trabajo empírico todavía es útil formar el agregado de las actividades productivas dentro de las industrias, pero, una mercancía dada puede, en tal caso, ser producida por varias industrias.

14 W. D Evans (1956) ha analizado las propiedades del sistema no-lineal correspondiente, y ha demostrado que sería factible su cómputo.

15 Leontief (1951), pp. 36-7, y (1953a), pp. 17-20.

23

especificados en un problema dado.[16] (Pueden transcribirse ecuaciones similares para cada insumo primario, pero no tienen ningún efecto en la solución.)

Cuando el intercambio comercial es importante, con frecuencia conviene hacer de las importaciones, variables dependientes. Como primera aproximación, puede suponerse que el nivel de importaciones (M_i) es una función de la oferta total de esa mercancía (Z_i) y, por tanto, que esté relacionada con el nivel de producción nacional (X_i). Suponiendo una función lineal en el curso de cierta serie, da:

$$M_i = \overline{M}_i + m_i X_i \qquad (2.6)$$

En esta fórmula, al parámetro m_i se le llama *coeficiente de importación*, el cual está íntimamente relacionado con la propensión marginal a importar una mercancía dada.[17] Sustituyendo esta función de importación en la ecuación (2.5*a*) y reuniendo los términos, da el siguiente conjunto de relaciones:

$$(1 + m_i)X_i - \sum_j a_{ij}X_j = \overline{Y}_i \quad (i = 1 \cdots n) \qquad (2.7)$$

donde

$$\overline{Y}_i = Y_i + \sum_j \overline{X}_{ij} - \overline{M}_i$$

La variable $\overline{Y}$ es la demanda total autónoma, que es igual a la demanda final (Y_i) cuando los otros dos términos son cero.[18]

Las ecuaciones (2.7) constituyen las ecuaciones fundamentales del sistema de insumo-producto en el caso general.[19] Se encuentran

[16] La ecuación (2.5) puede plantearse en forma más general reteniendo el término constante en (2.4). Entonces la ecuación fundamental resulta:

$$X_i - \sum_j a_{ij}X_j = \overline{Y}_i - M_i \quad (i = 1 \cdots n) \qquad (2.5a)$$

de donde

$$\overline{Y}_i = \sum_j \overline{X}_{ij} + Y_i$$

En este caso $\overline{Y}_i$ incluye elementos autónomos de consumo intermedio, así como también de consumo final. En la práctica actual en insumo-producto, los parámetros $\overline{X}_{ij}$, solamente se han calculado para unas cuantas mercancías (véanse los capítulos 7 y 8).

[17] La propensión marginal a importar comúnmente se define como una proporción de la producción total.

[18] Salvo cuando se exprese explícitamente, de ahora en adelante no haremos ninguna distinción entre los términos demanda "autónoma" y "final".

[19] Leontief prefiere utilizar la Z como variable dependiente en esta ecuación, en lugar de X. Cuando no hay importaciones autónomas, las dos están relacionadas por la

24

basadas en una división de las variables, entre las que varían con el nivel de producción en cada sector (X_i, y M_i), y las que no varían. Aquéllas son eliminadas por medio de las funciones de insumo y de las funciones de importación. Esta formulación se conceptúa comúnmente como una simple manera de determinar los niveles de producción en cada sector, correspondientes a cualquier conjunto dado de demandas autónomas. No obstante, en un sentido más general las ecuaciones (2.7) constituyen una función simplificada de producción para la economía total. Cuando sumamos las ecuaciones para la utilización del capital y el trabajo, que se han omitido hasta ahora, este modelo de insumo puede transformar cualquier "lista de productos" finales en requisitos para el capital y el trabajo o, como alternativa, puede emplearse para especificar las producciones realizables con determinadas cantidades de factores primarios.

Aunque los problemas más usuales a los que se aplica el sistema de insumo-producto implican la especificación de las $\overline{Y}$ y la determinación de las X, es asimismo factible suponer un conjunto compatible de n valores para algunas X y para algunas $\overline{Y}$, y para determinar las restantes n. En todos los casos es necesario resolver un sistema de n ecuaciones simultáneas en n incógnitas. La solución a este problema puede escribirse en la forma:

$$X_i = r_{i1}\overline{Y}_1 + r_{i2}\overline{Y}_2 + \cdots + r_{in}\overline{Y}_n \qquad (i = 1 \cdots n) \qquad (2.8)$$

Estas ecuaciones representan una transformación de las ecuaciones originales (2.7), en las que un nuevo grupo de constantes (r_{ij}) se derivan de los parámetros originales (a_{ij} y m_i). Esta forma, que se discute en el apéndice, se conoce como *solución general*. También es posible resolver para valores particulares de X y de $\overline{Y}$, sin encontrar la solución general, como se indicará en la sección siguiente.

Hasta ahora hemos evitado hacer cualquier interpretación económica de los parámetros cruciales en el modelo de insumo-producto, los a_{ij}, con el fin de poner primero en claro la estructura lógica del sistema. Leontief interpreta a estos parámetros como coeficientes

ecuación: $Z_i = (1 + m_i)X_i$. Si para todas las aplicaciones se consideran fijos los coeficientes de importación, ha de preferirse Z_i a X_i como variable dependiente, desde el punto de vista del cómputo, porque es más fácil encontrar la solución general que se presenta a continuación en las ecuaciones (2.8). En países en los que las importaciones constituyen una parte importante de la oferta total en cierto número de sectores, puede ser conveniente suponer valores diferentes de m en distintos problemas. La forma presentada en las ecuaciones (2.7) es más útil entonces, porque un cambio en m_i no afecta a la columna correspondiente de coeficientes de insumo. Por esta razón, usualmente se toma X_i como variable dependiente en países distintos de los Estados Unidos.

fijos de producción que se determinan tecnológicamente. Este razonamiento representa el argumento más decisivo para la adopción del modelo en esta forma sencilla, pero no constituye la única base para suponer cierta relación entre insumos comprados por un sector y su nivel de producción. Cualquier relación estable entre insumo y producto, como consecuencia de factores institucionales, tales como las tasas de impuestos, o por factores de conducta, como en el caso de una estructura constante de demanda, pueden, de igual modo, ser incorporadas dentro de este tipo de modelo.

C. *Introducción a métodos de solución*

Una de las desventajas de los modelos interindustriales, comparados con los del ingreso nacional, ha sido que aquéllos parecen necesitar cálculos mucho más formidables. Consecuentemente, se ha hecho menos uso ilustrativo del sistema de Leontief, el cual ha demostrado ser tan provechoso en el caso de los modelos keynesianos. Hay, no obstante, mucho que aprender de sistemas de insumo-producto que son suficientemente pequeños para poder tratarse por métodos numéricos sencillos. Una vez que éstos se han dominado, se hace más fácil la interpretación de los resultados de modelos mayores y más realistas, y se encuentra uno más capacitado para valorar los supuestos fundamentales. En esta sección presentamos, por lo tanto, uno de los métodos más sencillos para resolver los sistemas de insumo-producto y desarrollamos algunos ejemplos; en el apéndice se dará un tratamiento más completo.

Aunque a primera vista parecen embrollados, los métodos de aproximaciones sucesivas o de "iteración" son, en realidad, bastante eficientes para la solución de modelos de insumo-producto de dimensiones moderadas.[20] Los economistas ya se hallan familiarizados con dichos métodos en la investigación de los efectos de la inversión autónoma en un procedimiento de multiplicador keynesiano. Además de proporcionar una solución al nivel del ingreso alcanzado finalmente en un estado de equilibrio, la cadena del multiplicador proporciona cierto discernimiento de la manera como los incrementos en el ingreso se trasmiten a través de la economía. El modelo más sencillo para la determinación del ingreso puede conceptuarse como un modelo de insumo-producto de un solo sector, en la forma siguiente:

$$X_t = cX_{t-1} + I_t \tag{2.9}$$

[20] Evans (1956) nos ofrece un tratamiento admirable del tema integral de las soluciones de insumo-producto.

La inversión I es la parte autónoma del sistema, correspondiendo a la demanda final, y la propensión marginal a consumir c es análoga a un coeficiente de insumo. En los dos sistemas es necesario producir en exceso de las demandas "exteriores" del sistema para satisfacer los requisitos inducidos —los que se relacionan con el nivel de producción— que, en este caso, consisten en el consumo. La ecuación (2.9) se ha transcrito como una ecuación de diferencia, haciendo depender al consumo de la producción total o del ingreso del periodo anterior (X_{t-1}), y la solución iterativa puede considerarse como una secuencia en el tiempo.

Una solución a esta ecuación está representada por un valor de X que se mantendrá por sí mismo: $X_t = X_{t-1}$. Podemos encontrar ese valor para un valor particular de I, siendo conocida c, o para todos los valores posibles. Una forma común de encontrar una solución particular, es la de investigar los incrementos sucesivos en el ingreso que resultan de una sola inversión, hasta que éstos se reduzcan gradualmente a cero. Si la propensión marginal a consumir es de 0.5 e $I = 100$, esta serie es:

$$\begin{aligned} X_1 &= 100 \\ X_2 &= 0.5(100) = 50, \\ X_3 &= 0.5(50) = 25 \\ X_n &= 0.5\, X_{n-1} = (0.5)^{n-1}100 \\ \sum_{t=1}^{t=\infty} X_t &= 100 + 50 + 25 + \cdots = 200 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Además de representar los efectos totales de una sola inversión a través del tiempo, la suma de esta serie indica el nivel de producción total necesario para sostener un nivel continuo de inversión de 100, con un consumo del 50% del ingreso.[21] Esta segunda interpretación proporciona una analogía con el sistema estático de insumo-producto.

Un segundo método de solución es el de obtener una fórmula general para el valor de equilibrio de X_t, la que en este caso es muy sencilla:

$$X_t = X_{t-1} = \frac{I_t}{1-c} = \frac{100}{0.5} = 200 \tag{2.11}$$

Cuando recurrimos a sistemas de insumo-producto de más de tres sectores, sin embargo, la solución general se hace más difícil de calcu-

[21] Una forma alternativa para llegar a una solución de equilibrio en este último problema, es suponer que I_t es igual a 100 en cada periodo, e investigar los niveles de

lar que la aproximación iterativa. Por tanto, adoptaremos los métodos iterativos para encontrar primeramente soluciones particulares.

Para construir un sistema ilustrativo de insumo-producto tomamos los datos contables del cuadro 2.1, y suponemos que las funciones de insumo son calculadas de la ecuación (2.4*a*). Los coeficientes de insumo, por lo tanto, se obtienen dividiendo cada compra interindustrial por la producción total del sector. La matriz resultante de coeficientes de insumo se indica en el cuadro 2-4.

CUADRO 2-4. *Coeficientes de insumo-producto (modelo I)* *

Sector de producción	*Sector de consumo*			
	S	*A*	*B*	*F*
Servicios	0.1	0.1	0.1	0.2
Agricultura	0	0.1	0	0.3
Industrias básicas	0	0.1	0.3	0.1
Productos finales	0	0	0	0.2
Valor agregado	0.9	0.7	0.6	0.2

* Los coeficientes concuerdan muy de cerca con los que pueden obtenerse del cuadro 8-12 para Italia, que veremos después.

Supongamos ahora que conocemos las demandas finales del cuadro 2-1, pero que no conocemos los niveles de producción. En este caso, nuestro problema consiste en resolver la siguiente serie de ecuaciones obtenidas de (2.5), que constituyen el modelo I, para las producciones totales:

producción que se presentan en la ecuación (2 9) hasta que se alcance una posición de equilibrio, como se indica en $X_t = X_{t-1}$:

t	I_t	$0.5X_{t-1}$	X_t
1	100	0	100
2	100	50	150
3	100	75	175
4	100	87.5	187.5
5	100	93.75	193.75
...	...	...	...
∞	100	100	200

La diferencia entre estas dos versiones del método iterativo es que en el primer caso únicamente se computan los incrementos periodo por periodo, mientras que en el segundo, se determina en cada periodo el nivel total de producción.

$$\begin{aligned} X_S &= (0.1X_S + 0.1X_A + 0.1X_B + 0.2X_F) + 60 \\ X_A &= (\qquad\quad 0.1X_A \qquad\qquad + 0.3X_F) + 105 \\ X_B &= (\qquad\quad 0.1X_A + 0.3X_B + 0.1X_F) + 40 \\ X_F &= (\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; 0.2X_F) + 320 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Para llegar a una solución podemos seguir el método utilizado en (2.10) para resolver el modelo de ingreso nacional de una sola ecuación. Suponemos que el primer incremento en la producción (ΔX_i^1) es igual al elemento autónomo (demanda final) y determina el aumento en la producción de otros sectores necesarios para producir esta cantidad. Estas demandas interindustriales ("efectos de la primera etapa") se suman entonces para cada uno de los sectores y dan por resultado el segundo incremento en la producción (ΔX_i^2).[22] Estas demandas derivadas se multiplican nuevamente por los coeficientes de insumo para determinar incrementos adicionales en la producción.

Una forma sistemática de llevar a cabo este procedimiento iterativo se demuestra en el cuadro 2-5. En la primera etapa de la solución, la demanda final de 320 en el sector *F*, por ejemplo, se multiplica por cada uno de los coeficientes de insumo de la columna *F* para dar 64, 96, 32 y 64, para los insumos que se necesitan de cada uno de los cuatro sectores. (El valor agregado en cada sector no tiene efecto en la solución, pero se incluye para demostrar de qué modo la demanda final se traduce sucesivamente en una necesidad de insumos primarios, y como una verificación del cómputo). Después que se han ejecutado multiplicaciones similares para las demás columnas, se suman las hileras para dar el segundo incremento a la producción, $\Delta X_i^{(2)}$. Por ejemplo, en el sector *S* este incremento es (6 + 10.5 + 4 + 64) igual a 84.5. Este valor se registra en la base de la columna *S* junto con los segundos incrementos para los demás sectores, 106.5, 54.5 y 64.0. Entonces, se repite el cálculo empleando estos incrementos como niveles de producción, y calculando nuevamente el incremento en la producción de cada sector que se necesita para sostenerlos. La demanda total creada después de cada etapa del cálculo, se indica en la penúltima columna. Por ejemplo, después de tres iteraciones, en el sector *S* la demanda ha llegado a 194.5 en comparación con su verdadero valor que es de 200.

Puede emplearse este método para proporcionar soluciones a cualquier grado de exactitud que se desee. En el caso presente, el error mayor es de 1.6 % en el sector *B* después de cuatro iteraciones, y el

[22] Como el modelo de insumo-producto representa una posición de equilibrio estático más que un sistema dinámico, la serie iterativa indica únicamente el "tiempo computable", más bien que una sucesión cronológica.

29

error promedio es de 0.45 %. El error puede reducirse por medio de la extrapolación de la última iteración, según la fórmula dada en la nota al calce.[23]

El planteo algebraico del método que hemos venido tratando es el siguiente:

$$
\begin{aligned}
\Delta X_i^{(1)} &= Y_i \\
\Delta X_i^{(2)} &= \sum_j a_{ij}\,\Delta X_j^{(1)} \\
\Delta X_i^{(3)} &= \sum_j a_{ij}\,\Delta X_j^{(2)} \\
\Delta X_i^{(n)} &= \sum_j a_{ij}\,\Delta X_j^{(n-1)} \\
X_i^{(n)} &= \sum_{t=1}^{t=n} \Delta X_i^{(t)}
\end{aligned}
\qquad (2.13)
$$

Cuando sólo hay un sector, este conjunto de ecuaciones se reduce a (2.10) para el modelo keynesiano. (Las ecuaciones (2.13) se presentan en el apéndice en forma de matriz.)

[23] Evans (p. 73) da el método siguiente de extrapolación para los términos remanentes de la solución. Primero, forma las proporciones de los dos últimos incrementos en la producción de cada sector.

$$r_S = \frac{3.9}{12.7} = 0.307$$

$$r_A = \frac{1.5}{6.8} = 0.220$$

$$r_B = \frac{5.3}{14.3} = 0.371$$

$$r_F = \frac{0.5}{2.6} = 0.192$$

El promedio de estas proporciones, 0.273, se emplea entonces en la expresión siguiente para determinar el residuo de cada sector:

$$\left(\frac{r}{1-r}\right)\Delta X^n$$

donde ΔX^n es el último incremento. Si aplicamos este método a nuestro ejemplo, nos da el siguiente resultado para cada sector:

$$
\begin{aligned}
r/(1-r) &= 0.273/0.727 = 0.376 \\
X_S &= 198.4 + 0.376(3.9) = 199.9 \\
X_A &= 249.6 + 0.376(1.5) = 250.2 \\
X_B &= 147.6 + 0.376(5.3) = 149.6 \\
X_F &= 399.9 + 0.376(0.5) = 400.1
\end{aligned}
$$

Evans demuestra que este procedimiento puede justificarse en teoría y que a medida que se continúa la iteración las proporciones convergen hacia un valor común (raíz característica dominante de la matriz.)

30

Cuadro 2-5. *Solución incremental para el modelo I*

Sectores de producción	*Sectores de consumo* S		A		B		F		*Uso interindustrial* (ΔX_i^t)	*Demanda final* $(Y_i = \Delta X_i^1)$	*Estimación de la demanda total* (X_i^t)	*Demanda total actual* (1)
S	0.1	6.0	0.1	10.5	0.1	4.0	0.2	64.0	84.5	60	144.5	
		8.5		10.6		5.4		12.8	37.3		181.8	
		3.7		3.0		3.4		2.6	12.7		194.5	
		1.3		0.7		1.4		0.5	3.9		198.4	200
A	0	...	0.1	10.5	0	...	0.3	96.0	106.5	105	211.5	
		...		10.6		...		19.2	29.8		241.3	
		...		3.0		...		3.8	6.8		248.1	
		...		0.7		...		0.8	1.5		249.6	250
B	0	...	0.1	10.5	0.3	12.0	0.1	32.0	54.5	40	94.5	
		...		10.7		16.4		6.4	33.5		128.0	
		...		3.0		10.0		1.3	14.3		142.3	
		...		0.7		4.3		0.3	5.3		147.6	150
F	0	...	0	...	0	...	0.2	64.0	64.0	320	384.0	
		...		...		...		12.8	12.8		396.8	
		...		...		...		2.6	2.6		399.4	
		...		...		...		5.0	0.5		399.9	400
Valor agregado	0.9	54.0	0.7	73.5	0.6	24.0	0.2	64.0	215.5			
		76.0		74.6		32.7		12.8	196.1			
		33.6		20.8		20.1		2.6	77.1			
		11.4		4.7		8.6		0.5	25.2	525		
ΔX_i^t		60.0		105.0		40.0		320.0	525.0			
		84.5		106.5		54.5		64.0	309.5			
		37.3		29.8		33.5		12.8	113.4			
		12.7		6.8		14.3		2.6	36.4			

Como en el análisis keynesiano, existe cierto interés, desde el punto de vista económico, para investigar el procedimiento por medio del cual se difunden a través de la economía los efectos indirectos de la demanda autónoma. La solución iterativa no debe interpretarse como un modelo dinámico, sin embargo, porque los incrementos en la producción inducidos en otros sectores deben realizarse *antes* que pueda satisfacerse una demanda final dada.

La existencia de una solución en el sistema de Leontief se encuentra asegurada por la misma condición que en el sistema keynesiano: los gastos inducidos dentro del sistema deben ser menores que el ingreso que los genera. En el sistema keynesiano esto significa una propensión marginal a consumir menor que la unidad. En el sistema de Leontief basta con que la suma de los coeficientes de insumo (aparte de los pagos a factores primarios) sea menor que la unidad, cuando menos en un sector.[24] Esta condición siempre se encuentra satisfecha en el modelo abierto de Leontief que hemos estado considerando, ya que solamente son inducidas las compras a otras industrias hechas para la producción común y corriente. Mientras más pequeña sea la parte de compras interindustriales para cada sector, con mayor rapidez convergen las etapas del procedimiento iterativo hacia la solución, precisamente tal como en el caso keynesiano.

Las "mermas" en el modelo keynesiano son los ahorros, impuestos e importaciones, en tanto que las mermas en el modelo de Leontief son todos los pagos por factores, impuestos e importaciones. En posición de equilibrio, las mermas totales son iguales a los gastos autónomos. En el cuadro 2-5 se demuestra la convergencia de las mermas (valor agregado) hacia el total de los elementos autónomos (demanda final). Al cabo de cuatro iteraciones el valor agregado totaliza 513.9, comparado con el total de la demanda final que es de 525. Esto representa la mejor comprobación de hasta qué punto ha tenido éxito el procedimiento iterativo. Esta diferencia puede reducirse a cualquier dimensión deseada, por medio de etapas sucesivas de la solución. Como veremos en el capítulo siguiente, puede también hacerse el supuesto de consumo inducido en el sistema de Leontief —como lo fue, en efecto, en la versión original— y, en ese caso, los elementos autónomos y las mermas resultan idénticos a los del modelo keynesiano.

Los métodos para lograr una solución general, o matriz inversa, de la forma de las ecuaciones (2.8) son más complicados que el procedimiento iterativo para garantizar soluciones aisladas. La inversión de una matriz de cualquier tamaño se hará normalmente, en un laboratorio de cálculos por medio de un computador electrónico. Sin embargo, como actualmente se han publicado muchas matrices invertidas, al analista le interesa, principalmente, comprender su empleo y significación.

[24] Las condiciones necesarias para la existencia de una solución para el sistema de Leontief se tratan en Evans (1956), pp. 60-2, y en Dorfman, Samuelson y Solow (1958), 213-5 y 254-60.

El cuadro 2-6 presenta los coeficientes r_{ij} en la solución general para el modelo I. Partiendo de este cuadro puede determinarse el valor de cualquier nivel de producción x_i, como la suma de los coeficientes en su hilera multiplicados por los niveles correspondientes de demanda final. Por ejemplo:

$$X_4 = 0.351(320) + 0.141(105) + 0.159(40) + 1.111(60) = 200.0$$

Se registran las Y en una hilera que está en la parte inferior del cuadro, ya que cada elemento en una columna se multiplica por la misma demanda final. El método para determinar una solución es, simplemente, ejecutar las $(n \times n)$ multiplicaciones y sumar los productos de cada hilera. Esto es lo que se ha hecho para nuestro ejemplo en el cuadro 2-6.

CUADRO 2-6. *Solución general (matriz invertida) para el modelo I* *

Sector		1 (F)	2 (A)	3 (B)	4 (S)	X_i
1	(F)	1.250 *400.00*	0	0	0	400.00
2	(A)	0.417 *133.34*	1.111 *116.66*	0	0	250 00
3	(B)	0.238 *76.19*	0.159 *16.66*	1.429 *57.14*	0	149.99
4	(S)	0.351 *112.16*	0.141 *14.82*	0.159 *6.35*	1.111 *66.67*	200.00
Y_j		320	105	40	60	

* Por razones expuestas en el apéndice se ha cambiado el orden de los sectores. Los números en cursiva son iguales a los coeficientes multiplicados por las demandas finales (Y_j) que se encuentran al pie de cada columna. La suma de las hileras de estos números es igual al nivel de producción (X_i).

La utilidad adicional de la solución general se demuestra por el hecho de que cualquiera de las dos, las Y o las X pueden variarse, y obtenerse una nueva solución por medio de un simple cálculo para las restantes variables. Más aún, puede determinarse por separado el efecto de cada Y. Por consecuencia, la matriz inversa es valiosa para la exploración de las propiedades generales del sistema, en el cual deben hacerse muchos cálculos con el mismo conjunto de datos. Esos usos se mostrarán en el capítulo siguiente. La desventaja que tiene la solución general es que una variación en uno cualquiera de los coeficientes de insumo, o de las funciones de importación, puede afectar a cualquiera o a todos los elementos de esta solución. Como el costo para obtener la inversa de una matriz aumenta en proporción con el cubo del número de los sectores, en tanto que el de las soluciones sencillas sólo aumenta en relación con el cuadrado, no resulta económico computar la inversa para sistemas que sean mayores de 40 o 50 sectores, a menos que se vayan a utilizar ampliamente los resultados.[25]

D. *Los supuestos del análisis de insumo-producto*

El análisis de insumo-producto es, en esencia, una teoría general simplificada de la producción. Los estudios del consumo, la inversión, y otros elementos de la demanda final, deben preceder al análisis de insumo-producto, pero en el modelo mismo estos elementos se aceptan como datos conocidos. Los supuestos esenciales de la teoría de insumo-producto se ocupan, casi totalmente, de la naturaleza de la producción.

El modelo de insumo-producto se fundamenta en la premisa de que en una economía es posible dividir a todas las actividades productivas en sectores cuyas relaciones recíprocas puedan expresarse, significativamente, por medio de una serie de sencillas funciones de insumo. Aunque examinaremos por separado el concepto de sector, y la simplificación propuesta de la función de producción, debe reconocerse que la validez de cada uno de ellos depende de la del otro. Para un grupo de actividades las funciones de insumo pueden presentar considerable estabilidad, pero pueden ser mucho menos constantes para un agrupamiento diferente. Los criterios a seguir para el establecimiento de los sectores deben tener por base el conocimiento de las características de las actividades productivas que se han agrupado, así como también del consumo de las producciones.

El modelo de Leontief incluye algunos de los tipos de interdepen-

[25] Si una solución especial necesita de cuatro iteraciones, el número de soluciones especiales que equivalen a una solución general (en el número requerido de multiplicaciones) es, aproximadamente, $n/3$, donde n representa la dimensión de la matriz (véase Evans, p. 78).

dencia entre las unidades económicas y excluye otros. De manera especial incluye la interdependencia que resulta de las ventas de mercancías de uno a otro sector, y del consumo de los mismos factores primarios. Excluye, específicamente, la sustitución entre las producciones de sectores diferentes, ya sea en los consumos finales o como insumos para otros sectores, y la interdependencia, no-mercantil, bajo la forma de economías exteriores y deseconomías.

Las propiedades de los modelos de Leontief pueden derivarse de tres supuestos fundamentales, los cuales es conveniente enunciar en esta sección:

1) *Cada mercancía (o grupo de mercancías) es suministrada por una sola industria o sector de producción.* Los corolarios de este supuesto son, *a)* que se emplea únicamente un método para producir cada grupo de mercancías; y *b)* que cada sector tiene únicamente una sola producción primaria.

2) *Los insumos comprados por cada sector son solamente una función del nivel de producción de ese sector.* (Comúnmente se hace el supuesto, más restrictivo, de que la función insumo es lineal, pero esto es cuestión de conveniencia.)

3) *El efecto total de llevar a cabo varios tipos de producción constituye la suma de los efectos separados.* Se conoce éste como el supuesto de la aditividad, que rige a las economías exteriores y a las deseconomías.

En el capítulo 4 trataremos el modelo de producción más general del análisis por actividades, que abandona el primer supuesto, pero retiene los otros dos. Este último modelo no excluye la sustitución como lo hace el sistema de Leontief, ya que supone que puede haber más de una manera de producir una mercancía dada.

La validez de cada uno de estos supuestos depende tanto de la naturaleza de la producción en plantas aisladas como de la forma en que éstas unidades se agrupen en sectores. Ciertos supuestos pueden tener mayor validez para los agrupamientos que para las unidades individuales como, por ejemplo, la exclusión de los co-productos y las economías exteriores. Otros pueden tener valor para los procedimientos productivos aislados, pero no para los sectores. Por consecuencia, al valorizar la estructura del modelo debemos considerar, al mismo tiempo, la naturaleza de las relaciones fundamentales de la producción y los efectos del agrupamiento.

No hay que esperar que un sistema de tal sencillez sea útil para toda clase de problemas. Un determinado agrupamiento en sectores puede ser válido para un propósito, pero no para otro. En ciertas circunstancias la sustitución puede ser insignificante, pero en otras puede

35

tener una importancia predominante. Por lo tanto, se hace necesario un análisis teórico con el fin de establecer los criterios respecto a los agrupamientos, y para investigar el tipo de problema para el que es probable que sea útil el modelo. Pruebas empíricas de los resultados, como las que se presentan en el capítulo 6, pueden hacerse, en este caso, e interpretarse a la luz de dicho análisis.

1. *Concepto del sector* [20]

Toda teoría económica tiene como base el supuesto de la uniformidad en las características y en la conducta de ciertas unidades fundamentales, ya sean éstas simples unidades familiares, empresas, industrias, el conjunto de los consumidores o economías nacionales. Algunas veces se afirma dicha uniformidad en el supuesto de conducta similar para cada una de las unidades que forman el grupo, como en el caso de la empresa representativa de Marshall; en otros casos, se espera una reacción colectiva predecible de reacciones individuales sumamente diferentes, como en la función consumo keynesiana. En este caso, debe permanecer constante la importancia relativa de los distintos componentes.

En su primera formulación teórica el sector de Leontief, a semejanza de la industria marshalliana o walrasiana, se suponía que estaba compuesto de plantas que fabricaban un solo producto homogéneo por medio de técnicas similares. Al transformar este modelo formal en un instrumento empírico, el problema de agrupar todas las actividades en sectores ha asumido gran importancia. Dos tipos de solución se sugieren por sí mismos, dependiendo de la clase de agregado que tengamos presente. Un esfuerzo para apegarse estrictamente al concepto de industria "pura" significaría el agrupamiento conjunto solamente de plantas en las que *tanto* la estructura de la producción como la del insumo fuesen similares. Dada la variedad de artículos producidos por la planta común, es imposible que logremos una gran aproximación a este concepto. Además, aun cuando se pudiera disponer de los datos de insumo para los diversos productos y pudieran manejarse por medio de cálculos los miles de sectores resultantes, ya no podrían sostenerse los supuestos de aditividad y de no-sustitución entre las producciones. Esta definición limitada del sector requeriría que, en la práctica, se abandonara el modelo de insumo-producto y se

[20] El problema de la formación de los sectores en agregados, lo tratan, desde un punto de vista empírico, Barna (1956), Holzman (1953) y Fisher (1958), y en forma más abstracta, Balderston y Whitin (1954), Dorfman, Samuelson y Solow (1958), y Theil (1957).

36

empleara un modelo de análisis por actividades del tipo que se discute en el capítulo 4.

En los estudios interindustriales empíricos un sector productivo corresponde al segundo tipo de agregado —es decir—, a un agrupamiento tanto de procedimientos como de productos que difieren en ciertos respectos. La conducta de dicho grupo sólo necesita ser uniforme en lo que se refiere a las características empleadas como base para la formación del agregado, si éstas corresponden a los supuestos del modelo. Por ejemplo, un agregado de actividades de producción que es suficiente para un modelo de Leontief no necesita tener insumos estables de factores primarios, ya que éstos no afectan la solución para los niveles de producción.

Para la mayoría de los tipos de análisis de insumo-producto, la mejor base para la formación de agregados está constituida por la similitud en la estructura de los insumos. Aun cuando hay una variación considerable en las mercancías producidas por un sector, un cambio en la composición de la producción no tendrá ningún efecto sobre los insumos que se necesitan de otros sectores, si se satisface este criterio. Una segunda base para la formación de agregados es el empleo, en proporciones fijas, de las producciones de distintos procedimientos. Es más probable que se satisfaga esta condición en las etapas sucesivas de la elaboración del mismo material, como en el caso del hilado y tejido de telas. Si se emplea el hilo únicamente para fabricar tela, entonces los insumos, tanto para el procedimiento de hilar como el de tejer, estarán en proporción con la producción de tela. Sin embargo, muy rara vez es perfecta la relación porque comúnmente existen algunas otras demandas para el producto semiterminado. El consumo de hierro en lingote en las fundiciones así como en la fabricación de acero, constituye un ejemplo típico. En esos casos, la importancia relativa de los usos no-proporcionales debe ser el factor determinante para la decisión del tipo de agregado. Las proporciones fijas en el consumo, indicadas por elasticidades idénticas de ingreso, podrían constituir otro caso para la aplicación de este principio cuando los usos interindustriales carecen, relativamente, de importancia.

Puede obtenerse la justificación formal para las reglas que acabamos de presentar, dando respuesta a la pregunta siguiente. ¿En qué condiciones pueden consolidarse los sectores m y n sin que afecten las estimaciones de la producción para los demás sectores del modelo? Los coeficientes de insumo del sector consolidado pueden plantearse de la manera siguiente:

37

$$X_{(m+n)} = X_m + X_n$$

$$a_{i(m+n)} = \frac{X_{i(m+n)}}{X_{(m+n)}} = \frac{X_{im} + X_{in}}{X_m + X_n}$$

$$= \frac{a_{im}X_m + a_{in}X_n}{X_m + X_n} = a_{im}\left(\frac{X_m}{X_m + X_n}\right) + a_{in}\left(\frac{X_n}{X_m + X_n}\right)$$

$$= w_m a_{im} + w_n a_{in}, \text{ de donde } w_m = \left(\frac{X_m}{X_m + X_n}\right) \qquad (2.14)$$

Si todos los coeficientes de insumo $a_{i(m+n)}$ del sector consolidado, no son afectados por los cambios en los niveles de producción, X_m y X_n, las demandas del sector consolidado para la producción de otros sectores serán iguales a la suma de las demandas de sus componentes, puesto que la producción total, $X_{(m+n)}$, es igual a la suma $X_m + X_n$. La ecuación (2.14) muestra que hay dos condiciones bajo las cuales esto será verdadero:

1) Si a_{im} es igual a a_{in} entonces ninguna variación en las ponderables que resultan de los cambios en las proporciones en que se hace la demanda de X_m y X_n, afectará el coeficiente del agregado. Esta es la primera regla de los coeficientes de insumo similar.

2) Si la demanda de X_m y X_n son en proporciones fijas, la media ponderada de los coeficientes de insumo será siempre la misma, sin hacer caso de las diferencias en sus componentes. Esto nos lleva a la segunda regla de la proporcionalidad de la producción.

Hablando con rigor, la primera regla es un criterio en relación con la formación de agregados de las actividades productivas, y la segunda para los de mercancías. En el primer caso, no se conocerán las proporciones de las mercancías X_m y X_n en el combinado total, aunque podrían calcularse fácilmente después de haberse completado la solución de los demás sectores. En el segundo caso, no hay absolutamente ninguna pérdida de información, ya que X_m y X_n son fracciones fijas de $X_{(m+n)}$ (puede demostrarse fácilmente que estas reglas se aplican a cualquier número de sectores).

Si se llevasen a cabo estrictamente las pruebas antes mencionadas conducirían a la formación de agregados *perfectos* —es decir, que como resultado de éstos no se introduciría ningún error en la solución—. En la práctica hay que escoger entre combinaciones de sectores que satisfacen en diversos grados estos criterios. En este caso debemos ver más allá de las relaciones que implican a los sectores

38

directamente afectados y considerar, igualmente, las diferencias en sus efectos indirectos.[27]

Un tercer tipo de agregado se encontrará inevitablemente en los cuadros de insumo-producto a causa de la forma como se reúnen los datos de la producción y el consumo: la formación de agregados de sustitutos. Los agregados de sectores formados sobre esta base tendrán coeficientes inestables de insumo, a menos que los procesos productivos tengan también insumos similares. Se sostiene, algunas veces, que deben formarse agregados de los sustitutos porque con ello disminuirán los errores debidos a la sustitución. Esta conclusión es incorrecta. La formación de un agregado de dos sectores, tales como el del carbón de piedra y el del petróleo, tiene el efecto de utilizar una media ponderada de sus coeficientes de insumo, lo que produciría el mismo efecto en otras industrias si se mantienen los sectores separados. Cierto es que se obtendría una mejor estimación de la demanda combinada de carbón y petróleo, en el caso de que hubiera sustitución entre los dos, que la que podría hacerse para la demanda de cada uno de los componentes; pero la subsiguiente suma conjunta de los totales de producción de ambos sectores produce el mismo resultado. Por el contrario, si no se forma un agregado con sustitutos, tales como el del carbón y el del petróleo, es posible, a menudo, analizar por separado el grado probable de sustitución e introducir un cambio en sus proporciones de insumo en la solución, como se demuestra en el capítulo 10. A este respecto, el método de insumo-producto es considerablemente más flexible de lo que pudiera indicar una exposición formal del modelo.

Los principios antes enunciados se fundamentan en el supuesto de que la finalidad de la formación de agregados es la de producir el mínimo medio de error para todos los totales de producción de la solución. Si en algunos cálculos la exactitud es más importante que en otros, como comúnmente sucede, debemos conceder mayor importancia al efecto que la formación de un agregado tiene sobre estos sectores. En algunos problemas, la medida de la producción de servicios u otras producciones puede carecer de importancia y, consecuentemente, sólo necesitarán ser consideradas las demandas que de otros insumos tienen estos sectores. Por el contrario, puede ser crucial la medición exacta del consumo de materiales específicos escasos,

27 Si primero pudiéramos compilar un cuadro más grande de insumo-producto, y consolidarlo luego en uno de tamaño más pequeño, podríamos emplear la matriz invertida como guía y buscar hileras y columnas proporcionales, lo que se relaciona con las dos reglas dadas anteriormente (véase Dorfman, Samuelson y Solow, p. 243). Esta indicación se usa relativamente poco en la práctica, porque los principales problemas provienen de la clasificación original de los datos.

o de productos importados. Cuando de antemano puedan especificarse así los objetivos del análisis, es posible calcular mejor la importancia de los probables errores, y resulta más sencillo encontrar bases para la formación de agregados. Hablando con rigor, la validez de cualquier formación real de agregados sólo puede determinarse en relación con los usos específicos del modelo, ya que jamás se llega a lograr la perfecta formación de agregados.[28]

Las decisiones respecto a la clasificación se ven ayudadas si se adquiere conocimiento de las divisiones naturales de las series productivas que resultan de una combinación de factores técnicos, económicos y de ubicación. Tanto las materias primas agrícolas como las minerales pasan primero, a través de una etapa de elaboración y purificación, al estado de materiales "básicos" o uniformemente "acabados", tales como el acero, cemento, telas o harina. En esta forma son transportados mucho más fácilmente y reciben, de manera especial, elaboraciones adicionales en diferentes fábricas. Las etapas finales de la manufactura revisten la forma de una combinación de varias materias básicas que se convierten en productos fabricados —automóviles, ropa, pan, etc.—. Las primeras etapas, o sean las de elaboración, se caracterizan por la ejecución de una serie de operaciones realizadas en las mismas materias primas, con formación de subproductos que con frecuencia se utilizan para hacer producciones secundarias. Cuando estas fases sucesivas se realizan en proporciones relativamente fijas, como en la fundición y el afinado de metales, o en el hilado y tejido de telas, a menudo se justifica combinarlas dentro de un solo sector. Como alternativa, puede ser factible consolidar la ejecución de elaboraciones similares de cierta categoría de materias primas. Estos dos tipos de formación de agregados pueden designarse con el nombre de verticales y horizontales. Los primeros se identifican con las materias primas y los productos acabados, en tanto que los segundos se basan en una semejanza de procedimiento, lo que implica la utilización de equipo, energía eléctrica y mano de obra, etc., similares.

En las etapas finales de fabricación y acabado es menos frecuente la posibilidad de identificar un sector por su principal materia de insumo, ya que es probable que se empleen una mayor variedad de materiales. Por lo común se identifican las industrias por el procedimiento y el producto. Distinguimos las telas fabricadas de los lienzos hechos en casa, por ejemplo, más por el tipo de acabado que por la naturaleza de las materias primas empleadas.

28 Desde el punto de vista estadístico, las alternativas para formar los sectores se ven limitadas, en extremo, por la naturaleza de los datos disponibles. La formulación de grandes agregados correspondientes a varias bases estadísticas de información —por productos, procedimientos y fábricas se examinará en el capítulo 5. Algunas pruebas empíricas de la formación de agregados alternativos se presentan en la obra de Fisher (1958).

Antes de abandonar el tema de la formación de agregados podemos observar que tanto el supuesto (1) como el (3) de la página 47 tienen más valor mientras más grandes son los agregados que se utilizan, pero es menos válido el supuesto (2). Mientras más sutil es el análisis del sector, mayor es la proporción de productos secundarios, y más probable la existencia de efectos exteriores de importancia sobre otros sectores. Si lleváramos el análisis de los sectores hasta el extremo de subdividir los procesos productivos que mantienen relaciones tecnológicas recíprocas, como en el caso de la producción de gasolina y aceite combustible, se destruiría el concepto de un sector independiente. Una solución parcial al problema de procedimiento *versus* producto, que se origina en la formación de los agregados, la proporciona un modelo de insumo-producto en el que hay más hileras (mercancías) que columnas (sectores productivos). En el capítulo 5 se discute este tipo de modelo.

2. *La función insumo*

A causa del supuesto de no-sustitución (2), la función de producción general de la forma

$$X_j = f(X_{1j}, X_{2j} \cdots X_{nj}) \tag{2.15}$$

adquiere la forma de requisitos mínimos para cada insumo:

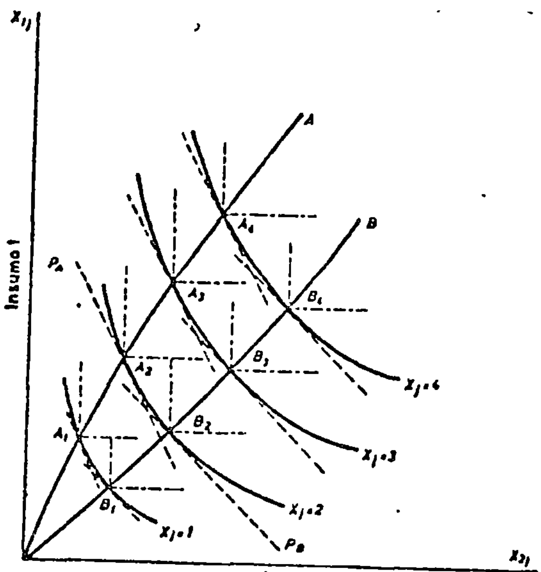
$$X_j \leq X_{ij}/a_{ij}, \qquad (i = 1 \cdots n) \tag{2.16}$$

La ecuación (2.16) expresa que se necesita una cantidad mínima de cada insumo para una producción dada.[29] Por consiguiente, se fija la producción por cualesquiera límite que se alcance primero. En la realidad no se emplearía más que la cantidad limitativa de cualquier insumo, y la relación parcial entre cada insumo y producto se reduce a la igualdad dada en (2.4*a*).

La falta de sustitución entre los insumos podría explicarse por una de estas dos causas: o *i)* el procedimiento técnico es de tal naturaleza que no es posible hacer ninguna sustitución; o *ii)* no cambian los precios relativos, de suerte que no resulta conveniente alterar las

29 Véase Dorfman, Samuelson y Solow (1958), p. 231.

proporciones de los insumos sin importar la forma de la función de producción. En su formulación original, Leontief (1951, pp. 38-40) se basó fundamentalmente en el primer supuesto. Arguyó que una gran proporción de lo que los economistas comúnmente llaman sustitución se debía al empleo de grandes agregados, tales como el de



GRÁFICA 2.1. Funciones de producción a corto plazo y a largo plazo para el sector *j*.

"consumo", en el que un cambio en la proporción consumida de automóviles o de productos alimenticios, por ejemplo, ocasionaría una variación en las proporciones empleadas de insumos de mano de obra y de capital. Se elimina este tipo de sustitución haciendo uso de un análisis más fino del sector. Por cuanto a la verdadera sustitución en un proceso productivo dado, Leontief sugirió que puede existir un alto grado de complementariedad entre insumos, de tal manera que los cambios en los precios relativos sólo afectarán levemente sus proporciones.

Es mucho más probable que el supuesto de complementariedad sea cierto a corto plazo, cuando no puede variarse en grado considerable el equipo, que a largo plazo. Un enunciado más riguroso de la hipótesis de Leontief podría expresarse en la forma siguiente. Supongamos que la sustitución hace necesario un cambio en el tipo de

maquinaria, de tal manera que las proporciones corrientes de insumo estén determinadas por el equipo existente. Las funciones de producción a largo y corto plazo para una planta dada aparecerían, entonces, como se ven en la gráfica 2.1. Las líneas gruesas indican la función de producción a largo plazo, mientras que la función de planta fija se determina por las líneas punteadas en forma de *L*. Si las plantas existentes se hubieran construido de acuerdo con las relaciones indicadas por la serie de líneas de precios P_A, las proporciones en que emplean los insumos 1 y 2 estarían determinadas por la correspondiente línea de expansión *A*. Los coeficientes de insumo para la industria en su totalidad serían una media ponderada de las relaciones (X_{ij}/X_j) para plantas de distintas dimensiones (por ejemplo, A_1, A_2, A_3). Estas relaciones serían estables mientras no cambiara la proporción de la producción proveniente de plantas de diferentes dimensiones. Si suponemos un cambio en los precios relativos a P_B, las proporciones óptimas de insumo se encontrarán, en este caso, a lo largo de la línea *B*. La construcción de plantas nuevas, o la reposición de las antiguas, engrosarían estas proporciones y la media ponderada se desplazaría gradualmente de, digamos, A_2 a B_2 (o a B_3, si aumenta también la dimensión media de la planta).[30]

La hipótesis que acabamos de esbozar puede experimentarse mejor por medio de estudios detallados de la dirección técnica y de la estadística de las plantas individuales, más que por el empleo de series cronológicas para sectores completos. Estos últimos incorporan inevitablemente los efectos del cambio tecnológico así como también los movimientos a través de las isocuánticas de largo plazo, y ambos no pueden diferenciarse fácilmente. Una determinación del valor numérico de las pruebas disponibles sobre este punto se presentará en el capítulo 6.

Volviendo a la segunda explicación posible de las funciones estables de insumo, existen razones, tanto empíricas como teóricas, para esperar que sean bastante estables los precios relativos fuera de los periodos de escaseces en tiempo de guerra y otros semejantes. Samuelson, y otros, han demostrado que en un sistema competitivo que tiene únicamente un factor escaso (o precios relativos fijos de factores) y carece de co-producción, serán fijos los precios relativos de las mercancías, y no se verá afectada la elección de técnicas productivas en cada sector por la composición de la demanda. Aun cuando hay una serie de técnicas y de proporciones de insumo posibles en cada sector,

30 Naturalmente, la media ponderada no necesita estar situada sobre la línea de expansión, a menos que se limite la forma de la función de producción, aunque, en este caso, se aproximaría a ella.

no habrá tendencia para cambiar estas proporciones, a menos que varíen los precios relativos de los insumos primarios. Aunque existen cambios seculares en los precios relativos de los factores primarios, frecuentemente es razonable el supuesto de precios constantes durante periodos por lo común cortos. Este "teorema de la sustitución" se considerará más detalladamente en el capítulo 4.

Surge además otra interrogación en lo que respecta sobre si los coeficientes de insumo en el sistema de Leontief deben interpretarse como constantes físicas, según lo hace Leontief, o como relaciones de valores que combinan los efectos, tanto de los cambios en los precios relativos como en las cantidades. Klein (1953, pp. 205-10) ha sugerido que esta última interpretación armoniza más con la teoría económica, y que puede haber mayor estabilidad en las relaciones de valor que en las proporciones físicas de insumo-producto, reflejando una elasticidad de sustitución entre los insumos que se aproxima a la unidad. Es difícil poder discutir los méritos de esta sugerencia por la falta de observación directa de las corrientes interindustriales, tanto en términos físicos como de valor, durante un periodo de años. Puede notarse, sin embargo, que un modelo empírico basado en la hipótesis de Klein sería de aplicación más complicada que el de Leontief, porque la solución cuantitativa depende de la solución del precio.[31]

En resumen, el grado de estabilidad de las funciones de insumo depende, en parte, de la manera como se seleccionan los sectores y, en parte, de las propiedades fundamentales del sistema productivo. Los cambios observados en estas relaciones provienen de tres causas:

1) Cambios en la composición de la demanda (mezcla de productos);
2) Cambios en los precios relativos de los insumos;
3) Cambios en las alternativas tecnológicas disponibles.

De estos tres, el cambio tecnológico parece haber sido la causa más importante de las variaciones en las funciones de insumo de la economía norteamericana, única que se ha estudiado desde este punto de vista durante algún periodo considerable de tiempo. A largo plazo, el cambio tecnológico también es el origen de la mayoría de las variaciones que ocurren en los precios relativos y, por lo tanto, es muy difícil hacer una distinción entre los efectos de los dos últimos factores.

[31] De acuerdo con el supuesto de Leontief el análisis se hace a precios constantes del año base, y los niveles de producción son independientes de los cambios de precios

En el periodo corto, es probable que los fenómenos de sustitución pura en los sectores manufactureros sean importantes para una clase limitada de insumos, que se incluyen en grupos en los cuales ya está planeada la sustitución en el diseño del equipo de elaboración. Representan ejemplos principales los grupos de combustibles, de metales, de fibras textiles y materiales de construcción. En los casos en que son identificables dichas zonas de sustitución potencial, pueden hacerse "análisis auxiliares" de estos insumos e incorporarlos en la solución del insumo-producto.[32]

El valor principal del sencillo sistema de insumo-producto de Leontief es el de proporcionar una base para las exploraciones iniciales empíricas en el campo de las relaciones interindustriales. El modelo ofrece una estructura compatible para la compilación de datos en sectores que, en otras condiciones, no estarían relacionados, y una prueba de sus supuestos pone de manifiesto las zonas donde se necesita una formulación teórica más complicada. Son tan grandes, sin embargo, los requisitos para los datos de un modelo de mayor complejidad que, probablemente, los modelos sencillos presentados en este capítulo continuarán usándose todavía, por algún tiempo en el futuro, para el análisis interindustrial del mayor número de partes de la economía.

APÉNDICE

SOLUCIONES DE INSUMO-PRODUCTO

La necesidad principal para el analista interindustrial es la de poseer un conocimiento de la naturaleza íntima de los efectos de la interdependencia, más que de las indicaciones detalladas para la solución de grandes sistemas de ecuaciones simultáneas. Siendo conocidas las ventajas de los modernos equipos de cálculo, esta tarea le será encomendada, casi con seguridad, a un especialista. No obstante, la solución de ejemplos numéricos, hecha a mano, proporciona cierta apreciación del funcionamiento de los modelos interindustriales que es difícil adquirir de otro modo. Los métodos que se ilustran a continuación se han escogido teniendo en cuenta este propósito, más que por su eficacia para sistemas mayores. Los méritos relativos de distintos métodos de cálculos en gran escala se discuten en la obra de Evans (1956), a la que remitimos al lector.

[32] Véase el capítulo 10.

45

En primer lugar, adoptamos para las soluciones especiales un método alternativo de iteración que es tan eficaz como instructivo. Luego, volvemos a plantear el sistema de insumo-producto en forma de matriz, y calculamos la solución general para el Modelo I en varias formas que esclarecen el significado económico de sus elementos.

A. *Soluciones especiales*

Una solución especial para una serie de ecuaciones simultáneas sólo se aplica a un conjunto particular de valores para los términos constantes que, en nuestro caso, son las demandas finales. Por el contrario, la solución general puede emplearse con cualquier conjunto de demandas finales mientras se mantengan constantes los coeficientes estructurales. El método más usual de solución para las ecuaciones simultáneas, que es el de sustitución o por eliminación, puede utilizarse en cualquiera de los dos casos.

Aunque resulta muy enfadoso para los grandes sistemas de ecuaciones, cuando algunos de los coeficientes son cero, el método de sustitución conduce a un procedimiento iterativo útil para soluciones especiales, como en el ejemplo que hemos estado utilizando. Como ilustración, transcribimos primero las ecuaciones (2.5) que corresponden a nuestros coeficientes de insumo y demandas finales (del cuadro 2-4):

$$\begin{aligned}
0.9X_S - 0.1X_A - 0.1X_B - 0.2X_F &= 60\\
+\,0.9X_A \qquad\qquad - 0.3X_F &= 105\\
-\,0.1X_A + 0.7X_B - 0.1X_F &= 40\\
0.8X_F &= 320\\
0.9X_S + 0.7X_A + 0.6X_B + 0.2X_F &= V
\end{aligned}$$

Normalmente, eliminaríamos una variable entre cada par de ecuaciones y proseguiríamos en esta forma hasta encontrar un valor numérico para una variable. Se sustituiría ésta en una de las otras ecuaciones para obtener una segunda variable, y así sucesivamente, hasta que hubieran sido determinadas todas las incógnitas. En el caso presente, el procedimiento se simplifica por el hecho de que la cuarta ecuación tiene únicamente un coeficiente diferente de cero, y podemos resolver directamente para X_F. Entonces puede emplearse este valor en la segunda ecuación para determinar X_A, X_F y X_A juntas para X_B, como sigue:

46

$$\begin{aligned}
&(1)\quad X_F = \frac{320}{0.8} = 400\\
&(2)\quad X_A = \frac{1}{0.9}\,[105 + 0.3(400)] = 250\\
&(3)\quad X_B = \frac{1}{0.7}\,[40 + 0.1(400) + 0.1(250)] = 150 \qquad (2.17)\\
&(4)\quad X_S = \frac{1}{0.9}\,[60 + 0.2(400) + 0.1(250) + 0.1(150)] = 200\\
&(5)\quad V\ = 0.2(400) + 0.7(250) + 0.6(150) + 0.9(200) = 525
\end{aligned}$$

El orden en que este sistema fue resuelto sugiere un reordenamiento de los sectores, principiando con *F*, que depende únicamente de la demanda final. Los demás están ordenados de tal modo que cada uno depende solamente de los niveles de producción de los sectores anteriores. Cuando esto es posible, como en el caso presente, la matriz de coeficientes resultante se llama *triangular*, porque tiene sólo ceros por encima de la diagonal (véase el cuadro anterior 2-6).

El método de iteración de Gauss-Seidel (Evans, pp. 72-7) sigue muy de cerca el procedimiento que acabamos de emplear en (2.17). Para una matriz perfectamente triangular el procedimiento corresponde exactamente a la solución por sustitución y, por tanto, necesitaría únicamente de una sola iteración. Sin embargo, si por encima de la diagonal hay algunos coeficientes que no son cero, deberán emplearse iteraciones sucesivas, cada una de ellas basada en los niveles de producción calculados previamente para las transacciones que se encuentran por encima de la diagonal. La producción total para el sector 2 en la etapa *t*, por ejemplo, puede escribirse en la forma siguiente:

$$X_2^{(t)} = \frac{1}{(1 - a_{22})}\,[Y_2 + a_{21}X_1^{(t)} + a_{23}X_3^{(t-1)} + a_{24}X_4^{(t-1)}] \qquad (2.18)$$

Para ejemplarizar la iteración de Gauss-Seidel modificaremos los datos usados en la ecuación (2.17), agregando los elementos colocados por encima de la diagonal, que fueron descartados originalmente al redondear las cantidades de los coeficientes en el cuadro 2-4. Los coeficientes revisados y los cálculos se presentan en el cuadro 2-7.

La primera etapa del cálculo es bastante semejante a la que se indica en (2.17), con la adición de los elementos que están por encima de la diagonal. En la segunda etapa se emplea nuevamente

47

CUADRO 2-7. *Ilustración de la interación Gauss-Seidel*

Sector de producción	*Sector de consumo* (1)		(2)		(3)		(4)		$\sum_{j\neq i} a_{ij}X_j$ (5)	Y_i (6)	(7)=(5)+(6)	$\frac{1}{(1-a_{ii})}$ (8)	X_i^t (9)
1 Productos terminados	0.2	. . .			0.01	0.4			0.4	320	320.4	0.8	400.5
						1.5			1.5		321.5		401.9
2 Agricultura	0.3	120.2	0.1	. . .	0.01	0.4			120.6	105	225.6	0.9	250.4
		120.6				1.5			122.1		227.1		252.3
3 Industria básica	0.1	40.1	0.1	25.1	0.3	. . .	0.02	1.2	66.3	40	106.3	0.7	151.9
		40.2		25.2				4.0	69.4		109.4		156.3
4 Servicios	0.2	80.1	0.1	25.1	0.1	15.2	0.1	. . .	120.4	60	180.4	0.9	200.4
		80.4		25.2		15.6			121.2		181.2		201.4
X_i^t $t=0$				105		40		60					
$t=1$		400.5		250.7		151.9		200.4					
$t=2$		401.9		256.3		201.4		156.3					

48

(2.18), utilizando los niveles de producción de la 1ª etapa para los elementos *supra* diagonales. En este ejemplo, la segunda iteración proporciona una gran aproximación a la solución correcta.

Deben observarse dos diferencias entre el método de Gauss-Seidel y el procedimiento iterativo presentado con anterioridad en el cuadro 2-5. En primer lugar, la columna de coeficientes se multiplica cada vez por el cálculo de la producción *total*, no por el incremento.[33] En segundo lugar, se utilizan los valores de los sectores ya calculados en la etapa *en curso*, en vez de las estimaciones de la etapa anterior. Sólo los sectores que siguen a X_i en la serie tienen valores de la etapa anterior.

El valor práctico de este método depende del grado en que puedan ordenarse en forma triangular los sistemas reales de insumo-producto. Los experimentos llevados a cabo con las matrices norteamericana, italiana, noruega y japonesa, que se describen en el capítulo 8, muestran que en estos casos, con un ordenamiento óptimo de los sectores, del 4 % al 13 % de las transacciones interindustriales (o sea, menos del 6 % de las demandas totales) queda por encima de la diagonal. Para los cálculos hechos a mano, el procedimiento triangular iterativo ofrece, con frecuencia, considerable ahorro de tiempo, en particular si se considera adecuada una exactitud dentro del 1 % al 2 %. Aun una sola etapa del método de Gauss-Seidel proporciona una aproximación a la solución que para la mayoría de los sectores es exacta dentro de un margen de 5 %. Como Evans lo expresa, sin embargo, la elección del método para el cómputo hecho a máquina depende, en gran parte, del tipo de equipo que se utilice.

B. *Notación matricial y solución general*

Aunque en este libro únicamente empleamos las operaciones más elementales de las matrices, al discutir la solución general es útil plantear primero el sistema de insumo-producto bajo la forma matricial. Las definiciones dadas facilitarán también la presentación de la programación lineal en el capítulo 4. Buenas introducciones al álgebra de las matrices, en su aplicación a la economía, ofrecen cierto número de obras, como las de Klein (1953), Kemeny, Snell y Thompson (1957), y de Dorfman, Samuelson y Solow (1958), por tanto, sólo presentaremos los conceptos necesarios para tratar los sistemas interindustriales.

1) Se da el nombre de *matriz* a un arreglo rectangular de números

[33] Esto también se puede hacer con el primer método como un medio para descubrir errores.

49

La dimensión de la matriz se indica por el número de hileras (m) y de columnas (n), y se expresa $m \times n$. En el sistema de Leontief el conjunto de coeficientes de insumo forma *una matriz* cuadrada, puesto que hay igual número de hileras y de columnas. Comúnmente se le llama matriz "tecnológica". Para un sistema de 3×3 puede expresarse así:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

En este caso se identificará la matriz por medio de una letra mayúscula en tipo negro.

2) Los números comprendidos en una matriz se llaman *elementos*. Los subíndices, ya utilizados en el sistema de insumo-producto, corresponden a la notación matricial usual, en la cual a_{ij} indica el elemento perteneciente a la i-ésima hilera y a la j-ésima columna. Los elementos de la matriz **A** se identifican por medio de letras a minúsculas.

3) *Vector de columna* es una matriz que tiene una sola columna de m elementos. *Vector de hilera* es, de modo similar, una matriz que tiene una sola hilera. En el sistema de Leontief los coeficientes de insumo de cada industria constituyen un vector de columna que describe su tecnología. Este concepto proporciona la base para el análisis por actividades que se trata en el capítulo 4.

Puede definirse una matriz como un grupo de vectores de columna:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1 \quad \mathbf{A}_2 \quad \mathbf{A}_3]$$

Aquí las componentes del vector de la matriz **A** se indican por $\mathbf{A}_j$. Cada uno de ellos representa una columna de coeficientes a_{ij} ($i = 1 \cdots m$).

Los niveles de producción y las demandas finales en el sistema de Leontief pueden escribirse como vectores de columna:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix}$$

Los conjuntos de coeficientes de capital y trabajo, o de cualquier insumo de mercancías, constituyen vectores de hilera.

4) *Matriz diagonal* es una forma de matriz cuadrada que tiene cuando menos un elemento que no es cero en su diagonal, y ceros

50

en todas las demás partes. Para expresar el modelo de insumo-producto de la ecuación (2.7) se necesitan dos matrices diagonales:

a) La *matriz unitaria:*

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) La matriz de *coeficientes de importación* (algunos de los cuales son cero):

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

5) La *suma de matrices* consiste en la adición de los términos correspondientes —los que tienen los mismos subíndices—. Esta sólo puede realizarse si las dos matrices tienen el mismo número de hileras y de columnas. Por ejemplo:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11} + b_{11}) & (a_{12} + b_{12}) \\ (a_{21} + b_{21}) & (a_{22} + b_{22}) \end{bmatrix}$$

La resta de matrices se ejecuta en forma similar.

6) La *multiplicación de matrices* consiste en multiplicar cada elemento de una hilera (i) de la primera matriz por el elemento correspondiente de una columna (j) de la segunda matriz. Se suman los productos para dar el elemento ij en la matriz producto. Únicamente puede llevarse a cabo esta operación si el número de columnas en la primera matriz es igual al número de hileras en la segunda. El producto de una matriz $m \times n$ y de una $n \times p$, es por tanto, $m \times p$. La multiplicación de matrices no es conmutativa. Aun cuando las dos matrices sean cuadradas y tengan la misma dimensión el resultado de la multiplicación de las matrices dependerá, generalmente, del orden en que se ejecute.

En el análisis de insumo-producto tenemos frecuente ocasión de multiplicar una matriz por un vector de columna. De acuerdo con la regla antes mencionada esto sólo se puede hacer si el vector de columna es el segundo término. En este caso *premultiplicamos* el vector por la matriz, lo que quiere decir que cada una de las hileras de la matriz se multiplica por los elementos de la columna. El resultado también es un vector de columna, ya que $n \times n$ por $n \times 1$ da una matriz producto que es $n \times 1$.[34] Por ejemplo, el producto de la matriz

[34] Por la misma razón, un vector de hilera es *posmultiplicado* por una matriz, y el producto también es un vector de hilera.

51

tecnológica y el vector de niveles de producción, es el vector de demandas intermedias:

$$\mathbf{AX} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3) \\ (a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3) \\ (a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{bmatrix} = \mathbf{W}$$

Ahora podemos expresar los modelos de insumo-producto en términos de matriz. La versión más sencilla se escribe así:

$$\begin{aligned} X_1 - (a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3) &= Y_1 \\ X_2 - (a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3) &= Y_2 \\ X_3 - (a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3) &= Y_3 \end{aligned} \tag{2.5}$$

En forma de matriz, resulta:

$$\mathbf{X} - \mathbf{AX} = \mathbf{Y}$$

Para efectuar la resta indicada podemos multiplicar X por la matriz unitaria, ya que $\mathbf{IX} = \mathbf{X}$. Lo que da:

$$\mathbf{IX} - \mathbf{AX} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{Y} \tag{2.5m}$$

que equivale a:

$$\begin{bmatrix} (1 - a_{11}) & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & (1 - a_{22}) & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & (1 - a_{33}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix}$$

La matriz $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ se llama, a menudo, *matriz de Leontief*. Tiene la propiedad de que todos los elementos en la diagonal son positivos, mientras que los que están fuera de ésta son negativos o cero.

Cuando se agregan las importaciones al sistema, tenemos:

$$(1 + m_i)X_i - \sum_j a_{ij}X_j = Y_i \quad (i = 1 \cdots n) \tag{2.7}$$

En forma de matriz, esta versión se escribe:

$$(\mathbf{I} + \mathbf{M} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{Y} \tag{2.7m}$$

52

7) *Inversión de la matriz*

Para encontrar la solución general, ecuación (2.8), necesitamos ejecutar una operación similar a la división en álgebra elemental. Para resolver X en la sola ecuación $aX = Y$, dividimos totalmente por a, lo que equivale a multiplicar por su recíproca: $X = (1/a)Y = a^{-1}Y$. La correspondiente operación en matrices para hallar $1/A$ se llama *inversión de matriz*, y el resultado constituye la *matriz recíproca o inversa*, $\mathbf{A}^{-1}$. La inversa de $\mathbf{A}$ se define como la matriz que cuando se multiplica por $\mathbf{A}$ da la matriz unitaria, $\mathbf{I}$. Por lo tanto, $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$. En este caso no tiene importancia el orden de la multiplicación. La inversa sólo se define para matrices cuadradas.

Con esta definición de la inversa, la solución general del sistema de insumo-producto de (2.5) puede plantearse así:

$$\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{Y} \text{ o } \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} \tag{2.8m}$$

Para evitar confusiones, llamamos r_{ij} a los elementos de la matriz inversa (recíproca), y $\mathbf{R}$ a la matriz misma. En el sistema más general (2.7m) que incluye importaciones inducidas,

$$\mathbf{R} = (\mathbf{I} + \mathbf{M} - \mathbf{A})^{-1}$$

La ecuación (2.8m) plantea en forma de matriz la solución general ya dada en (2.8). Para la solución del vector $\mathbf{X}$, cada columna de coeficientes de la inversa se multiplica por el elemento correspondiente del vector de demanda final $\mathbf{Y}$ y los productos se suman en cada hilera, como en el cuadro 2-6.

C. *Cálculo de la matriz inversa*[35]

Un excelente estudio de los métodos para el cómputo de la matriz inversa y de sus méritos relativos nos lo ofrece Dwyer (1951). Calcularemos aquí el inverso para una matriz de Leontief de 2 × 2, en tres formas diferentes que proporcionan cierto conocimiento de la naturaleza íntima del significado económico de los resultados. Suponemos

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.25 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.25 & 1 \end{bmatrix}$$

[35] En el apéndice del capítulo 8 se presentan matrices inversas de orden 29 para tres países.

53

Partiendo de la definición de la inversa, $(\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{R} = \mathbf{I}$, o

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.25 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Para una matriz pequeña como ésta podemos transcribir las ecuaciones que abarcan los elementos de cada columna de R, y luego resolver por sustitución.

Columna 1	*Columna 2*
$r_{11} - 0.5r_{21} = 1$	$r_{12} - 0.5r_{22} = 0$
$-0.25r_{11} + r_{21} = 0$	$-0.25r_{12} + r_{22} = 1$
$r_{11} = 1.143$	$r_{12} = 0.571$
$r_{21} = 0.286$	$r_{22} = 1.143$

Este procedimiento tiene por efecto calcular separadamente cada columna de la inversa, y es útil cuando sólo se necesitan una, o unas cuantas columnas. En términos económicos, cada elemento r_{ij} indica la cantidad de mercancía i que debe producirse para sostener una demanda final de 1.0 en el sector j. Otro método de realizar el cálculo de una sola columna en la inversa es, por tanto, el de suponer una demanda final de 1.0 en un sector y aplicar cualquiera de los procedimientos iterativos que ya han sido descritos.

b) La derivación de la matriz inversa se explica comúnmente por medio de determinantes (Dwyer, *véase* cap. 13). El determinante de una matriz de 2×2 es $(a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12})$. Cada elemento en la inversa, r_{ij}, es igual al cofactor del elemento a_{ji}[36] (en el cual están invertidos los subíndices), dividido por el determinante de la matriz. Si $\mathbf{A}_{ij}$ se define como el cofactor de a_{ji}, entonces:

$$r_{ij} = \mathbf{A}_{ij}/\Delta \tag{2.19}$$

Para nuestro ejemplo, el valor del determinante es:

$$\Delta = 1 - 0.125 = 0.875$$

[36] La notación sigue a la de Dwyer. El cofactor de a_{ji} es el valor del determinante obtenido por medio de la omisión de la hilera j y de la columna i de la matriz original. Se agrega el signo $(-1)^{i+j}$, con el resultado de que todos los cofactores de una matriz de Leontief son positivos. En una matriz de 2×2:

$$\mathbf{A}_{11} = a_{22} \qquad \mathbf{A}_{12} = a_{12}$$
$$\mathbf{A}_{21} = a_{21} \qquad \mathbf{A}_{22} = a_{11}$$

54

La ecuación (2.19) nos da:

$$r_{11} = \frac{1.0}{0.875} = 1.143$$

$$r_{21} = \frac{0.25}{0.875} = 0.286$$

$$r_{12} = \frac{0.50}{0.875} = 0.571$$

$$r_{22} = \frac{1.0}{0.875} = 1.143$$

Este método de computar la inversa nos demuestra que ésta sólo existirá si el determinante de la matriz original es distinto de cero. Si el determinante es cero, las columnas de la matriz dependen linealmente —es decir, puede expresarse una como combinación lineal de las otras—, y se dice que la matriz es singular.

c) Finalmente, podemos emplear el procedimiento iterativo de (2.13) para obtener una expresión aproximada de la matriz inversa R. La ecuación (2.13) puede volverse a plantear así, en forma de matricial:

$$\mathbf{X} = \mathbf{Y} + \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{A}^2\mathbf{Y} + \mathbf{A}^3\mathbf{Y} + \cdots \tag{2.13m}$$

Esta ecuación demuestra que cada etapa en la iteración consiste en elevar la matriz a una potencia sucesivamente mayor, lo que confiere al método el nombre de *expansión en potencias*.[37] Una comparación de las ecuaciones (2.8*m*) y (2.13*m*) indica que:

$$\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{Y} = \mathbf{R}\mathbf{Y} = (\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 + \cdots)\mathbf{Y}$$

o

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 + \cdots \tag{2.20}$$

La ecuación (2.20) indica, *a*) que cada elemento en la inversa es no-negativo, puesto que I y A únicamente contienen elementos no-negativos; *b*) cada elemento en la inversa depende, en general, de

[37] Esta forma es análoga a la expresión para el multiplicador keynesiano, como la suma de $(1 + c + c^2 + c^3 + \cdots)$ que se obtendría de la ecuación (2.9). Como en el caso keynesiano, se asegura la convergencia de la serie por la propiedad de la matriz de Leontief observada anteriormente —que la suma de los coeficientes a_{ij} en cada columna es menor o igual a uno, y que, por lo menos, un total de columna es menor que la unidad.

todos los elementos de la matriz tecnológica, a menos que algunos de éstos sean ceros.

El empleo de la ecuación (2.20) nos da una aproximación a la inversa, que si se llevase más adelante convergiría hacia el valor verdadero:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.25 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.125 & 0 \\ 0 & 0.125 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0.063 \\ 0.031 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.125 & 0.563 \\ 0.281 & 1.125 \end{bmatrix}$$

Cada elemento en la inversa puede conceptuarse así, como la suma de una serie, de la cual el primer término es el coeficiente en la matriz de Leontief con signo positivo. Este concepto es útil para dividir el efecto total de una demanda final dada, en un efecto directo $(\mathbf{I} + \mathbf{A})\mathbf{Y}$, y en una serie de efectos indirectos $(\mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 + + \cdots)\mathbf{Y}$. Para cualquier elemento que se encuentra fuera de la diagonal, la suma de los efectos indirectos está representada por $(r_{ij} - a_{ij})$. Para facilitar las comparaciones entre los coeficientes directos a_{ij} y los coeficientes r_{ij}, seguiremos la práctica de reunir a la matriz $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ con su inversa, como lo hemos hecho en el cuadro 2-6.

Problemas

1. Vuélvase a calcular la solución para el modelo I dada en el cuadro 2-5 (página 43), si la capacidad agrícola se limita a 150, y las necesidades adicionales de productos agrícolas deben importarse.

2. Calcúlese por medio de la iteración de Gauss-Seidel cada una de las columnas de la matriz inversa que se presenta en el cuadro 2-6 (página 45).

3. En el ejemplo de la sección C del apéndice (página 65), supóngase que los coeficientes de importación son $m_1 = 0.2$, $m_2 = 0.3$. *a)* Calcúlese la matriz inversa por dos métodos diferentes. *b)* Escríbase una expresión de las importaciones totales que se necesitan, como función de demandas finales.

4. Utilizando los cuadros que están en el apéndice del capítulo 8, compárense los efectos directos sobre otros sectores de una demanda final de 100 millones de dólares de maquinaria en los Estados Unidos (cuadro 8-9, páginas 254-255) con los efectos totales (cuadro 8-12, página 260). Investíguense los orígenes de las necesidades indirectas, que se señalan, de maquinaria, hierro y acero, mineral de hierro y energía eléctrica.

Ing. Guillermo Castellanos Guzmán

MEDIDAS DE EFECTIVIDAD PARA COMPARAR PROYECTOS O GRUPOS DE PROYECTOS

(APLICACION DE LA TEORIA DEL VALOR PARA ASIGNACIONES) DE CALIFICACIONES RELATIVAS

TEORIA DEL VALOR

Sean dos objetos 0_1 y 0_2

Si se establece una relación de preferencia entre dos objetos, deberá ser una de las siguientes:

a) 0_1 es preferible a 0_2 $\quad 0_1 \succ 0_2$
b) 0_1 es tan preferible como 0_2 $\quad 0_1 \approx 0_2$
c) 0_1 no es preferible a 0_2 $\quad 0_1 \prec 0_2$

A cada objeto se le puede asociar un valor en forma relativa con los objetos restantes, y estos valores deberán estar de acuerdo con las relaciones de preferencia.

a) $V_1 \succ V_2$ $\qquad V_1 = V(0_1)$
b) $V_1 \approx V_2$ $\qquad V_2 = V(0_2)$
c) $V_1 \prec V_2$

Las relaciones de preferencia, dependen fundamentalmente de la persona que las establece y de las circunstancias en que las formula, así por ejemplo, 0_1 es un cuadro de Goya y 0_2 es un billete de \$ 100.00, una persona ignorante y necesitada establecería $0_2 \succ 0_1$, en cambio otra persona de características contrarias diría $0_1 \succ 0_2$.

POSTULADO DE LA TRANSITIVIDAD.

Si se tienen los objetos 0_1, 0_2 y 0_3 y se establece que:

$$0_1 \succ 0_2 \quad y \quad 0_2 \succ 0_3 \quad \Longrightarrow \quad 0_1 \succ 0_3$$

$$V_1 \succ V_2 \quad y \quad V_2 \succ V_3 \qquad\qquad V_1 \succ V_3$$

VALOR DE UN CONJUNTO DE OBJETOS

Supongamos 3 objetos $\{0_1, 0_2, 0_3\}$
y sus valores asociados $\{V_1, V_2, V_3\}$

Para determinar el valor de este conjunto de objetos, se pueden plantear tres modelos:

A) Modelo Lineal

$$V\{0_1, 0_2, 0_3\} = V(0_1) + V(0_2) + V(0_3)$$
$$= V_1 + V_2 + V_3$$

B) Modelo Cuadrático

$$V\{0_1, 0_2, 0_3\} = \sum_{i=1}^{3} a_i V_i + \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{3} a_{ij} V_i V_j$$

C) Modelo logarítmico lineal o exponencial

$$V\{0_1, 0_2, 0_3\} = C V_1^{k_1} , V_2^{k_2} V_3^{k_3}$$

O sea:

$$\text{Log. } V = \text{Log. } C + K_1 \log V_1 + K_2 \log V_2 + K_3 \text{ Log } V_3$$

C es una constante cualquiera y K_1, K_2 y K_3 son factores de ponderación.

Estos son los tres modelos más usados en las aplicaciones prácticas, y para cada caso particular hay que analizar cual es el más adecuado.

Determinación de los valores relativos de los objetos de un conjunto, bajo la hipótesis de aditividad.

1.- Obtención de una ordenación débil del conjunto, o sea, colocándolos en orden de preferencia.

$$0_1 \geq 0_2 \geq 0_3 \geq \ldots\ldots\ldots \geq 0_n \quad \text{(relación básica)}$$

2.- Aplicación del método de CHURCHMAN-ACKOFF

Comparar 0_1 con $\{0_2, \quad 0_3\}$

Sí $0_1 > \{0_2, \quad 0_3\}$

Comparar

0_1 con $\{0_2, \quad 0_3, \quad 0_4\}$

si $0_1 > \{0_2, \quad 0_3, \quad 0_4\}$

Seguimos comparando hasta llegar a:

$$\{0_2, \quad 0_3 \ldots\ldots 0_{k_1}, \quad 0_{k_1+1}\} > 0_1 > \{0_2 \quad 0_3, \ldots\ldots 0_{k_1}\} \quad k_1 < n$$

o bien cuando:

$$0_1 > \{0_2, \quad 0_3, \ldots\ldots\ldots, 0_n\}$$

Después procederemos a comparar 0_2 con los demás elementos tomados como subconjuntos, hasta que encontremos que:

$$\{0_3, \quad 0_4, \ldots\ldots 0_{k_2+1}\} > 0_2 > \{0_3, \quad 0_4, \ldots\ldots\ldots, \quad 0_{k_2}\}$$

o bien

$$0_2 > \{0_3, \quad 0_4, \ldots\ldots\ldots\ldots, \quad 0_n\}$$

Procedemos en igual forma con los demás objetos, hasta obtener todas las relaciones de preferencia.

Teniendo en cuenta la hipótesis de aditividad, podemos sustituir en las desigualdades sus valores:

$$V_1 > V_2 > V_3 > \ldots\ldots > V_n \qquad \text{(Relación básica)}$$

$$V_2 + V_3 + \ldots\ldots V_{k_1} + V_{k_1+1} > V_1 > V_2 + V_3 + \ldots + V_{k_1}$$

o bien:

$$V_1 > V_2 + V_3 + \ldots\ldots\ldots + V_n$$

$$V_3 + V_4 + \ldots\ldots + V_{k_2} + V_{k_2+1} > V_2 > V_3 + V_4 + \ldots\ldots + V_{k_2}$$

o bien:

$$V_2 > V_3 + V_4 + \ldots\ldots\ldots + V_n$$

etc.

Si estas desigualdades son consistentes, existe una región convexa de valores que las satisfacen, y nos interesa conocer una de estas soluciones.

3.- Método de FISHBURN para encontrar una solución al sistema de desigualdad.

A) Para toda desigualdad de la forma:

$$V_{j+1} + V_{j+2} + \ldots + V_{k_j} + V_{k_j+1} > V_j > V_{j+1} + V_{j+2} + \ldots + V_{k_j}$$

Escríbase:

$$V_j = V_{j+1} + V_{j+2} + \ldots + V_{k_j} + \frac{1}{2} V_{k_j+1}$$

B) Para toda desigualdad de la forma:

$$V_j > V_{j+1} + V_{j+2} + \ldots\ldots + V_n$$

Escríbase:

$$V_j = V_{j+1} + V_{j+2} + \ldots + V_n + \lambda$$

C) Finalmente escríbase:

$$V_n = \lambda$$

Se resuelve el sistema resultante, en función del parámetro λ, que es el menor valor del conjunto.

El valor de λ se puede establecer normalizando los valores, o sea que su suma sea la unidad (esta condición no es necesaria, pero sí conveniente).

Ejemplo: Si tenemos la siguiente relación básica:

$$V_1 > V_2 > V_3 > V_4 > V_5 > V_6$$

y después de comparar cada elemento con los demás en forma de subconjuntos llegamos a:

$$V_2 + V_3 > V_1 > V_2$$

$$V_2 > V_3 + V_4 + V_5 + V_6$$

$$V_4 + V_5 + V_6 > V_3 > V_4 + V_5$$

$$V_4 > V_5 + V_6$$

$$V_5 > V_6$$

$$V_6 > 0$$

De acuerdo con el método de FISHBURN, el sistema nos queda:

$$V_1 = V_2 + \frac{1}{2} V_3 \qquad \ldots\ldots\ (1)$$

$$V_2 = V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + \lambda \qquad \ldots\ldots\ (2)$$

$$V_3 = V_4 \quad V_5 + \frac{1}{2} V_6 \qquad \ldots\ldots\ (3)$$

$$V_4 = V_5 + V_6 + \lambda \qquad \ldots\ldots\ (4)$$

$$V_5 = V_6 + \lambda \qquad \ldots\ldots\ (5)$$

$$V_6 = \lambda \qquad \ldots\ldots\ (6)$$

Llevando (6) a (5) :

$$V_5 = \lambda + \lambda = 2\lambda \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (7)$$

(6) y (7) a (4)

$$V_4 = 2\lambda + \lambda + \lambda = 4\lambda \quad \dots\dots\dots \quad (8)$$

(6) (7) y (8) a (3) :

$$V_3 = 4\lambda + 2\lambda + \frac{1}{2}\lambda = \frac{13\lambda}{2} \quad \dots\dots\dots \quad (9)$$

(6) (7) (8) y (9) a (2):

$$V_2 = \frac{13}{2}\lambda + 4\lambda + 2\lambda + \lambda + \lambda = \frac{29\lambda}{2} \quad \dots \quad (10)$$

(9) y (10) a (1):

$$V_1 = \frac{29}{2}\lambda + \frac{1}{2}\left(\frac{13}{2}\lambda\right) = \frac{71}{4}\lambda$$

Tabla de valores

	Valor
V_1	$\frac{71\lambda}{4} = \frac{71\lambda}{4}$
V_2	$\frac{29\lambda}{2} = \frac{58\lambda}{4}$
V_3	$\frac{13\lambda}{2} = \frac{26\lambda}{4}$
V_4	$4\lambda = \frac{16\lambda}{4}$
V_5	$2\lambda = \frac{8\lambda}{4}$
V_6	$\lambda = \frac{4\lambda}{4}$

$$\text{SUMA} = \frac{183\lambda}{4} = 1 \Longrightarrow \lambda = \frac{4}{183}$$

Aquí ya podemos obtener cualquier combinación de valores relativos, según el valor asignado Aλ, pero para normalizarlos hacemos $\lambda = \frac{4}{183}$ y nos queda:

$$V_1 = \frac{71}{183} = 0.388$$

$$V_2 = \frac{58}{183} = 0.317$$

$$V_3 = \frac{26}{183} = 0.143$$

$$V_4 = \frac{16}{183} = 0.087$$

$$V_5 = \frac{8}{183} = 0.043$$

$$V_6 = \frac{4}{183} = \underline{0.022}$$

$$1.000$$

APLICACION EN VALUACION DE PROYECTOS

Consideremos que vamos a comparar m proyectos utilizando n factores distintos de evaluación o medidas de efectividad.

Pesos o val. relativos de los fact. de val.	K_1	k_2	...	k_n
Fact. de valuación	F_1	F_2	...	F_n
Proyecto				
P_1	V_{11}	V_{12}	...	V_{1n}
P_2	V_{21}	V_{22}		V_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
P_m	V_{m1}	V_{m2}		V_{mn}

Seleccionamos el factor de valuación F_1 y aplicamos el método para determinar los valores relativos de V_{11} a V_{m1} y en la misma forma procedemos para los factores restantes.

Una vez que se tiene esta tabla de valores, se determinan los valores relativos de k_1 a k_n aplicamos el mismo método y finalmente se obtiene el valor de cada proyecto aplicando el modelo logarítmico lineal, o sea:

$$V(P_1) = C \; V_{11}^{k1} \; V_{12}^{k2} \ldots V_{1n}^{kn}$$

en donde C es una constante cualquiera

Ejemplo: Supongamos que tenemos 4 proyectos y 5 medidas de efectividad.

Peso	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5
F. de V.	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5

Proyecto					
P_1	V_{11}	V_{12}	V_{13}	V_{14}	V_{15}
P_2	V_{21}	V_{22}	V_{23}	V_{24}	V_{25}
P_3	V_{31}	V_{32}	V_{33}	V_{34}	V_{35}
P_4	V_{41}	V_{42}	V_{43}	V_{44}	V_{45}

Tomando el factor F_1 comparemos y supongamos que llegamos a:

$$V_{21} > V_{41} > V_{11} > V_{31} \qquad \text{(Relación básica)}$$

y además:

$$V_{41} + V_{11} > V_{21} > V_{41}$$

$$V_{41} > V_{11} + V_{31}$$

$$V_{11} > V_{31}$$

$$V_{31} > 0$$

o sea:

$$V_{21} = V_{41} + \frac{1}{2} V_{11}$$

$$V_{41} = V_{11} + V_{31} + \lambda$$

$$V_{11} = V_{31} + \lambda$$

$$V_{31} = \lambda$$

Sustituyendo:

$$V_{31} = \lambda$$

$$V_{11} = 2 \lambda$$

$$V_{41} = 4 \lambda$$

$$V_{21} = \underline{5 \lambda}$$

Suma 12λ

Entonces, los valores normalizados serían:

$$V_{31} = \frac{1}{12} = 0.083$$

$$V_{11} = \frac{2}{12} = 0.167$$

$$V_{41} = \frac{4}{12} = 0.333$$

$$V_{21} = \frac{5}{12} = \underline{0.417}$$

$$1.000$$

En la misma forma podemos proceder con los demás factores, -- hasta llegar a una tabla del siguiente tipo:

	Peso	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5
Proyecto	F. de V.	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
P_1		0.167	0.50	0.08	0.17	0.15
P_2		0.417	0.12	0.25	0.26	0.05
P_3		0.083	0.24	0.38	0.35	0.35
P_4		0.333	0.14	0.29	0.22	0.45

Ahora establezcamos relaciones de preferencia entre los factores de valuación:

$$k_3 \succ k_5 \succ k_1 \succ k_4 \succ k_2 \qquad \text{(Relación básica)}$$

$$k_5 + k_1 + k_4 + k_2 \succ k_3 \succ k_5 + k_1 + k_4$$

$$k_1 + k_4 \succ k_5 \succ k_1$$

$$k_1 \succ k_4 + k_2$$

$$k_4 \succ k_2$$

$$k_2 \succ 0$$

Entonces, aplicando el método de FISHBURN nos queda:

$$k_3 = k_5 + k_1 + k_4 + \frac{1}{2} k_2$$

$$k_5 = k_1 + \frac{1}{2} k_4$$

$$k_1 = k_4 + k_2 + \lambda$$

$$k_4 = k_2 + \lambda$$

$$k_2 = \lambda$$

o sea:

$$k_2 = \lambda$$

$$k_4 = 2\lambda$$

$$k_1 = 4\lambda$$

$$k_5 = 5\lambda$$

$$k_3 = \frac{23\lambda}{2}$$

Suma $\quad \frac{47}{2}\lambda$

Los valores normalizados serán:

$$k_2 = 2/47 = 0.042$$

$$k_4 = 4/47 = 0.085$$

$$k_1 = 8/47 = 0.170$$

$$k_5 = 10/47 = 0.213$$

$$k_3 = 23/47 = 0.490$$

y la tabla completa nos queda como sigue:

	(0.17)	(0.04)	(0.49)	(0.09)	(0.21)
	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
P_1	0.17	0.50	0.08	0.17	0.15
P_2	0.42	0.12	0.25	0.26	0.05
P_3	0.08	0.24	0.38	0.35	0.35
P_4	0.33	0.14	0.29	0.22	0.45

Entonces el valor de cada proyecto aplicando el modelo logarítmico será:

$$V(P_1) = C\,(0.17)^{0.17}\,(0.50)^{0.04}\,(0.08)^{0.49}\,(0.17)^{0.09}\,(0.15)^{0.21}$$

Tomando logaritmos y suponiendo C = 100

$$\begin{aligned}\text{Log } V(P_1) &= \log 100 + 0.17 \log(0.17) + 0.04 \log(0.50) + \\ &\quad 0.49 \log(0.08) + 0.09 \log(0.17) + 0.21 \log(0.15) \\ &= 2 - 0.131 - 0.012 - 0.539 - 0.069 - 0.172 = \\ &= 1.077\end{aligned}$$

y tomando antilogaritmos:

$$V(P_1) = 11.90$$

Procediendo en la misma forma con los proyectos restantes, se llegaría a:

$$V(P_1) = 11.90$$

$$V(P_2) = 19.60$$

$$V(P_3) = 27.80$$

$$V(P_4) = 29.20$$

o sea, que según las relaciones de preferencia establecidas, el proyecto 4 es el mejor y le siguen en orden de importancia el 3, el 2 y finalmente el 1.

mmg.

PRINCIPIOS DEL ANALISIS ECONOMICO

I.- El objetivo del estudio económico de un proyecto es evaluarlo, es decir,- calificarlo para determinar si es bueno o malo y compararlo con otros proyectos para establecer órdenes de prioridad.

El criterio de evaluación que debe emplearse, depende en cada caso del — objetivo del proyecto y de la entidad en favor de la cual se evalúa, ya que existen dos grandes grupos de criterios: por una parte los que interesan al empresario privado y por la otra los que interesan a la comunidad en su conjunto y que son llamados criterios sociales; sin embargo, son tres los aspectos fundamentales de la evaluación y la forma de considerarlos es la -- que diferencía a unos criterios de los otros. Estos aspectos son: valoración, homogenización y extensión.

a) Valoración.- Consiste en asignar valores monetarios a los costos y beneficios de un proyecto. Esta valoración puede hacerse aplicando los precios de mercado (criterios privados) ó utilizando los llamados -- costos sociales (criterios sociales).

El precio de mercado sería representativo del valor real de los bienes y servicios, si funcionaran libremente las leyes de la oferta y la demanen condiciones de competencia perfecta, ocupación plena de todos — los recursos y completa movilidad de los factores. Si por interferencias, trabas o reglamentaciones de cualquier órden no se cumplen estas condiciones, el sistema de precios estará deformado y habrá necesidad de corregir tales precios para obtener los llamados costos sociales de los factores.

Las modificaciones fundamentales que se ha propuesto hacer a los precios de mercado, pueden ser de dos tipos que no se excluyen entre sí: el primero consiste en eliminar de dichos precios las influencias de -- impuestos y subsidios y el segundo en utilizar los llamados "precios de oportunidad". El precio de oportunidad de un recurso requerido por un proyecto, es el valor imputable a este recurso de lo que se dejaría de producir en otra actividad en la que se podría utilizar y de la que se le sustraería para emplearlo en el proyecto.

Este concepto es de gran importancia en los casos en los que habiendo desempleo, se va a utilizar mano de obra para la realización de un proyecto, a la cual se le remunerará con el salario mínimo. En este caso el precio de mercado de esa mano de obra es el salario mínimo; sin -- embargo, el precio de oportunidad de la misma sería cero, ya que no se le está substrayendo de ninguna otra actividad productiva.

b) Homogeneidad.- Los cálculos de evaluación abarcan toda la vida útil del proyecto, por lo que habrá que operar con valores monetarios correspondientes a transacciones realizadas en distintas fechas, y para que tales magnitudes sean comparables, es necesario hacerlas homogéneas respecto tiempo utilizado para ello equivalencias financieras.

Las equivalencias financieras mas utilizadas en la evaluación de proyectos son las siguientes:

a) Monto Compuesto.- Se utiliza para determinar el valor equivalente que tendría una cierta cantidad actual, al cabo de n períodos trabajando a una tasa de interés i por período.

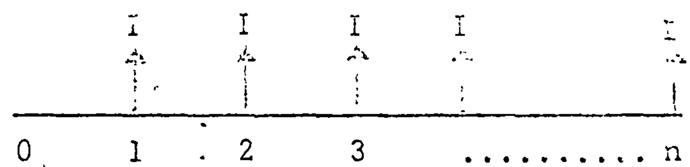
Valor inicial	I_0
Valor al final del período 1	$I_1 = I_0 + i\, I_0 = (1 + i)\, I_0$
Valor al final del período 2	$I_2 = I_1 + i\, I_1 = (1 + i)\, I_1 = (1 + i)^2\, I_0$
....	....
....	....
Valor al final del período n	$I_n = (1 + i)^n\, I_0$

Al factor $(1 + i)^n$ se le llama factor de interés compuesto.

b) Valor Presente.- Se utiliza para determinar el valor equivalente -- actual que tendría una cierta cantidad correspondiente al final del período n. Este concepto es el inverso del tratado en el inciso anterior.

$$I_o = \frac{I_n}{(1+i)^n}$$

c) Valor presente de una serie de valores.- Se utiliza para determinar el valor equivalente actual de una serie de valores iguales correspondientes a los períodos 1, 2,........., n.



Si aplicamos el valor presente visto en el inciso b) se llega a:

$$I_o = \frac{I}{(1+i)} + \frac{I}{(1+i)^2} + \frac{I}{(1+i)^3} + \ldots\ldots + \frac{I}{(1+i)^n} = \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n} \quad i$$

Al factor $\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}$ se le llama factor de actualización de una serie uniforme de valores.

d) Factor de Recuperacion del Capital.- Se utiliza para transformar - un valor inicial, en una serie uniforme de valores iguales equivalente. Este proceso es el inverso del anterior, o sea que:

$$I = \frac{(1+i)^n}{(1+i)^{n}-1} \quad I_o$$

Al factor $\frac{(1+i)^n}{(1+i)^{n}-1}$ se le llama factor de recuperación de capital.

Estos cuatro factores vienen ya calculados en tablas financieras, para distintos valores de i y de n.

Por ejemplo, para $i = 0.08$ (8%) anual y $n = 6$ años se tiene:

1.- Interés Compuesto.- $(1+i)^n = (1.08)^6 = 1.587$

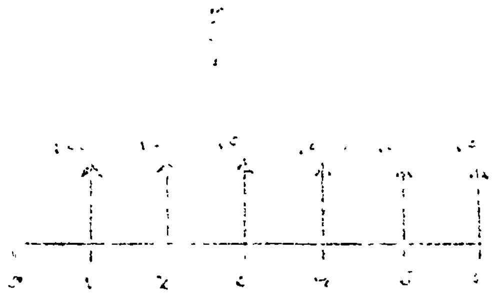
$ 1 000 actuales serían equivalentes a $ 1 587 al final del año 6 - si el capital trabaja al 8% de interés anual.

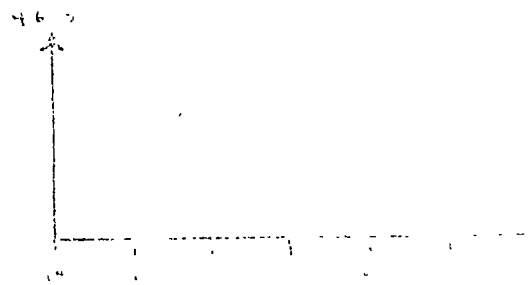
2.- Valor Presente.- $\frac{1}{(1+i)^n} = \frac{1}{(1.08)^6} = 0.630$

$ 1 000 al final del año 6 serían equivalentes a $ 630 actuales -- con una tasa de descuento del 8% anual.

3.- Valor presente de una serie uniforme.- $\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n} = \frac{(1.08)^6 - 1}{(1.08)^6} = 4.623$

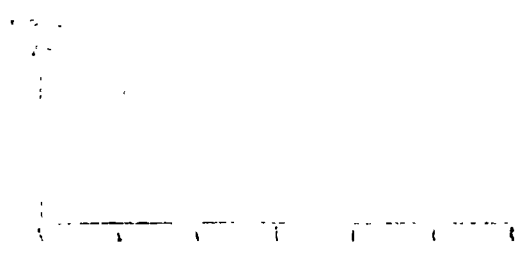
Una serie uniforme de 6 valores anuales iguales a \$ 1 000 será - - equivalente a \$ 4 623 actuales.

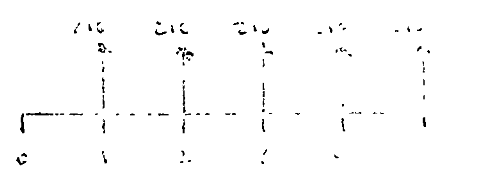




4.- Factor de recuperación de Capital: $\frac{(1+i)}{(1+i)^n - 1} = \frac{(1.08)^6}{(1.08)^6 - 1} = 0.216$

Un valor inicial de \$ 1 000 es equivalente a una serie uniforme de - valores anuales iguales a \$ 216.





c) Extensión. — La realización de un proyecto, provoca una serie de reacciones económicas en cadena hacia atrás ó hacia el origen y hacia adelante ó hacia el destino del mismo. El problema de la extensión, consiste en estimar y cuantificar estas repercusiones económicas del proyecto, dentro del criterio de evaluación adoptado, o sea, cuantificar no sólo los efectos directos del proyecto sino también los indirectos.

II.- LA EVALUACION PARA EL EMPRESARIO Y LA EVALUACION SOCIAL

El problema de la evaluación para el empresario privado es conceptualmente simple, ya que no existe duda en lo que él entiende por beneficios pues su móvil fundamental es el de las utilidades, sea en términos absolutos o por unidad de capital (Rentabilidad); en cuanto a valoración le interesan únicamente los precios de mercado y la tasa de interés del mercado en la homogenización y en cuanto a la extensión sólo toma en cuenta los efectos directos. El problema es bastante más complicado en el caso de la evaluación social en donde la valoración debe hacerse a costos sociales, se debe considerar el costo social del dinero para la homogenización y tratar de considerar y cuantificar no sólo los efectos directos sino también los indirectos.

Cabe señalar, que quienquiera que sea el realizador o promotor de un proyecto, sea del sector público ó del privado, deberá afrontar el problema del financiamiento, lo que hace siempre necesaria una evaluación a precios de mercado. Además, aunque se determine la prelación desde el punto de vista social, muchos proyectos se dejarán a la iniciativa privada y en ese caso habrá que determinar si serán o no atractivos para el empresario privado y cuales serían los incentivos que podrían despertar su interés.

El empresario privado juzga los méritos de un proyecto, esencialmente en términos de las utilidades que produciría, por lo que este es el rubro que le interesa maximizar. En este caso se utiliza lo que se llama rentabilidad del proyecto, que se suele expresar como el porcentaje que representan las utilidades anuales, respecto al capital empleado para obtenerlas.

Otro indicador utilizado por el empresario privado es la velocidad de rotación del capital, que no és más que el cociente entre el valor bruto anual de la producción de la empresa y el capital. El valor recíproco de este coeficiente es una de las expresiones cuantitativas empleadas para medir la intensidad de capital de un proyecto.

CRITERIOS SOCIALES DE EVALUACION.-

La comparación entre costos y beneficios debe comprender todo el período-de utilización de la obra; este período corresponde a la vida útil, la cual está limitada a la vez por factores físicos y por la obsolescencia. Además, la incidencia de costos o beneficios que intervienen en una fecha lejana queda considerablemente reducida por el efecto de la tasa de actualización, por lo que este período rara vez se toma mayor a 20 años.

Los costos comprenden la inversión inicial, los gastos de conservación y administración. En la inversión inicial se incluyen los gastos de ejecución, de estudios y proyectos, y de vigilancia y supervisión. Conviene hacer notar, que en ocasiones se considera como beneficio la diferencia entre gastos de conservación antes y después del mejoramiento (diferencia que puede ser positiva o negativa), lo que conduce a no considerar los gastos de conservación como costos en la comparación.

Como ya se expuso anteriormente, la cantidad de divisas implicadas en un proyecto, puede constituir un factor de decisión, por lo que es recomendable calcular y hacer aparecer separadamente las partes en divisas extranjeras y en moneda local de todos los costos y beneficios, que permitan comparar proyectos a partir de sus componentes de costos externos.

Los principales criterios utilizados para evaluar proyectos carreteros son los siguientes:

En lo que sigue se usará la siguiente simbología:

I = Inversión inicial

bi = Beneficio en el año i

Ci = Suma de gastos en el año i

B = Suma de Beneficios actualizados al año cero.

C = Suma de costos actualizados al año cero.

a) Relación Beneficios-Costos.-

La relación Beneficios-Costos es el cociente de la suma de Beneficios actualizados entre la suma de costos actualizados. Para que la inversión sea atractiva el valor de este cociente deberá ser mayor que la unidad.

$$B = \sum_{i=1}^{n} \frac{bi}{(1+a)^i}$$

$$C = I + \sum_{i=1}^{n} \frac{Ci}{(1+a)^i}$$

b) Beneficio neto actualizado.-

Este indicador se obtiene restándole a la suma de beneficios actualizados, la suma de costos actualizados. Para que sea atractiva la inversión esta diferencia deberá ser mayor que cero.

$$BN_c = B - C$$

c) La tasa interna de rendimiento o de retorno.

La tasa interna de retorno es la tasa con la que se tendría que actualizar los flujos de beneficios y de gastos, de manera que el beneficio neto actualizado sea cero. Su valor se obtiene resolviendo la siguiente ecuación:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{bi}{(1+r)^i} = I + \sum_{i=1}^{n} \frac{Ci}{(1+r)^i}$$

El valor de r que hace que se cumpla la igualdad es la tasa interna de retorno. Se calcula por aproximaciones sucesivas. El valor de esta tasa tendrá que ser mayor que la tasa de actualización para que la inversión sea atractiva.

d) Coeficiente de rentabilidad.-

El coeficiente de rentabilidad de la inversión en el año i es el cociente bi/C. El año i de referencia considerado es generalmente el primer año de puesta en servicio y entonces a la relación se le llama coeficiente de rentabilidad inmediata.

La importancia de este coeficiente radica en el hecho de que permite determinar el año óptimo de puesta en servicio de una obra. El año óptimo de puesta en servicio, o sea aquel que hace que el beneficio neto actualizado sea máximo, corresponde al año en el cual el coeficiente de rentabilidad de la inversión es mayor o igual a la tasa de actualización.

$$bi/c \geqq a \Rightarrow i = \text{año óptimo de puesta en servicio.}$$

e) Período de recuperación del capital.

Es el año en el cual la suma de beneficios hasta ese año actualizados al año cero iguala a la suma de costos hasta el mismo año actualizados también al año cero.

f) Costo anual de transporte.-

Este indicador que puede utilizarse principalmente para comparar alternativas del mismo proyecto, está definido como la suma de la anualidad de la amortización de la inversión, gastos anuales de conservación, administración, accidentes y operación de los vehículos.

Resulta interesante presentar los cálculos bajo la forma de balances de rentabilidad, o sea, tablas en donde aparecen año por año los gastos, los beneficios y los totales acumulados de estos gastos y beneficios actualizados.

EJEMPLO

Sea una inversión que provoca una serie de costos y beneficios como se muestra a continuación:

	Año 0	Año 1	Año 2
Costos	100	50	70
Beneficios	–	40	200

Consideremos una tasa de actualización $a = 10\%$

$$C = 100 + \frac{50}{(1.1)} + \frac{70}{(1.1)^2} = 100 + 45.45 + 57.85 = 203.30$$

$$B = \frac{40}{(1.1)} + \frac{250}{(1.1)^2} = 36.36 + 206.61 = 242.97$$

$$BNo = 242.97 - 203.30 = \underline{39.67}$$

$$B/c = \frac{242.97}{203.30} = \underline{1.19}$$

y la tasa interna de rendimiento será:

$$100 + \frac{50}{(1 + r)} + \frac{70}{(1 + r)^2} = \frac{40}{(1 + r)} + \frac{250}{(1 + r)^2}$$

$$\frac{100\,(1 + r)^2 + 50\,(1 + r) + 70}{(1 + r)^2} = \frac{40\,(1 + r) + 250}{(1 + r)^2}$$

$$100 + 200\,r + 100\,r^2 + 50 + 50\,r + 70 = 40 + 40\,r + 250$$

$$100\,r^2 + 250\,r + 220 = 40\,r + 290$$

$$100\,r^2 + 210\,r - 70 = 0.$$

$$10\,r^2 + 21\,r - 7 = 0.$$

$$r = \frac{-21 \pm \sqrt{441 + 280}}{20} = \frac{-21 \pm 26.8}{20}$$

$r_1 = \frac{5.8}{20} = 0.29$ (29 %) $r_2 = \frac{-47.8}{20} = -2.39$ (no tiene sentido económico)

$\underline{r = 29\ \%}$

Sin embargo, otra persona con los mismos datos podría formular el siguiente flujo.

	Año 0	Año 1	Año 2
Costos	100	0	0
Beneficios	–	-10	180

$C = 100$

$$B = \frac{-10}{(1.1)} + \frac{180}{(1.1)^2} = -9.09 + 148.76 = 139.67$$

$BNo = 139.67 - 100 = \underline{39.67}$

$B/C = 139.67/100 = \underline{1.40}$

$$100 = -\frac{10}{(1+r)} + \frac{180}{(1+r)^2} = \frac{-10\,(1+r) + 180}{(1+r)^2}$$

$$100 + 200\,r + 100\,r^2 = -10 - 10\,r + 180$$

$$100\,r^2 + 210\,r - 70 = 0$$

Que es la misma expresión del caso anterior, por lo que:

$$\underline{r = 29\ \%}$$

En este segundo caso hemos obtenido una relación beneficios-costos mayor a la del caso anterior, siendo que se refieren a la misma inversión; sin embargo, el valor del beneficio neto actualizado en los dos casos es el mismo, así como el valor de la tasa interna de rendimiento.

De lo anterior se puede concluir, que la relación beneficios-costos es útil para determinar si una inversión es o no buena, pero para la determinación de prioridades es mas conveniente utilizar el beneficio neto actualizado. En cuanto a la tasa interna de retorno se puede afirmar que también es buen indicador para establecer prioridades, pero tiene la desventaja de que para algunos flujos no se obtienen valores reales de esa tasa y para otros se pueden obtener varios valores solución, razón por la cual no siempre es útil su uso.

EJEMPLO.-

Sean 2 alternativas A y B para trazar un camino entre dos ciudades.- La primera tiene mayores pendientes y mayores grados de curvatura ya que se apega mas al terreno, pero los costos de operación serán elevados así como los de conservación, mientras que la alternativa B tiene mejores especificaciones por lo que su costo será mas elevado; sin -- embargo, los gastos anuales de conservación y operación serán infe-- riores a los de la alternativa A.

	Alternativa A	Alternativa B
Inversión	1 000	2 000
Gastos anuales de conservación	100	80
Gastos anuales de operación	500	160

Transformemos la inversión inicial en un flujo anual equivalente, mediante la utilización del factor de recuperación de capital, considerando una vida útil de 20 años.

Para $n = 20$ e $i = 10\%$ el f.r.c. es 0.11746

$$I_A = 1\ 000 \times 0.11746 = 117.46$$

$$I_B = 2\ 000 \times 0.11746 = 234.92$$

Gastos anuales equivalentes:

Alternativa A : 117.46 + 100 + 300 = 517.46

Alternativa B : 234.92 + 80 + 160 = 474.92

De lo anterior se puede deducir que a pesar de que la alternativa B requiera de una inversión igual al doble de la alternativa A, resulta una solución más económica.

Este mismo procedimiento puede utilizarse para determinar el uso de material mas conveniente para la carpeta de un camino, concreto ó asfalto, ó para determinar si un camino debe pavimentarse o dejarse hasta una etapa de terracería.

Naturalmente que este procedimiento es equivalente al de obtener el valor actual de los gastos de las distintas alternativas.

EJEMPLO.-

Consideremos dos ciudades A y B, las cuales estan ligadas por un camino pavimentado de 100 Km de longitud, en el cual los automóviles circulan a una velocidad media de 70 K/Hr., los autobuses a 65 K/Hr. y los camiones a 60 K/Hr. El tránsito actual es de 2 500 vehículos

E V A L U A C I O N   D E   P R O Y E C T O S

ING. GUILLERMO CASTELLANOS G.

Agosto de 1972

E V A L U A C I O N   D E   P R O Y E C T O S

Ing. Guillermo Castellanos Guzmán.

INTRODUCCION

El objetivo básico de todo estudio económico de un proyecto es evaluarlo, es decir, calificarlo para determinar si es bueno o malo y compararlo con otros proyectos de acuerdo con una determinada escala de valores a fin de establecer un orden de prelación. Esta tarea exige precisar las "ventajas" y"desventajas" de la asignación de recursos a un fin dado. El problema teórico de establecer cual es el criterio de evaluación que se debe utilizar para establecer prelaciones no ha sido aún resuelto en definitiva; sin embargo, se distinguen dos grupos principales: por un lado los patrones de comparación de proyectos conforme al interés del empresario privado y por el otro los que interesan a la comunidad en su conjunto y quese pueden llamar criterios sociales de evaluación.

Los capítulos en que podemos dividir el estudio de un proyecto son:

i) Estudio de Mercado.- Estudio de la demanda de los bienes y servicios a que el proyecto se refiere.

ii) Determinación del tamaño y la localización.- Determinación de la capacidad de producción que ha de instalarse y de la localización de la nueva unidad productora.

....

iii) Ingeniería del Proyecto.- Descripción técnica del proyecto, investigaciones preliminares, especificación de los equipos y estructuras, selección de los procesos de elaboración, justificación del grado de mecanización adoptado, cantidad y calidad de los insumos requeridos, etc.

iv) Cálculo de las Inversiones.- Cálculo de las inversiones totales en moneda nacional y extranjera que el proyecto exige, considerando la inversión en activos fijos y el capital de trabajo ó circulante.

v) Presupuesto de gastos e ingresos anuales y organización de los datos para la evaluación.- Estimación de los costos e ingresos que resultarían del funcionamiento de la empresa incluyendo en forma ordenada aquellos antecedentes que puedan ser necesarios para evaluar el proyecto: efectos sobre la balanza de pagos, presupuestos y disponibilidad de la mano de obra, etc.

vi) Evaluación del Proyecto.- Utilización de criterios de evaluación para poder calificar el proyecto y compararlo con otros para determinar prelaciones.

vii) Financiamiento.- Especificaciones de las fuentes monetarias a que se recurrirá y las formas en que se proyecta canalizar los recursos financieros para llevar a cabo la iniciativa.

viii) Organización y Ejecución.- Solución de problemas relativos a la constitución legal de la empresa y a la organización para el montaje y realización del proyecto.

ESTUDIOS DE MERCADO

Mercado es un conjunto de individuos cuyas solicitaciones de oferta y demanda, conducen a establecer un precio, llamado precio de mercado, que ha de normar las transacciones que se realicen con ciertos bienes o servicios.

El estudio de mercado tiene por objetivo determinar la cuantía de bienes y servicios que han de fluir de una unidad productora y que la comunidad esta dispuesta a adquirir a determinado precio.

La función de demanda de un bien o servicio, expresa las cantidades demandadas por la comunidad en función del precio de venta de ese bien o servicio, o sea que es una función del tipo $Q = Q(P)$.

La función de oferta de un bien o servicio, expresa las cantidades que los productores estan dispuestos a ofrecer al mercado, en función del precio de venta de ese bien o servicio y tambien es de la forma $O = O\ (P)$.

Existe un precio para el cual se igualan las dos funciones y que corresponde al precio de mercado.

La nueva producción debida al proyecto se sumará en algunos casos al actual volúmen de transacciones y en otros solo reemplazará a una parte o a la totalidad de los bienes ó servicios procedentes de otros orígenes (nacionales o extranjeros).

La determinación cuantitativa de la demanda solo tiene sentido en relación con determinados precios de venta, los cuales influirán sobre el monto de los ingresos estimados.

El estudio de mercado deberá proporcionar criterios útiles para determinar la capacidad que ha de instalarse en la nueva unidad productora y estimar los probables ingresos durante la vida útil de la realización del proyecto.

La recopilación de antecedentes, comprendidos los relativos a la comercialización y a la influencia de la política económica, sentará las bases empíricas del estudio, pues permitirá conocer en cada caso las variables más importantes que afectan la cuantía de la demanda y los precios. Si hay racionamientos, subsidios, aranceles protectores, etc.

Con los antecedentes obtenidos y las hipótesis de trabajo adoptadas, se podrán establecer algunas premisas teóricas con objeto de cuantificar la demanda actual y futura.

Otro aspecto a considerar en el estudio de mercado es el que se refiere tanto a la elasticidad de la demanda con respecto al ingreso y con respecto al precio.

La elasticidad de la demanda con respecto al ingreso indica la variación porcentual de la demanda al producirse una variación porcentual del ingreso.

$$\epsilon_y = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta Y}{Y}}$$

La elasticidad de la demanda con respecto al precio indica la variación porcentual de la demanda de un bien o servicio, al producirse una variación porcentual en el precio de venta de ese bien o servicio.

$$\epsilon_p = -\frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta p}{p}}$$

Esta última es negativa ya que la función demanda es estrictamente decreciente.

El conocimiento del coeficiente de elasticidad-precio de la demanda de un bien o servicio cualquiera, permite formarse una idea aproximada de la magnitud en que podrá cambiar la cuantia de la demanda y en consecuencia el valor de las ventas, en el caso de que se produzca una modificación en el precio de esa mercadería.

Si se tiene por ejemplo que la demanda sea de 2 camisas al año por hombre al precio de $ 100/camisa y que la elasticidad precio sea de 3 para este producto, al subir el precio a $ 101/camisa (1%), el consumo por hombre al año disminuirá en 3% o sea a 1.94/hombre. Si se tratara de un área en que viven 10 000 consumidores de camisas, el volumen de ventas, que era de $ 2 millones al año disminuiría a $ 1 959 400 (10 000 X 1.94X101).

Existen algunos servicios "gratuitos", como la educación, la salud pública, carreteras, etc, para los cuales es difícil estimar la demanda, por lo que solo se toman como base ciertos indicadores como ingresos per cápita, habitantes/ cama de hospital, habitantes/médico, niños/profesor, etc. y se comparan con estos mismos indicadores existentes en otros países.

Una vez conocida la demanda actual, será necesario hacer algunas hipótesis para tratar de cuantificar la demanda futura tomando en cuenta hasta donde sea posible, la idiosincrasia de los consumidores, las elasticidades de los bienes ó servicios considerados, etc; así como también las series históricas con que se cuente relacionadas con los consumidores de estos bienes ó servicios.

TAMAÑO Y LOCALIZACION DEL PROYECTO

Como para cualquier otro aspecto del proyecto, la solución óptima en cuanto a tamaño y ubicación será aquella que conduzca al resultado económico más favorable para el proyecto en conjunto. Este resultado se puede medir por uno ó más de los siguientes coeficientes: utilidades por unidad de capital (Rentabilidad), costo unitario mínimo, cociente de ventas a costos, cuantía total de las utilidades.

Dentro de las relaciones recíprocas generales existentes entre los diferentes aspectos de un proyecto, con respecto al tamaño se pueden considerar las siguientes:

La relación tamaño-mercado, en cuyo análisis adquiere especial interés el dinamismo de la demanda y su distribución geográfica. En segundo lugar se encuentra la relación entre el tamaño y el costo de producción, conocida también por economía de escala. Como los costos de producción, incluido el flete hasta el lugar de uso, serán también función de la localización, considerando la influencia de la distribución geográfica de la demanda, puede apreciarse la especial vinculación entre tamaño y localización.

Las alternativas de tamaño entre las cuales se puede escoger se van reduciendo a medida que se examinan los aspectos relacionados con la ingeniería, las inversiones, la localización, etc. La magnitud del mercado dará la primera orientación, ya que la demanda puede ser tan pequeña que solo justifique la instalación mínima, eliminándose inicialmente cualquiera otra solución. Si el mercado es suficiente para admitir varias alternativas, muchas de ellas pueden quedar eliminadas al decidir la técnica y la localización. Las alternativas que queden después de este primer análisis podrán examinarse conforme a los criterios de evaluación citados. La-decisión final se podría adoptar en base de estos coeficientes y otros — factores no cuantificables.

La decisión sobre el tamaño dependerá del punto de vista con que se aborde el problema. Al empresario privado le interesa, en esencia lograr la máxima rentabilidad ó las utilidades totales que se puedan obtener con el capital propio. El costo unitario le preocupa mas bien en términos de su posición competitiva. Desde el punto de vista de la comunidad en conjunto, interesa fundamentalmente producir el bien ó servicio al menor costo por unidad, y si el precio de venta es el mismo, la escala a la cual se consigue esta es la misma que lleva al máximo el cociente ventas a costos.

El problema de la localización se suele abordar en dos etapas: en la primera se decide la zona general en que se instalará la empresa y en la segunda se elige el punto preciso, considerando ya los problemas de detalle (costos de terrenos, facilidades administrativas, etc.) Hay factores como las estructuras tributarias, concesiones legales, disponibilidad de — edificios, etc., que en ciertos casos son de detalle y en otros pueden — ser de gran importancia. En general, los problemas decisivos serán los de transporte y de disponibilidad y costo de los insumos.

Habrá casos en que, con el fin de descongestionar ciertas zonas de un país, se adopte una política deliberada para diversificar geográficamente la producción. En igualdad de condiciones y aún con pequeñas desventajas, se promueve la instalación industrial en determinadas zonas, creando al mismo tiempo incentivos tributarios o de otro orden.

La presentación y el estudio del problema se pueden facilitar mucho mediante planos y diagramas. En un plano se pueden colocar por ejemplo, — las fuentes de materias primas, los posibles empalmes eléctricos, las fuentes de agua, las zonas de mercado, las distancias por carretera y por ferrocarril, etc.

INGENIERIA DEL PROYECTO

La ingeniería del proyecto se refiere a aquella parte del estudio que se relaciona con su fase técnica, es decir, con la participación de los ingenieros en las etapas del estudio, instalación, puesta en marcha y funcionamiento.

El tipo de problemas que plantea la fase técnica del proyecto en términos generales es:

i) Ensayos e investigaciones preliminares.- Estos ensayos abarcan cuestiones de muy variable naturaleza: pruebas de resistencia del terreno para la construcción de edificios, experiencias de laboratorio ó en plantas de ensayo para demostrar la posibilidad de utilizar materias ó procedimientos determinados y las condiciones en que esta utilización sería posible, etc.

ii) Selección y descripción del proceso de producción.- En muchos casos el proyecto no plantea problemas especiales en cuanto al proceso ó sistema de producción, pero en otros encierra complejidades y alternativas que convendría explicar conjuntamente con las soluciones ofrecidas relacionándolas con las investigaciones previas.

iii) Selección y especificación de equipos.- Hay que distinguir las dos etapas que implica el proceso de selección, la elección del tipo de equipo, para especificar las propuestas y selección entre los distintos equipos dentro del tipo elegido, a fin de decidir entre las propuestas.

iv) Los edificios industriales y su distribución en el terreno.- Los lugares de recepción, almacenes, talleres centrales y otras instalaciones, deberán estar emplazadas en buena disposición funcional respecto a los cuerpos del edificio de la fábrica propiamente tal, y a los servicios de transporte. La distribución de los edificios industriales en el terreno tendrá una relación muy importante con los problemas de manejo y circulación de materias primas, materiales en proceso de elaboración y productos. Es muy importante prever desde el comienzo las posibles ampliaciones, a fin de mantener la relación armónica inicial.

v) Distribución de los equipos en los edificios o en otros puntos de la fábrica.- La eficiencia de la operación manufacturera depende en gran medida de la disposición de los equipos, pues ésta redunda en economías de movimiento, tiempo y materiales, y en general en la facilidad dinámica del proceso.

vi) Proyectos complementarios de ingeniería.- Es muy frecuente que en los proyectos tengan que preverse instalaciones adicionales destinadas a proporcionar servicios necesarios para la producción misma o para la población ocupada en el proyecto. Los ejemplos mas claros serían las obras complementarias de agua potable e industrial o destinadas a la evacuación de aguas residuales; a establecer conexiones o plantas de energía eléctrica, gasoductos o empalmes de transportes, a la construcción de campamentos y viviendas, oficinas de administración, edificios para el bienestar de la población, etc.

vii) Rendimientos.- Decididos el método de fabricación, el tamaño de la planta y la disposición de equipos y edificios, será posible estimar la cuantía de cada uno de los insumos que demandará el proyecto, tanto en el montaje como en el funcionamiento. La estimación de esa cuantía en terminos físicos es la hipótesis básica para estimar los costos de operación y el de estos insumos, y también servirá como elemento de comparación para juzgar la eficiencia administrativa y técnica estimada para la empresa ya en funcionamiento.

viii) Flexibilidad en la capacidad de producción.- Este punto ha sido ya abordado en relación con la distribución de los edificios en el terreno y de los equipos en los edificios. La necesidad de dar flexibilidad a la capacidad de producción se deriva a veces de la naturaleza de la demanda y por otras causas. La adaptación a las variaciones estacionales de la demanda, plantea la necesidad de una flexibilidad desde el punto de vista de lograr producir eficientemente a los distintos ritmos de producción, dada una cierta capacidad.

ix) Programas de trabajo.- El programa de trabajo establece la ordenación con que se procederá a la instalación y puesta en marcha de la empresa. Su objetivo puede resumirse esencialmente en los siguientes puntos: a) prever una serie de problemas que se presentarán en la etapa de montaje y anticipar posibles soluciones; b) establecer una secuencia de inversiones sobre cuya base se estudiará el financiamiento del proyecto, y c) establecer el plan preliminar de funcionamiento hasta llegar a la capacidad normal.

LAS INVERSIONES EN EL PROYECTO

La decisión de llevar adelante un proyecto, significa asignar a su realización una cantidad de variados recursos que se pueden agrupar en dos grandes tipos: a) los que requieren la instalación del proyecto o sea el montaje y b) los requeridos para la etapa de funcionamiento propiamente dicha.

Los recursos necesarios para la instalación constituyen el capital fijo ó inmovilizado del proyecto, y los que requieren el funcionamiento constituyen el capital de trabajo o circulante.

El activo o acervo fijo comprende el conjunto de bienes que no son motivo de transacciones corrientes por parte de la empresa. Se adquieren una sola vez durante la etapa de instalación del proyecto y se utilizan a lo largo de su vida útil. Su valor monetario constituye el capital fijo de la em-- presa. Se suelen clasificar en tangibles é intangibles los primeros son-como maquinaria y equipos con sus costos de montaje, los edificios e instalaciones complementarias, la tierra y los recursos naturales y los segun-- dos pueden ser las patentes, los derechos de autor, los gastos de organización y puesta en marcha.

En general, una parte de las inversiones se debe hacer en moneda extranjera, ya sea por concepto de equipos y otros componentes de la inversión fija o por la necesidad de mantener existencias de bienes importados. El — proyecto deberá especificar cuanto habrá que invertir en moneda nacional y cuanto en moneda extranjera, a fin de poder estimar los efectos directos - sobre la balanza de pagos.

Los proyectos de propósitos múltiples plantean el problema de establecer - que parte de la inversión común se debe considerar necesaria para cada propósito. La forma de solucionar el problema suele tener gran importancia - para las decisiones políticas relacionadas con la asignación de los fondos destinados a obras púlicas. Si una obra financiada con fondos públicos — cumple simultaneamente propósitos de regadío y de producción de energía — eléctrica, por ejemplo, la manera de prorratear la inversión entre ambos - objetivos afectará a la cuantía de los costos fijos de obtención de uno y- otro propósito, lo que a su vez puede afectar a los precios que se cobra— rían por el agua y por la energía eléctrica.

El problema no ha encontrado solución definitiva aún y los autores que han abordado el tema reconocen en general, que siempre habrá una cuestión de - juicio, criterio o circunstancias que no se puede llevar a fórmulas; sin - embargo existen varios criterios que pueden considerarse satisfactorios — para realizar ese prorrateo.

EL PRESUPUESTO DE INGRESOS Y GASTOS Y LA ORDENACION DE LOS DATOS BASICOS PARA LA EVALUACION

El cálculo básico es el de los gastos e ingresos anuales que resultarían de llevar a la realidad el proyecto, datos que se pueden presentar tabulados en forma de una cuenta de dos columnas llamada presupuesto estimativo de ingresos y gastos. A partir de este presupuesto es fácil obtener la cuantía de las utilidades anuales, los costos unitarios, los cocientes ó módulos de ventas a costos y otras cifras o coeficientes significativos. Las informaciones de detalle para estimar cada rubro del presupuesto pueden también resumirse y organizarse como presupuestos parciales de mano de obra, materias primas y otros materiales, energía, etc., lo que facilitará el cotejo de las necesidades del proyecto en cada uno de estos insumos con las fuentes en que pueden obtenerse.

Tanto el presupuesto global anual de ingresos y gastos, como los presupuestos parciales anuales podrán variar a lo largo de la vida útil del proyecto. Las causas principales de variación son: a) las posibles fluctuaciones de precios y b) los distintos porcentajes de la capacidad de producción realmente utilizada.

En resumen, para fines de evaluación cada presupuesto anual tendrá vigencia por un número de años durante el cual se supone que no habrá cambios importantes y muy a menudo se opera simplemente con un solo presupuesto, que se considera representativo de toda la vida útil.

CRITERIOS DE LA EVALUACION DE PROYECTOS

Las diferencias sustantivas entre los criterios de evaluación se refieren a las diferentes maneras de considerar, especificar y medir lo que en cada caso se entiende por recursos empleados y beneficios obtenidos; sin embargo, todo cómputo de evaluación debe abordar los conceptos de valoración, homogeneidad y extensión.

La valoración

Debido a la diferente naturaleza física de los bienes y servicios, la determinación de su cuantía relativa para fines de evaluación se expresa mediante un denominador común, que es la unidad monetaria. La valoración consiste en asignar precios a los bienes y servicios relacionados con un proyecto, los cuales no siempre son los precios de mercado los representativos, sino los que llamaremos precios sociales, que no son mas que los precios de mercado corregidos para fines de evaluación.

Homogeneidad

Los cálculos de evaluación abarcan toda la vida útil del proyecto, por lo que habrá que operarse con valores monetarios correspondientes a transacciones realizadas en distintas fechas. Para que tales magnitudes sean comparables, es necesario hacer las homogéneas respecto al tiempo, utilizando para ello equivalencias financieras.

Extensión

La realización de un proyecto provoca una serie de reacciones económicas en cadena hacia atrás ó "hacia el origen" y hacia adelante ó "hacia el des tino" del mismo. El problema de la extensión consiste en considerar y cuantificar estas repercusiones económicas del proyecto, dentro del criterio de evaluación adoptado.

En este aspecto, los criterios de evaluación se dividen en dos grandes grupos, los que miden los efectos que corresponden sólo al proyecto mismo, que se llaman "efectos directos" y los que tratan de medir también los "efectos indirectos", tanto en cuanto a recursos empleados, como a beneficios resultantes.

TIPOS DE COEFICIENTES DE EVALUACION

Las distintas formas de valorar, la posibilidad de incluir o no los efectos indirectos y la posibilidad de seleccionar y definir de distintas maneras - los patrones de comparación, hacen que existan muchos criterios de evaluación y que se plantee la cuestión de cual de ellos será mas adecuado.

I.- LA EVALUACION PARA EL EMPRESARIO Y LA EVALUACION SOCIAL.-

Una buena parte de las controversias registradas en torno a los criterios - de prioridad surgen indudablemente de la falta de una distinción clara del- objetivo de la evaluación ya que depende de la entidad en favor de quien se evalúa, por lo que han surgido confusiones al valerse de criterios adecuados para seleccionar en función del interés individual y tratar de aplicarlos a casos en que hay que hacerlo en función del interés social.

Estas consideraciones permiten establecer la primera gran distinción entre- los criterios de evaluación: por un lado, los que son útiles para la comparación entre los proyectos privados y por el otro, aquellos que son aplicables desde un punto de vista social. No hay problemas conceptuales en cuanto a lo que el empresario privado entiende por beneficios, ya que su móvil fundamental es el de las utilidades, sea en términos absolutos o por unidad de capital propio (Rentabilidad). Tampoco hay dudas sobre las formas de medición: en cuanto a valoración le interesan los precios de mercado y en cuanto a extensión sólo los beneficios y costos directos del proyecto. El problema es conceptual y prácticamente mas difícil en el caso de la evaluación social.

Cabe señalar que quienquiera que sea el realizador o promotor de un proyecto, pertenezca al sector público o al privado, deberá afrontar el problema del financiamiento, lo que hace siempre necesaria una evaluación a precios de mercado. Además, aunque se determine la prelación desde el punto de vista social, muchos proyectos se dejarán a la iniciativa privada, y en ese caso habrá que determinar si serán atractivos ó no para el empresario privado y cuales serían los incentivos que podrían despertar su interés.

II.- LOS DISTINTOS CRITERIOS DE EVALUACION SOCIAL.-

La mayor complejidad de la evaluación social explica la diversidad de criterios sugeridos en la práctica ó que sería posible proponer, y a la vez la dificultad para lograr una clasificación satisfactoria de los mismos. Para facilitar un primer esquema conceptual se presentan dos formas de agruparlos:

a) Criterios parciales e integrales.-

La ordenación de los proyectos en una escala de prelaciones, se puede lograr mediante un coeficiente único de evaluación ó mediante la combinación, ponderada en alguna forma, de varios coeficientes parciales.

Se llaman criterios integrales a aquéllos que tratan de ofrecer un patrón único y total de evaluación y parciales o fraccionarios a aquellos que estan destinados a combinarse con otros.

Entre los coeficientes parciales de evaluación se pueden citar por ejemplo, la mano de obra ocupada por unidad de capital y el aporte neto a la balanza de pagos por unidad de inversión total o de la componente de la inversión en divisas.

b) La productividad de un recurso o del complejo de insumos.-

Los coeficientes de evaluación se pueden definir aritméticamente como cocientes entre lo que en términos generales se llamarían "ventajas" y "desventajas" del proyecto. Las fórmulas de evaluación miden pues, productividades de algún tipo y se podría hacer una distinción entre aquellos criterios que miden la productividad de un solo factor o recurso económico (por ejemplo, el capital o la mano de obra) y aquellos otros que miden la productividad del conjunto de los insumos requeridos.

Decidida cual es la productividad que el criterio de evaluación desea expresar; cabe aún una extensa gama de variación en cuanto a los valores que se colocarán en el numerador. Asi, si se desea medir la productividad del capital, se podrá hacer en términos de valor agregado por unidad de capital, de divisas ahorradas por unidad de capital, de personal ocupado por unidad de capital, etc.

Consideraciones similares pueden hacerse con respecto a la productividad de otros factores singulares ó del complejo de insumos.

LA SELECCION ENTRE LOS CRITERIOS PARA EVALUAR

En términos generales puede afirmarse que si se trata de evaluar con criterio social, lo que mas importa es el incremento del producto nacional que se obtiene por unidad del complejo de recursos que se emplean en el proyecto. Todas las magnitudes se debieran valorar a precios sociales y habría que tomar en cuenta no solo los beneficios y recursos directamente relacionados con el proyecto, sino también los indirectos.

Sin embargo, en muchos casos se prefiere medir la productividad del recurso escaso, usando como denominador en el cociente de evaluación el capital, la mano de obra ó las divisas invertidas; pero esta evaluación puede resultar incompleta, ya que el proceso de producción envuelve la utilización conjunta de los factores que se complementan e integran en la llamada función de producción.

La producción en una faena agrícola podría aumentar porque los obreros aprovechan mejor su tiempo, porque se les entrega mejor semilla ó porque se pone a su disposición tractores y otras máquinas. Si se omiten todos estos factores y solo se mide la producción por hombre, no será posible establecer si se obtuvo un producto mayor con la misma suma de factores, uno de los cuales rindió más, o gracias al aumento de los recursos empleados.

Se pueden hacer planteamientos similares en cuanto a los beneficios o efectos del proyecto cuantificados en el numerador del cociente, lo que hace que se presenten limitaciones prácticas y conceptuales para reunir todos estos efectos y sumarlos en unidades homogéneas. De ahí que se propongan a veces coeficientes parciales para medir por separado los efectos. A base de ellos se podría obtener una idea de conjunto que permitiera determinar prelaciones, dando mayor ponderación a aquel factor que se considere más importante en un caso dado, aunque esta ponderación podría llegar a tener un grado de subjetividad del mismo orden que las apreciaciones indispensables para vencer las limitaciones prácticas en la obtención de los datos necesarios para la evaluación integral.

FACTORES ECONOMICOS Y POLITICOS EN LA EVALUACION

Las consideraciones de naturaleza política, suelen desempeñar un papel decisivo en las prioridades de la inversión. Además, hay muchos proyectos destinados a abastecer servicios que no son materia de mercado y cuya demanda no se expresa en términos monetarios, sino en peticiones o gestiones de los grupos interesados, como los servicios de alcantarillado, el alumbrado público, etc.

Conviene tener presente que en las prioridades de inversión pueden influir planteamientos relacionados con la necesidad de dar mejor cohesión social y administrativa a un país.

De todo lo anterior podría desprenderse que al final de cuentas, no son tan importantes los criterios económicos de evaluación ya que a la postre la evaluación económica está supeditada a un criterio político y por consiguiente no habrá justificación para esforzarse en una evaluación cuidadosa; sin embargo, la conclusión correcta es la inversa. Si por razones de orden político, un proyecto A resulta preferible a otro B siendo que conforme a la evaluación económica B es superior a A, es preciso conocer el precio que se paga por esa decisión política; pero ese precio sólo se puede averiguar calculando los coeficientes económicos de prelación.

Por otra parte, no hay que caer en el extremo de suponer que todos los proyectos estarán sujetos a un análisis de tipo político específico. Dado un cierto marco de política económica y realidad institucional, lo mas probable es que la decisión respecto a la mayoría de los proyectos se tome simplemente conforme a un criterio económico de evaluación. La importancia de la evaluación económica es pues indudable.

EL FACTOR TIEMPO EN LA EVALUACION

En las evaluaciones se debe considerar el factor tiempo en el uso de los capitales, en las disponibilidades de los ingresos y en el espaciamiento de los egresos lo cual implica la adopción de una tasa de interés. El problema consiste en hacer homogéneas series de dinero en el tiempo, pues para efectos de comparación económica y evaluación, la suma de los costos y de los ingresos resultantes en la vida de la empresa no se podrá realizar a menos que los componentes se hagan homogéneos. De igual manera se razona para considerar el caso en que los valores anuales de ingresos ó egresos no sean iguales, ya sea por cambio de capacidad, por variaciones de precios, de tipos de cambio y si se desea reducir las cifras a valores anuales uniformes y equivalentes, habrá que realizar cálculos de regularización en el tiempo.

Los métodos de equivalencia mas comunmente usados son el del valor uniforme anual equivalente y el del valor actualizado, los cuales se deducen de las mismas fórmulas, por lo que la utilización de uno ó de otro depende de los datos del problema o de los objetivos perseguidos.

1.- Costo uniforme anual equivalente.-

Los costos totales de un proyecto están constituidos por un desembolso inicial, correspondiente a la inversión en una fecha dada y por una serie de desembolsos que se irán produciendo anualmente, durante todos los años de la vida útil del proyecto y con la siguiente expresión, se puede transformar la suma invertida P en una serie equivalente de valores anuales iguales R en donde ya estan consideradas la depreciación y los intereses.

$$R = P \quad \frac{i\ (1 + i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

Al factor entre paréntesis se le llama "factor de recuperación de capital". Conocida la tasa de interés i y el plazo de duración de la inversión n, el factor de recuperación se puede obtener en tablas financieras.

Ejemplo.- Consideremos dos proyectos A y B cuyas características son las siguientes:

	A	B
Inversión fija	10 000	7 000
Costos de producción (funcionamiento, conservación, impuestos, intereses y arriendos).	3 000	3 500

El factor de recuperación de capital obtenido de las tablas para 10 años y 6% es de 0.13587, por lo que el costo equivalente anual por la inversión fija es:

Proyecto A 10 000 x 0.13587 = 1 359
Proyecto B 7 000 x 0.13587 = 951

El costo total anual será:

Proyecto A : 1 359 + 3 000 = 4 359
Proyecto B : 951 + 3 500 = 4 451

Si ambos proyectos producen la misma cantidad y calidad de cosas, resultará que el proyecto B es más caro.

Cuando al final de la vida útil se recupera una parte "L" de la inversión fija, la fórmula del costo equivalente anual es:

$$R = (P - L) \times f.r.c. + L \times i$$

2.- Valor actualizado.-

En vez de hacer homogéneos los valores en términos de desembolsos - - anuales, se puede hacer en términos de inversión inicial, reduciendo- todos los pagos anuales al equivalente de un solo pago, efectuado junto con la inversión. En este caso las fórmulas descuentan los valores futuros, permitiendo sumar los costos de la inversión con todos - los costos anuales. Dada una serie de valores periódicos de n terminos y un tipo de interés i, las fórmulas permiten calcular la inversión inicial equivalente. Desde luego, este proceso de actualización es el mismo que se aplica también a los ingresos. Despejando el valor inicial en la fórmula anteriormente vista queda:

$$P = \frac{R}{f.r.c.} = R \times (f.a)$$

O sea que el recíproco del factor de recuperación del capital es el - factor de actualización. Esta expresión se utilizará para obtener el valor inicial equivalente de una serie de valores anuales iguales; — pero si no todos los valores son iguales, se puede aplicar la expresión:

$$P = \frac{R}{(1 + i)^t}$$

En donde R es una cantidad en el año t y P es el valor inicial equivalente de esa cantidad a una tasa de interés i.

Ejemplo.- Supongamos los mismos dos proyectos A y B del ejemplo anterior, pero ahora deseamos actualizar los datos.

El factor de actualización de la serie a 10 años y 6% de interés es - 7.36, por lo que el valor inicial equivalente de los costos anuales - es:

Proyecto A: 7.36 x 3 000 = 22 080

Proyecto B: 7.36 x 3 500 = 25 760

Por lo que el costo actualizado total será de:

Proyecto A: 10 000 + 22 080 = 32 080

Proyecto B: 7 000 + 25 760 = 32 760

ASIGNACION DE VALORES

Precios de Mercado y Costos Sociales.-

El precio de mercado sería representativo del valor real de los bienes y servicios, si funcionaran libremente las leyes de la oferta y la demanda, en condiciones de competencia perfecta, ocupación plena de todos los recursos y completa movilidad de los factores. Si por interferencias, trabas ó reglamentaciones de cualquier orden no se cumplen estas condiciones, el sistema de precios estará deformado. De ahí que se considere necesario corregir los precios de mercado para obtener el llamado costo social de los factores.

Las modificaciones fundamentales que se han propuesto hacer a los precios de mercado, se podrían agrupar en dos grandes tipos que no se excluyen entre si. Unas consisten en eliminar de dichos precios las influencias de impuestos y subsidios y las otras en emplear los llamados "costos de oportunidad". El costo de oportunidad de un recurso requerido por un proyecto, es el valor imputable a este recurso, de lo que se dejaría de producir en otra actividad en la que se podría utilizar y de la que se le sustraería para emplearlo en el proyecto.

EFECTOS INDIRECTOS

Cada proyecto establece una cadena de reacciones que tendrá siempre efectos cuantitativos de amplio radio de acción. Si se dispusiera de un cuadro muy detallado de insumo-producto, cabría utilizarlo para estimar las consecuencias finales de la introducción de tal o cual alteración representada por un proyecto dado. Pero en la generalidad de los casos, no se contará con tales cuadros. La alternativa está en realizar algún tipo de estimaciones que aún no siendo perfectas, sean por lo menos mejores que las que se obtienen de considerar sólo los efectos directos.

La cuantía de los efectos indirectos en la evaluación social del proyecto, tanto en cuanto a beneficios, como a recursos empleados, variará según el tipo de proyecto de que se trate. En general, los proyectos destinados a producir servicios básicos para la producción, se justificarán por sus efectos en el resto de la economía, mas bien que por los resultados del proyecto mismo. Consideraciones similares pueden ser también válidas en cuanto al servicio de transportes.

CRITERIOS DEL EMPRESARIO PRIVADO

1.- La Rentabilidad.-

El empresario privado juzga los méritos de un proyecto, esencialmente en términos de las utilidades que produciría y ese es, en consecuencia, el rubro del cual le interesa lograr un máximo. Por otra parte, todos los recursos que pondría en juego para obtener estas utilidades, los reduce al común denominador de unidades de capital, rubro que le interesa reducir al mínimo compatible con los requisitos del proyecto. En este caso se utiliza lo que se llama rentabilidad del proyecto y se suele expresar como el porcentaje que representan las utilidades anuales, respecto al capital empleado para obtenerlas.

Aunque el concepto de rentabilidad es claro, la medición de su coeficiente se presta a ambiguedades derivadas de la distinta manera de definir el capital y las utilidades. Así, en cuanto a capital puede distinguirse por una parte, entre capital fijo y circulante, y por otra, entre capital propio y créditos de diverso tipo. En cuanto a utilidades, el cálculo dará resultados distintos según como se consideren la depreciación y los intereses.

El hecho de que la forma de financiamiento afecte la rentabilidad, es precisamente lo que hace posible emplear la política crediticia como un medio eficaz para hacer atractiva una inversión dada.

El cálculo de la rentabilidad se puede plantear determinando la tasa de interés con la cual se obtiene la equivalencia financiera entre una serie de valores anuales y un capital dado. Los valores anuales que se consideran son las utilidades brutas, es decir, las que se computan sin costos por depreciación y que se les puede llamar también ingresos netos, por ser la diferencia entre los ingresos y costos anuales de producción. A esta tasa de interés se le llama rentabilidad por equivalencia. Su cálculo tiene la ventaja de que elimina algunas de las ambigüedades señaladas y evita la necesidad de adoptar en los costos una tasa convencional de interés por el uso de capital.

Ejemplo.- Supóngase que la inversión inicial en un proyecto de 20 años de vida es 10 000, que los ingresos iguales anuales son 20 000 y que los egresos, excluidos depreciación e intereses son 19 000 todos los años. ¿Cual es la rentabilidad de la inversión inicial?.

Llamando ingresos netos a la diferencia entre ingresos y egresos anuales, su valor sería de 1 000 al año. El problema consiste en determinar la tasa i que hace equivalentes 20 anualidades de 1 000 con una inversión inicial de 10 000.

Aplicando las expresiones de factor de actualización y de recuperación del capital se tiene:

$$f.a. = \frac{10\ 000}{1\ 000} = 10$$

$$f.r.c. = \frac{1\ 000}{10\ 000} = 0.10$$

Para 20 años, el factor de actualización vale 10.594 con i = 7% y 9.818 con i = 8%, por lo que interpolando llegamos a i = 7.76% que es la rentabilidad por equivalencia de la inversión.

El cálculo anterior es sencillo, debido a que los valores anuales de ingresos y egresos se suponen iguales. Cuando no lo son, la tasa de interés para la equivalencia se calcula por procedimientos de actualización singular, que consisten en actualizar a distintas tasas de interés, cada uno de los valores anuales obtenidos como diferencia entre los ingresos netos y los intereses correspondientes al capital circulante. Sumados estos valores actualizados, se comparan con la inversión inicial y se determina también por aproximaciones sucesivas e interpolación, la tasa de interés para la cual la suma es exactamente igual a la inversión fija.

2.- La Velocidad de Rotación del Capital.-

Este coeficiente se obtiene como cociente entre el valor bruto anual de la producción de la empresa y el capital. El coeficiente es solo de evaluación parcial, porque al empresario le interesa el máximo de utilidades; pero la velocidad de rotación del capital es un índice significativo, por revelar la cifra de negocios que se puede alcanzar con una inversión dada, que es también el reflejo indirecto de sus posibles utilidades. El valor recíproco de este coeficiente es una de las expresiones cuantitativas empleadas para medir la intensidad de capital de un proyecto.

CRITERIOS SOCIALES DE EVALUACION

1.- La Relación Producto-Capital.-

Asi como la rentabilidad mide la productividad del capital en términos que interesan principalmente al empresario privado (utilidades), la relación entre el valor agregado al producto nacional y el capital expresa la productividad de este último en un sentido social.

Se llama "valor agregado" a la diferencia entre el valor de venta de la producción estimada en el proyecto y las compras que se deben hacer a otras empresas para obtener esa producción (materias primas, energía, lubricantes, repuestos, etc). El valor agregado es numéricamente igual a la suma de sueldos, salarios, arriendos, intereses y utilidades de la empresa; con respecto a la depreciación y a los impuestos indirectos, el valor agregado puede ser neto ó bruto y valorado a costo de los factores o a precios de mercado. Es neto si excluye la depreciación y es a costo de factores si exluye la tributación indirecta ó los subsidios.

En el cálculo del capital se suelen incluir las inversiones en existencias, que en algunos casos pueden adquirir especial importancia.

La productividad del capital en términos de valor agregado directo no ofrece grandes ventajas como criterio exclusivo de evaluación. Asi lo demuestra el caso de los proyectos que producen servicios tales como energía eléctrica y transportes, generalmente de bajo valor agregado directo, pero de gran trascendencia indirecta. Si se empleara el criterio directo quedarían descartados de una lista de prelación, siendo que suelen tener alta prioridad. De ahí que tenga importancia considerar la relación producto-capital, teniendo en cuenta los efectos directos e indirectos.

2.- Ocupación por Unidad de Capital.-

Siempre será interesante consignar en el proyecto las repercusiones que este tendrá en cuanto a ocupación, principalmente si existen problemas especiales de desocupación. La cantidad de personal que se logre ocupar por unidad de capital, puede pasar a ser un coeficiente de alta ponderación.

Este coeficiente de ocupación, como podría designársele, se obtendrá dividiendo el número de personas empleadas por el proyecto entre el capital total que el mismo requiere. La valoración social del capital invertido será aqui especialmente interesante, pues si hay desocupación disminuirá el denominador sin afectar al numerador, mejorando mucho el coeficiente. La valoración a precios de mercado será también indispensable, para abordar el problema del financiamiento.

Conviene recordar a este respecto, los distintos tipos de mano de obra que los proyectos requieren, pues en general puede ser no calificada la disponible, de ahí que pueda ser útil computar por unidad de capital, los coeficientes de ocupación de mano de obra no calificada.

La ocupación de personal en un determinado sector, contribuirá a crear nuevas fuentes de trabajo. En una situación de desocupación, esos efectos indirectos pueden ser muy importantes por lo que convendrá estimarlos aunque su medición envuelva dificultades prácticas y conceptuales.

3.- El Factor Divisas.-

Un proyecto puede ser consumidor o productor neto de divisas, según que el balance final de divisas insumidas y divisas liberadas por sustitución de importaciones ó incremento en las exportaciones, de un saldo negativo ó positivo. Se llama efecto positivo de divisas a la cuantía de moneda extranjera que el proyecto permite liberar por sustitución de importaciones o por mayores exportaciones. El efecto negativo del proyecto estará representado por la cuantía de las divisas requeridas para su instalación, operación y mantenimiento. El efecto neto será la diferencia entre los efectos positivo y negativo.

Un coeficiente sencillo para evaluar el proyecto en cuanto a divisas se obtendría dividiendo el efecto neto anual en divisas entre la componente de divisas de la inversión que requiere el proyecto, o sea, que es una especie de relación producto-capital, pero referida sólo a la moneda extranjera que interese.

4.- Criterio Beneficio-Costo

Al comentar el criterio de rentabilidad del capital, se vió que este se aplicaba porque da una mayor importancia a lo que le interesa al empresario: las utilidades por unidad de capital empleado en la empresa; sin embargo, desde un punto de vista social, puede interesar mas bien lograr el máximo de la producción total (no sólo de las utilidades), con el mínimo del complejo de recursos empleados (no sólo del capital). A este coeficiente se le llama beneficios-costos y se expresa por el cociente obtenido al dividir el valor de la producción entre los costos totales involucrados.

A continuación se presenta un ejemplo tomando en cuenta sólo los efectos directos y valorando a precios de mercado.

	Proy. A	Proy. B
Inversión Total Fija	2 000	2 000
Valor de la Producción Anual (ingresos)	1 000	1 250

	Proy. A	Proy. B
Costos de Producción Anual (funcionamiento, conservación, impuestos, seguros)	550	800
Costo Equivalente Anual de La Inversión Fija (Al 6% de interes)	271	271
Costo Equivalente Anual Total	821	1 071
Beneficios-Costos	1.22	1.17

El cálculo de este coeficiente basándose solo en los beneficios y costos directos del proyecto y valorados a precios de mercado, no conducirá a una evaluación que refleje en forma adecuada la mejor conveniencia social.

Si pensamos en proyectos con elevado cociente de beneficios-costos directos que a simple vista revelan no tener prioridad social, como los correspondientes a la elaboración de artículos suntuarios en un país con limitaciones de capital, puede tener excelentes utilidades sin que sea beneficioso para la comunidad.

En cambio proyectos como caminos, agua potable, alcantarillado, etc., suelen acusar una baja tasa de beneficios-costos directos; sin embargo, los beneficios mas importantes son indirectos, debido a que facilitan la producción de otros sectores de la economía.

En este último tipo de proyectos se acostumbra trabajar con los beneficios directos e indirectos provocados cada año de la vida útil y con los costos sociales anuales involucrados, con la cual se obtiene un cociente de beneficios-costos al dividir la suma actualizada de los beneficios entre la su ma actualizada de los costos, cociente que debe ser mayor que la unidad - para considerar atractiva la inversión.

En ocaciones se acostumbra definir otro índice no en forma de cociente sino de diferencia entre la suma de beneficios actualizados y la suma de costos actualizados a la que se le llama beneficio neto actualizado y que deberá ser positiva para que la inversión sea atractiva.

En todos estos cálculos interviene una tasa de actualización que desde el punto de vista social difiere de la tasa de interés (valor del dinero), ya que aquella se establece de manera de asegurar que las inversiones consideradas no tengan un mejor empleo en otro sector de la economía.

Es necesario considerar, que la tasa de actualización constituye un medio para tener en cuenta el deseo del país de obtener resultados rápidos, o al contrario, de sacrificar los resultados obtenidos en los primeros años para beneficiar a las generaciones futuras. Una tasa de actualización elevada favorece a los proyectos que generan beneficios a corto plazo, mientras que una tasa baja conduce a aceptar proyectos con beneficos importantes a largo plazo.

Otro indicador llamado coeficiente de rentabilidad inmediato se obtiene -- dividiendo los beneficios en el primer año de operación del proyecto, entre la suma de costos actualizados. La importancia de este indicador es - que permite determinar el año óptimo de puesta en servicio de un proyecto, siendo el año en el cual el coeficiente de rentabilidad inmediata es igual a la tasa de actualización, siempre y cuando la serie de beneficios sea -- creciente con el tiempo. Para evitar el tener que seleccionar una tasa de actualización en ocaciones se suele utilizar la llamada tasa interna de -- rendimiento, que no es mas que la tasa a la que hay que actualizar los beneficios y los costos, de manera que su suma sea igual considerando el horizonte económico o la vida útil del proyecto. Esta tasa se obtiene por - aproximaciones sucesivas y deberá ser mayor a la de actualización para que el proyecto sea atractivo.

Ejemplo.- Supongamos un proyecto cuya vida útil sea de 5 años a partir de su puesta en operación y que la inversión inicial es de 10 000 realizada - en un año. Los beneficios anuales directos e indirectos y los costos anuales correspondientes a operación, conservación, etc. se muestran en el siguiente cuadro.

Año	Gastos	Beneficios
0	-	-
1	10 000	-
2	500	1 000
3	550	1 800
4	590	2 700
5	620	6 000
6	650	8 500

Considerando una tasa de actualización del 12% y actualizando al año 0 los beneficios y los costos mediante la expresión:

$$b_o = \frac{b_n}{(1+i)^n}$$

en donde i es la tasa de actualización.

Año	Factor de Actualización	Gastos Actualizados	Beneficios Actualizados
0	1	-	-
1	0.89	8 900	-
2	0.79	395	790
3	0.71	390	1 278
4	0.64	377	1 728
5	0.57	353	3 420
6	0.51	332	4 335
	S U M A S	10 747	11 551

Relación beneficios-costos 11 551/10 747 = 1.07 (mayor que 1)
Beneficio neto actualizado 11 551 – 10 747 = 804 (mayor que 0)
Coeficiente de rentabilidad inmediata = $\frac{1\ 000}{10\ 747}$ = 0.093 (9.3%)

Para obtener la tasa interna de rendimiento se repetiría el mismo cálculo anterior variando la tasa de actualización, hasta obtener la misma suma de beneficios actualizados y costos actualizados.

LOS CRITERIOS MIXTOS

Los criterios mixtos consisten en evaluar los proyectos utilizando diversos criterios parciales de los ya mencionados y después en función de las importancias relativas de estos criterios ponderarlos cualitativamente o si es posible cuantitativamente, ya sea para llegar a un coeficiente único que permita establecer las prelaciones, o para establecerlas a partir de consideraciones subjetivas. La principal dificultad en este tipo de criterios consiste en determinar la forma de combinar y ponderar los criterios parciales de evaluación, para llegar a un índice final que permita establecer las ordenes relativas de prioridad de diferentes proyectos.

ORDENES DE PRELACION

Ya sea a partir de los criterios mixtos, o utilizando el coeficiente de evaluación mas conveniente según el caso, se establecen los órdenes de prelación para indicar los proyectos desde el más ventajoso hasta el menos ventajoso. Este orden de prioridad permitirá seleccionar los proyectos a realizar, ya que como los recursos no son ilimitados, no se podrán realizar todos los proyectos cuyo índice de evaluación indique que es bueno, sino solamente aquellos que tengan la mayor prioridad después de considerar también los aspectos sociales y políticos.

La programación matemática puede ser de gran ayuda para determinar la combinación óptima de proyectos a realizar, teniendo en cuenta las restricciones de recursos que puedan existir y algunas otras limitaciones en cuanto a divisas, mano de obra desocupada, etc, de manera de lograr el máximo del objetivo buscado que puede ser el beneficio neto actualizado, o las utilidades, etc.

FINANCIAMIENTO Y ORGANIZACION.

Para llevar a cabo un proyecto, es necesario establecer como será financiado y como se estructurará la entidad responsable de su ejecución. Es preciso concebir una empresa determinada que cuente efectiva ó virtualmente con los fondos de financiamiento, realice las obras proyectadas y dirija las faenas de producción.

La experiencia muestra que son pocos todos los esfuerzos que se hagan por prever y resolver los problemas que se pudieran presentar en este período de transición. La nueva organización tendrá que hacer frente a cuestiones de orden legal, contratar personal técnico y administrativo, redactar estatutos y terminar los estudios para llegar a la etapa de proyecto final.

Las cuestiones relativas al financiamiento, estan muy relacionadas con las de la organización de la empresa. Si por ejemplo, se decide que el capital sea aportado en forma de acciones, ello implica tomar una decisión no solo en cuento a la forma de financiamiento, sino también en lo que se refiere a la estructura social de la empresa.

En términos generales, no se justificará realizar en forma minuciosa estudios relativos a la organización y financiamiento, si previamente no se ha resuelto llevar adelante la iniciativa. Sin embargo, la calificación de prelación de un proyecto y la decisión de realizarlo pueden a veces estar relacionadas con determinadas cuestiones legales, financieras o administrativas. Tal sería el caso de los proyectos que necesiten expropiaciones, -

el de los que suponen problemas especiales vinculados con la localización ó con el uso de ciertas patentes, etc.

Por otra parte, las limitaciones financieras pueden constituir un factor - importante, en la determinación de otros aspectos del proyecto como financiamiento se deberá considerar simultaneamente con el resto del proyecto y no después.

Los recursos para el financiamiento de proyectos, provienen de dos fuentes generales: i) Las utilidades no distribuidas, las reservas de depreciación o de otro tipo, a las que se engloba bajo el nom re de "fuentes internas"- de las empresas y ii) El mercado de capitales y los bancos que constituyen las llamadas "fuentes externas". Ambas se relacionan entre si, pues cuando las utilidades no distribuidas y las reservas de depreciación no se - - reinvierten en la propia empresa, pueden afluir al mercado de capitales y- establecer una demanda de otros títulos y valores. Las fuentes internas - de ciertas empresas, pasan de esta manera a ser fuentes externas de otras.

Los proyectos del sector público se financiarán con los saldos positivos - de la cuenta corriente de este sector y con los préstamos obtenidos del - sector privado local o de fuentes externas. Como el superávit provendrá - esencialmente de impuestos pagados por la comunidad, la formación de este- ahorro se habrá logrado principalmente a través del sistema impositivo. -- Naturalmente, la asignación de fondos para inversiones específicas será -- resuelta por decisión gubernamental, y dichas inversiones se podrán realizar a través de entidades fiscales. Asi pues, el problema de obtener y -- asignar recursos para proyectos del sector público, está estrechamente ligado con la política fiscal y con las finalidades del programa.

RESUMEN Y PRESENTACION DEL PROYECTO

Los funcionarios ejecutivos de alta jerarquía, a los que les corresponda tomar decisiones u opinar sobre proyectos tendrá en general poco tiempo para revisar todo el material que se somete a su consideración, y algunas veces no podrán apreciarse los detalles técnicos de los estudios. Conviene pues, resumir el proyecto para facilitar la formación de un juicio global acerca de él, sin necesidad de estudiarlo en todas sus partes.

La presentación de las materias que componen un proyecto, se puede hacer de varias maneras igualmente satisfactorias. El orden y la forma de presentación dependerán de la preferencia personal del proyectista, de la índole del proyecto, etc., sin embargo una forma aceptable puede ser siguiendo el orden marcado en este trabajo, empezando por un resúmen de todos los capítulos y procurando no recargar el texto con todos los detalles, razonamientos, estadísticas, análisis y estudios parciales que pueden haber sido necesarios para llegar a determinadas conclusiones, sino distinguir las materias que son imprescindibles en cuanto a contenido y coherencia, de aquellas otras que son accesorias, reservando estas últimas para anexos ó apéndices.

Ejemplos.-

1.- Obtener las equivalencias financieras de $ 10 000 en el año o para las siguientes cuatro modalidades de pago, considerando un interés del 6% anual, y un plazo de 10 años para la amortización.

a) Si se pagan los intereses al final de cada año y se amortizan los $ 10 000 de una sola vez al final de los 10 años.

En cada uno de los primeros 9 años, se pagarán únicamente 600 correspondientes a los intereses anuales, o sea 5 400 y en el último-año se pagaran 10 600, correspondientes a la amortización y a los intereses del último año, por lo que los $ 10 000 del año 0 son equivalentes a $ 16 000 pagados en la forma expuesta.

b) Amortizando $ 1 000 cada año, y pagando el interés por el saldo del capital no amortizado

Fin del año	Adeudo	Amortización	Intereses	Pago anual total
0	10 000	–	–	–
1	9 000	1 000	600	1 600
2	8 000	1 000	540	1 540
3	7 000	1 000	480	1 480
4	6 000	1 000	420	1 420
5	5 000	1 000	360	1 360
6	4 000	1 000	300	1 300
7	3 000	1 000	240	1 240
8	2 000	1 000	180	1 180
9	1 000	1 000	120	1 120
10	0	1 000	60	1 060
T o t a l		10 000	3 300	13 300

o sea, que los $ 10 000 iniciales son equivalentes a los $13 300 pagados en la forma indicada.

c) Pagando una cuota anual por intereses y amortizaciones, de tal manera que la suma de ambas sea igual cada año.

Para esto, calculamos el factor de recuperación de capital, para $i=6\%$ y $n=10$ años y se obtiene f.r.c.=0.135868, por lo que las cuotas anuales equivalentes serán de 1358.68. Como el primer año se pagarán de intereses $ 600, la amortización será de 758.68, por lo que el saldo para el siguiente año será de 9 241.32, al cual se le–

Obtendrá el 6% para determinar los intereses en el segundo año y — por diferencia obtener la cuota de amortización.

En el siguiente cuadro se puede observar, que la cuota de amortización es cada año mas alta, mientras que la de intereses cada año — mas baja.

Fin del Año	Adeudo	Amortización	Inteseses	Cuota Anual Total
0	10 000	–	–	–
1	9 241.32	758.68	600.00	1 358.68
2	8 437.12	804.20	554.48	1 358.68
3	7 584.67	852.45	506.23	1 358.68
4	6 681.07	903.60	455.08	1 358.68
5	5 723.25	957.82	400.86	1 358.68
6	4 707.98	1 015.28	343.40	1 358.68
7	3 631.77	1 076.20	282.48	1 358.68
8	2 491.00	1 140.77	217.91	1 358.68
9	1 281.78	1 209.22	149.46	1 358.68
10	–	1 281.78	76.90	1 358.68
T o t a l		10 000.00	3 586.80	13 586.80

o sea, que los $ 10 000 iniciales son equivalentes a $ 13 586.80 pagados en la forma indicada.

Se puede observar que esta cantidad $ 13 586.80 es bastante parecida a la del caso b) $ 13 300; sin embargo para tasas de interés mas altas y mayor plazo, la diferencia entre los dos valores tiende a crecer.

d) Si se adopta una forma de pago, sin abonos intermedios, pagando al final de los 10 años de una sola vez el capital y los intereses compuestos se tendría:

$$C = 10\ 000\ (1+i)^n = 10\ 000\ (1.06)^{10} = 17\ 908.49$$

Estos \$ 17 908.49 pagados al final de los 10 años, son equivalentes a los \$ 10 000.00 iniciales.

Se puede deducir de lo anterior, que se pueden plantear infinitas combinaciones de amortización, que darán otras tantas sumas diferentes, todas ellas financieramente equivalentes, dados los plazos y la tasa de interés.

2.- Para las mismas cuatro consideraciones del ejemplo anterior, obtener las equivalencias financieras de los \$ 10 000, pero considerando ahora i=10% y n=8 años.

3.- Si para amortizar una inversión, se van a pagar 6 cuotas anuales iguales con valor de \$2 000.00 cada una, determinar el valor de la inversión inicial y lo correspondiente a pago de amortización e intereses en cada año, considerando una tasa de interés del 5%

El factor de actualización para 6 años y 5% de interés resulta ser 5.07462, por lo que la inversión inicial equivalente es:

$$I = 5.07462 \times 2\ 000 = \$\ 10\ 151.38$$

Los intereses en el primer año = 0.05 x 10 151.38 = 507.57 y la amortización en el primer año = 2 000 – 507.46 = 1 492.43 y el saldo para el siguiente año = 10 149.24 – 1 492.54 = 8 658.95.

El cuadro completo es el siguiente:

Fin del Año	Saldo	Amortización	Intereses	Cuota Anual
0	10 151.38	-	-	-
1	8 658.95	1 492.43	507.57	2 000.00
2	7 091.90	1 567.05	432.95	2 000.00
3	5 446.50	1 645.40	354.60	2 000.00
4	3 718.83	1 727.67	272.33	2 000.00
5	1 904.77	1 814.06	185.94	2 000.00
6		1 904.77	95.23	2 000.00
T o t a l		10 151.38	1 848.62	12 000.00

4.- Si ahora se tuvieran 5 cuotas anuales iguales con valor de $ 3 200.00 y considerando un interés del 9%, cual sería la inversión inicial - - equivalente.

5.- Supóngase que en un proyecto se requieren $ 1 600 millones en inver-- siones fijas, las cuales se realizarán de acuerdo con los programas - de la siguiente manera:

Año	1	25 %
Año	2	50 %
Año	3	20 %
Año	4	5 %

Para tal fin, en el primer año de instalación se obtendrá un crédito por $ 1 000 millones, para financiar el equipo importado, al 6% de - interés anual sobre saldos insolutos y amortizable en 10 partes iguales, en otros tantos años a partir del segundo año del período de -- instalación. El resto de la inversión correspondiente a terrenos, - obras civiles, instalaciones y equipos civiles, se financiará con — capital propio.

A los aportes de capital propio se les imputará un 4% anual no acumulable, durante el período de instalación.

Si las inversiones a base de capital extranjero y nacional son a - - igual ritmo, determinar el valor del capital fijo del proyecto, al - comienzo del 5ª año.

Calendario de Inversiones

Año	Componente Extranjera	Componente Nacional	T o t a l
1	250 000 000	150 000 000	400 000 000
2	500 000 000	300 000 000	800 000 000
3	200 000 000	120 000 000	320 000 000
4	50 000 000	30 000 000	80 000 000
Totales	1 000 000 000	600 000 000	1 600 000 000

Amortización e Intereses de la Deuda

Año	Deuda	Amortización	Intereses	T o t a l
1	1 000 000 000	-	60 000 000	60 000 000
2	1 000 000 000	100 000 000	60 000 000	160 000 000
3	900 000 000	100 000 000	54 000 000	154 000 000
4	800 000 000	100 000 000	48 000 000	148 000 000
Total Intereses			222 000 000	

Aportación de Capital Propio

Año	Inversión	Amortización e Intereses de la deuda	Subtotal	Intereses Imputables al Capital
1	150 000 000	60 000 000	210 000 000	33 600 000 (16%)
2	300 000 000	160 000 000	460 000 000	55 200 000 (12%)
3	120 000 000	154 000 000	274 000 000	21 920 000 (8%)
4	30 000 000	148 000 000	178 000 000	7 120 000 (4%)
Total Intereses Imputados				117 840 000

Capital fijo al comienzo del 5º año.

$$1\ 600\ 000\ 000 + 222\ 000\ 000 + 117\ 840\ 000 = 1\ 939\ 840\ 000$$

6.– Calcular el capital fijo del proyecto del ejemplo anterior al comienzo del 5º año, para los dos casos siguientes:

a) Sin considerar intereses sobre las cuotas de amortización y

b) Considerando que los pagos de amortización e intereses de la deuda se realizan al término de los períodos contables.

7.– Determinar la inversión fija al año de puesta en marcha del proyecto, así como el valor del capital circulante del mismo, si se cuenta con los siguientes datos:

Trimestre	Equipo, edificio e instalaciones	Pagos Extraordinarios a Personal	Costos Organiz.	Ing. y Admón.	Gastos de puesta en marcha
1	90	—	—	10	—
2	100	—	—	—	—
3	100	—	—	—	—
4	90	—	—	—	—
5	100	—	—	30	—
6	—	—	—	30	—
7	100	10	10	—	—
8	—	10	10	10	80

ii) A las inversiones se les imputa un interés del 2% trimestral no acumulable.

iii) La composición de costos por unidad producida (en pesos) es la siguiente:

Materia prima	10
Materiales	2
Gastos varios	10
Sueldos y salarios	8
Amortización	2
Intereses	1

iv) La duración del proceso de elaboración es de 3 meses.

v) La capacidad de producción diaria es de 250 unidades.

vi) La existencia de materiales y materia prima en depósito deberá ser igual a la necesaria para la producción de 2 meses.

vii) El plazo de venta es de 30 días.

viii) El plazo de compra de materiales es de 15 días.

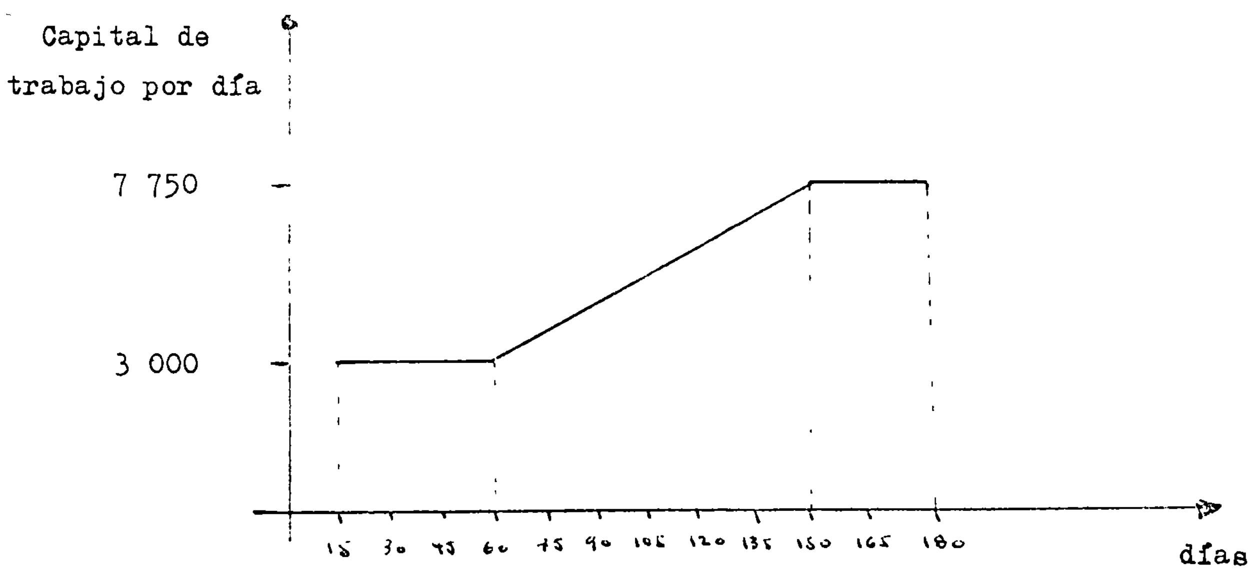
Capital fijo a la puesta en marcha

Trimestre	Inversión	Intereses	T o t a l
1	100	16 (16%)	116
2	100	14 (14%)	114
3	100	12 (12%)	112
4	90	9 (10%)	99
5	130	10.4 (8%)	140.4
6	30	1.8 (6%)	31.8
7	120	4.8 (4%)	124.8
8	110	2.2 (2%)	112.2
	Capital Fijo		$ 850.20 Millones

Cálculo del capital circulante

El capital circulante lo definiremos como si fuera inventario.
Materia prima y materiales (10+2)x250 unidades/día = $ 3 000/día.
Los gastos de producción, sin considerar la amortización son:

(10 + 2 + 10 + 8 + 1) x 250 unidades/día = $7 750/día.

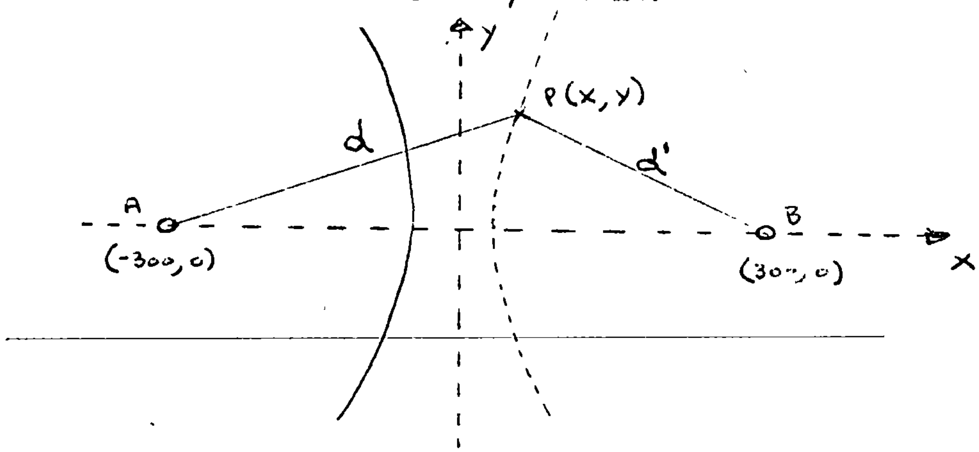


El capital circulante, será el área bajo la curva.

$45 \times 3\ 000 + (3\ 000 + 7\ 750) \times 90/2 + 7\ 750 \times 30 =$
$= 135\ 000 + 483\ 750 + 232\ 500 = \$\ 851\ 250$

8.- Repetir el cálculo anterior; pero considerando ahora un interés de 1.5% trimestral acumulable y un período de elaboración de 2 meses.

9.- La distancia entre dos poblaciones es de 600 Km., en cada una de ellas existe un ingenio que produce azúcar de remolacha. El costo de producción en el primer ingenio es de \$ 4 840/Ton. y en el segundo \$ 4 688/Ton. Determinar el área de mercado de cada proyecto, suponiendo un flete uniforme de \$ 1.00/Ton.-Km.



El precio por tonelada de azúcar de remolacha en el punto P sería de:

Llevada del punto A: $4\ 840 + d$

Llevada del punto B: $4\ 688 + d'$

La condición para que P sea un punto de la frontera de las áreas de mercado de los dos proyectos, es que los precios en ese punto sean iguales, ya sea llevada desde el punto A o desde el punto B.

$$4\ 840 + \sqrt{(300+x)^2+Y^2} = 4\ 688 + \sqrt{(300-x)^2 + Y^2}$$

$$\sqrt{(300+x)^2+ Y^2} = \sqrt{(300-x)^2+ Y^2} - 152$$

Elevado al cuadrado

$$(300+x)^2+ Y^2 = (300-x)^2+ Y^2 - 304\sqrt{(300-x)^2+ Y^2} +23\ 104$$

$$90\ 000 + 600\ x + x^2 = 90\ 000 - 600\ x + x^2 - 304\sqrt{(300-x)^2+ Y^2} +23\ 104$$

$$1\ 200\ x - 23\ 104 = 304\sqrt{(300-x)^2+ Y^2}$$

Elevado al cuadrado nuevamente

$$1\ 440\ 000x^2 - 55\ 449\ 600x+533\ 794\ 816 = 92\ 416\ (90\ 000-600x+x^2)+Y^2$$

$$1\ 440\ 000x^2 - 55\ 449\ 600x+533\ 794\ 816 = 92\ 416x^2-55\ 449\ 600x+8\ 317440000+$$
$$+ 92\ 416\ Y^2$$

$$1\ 347\ 584x^2-92\ 416\ Y^2 = 7783\ 645\ 184$$

Finalmente:

$$\frac{X^2}{5\ 776} - \frac{Y^2}{84\ 224} = 1$$

Que es la ecuación de una hipérbola; aunque solo la rama cercana al - - punto A es la que tiene sentido.

10.- Determinar el área de los proyectos del ejemplo anterior, pero ahora considerando tarifas diferenciales con las distancias del siguiente tipo:

Distancia	Costo por toneladas ($)
100	88.00
200	122.00
300	159.00
400	184.00
500	210.00
600	231.00
700	247.00
800	263.00
900	280.00
1 000	295.00
1 100	312.00
1 200	328.00
1 300	344.00
1 400	353.00
1 500	366.00
1 600	379.00
1 700	392.00
1 800	405.00
1 900	418.00
2 000	431.00

Para kilometrajes intermedios, se interpola linealmente entre los extremos inferior y superior, asi por ejemplo para 420 Km., el costo por tonelada sería 184 + 0.20 (210–184)=184+5.2=189.2

Sugestión.- Los puntos de la frontera deberán cumplir con:

$$4\ 840 + f_a = 4\ 688 + f_b$$

o sea:

$$f_b - f_a = 152$$

Se puede suponer el f_a y obtener el f_b. Realizando esta operación - varias veces pueden quedar delimitadas en forma aproximada las áreas de mercado de cada proyecto.

11.- Contando con los siguientes datos, determinar el coeficiente de elasticidad-ingreso del consumo de cemento.

Concepto	1 9 6 2	1 9 6 7
Ingreso Nacional (a precios constantes de 1950)	$ 62 353 Millones	$ 63 227 Millones
Población	16 519 120 Hab.	18 575 527 Hab.
Importación de cemento	435 343 Ton.	60 000 Ton.
Exportación de cemento	---	---
Existencias al comienzo del año	---	5 000 Ton.
Existencias al final del año	1 000 Ton.	705 Ton.
Producción de cemento	1 251 770 Ton.	1 659 321 Ton.

Consumos globales reales:

$$Q\,1962 = 1\ 251\ 770 + 435\ 343 - 1\ 000 = 1\ 686\ 113$$

$$Q\,1967 = 1\ 659\ 321 + 60\ 000 + 5\ 000 - 705 = 1\ 723\ 616$$

Consumo per cápita:

$$q\,1962 = \frac{1\ 686\ 113}{16\ 519\ 120} = 0.102 \text{ Ton/Hab.}$$

$$q\,1967 = \frac{1\ 723\ 616}{18\ 575\ 527} = 0.093 \text{ Ton/Hab.}$$

Ingreso per cápita:

$$y\,1962 = \frac{62\ 353\ 000\ 000}{16\ 519\ 120} = \$\ 3\ 780/\text{Hab.}$$

$$y\,1967 = \frac{63\ 227\ 000\ 000}{18\ 575\ 527} = \$\ 3\ 400/\text{Hab.}$$

Tasas de crecimiento:

$$r_q = \frac{\Delta q}{q} = \frac{0.093 - 0.102}{0.102} = -\,0.09$$

$$r_y = \frac{\Delta y}{y} = \frac{3\ 400 - 3\ 780}{3\ 780} = -\,0.10$$

Entonces

$$\epsilon_y(q) = \frac{-0.09}{-0.10} = +\,0.9$$

12.- Con los datos del ejemplo anterior, y considerando que en 1973 la población será de 23 000 000 habitantes y el ingreso per cápita será de \$ 4 000/Hab., determinar el posible consumo global de cemento.

Para el período de 1967 a 1973, las tasas de crecimiento son:

$$r_y = \frac{4\ 000 - 3\ 400}{3\ 400} = \frac{600}{3\ 400} = 0.176$$

Por lo tanto:

$$r_q = \epsilon_y(q) \times r_y = 0.9 \times 0.176 = 0.158$$

Por lo que el consumo per cápita de cemento en 1973 será de:

$$q_{1973} = 1.158 \times 0.093 = 0.108 \text{ Ton/Hab.}$$

y el consumo global real en ese año será de:

$$Q_{1973} = 23\ 000\ 000 \text{ hab} \times 0.108 \text{ ton/hab} = 2\ 484\ 000 \text{ ton.}$$

13.- Consideremos dos ciudades A y B, las cuales estan ligadas por un camino pavimentado de 100 Km de longitud, en el cual los automóviles circulan a una velocidad media de 70 K/Hr., los autobuses a 65 K/Hr. y los camiones a 60 K/Hr. El tránsito actual es de 2 500 vehículos por día, de los cuales el 50% corresponde a automóviles, el 15% a autobuses y el 35% restante a camiones.

Se pretende estudiar un proyecto carretero entre los mismos puntos A y B con mejores especificaciones y más corto, con objeto de disminuir los costos de transporte. De acuerdo al proyecto, los automóviles podrán circular por este camino a una velocidad media de 90 K/Hr., los autobuses a 85 K/Hr. y los camiones a 70 K/Hr. La longitud de este camino será de 70 Km y se espera que aproximadamente el 40% del tránsito se podrá desviar del camino antiguo al propuesto (dato obtenido con ayuda de estudios de origen y destino)

El tránsito en el camino actual esta creciendo a una tasa del 8% anual y se espera que se mantenga hasta el primer año de operación de la obra, a partir del cual se esperan incrementos del 10%, 12%, 13%, 11%, 9% hasta volverse a estabilizar a 8% anual.

El costo horario por vehículo y operadores se ha estimado en $ 6.15 para automóviles, $ 32.97 para autobuses y $ 32.97 para camiones y el costo de tracción por vehículo-kilómetro se ha estimado en $ 0.30 para automóviles, $ 0.54 para autobuses y $ 0.73 para camiones.

Los costos considerados son los siguientes:

Inversión	$	1 000 000/Km. a realizar en dos años, en el primer año 40% y en el segundo 60%.
Conservación	$	20 000/Km/año
Reconstrucción al año 9		90 000/Km.
Reconstrucción al año 16		150 000/Km.

Obtener la relación beneficios-costos del proyecto, considerando como ventajas los ahorros en tiempo de recorrido y los ahorros en tracción por menor longitud que tendrán los usuarios durante un horizonte económico de 20 años de operación y considerando una tasa de actualización del 12% anual.

Cálculo del ahorro unitario

	Automóviles	Autobuses	Camiones
Tiempo de recorrido			
Camino actual	1.43 Hs.	1.54 Hs.	1.67 Hs.
Camino propuesto	0.78	0.82	1.00
Ahorro	0.65	0.72	0.67
Longitud			
Camino actual	100 Km.	100 Km.	100 Km.
Camino propuesto	70	70	70
Ahorro	30	30	30
Costos			
Horario por vehículo y operadores	6.15	32.97	32.97
De tracción por vehículo-kilómetro	0.30	0.54	0.73
Composición del tránsito	0.50	0.15	0.35

Ahorro unitario anual por tiempo

Automóviles	0.65 x 6.15 x 0.50 x 365 =	$	729.55
Autobuses	0.72 x 32.97 x 0.15 x 365 =		1 295.75
Camiones	0.67 x 32.97 x 0.35 x 365 =		2 821.45
	Subtotal		4 846.75

Ahorro unitario anual por costos de tracción

Automóviles	30 x 0.30 x 0.50 x 365 =	$	1 642.50
Autobuses	30 x 0.54 x 0.15 x 365 =		886.95
Camiones	30 x 0.73 x 0.35 x 365 =		2 797.80
	Subtotal		5 327.25

Ahorro unitario anual $ 10 174.00

Proyección del Tránsito y Beneficios
(en miles de pesos)

Año	Factor	Tránsito	Beneficios	
0	1.00	1 000	—	
1	1.08	1 080	—	Etapa de construcción
2	1.08	1 166	—	
3	1.08	1 259	12 809	1er. año de operación
4	1.10	1 385	14 090	
5	1.12	1 551	15 781	
6	1.13	1 753	17 835	
7	1.11	1 945	19 788	
8	1.09	2 120	21 569	
9	1.08	2 290	23 294	
10	1.08	2 473	25 158	
11	1.08	2 671	27 171	
12	1.08	2 885	29 344	
13	1.08	3 115	31 691	
14	1.08	3 364	34 226	
15	1.08	3 633	36 964	
16	1.08	3 924	39 921	
17	1.08	4 238	43 117	
18	1.08	4 577	46 566	
19	1.08	4 943	50 291	
20	1.08	5 338	54 314	
21	1.08	5 765	58 659	
22	1.08	6 226	63 343	

En lo que se refiere a costos se tendrá:

Inversión: $ 1 000 000/Km x 70 Km. =	$ 70 000 000	
Año 1	28 000 000	(40%)
Año 2	42 000 000	(60%)
Conservación anual $ 20 000 x 70 =	1 400 000	
Reconstrucción al año 9 90 000 x 70 =	6 300 000	
Reconstrucción al año 16 150 000 x 70 =	10 500 000	

Determinación de la relación beneficios-costos
(Miles de pesos)

Año	Factor Act.	Beneficios	Beneficios Act.	Costos	Costos Actualizados
0	1.00	--	--	--	--
1	1.12	--	--	28 000	25 000
2	1.25	--	--	42 000	33 600
3	1.40	12 809	9 149	1 400	1 000
4	1.57	14 090	8 974	1 400	892
5	1.76	15 781	8 966	1 400	795
6	1.97	17 835	9 053	1 400	711
7	2.21	19 788	8 954	1 400	633
8	2.47	21 569	8732	1 400	567
9	2.77	23 294	8 409	1 400	505
10	3.10	25 158	8 115	1 400	451
11	3.48	27 171	7 807	6 300	1 810
12	3.90	29 344	7 524	1 400	359
13	4.36	31 691	7 268	1 400	321
14	4.89	34 226	7 000	1 400	286
15	5.47	36 964	6 757	1 400	256
16	6.13	39 921	6 512	1 400	228
17	6.86	43 117	6 285	1 400	204
18	7.69	46 566	6 055	10 500	1 365
19	8.61	50 291	5 841	1 400	162
20	9.64	54 314	5 634	1 400	145
21	10.80	58 659	5 431	1 400	129
22	12.10	63 343	5 235	1 400	115
Sumas			147 701		68 534

$$\text{Relación beneficios-costos} = \frac{147\ 701}{68\ 534} = 2.15 \quad \text{(mayor que 1)}$$

De esto se deduce que la obra es conveniente, ya que la relación es mayor que la unidad; sin embargo, deberá compararse con otras obras para saber-su orden de prioridad.

$$\text{Beneficio neto actualizado} = 147\ 701\ 000 - 68534\ 000 = \$\ 79\ 167\ 000$$

Por tanteos puede calcularse la tasa interna de retorno, variando la tasa de actualización hasta igualar la suma de beneficios actualizados con la-suma de costos actualizados.

B I B L I O G R A F I A

1 Manual de Proyectos de Desarrollo Económico.- Naciones Unidas.

2 Apuntes de la clase de Evaluación de Proyectos de la División de Estudios Superiores de la Facultad de Ingeniería de la U.N.A.M., impartida por el Ing. Alejandro González Cueto.

3 La Evaluación de Proyectos de Desarrollo Económico.- John A. King. Banco Mundial, Editorial Tecnos.

4 Carreteras en los países en vía de desarrollo.- E. Odier.- Editorial Eyrolles.

centro de educación contínua
facultad de ingeniería, unam

PROGRAMACION DE INVERSIONES

ANALISIS DE INVERSIONES, MODELOS DETERMINISTAS

ING. JESUS ACOSTA FLORES .

Tacuba 5, primer piso México 1, D.F.
Teléfonos: 521-30-95 y 513-27-95

2.- Proyecto No. 1

$$VPN = -100 + \frac{30}{1.08} + \frac{30}{(1.08)^2} + \frac{30}{(1.08)^3} + \frac{10}{(1.08)^4} + \frac{10}{(1.08)^5}$$

$$= -100 + 30 \times (0.92593 + 0.85734 + 0.79383) + 10(0.73503 + .68\ldots$$

$$= -100 + 30(2.57710) + 10(1.41561)$$

$$= -100 + 77.313 + 14.1561 = -100 + 91.4691 = -8.5309$$

Proyecto No. 1 se rechaza porque su valor presente neto es negativo.

Proyecto No. 2

$$VPN = -100 + \frac{20}{1.08} + \frac{20}{(1.08)^2} + \ldots + \frac{20}{(1.08)^{10}} + \frac{10}{(1.08)^{11}} + \frac{10}{(1.08)^{12}} + \ldots + \frac{10}{(\ldots)}$$

$$= -100 + 20(6.71008) + 10(1.84940)$$

$$= -100 + 134.2016 + 18.4940 = +52.6956$$

Como $VPN > 0$ se acepta el proyecto 2.

Proyecto No. 3

$$VPN = -3763 + \frac{200}{1.08} + \frac{600}{(1.08)^2} + \frac{1000}{(1.08)^3} + \frac{1600}{(1.08)^4} + \frac{2000}{(1.08)^5}$$

$$= -3763 + 200 \times .92593 + 600 \times 0.85734 + 1000 \times 0.79383 + 1600 \times$$
$$\times 0.73503 + 2000 \times 0.68058 =$$

$$= -3763 + 185.186 + 514.404 + 793.830 + 1176.048 + 1361.160$$

$$= 267.628 > 0$$ por lo que se acepta el proyecto 3.

Tasa interna de rendimiento.

$$-100 + \frac{30}{1+i} + \frac{30}{(1+i)^2} + \frac{30}{(1+i)^3} + \frac{10}{(1+i)^4} + \frac{10}{(1+i)^5} = 0$$

si $X = \frac{1}{1+i}$ entonces $10X^5 + 10X^4 + 30X^3 + 30X^2 + 30X - 100 = 0$

$$X^5 + X^4 + 3X^3 + 3X^2 + 3X - 10 = 0$$

$$\begin{array}{cccccc|l} 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & -10 & X = 0.96 \\ & 0.96 & 1.88 & 4.68 & 7.38 & 9.98 & \\ \hline 1 & 1.96 & 4.88 & 7.68 & 10.38 & -0.02 & \doteq 0 \end{array}$$

$$i = \frac{1}{X} - 1$$

$$\therefore i = 0.04$$

como la TIR (4%) es menor que el costo del capital (8%) se rechaza el proyecto 1.

Proyecto 2.

$$VPN = -100 + 10\left[\frac{(1+i)^{15}-1}{i(1+i)^{15}} + \frac{(1+i)^{10}-1}{i(1+i)^{10}}\right]$$

como VPN = 0 entonces $10 = \dfrac{(1+i)^{15}-1+(1+i)^{15}-(1+i)^{5}}{i(1+i)^{15}}$

$$10i(1+i)^{15} = 2(1+i)^{15} - (1+i)^{5} - 1$$

i	$(1+i)^{15}$	$(1+i)^{5}$	$10i(1+i)^{15}$	$2(1+i)^{15}$	$2(1+i)^{15}-(1+i)^{5}-$
0.17	10.5	2.19	17.8	21	17.81

$\therefore\ i = 17\% >$ costo del capital $= 8\%$ de manera que se acepta el proyecto 2.

Proyecto No. 3.

$$-3763 + \frac{200}{1+i} + \frac{600}{(1+i)^2} + \frac{1000}{(1+i)^3} + \frac{1600}{(1+i)^4} + \frac{2000}{(1+i)^5} = 0$$

$x = \dfrac{1}{1+i}$; $2000x^5 + 1600x^4 + 1000x^3 + 600x^2 + 200x - 3763 = 0$

$$x^5 + 0.8x^4 + 0.5x^3 + 0.3x^2 + 0.1x - 1.8815 = 0$$

1	0.8	0.5	0.3	0.1	-1.8815	$x = 0.9075$
	0.9075	1.55	1.86	1.96	+1.87	
1	1.7075	2.05	2.16	2.06	-0.0115 $\doteq 0$	

$TIR = \dfrac{1}{x} - 1 = 0.10$; $10\% > 8\%$ se acepta el proyecto 3.

Problema 3.

Notación: $X_i = \begin{cases} 1 & \text{se decide invertir en el proyecto } i, \\ 0 & \text{la decisión es no invertir en el proyecto } i. \end{cases}$

$$\text{Max VPN} = 3984x_1 + 1294x_2 + 4767x_3 + 11086x_4 + 12370x_5 + 11642x_6 + 6514x_7$$

s.a.

$$a, \begin{cases} 15x_1 + 20x_2 + 10x_3 + 10x_4 + 15x_5 + 10x_6 + 12x_7 \leq 40 \\ 4180x_1 + 1650x_2 + 4230x_3 + 1585x_4 + 3150x_5 + 4065x_6 + 4230x_7 \leq 15000 \\ 695x_1 + 875x_3 + 5170x_4 + 3375x_5 + 25x_6 \leq 15000 \\ 175x_1 + 600x_3 + 8630x_4 + 10785x_5 + 11280x_6 + 3700x_7 \leq 12000 \end{cases}$$

$$b, \quad 1600x_1 + 600x_2 + 1600x_3 + 600x_4 + 600x_5 + 600x_6 + 2000x_7 \leq 3500$$

c) $1600x_1 + 600x_2 + 400x_3 + (-19400x_4) - 500x_5 - 1000x_6 + 2000x_7 \leq 0$

Nota: Proyecto 4 dice 20 000, para que concuerde con el número de personas desplazadas se corrigió éste a 19400 $(600 - 20000 = -19400)$

d) $$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6 + x_7 \leq 0$$

e) $$\begin{cases} x_4 + x_5 + x_6 \leq 1 \\ x_1 + x_3 \leq 1 \end{cases}$$

f) $$-x_1 - x_3 + x_4 \leq 0$$

g) $x_3 + x_7 \geq 1$

Se está considerando la unión (ó uno ó el otro, ó ambos)

11 restricciones y 7 variables binarias.

Se utilizará el método de Lawler y Bell.

$$\text{Max VPN} = \min - \text{VPN}$$

Se hace el siguiente cambio de variables para que todos los coeficientes en la función objetivo sean positivos y estén ordenados de mayor a menor. $x_1 = 1 - y_2$, $x_2 = 1 - y_1$, $x_3 = 1 - y_3$, $x_4 = 1 - y_5$, $x_5 = 1 - y_7$, $x_6 = 1 - y_6$, $x_7 = 1 - y_4$

$$\min -VPN = 12\,370\, y_7 + 11\,642\, y_6 + 11\,086\, y_5 + 6\,514\, y_4 + 4\,767\, y_3 + 3\,581\, y_2 + 1\,294\, y_1 - 51\,657$$

$$a.\begin{cases} 15y_7 + 10y_6 + 10y_5 + 12y_4 + 10y_3 + 15y_2 + 20y_1 - 52 \geq 0 \\ 3\,150y_7 + 4065y_6 + 1585y_5 + 4\,230y_4 + 4230y_3 + 4180y_2 + 1650y_1 - 8\,050 \geq 0 \\ 3\,375y_7 + 25y_6 + 5170y_5 + \quad + 875y_3 + 695y_2 + 4\,860 \geq 0 \\ 10\,785y_7 + 11\,280y_6 + 8\,630y_5 + 3\,700y_4 + 600y_3 + 175y_2 - 23\,170 \geq 0 \end{cases}$$

$$b.\ 600y_7 + 600y_6 + 600y_5 + 2\,000y_4 + 1600y_3 + 1600y_2 + 600y_1 - 4\,100 \geq 0$$

$$c.\ -500y_7 - 1000y_6 - 19400y_5 + 2\,000y_4 + 400y_3 + 1600y_2 + 600y_1 + 16\,300 \geq 0$$

$$d.\ -y_7 - y_6 - y_5 + y_4 - y_3 + y_2 + y_1 + 1 \geq 0$$

$$e.\begin{cases} + y_7 + y_6 + y_5 - 2 \geq 0 \\ + y_3 + y_2 - 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$..\ + y_5 - y_3 - y_2 + 1 \geq 0$$

$$g.\ y_4 + y_3 + 1 - 2 \leq 0$$

las restricciones se pueden escribir como:

$$a.\begin{cases} (15, 10, 10, 12, 10, 15, 20) - 52 \geq 0 \\ (3150, 4065, 1585, 4230, 4230, 4180, 1650) - 8\,050 \geq 0 \\ (3375, 25, 5170, 0, 875, 695, 0) + 4860 \geq 0 \\ (10\,785, 11280, 8630, 3700, 600, 175, 0) - 23\,170 \geq 0 \end{cases}$$

$$b.\ (600, 600, 600, 2000, 1600, 1600, 600) - 4\,100 \geq 0$$

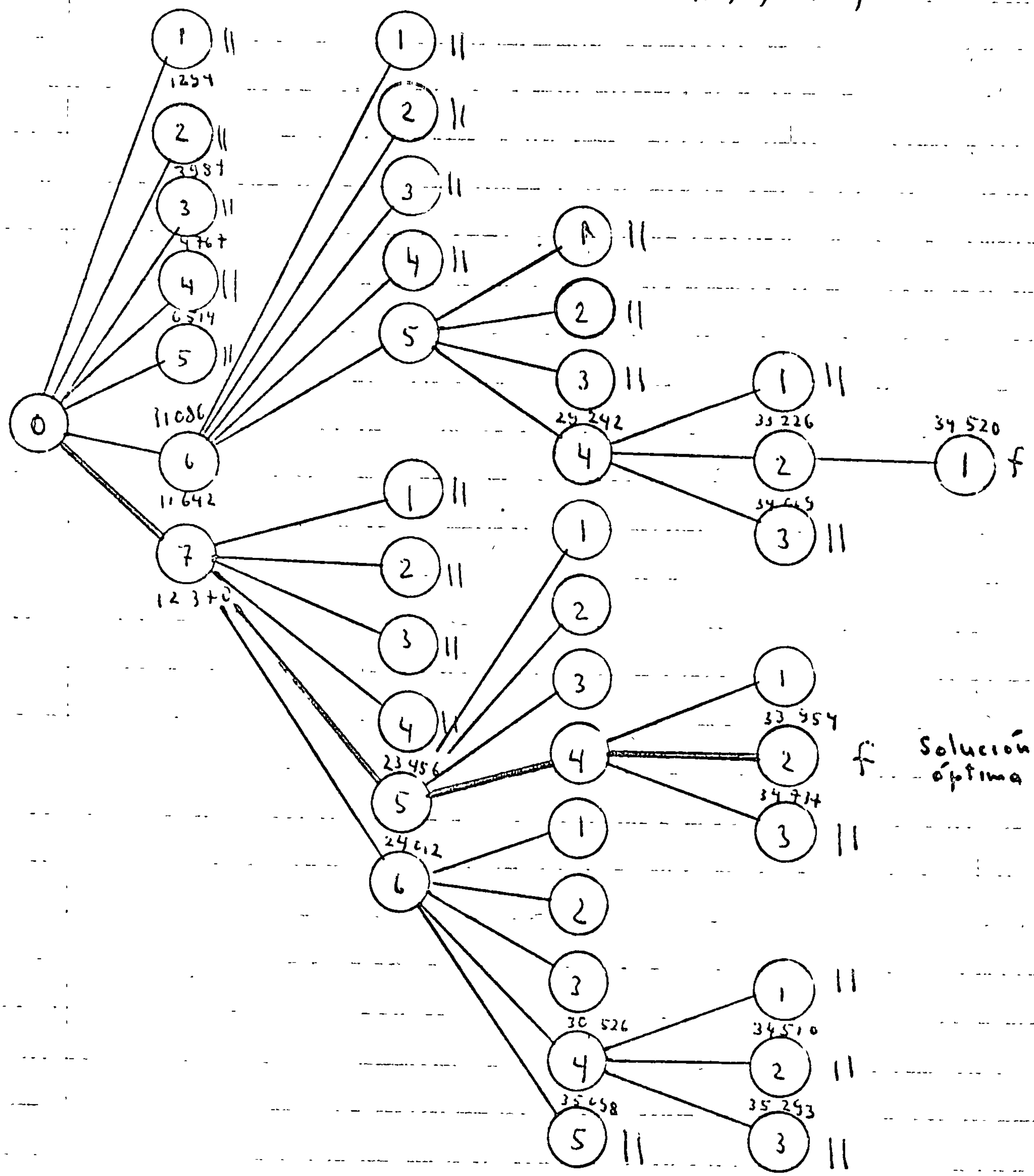
$$c.\ (0, 0, 0, 2000, 400, 1600, 600) + 16\,300 - (500, 1000, 19400, 0, 0, 0, 0) \geq 0$$

$$d.\ (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1) + 1 - (1, 1, 1, 0, 1, 0, 0) \geq 0$$

$$e.\begin{cases} (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0) - 2 \geq 0 \\ (0, 0, 0, 0, 1, 1, 0) - 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$f.\ (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0) + 1 - (0, 0, 0, 0, 1, 1, 0) \geq 0$$

9. $1 \quad - \quad (0,0,0,1,1,0,0) \geq 0$



$y_7 = y_5 = y_4 = y_2 = 1$

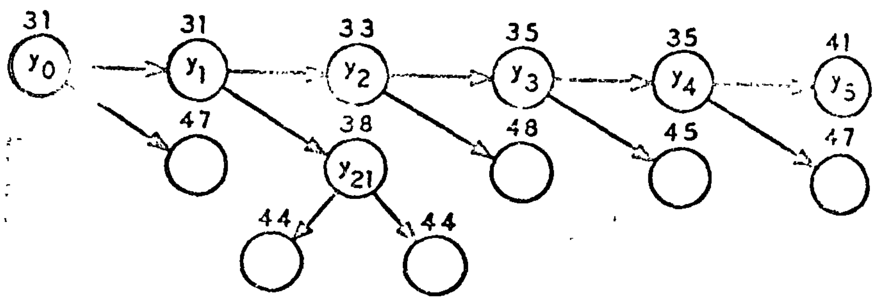
$y_6 = y_3 = y_1 = 0$ por lo tanto $x_1 = 1,\ x_3 = 1,\ x_6 = 1$

$x_1 = x_4 = x_5 = x_7 = 0$

O sea la solución es invertir en los proyectos <u>1, 3 y 6</u>

Nótese que esta solución coincide con la obtenida en el jemplo 14.3.3, naturalmente no necesariamente debe existir esta coincidencia.

El árbol correspondiente es:



Se presenta el diagrama de flujo en la rutina RA-4 que sigue el algoritmo al minimizar la cantidad de tiempo ocioso o la duración total del proceso.

14.4 Problemas cuyas variables son enteras

El método que se verá a continuación resuelve el problema de minimización, sujeto a restricciones lineales y cuyas variables pueden adquirir solamente los valores 0 ó 1 (variables binarias). Cuando se tenga una variable x_j entera, ésta puede representarse como la suma de variables binarias:

$$x_j = x_{j1} + 2x_{j2} + \ldots + 2^{k-1} x_{jk}$$

a) Método de Lawler y Bell

Es aplicable a cualquier problema que pueda ser representado por un modelo que tenga la siguiente forma:

$$\text{minimizar} \qquad g_0(\bar{x}) .$$

sujeto a:

$$g_{11}(\bar{x}) - g_{12}(\bar{x}) \geq 0$$

$$g_{21}(\bar{x}) - g_{22}(\bar{x}) \geq 0$$

$$\text{------------}$$

$$g_{m1}(\bar{x}) - g_{m2}(\bar{x}) \geq 0$$

donde $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

y $x_j = 0 \text{ ó } 1 \ (j = 1, 2, \ldots, n)$

con la restricción adicional que cada una de las funciones $g_0, g_{11}, \ldots, g_{m2}$ es monotónicamente no decreciente en cada una de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

No hay ninguna dificultad para satisfacer esa restricción ni en la función objetivo ni en las restricciones. Por ejemplo si $g_0 = x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 2x_4 + x_5$ basta con hacer un cambio de variables: $x_3 = x_1 - y_3$ y $x_4 = 1 - y_4$ con lo cual $g_0 = x_1 + 3x_2 + 5y_3 + 2y_4 + x_5 - 7$ cumple con ese requisito. Igualmente si g_1 es $2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 + 2x_6 - 5 \geq 0$ se puede escribir como:

$(2x_1 + 3x_2 + x_4 + 2x_6) - (3x_3 + x_5 + 5) \geq 0$ donde g_{11} y g_{12} son ya monotónicamente no decrecientes.

Manera de ramificar. Se describirá una ramificación diferente a la utilizada por Lawler y Bell, con la cual se reduce el número de nudos por analizar aún cuando se aumenta el requerimiento de memoria en computadora.

Hágase $\bar{x} = (x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1)$

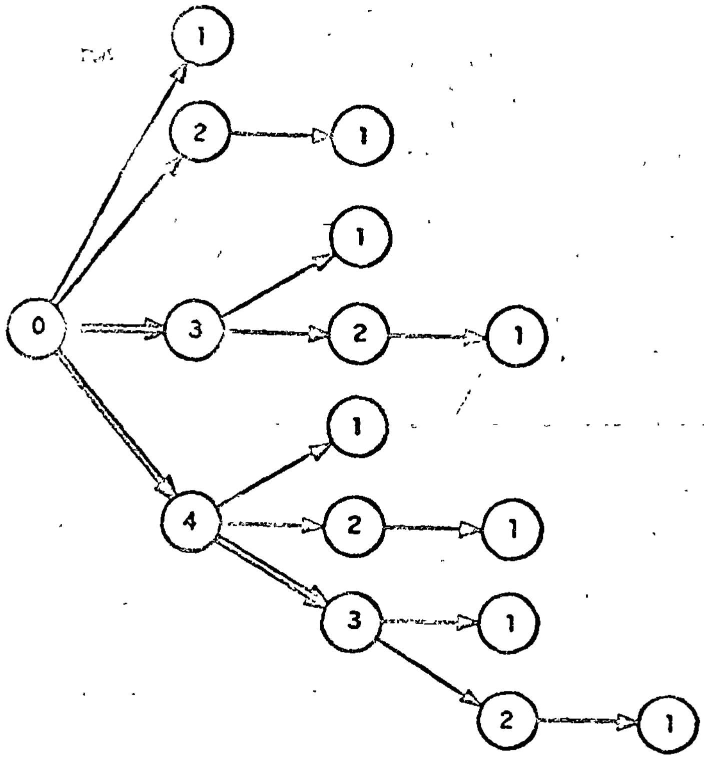
La raíz representa a $\bar{x} = (0, 0, \ldots, 0, 0)$. De la raíz salen n ramas cuyos nudos se etiquetan de 1 a n. Cada nudo j se ramifica con $j - 1$ ramas, volviéndose a etiquetar los nudos de 1 a $j - 1$.

Como un ejemplo considérese $\bar{x} = (x_4, x_3, x_2, x_1)$

El nudo 3 en la rama 0 - 3 representa al intervalo cuyo vector inicial tiene $x_3 = 1$ y cuyo vector final tiene $x_3 = x_2 = x_1 = 1$ o sea el intervalo definido por $[(\bar{x}_i, \bar{x}_f)] = [(0, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 1)]$.

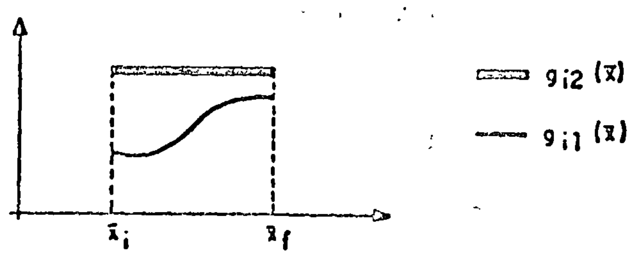
El nudo 3 en la rama 0 - 4 - 3 indica que el vector inicial tiene $x_4 = x_3 = 1$ y que el final adicionalmente tiene $x_j = 1$ para toda $j < 3$. $[(\bar{x}_i, \bar{x}_f)] = [(1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1)]$

De lo anterior se ve que en el árbol está la enumeración total de soluciones.



Manera de ver si un nudo no tiene soluciones factibles o que mejoren la solución mínima conocida. El criterio es comparar $g_{i1}(\bar{x}_j)$ con $g_{i2}(\bar{x}_i)$.

Si para alguna restricción $g_{i1}(\bar{x}_j) < g_{i2}(\bar{x}_i)$ no existe ninguna solución factible ya que $g_{i1}(\bar{x}) - g_{i2}(\bar{x}) < 0$ para toda $\bar{x}$ en $(\bar{x}_i, \bar{x}_j)$. Luego se debe cancelar el nudo donde suceda ello. La siguiente figura ilustra lo mencionado.



Un nudo representa un intervalo de vectores $\bar{x}$ para los que el valor de la función objetivo no disminuye, por lo que ésta valuada para $\bar{x}_i$ es el mínimo dentro del intervalo. Por tal motivo si $g_0(\bar{x}_i)$ es

mayor que algún $g_0(\bar{x})$ donde $\bar{x}$ es factible, deberá también cancelarse el nudo donde $\bar{x}_i$ es vector inicial.

Forma de acotar. Cada nudo se acotará con $g_0(\bar{x}_i)$.

Se ramificará a partir del nudo de menor cota. Si ahí $\bar{x}_i$ es factible es la solución óptima y termina el algoritmo.

Se presenta su diagrama de flujo en la rutina RA-5.

Ejemplo 14.4.1. Se debe decidir sobre cuáles proyectos invertir. Cada proyecto se termina en tres períodos de tiempo con diferentes desembolsos en cada uno de ellos. Sean los proyectos P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5 cuando se dispone de \$45 000, 30 000 y 50 000 en cada período.

Las inversiones en cada período son:

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
Período 1	10 000	13 000	21 000	20 000	6 000
Período 2	5 000	8 000	9 000	10 000	12 000
Período 3	16 000	15 000	13 000	14 000	23 000

Los beneficios que se obtendrán son \$3 000, 4 000, 5 000, 1 000 y 6 000 respectivamente para P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5.

Solución: Este problema puede presentarse como:

$$\max \quad z = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 + 6x_5$$

s.a.

$$10x_1 + 13x_2 + 21x_3 + 20x_4 + 6x_5 \le 45$$

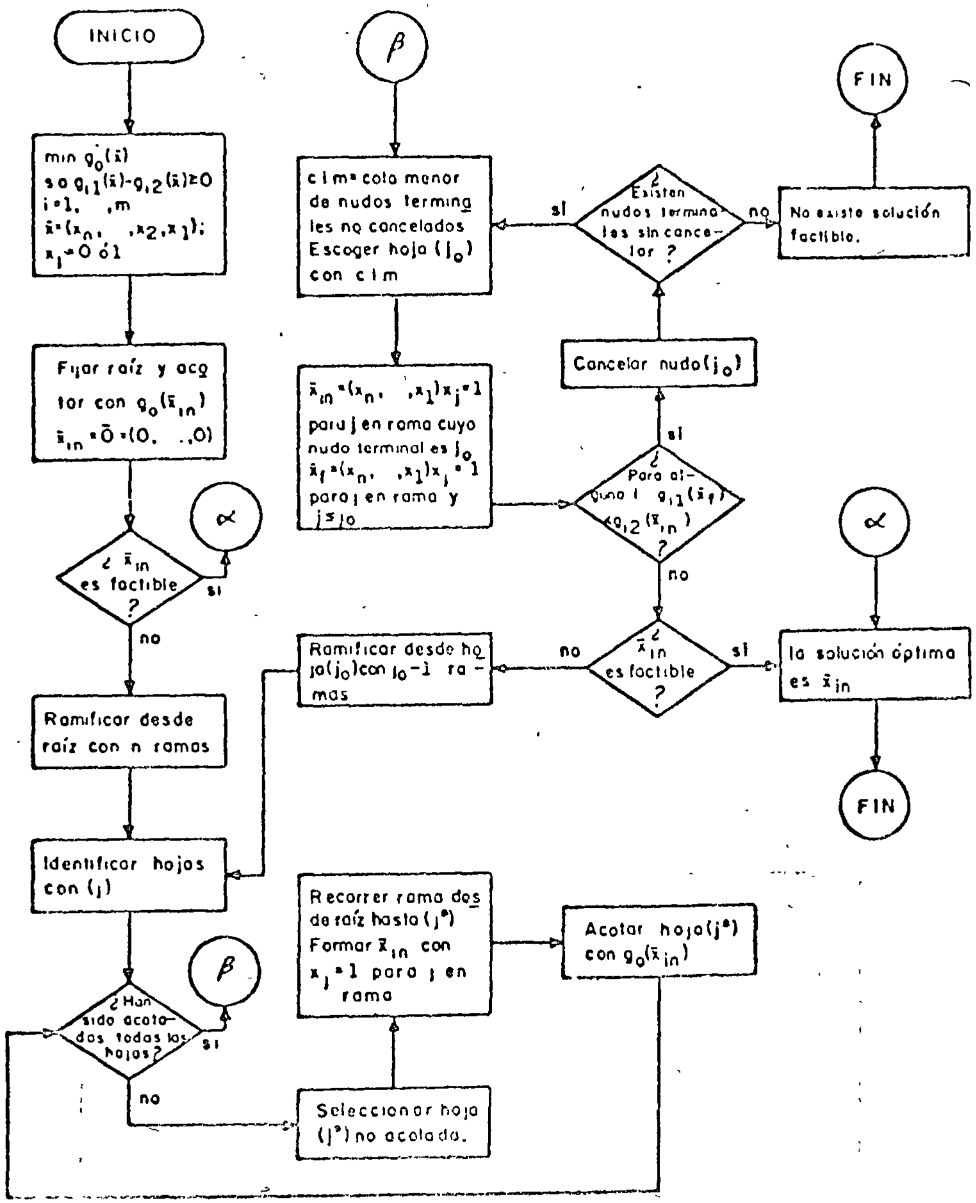
$$5x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 10x_4 + 12x_5 \le 30$$

$$16x_1 + 15x_2 + 13x_3 + 14x_4 + 23x_5 \le 50$$

$$x_j = 0 \text{ ó } 1$$

$x_j = 1$ indica que el proyecto P_j es aceptado. El caso contrario implicará $x_j = 0$.

Ya que el método es para minimizar, recordando que max z = min $(-z)$ se obtiene:



(Rutina RA-5)

$$\min(-z) = -3x_1 - 4x_2 - 5x_3 - x_4 - 6x_5$$

Para que la función sea monotónicamente no decreciente se hará el cambio de variables $x_1=1-y_1'$, $x_2=1-y_2'$, $x_3=1-y_3'$, $x_4=1-y_4'$, $x_5=1-y_5'$ min $(-z) = 3y_1' + 4y_2' + 5y_3' + y_4' + 6y_5' - 19$

Normalmente es conveniente ordenar los coeficientes en la función objetivo de tal manera que $C_j \geq C_{j-1}$; $j = n, \ldots 2$

$$\min(-z) = 6y_5' + 5y_3' + 4y_2' + 3y_1' + y_4' - 19$$

Haciendo $y_5 = y_5', y_4 = y_3', y_3 = y_2', y_2 = y_1'$ y $y_1 = y_4'$ el problema es:

$$\min(-z) = 6y_5 + 5y_4 + 4y_3 + 3y_2 + y_1 - 19$$

s.a.

$$6y_5 + 21y_4 + 13y_3 + 10y_2 + 20y_1 - 25 \geq 0$$

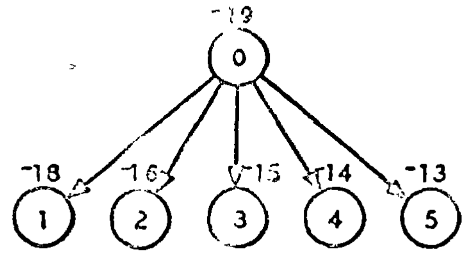
$$12y_5 + 9y_4 + 8y_3 + 5y_2 + 10y_1 - 14 \geq 0$$

$$23y_5 + 13y_4 + 15y_3 + 16y_2 + 14y_1 - 31 \geq 0$$

$$y_j = 0 \text{ ó } 1$$

Siguiendo el diagrama de flujo $\bar{y}_{in} = (0, 0, 0, 0, 0)$ $g_0(\bar{y}_{in}) = \ldots$ $\bar{y}_{in}$ no es factible, por lo que desde la raíz saldrán 5 ramas. Las hojas se identifican con 1, 2, 3, 4 y 5.

nudo	j en rama	$y_j = 1$	$\bar{y}_{in}$	Cota = $g_0(\bar{y}_{in})$
1	1	y_1	(00001)	-18
2	2	y_2	(00010)	-16
3	3	y_3	(00100)	-15
4	4	y_4	(01000)	-14
5	5	y_5	(10000)	-13



c.i.m = − 18, j_0 = 1, $\bar{y}_{i*}$ = (00001), $\bar{y}_j$ = (00001). $g_{11}(\bar{y}_j) < g_{12}(\bar{y}_{i*})$, 20 < 25 ∴

∴ cancelar nudo 1.

c.i.m = − 16, j_0 = 2, $\bar{y}_{i*}$ = (00010), $\bar{y}_j$ = (00011) $g_{11}(\bar{y}_j) \nless g_{12}(\bar{y}_{i*})$, 30 ≮ 25

$g_{21}(\bar{y}_j) \nless g_{22}(\bar{y}_{i*})$, 15 ≮ 15

$g_{31}(\bar{y}_j) < g_{32}(\bar{y}_{i*})$, 30 < 31 ∴

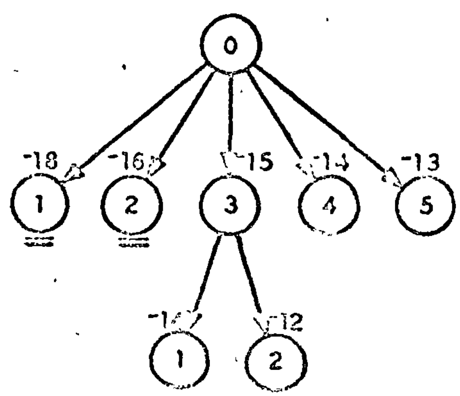
∴ cancelar nudo 2.

c.i.m = − 15, j_0 = 3, $\bar{y}_{i*}$ = (00100), $\bar{y}_j$ = (00111) 43 ≮ 25; se investiga si $\bar{y}_{i*}$ es factible.

23 ≮ 14

45 ≮ 31

(00100) no es factible, de manera que desde 3 se hacen 3-1 = 2 ramificaciones. Se identifican hojas con 1, 2.



nudo	j en rama	$y_j = 1$	$\bar{y}_{i*}$	Cota = $g_0(\bar{y}_{i*})$
1	3,1	y_3, y_1	(00101)	-14
2	3,2	y_3, y_2	(00110)	-12

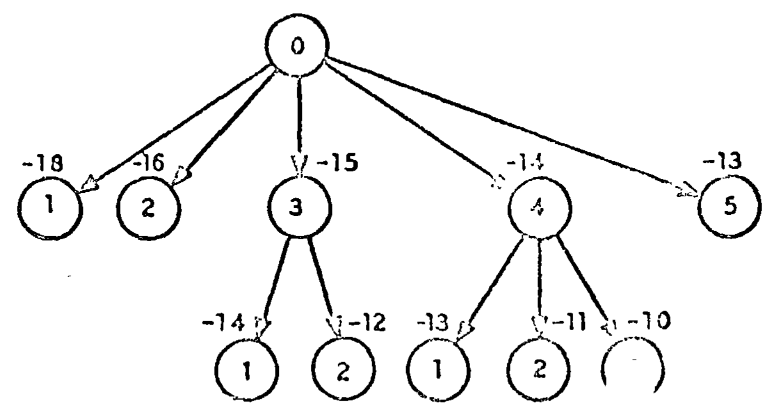
c.i.m = − 14 j_0 = 1 $\bar{y}_{i*}$ = (00101) $\bar{y}_j$ = (00101) $g_{31}(\bar{y}_j) < g_{32}(\bar{y}_{i*})$, 29 < 31 ∴

∴ cancelar nudo 1.

c.i.m = − 14 j_0 = 4 $\bar{y}_{i*}$ = (01000) $\bar{y}_j$ = (01111) ninguna $g_{i1}(\bar{y}_j)$ es menor que $g_{i2}(\bar{y}_{i*})$.

se investiga si $\bar{y}_{i*}$ es factible: no lo es. Así desde 4 salen 4-1 = 3 ramas, identificándose los nudos con 1, 2, 3.

nudo	j en rama	$y_j = 1$	$\bar{y}_{i*}$	Cota = $g_0(\bar{y}_{i*})$
1	4,1	y_4, y_1	(01001)	-13
2	4,2	y_4, y_2	(01010)	-11
3	4,3	y_4, y_3	(01100)	-10



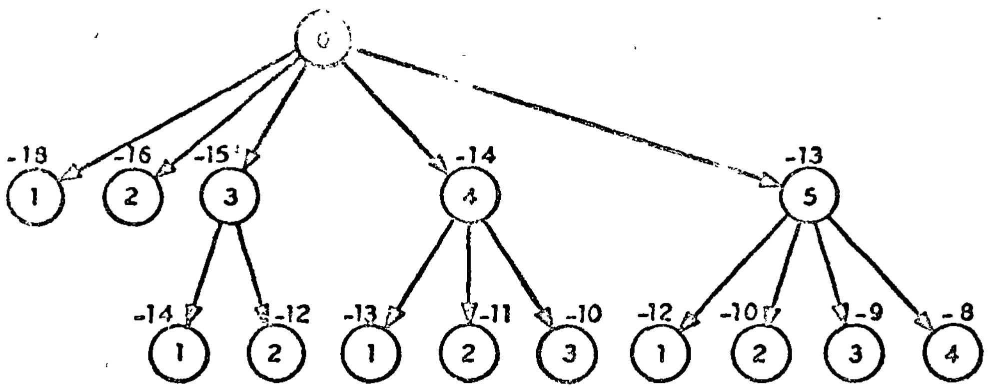
c.i.m = − 13 $j_0 = 1$ $\bar{y}_{1a} = (01001)$ $\bar{y}_f = (01001)$ $g_{21}(\bar{y}_f) < g_{12}(\bar{y}_{1a})$ $27 < 31$ ∴

∴ cancelar nudo 1

c.i.m = − 13 $j_0 = 5$ $\bar{y}_{1a} = (10000)$ $\bar{y}_f = (11111)$ no existen $g_{1f}(\bar{y}_f)$ menores

que $g_{12}(\bar{y}_{1a})$

$\bar{y}_{1a}$ no es factible. De 5 saldrán $5 - 1 = 4$ ramas. Se identifican con 1, 2, 3, 4.



nudo	j en rama	$y_j = 1$	$\bar{y}_{1a}$	Cota = $g_0(\bar{y}_{1a})$
1	5,1	y_5, y_1	(10001)	-12
2	5,2	y_5, y_2	(10010)	-10
3	5,3	y_5, y_3	(10100)	-9
4	5,4	y_5, y_4	(11000)	-8

c.i.m = − 12 $j_0 = 1$ $\bar{y}_{1a} = (10001)$ $\bar{y}_f = (10001)$; no existen $g_{11}(\bar{y}_f)$ menores

que $g_{12}(\bar{y}_{1a})$.

(10001) es factible puesto que verifica las tres restricciones. Como ninguna cota es inferior a -12 $\bar{y} = (10001)$ es la solución óptima.

Haciendo la conversión $y_1' = y_2 = 0,\ y_2' = y_3 = 0,\ y_3' = y_4 \ldots,\ y_4' = y_1 = 1,$

$y_5' = y_5 = 1.$

$\bar{y}' = (0,0,0,1,1),\ \bar{x} = (1,1,1,0,1)$. Luego debe invertirse en los proyectos P_1, P_2 y P_3.

b) Método de Ramificación y Doble acotación

Este método fue elaborado por el Dr. Ochoa Rosso. Resuelve problemas cuyas variables son binarias transformándolos en problemas mixtos. Por ejemplo:

$$\max z = 2y_1 + 3y_2 + y_3 + y_4$$

s.a.

$$4y_1 + y_2 + 3y_3 + 2y_4 \le 8$$

$$2y_1 + 4y_2 + 3y_3 + y_4 \le 9$$

$$y_1 + 3y_2 + y_3 + 2y_4 \le 6$$

$$y_j = 0 \text{ ó } 1$$

se debe transformar en:

$$\max z = \tfrac{2}{7}(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + \tfrac{3}{8}(x_{12} + x_{22} + x_{32})$$

$$+ \tfrac{1}{7}(x_{13} + x_{23} + x_{33}) + \tfrac{1}{5}(x_{14} + x_{24} + x_{34})$$

s.a.

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \le 8$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \le 9$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \le 6 \qquad 0 \le x_{ij} \le a_{ij}$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 7y_1$$

A LINEAL PROGRAMMING MODEL APPLIED TO THE AGRICULTURAL SECTOR OF THE MEXICAN ECONOMY.

Autor: DR. PEDRO REYES ORTEGA

Este modelo sirvió de base para el trabajo presentado por la Sra. Lic. Ifigenia Martínez de Navarrete, en el libro intitulado "Bienestar Campesino y Desarrollo Económico", Fondo de Cultura Económica 1971. El modelo es muy simple y fue examinado en la Universidad del Sur de California por un grupo de Economistas, el que hizo la presentación fue un servidor, quien es el que estructuró y estimó el modelo. Como nota aclaratoria, debemos decir que el modelo en su forma matemática no aparece en la publicación mencionada.

En síntesis, se trata de contestar a la siguiente pregunta: ¿Cuánto se requerirá del Sector Agrícola en cuanto a capital para los años 1970 y 1980, suponiendo condiciones de empleo pleno y niveles de productos agrícolas pre-fijados?

El tratamiento que se le da a este problema es a un nivel bastante agregado y las hipótesis son bastante fuertes. La técnica que se propone usar es de Programación Lineal con divisibilidad perfecta de los sectores productivos y sustitución perfecta entre ellos.

Aún cuando había diseñado modelos más ricos con hipótesis no tan fuertes, la poca confiabilidad y disponibilidad de los datos me obligaron a usar un modelo poco detallado.

Para empezar, el Sector Agrícola se dividió en 3 subsectores de acuerdo con ciertos rangos de productividad; así, la región 1 es la más altamente productiva, la región 2 es de productividad media y la región 3 es de productividad muy baja.

La parte medular de el modelo consiste en encontrar una solución, con costos mínimos de capital, que conlleve a empleo pleno como ya se dijo, que incremente el ingreso rural de los campesinos a través de incrementar sus productividades.

Hipótesis de Trabajo:

1) La tasa de crecimiento de la oferta de trabajo en cada región y la tasa migratoria se suponen constantes. Aunque esta hipótesis es demasiado fuerte, a nivel agregado, Benítez y Cabrera en su publicación "Proyecciones Demográficas

señalan que

en México 1965-1980, Banco de México, S.A.", el efecto neto sobre la tasa de crecimiento de la población rural en cada región es casi nula.

2) Se supone que toda la fuerza de trabajo agrícola se empleará.

3) Que la oferta de los productos agrícolas iguala a las demandas interna y externa. En caso de que exista un exceso de oferta se supone que el Gobierno la absorberá.

4) Para cada región existirá una función de producción lineal y homogénea con respecto al producto, el trabajo, y el capital.

5) Los coeficientes marginales de producción del trabajo y el capital evolucionarán de la siguiente manera:

a) Para la primera región los coeficientes en los años de 1970 y 1980 se obtendrán mediante extrapolación directa de sus valores en 1950 y 1960.

b) Para la segunda región, supondremos que para 1980 los coeficientes serán iguales a los de

1970 de la primera región.

c) Para la tercera región, supondremos que los coeficientes del año 2000 serán iguales a los del año 1970 de la primera región.

Esta hipótesis de trabajo con sus tres sub-hipótesis reflejan la aplicación de la teoría de la transcisión demográfica al Sector Agrícola.

6) El valor del producto en cada región se supone mayor o por lo menos igual a las proyecciones históricas para los años de 1970 y 1980.

C. The Mathematical Presentation.

Let us define the following:

$i=1,2,3$ number of regions

$j=1,2$ number of factors of production

V_i = product of the i-th region

$X_{i1} = L_i$ = labor used in the i-th region.

$X_{i2} = K_i$ = capital used in the i-th region

a_{i2} are the marginal coefficients of production

L = total supply of labor

b_i , c_i are predetermined constants

The model in its static form is as follows:

$$\text{MIN } K = K_1 + K_2 + K_3$$

subject to

$$a_{11}L_1 + a_{12}K_1 \geq V_1$$

$$a_{21}L_2 + a_{22}K_2 \geq V_2$$

$$a_{31}L_3 + a_{32}K_3 \geq V_3$$

$$L_1 \geq b_1$$

$$L_2 \geq b_2$$

$$L_3 \geq b_3$$

$$L = L_1 + L_2 + L_3$$

$$K_1 \geq c_1$$

$$K_2 \geq c_2$$

$$K_3 \geq c_3$$

Introducing the variable (t) time:

$$MIN\ K_t = K_{1t} + K_{2t} + K_{3t}$$

subject to

$$a_{11t}\ L_{1t} + a_{12t}\ K_{1t} \geqslant V_{1t}$$
$$a_{21t}\ L_{2t} + a_{22t}\ K_{2t} \geqslant V_{2t}$$
$$a_{31t}\ L_{3t} + a_{32t}\ K_{3t} \geqslant V_{3t}$$

$$L_{1t} \geqslant L_{1t-1}$$
$$L_{2t} \geqslant L_{2t-1}$$
$$L_{3t} \geqslant L_{3t-1}$$
$$L_t = L_{1t} + L_{2t} + L_{3t}$$
$$K_{1t} \geqslant K_{1t-1}$$
$$K_{2t} \geqslant K_{2t-1}$$
$$K_{3t} \geqslant K_{3t-1}$$

Where $a_{ijt} = a_{ij1960}\ e^{d_{ij}t} \quad \forall\ i, j$

d_{ij} are determined on basis of assumptions number five.

I want to emphasize that once one estimates the future values of the parameters, the problem is not longer dynamic, it is static.

IV. Estimation of the Parameters.

<u>Production Functions</u> (L is in 10^3 persons. P and K in 10^6 pesos of 1960).

Regions	1950	1960
first	$6.9653L_1 + 0.0470K_1 = V_1$	$6.7296L_1 + 0.1163K_1 = V_1$
second	$3.5218L_2 + 0.0922K_2 = V_2$	$4.3497L_2 + 0.0889K_2 = V_2$
third	$2.4028L_3 + 0.0429K_3 = V_3$	$2.3637L_3 + 0.0899K_3 = V_3$

The marginal coefficients were estimated by using the L.S. method with zero constant term,- due to the assumption of homogeneity

A summary of the statistical formulas is :

$$x_1 = b_{12}\, x_2 + b_{13}\, x_3 + u$$

where u is $N(0,\sigma)$

$$b_{12} = \frac{\Sigma x_1 x_2 \Sigma x_3^2 - \Sigma x_1 x_3 \Sigma x_2 x_3}{\Sigma x_2^2 \Sigma x_3^2 - (\Sigma x_2 x_3)^2}$$

$$b_{13} = \frac{\Sigma x_1 x_3 \Sigma x_2^2 - \Sigma x_1 x_2 \Sigma x_2 x_3}{\Sigma x_2^2 \Sigma x_3^2 - (\Sigma x_2 x_3)^2}$$

$$R^2 = \frac{b_{12} \Sigma x_1 x_2 + b_{13} \Sigma x_1 x_3}{\Sigma x_1^2}$$

$$r_{23}^2 = \frac{(\Sigma x_2 x_3)^2}{\Sigma x_2^2 \Sigma x_3^2}$$ (similarly for r_{12}^2 and r_{13}^2)

$$s_{b_{12}}^2 = \frac{1 - R^2}{(1-r_{23}^2)(n-2)} \cdot \frac{\Sigma x_1^2}{\Sigma x_2^2}$$

$$s_{b_{13}}^2 = \frac{\Sigma x_2^2}{\Sigma x_3^2} \cdot s_{b_{12}}^2$$

$$\sigma^2 = \frac{(1 - R^2) \Sigma x_1^2}{n - 2}$$

First Alternative.

It consists in perfect mobility of the labor force.

1970:

$$MIN\ K = K_1 + K_2 + K_3$$

subject to

$$6.4939L_1 + 0.1856K_1 \geq 8814$$

$$5.1776L_2 + 0.0856K_2 \geq 11149$$

$$2.3246L_3 + 0.1369K_3 \geq 13741$$

$$L_1 \geq 537$$

$$L_2 \geq 1179$$

$$L_3 \geq 3196$$

$$L = L_1 + L_2 + L_3 = 6196$$

$$K_1 \geq 17641$$

$$K_2 \geq 13859$$

$$K_3 \geq 20623$$

1980:

$$MIN\ K = K_1 + K_2 + K_3$$

subject to

$$6.2852L_1 + 0.2549K_1 \geq 13118$$

$$6.4939L_2 + 0.1856K_2 \geq 24590$$

$$3.7144L_3 + 0.1531K_3 \geq 28705$$

$$L_1 \geq 853$$

$$L_2 \geq 1924$$

$$L_3 \geq 3448$$

$$L = L_1 + L_2 + L_3 = 7967$$

$$K_1 \geq 17641$$

$$K_2 \geq 13859$$

$$K_3 \geq 41829$$

N o t e : The right sides of the last six inequalities are the obtained values in the solution of the first problem.

Second Alternative

Assuming that the mobility (of the labor force) between the different regions is zero, the first six inequalities are transformed in equalities. The values L_i are estimated from direct projection in each region. Due to these conditions, each region behaves independently from each other. The problems are solved by using simple algebra in which the unkowns are the K's.

For symbolic reasons, let us write the problems as if they were of linear programming:

1970.

$$\text{MIN } K = K_1 + K_2 + K_3$$

subject to

$$6.4939L_1 + 0.1856K_1 = 8814$$
$$5.1776L_2 + 0.0856K_2 = 11149$$
$$2.3246L_3 + 0.1369K_3 = 13741$$
$$L_1 = 661$$
$$L_2 = 1467$$
$$L_3 = 4097$$

1980.

$$\text{MIN } K = K_1 + K_2 + K_3$$

subject to

$$6.2852L_1 + 0.2549K_1 = 13118$$
$$6.4939L_2 + 0.1856K_2 = 24590$$
$$3.7144L_3 + 0.1531K_3 = 28705$$
$$L_1 = 818$$
$$L_2 = 1844$$
$$L_3 = 5305$$

VI. Results

The results are shown in the following tables.

1970.

(L is in 10^3 persons. K and V in $\$ 10^6$ of 1960)

Regions	First alternative variables L	K	V	Second alternative variables L	K	V
first	853	17641	8873	661	24362	8814
second	1924	13859	11255	1467	41512	11149
third	3448	41829	13746	4097	29818	13741
total	6225	73329	33874	6225	75693	33704

1980.

Regions	First alternative variables L	K	V	Second alternative variables L	K	V
first	1128	23638	13117	818	31293	13118
second	3391	13859	24599	1844	67970	24590
third	3448	103839	28693	5305	58785	28705
total	7967	141336	66409	7967	158048	66413

Summary of Statistical Results.

PRODUCTION FUNCTIONS.

(The values of L_i are in 10^3 persons. K and V in 10^6 mexican pesos of 1960).

1950

Regions	PARAMETERS (labor) a	(capital) b	Standard deviation of the parameters S_a	S_b	Correlation Coefficients R^2	$r^2_{V,L}$	$r^2_{V,K}$	$r^2_{K,L}$
1st	6.9653	0.0470	0.3434	0.0463	0.9903	0.9800	0.9020	0.885[illegible]
2nd	3.5218	0.0922	0.663	0.0150	0.9797	0.9595	0.8450	0.7486
3rd	2.4528	0.0429	0.4899	0.0700	0.9555	0.9544	0.8635	0.8810

1960

Regions	PARAMETERS (labor) a	(capital) b	Standard Deviation of the Parameters S_a	S_b	Correlation Coefficients R^2	$r^2_{V,L}$	$r^2_{V,K}$	$r^2_{K,L}$
1st	6.7796	0.1163	1.1900	0.0619	0.9749	0.9532	0.9132	0.8[illegible]
2nd	4.3497	0.0889	0.7688	0.0446	0.9868	0.9744	0.9078	[illegible]
3rd	2.3637	0.0899	0.4243	0.0632	0.9655	0.9577	0.8763	0.8584

12

1980

```
/INPUT
/INCLUDE LPRAX
Ø,10,6
Ø,1,9
1,1,1,Ø,Ø,Ø
6.2852,Ø,Ø,Ø.2549,Ø,Ø
Ø,6.4939,Ø,Ø,Ø.1856,Ø
Ø,Ø,3.7144,Ø,Ø,Ø.1531
1,Ø,Ø,Ø,Ø,Ø
Ø,1,Ø,Ø,Ø,Ø
Ø,Ø,1,Ø,Ø,Ø
Ø,Ø,Ø,1,Ø,Ø
Ø,Ø,Ø,Ø,1,Ø
Ø,Ø,Ø,Ø,Ø,1
7967,13118,24590,23705,853,1924,3448,17641,13859,41829
Ø,Ø,Ø,-1,-1,-1/
/END RUN
Ø.ØØ73 ACTION IN PROGRESS.
       YOUR VARIABLES  1 THROUGH  6
    SURPLUS VARIABLES  7 THROUGH 15
 ARTIFICIAL VARIABLES 16 THROUGH 25
      ANSWERS
      VARIABLE       VALUE
          3          Ø.3448ØØØE Ø4
         1Ø          Ø.2754685E Ø3
         11          Ø.1466531E Ø4
         15          Ø.62ØØ998E Ø5
          1          Ø.1128469E Ø4
          2          Ø.339Ø531E Ø4
         13          Ø.59971Ø2E Ø4
          4          Ø.236381ØE Ø5
          5          Ø.13859ØØE Ø5
          6          Ø.1Ø38389E Ø6
        OBJECTIVE FUNCTION VALUE  -Ø.1413359E Ø6
 /END READ
 Ø.ØØ73 ACTION COMPLETE.
 Ø.ØØ72 BEGIN ACTIVITY.
 /OFF
 Ø.ØØ75 GOOD-BYE
```

1970

```
   FF
 .0072 BEGIN ACTIVITY.
/INPUT
/INCLUDE LPRAX
 ,10,6
 ,1,0
1,1,1,0,0,0
6.4939,0,0,0.1856,0,0
 ,5.1776,0,0,0.0856,0
 , ,2.3246,0,0,0.1369
1,0,0,0,0,0
 ,1,0,0,0,0
 ,0,1,0,0,0
 ,0,0,1,0,0
0,0,0,0,1,0
 ,0,0,0,0,1
6225,8814,11149,13741,537,1179,3196,17641,13859,20623
 ,0,0,-1,-1,-1
/END RUN
 .0073 ACTION IN PROGRESS.
       YOUR VARIABLES  1 THROUGH  6
    SURPLUS VARIABLES  7 THROUGH 15
 ARTIFICIAL VARIABLES 16 THROUGH 25
      ANSWERS
      VARIABLE      VALUE
          3         0.3447730E 04
         10         0.3160820E 03
         11         0.7451875E 03
         15         0.2120616E 05
          1         0.8530820E 03
          2         0.1924188E 04
          4         0.1764100E 05
         12         0.2517305E 03
          5         0.1385900E 05
          6         0.4182916E 05
        OBJECTIVE FUNCTION VALUE  -0.7332913E 05
/END READ
 .0073 ACTION COMPLETE.
 .0072 BEGIN ACTIVITY.
```

CONCLUSIONES:

Comparando los valores de las variables de ambas alternativas, las recomendaciones generales son las siguientes:

1) El Gobierno Mexicano necesita movilizar a cierto número de campesinos de la región más poble ~~y~~ a las regiones de productividad media y comercial.

2) Al mismo tiempo y una vez que se fijen los niveles de producto en cada región, el Gobierno deberá invertir en obras de infra-estructura agrícola dándole prioridad a la región más pobre. Debemos mencionar que los gastos de capital de la primera alternativa son menores que en la segunda, lo que refleja la bondad del empleo de la Programación Lineal.

Bibliography.

Fisher, W.

1. "Econometric Models and Methods." Journal Of Farm Economics Vol. 2?. No. ??, Nov. 1967

2. "Simplification of Economic Models." Econometrica. Vol. 34 July 1966.

Marishal Harris

"Shifts in Entrepreneurial Functions in Agriculture." American Journal of Agricultural Economics. Vol. 51. Aug 1969.

Goldberger, A.

" Econometric Theory." (John Wiley & Sons, Inc. 1964)

Hadley, G.

"Linear Programming." (Addison-Wesley Co. 1964)

"Non-Linear and Dynamic Programming." (Addison-Wesley Co. 1964)

Koopmans, T.

" Activity Analysis of Production and Allocation." (John Wiley & Sons, Inc. 1951)

Mennes, Tinbergen, and Waardenburg.

" The Element of Space in Development Planning." (North-Holland Co. 1969)

Morgan, R.
" A Hand Book in Statistics." The Hague. Dec. 1965

Crecimiento Demografico y Desarrollo Agricola."
Boletin Mensual de Economia y Estadistica Agricolas.
Vol. 18 Abril 1969

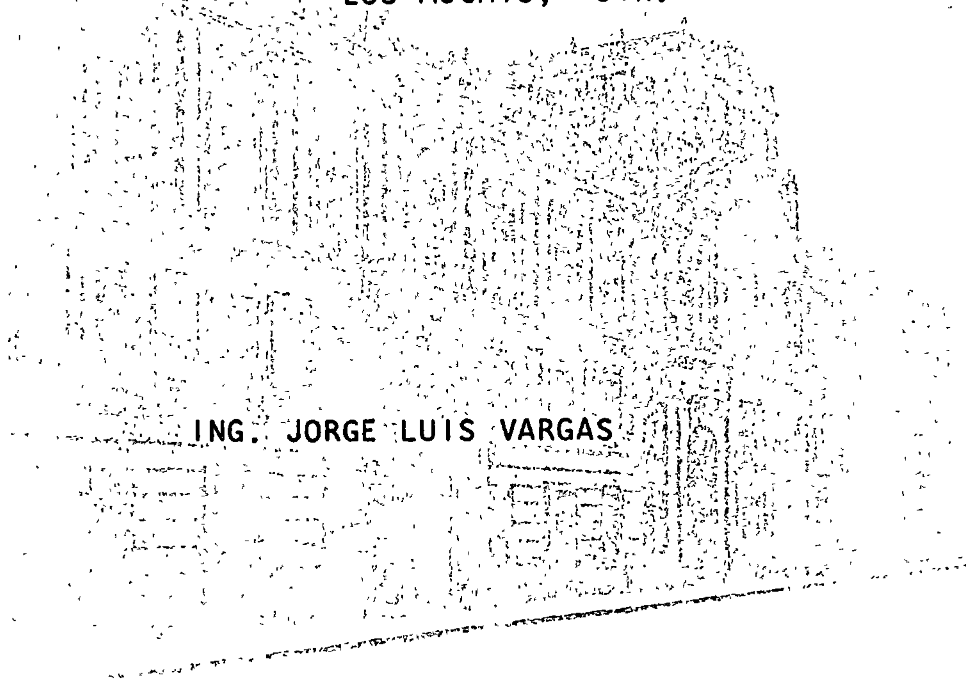
Problemas Relativos a la Ocupacion que Afectan el Desarrollo
gricola Lationo- Americano."
oletin Mensual de Economia y Estadistica Agricolas.
ol. 18 Agosto 1969

Numeros Indice de la Produccion Agricola y Elementos
itivos Explicativos que la Componen."
letin Mensual de Economia y Estadistica Agricolas(F.A.O.)
l. 17 Oct. 1969

centro de educación continua
facultad de ingeniería, unam

PROGRAMACION DE INVERSIONES

ANALISIS DE LA BASE ECONOMICA DE LA ZONA DE LOS MOCHIS, SIN.



ING. JORGE LUIS VARGAS

Tacuba 5, primer piso. México 1, D.F.
Teléfonos: 521-30-95 y 513-27-95

ANALISIS DE LA BASE ECONOMICA DE LA ZONA DE LOS MOCHIS, SIN.

Tomando en cuenta que el recurso capital es escaso en el país, para la programación de inversiones es necesario asignarlo de la mejor forma posible. Esto se logra por medio de un análisis sectorial que permita jerarquizar las distintas actividades económicas de la región, atendiendo a los diferentes impactos que se generen al estimular cada sector con políticas alternativas de crédito, creación de infraestructura, demanda, etc. Atendiendo a este criterio, a partir del modelo de insumo-producto de Leontief[1] se hizo un análisis comparativo entre la Agricultura y la Industria Alimenticia, los cuales son los sectores más importantes de la zona de Los Mochis, ya que el primero contribuye con 27% y el segundo con 19% en la composición del producto bruto total. Este análisis demuestra que la agricultura es el sector productivo que al recibir un incremento en su demanda genera mayor valor, empleos y saldos favorables en la balanza regional y nacional, que si este estímulo se diera en cualquier otro sector.

Los resultados a los que se llega se basan en los datos de la matriz de la zona de Los Mochis, Sin. para 1960 publicada por el Banco de México, S.A. Esta Zona comprende los municipios de Ahome, Choix, El Fuerte, Sinaloa de Leyva y Guasave.

1.- W. Leontief, Input-Output Economics., New York, Oxford University Press, 1966.

La selección de los indicadores que se manejan en el estudio toma en cuenta los objetivos perseguidos por el sector público en las últimas décadas, que en términos generales han sido: crecimiento del producto con equilibrio en la balanza de pagos, mejoramiento en la distribución del ingreso y generación de empleos productivos.

1. RELACIONES INTERSECTORIALES

Con objeto de facilitar el análisis, la matriz insumo-producto de la zona de Los Mochis[2] se redujo de 32 a 6 sectores productivos; considerando separadamente aquellos que en la matriz original figuran con mayor valor del producto total y agrupando los restantes según el tipo de actividad.

La matriz definitiva consta de los siguientes sectores productivos:

Sector 1: Agricultura;

Sector 2: Ganadería, silvicultura, caza y pesca;

Sector 3: Extracción de minerales, otras industrias extractivas, metales no ferrosos, petróleo;

Sector 4: Alimentos;

2. Fuente: Matrices Insumo-Producto Regionales de 1960, Banco de México, S.A.

Sector 5: Textiles, calzado, madera y corcho, papel, imprenta, cuero, productos de hule, productos químicos, minerales no metálicos, siderurgia, maquinaria, equipo de transporte, otras industrias extractivas, construcción, electricidad:

Sector 6: Películas cinematográficas, transportes, alquiler construcciones, hoteles, servicios esparcimiento, otros servicios, banca, seguros [3].

De acuerdo con los principios básicos del modelo de insumo-producto de Leontief, el análisis parte de las relaciones intersectoriales dadas en el cuadro 3.1. En la submatriz de seis por seis de la parte superior izquierda del cuadro se cuantifican los insumos locales que los seis sectores económicos requieren para producir. De esta información y de los productos brutos totales de cada sector se construye la matriz A de coeficientes técnicos de producción (cuadro 3.2). Estos coeficientes representan los requerimientos de insumos locales que cada sector demanda de todos los sectores para producir un peso. Además, en el cuadro se incluyen los coeficientes de valor agregado y de insumos importados correspondientes a dicho peso.

Finalmente se calcula la matriz $(I-A)^{-1}$ llamada "<u>matriz de requerimientos de producción</u>". Los elementos de cada una de sus columnas (cuadro 3.3) indican los requerimientos de producción de todos los sectores para satisfacer un aumento exógeno unitario en la demanda del sector a que corres-

3. En las matrices originales el sector comercio no figura porque el valor de su producto está prorrateado entre los sectores productivos mencionados.

Cuadro 3.1.- Matriz Insumo-Producto de la Zona de los Mochis.

(Millones de Pesos)

Sectores	1	2	3	4	5	6	Demanda	Producto bruto total
1	20.6	14.3	0	104.0	0	0.9	640.5	790.3
2	0.5	0.6	0.1	90.5	4.1	0.8	78.6	175.2
3	36.2	5.4	0	5.5	7.7	18.5	24.2	97.5
4	0.9	16.1	0	39.5	0.3	28.6	475.5	560.9
5	117.0	11.9	0.4	28.3	63.7	73.7	374.5	669,5
6	126.1	15.5	2.1	22.6	52.7	54.2	322.7	595.9
Total insumos locales.	301.3	63.8	2.6	290.4	128.5	176.7		
Total insumos importados.	19.4	17.0	85.8	96.8	331.1	52.3		
Valor agregado.	469.6	94.4	9.1	173.7	209.7	366.9		
Producto bruto total.	790.3	175.2	97.5	560.9	669.5	595.9		

FUENTE: Banco de México, S.A., 1960.

Cuadro 3.2.- Matriz de Coeficientes Técnicos de la Zona de los Mochis.

Sectores	1	2	3	4	5	6
1	0.0261	0.0916	0	0.1854	0	0.0015
2	0.0006	0.0034	0.0010	0.1613	0.0061	0.0013
3	0.0458	0.0308	0	0.0098	0.0115	0.0310
4	0.0011	0.0919	0	0.0704	0.0004	0.0480
5	0.1480	0.0679	0.0041	0.0505	0.0951	0.1237
6	0.1596	0.0885	0.0215	0.0403	0.0787	0.0910
Total insumos locales	0.3812	0.3642	0.0266	0.5177	0.1918	0.2965
Total insumos importados.	0.0246	0.0970	0.8801	0.1726	0.4948	0.0878
Valor agregado	0.5942	0.5388	0.0933	0.3097	0.3134	0.6157

FUENTE: Calculada por la Dirección de Estudios Específicos, S.R.H.

ponde la columna.

Así pues, a través de esta matriz se pueden cuantificar los efectos que origina un estímulo en las demandas finales tanto del sector Agricultura como del sector de Industria Alimenticia. La comparación permite establecer - cual de los dos sectores responde en mejor forma al logro de los objetivos - nacionales.

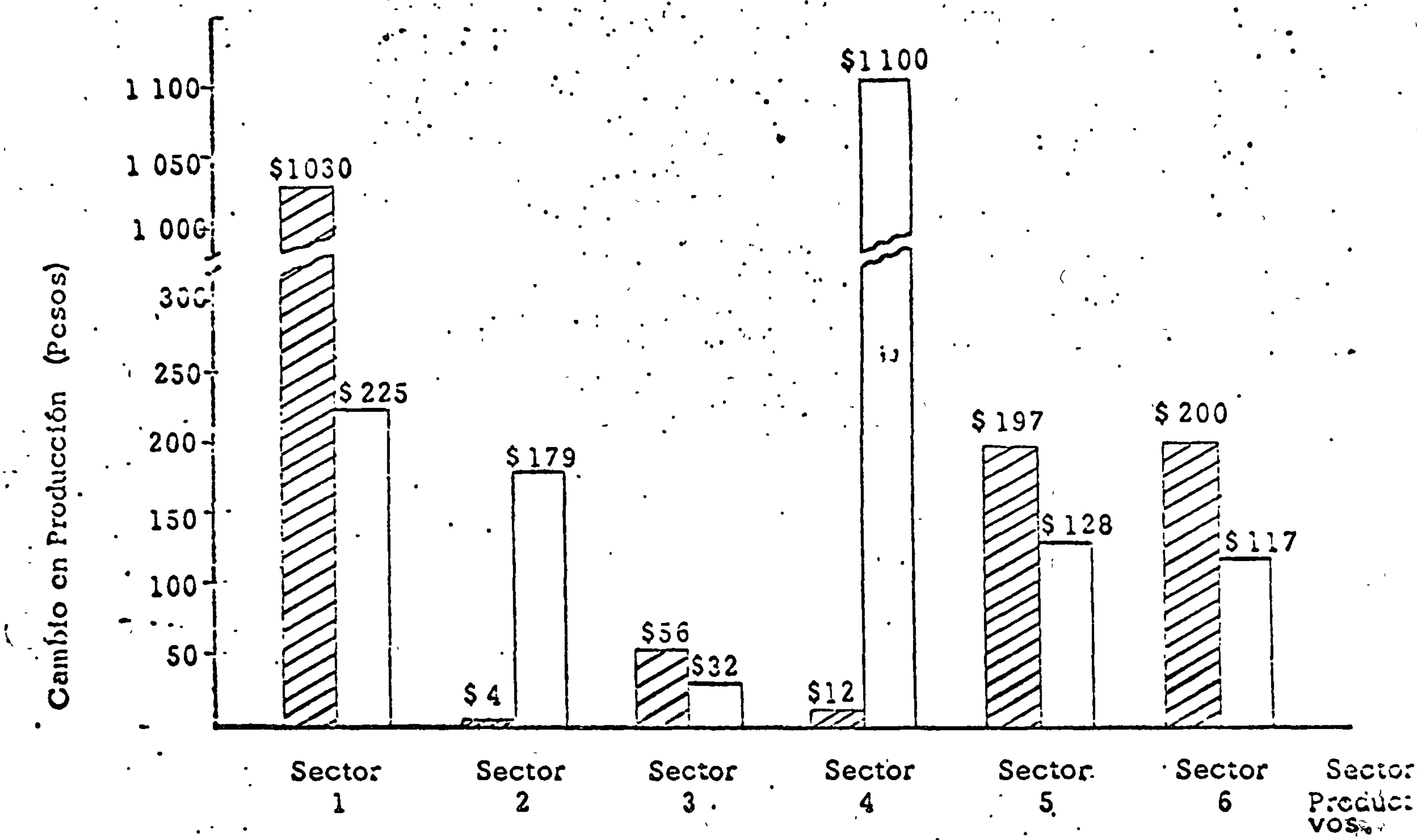
Cuadro 3.3.- Matriz de Requerimientos de Producción para la Zona de los Mochis.

	1	2	3	4	5	6
1	1.02974	0.10642	0.00042	0.22456	0.0020	0.01400
2	0.00409	1.02192	0.00131	0.17911	0.0080	0.01206
3	0.05588	0.04294	1.00093	0.03169	0.01634	0.03819
4	0.01204	0.10814	0.00141	1.09982	0.00638	0.05917
5	0.19701	0.11867	0.00815	0.12774	1.11996	0.15993
6	0.20011	0.13426	0.02464	0.11743	0.09877	1.12112

FUENTE: Calculada por la Dirección de Estudios Específicos, S.R.H.

Por lo tanto, si se considera que el incremento en las demandas de los sectores mencionados es de $1,000.00, los niveles de producción bruta total de toda la zona ascienden a $1,499.00 y $1,781.00 para la Agricultura e Industria Alimenticia respectivamente. En la figura 3.1 se esquematiza cual - es la composición de estos productos brutos totales entre los seis sectores considerados en el análisis. Para facilitar la comparación se incluyen juntos los impactos de las dos alternativas de cambios.

Figura 3.1.- Requerimientos de Producción de los Sectores de la Zona de Los Mochis para Satisfacer Cambios en las Demandas.



requerimientos de producción de los sectores ante un cambio de la demanda agrícola de $1 000.00. Incremento en el producto bruto total = $1 499.00.

requerimientos de producción de los sectores ante un cambio de la demanda de alimentos de $ 1 000.00. Incremento en el producto bruto total = $1 781.00.

De los resultados de la figura se deduce que de los dos sectores considerados las industrias alimenticias son las que generan mayor producto bruto en la zona de Los Mochis ante un cambio en la demanda de sus productos. - Además, induce a una mayor diversificación de la producción que el sector - agricultura. Sin embargo, los resultados no bastan para concluír que las inversiones en el Noroeste son más eficientes en el sector que genera más producto bruto total, ya que es necesario analizar su estructura en términos de valor agregado, empleos generados, composición de insumos y de ventas.

3.1.2.- Desarrollo Regional Generado por la Agricultura y la Industria Alimenticia.

En esta parte del estudio se cuantifica cual es la composición del producto bruto total generado por los aumentos en la demanda de los sectores considerados.

a) Valor agregado.

A partir de los coeficientes de valor agregado mostrados en el cuadro 3.2 y de los niveles de producción de cada sector obtenidos de la matriz de requerimientos de producción (cuadro 3.3), se determinó que el valor agregado total generado por el aumento en la demanda agrícola asciende a $809.00 (54% del producto bruto total), mientras que el debido al cambio en la demanda de las industrias alimenticias es de $687.00 (39% del producto bruto total). En los cuadros 3.4 y 3.5 se detalla el cálculo de estas cantidades y su distribución en salarios, utilidades e ingresos del gobierno y depreciación, represen tándolas gráficamente en la figura 3.2.

Cuadro 3.4.- Valores Agregados Generados por Cambios en la Demanda Final de los Sectores Agricultura e Industria Alimenticia en la Zona de Los Mochis.

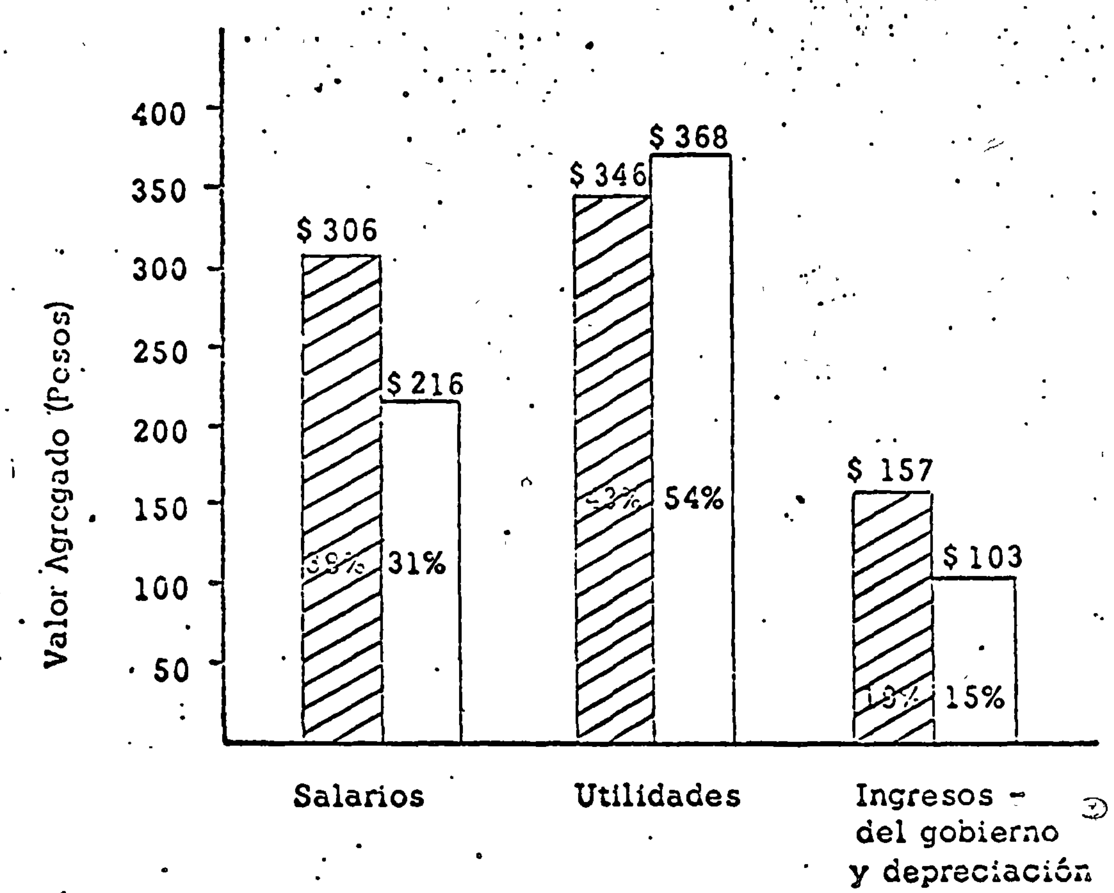
(Pesos).

Sector	Coeficientes VALOR AGREG.	AGRICULTURA		IND. DE ALIMENTOS	
		PBT	VALOR AGREG.	PBT	VALOR AGREG.
1	0.59	1,030	612	225	134
2	0.54	4	2	179	97
3	0.09	56	5	32	3
4	0.31	12	4	1,100	341
5	0.31	197	62	128	40
6	0.61	200	124	117	72
TOTALES	-	1,499	809	1,781	687

Como se desprende de la figura anterior, los efectos de la demanda adicional en la Agricultura se reflejan en un mayor monto de salarios y de ingresos del gobierno que si aquella se diera en la Industria Alimenticia. En cambio, para el caso de las utilidades la situación es a la inversa, ya que para la segunda se da un total de \$368.00 por cada \$1,000.00 de cambio en la demanda mientras que para la Agricultura el total de utilidades es de \$346.00.

En términos relativos puede observarse que los efectos del sector Agricultura son mucho más favorables al desarrollo regional y nacional porque producen mayor ingreso, mejor distribuído y más impuestos. Así, el 38% del valor agregado generado comprende a salarios (contra 31% para la Industria Alimen

Figura 3.2.- Valores Agregados Generados por los Sectores de la Zona de los Mochis para Satisfacer Cambios en las Demandas de cada una de las Alternativas Consideradas.



valor agregado generado por el aumento de $1 000.00 en la demanda agrícola. Incremento en valor agregado total = $ 890.00.

valores generados por el aumento de $1 000.00 en la demanda por alimentos. Incremento en valor agregado = $ 687.00.

Cuadro 3.5.- Composición del Valor Agregado Generado por Cambios en la Demanda Final de los Sectores Agricultura e Industria Alimenticia en la Zona de Los Mochis.

(Pesos)

Sectores	COEFICIENTES			AGRICULTURA				INDUSTRIA DE ALIMENTOS			
	SALARIOS / V.A.	UTILIDADES / V.A.	GOB. + DEPR. / V.A.	VALOR AGREG. TOTAL	SALARIOS	UTILIDADES	GOBIERNO + DEPR.	VALOR AGREG. TOTAL	SALARIOS	UTILIDADES	GOBIERNO + DEPR.
1	0.37	0.43	0.20	612	226	263	123	134	50	58	26
2	0.24	0.57	0.19	2	0.5	0.1	1.4	97	23	55	19
3	0.19	0.66	0.15	5	1	3	1	3	1	2	0
4	0.28	0.60	0.12	4	1	2	1	341	95	205	41
5	0.29	0.54	0.17	62	18	33	11	40	12	22	6
6	0.48	0.36	0.16	124	59	45	20	72	35	26	11
TOTAL				809	306	346	157	687	216	368	103
PORCENTAJES.				100	38	43	19	100	31	54	15

FUENTE: Banco de México, S.A. Matriz de la Zona de Los Mochis, 1960.

ticia), el 43% a utilidades (54%) y el 19% a ingresos del gobierno y deprecia ción (15%).

b) Empleos.

A fin de cuantificar las necesidades de empleos debidas a los aumentos en la demanda final de cada uno de los sectores considerados en este estudio, en el análisis se manejan estimaciones del total de personas que se requieren en un sector para producir un peso de producto.

Tomando en cuenta que para la zona de Los Mochis solamente se dispone de este índice para el sector primario (agricultura, ganadería, silvicultura, caza y pesca) y el sector industrial (industrias de transformación y de maquinaria), se consideró que estos índices podrían manejarse como representativos de la agricultura y la industria alimenticia, pues el primero contribuye con el 82% y el segundo con el 46% en la formación del producto bruto de los sectores primario e industrial respectivamente.

En todo caso, las necesidades reales de empleo guardarán aproximadamente la misma proporción que se obtiene con esta información. Conviene aclarar que, además, dado que las matrices insumo-producto regionales del Banco de México, S. A. incluyen los márgenes de comercio dentro de los insumos de cada sector, la población económicamente activa del comercio se prorrateó entre el sector primario y el industrial proporcionalmente al número de personas ocupadas en cada uno de estos sectores.

Por lo tanto, de la matriz insumo-producto (cuadro 3.1) se pueden calcu lar los productos brutos totales del sector primario (sectores 1 y 2) y del sector industrial (sectores 4 y 5) para obtener las relaciones L/PBT que representan los requerimientos medios de personas económicamente activas por peso de producto[4].

$$(L/PBT)_{1,2} = \frac{79,286}{965.5} = 82.1$$ personas por cada millón de pesos de producto.

$$(L/PBT)_{4,5} = \frac{9,162}{1,230.4} = 7.4$$ personas por cada millón de pesos de producto.

Ahora bien, suponiendo que los requerimientos medios de trabajadores - sean iguales a los requerimientos por incrementos pequeños de producto, se puede calcular el número de trabajadores adicionales en las dos alternativas analizadas. Así, considerando un aumento de un millón de pesos en la de-- manda de la agricultura, y la industria de alimentos, los sectores 1, 2,4 y 5 demandarán 86.5 y 42.2 empleos, respectivamente (cuadro 3.6).

De los resultados se destaca la influencia de la Agricultura en la generación de empleos, pues al estimularla sus efectos son más del doble que los de la Industria Alimenticia.

4. Los datos sobre población económicamente activa fueron tomados del Censo General de Población de 1960.

Cuadro 3.6.- Generación de Empleos en la Zona de los Mochis por Aumentos en la Demanda Final de los Sectores Agricultura e Industria Alimenticia.

Sector	L / PBT	AGRICULTURA PBT (millones de pesos)	AGRICULTURA L (personas)	ALIMENTOS PBT (millones de pesos)	ALIMENTOS L (personas)
1	82.1	1.030	84.6	0.225	18.5
2	82.1	0.004	0.3	0.179	14.7
4	7.4	0.012	0.1	1.100	8.1
5	7.4	0.197	1.5	0.128	0.9
TOTAL		1.243	86.5	1.632	42.2

Por lo tanto atendiendo al problema de la demanda creciente de empleos, es el sector agrícola el que participa en mejor forma a su solución.

c) Impacto Regional.

En este punto se analiza la estructura de insumos importados y locales que cada aumento en demanda origina en la zona. La cuantificación de estos conceptos que se resume en el cuadro 3.7 se hizo a partir de la matriz de coeficientes técnicos y su representación esquemática se incluye en la figura 3.3.

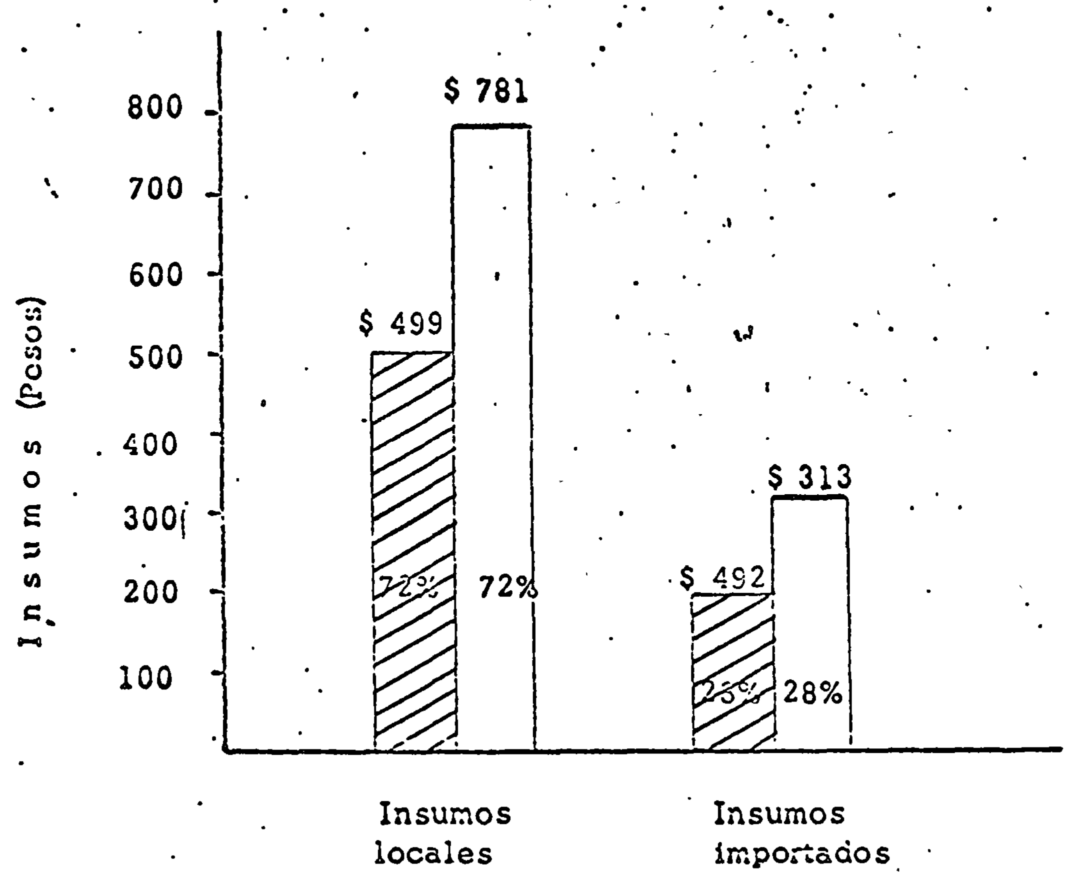
En primer lugar, puede observarse que la zona de Los Mochis responde al estímulo que se da a la Industria Alimenticia con mayor valor absoluto de insumos locales e importados que en el caso de la agricultura. Así, los efec

Cuadro 3.7.- Estructura de los Insumos Requeridos para Satisfacer Aumentos en la Demanda Final de los Sectores Agricultura e Industria Alimenticia en la Zona de los Mochis.

(Pesos)

Sector	COEFICIENTES		AGRICULTURA			INDUSTRIA		
	Insumos locales P.B.T	Insumos importados P.B.T.	Total Insumos	Insumos locales	Insumos Importados	Total Insumos	Insumos locales	Insumos importados
1	0.38	0.02	418	393	25	91	86	5
2	0.36	0.10	1.5	1.5	0	82	65	17
3	0.03	0.88	51	2	49	29	1	28
4	0.52	0.17	8	6	2	759	569	190
5	0.19	0.49	135	38	97	88	25	63
6	0.30	0.09	77	59	18	45	35	10
TOTALES			691	499	192	1 094	781	313
%			100	72	28	100	72	28

Figura 3.3.- Requerimiento de Insumos Locales e Importados en la Zona de Los Mochis para Satisfacer los Cambios en la Demanda - Final de las dos Alternativas Consideradas.



valor de insumos demandados por la zona cuando la demanda agrícola aumenta en $1 000.00 = $ 691.00.

valor de insumos demandados por la zona cuando la demanda de ~~por~~ alimentos aumenta en $1 000.00 = $1 094.00.

tos en la zona cuando se fortalece el sector de Industria de Alimentos totalizan $1,781.00, de los cuales $1,094.00 (61%) son insumos que entre todos los sectores requieren para que la zona satisfaga un incremento de ---- $ 1,000.00 en la demanda final del sector considerado. Asímismo, cuando se aumenta la demanda final del sector agrícola, los insumos necesarios para producir $1,499.00 de producto bruto total ascienden a $691.00, que en términos relativos (46%) también son menores que en el caso anterior.

La figura permite visualizar que la estructura del valor de insumos locales e importados se mantiene igual para ambos casos (72% de insumos locales y 28% de importados de otras zonas del país y del extranjero).

Cabe mencionar que si bien los requerimientos de insumos debidos a un aumento en la demanda de la Industria Alimenticia son muy superiores a los que se dan para el caso de la Agricultura, de los $781.00 de insumos locales el 29% son agrícolas. Por lo tanto, es notable la dependencia que tiene la producción industrial respecto al sector primario.

Por el contrario, cuando se produce un aumento en la demanda agrícola la dependencia con respecto al sector alimentos es insignificante (de los -- $499.00, el 2% corresponde a insumos de ese sector), siendo muy importantes en relación a los sectores 5 y 6 (de los $499.00 representan el 75%).

d) Balanza Comercial Regional y Nacional.

El análisis de este indicador se ha incluído en el estudio con la finalidad de complementar los resultados anteriores. Los datos de demanda final y ventas intermedias de los sectores 1 y 4 mostrados en el cuadro 3.1 se han desglosado entre sus componentes: ventas al exterior, ventas a residentes y ventas intermedias y la estructura del destino de la producción de los dos sectores mencionados se muestra en la figura 3.4.

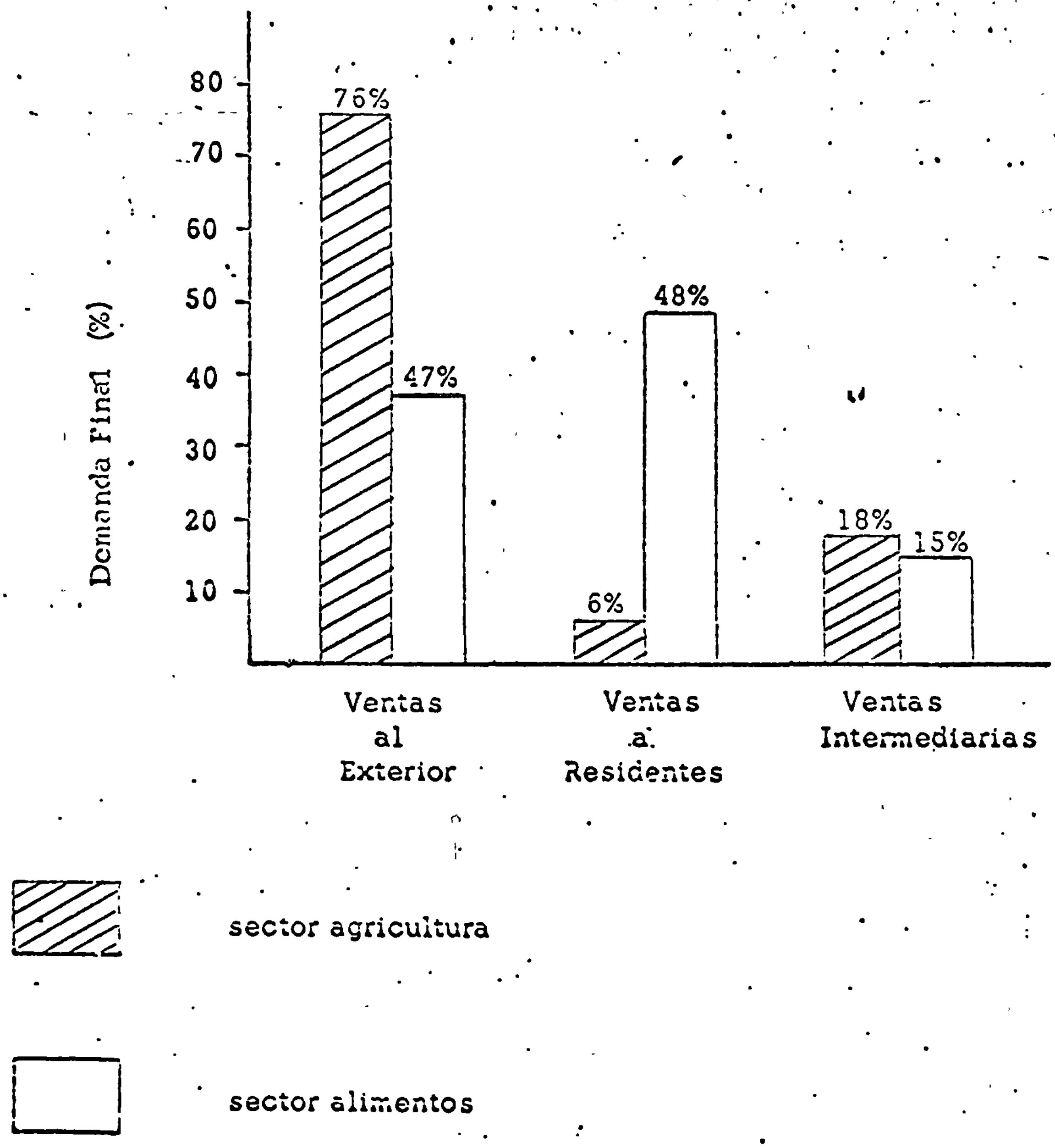
De la figura se deduce que el sector alimentos posee una estructura final más diversificada que la agricultura. Así, el rubro de mayor peso relativo en esta última son las ventas al exterior con el 76%, mientras que en aquél son las ventas a residentes con el 48%.

Respecto a las ventas al exterior, que comprende ventas al extranjero y al resto del país, es notable la diferencia que presentan ambos sectores (76% la agricultura contra 37% de alimentos). Desglosando estos porcentajes entre sus componentes, se determinó que las ventas al extranjero en la agricultura representan el 51% de las ventas al exterior y en el sector alimentos el 30%.

Por lo tanto es válido afirmar que la agricultura es el sector que relaciona la zona de Los Mochis con el resto del país y el extranjero. Además, el hecho de que las relaciones con el extranjero sean las de mayor peso, acentúa la importancia de realizar inversiones en este sector, pues la producción está destinada en su mayor parte a generar divisas al país.

Por otra parte, el sector de alimentos proporciona el 48% de su producción a ventas a residentes frente al 6% de la agricultura. En este concepto

Figura 3.4.- Estructura de la Demanda Final en los Sectores Agricultura e Industria Alimenticia en la Zona de Los Mochis.

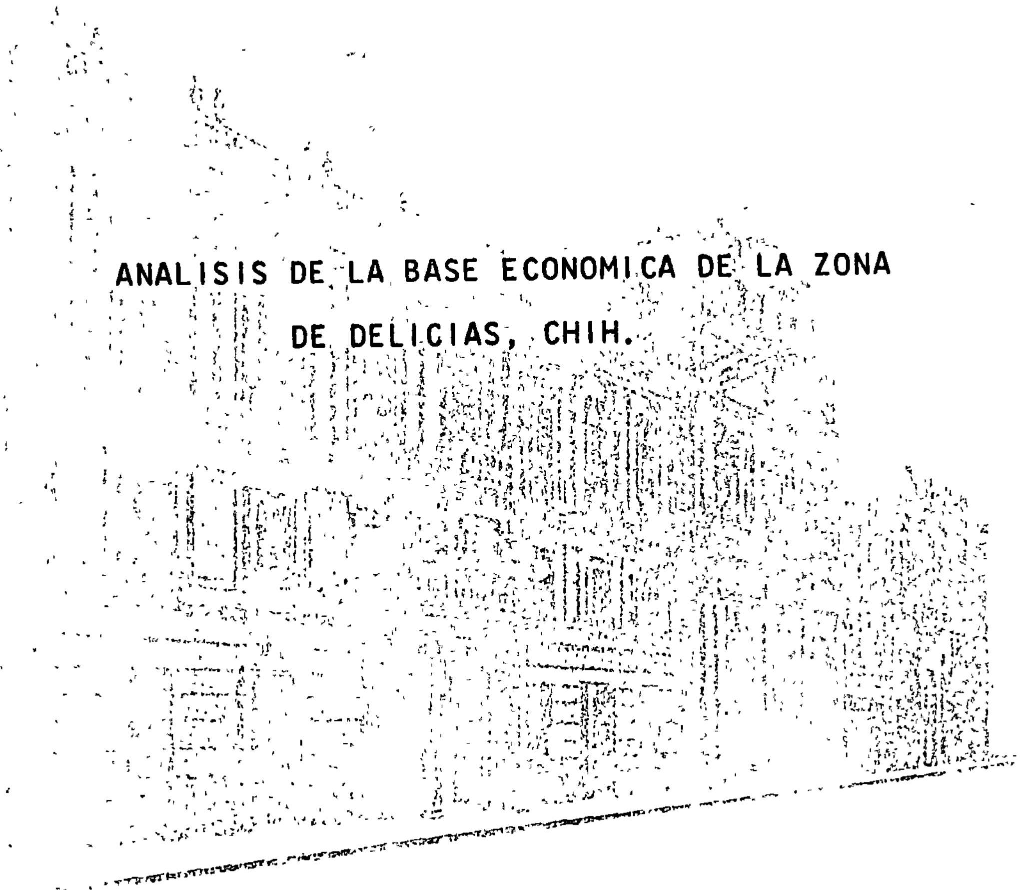


se incluyen consumo familiar, inversión privada, y consumo e inversión gubernamental. En ambos sectores, el destino corresponde en casi su totalidad a consumo familiar.

Respecto a las ventas intermedias, entre ambos sectores no hay diferencias marcadas (18% de la agricultura frente a 16% de la industria).

centro de educación continua
facultad de ingeniería, unam

PROGRAMACION DE INVERSIONES



ANALISIS DE LA BASE ECONOMICA DE LA ZONA DE DELICIAS, CHIH.

ING. JORGE LUIS VARGAS

Tacuba 5, primer piso. México 1, D.F.
Teléfonos: 521-30-95 y 513-27-95

ANALISIS DE LA BASE ECONOMICA DE LA ZONA DE DELICIAS, CHIH.

El análisis de la base económica tiene por objeto identificar el Sector o los Sectores sobre los que descansa la actividad económica de una región determinada, con el fin de jerarquizar dichos Sectores de acuerdo a su importancia en el cumplimiento de determinados objetivos y de esa forma, tener elementos de juicio para la toma de decisiones en materia de política económica.

La herramienta más usada para determinar la base económica de una región es el modelo de Insumo-Producto de Leontief [1/], pues muestra en forma clara las relaciones intersectoriales del Sistema económico de la misma. A partir de este modelo se hizo el análisis de los diferentes Sectores de la Región de Delicias, Chihuahua, con el fin de determinar cuales de ellos generan mayor valor agregado, empleos y saldos favorables en balanza comercial tanto nacional como regional. La selección de estos indicadores toma en cuenta los objetivos actuales de política económica del Sector público que en términos generales son: crecimiento económico y distribución del ingreso, menor dependencia con el exterior y generación de empleos.

Los resultados del análisis para la región que nos ocupa permitirán concluir a que sectores económicos de ella se debe estimular y más concretamente determinar la conveniencia o no de canalizar inversiones al Sector Agropecuario de la Zona de Delicias.

1/ W. Leontief, Input-Output Economics, New York, Oxford University Press, 1966.

Los resultados a que se llega se basan en los datos de la Matriz Insumo-Producto de la Zona de Delicias, Chih. 1964. Publicada por el Banco de México, S.A. Esta Zona comprende los Municipios de Allende, Balleza, Camargo, La Cruz, Delicias, Guadalupe y Calvo, Hidalgo del Parral, Huejotitlan, Jiménez, Meoqui, San Francisco del Oro, Santa Bárbara, Saucillo, El Tule, Villa Coronado, Villa López y Villa Matamoros del Estado de Chihuahua.

1. INFORMACION BASICA PARA EL ANALISIS

Con objeto de facilitar el análisis, la Matriz Insumo-Producto de la región de Delicias se redujo de 32 a 6 Sectores productivos. Esto se hizo debido a la escasa diversificación de la estructura productiva de la zona. Así, para la agrupación se consideró separadamente aquellos Sectores que en la Matriz original figuran con mayor valor del Producto total, agrupando los restantes según el tipo de actividad. En estos términos, la agrupación de Sectores quedó en la siguiente forma:

MATRIZ REDUCIDA	MATRIZ ORIGINAL
1) Agropecuario	Agricultura, Ganadería, Silvicultura, Caza y Pesca.
2) Industrias Extractivas	Extracción de Minerales, Otras Industrias extractivas, Metales No ferrosos, Petróleo.
3) Alimentos, Textiles y Calzado.	Alimentos, Textiles y Calzado.
4) Otras Industrias.	Madera y corcho, Papel, Imprenta, Cuero, Productos de hule, Productos químicos, Minerales no metálicos, Siderurgia, Maquinaria, Equipo de transporte, Otras industrias de transformación, construcción, electricidad.

5) Transportes.	Transportes.
6) Servicios.	Películas cinematográficas, Alquileres de construcción, Hoteles, Servicios de esparcimiento, Otros servicios, Banca y Seguros.

De acuerdo con los principios básicos del Modelo de Insumo Producto de Leontief, el análisis parte de las relaciones intersectoriales dadas en el Cuadro No. 1. En la Submatriz de seis por seis de la parte izquierda del Cuadro - se cuantifican los insumos locales que los seis Sectores económicos requieren para producir. De esta información y de la Producción bruta total de cada Sector se construye la Matriz (a) de Coeficientes técnicos de Producción (Cuadro - No. 2). Estos coeficientes representan los requerimientos de Insumos locales- que cada Sector demanda de todos los Sectores para producir un peso.

Finalmente se calcula la Matriz $(I-A)^{-1}$ llamada Matriz de requerimientos Directos e Indirectos de Producción. Los elementos de cada una de sus columnas (Cuadro No. 3) indican las necesidades de producción que tienen todos los Sectores para satisfacer un aumento exógeno unitario en la demanda del Sector a que corresponde la columna.

Así pues, a través de esa Matriz se pueden cuantificar los efectos que originan incrementos unitarios en la demanda final de cada uno de los Sectores. La comparación permite establecer cual de ellos responde en mejor forma al logro de los objetivos antes mencionados.

Cuadro Nº

MATRIZ INSUMO PRODUCTO PARA LA ZONA DE DELICIAS, CHIHUAHUA 1964
(Millones de pesos)

	SECTORES	1	2	3	4	5	6	SUMA PARCIAL	VALOR TOTAL DE LA PRODUCCION
SECTORES	AGRICOLA 1	68.1	0.7	100.0	17.7	4.2	1.5	192.2	577.9
	INDUSTRIAS EXTRACTIVAS 2	18.8	177.3	3.8	10.0	40.9	1.1	251.9	1 278.7
	ALIMENTOS BEBIDAS Y TABACO 3	19.5	3.0	50.6	1.7	1.8	20.8	97.4	546.5
	OTRAS INDUSTRIAS 4	47.2	101.6	21.3	235.1	84.4	28.6	481.1	905.4
	TRANSPORTES 5	39.0	93.0	12.7	20.4	2.4	4.1	171.6	334.6
	SERVICIOS 6	35.1	20.8	12.6	15.3	7.1	15.2	106.1	429.4
COMPRAS AL EXTERIOR.	COMPRAS AL ESTADO	16.3	83.1	14.7	50.7	23.0	28.8		
	COMPRAS A ESTADOS VECINOS	11.5	51.6	25.1	43.8	3.9	11.1		
	COMPRAS AL RESTO DEL PAIS	17.1	91.3	140.9	200.8	5.5	3.0		
	COMPRAS AL EXTRANJERO	0.0	17.3	2.1	65.6	0.0	22.4		
VALOR AGREGADO	CONSUMO DE CAPITAL	24.0	58.3	5.3	7.9	36.9	31.8		
	SUELDOS Y SALARIOS	111.0	261.1	45.7	87.6	51.2	129.4		
	INGRESOS MIXTOS	149.7	147.8	97.7	122.2	107.9	123.8		
	INGRESOS DEL GOBIERNO	20.6	171.8	14.0	26.6	1.4	7.8		
	VALOR TOTAL DE LA PRODUCCION	577.9	1 278.7	546.5	905.4	334.6	429.4		

Cuadro Nº 2

MATRIZ DE COEFICIENTES TECNICOS DE LA ZONA DELICIAS CHIHUAHUA 1964.

SECTORES		1	2	3	4	5	6
AGRICOLA	1	.1178	.0005	.1830	.0195	.0126	.0035
INDUSTRIAS EXTRACTIVAS	2	.0325	.1387	.0070	.0110	.1222	.0026
ALIMENTOS BEBIDAS Y TABACO	3	.0337	.0023	.0926	.0019	.0054	.0484
OTRAS INDUSTRIAS	4	.0817	.0795	.0390	.2597	.1447	.0666
TRANSPORTES	5	.0675	.0727	.0232	.0225	.0072	.0095
SERVICIOS	6	.0607	.0163	.0231	.0169	.0212	.0354
COMPRAS AL ESTADO		.0282	.0650	.0269	.0560	.0687	.0671
COMPRAS A ESTADOS VECINOS		.0199	.0404	.0459	.0484	.0117	.0259
COMPRAS AL RESTO DEL PAIS		.0296	.0714	.2578	.2218	.0164	.0070
COMPRAS AL EXTRANJERO		0.0	.0135	.0038	.0725	0.0	.0522
CONSUMO DE CAPITAL		.0415	.0456	.0097	.0087	.1103	.0741
SUELDOS Y SALARIOS		.1921	.2042	.0836	.0968	.1530	.3014
INGRESOS MIXTOS		.2590	.1156	.1788	.1350	.3225	.2883
INGRESOS DEL GOBIERNO		.0356	.1344	.0256	.0294	.0042	.0182

Cuadro N

MATRIZ DE REQUERIMIENTOS DIRECTOS E INDIRECTOS DE PRODUCCION
ZONA DELICIAS, CHIHUAHUA 1964.

SECTORES	1	2	3	4	5	6
AGRICOLA	1.1486	.0064	.2341	.0320	.0217	.0184
INDUSTRIAS EXTRACTIVAS	.0585	1.1761	.0259	.0238	.1493	.0078
ALIMENTOS BEBIDAS Y TABACO	.0479	.0054	1.1137	.0058	.0094	.0566
OTRAS INDUSTRIAS	.1599	.1472	.1004	1.3665	.2221	.1026
TRANSPORTES	.0879	.0903	.0465	.0353	1.0252	.0154
SERVICIOS	.0791	.0250	.0446	.0273	.0305	1.0415

2. IMPACTO SOBRE EL VALOR BRUTO DE LA PRODUCCION

Para determinar cuales son los Sectores más importantes en relación al impacto sobre el Valor Bruto de la Producción se utilizaron los índices de poder de la dispersión y de la sensibilidad de la dispersión elaborados por P. Morregard Rasmussen 2/

Se define el índice de poder de la dispersión como:

$$U_{\cdot j} = \frac{(1/m)\ Z_{\cdot j}}{(1/m^2)\ Z_{\cdot j}} \qquad (j = 1, 2 \ldots\ldots m)$$

y el índice de sensibilidad de la dispersión se define como:

$$U_{i\cdot} = \frac{(1/m)\ Z_{i}}{(1/m^2)\ Z_{i}}$$

Donde:

Z = Matriz de requerimientos directos e indirectos de producción (MXM). Corresponde a la Matriz $(I-A)^{-1}$

Z.j = Incremento total en la producción de todos los Sectores necesarios para satisfacer un incremento Unitario en la demanda del Sector "j". Suma de la columna del Sector j en la Matriz Z $(Z_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{m} Z_{ij})$.

Zi. = Incremento total en la producción del Sector i necesario para satisfacer incrementos unitarios en la demanda final de cada uno de los "m" Sectores. Suma del renglón del Sector i en la Matriz Z $(Z_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{m} Z_{ij})$.

2/ P. Morregaard Rasmussen, "Studies in Inter Sectorial Relations", North-Holland Publishing Co., 1956, Amsterdam.

Luego:

$$\frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m} Z_{i.} = \frac{1}{m^2}\sum_{j=1}^{m} Z_{.j} = \frac{1}{m^2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} Z_{ij}$$

Estos índices se interpretan como sigue: si $U_{.j} > 1$ significa que un Sector escogido al azar muestra un aumento relativamente grande (en relación al promedio de todos los Sectores de la economía) para responder a un aumento en la demanda final del Sector "j", lo que significa que dicho Sector pesa considerablemente en el Sistema total de Sectores. Lo contrario sucede cuando $U_{.j} < 1$.

Por otro lado, si $U_{i.} > 1$ significa que el Sector "i" genera (en relación al promedio de todos los Sectores) incrementos en la producción mayores que los otros Sectores ante incrementos dados en la demanda final de ellos, sucediendo lo contrario si $U_{i.} < 1$. En otras palabras, este índice representa la medida en la que el conjunto de Sectores pesa sobre el Sector "i".

Estos índices se calcularon a partir de la información contenida en el Cuadro No. 3 y se presentan en el Cuadro siguiente (Cuadro No. 4).

Cuadro No. 4: Indices de Poder y Sensibilidad de la Dispersión de la Zona de Delicias, Chih.

Sectores \ Indices	U .j	Ui.
Agrícola	1.079	0.997
Industrias extractivas	.989	0.983
Alimentos, textiles y Calzado	1.068	0.841
Otras Industrias	1.018	1.433
Transportes	.995	0.887
Servicios	.848	0.852

El índice de poder de la dispersión (U .j) muestra que el Sector agrícola es el más importante, lo que, como se anotó, indica que este Sector gravita fuertemente sobre los demás. Es decir, obliga a mayores aumentos de la producción en los demás Sectores que cualquier otro de los aquí analizados.

El índice de sensibilidad de la dispersión señala que el Sector de otras Industrias es el más importante, lo que significa que ante Incrementos en la demanda de todos los Sectores económicos de la región éste responde con mayores incrementos en producción; le sigue en orden de importancia el Sector Agrícola y el Sector de Alimentos, Calzado y Textiles, estando los demás Sectores económicos muy alejados de los primeros.

El análisis anterior muestra claramente la importancia que tiene el Sector Agrícola en la región en lo que se refiere al valor de la producción. Sin embargo, dado que los objetivos de política económica que actualmente persigue el Sector Público son múltiples, este solo indicador no proporciona elementos de juicio suficientes para la toma de decisiones. Por lo tanto, es necesario profundizar más en el análisis de la base económica de la región.

3. IMPACTO SOBRE EL VALOR AGREGADO

La generación de Valor Agregado y su composición es otro de los indicadores que proporcionan elementos para la asignación eficiente de recursos escasos. El monto de valor agregado o el cambio en el mismo generados por los diferentes Sectores económicos de una región o un país determinado representa un criterio de crecimiento económico, mientras que la composición del mismo -

es un criterio que lleva consigo elementos de distribución del ingreso. Siendo el objetivo actual del Sector Público el lograr altas tasas de crecimiento del Producto, a la vez que una mejor distribución del mismo, es importante analizar el efecto que sobre estas variables tendrán las inversiones canalizadas a los diferentes Sectores económicos de la Zona de Delicias, Chih.

Los elementos necesarios para cuantificar las variables antes señaladas están contenidos en los Cuadros 2 y 3 de este estudio, mostrándose los resultados en el Cuadro No. 5 3/. En él se puede observar como la agricultura es la que genera mayor impacto directo e indirecto sobre el valor agregado ante incrementos unitarios en su demanda final (0.799 pesos). Le sigue en orden de importancia el Sector Servicios (0.777 pesos) y los Transportes (0.774 pesos).

En cuanto a la composición del valor agregado es el Sector Servicios el que genera mayor monto de Sueldos y Salarios (0.337) ante incrementos unitarios en su demanda final, siguiéndole en orden de importancia el Sector Agrícola (0.289 pesos) y las Industrias extractivas (0.277 pesos). En lo que se refiere a las utilidades, es el Sector de Transportes el que genera mayor monto (0.394 pesos) siguiéndole el Sector Agrícola (0.386 pesos) y el Sector de Servicios (0.334 pesos).

De lo anterior, se puede concluir que es el Sector Agrícola el que mejor cumple con los objetivos perseguidos por el Sector Público, pues genera ma

3/ El procedimiento adoptado consistió en aplicar el modelo de Insumo-Producto de Leontief.

Cuadro Nº 5

VALOR AGREGADO DIRECTO E INDIRECTO ANTE INCREMENTOS UNITARIOS DE CADA UNO DE LOS SECTORES PRODUCTIVOS - DE LA ZONA DELICIAS, CHIHUAHUA 1964.

SECTORES	SUELDOS Y SALARIOS	INGRESOS DEL GOBIERNO	CONSUMO DE CAPITAL	INGRESOS MIXTOS	VALOR AGREGADO TOTAL
AGRICOLA	0.289	0.056	0.068	0.386	0.799
INDUSTRIAS EXTRACTIVAS	0.277	0.162	0.067	0.196	0.702
ALIMENTOS BEBIDAS Y TABACO	0.173	0.044	0.039	0.297	0.553
OTRAS INDUSTRIAS	0.233	0.044	0.020	0.141	0.438
TRANSPORTES	0.222	0.033	0.125	0.394	0.774
SERVICIOS	0.337	0.025	0.081	0.334	0.777

yor monto de valor agregado, estando éste relativamente bien distribuido entre los factores de la Producción, siendo superado en este aspecto sólo por el Sector Servicios. Además, es el que genera mayores ingresos al Gobierno.

4. GENERACION DE EMPLEOS

A fin de cuantificar las necesidades de empleos debidas a los aumentos unitarios en la demanda final en los Sectores considerados en este estudio, se manejan estimaciones de las relaciones Empleo/Valor de la producción para cada uno de los Sectores económicos de la Zona. Estas relaciones fueron obtenidas en la siguiente forma.

De la información contenida en el Censo General de Población para los años de 1960 y 1970 se calcularon las tasas de crecimiento anual de los empleos en los Sectores Productivos de la Zona. Con esta tasa fue posible la estimación de los empleos para el año 1964.

Una vez obtenido el empleo sectorial para 1964 hubo necesidad de prorratear los empleos del Sector Comercio entre los seis Sectores considerados pues la Matriz Insumo-Producto del Banco de México incluye los márgenes de Comercio dentro de los Insumos de cada Sector. El prorrateo se hizo de acuerdo a la importancia del valor de la Producción de cada uno de los seis Sectores Económicos de la Zona.

Las estimaciones señaladas, así como los resultados a que se llegó (suponiendo que los requerimientos medios de trabajadores son iguales a los requerimientos marginales) están contenidos en el Cuadro No. 6. En él se muestra la clara superioridad de la Agricultura en lo que se refiere a generación directa e indirecta de empleos pues genera tres veces más empleos (101.6 perso-

Cuadro N° 6

DETERMINACION DE LOS REQUERIMIENTOS DE EMPLEO PARA SATISFACER INCREMENTOS DE UN MILLON DE PESOS EN LA DEMANDA FINAL DE CADA UNO DE LOS SECTORES PRODUCTIVOS DE LA ZONA DE DELICIAS, CHIH. 1964.

CONCEPTOS / SECTORES	POBLACION ECONOMICAMENTE ACTIVA EN 1964* (PERSONAS) (1)	VALOR BRUTO DE LA PRODUCCION EN 1964 ** (MILLONES DE PESOS) (2)	(1/2)	REQUERIMIENTOS DIRECTOS E INDIRECTOS DE EMPLEO POR CADA MILLON DE PESOS DE PRODUCCION ***
AGRICOLA	48,400	577.9	83.7	101.6
INDUSTRIAS EXTRACTIVAS	10.605	1228.7	8.3	25.1
ALIMENTOS BEBIDAS Y TABACO	4.066	546.5	7.4	30.6
OTRAS INDUSTRIAS	8,620	905.4	9.5	17.0
TRANSPORTES	3,120	334.6	9.3	16.9
SERVICIOS	12.880	429.4	29.9	33.3

FUENTE: * ESTIMADO A PARTIR DE LOS DATOS DEL CENSO GENERAL DE POBLACION PARA EL ESTADO DE CHIHUAH 1960 Y 1970.

** MATRIZ INSUMO PRODUCTO DE LA ZONA DE DELICIAS, CHIHUAHUA 1964-BANCO DE MEXICO, S.A.

*** PREMULTIPLICANDO EL VECTOR DE RELACIONES TRABAJO/PRODUCTO POR LA MATRIZ DE REQUERIMIENT DIRECTOS E INDIRECTOS DE PRODUCCION nas por cada millón de pesos de producto) que el Sector Servicios que es el segundo en importancia (33.3 personas por cada millón de pesos de producto).

Lo anterior indica que teniendo en cuenta que la solución del problema del desempleo tiene alta prioridad dentro de los objetivos nacionales de política económica, es el Sector Agrícola de la región el que contribuye en mejor forma a la solución de este problema.

5. IMPACTO REGIONAL

En este punto se analiza la estructura de los requerimientos insumos importados y locales que se origina ante incrementos en la demanda final de cada uno de los Sectores de la región. Esto es importante pues en función de dicha estructura estará el impacto que generen los diferentes Sectores económicos en la región. Así, si un Sector tiene una alta proporción de Insumos externos, sus repercuciones vía "origen de la Producción" serán mínimos; lo contrario sucede cuando la proporción de Insumos internos es alta relativamente.

El Cuadro No. 7 muestra los resultados a que se llegó suponiendo incrementos unitarios en la demanda final de los Sectores considerados. De él se desprende que el Sector Agrícola es el que genera mayores repercusiones en la zona vía "Origen de la Producción", pues sus requerimientos directos e indirectos de Insumos externos por cada peso de demanda final son los más bajos y los requerimientos de Insumos internos los más altos.

6. BALANZA COMERCIAL CON EL EXTRANJERO

En lo que se refiere al destino de la producción Sectorial de la Zona -

Cuadro N° 7

ESTRUCTURA DE INSUMOS REQUERIDOS ANTE INCREMENTOS UNITARIOS DE DEMANDA FINAL EN LOS SECTORES PRODUCTIVOS DE LA ZONA DE DELICIAS, CHIHUAHUA 1964.

SECTORES	INSUMOS INTERNOS P T B	INSUMOS EXTERNOS P T B	REQUERIMIENTOS DIRECTOS E INDIRECTOS DE INSUMOS LOCALES.	REQUERIMIENTOS DIRECTOS E INDIRECTOS DE INSUMOS EXTERNOS.
AGRICOLA	0.3939	0.0777	0.5817	0.1846
INDUSTRIAS EXTRACTIVAS	0.3100	0.1903	0.4504	0.2973
ALIMENTOS BEBIDAS Y TABACO.	0.3679	0.3344	0.5652	0.4468
OTRAS INDUSTRIAS	0.3315	0.3987	0.4907	0.5613
TRANSPORTES	0.3133	0.0968	0.4582	0.2256
SERVICIOS	0.1660	0.1522	0.2421	0.2038

en estudio, el renglón más importante lo constituyen las exportaciones, pues - la captación de divisas para financiar el desarrollo económico del país es otro- de los objetivos de política económica nacional de alta prioridad. Lo anterior - implica, necesariamente, estimular aquellas actividades orientadas a la captación de divisas.

El Cuadro No. 8 muestra el destino de un peso de Producto de cada uno de los Sectores de la Zona. En él se observa que el Sector más importante - en términos de captación de divisas es el de industrias extractivas, ya que el - 57% de su producción (700.4 millones de pesos en 1964) se destina a la exportación, siguiendole en importancia el Sector agrícola con exportaciones de un - 8% de su producción (46.2 millones en 1964).

7. CONCLUSIONES

El análisis Sectorial llevado a cabo nos permite concluir que el Sector agrícola de la Zona de Delicias, Chih., juega un papel muy importante en la estructura productiva de la misma, ya que es el Sector que tiene mayor impacto - en la generación de valor agregado estando éste relativamente bien distribuido- entre los factores de la producción. Asimismo, es el que genera mayor número de empleos y es que mayores repercusiones tiene en la estructura productiva de la Zona. Sin embargo, en cuanto a captación de divisas se ve ampliamente superado por el Sector de industrias extractivas.

Este último punto es importante de analizar pues sabiendo que la capacidad de exportación del país está basada en los productos primarios (ya que -

Cuadro N° 8

DESTINO DE LA PRODUCCION SECTORIAL
EN LA ZONA DELICIAS, CHIHUAHUA 1964.
(Distribución de un peso de producto)

SECTORES	INSUMOS DEMANDADOS POR OTROS SECTORES Val. de la prod.	VENTAS AL EXTERIOR Val. de la prod.	VENTAS A RESIDENTES Val. de la prod.	EXPORTACION Val. de la prod.
AGRICOLA	0.33	0.44	0.23	0.08
INDUSTRIAS EXTRACTIVAS	0.20	0.79	0.01	0.57
ALIMENTOS BEBIDAS Y TABACO.	0.18	0.14	0.68	0.03
OTRAS INDUSTRIAS	0.53	0.04	0.41	0.005
TRANSPORTES	0.51	0.11	0.38	0.0
SERVICIOS	0.26	0.07	0.68	0.0

estos contribuyen con alrededor de un 75% del total de exportaciones) y siendo difícil que esta estructura cambie en el mediano plazo, se puede pensar en canalizar inversiones al Sector agrícola de la Zona con el fin de formar una agricultura comercial orientada a la exportación, obteniendo a su vez los beneficios antes señalados (generación de valor agregado, empleos, etc.).

Suppose that each item in the sequence has the same expectation; then the asymptotic expectation is just that common expectation, for if $Ex^{(n)} = \mu$ for all n, then $\bar{E}x = \lim_{n\to\infty} Ex^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \mu = \mu$. Alternatively, suppose that $Ex^{(n)} = \mu + n^{-1}c_1 + n^{-2}c_2 + \cdots$ where the c's are finite constants; then $\bar{E}x = \lim_{n\to\infty} Ex^{(n)} = \lim_{n\to\infty} (\mu + n^{-1}c_1 + n^{-2}c_2 + \cdots) = \mu$. Thus if the expectation of $x^{(n)}$ is expressible as a power series in $n^0, n^{-1}, n^{-2}, \ldots$, the asymptotic expectation of $x^{(n)}$ is the leading term of this power series; as n goes to infinity the terms of "higher order of smallness" in n vanish.

(6.2) Let $\{x^{(n)}\} = x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}, \ldots$ be a sequence of random variables; let $\{Ex^{(n)}\} = Ex^{(1)}, \ldots, Ex^{(n)}, \ldots$ be the sequence of their expectations; and let $\{E(x^{(n)} - Ex^{(n)})^2\} = E(x^{(1)} - Ex^{(1)})^2, \ldots, E(x^{(n)} - Ex^{(n)})^2, \ldots$ be the sequence of their variances. Suppose that the asymptotic expectation of the sequence exists, $\bar{E}x^{(n)} = \bar{E}x$. Suppose further that $\lim_{n\to\infty} E[\sqrt{n}(x^{(n)} - Ex^{(n)})]^2 = v$ where v is a finite constant. Then $\sigma^2 = v/n$ is said to be the asymptotic variance of the sequence $\{x^{(n)}\}$, and we write $\bar{E}(x^{(n)} - \bar{E}x^{(n)})^2 = \sigma^2$ or simply $\bar{E}(x - \bar{E}x)^2 = \sigma^2$.

Suppose that each item in the sequence has the variance v/n; then the asymptotic variance is just that common variance, for if $E(x^{(n)} - Ex^{(n)})^2 = v/n$ for all n, then $\bar{E}(x - \bar{E}x)^2 = n^{-1} \lim_{n\to\infty} E[\sqrt{n}(x^{(n)} - Ex^{(n)})]^2 = n^{-1} \times \lim_{n\to\infty} (nv)/n = v/n$. Alternatively, suppose that $E(x^{(n)} - Ex^{(n)})^2 = n^{-1}v + n^{-2}c_2 + n^{-3}c_3 + \cdots$ where the c's are finite constants; then

$$
\begin{aligned}
\bar{E}(x - \bar{E}x)^2 &= n^{-1} \lim_{n\to\infty} E[\sqrt{n}(x^{(n)} - Ex^{(n)})]^2 \\
&= n^{-1} \lim_{n\to\infty} [nE(x^{(n)} - Ex^{(n)})^2] \\
&= n^{-1} \lim_{n\to\infty} (v + n^{-1}c_2 + n^{-2}c_3 + \cdots) = n^{-1}v.
\end{aligned}
$$

Thus if the variance of each $x^{(n)}$ is expressible as a power series in n^{-1}, $n^{-2}, \ldots$, the asymptotic variance of $x^{(n)}$ is the leading term of this power series; as n goes to infinity the terms of "higher order of smallness" in n vanish. In many applications we deal with sequences where the expectations are expressible as power series in $n^0, n^{-1}, n^{-2}, \ldots$, and the variances are expressible as power series in $n^{-1}, n^{-2}, \ldots$. Of course the asymptotic moments may be used as approximations to the moments for any n. It may also be noted that the asymptotic variance of the sequence $\{x^{(n)}\}$ is just n^{-1} times the asymptotic expectation of the sequence $\{[\sqrt{n}(x^{(n)} - Ex^{(n)})]^2\}$.

These concepts extend directly to sequences of random vectors: i.e., sequences in which each item is a vector of random variables. The joint distributions may converge to an asymptotic distribution: again we concentrate on the first and second asymptotic moments.

(6.3) Let $\{\mathbf{x}^{(n)}\} = \mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}, \ldots$ be a sequence of random vectors and let $\{E\mathbf{x}^{(n)}\} = E\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, E\mathbf{x}^{(n)}, \ldots$ be the sequence of their expectation vectors. Suppose that $\lim_{n\to\infty} E\mathbf{x}^{(n)} = \boldsymbol{\mu}$ where $\boldsymbol{\mu}$ is a vector of finite constants. Then $\boldsymbol{\mu}$ is said to be the asymptotic expectation of the sequence $\mathbf{x}^{(n)}$ and we write $\bar{E}\mathbf{x}^{(n)} = \boldsymbol{\mu}$ or simply $\bar{E}\mathbf{x} = \boldsymbol{\mu}$.

Thus the asymptotic expectation of a vector is simply the vector of asymptotic expectations of the random variables that are the elements of the vector.

(6.4) Let $\{\mathbf{x}^{(n)}\} = \mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}, \ldots$ be a sequence of random vectors; let $\{E\mathbf{x}^{(n)}\} = E\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, E\mathbf{x}^{(n)}, \ldots$ be the sequence of their expectation vectors; and let

$$
\begin{aligned}
\{E(\mathbf{x}^{(n)} &- E\mathbf{x}^{(n)})(\mathbf{x}^{(n)} - E\mathbf{x}^{(n)})'\} \\
&= E(\mathbf{x}^{(1)} - E\mathbf{x}^{(1)})(\mathbf{x}^{(1)} - E\mathbf{x}^{(1)})', \ldots, \\
&\quad E(\mathbf{x}^{(n)} - E\mathbf{x}^{(n)})(\mathbf{x}^{(n)} - E\mathbf{x}^{(n)})', \ldots
\end{aligned}
$$

be the sequence of their covariance matrices. Suppose that the asymptotic expectation of the sequence exists, $\bar{E}\mathbf{x}^{(n)} = \bar{E}\mathbf{x}$. Suppose further that $\lim_{n\to\infty} E[\sqrt{n}(\mathbf{x}^{(n)} - E\mathbf{x}^{(n)})][\sqrt{n}(\mathbf{x}^{(n)} - E\mathbf{x}^{(n)})]' = \mathbf{V}$ where $\mathbf{V}$ is a matrix of finite constants. Then $\boldsymbol{\Sigma} = n^{-1}\mathbf{V}$ is said to be the asymptotic covariance matrix of the sequence $\mathbf{x}^{(n)}$, and we write $\bar{E}(\mathbf{x}^{(n)} - \bar{E}\mathbf{x}^{(n)})(\mathbf{x}^{(n)} - \bar{E}\mathbf{x}^{(n)})' = \boldsymbol{\Sigma}$, or simply $\bar{E}(\mathbf{x} - \bar{E}\mathbf{x})(\mathbf{x} - \bar{E}\mathbf{x})' = \boldsymbol{\Sigma}$.

Thus the asymptotic covariance matrix of a random vector is simply the matrix of asymptotic variances and covariances of the random variables that are the elements of the vector.

Extending a bit further we may define the asymptotic expectation of a sequence of random matrices as the matrix of asymptotic expectations of the random variables that are the elements of the matrix.

Probability Limit

Again consider the sequence of random variables $\{x^{(n)}\}$. It may be that as n goes to infinity the mass or density function becomes entirely concentrated on some point x^*. If so, the sequence is said to converge in probability to x^*; equivalently x^* is said to be the probability limit of the sequence. Thus

(6.5) Let $\{x^{(n)}\} = x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}, \ldots$ be a sequence of random variables. Suppose that $\lim_{n\to\infty} \text{Prob}\,\{|x^{(n)} - x^*| \geq \delta\} = 0$ for every $\delta > 0$, where x^* is a finite constant. Then x^* is said to be the probability limit of the sequence $\{x^{(n)}\}$, and we write $\text{plim}\, x^{(n)} = x^*$ or simply $\text{plim}\, x = x^*$.

Clearly if the entire distribution collapses on a point that point must be the asymptotic expectation; thus

(6.6) If $\text{plim}\, x = x^*$, then $Ex = x^*$.

Of course the converse is not true, for the expectation can approach a constant without the distribution collapsing. If the variance goes to zero, however, the distribution will collapse; thus

(6.7) If $Ex = x^*$ and $\lim_{n\to\infty} E(x - Ex)^2 = 0$, then $\text{plim}\, x = x^*$.

Taking limits in Chebyshev's inequality,

$$\lim_{n\to\infty} \text{Prob}\,\{|x^{(n)} - Ex^{(n)}| \geq \epsilon\} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{E(x^{(n)} - Ex^{(n)})^2}{\epsilon^2}$$

for every $\epsilon > 0$. Now as n goes to infinity $Ex^{(n)}$ goes to $Ex = x^*$ and $E(x^{(n)} - Ex^{(n)})^2$ goes to $E(x - Ex)^2$. If in fact $E(x - Ex)^2$ goes to zero, the limit on the right-hand side is zero, so that the limit on the left-hand side is also zero. Then by (6.5) $\text{plim}\, x = x^*$. For example, suppose $Ex = x^*$ exists and $E(x - Ex)^2 = v/n$ where v is a finite constant; then $\lim_{n\to\infty} v/n = 0$ so that $\text{plim}\, x = x^*$.

It is clear that the probability limit of a constant is just the constant:

(6.8) If c is a constant, then $\text{plim}\, c = c$.

An important property of probability limits is that the probability limit of a continuous function is the function of the probability limits; thus

(6.9) If $\text{plim}\, x = x^*$ and if $g(x)$ is a continuous function, then $\text{plim}\, g(x) = g(x^*)$.

This theorem is due to Slutsky; for a proof see Wilks (1962, pp. 102–103). Note that the corresponding theorem for expectations is not true; $Eg(x) \neq g(Ex)$, in general.

These concepts extend directly to sequences of random vectors.

(6.10) Let $\{\mathbf{x}^{(n)}\} = \mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}, \ldots$ be a sequence of random vectors. Suppose that $\lim_{n\to\infty} \text{Prob}\,\{|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}^*| \geq \boldsymbol{\delta}\} = 0$ for every vector $\boldsymbol{\delta} > 0$, however small its elements, where $\mathbf{x}^*$ is a vector of finite constants. Then $\mathbf{x}^*$ is said to be the probability limit of the sequence $\{\mathbf{x}^{(n)}\}$, and we write $\text{plim}\, \mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{x}^*$ or simply $\text{plim}\, \mathbf{x} = \mathbf{x}^*$.

Thus the probability limit of a random vector is simply the vector of probability limits of the random variables composing the vector. It will be convenient to record the extensions of (6.6)–(6.9):

(6.11) If $\text{plim}\, \mathbf{x} = \mathbf{x}^*$, then $E\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$;

and

(6.12) If $E\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ and $\lim_{n\to\infty} E(\mathbf{x} - E\mathbf{x})(\mathbf{x} - E\mathbf{x})' = 0$, then $\text{plim}\, \mathbf{x} = \mathbf{x}^*$.

For example, suppose that $E\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ and $E(\mathbf{x} - E\mathbf{x})(\mathbf{x} - E\mathbf{x})' = n^{-1}\mathbf{V}$ where $\mathbf{V}$ is a matrix of finite constants; since $\lim_{n\to\infty} n^{-1}\mathbf{V} = 0$ it will be true that $\text{plim}\, \mathbf{x} = \mathbf{x}^*$. Continuing,

(6.13) If $\mathbf{c}$ is a constant vector, then $\text{plim}\, \mathbf{c} = \mathbf{c}$;

and Slutsky's theorem extends to

(6.14) If $\text{plim}\, \mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ and if $\mathbf{y}$ is a random vector, whose elements $y_i = g_i(\mathbf{x})$ are continuous functions of the elements of $\mathbf{x}$, then $\text{plim}\, \mathbf{y} = \mathbf{y}^*$ where $y_i^* = g_i(\mathbf{x}^*)$.

The concepts extend further to sequences of random matrices. Thus the probability limit of a random matrix is the matrix of probability limits of the random variables that are the elements of the matrix; the probability limit of a matrix is also its asymptotic expectation: if the matrix is constant, its probability limit is itself. It is convenient to record two important applications of Slutsky's theorem applied to matrices. Since the elements of a product matrix are continuous functions of the elements of the component matrices,

(6.15) $\text{plim}\,(\mathbf{AB}) = (\text{plim}\,\mathbf{A})(\text{plim}\,\mathbf{B})$.

Since the elements of an inverse matrix are continuous functions of the elements of the original matrix,

(6.16) $\text{plim}\,(\mathbf{A}^{-1}) = (\text{plim}\,\mathbf{A})^{-1}$.

In both cases, of course, we assume that the probability limits on the right-hand side exist.

Finally we note a useful result, which follows from the remark that the asymptotic variance of the sequence $\{x^{(n)}\}$ is just n^{-1} times the asymptotic expectation of the sequence $\{[\sqrt{n}(x^{(n)} - Ex^{(n)})]^2\}$:

(6.17) If $\text{plim } [\sqrt{n}(\mathbf{x}^{(n)} - E\mathbf{x}^{(n)})][\sqrt{n}(\mathbf{x}^{(n)} - E\mathbf{x}^{(n)})]' = \mathbf{V}$, then $E(\mathbf{x} - E\mathbf{x})(\mathbf{x} - E\mathbf{x})' = n^{-1}\mathbf{V}$.

Asymptotic Distribution of Sample Statistics

The leading application of the theory of sequences of random variables and asymptotic distributions is to sample statistics. Given a parent population and a function of the sample observations we can consider the distribution of this function for sample size 1, sample size 2, ..., sample size T, ... The functions for the successive sample sizes constitute a sequence of random variables. The distribution of the function typically varies systematically with the sample size, and in important cases converges to a limiting distribution as the sample size T goes to infinity. This limiting distribution is of interest, particularly since it may be used as an approximation for the distributions for finite sample sizes, which are often difficult to derive. In fact we are often interested only in moments of the limiting distribution such as the asymptotic mean and asymptotic variance, and in the probability limit.

We have used the superscript n for general sequences of random variables; in its stead we use the subscript T in our discussion of sample statistics.

Consider random sampling from a population with mean μ and variance σ^2 and fourth central moment μ_4. For sample size T the sample mean $\bar{x} = T^{-1} \sum_{t=1}^{T} x_t$, and we have seen that $E\bar{x} = \mu$ and $E(\bar{x} - \mu)^2 = T^{-1}\sigma^2$. It follows that $\bar{E}\bar{x} = \lim_{T\to\infty} E\bar{x} = \mu$ and $\bar{E}(\bar{x} - \mu)^2 = T^{-1} \lim_{T\to\infty} E[\sqrt{T}(\bar{x} - \mu)]^2 = T^{-1} \lim_{T\to\infty} TT^{-1}\sigma^2 = T^{-1}\sigma^2$; further, since $\lim_{T\to\infty} T^{-1}\sigma^2 = 0$, it follows that $\text{plim } \bar{x} = \mu$. Thus the asymptotic expectation and probability limit of $\bar{x}$ is μ, and its asymptotic variance is $T^{-1}\sigma^2$. For sample size T the sample variance $s^2 = T^{-1} \sum_{t=1}^{T} (x_t - \bar{x})^2$, and we have seen that $Es^2 = (T-1)T^{-1}\sigma^2$ and $E(s^2 - Es^2)^2 = T^{-1}(\mu_4 - \sigma^4) - 2T^{-2}(\mu_4 - 2\sigma^4) + T^{-3}(\mu_4 - 3\sigma^4)$. It follows that $\bar{E}s^2 = \lim_{T\to\infty} (T-1)T^{-1}\sigma^2 = \sigma^2$ and

$$\begin{aligned}\bar{E}(s^2 - \sigma^2)^2 &= T^{-1} \lim_{T\to\infty} E[\sqrt{T}(s^2 - Es^2)]^2 \\ &= T^{-1} \lim_{T\to\infty} \{T[T^{-1}(\mu_4 - \sigma^4) - 2T^{-2}(\mu_4 - 2\sigma^4) \\ &\qquad + T^{-3}(\mu_4 - 3\sigma^4)]\} = T^{-1}(\mu_4 - \sigma^4);\end{aligned}$$

further, since $\lim_{T\to\infty} T^{-1}(\mu_4 - \sigma^4) = 0$, it follows that $\text{plim } s^2 = \sigma^2$. Thus the asymptotic expectation and probability limit of s^2 is σ^2, and its asymptotic variance is $T^{-1}(\mu_4 - \sigma^4)$. An instructive alternative derivation of $\text{plim } s^2 = \sigma^2$ is based on the fact that $s^2 = s_*^2 - (\bar{x} - \mu)^2$ where $s_*^2 = T^{-1} \sum (x_t - \mu)^2$. We have seen that $Es_*^2 = \sigma^2$ and

$$E(s_*^2 - \sigma^2)^2 = T^{-1}(\mu_4 - \sigma^4);$$

hence $\bar{E}s_*^2 = \sigma^2$, $\bar{E}(s_*^2 - \sigma^2)^2 = T^{-1}(\mu_4 - \sigma^4)$, and $\text{plim } s_*^2 = \sigma^2$. Then, applying Slutsky's theorem, $\text{plim } s^2 = \text{plim } s_*^2 + \text{plim } [(\bar{x} - \mu)^2] = \text{plim } s_*^2 + [\text{plim } (\bar{x} - \mu)]^2 = \sigma^2$, since $\text{plim } (\bar{x} - \mu) = \text{plim } \bar{x} - \text{plim } \mu = \mu - \mu = 0$. Summarizing,

(6.18) For random sampling from a population with mean μ, variance σ^2, and fourth central moment μ_4,

(6.18*a*) $\bar{E}\bar{x} = \mu$, $\bar{E}(\bar{x} - \mu)^2 = \sigma^2/T$, $\text{plim } \bar{x} = \mu$,

(6.18*b*) $\bar{E}s^2 = \sigma^2$, $\bar{E}(s^2 - \sigma^2)^2 = (\mu_4 - \sigma^4)/T$, $\text{plim } s^2 = \sigma^2$.

Thus the distributions of these sample statistics become entirely concentrated on the corresponding population parameters as the sample size grows indefinitely large. The result $\text{plim } \bar{x} = \mu$ is known as the weak law of large numbers.

The multivariate extension of some of these results is straightforward; we record the following:

(6.19) Let $\mathbf{x}$ be a random vector with mean vector $\boldsymbol{\mu}$ and covariance matrix $\boldsymbol{\Sigma}$; let $\bar{\mathbf{x}}$ be the sample mean vector and $\mathbf{S}$ be the sample covariance matrix. Then for random sampling

(6.19*a*) $\bar{E}\bar{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\mu}$, $\bar{E}(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})' = T^{-1}\boldsymbol{\Sigma}$, $\text{plim } \bar{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\mu}$,

(6.19*b*) $\bar{E}\mathbf{S} = \boldsymbol{\Sigma}$, $\text{plim } \mathbf{S} = \boldsymbol{\Sigma}$.

In fact we can say much more about the limiting distribution of the sequence of sample means:

(6.20) For random sampling from a population x with mean μ and variance σ^2 the distribution of $\bar{x}$ converges to $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/T)$ as T goes to infinity.

For a proof see Wilks (1962, pp. 256–257). We have already seen that if the parent population is $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ then the sample mean is distributed $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/T)$ for *all* sample sizes. The remarkable point of (6.20) is that regardless of the shape of the parent distribution the distribution of sample means approaches $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/T)$ as T becomes large—provided that the population mean and variance are finite. In many cases this approach is so rapid that the normal distribution provides an adequate approximation for quite small sample sizes.

Indeed, (6.20) is a special case of a very important result which we formulate as

(6.21) *Central limit theorem.* Let $\{x^{(n)}\} = x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}, \ldots$ be a sequence of independent random variables; let $\{Ex^{(n)}\} = \mu^{(1)}, \ldots, \mu^{(n)}, \ldots$ be the sequence of their expectations; and let $\{E(x^{(n)} - Ex^{(n)})^2\} = \sigma^{2(1)}, \ldots, \sigma^{2(n)}, \ldots$ be the sequence of their variances. In addition, let $x_n = \sum_{i=1}^{n} x^{(i)}$, $\mu_n = Ex_n = \sum_{i=1}^{n} \mu^{(i)}$, and $\sigma_n^2 = E(x_n - Ex_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma^{2(i)}$. Then under general conditions x_n converges to $\mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$ as n goes to infinity.

For discussion of proofs see Wilks (1962, pp. 257–259). We note the "general conditions" involve the requirement that none of the individual items $x^{(i)}$ dominate the sum as far as its variance is concerned; i.e., that $\lim_{i \to \infty} (\sigma^{2(i)}/\sigma_n^2) = 0$ for all i. Verbally, the central limit theorem states that the distribution of the sum of a large number of independent random variables tends to be normally distributed, almost regardless of the shape of the original distributions. Note also that the mean of these variables will also tend to be normally distributed: If x_n is $\mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$, then $\bar{x}_n = x_n/n$ is $\mathcal{N}(\bar{\mu}_n, \bar{\sigma}_n^2)$, where $\bar{\mu}_n = \mu_n/n$ and $\bar{\sigma}_n^2 = \sigma_n^2/n^2$. It is the central limit theorem that accounts for the central role of the normal distribution in mathematical statistics; although individual variables are not necessarily normally distributed, the sum or mean of a large number of such variables does tend to be normally distributed.

One consequence of the central limit theorem is that the distributions of sample statistics—(5.28) and (5.30)—derived in the preceding section under the assumption of a normal parent are often valid as approximations for large samples even when the parent is not normal.

Asymptotic Mean and Variance for Functions of Random Variables

In (3.40) and (3.48) we obtained exact formulas for the means and variances of linear functions of random variables. Using the concepts of this section we proceed to obtain corresponding approximate formulas for nonlinear functions.

We deal with a sequence of random vectors $\{\mathbf{x}^{(n)}\} = \mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}, \ldots$

where $\mathbf{x}^{(n)} = \begin{pmatrix} x_1^{(n)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m^{(n)} \end{pmatrix}$ with $E\mathbf{x}^{(n)} = \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_m \end{pmatrix}$ and

$$E(\mathbf{x}^{(n)} - E\mathbf{x}^{(n)})(\mathbf{x}^{(n)} - E\mathbf{x}^{(n)})' = \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1m} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \sigma_{m1} & \cdots & \sigma_{mm} \end{pmatrix}.$$

Now let y be a differentiable scalar function of $\mathbf{x}$, $y = y(\mathbf{x})$; then we have a sequence of random variables $\{y^{(n)}\} = y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}, \ldots$ where $y^{(n)} = y(\mathbf{x}^{(n)})$. For simplicity the superscript index is generally omitted. Expanding y in a Taylor series around the point $\boldsymbol{\mu}$,

$$(6.22) \qquad y = y(\boldsymbol{\mu}) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial y}{\partial x_i}(x_i - \mu_i) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 y}{\partial x_i\,\partial x_j}(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) + \cdots$$

where the derivatives are evaluated at $\boldsymbol{\mu}$. Taking expectations,

$$(6.23) \qquad Ey = y(\boldsymbol{\mu}) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial y}{\partial x_i} E(x_i - \mu_i) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 y}{\partial x_i\,\partial x_j} E(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) + \cdots.$$

Taking limits as n goes to infinity,

$$(6.24) \qquad \bar{E}y = \lim_{n\to\infty} Ey = y(\boldsymbol{\mu}) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial y}{\partial x_i} \lim_{n\to\infty} E(x_i - \mu_i) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 y}{\partial x_i\,\partial x_j} \lim_{n\to\infty} E(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) + \cdots$$

$$= y(\boldsymbol{\mu}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 y}{\partial x_i\,\partial x_j} \lim_{n\to\infty} \sigma_{ij} + \cdots$$

since as n goes to infinity Ex_i goes to $\bar{E}x_i = \mu_i$ and $E(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)$ goes to $\bar{E}(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) = \sigma_{ij}$. Thus the asymptotic expectation of y is expressed in terms of the asymptotic expectations, variances and covariances, and higher moments of the elements of $\mathbf{x}$. Suppose in fact that $\boldsymbol{\Sigma} = n^{-1}\mathbf{V}$ where $\mathbf{V} = (v_{ij})$ is a constant matrix; then $\lim_{n\to\infty} \sigma_{ij} = 0$ for all i and j (and the higher order moments also go to zero). Then

$$(6.25) \qquad \bar{E}y = y(\boldsymbol{\mu})$$

so that in this case the asymptotic expectation of the function will be the function of the asymptotic expectations, despite the nonlinearity of the function. Further, subtracting (6.25) from (6.22),

$$(6.26)\qquad y - Ey = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial y}{\partial x_i}(x_i - \mu_i) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 y}{\partial x_i\,\partial x_j}(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) + \cdots;$$

multiplying through by $\sqrt{n}$ and squaring,

$$(6.27)\qquad [\sqrt{n}(y - Ey)]^2 = \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial y}{\partial x_i}\sqrt{n}(x_i - \mu_i)\right]^2 + \left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 y}{\partial x_i\,\partial x_j}\sqrt{n}(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)\right]^2 + \cdots$$

and taking expectations,

$$(6.28)\qquad E[\sqrt{n}(y - Ey)]^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial y}{\partial x_j} E[\sqrt{n}(x_i - \mu_i)\sqrt{n}(x_j - \mu_j)] + \cdots.$$

Then taking limits as n goes to infinity,

$$(6.29)\qquad \lim_{n\to\infty} E[\sqrt{n}(y - Ey)]^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial y}{\partial x_j} \lim_{n\to\infty} E[\sqrt{n}(x_i - \mu_i)\sqrt{n}(x_j - \mu_j)]$$

since the higher-order terms go to zero. Thus

$$(6.30)\qquad E(y - Ey)^2 = n^{-1}\lim_{n\to\infty} E[\sqrt{n}(y - Ey)]^2 = n^{-1}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial y}{\partial x_j} v_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial y}{\partial x_j}\sigma_{ij}$$

since $\sigma_{ij} = n^{-1}v_{ij}$. Thus in this case the asymptotic variance of the function y will be expressed in terms of the variances and covariances of the elements of x.

Summarizing and using a convenient matrix notation, we have

(6.31) Let x be the typical item in a sequence of random vectors and let $y = y(\mathbf{x})$ be a differentiable scalar function of x. Suppose that $E\mathbf{x} = \boldsymbol{\mu}$ and $E(\mathbf{x} - E\mathbf{x})(\mathbf{x} - E\mathbf{x})' = \boldsymbol{\Sigma} = n^{-1}\mathbf{V}$ where V is a matrix of finite constants. Then $Ey = y(\boldsymbol{\mu})$ and $E(y - Ey)^2 = \mathbf{j}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{j}$ where $\mathbf{j} = \partial y/\partial\mathbf{x}$ is evaluated at $\boldsymbol{\mu}$.

This useful result extends to the multivariate case in a straightforward way. Thus

(6.32) Let x be the typical item in a sequence of random vectors and let $\mathbf{y} = y(\mathbf{x})$ be a vector whose elements are differentiable functions of x. Suppose that $E\mathbf{x} = \boldsymbol{\mu}$ and $E(\mathbf{x} - E\mathbf{x})(\mathbf{x} - E\mathbf{x})' = \boldsymbol{\Sigma} = n^{-1}\mathbf{V}$, where V is a matrix of finite constants. Then $E\mathbf{y} = y(\boldsymbol{\mu})$ and $E(\mathbf{y} - E\mathbf{y})(\mathbf{y} - E\mathbf{y})' = \mathbf{J}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{J}$ where $\mathbf{J} = \partial\mathbf{y}/\partial\mathbf{x}$ is evaluated at $\boldsymbol{\mu}$.

It is easily seen that these asymptotic results—which may be used as approximations for finite n—hold exactly for finite n when the functions are in fact linear.

7. STATISTICAL INFERENCE

Statistical Inference

We now turn to the problem of statistical inference proper: Given a sample, what can be inferred about the population from which it was drawn? We have seen that a population can generate different samples and that different populations can generate the same sample, so that we cannot expect to identify with certainty the population from which a given sample was drawn. Nevertheless reasonable rules of statistical inference can be developed.

Often we have, or are willing to assume, partial a priori knowledge of the parent population; e.g., we may know the functional form of the population distribution but not the values of its parameters. Then our interest is in utilizing the information contained in the sample to narrow the gaps in our knowledge; e.g., to ascertain the value of some parameter of the population distribution. Although we do not always assume that the functional form of the population distribution is known, in this book we do confine our attention to statistical inference about population parameters. The discussion follows the classical theory of statistical inference, distinguishing among point estimation, interval estimation, and hypothesis testing.

Point Estimation

In the theory of point estimation we seek to select a function of the sample observations whose value in a given sample will be acceptable as a "good estimate" of a parameter of the parent population. A function used to provide estimates of a parameter θ is called an estimator and written $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, \ldots, x_T)$, or if we wish to emphasize the sample size,

4

$\hat{\theta}_T = \hat{\theta}_T(x_1, \ldots, x_T)$. The value taken by an estimator when a specific set of sample observations are inserted in the function is called an estimate. Since the sample observations are random variables the estimator is also a random variable. Its values, the estimates, are sample statistics and vary from sample to sample drawn from the same population. Hence we cannot expect to find an estimator that always produces the true value of the population parameter. The sampling error of an estimator in a sample is the difference between its value in the sample and the true value of the parameter, $\hat{\theta} - \theta$. Of course we would like to have an estimator whose sampling errors tend to be small; i.e., one whose sampling distribution is in some sense concentrated about the parameter. Suppose that $\hat{\theta}$ were a function of the sample observations such that, for any positive numbers c_1 and c_2 and any other function of the sample observations $\tilde{\theta}$, Prob $\{\theta - c_1 < \hat{\theta} < \theta + c_2\} \geq$ Prob $\{\theta - c_1 < \tilde{\theta} < \theta + c_2\}$. Then there is no question that $\hat{\theta}$ would be the best estimator of θ.

Such unquestionably best estimators are available, however, only in trivial circumstances. Statisticians have come to list more modest desirable properties of an estimator, most of which refer to the mean and variance of the sampling distribution of the estimator. In any particular problem one utilizes these properties—or, rather, such of them as are attainable—as criteria for selection of an estimator from the infinite set of functions of the sample observations. It should be noted that opinion as to which criteria should dominate is not always unanimous.

We proceed to consider some traditional desirable properties that may serve as criteria for selecting an estimator. First, several properties often called "small-sample" properties that relate to samples of any size:

(7.1) $\hat{\theta}$ is an unbiased estimator of θ if $E\hat{\theta} = \theta$,

(7.2) $\hat{\theta}$ is a minimum variance estimator of θ if $E(\hat{\theta} - E\hat{\theta})^2 \leq E(\tilde{\theta} - E\tilde{\theta})^2$ where $\tilde{\theta}$ is any other estimator of θ,

(7.3) $\hat{\theta}$ is a best unbiased (or efficient) estimator of θ if $\hat{\theta}$ is unbiased and $E(\hat{\theta} - \theta)^2 \leq E(\tilde{\theta} - \theta)^2$ where $\tilde{\theta}$ is any other unbiased estimator of θ,

(7.4) $\hat{\theta}$ is a minimum second moment (or minimum mean square error) estimator of θ if $E(\hat{\theta} - \theta)^2 \leq E(\tilde{\theta} - \theta)^2$ where $\tilde{\theta}$ is any other estimator of θ.

The bias of an estimator is the expected value of its sampling error; i.e., the difference between its expectation and the parameter, $E(\hat{\theta} - \theta) = E\hat{\theta} - \theta$. An unbiased estimator is one whose bias is zero; i.e., one that

"on the average" gives the true value of the parameter. In interpreting the criteria (7.2)-(7.4) note that the second moment of an estimator about a parameter equals the sum of the variance of the estimator (around its expectation) and the squared bias of the estimator:

$$(7.5) \quad E(\hat{\theta} - \theta)^2 = E[(\hat{\theta} - E\hat{\theta}) + (E\hat{\theta} - \theta)]^2$$
$$= E(\hat{\theta} - E\hat{\theta})^2 + (E\hat{\theta} - \theta)^2 + 2(E\hat{\theta} - \theta)E(\hat{\theta} - E\hat{\theta})$$
$$= E(\hat{\theta} - E\hat{\theta})^2 + (E\hat{\theta} - \theta)^2 = \text{var}\,(\hat{\theta}) + \text{bias}^2(\hat{\theta}).$$

Note further that the property of minimum variance (concentrated distribution) is not particularly desirable in itself. After all, the trivial estimator $\hat{\theta} = c$ where c is any constant will have a zero variance, but its estimates will not be connected with the parameter, and its bias may be enormous. Taken together with unbiasedness, however, minimum variance is clearly desirable. On the other hand, unbiasedness is not sacred; it may well be reasonable to prefer an estimator that has a small bias and a small variance to one that has no bias but a large variance. This point underlies the minimum second moment (or "minimum mean square error") criterion, which selects a biased estimator if its variance is small enough to compensate for its bias. (In practice a minimum second moment estimator often involves the value of the parameter so that the criterion may not be operational.) The best unbiased or efficient estimator is the minimum variance (and minimum second moment) estimator within the class of unbiased estimators. The term "best" is now to be taken in this technical sense and not to mean "unquestionably most desirable." It is sometimes convenient to use efficiency in a relative sense: $\hat{\theta}$ is more efficient than $\tilde{\theta}$ if $\hat{\theta}$ and $\tilde{\theta}$ are unbiased and $\hat{\theta}$ has a smaller variance than $\tilde{\theta}$.

It is difficult to consider all the possible functions of the sample observations in order to choose the preferred one. We may well be willing to confine our attention to a limited class of functions and to choose within this class. In particular a traditional criterion is given by

(7.6) $\hat{\theta}$ is a best linear unbiased estimator (or BLUE) of θ if $\hat{\theta}$ is a linear estimator (i.e., a linear function of the sample observations), unbiased, and has the minimum variance within the class of linear unbiased estimators of θ.

Since a wide class of functions may be approximated by a linear function, we may not be sacrificing much in confining our attention to the class of linear functions. An analogous criterion is best quadratic unbiasedness.

Next we consider several properties that relate to the limiting distribution of an estimator as the sample size approaches infinity, often called "asymptotic" or "large-sample" properties:

(7.7) $\hat{\theta}$ is an asymptotically unbiased estimator of θ if $\bar{E}\hat{\theta} = \theta$,

(7.8) $\hat{\theta}$ is a consistent estimator of θ if plim $\hat{\theta} = \theta$,

(7.9) $\hat{\theta}$ is an asymptotically efficient estimator of θ if it is consistent and $\bar{E}(\hat{\theta} - \theta)^2 \leq \bar{E}(\tilde{\theta} - \theta)^2$ where $\tilde{\theta}$ is any other consistent estimator of θ.

The asymptotic bias of an estimator is the difference between its asymptotic expectation and the parameter, $\bar{E}(\hat{\theta} - \theta) = \bar{E}\hat{\theta} - \theta$. Thus, loosely speaking, an asymptotically unbiased estimator is one whose bias vanishes when the sample size is sufficiently large. In interpreting the criteria (7.7)–(7.9) note that an unbiased estimator is asymptotically unbiased but not conversely. A consistent estimator is one whose distribution collapses on the parameter as the sample size gets sufficiently large. A consistent estimator is asymptotically unbiased but the converse is not true; the mean of a distribution can approach a constant without the distribution collapsing on that constant. If the asymptotic variance of an asymptotically unbiased estimator is of the form $n^{-1}v$, however, where v is a constant, then the distribution will collapse and the estimator will be consistent. Although the variance of any consistent estimator goes to zero as the sample size grows infinite, it is still reasonable to prefer the one that goes fastest in the sense that its asymptotic variance—which serves as an approximation to the variance for large finite samples—is smallest. This preference is captured in the criterion of asymptotic efficiency. Asymptotic efficiency is also used in a relative sense. Also in view of Slutsky's theorem we have

(7.10) If $\hat{\theta}$ is a consistent estimator of θ, and if $\varphi = g(\theta)$ is a continuous function of θ, then $\hat{\varphi} = g(\hat{\theta})$ is a consistent estimator of φ.

These concepts extend to the case of joint estimation of several parameters of the population distribution. Arranging the parameters in a vector $\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \theta_K \end{pmatrix}$ we seek to choose an estimator vector $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{\theta}_K \end{pmatrix}$ each element of which is a function of the sample observations used to estimate the corresponding element of the parameter vector. The traditional desirable properties in this case include:

(7.11) $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ is an unbiased estimator of $\boldsymbol{\theta}$ if $E\hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}$,

(7.12) $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ is a minimum variance estimator of $\boldsymbol{\theta}$ if $E(\tilde{\boldsymbol{\theta}} - E\tilde{\boldsymbol{\theta}})(\tilde{\boldsymbol{\theta}} - E\tilde{\boldsymbol{\theta}})' - E(\hat{\boldsymbol{\theta}} - E\hat{\boldsymbol{\theta}})(\hat{\boldsymbol{\theta}} - E\hat{\boldsymbol{\theta}})'$ is nonnegative definite where $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ is any other estimator of $\boldsymbol{\theta}$,

(7.13) $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ is a best unbiased (or efficient) estimator of $\boldsymbol{\theta}$ if $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ is unbiased and $E(\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})(\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})' - E(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})'$ is nonnegative definite where $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ is any other unbiased estimator of $\boldsymbol{\theta}$,

(7.14) $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ is a minimum second moment estimator of $\boldsymbol{\theta}$ if

$$E(\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})(\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})' - E(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})'$$

is nonnegative definite where $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ is any other estimator of $\boldsymbol{\theta}$,

(7.15) $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ is a best linear unbiased estimator (or BLUE) of $\boldsymbol{\theta}$ if $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ is a linear estimator (i.e., a linear form in the sample observations), unbiased, and is the minimum variance estimator within the class of linear unbiased estimators of $\boldsymbol{\theta}$,

(7.16) $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ is an asymptotically unbiased estimator of $\boldsymbol{\theta}$ if $\bar{E}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}$,

(7.17) $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ is a consistent estimator of $\boldsymbol{\theta}$ if plim $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}$,

(7.18) $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ is an asymptotically efficient estimator of $\boldsymbol{\theta}$ if $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ is consistent and $\bar{E}(\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})(\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})' - \bar{E}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})'$ is nonnegative definite where $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ is any other consistent estimator of $\boldsymbol{\theta}$.

To interpret these criteria recall that the expectation of a vector is the vector of expectations, the probability limit of a vector is the vector of probability limits, the kth diagonal element of a covariance matrix is the variance of the kth element of the vector, and each diagonal element of a nonnegative definite matrix is greater than or equal to zero. Thus when a vector estimator has a certain desirable property each of its elements has that property.

The decomposition of (7.5) generalizes to

(7.19)
$$\begin{aligned} E(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})' &= E\{[(\hat{\boldsymbol{\theta}} - E\hat{\boldsymbol{\theta}}) + (E\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})][(\hat{\boldsymbol{\theta}} - E\hat{\boldsymbol{\theta}}) + (E\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})]'\} \\ &= E(\hat{\boldsymbol{\theta}} - E\hat{\boldsymbol{\theta}})(\hat{\boldsymbol{\theta}} - E\hat{\boldsymbol{\theta}})' + (E\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})(E\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})' \\ &\quad + E(\hat{\boldsymbol{\theta}} - E\hat{\boldsymbol{\theta}})(E\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})' + (E\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})E(\hat{\boldsymbol{\theta}} - E\hat{\boldsymbol{\theta}})' \\ &= E(\hat{\boldsymbol{\theta}} - E\hat{\boldsymbol{\theta}})(\hat{\boldsymbol{\theta}} - E\hat{\boldsymbol{\theta}})' + (E\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})(E\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})' \\ &= \text{covariance matrix} + (\text{bias vector})(\text{bias vector})'. \end{aligned}$$

The invariance property of (7.10) generalizes to

(7.20) If $\hat{\theta}$ is a consistent estimator of θ, and if $\psi = g(\theta)$ is a vector of continuous functions of θ, then $\hat{\psi} = g(\hat{\theta})$ is a consistent estimator of ψ.

Note also that a best unbiased estimator minimizes the generalized variance within the class of unbiased estimators: If $\hat{\theta}$, with covariance matrix $\Sigma_{\hat{\theta}\hat{\theta}}$, is the best unbiased estimator of θ, and if $\tilde{\theta}$, with covariance matrix $\Sigma_{\tilde{\theta}\tilde{\theta}}$, is any other unbiased estimator, then since $\Sigma_{\tilde{\theta}\tilde{\theta}} - \Sigma_{\hat{\theta}\hat{\theta}}$ is nonnegative definite, $|\Sigma_{\hat{\theta}\hat{\theta}}| \leq |\Sigma_{\tilde{\theta}\tilde{\theta}}|$ by (2.7.21).

Occasionally it is convenient to arrange the set of parameters in a matrix; the desirable properties are readily extended in that event.

Once we have decided which desirable properties we want an estimator to have it is still necessary to locate an estimator having those properties. This is not a trivial problem in general, and therefore it is useful to note a method that under general conditions leads to an estimator with at least desirable asymptotic properties. We have defined the likelihood function of a sample drawn from a population with parameter vector θ as the probability of the sample expressed as a function of the parameter vector. Thus the likelihood function of the sample $x_1, \ldots, x_T$ is $\mathscr{L} = \mathscr{L}(x_1, \ldots, x_T \mid \theta_1, \ldots, \theta_K)$ or compactly $\mathscr{L} = \mathscr{L}(\mathbf{x} \mid \theta)$. Given the sample observation vector $\mathbf{x}$ we may evaluate its likelihood as a function of the unknown parameter vector θ and, often in a straightforward manner, find the value $\hat{\theta}$ that maximizes this function. Thus

(7.21) Let the likelihood function of a given sample be $\mathscr{L}(\mathbf{x} \mid \theta)$ where $\mathbf{x}$ is the vector of sample observations and θ is the vector of unknown parameters. Then the maximum likelihood estimator of θ is the vector $\hat{\theta}$ such that $\mathscr{L}(\mathbf{x} \mid \hat{\theta}) \geq \mathscr{L}(\mathbf{x} \mid \tilde{\theta})$ where $\tilde{\theta}$ is any other value of θ.

Thus the hypothetical population with parameter $\theta = \hat{\theta}$ would generate the given sample with a higher probability than would a population with any other value for θ. This should not be paraphrased as "the population with parameter $\hat{\theta}$ is most likely to be the true one" nor as "the sample is most likely to have come from the population with parameter $\hat{\theta}$."

When the sampling is random the observations are independent so that the likelihood function may be written as the product of the individual density functions; $\mathscr{L}(\mathbf{x} \mid \theta) = f(x_1 \mid \theta) \cdots f(x_T \mid \theta) = \Pi_{t=1}^{T} f(x_t \mid \theta)$. Further, the logarithm of a function increases monotonically with the function, so that the logarithm attains a maximum at the same point that the function attains a maximum. Hence the maximum likelihood estimator may be obtained by maximizing the logarithmic likelihood $L = \log \mathscr{L}$ (or indeed by maximizing cL where c is any positive constant).

This feature will be useful when the sampling is random, for then the logarithmic likelihood will be, conveniently, a sum of terms.

Although the maximum likelihood method has some intuitive appeal, its value lies in the fact that it generates estimators with desirable asymptotic properties:

(7.22) Under very general conditions a maximum likelihood estimator is consistent, asymptotically unbiased, and asymptotically efficient.

For a specification of the general conditions (which are concerned with regularity of the likelihood function) and a proof of this important theorem, see Wilks (1962, pp. 358–365, 379–381) and Kendall and Stuart (1961, pp. 35–46, 51–60), where it is also shown that

(7.23) Under very general conditions the asymptotic covariance matrix of a maximum likelihood estimator $\hat{\theta}$ is given by $\Sigma = [-(\partial^2 L/\partial\theta^2)]^{-1}$, where the derivatives are evaluated at $\hat{\theta} = \theta$, and the asymptotic distribution of $\hat{\theta}$ is $\mathscr{N}(\theta, \Sigma)$,

and that maximum likelihood estimators possess a useful invariance property:

(7.24) If $\hat{\theta}$ is a maximum likelihood estimator of θ and if $\psi = g(\theta)$ is a vector of single-valued functions of θ, then $\hat{\psi} = g(\hat{\theta})$ is a maximum likelihood estimator of ψ.

In assessing the value of this fruitful method it is important to recognize that its application demands knowledge of the functional form of the population distribution and also that maximum likelihood estimators need not have any desirable "small-sample" properties.

We now illustrate the use of these criteria in particular problems. We consider a random sample drawn from a population with unknown mean μ and unknown variance σ^2. We do not assume knowledge of the functional form of the population distribution at this point.

Consider the problem of estimating μ. An obvious estimator is the sample mean $\bar{x} = T^{-1} \Sigma_{t=1}^{T} x_t$. In (4.21) and (6.13) we have seen that $E\bar{x} = \bar{E}\bar{x} = \operatorname{plim} \bar{x} = \mu$, so that $\bar{x}$ indeed has desirable properties as an estimator of μ. We now show that $\bar{x}$ also has a desirable minimum variance property. Let $\hat{\theta} = \Sigma_{t=1}^{T} a_t x_t$ be any linear estimator of μ, where the a_t's are constants. Then $E\hat{\theta} = \Sigma_{t=1}^{T} a_t E x_t = \mu \, \Sigma_{t=1}^{T} a_t$ since $E x_t = \mu$. Thus

(7.25) $\hat{\theta} = \Sigma\, ax$ is an unbiased estimator of μ (for every μ) if and only if $\Sigma\, a = 1$.

Using the unbiasedness condition (which implies $\Sigma a\mu = \mu$),

$$E(\hat{\theta}-\mu)^2 = E\left[\sum_{t=1}^{T} a_t x_t - \mu\right]^2 = E\left[\sum_{t=1}^{T} a_t(x_t-\mu)\right]^2$$
$$= \sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{T} a_t a_s E(x_t-\mu)(x_s-\mu) = \sum_{t=1}^{T} a_t^2\sigma^2,$$

since

$$E(x_t-\mu)(x_s-\mu) = \begin{cases}\sigma^2 & \text{if } s = t\\ 0 & \text{if } s \neq t.\end{cases}$$

Thus

(7.26) If $\hat{\theta} = \Sigma ax$ is an unbiased estimator of μ (for every μ) then $E(\hat{\theta}-\mu)^2 = \sigma^2\,\Sigma a^2$.

Now the sample mean is the linear estimator that has each $a_t = T^{-1}$; $\bar{x} = T^{-1}\sum_{t=1}^{T} x_t = \sum_{t=1}^{T} T^{-1}x_t$. Since it has $\sum_{t=1}^{T} a_t = \sum_{t=1}^{T} T^{-1} = TT^{-1} = 1$, it is unbiased by (7.25); since it has $\sum_{t=1}^{T} a_t^2 = \sum_{t=1}^{T} T^{-2} = TT^{-2} = T^{-1}$ its variance is $T^{-1}\sigma^2$ by (7.26). [We already had these results in (4.21)]. Now without loss of generality any linear estimator $\hat{\theta} = \sum_{t=1}^{T} a_t x_t$ may be written as $\hat{\theta} = \sum_{t=1}^{T} (T^{-1}+b_t)x_t$ where $b_t = a_t - T^{-1}$. Then $\sum_{t=1}^{T} a_t = \sum_{t=1}^{T}(T^{-1}+b_t) = 1 + \sum_{t=1}^{T} b_t$ so that the unbiasedness requirement becomes $\Sigma b = 0$, and the variance may be written

$$\sigma^2\sum_{t=1}^{T} a_t^2 = \sigma^2\sum_{t=1}^{T}(T^{-1}+b_t)^2$$
$$= \sigma^2\left(\sum_{t=1}^{T} T^{-2} + \sum_{t=1}^{T} b_t^2 + 2\sum_{t=1}^{T} T^{-1}b_t\right)$$
$$= \sigma^2\left(T^{-1} + \sum_{t=1}^{T} b_t^2\right).$$

To minimize the variance (given T and σ^2) we must take $\sum_{t=1}^{T} b_t^2 = 0$. This requires, however, that each $b_t = 0$; i.e., that each $a_t = T^{-1}$; i.e., that we take $\bar{x}$ as our estimator. Summarizing these results we have

(7.27) For random sampling from any population the sample mean is an unbiased, best linear unbiased, asymptotically unbiased, and consistent estimator of the population mean.

It is interesting to note that the sample mean has a "least-squares" property. Suppose that we want to "fit" the sample observations $x_1, \ldots, x_T$ by a single number x^*, and that our criterion of goodness of fit is the least-squares criterion: the best fitting number is that which minimizes the sum of squared deviations $S = \sum_{t=1}^{T}(x_t - x^*)^2$. Then setting $\partial S/\partial x^* = -2\sum_{t=1}^{T}(x_t - x^*)$ equal to zero gives $\sum_{t=1}^{T} x_t = T\hat{x}^*$ or $\hat{x}^* = \bar{x}$ for the

least-squares value of x^*. Thus the purely descriptive criterion of least squares gives a function of the observations that turns out to be a desirable estimator of a population parameter under certain assumptions about the origin of the observations. This phenomenon recurs frequently in the sequel.

Now consider the problem of estimating σ^2. An obvious estimator is the sample variance $s^2 = T^{-1}\sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})^2$. In (4.33) and (6.18) we have seen that $Es^2 = (T-1)T^{-1}\sigma^2$, $\bar{E}s^2 = \operatorname{plim} s^2 = \sigma^2$ so that

(7.28) For random sampling from any population the sample variance is a biased but asymptotically unbiased and consistent estimator of the population variance.

Although s^2 is biased we can easily obtain an unbiased estimator. Let $s'^2 = T(T-1)^{-1}s^2$ be the "adjusted sample variance." Then $Es'^2 = T(T-1)^{-1}Es^2 = \sigma^2$ so that s'^2 is unbiased: obviously, it is also asymptotically unbiased and consistent. (Indeed, it can be shown that for normal distributions s'^2 is the best quadratic unbiased estimator of σ^2). The multivariate extensions of (7.27) and (7.28) are straightforward.

In deriving these results we have not used knowledge of the parent population. If we know, or are willing to assume, the functional form of the parent population distribution, we may also consider applying the maximum likelihood method. Two examples will suffice.

In the first example we consider random sampling from a Bernoulli population with unknown mean μ. We have seen that the likelihood of a sample consisting of R 1's and $T-R$ 0's in a specified order is $\mathscr{L}(\mathbf{x} \mid \mu) = \mu^R(1-\mu)^{T-R}$. To maximize $\mathscr{L}$ we maximize $L = \log\mathscr{L} = R\log\mu + (T-R)\log(1-\mu)$. Differentiating,

$$\frac{\partial L}{\partial\mu} = R\,\frac{\partial\log\mu}{\partial\mu} + (T-R)\,\frac{\partial\log(1-\mu)}{\partial(1-\mu)}\,\frac{\partial(1-\mu)}{\partial\mu}$$
$$= \frac{R}{\mu} - \frac{T-R}{1-\mu}.$$

Setting the derivative equal to zero gives $R/\hat{\mu} = (T-R)/(1-\hat{\mu})$, whence $\hat{\mu} = R/T$. But for a sample of size T consisting of R 1's and $T-R$ 0's, $R/T = \bar{x}$. Thus

(7.29) For random sampling from a Bernoulli population the sample mean is the maximum likelihood estimator of the population mean.

Thus by (7.22) the sample mean will have asymptotic efficiency, when the parent distribution is Bernoulli, as well as the properties it has for any population. In addition, by the invariance [illegible] 24), $s^2 = \bar{x}(1-\bar{x})$ will be the maximum likelihood estimator of $\mu(1-\mu) = \sigma^2$. It is also instructive to apply the general formula for the asymptotic variance of the maximum likelihood estimator. We have

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \mu^2} = \frac{\partial(\partial L/\partial \mu)}{\partial \mu} = -\frac{R}{\mu^2} - \frac{T-R}{(1-\mu)^2},$$

which evaluated at $\mu = \hat{\mu} = R/T$ is

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \mu^2} = -\frac{T\mu}{\mu^2} - \frac{T(1-\mu)}{(1-\mu)^2} = -\frac{T}{\mu(1-\mu)}.$$

Then by (7.23) the asymptotic variance of $\hat{\mu}$ is

$$[T/\mu(1-\mu)]^{-1} = \mu(1-\mu)/T.$$

Since $\sigma^2 = \mu(1-\mu)$ in a Bernoulli distribution, this result conforms to the general result for the asymptotic variance of a sample mean, (6.18a).

In the second example we consider random sampling from a $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ population. Since the likelihood function of a random sample is the product of the individual density functions, we have

$$\mathscr{L}(x \mid \mu, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-(T/2)} \exp\{-(2\sigma^2)^{-1} \Sigma_{t=1}^T (x_t - \mu)^2\}.$$

To maximize $\mathscr{L}$ we maximize

$$L = \log \mathscr{L} = -T2^{-1} \log 2\pi - T2^{-1} \log \sigma^2$$
$$- (2\sigma^2)^{-1} \Sigma_{t=1}^T (x_t - \mu)^2.$$

Differentiating,

$$(7.30) \qquad \frac{\partial L}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \partial L/\partial \mu \\ \partial L/\partial \sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2\sigma^2)^{-1} 2 \Sigma (x - \mu) \\ -T(2\sigma^2)^{-1} + 2^{-1}(\sigma^2)^{-2} \Sigma (x - \mu)^2 \end{pmatrix}.$$

Setting the derivatives equal to zero gives

$$\Sigma(x - \hat{\mu}) = 0 \quad \text{and} \quad T^{-1} \Sigma (x - \hat{\mu})^2 = \hat{\sigma}^2,$$

whence $\hat{\mu} = \bar{x}$ and $\hat{\sigma}^2 = s^2$. Thus

(7.31) For random sampling from a $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ population the sample mean and sample variance are the maximum likelihood estimators of the population mean and population variance respectively.

Thus, again, the sample mean—and the sample variance—will have asymptotic efficiency when the parent distribution is normal, in addition to the properties they have for any population. It is also instructive to apply the general formula for the asymptotic covariance matrix of the maximum likelihood estimator. We have

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} = \frac{\partial(\partial L/\partial \theta)}{\partial \theta}$$
$$= \begin{pmatrix} -T(\sigma^2)^{-1} & -(\sigma^2)^{-2} \Sigma (x - \mu) \\ -(\sigma^2)^{-2} \Sigma (x - \mu) & 2^{-1} T(\sigma^2)^{-2} - (\sigma^2)^{-3} \Sigma (x - \mu)^2 \end{pmatrix},$$

which evaluated at $\Sigma(x - \mu) = 0$ and $\Sigma(x - \mu)^2 = T\sigma^2$ is

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} = \begin{pmatrix} -T(\sigma^2)^{-1} & 0 \\ 0 & -2^{-1}T(\sigma^2)^{-2} \end{pmatrix}.$$

Then by (7.23) the asymptotic covariance matrix of $\begin{pmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\sigma}^2 \end{pmatrix}$ is

$$\Sigma = \left(-\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} T^{-1}\sigma^2 & 0 \\ 0 & T^{-1}2\sigma^4 \end{pmatrix}.$$

Since $\mu_4 = 3\sigma^4$ in a normal distribution this result conforms to the general result for the asymptotic variance of a sample mean, (6.18a), and a sample variance, (6.18b). Moreover, the zero asymptotic covariance of $\bar{x}$ and s^2 is a consequence of their independence for any sample size when the parent is normal, (5.29).

Finally we note that the standard deviation of the sampling distribution of an estimator is called the standard error of the estimator. Thus if the variance of an unbiased estimator $\hat{\theta}$ is $\sigma_{\hat{\theta}}^2$, then $\sigma_{\hat{\theta}}$ is the standard error of $\hat{\theta}$. In addition if the asymptotic variance of a consistent estimator $\hat{\theta}$ is $\sigma_{\hat{\theta}}^2$, then $\sigma_{\hat{\theta}}$ is called the asymptotic standard error of $\hat{\theta}$. Clearly the standard error gives some indication of the precision of the estimator. In practical situations the variance of an estimator—and hence its standard error—will be a function of unknown parameters and hence unknown. For example, the variance of the sample mean is $\sigma_{\bar{x}}^2 = \sigma^2/T$; its standard error is then $\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{T}$, which will be unknown if σ^2 is unknown. It will generally be possible, however, to obtain an estimate of the variance—and hence of the standard error. For example, let $s_{\bar{x}}^2 = s^2/(T-1)$; then $Es_{\bar{x}}^2 = Es^2/(T-1) = \sigma^2/T = \sigma_{\bar{x}}^2$ so that $s_{\bar{x}}^2$ is an unbiased estimator of $\sigma_{\bar{x}}^2$. Then $s_{\bar{x}} = s/\sqrt{T-1}$ will serve as an estimated standard error of the sample mean. Frequently the estimated standard error is presented in parentheses below the point estimator: $\underset{(s_{\hat{\theta}})}{\hat{\theta}}$.

Interval Estimation

A more systematic method of indicating the precision of a point estimate is to construct an interval estimate for the population parameter. In the theory of interval estimation we seek to select a pair of functions of the sample observations whose values in a given sample will provide the end points of an interval within which the population parameter may be said to lie. Since the sample observations are random variables the end points will also be random variables: the interval they define will vary from sample to sample drawn from the same population. Hence we cannot expect to find an interval estimator that always covers the true value of the population parameter. We are, however, able to make well-defined probabilistic statements. Rather than discuss the theory of interval estimation in general terms we illustrate its application in several leading cases.

Consider random sampling from a population that is distributed $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ where μ is unknown but σ^2 is known. Let $1 - \alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ be a preassigned "confidence coefficient"; let n_β^* be the value of a standard normal variable which is exceeded $100\beta\%$ of the time—i.e., $1 - F(n_\beta^*) = F(-n_\beta^*) = \beta$ where F is the cumulative standard normal distribution function; and let $\bar{x}$ be the observed sample mean. Now we know that $\sqrt{T}(\bar{x} - \mu)/\sigma$ is distributed $\mathcal{N}(0, 1)$ so that the statement

$$(7.32) \qquad -n_{\alpha/2}^* \leq \frac{\sqrt{T}(\bar{x} - \mu)}{\sigma} \leq n_{\alpha/2}^*$$

will be true for $100(1 - \alpha)\%$ of the samples drawn. But (7.32) is identical with

$$(7.33) \qquad \bar{x} - n_{\alpha/2}^* \frac{\sigma}{\sqrt{T}} \leq \mu \leq \bar{x} + n_{\alpha/2}^* \frac{\sigma}{\sqrt{T}},$$

so that

$$(7.34) \qquad \text{Prob}\left\{\bar{x} - n_{\alpha/2}^* \frac{\sigma}{\sqrt{T}} \leq \mu \leq \bar{x} + n_{\alpha/2}^* \frac{\sigma}{\sqrt{T}}\right\} = 1 - \alpha.$$

Then we call $\bar{x} \pm n_{\alpha/2}^* (\sigma/\sqrt{T})$ a $100(1 - \alpha)\%$ confidence interval for the parameter μ [with endpoints $\bar{x} - n_{\alpha/2}^*(\sigma/\sqrt{T})$, $\bar{x} + n_{\alpha/2}^*(\sigma/\sqrt{T})$]. In any given sample the interval $\bar{x} \pm n_{\alpha/2}^*(\sigma/\sqrt{T})$ may not cover μ; but it will do so in $100(1 - \alpha)\%$ of the samples. For a numerical example suppose that we wish to construct a 95% confidence interval for the μ of a population which is distributed $\mathcal{N}(\mu, 425)$. We have drawn from this population a sample of size 17 with mean 10. Thus $\alpha = 0.05$ so $n_{\alpha/2}^* = 1.96$ from the tabulated standard normal distribution [for $1 - F(1.96) = 0.025 = F(-1.96)$]; also $\sigma/\sqrt{T} = \sqrt{425}/\sqrt{17} = 5$. Then $10 \pm 1.96(5) = 10 \pm 9.8$ constitutes a 95% confidence interval for μ; i.e., the statement $0.2 \leq \mu \leq 19.8$ may be made with 95% confidence. A difficulty of this procedure is that it requires knowledge of σ^2, which is lacking in most practical cases.

Consider then random sampling from a population that is $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ where both μ and σ^2 are unknown. We know that $\sqrt{T - 1}\,(\bar{x} - \mu)/s$ is distributed t_{T-1}. Therefore the statement

$$(7.35) \qquad -t_{T-1,\alpha/2}^* \leq \frac{\sqrt{T - 1}(\bar{x} - \mu)}{s} \leq t_{T-1,\alpha/2}^*$$

and its equivalent

$$(7.36) \qquad \bar{x} - t_{T-1,\alpha/2}^* \frac{s}{\sqrt{T - 1}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{T-1,\alpha/2}^* \frac{s}{\sqrt{T - 1}}$$

will be true for $100(1 - \alpha)\%$ of the samples drawn, where $t_{k,\beta}^*$ is the value of a t_k variable that is exceeded $100\beta\%$ of the time—i.e., $1 - F(t_{k,\beta}^*) = F(-t_{k,\beta}^*) = \beta$ where F is the cumulative t_k distribution. Thus

$$(7.37) \qquad \text{Prob}\left\{\bar{x} - t_{T-1,\alpha/2}^* \frac{s}{\sqrt{T - 1}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{T-1,\alpha/2}^* \frac{s}{\sqrt{T - 1}}\right\} = 1 - \alpha$$

and $\bar{x} \pm t_{T-1,\alpha/2}^*(s/\sqrt{T - 1})$ is a $100(1 - \alpha)\%$ confidence interval for the parameter μ. For a numerical example, suppose that we wish to construct a 95% confidence interval for the μ of a population which is distributed $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. We have drawn from this population a sample of size 17 with mean 10 and variance 400. Thus $\alpha = 0.05$ so $t_{T-1,\alpha/2}^* = 2.12$ from the tabulated t_{16} distribution [for $1 - F(2.12) = 0.025 = F(-2.12)$]; also $s/\sqrt{T - 1} = \sqrt{400}/\sqrt{16} = 5$. Then $10 \pm 2.12(5) = 10 \pm 10.6$ constitutes a 95% confidence interval for μ; i.e., the statement $-0.6 \leq \mu \leq 20.6$ may be made with 95% confidence. Clearly this procedure does not require knowledge of σ^2 and hence is operational in practical cases.

These two examples serve to illustrate the application of the theory of interval estimation. The sampling distribution of a sample statistic is known to involve the population parameter in a specific way; this knowledge is exploited to make a probabilistic statement about the parameter based on the value of the statistic in a specific sample. [Thus a confidence interval for the σ^2 of a $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ population would exploit the fact that Ts^2/σ^2 has the χ^2_{T-1} distribution.] Conventional confidence coefficients are 0.90, 0.95, and 0.99. There are of course many sample statistics whose distribution involves a certain population parameter. Moreover, given a confidence coefficient and a sample statistic there are alternative methods of constructing confidence intervals. For example, $1 - F(1.558) = 0.0488$ and $F(-3.000) = 0.0012$ so that the application of (9-56) would in general yield two different estimates for β_{12}, according to whether one used the ratio $-\hat{\pi}_{11}/\hat{\pi}_{21}$ or $-\hat{\pi}_{12}/\hat{\pi}_{22}$. These ratios are identical for the *true* reduced-form parameters, but only by accident will they be equal for the *estimated* reduced-form parameters. In other words, the rank of $\hat{\Pi}$ for this model will in general be 2 while that of Π is 1.

The distinction between Examples ii and iv is that in Example ii the parameter β_{12} is said to be exactly identified while in Example iv it is said to be *overidentified.*

In the examples so far we have paid little attention to the variance-covariance matrices of the structural and reduced-form disturbances. This is because under general assumptions one obtains no help from this quarter in the identification of the coefficients of the variables in the structural relations. However, if we can extend our zero-nonzero restrictions to some of the elements of Φ, the situation changes.

Example iia. Consider Example ii again:

$$
\begin{aligned}
y_{1t} + \beta_{12}y_{2t} \qquad\qquad &= u_{1t} \\
\beta_{21}y_{1t} + \quad y_{2t} + \gamma_{21}x_{1t} &= u_{2t}
\end{aligned}
$$

but now with

$$
\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & \beta_{12} \\ \beta_{21} & 1 \end{bmatrix} \qquad \Gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma_{21} \end{bmatrix} \qquad \Phi = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 \\ 0 & \sigma_{22} \end{bmatrix}
$$

The contrast with the original specification is that we now postulate the disturbances in the two relations to have zero covariance in the limit $\sigma_{12} = 0$. From the original example β_{12} is identified, and from (9-50) it is expressed in terms of the reduced-form parameters as

$$
\beta_{12} = -\frac{\pi_{11}}{\pi_{21}}
$$

From the general relation

$$
\Phi = \mathbf{B}\Psi\mathbf{B}'
$$

between structural and reduced-form variances we have

$$
\begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 \\ 0 & \sigma_{22} \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} \psi_{11} + 2\psi_{12}\beta_{12} + \psi_{22}\beta_{12}^2 & \psi_{11}\beta_{21} + \psi_{12}(1 + \beta_{12}\beta_{21}) + \psi_{22}\beta_{12} \\ \psi_{11}\beta_{21} + \psi_{12}(1 + \beta_{12}\beta_{21}) + \psi_{22}\beta_{12} & \psi_{11}\beta_{21}^2 + 2\psi_{12}\beta_{21} + \psi_{22} \end{bmatrix}
$$

This yields the condition

$$
\psi_{11}\beta_{21} + \psi_{12}(1 + \beta_{12}\beta_{21}) + \psi_{22}\beta_{12} = 0
$$

Substitution of $-\pi_{11}/\pi_{21}$ for β_{12} in this relation yields β_{21}. Finally, from the second equation in (9-50), γ_{21} can be obtained as

$$
\gamma_{21} = -\pi_{21}(1 - \beta_{12}\beta_{21})
$$

so that a hitherto unidentified relation becomes identified if it is possible to specify a zero covariance between the disturbance terms. Alternatively, one may show that the conditions specified here imply that the transformation matrix A is simply the identity matrix I. A similar argument to that used above will also show that the second relation will also be identified if we postulate $\sigma_{22} = k\sigma_{11}$, giving

$$
\Phi = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & k\sigma_{11} \end{bmatrix}
$$

where k is a known constant.

Example iva. If we consider again

$$
\begin{aligned}
y_{1t} + \beta_{12}y_{2t} \qquad\qquad\qquad\qquad &= u_{1t} \\
\beta_{21}y_{1t} + \quad y_{2t} + \gamma_{21}x_{1t} + \gamma_{22}x_{2t} &= u_{2t}
\end{aligned}
$$

with the additional assumption that

$$
\Phi = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 \\ 0 & \sigma_{22} \end{bmatrix}
$$

then β_{12} is identified as before and β_{21} can be obtained as in Example iia. Finally, from (9-55), γ_{21} and γ_{22} can each be expressed in terms of reduced-form parameters, so once again the second relation is identified.

On the basis of the ideas developed in these examples, a general treatment of the identification problem can easily be obtained. Let us make no a priori restrictions on the variance-covariance matrix for the structural disturbances Φ. Suppose we are then interested in the identifiability of the first relation in the system. This relation may be written

$$
\beta_1\mathbf{y}_t + \gamma_1\mathbf{x}_t = u_{1t} \tag{9-57}
$$

where β_1 indicates the first row of B and γ_1 the first row of Γ. Premultiplying the reduced form (9-24) by β_1 gives

$$
\beta_1\mathbf{y}_t = \beta_1\Pi\mathbf{x}_t + \beta_1\mathbf{v}_t \tag{9-58}
$$

Now $\beta_1\mathbf{v}_t = \beta_1\mathbf{B}^{-1}\mathbf{u}_t$

$$
= [\beta_{11} \quad \cdots \quad \beta_{1G}]\frac{1}{|\mathbf{B}|}
\begin{bmatrix}
b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{G1} \\
b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{G2} \\
\cdot & & & \cdot \\
\cdot & & & \cdot \\
\cdot & & & \cdot \\
b_{1G} & b_{2G} & \cdots & b_{GG}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{Gt} \end{bmatrix}
$$

where b_{ij} indicates the co-factor of β_{ij}. Thus, using the result from Chap. 3 that expansions in terms of alien co-factors vanish identically, we have

$$
\begin{aligned}
\beta_1\mathbf{v}_t &= [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0][u_{1t} \quad \cdots \quad u_{Gt}]' \\
&= u_{1t}
\end{aligned}
$$

The coefficients of x_t in (9-57) and (9-58) must be identical. Thus

$$\gamma_1 = \beta_1 \Pi \tag{9-59}$$

Let us assume that the a priori restrictions on the coefficients of the first relation specify that G^Δ is the number of endogenous variables and K^* the number of predetermined variables which appear in the relation with nonzero coefficients, while $G^{\Delta\Delta} = G - G^\Delta$ and $K^{**} = K - K^*$ are the numbers of variables in each class excluded from that relation. Without loss of generality, the numbering of the variables may be arranged to put those with nonzero coefficients at the beginning of each class, so that we may partition the vectors β_1 and γ_1 as follows:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= [\beta_{1\Delta} \quad 0_{\Delta\Delta}] = [\beta_{11} \quad \cdots \quad \beta_{1G^\Delta} \quad 0_{1,G^\Delta+1} \quad \cdots \quad 0_{1G}] \\ \gamma_1 &= [\gamma_{1*} \quad 0_{**}] = [\gamma_{11} \quad \cdots \quad \gamma_{1K^*} \quad 0_{1,K^*+1} \quad \cdots \quad 0_{1K}] \end{aligned}$$

Partitioning the G rows of Π into the first G^Δ and the remaining $G^{\Delta\Delta}$ and partitioning its K columns into the first K^* and the remaining K^{**}, we can then write (9-59) as

$$-[\gamma_{1*} \quad 0_{**}] = [\beta_{1\Delta} \quad 0_{\Delta\Delta}] \begin{bmatrix} \Pi_{\Delta *} & \Pi_{\Delta,**} \\ \Pi_{\Delta\Delta,*} & \Pi_{\Delta\Delta,**} \end{bmatrix}$$

which gives
$$-\gamma_{1*} = \beta_{1\Delta}\Pi_{\Delta *} \tag{9-60}$$
and
$$0_{**} = \beta_{1\Delta}\Pi_{\Delta,**} \tag{9-61}$$

The parameters of the relation will then be identified if (9-61) can be solved to yield a unique vector $\beta_{1\Delta}$ in terms of the reduced-form parameters $\Pi_{\Delta,**}$, for (9-60) will then yield the vector γ_{1*}. The discussion of the possibility of identification thus centers on the solution of (9-61).

If the rank of $\Pi_{\Delta,**}$ is G^Δ, then the set of homogeneous equations (9-61) will have only the trivial solution of the zero vector, but this is ruled out since by assumption a structural relation contains at least one endogenous variable. If the rank of $\Pi_{\Delta,**}$ is $G^\Delta - 1$, the ratios of the G^Δ unknown β coefficients may be determined uniquely, and this is all we need since one of the βs, for example, β_{11}, can be arbitrarily set at unity. Thus the relation is identifiable if $\rho(\Pi_{\Delta,**}) = G^\Delta - 1$. Since the matrix has G^Δ rows and K^{**} columns, a necessary condition for its rank to be $G^\Delta - 1$ is that

$$K^{**} \geq G^\Delta - 1 \tag{9-62}$$

This is the *order condition* for identifiability. In words, it means that the number of predetermined variables excluded from the relation must be at least as great as the number of endogenous variables included less one. Adding $G^{\Delta\Delta}$ to both sides of (9-62) gives an alternative form

$$G^{\Delta\Delta} + K^{**} \geq G - 1 \tag{9-63}$$

that is, the *total* number of variables excluded from the relation must be at least as great as the *total* number of endogenous variables in the model less one.

The rank condition for identifiability, which is necessary and sufficient, is

$$\rho(\Pi_{\Delta,**}) = G^\Delta - 1 \tag{9-64}$$

The disadvantage of this condition is that one has to cast the model into reduced form first of all and then examine the rank of a submatrix of reduced-form coefficients. It is simpler and more useful to restate the rank condition in terms of a submatrix of the *structural* coefficients. To do this, denote the whole set of structural coefficients by

$$\mathrm{A} = [\mathrm{B} \ \Gamma] = \begin{bmatrix} \beta_{1\Delta} & 0_{\Delta\Delta} & \gamma_{1*} & 0_{**} \\ \mathrm{A}_\Delta & \mathrm{A}_{\Delta\Delta} & \mathrm{A}_* & \mathrm{A}_{**} \end{bmatrix} \tag{9-65}$$

where we partition A by the first and the remaining $G - 1$ rows and by G^Δ, $G^{\Delta\Delta}$, K^*, and K^{**} sets of columns. Premultiplying by B^{-1},

$$\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A} = [\mathrm{I} \ -\Pi] = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{\Delta,\Delta} & 0_{\Delta,\Delta\Delta} & -\Pi_{\Delta,*} & -\Pi_{\Delta,**} \\ 0_{\Delta\Delta,\Delta} & \mathrm{I}_{\Delta\Delta,\Delta\Delta} & -\Pi_{\Delta\Delta,*} & -\Pi_{\Delta\Delta,**} \end{bmatrix} \tag{9-66}$$

where both rows and columns of B^{-1} have been partitioned into two sets of G^Δ and $G^{\Delta\Delta}$ and the partitioning of the columns of A remains as before. It can be seen by comparison of (9-65) and (9-66) that

$$\mathrm{B}^{-1}\bar{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} 0_{\Delta,\Delta\Delta} & -\Pi_{\Delta,**} \\ \mathrm{I}_{\Delta\Delta,\Delta\Delta} & -\Pi_{\Delta\Delta,**} \end{bmatrix} \tag{9-67}$$

where
$$\bar{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} 0_{\Delta\Delta} & 0_{**} \\ \mathrm{A}_{\Delta\Delta} & \mathrm{A}_{**} \end{bmatrix} \tag{9-68}$$

Postmultiplying (9-67) by $\bar{\Pi}$, where

$$\bar{\Pi} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{\Delta\Delta,\Delta\Delta} & -\Pi_{\Delta\Delta,**} \\ 0_{**,\Delta\Delta} & -\mathrm{I}_{**,**} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{B}^{-1}\bar{\mathrm{A}}\bar{\Pi} = \begin{bmatrix} 0_{\Delta,\Delta\Delta} & \Pi_{\Delta,**} \\ \mathrm{I}_{\Delta\Delta,\Delta\Delta} & 0_{\Delta\Delta,**} \end{bmatrix} \tag{9-69}$$

Since B^{-1} and $\bar{\Pi}$ are nonsingular, $B^{-1}\bar{A}\bar{\Pi}$ and $\bar{A}$ have equal rank. But from the definition of $\bar{A}$,

$$\rho(\bar{A}) = \rho[A_{\Delta\Delta} \quad A_{**}]$$

and from an inspection of (9-69),

$$\rho(B^{-1}\bar{A}\bar{\Pi}) = G^{\Delta\Delta} + \rho(\Pi_{\Delta,**})$$

Hence $$\rho(\Pi_{\Delta,**}) = \rho[A_{\Delta\Delta} \quad A_{**}] - (G - G^{\Delta}) \tag{9-70}$$

and condition (9-64) may be stated equivalently as

$$\rho[A_{\Delta\Delta} \quad A_{**}] = G - 1 \tag{9-71}$$

The matrix appearing in (9-71) is the matrix of coefficients, properly arranged, in the remaining $G - 1$ equations of the endogenous and predetermined variables *excluded* from the first equation. Relation (9-70) also shows that the rank of $\Pi_{\Delta,**}$ cannot exceed $G^{\Delta} - 1$, for $[A_{\Delta\Delta} \quad A_{**}]$ has $G - 1$ rows, so that its rank cannot exceed $G - 1$. Thus even if K^{**} exceeds $G^{\Delta} - 1$ so that $\Pi_{\Delta,**}$ has G^{Δ} rows and at least G^{Δ} columns, its rank will not exceed $G^{\Delta} - 1$ and a unique set of structural coefficients corresponds to the reduced-form coefficients, as we found in Example iv.

If $K^{**} \geq G^{\Delta} - 1$, the parameters of a relation are identifiable. Our practical estimation procedure may then be influenced by whether $K^{**} = G^{\Delta} - 1$ or $K^{**} > G^{\Delta} - 1$. In the former case $\rho(\hat{\Pi}_{\Delta,**})$ will, apart from a freakish statistical accident, be equal to $G^{\Delta} - 1$, so that the indirect-least-squares approach is feasible. Replacing the true values in (9-61) by estimated values enables us to solve uniquely for $\hat{\beta}_{1\Delta}$ from

$$0_{**} = \hat{\beta}_{1\Delta}\hat{\Pi}_{\Delta,**} \tag{9-72}$$

and then $\hat{\gamma}_{1*}$ is obtained from

$$\hat{\gamma}_{1*} = -\hat{\beta}_{1\Delta}\hat{\Pi}_{\Delta*} \tag{9-73}$$

If $K^{**} > G^{\Delta} - 1$, then we either have to modify the indirect-least-squares approach to ensure that $\rho(\hat{\Pi}_{\Delta,**}) = G^{\Delta} - 1$ or else use a method of estimation that does not involve getting back from estimated reduced-form parameters to estimated structural parameters. It is to these various estimation methods that we now turn.

9-3. Estimation Methods

There is now a variety of estimation methods available for use in simultaneous equation contexts. We shall give an account of

them seriatim, leaving for Chap. 10 a comparison of their small-sample properties and some remarks on the choice of estimation method. It is convenient to distinguish between estimation methods which are applicable to a single equation in a model and those which deal with the complete model. It is, of course, possible to estimate all the relations in a model by the application of single-equation methods to each relation in turn. The first four methods to be described are single-equation methods, and the remaining two are complete-system methods. It is assumed in all cases that the relations to be estimated are identified.

Ordinary Least Squares (OLS). One may apply the ordinary-least-squares model of Chap. 4 to a single equation in a model. There are, however, usually two or more endogenous variables in each relation. One may not know which endogenous variable to select as the dependent variable, and no matter which is chosen, the remaining endogenous variable(s) will be correlated with the disturbance term in that relation because of the simultaneous nature of the relations in the model. Thus the least-squares estimators will be biased and they will also be inconsistent. This fact alone will not necessarily rule out the use of ordinary least squares as an estimating method, since the choice of a method in practice has to be made on a balance of the properties of the method and computational simplicity. Moreover, bias is not necessarily the most important property of an estimator, but has to be judged in conjunction with the variance. These matters are taken up in Chap. 10.

Indirect Least Squares (ILS). This method is feasible only when the structural relation is exactly identified. The procedure is to estimate the parameters of the reduced form by the application of ordinary least squares to each reduced-form relation separately and then to derive estimates of the structural parameters from the estimated reduced-form parameters. The latter will be best linear unbiased estimators under assumptions (9-26) to (9-28), but this property does not hold under transformations. For example, as we have seen on page 236, the derived structural estimators are biased. However, if the structural disturbances are normally distributed, then so will be the reduced-form disturbances, and the least-squares estimators of the reduced-form parameters will be maximum-likelihood estimators. Since this property does hold under transformations, the derived structural estimators will be maximum-likelihood estimators.

?

14

9-4. Limited-information Single Equation (LISE) or Least-variance Ratio (LVR)

These two methods give the same estimating formula. Consider the first equation of the set $\mathbf{B}\mathbf{y}_t + \mathbf{\Gamma}\mathbf{x}_t = \mathbf{u}_t$, namely,

$$\boldsymbol{\beta}_1\mathbf{y}_t + \boldsymbol{\gamma}_1\mathbf{x}_t = u_{1t} \qquad t = 1, \ldots, n \tag{9-74}$$

where $\boldsymbol{\beta}_1$ indicates the first row of $\mathbf{B}$, $\boldsymbol{\gamma}_1$ the first row of $\mathbf{\Gamma}$, and $\mathbf{y}_t$ and $\mathbf{z}_t$ are column vectors of G and K elements indicating, respectively, the values of the G endogenous and the K predetermined variables at time t. Using the a priori restrictions on the coefficients of (9-74), we may write it as

$$\beta_{11}y_{1t} + \cdots + \beta_{1G^\Delta}y_{G^\Delta t} + \gamma_{11}x_{1t} + \cdots + \gamma_{1K^*}x_{K^*t} = u_{1t}$$
$$t = 1, \ldots, n \tag{9-75}$$

where we assume that the number of predetermined variables excluded from (9-75) is at least as great as the number of endogenous variables included ($K^{**} > G^\Delta - 1$), so that the equation is overidentified. The reduced form of the model $\mathbf{B}\mathbf{y}_t + \mathbf{\Gamma}\mathbf{z}_t = \mathbf{u}_t$ is $\mathbf{y}_t = \mathbf{\Pi}\mathbf{z}_t + \mathbf{v}_t$. Under the assumption of normality and serial independence for the $\mathbf{u}$ vectors, the $\mathbf{v}$ vectors will likewise be normal and serially independent. If we consider the G^Δ endogenous variables which appear in (9-75), we may take the G^Δ equations of the reduced form corresponding to these variables and set up the likelihood function for these G^Δ endogenous variables. This likelihood function will be in terms of the parameters $[\mathbf{\Pi}_{\Delta *} \; \mathbf{\Pi}_{\Delta,**}]$ of the first G^Δ rows of the reduced-form matrix $\mathbf{\Pi}$. Maximizing the likelihood function with respect to these parameters will yield maximum-likelihood estimators $[\hat{\mathbf{\Pi}}_{\Delta *} \; \hat{\mathbf{\Pi}}_{\Delta,**}]$, but since $\hat{\mathbf{\Pi}}_{\Delta,**}$ has at least G^Δ columns in the overidentified case, its rank will normally be G^Δ and so Eq. (9-72),

$$\mathbf{0}_{**} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{1\Delta}\hat{\mathbf{\Pi}}_{\Delta,**}$$

will fail to yield an estimate of the vector $\boldsymbol{\beta}_{1\Delta} = [\beta_{11} \; \cdots \; \beta_{1G^\Delta}]$. The limited-information maximum-likelihood approach is to maximize the likelihood function for the G^Δ endogenous variables, subject to the restriction that $\rho(\hat{\mathbf{\Pi}}_{\Delta,**}) = G^\Delta - 1$. This will determine uniquely the ratios of the G^Δ elements in $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{1\Delta}$ from (9-72), and we may then set one of these β coefficients equal to unity. This

approach was developed by Anderson and Rubin.[1] It is seen that the application of the method requires one to know, in addition to the specification of the single equation being estimated, merely the predetermined variables appearing in the other equations of the system, for the detailed specification of these other equations is not used in the estimation process, nor is it even assumed to be known. The mathematical development of the limited-information principle is complicated and lengthy, but it may be shown that it reduces in the end to the choice of the elements of $\boldsymbol{\beta}_{1\Delta}$ to maximize[2]

$$L = -\tfrac{1}{2}\log_e \frac{\boldsymbol{\beta}_{1\Delta}\mathbf{W}^*_{\Delta\Delta}\boldsymbol{\beta}'_{1\Delta}}{\boldsymbol{\beta}_{1\Delta}\mathbf{W}_{\Delta\Delta}\boldsymbol{\beta}'_{1\Delta}} \tag{9-76}$$

where $\mathbf{W}^*_{\Delta\Delta}$ and $\mathbf{W}_{\Delta\Delta}$ are certain matrices of residuals. The explanation of $\mathbf{W}^*_{\Delta\Delta}$ and $\mathbf{W}_{\Delta\Delta}$ will at the same time show why the limited-information and the least-variance-ratio approach are identical.

Let us denote the linear combination of endogenous variables which appear in (9-75) by a single symbol, namely,

$$\tilde{y}_t = \beta_{11}y_{1t} + \beta_{12}y_{2t} + \cdots + \beta_{1G^\Delta}y_{G^\Delta t} \qquad t = 1, \ldots, n \tag{9-77}$$

and let us define the following matrices of observations:

$$\mathbf{Y}_\Delta = \begin{bmatrix} y_{11} & \cdots & y_{G^\Delta 1} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ y_{1n} & \cdots & y_{G^\Delta n} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X}_* = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{K^*1} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ x_{1n} & \cdots & x_{K^*n} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_{**} = \begin{bmatrix} x_{K^*+1,1} & \cdots & x_{K1} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ x_{K^*+1,n} & \cdots & x_{Kn} \end{bmatrix} \tag{9-78}$$

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_* \quad \mathbf{X}_{**}]$$

[1] T. W. Anderson and Herman Rubin, "Estimation of the Parameters of a Single Equation in a Complete System of Stochastic Equations," *An. Math. Statist.*, vol. 20, pp. 46–63, 1949.

[2] *Ibid.*, and also W. C. Hood and T. C. Koopmans (eds.), *Studies in Econometric Method*, Wiley, New York, 1953, chap. 6. Hood and Koopmans arrive at (9-76) by a different method from the original approach of Anderson and Rubin, who maximized the likelihood function subject to appropriate constraints by using Lagrange multipliers. Hood and Koopmans start with the likelihood function for the *complete* system, and then, by a series of stepwise maximizations, eliminate from the likelihood function all parameters other than those of the equation to be estimated. Finally, even $\boldsymbol{\gamma}_{1*}$ is eliminated from the likelihood function, and the concentrated likelihood function (9-76) is obtained, which is expressed in terms of $\boldsymbol{\beta}_{1\Delta}$.

Y_Δ is thus the matrix of observations on the endogenous variables which actually appear in our relation, while X_* and X_{**} denote, respectively, the observations on the included and excluded predetermined variables. We may then write

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tilde{y}_n \end{bmatrix} = Y_\Delta \beta_{1\Delta}' \tag{9-79}$$

remembering that $\beta_{1\Delta}$ was initially defined as the row vector $[\beta_{11} \quad \cdots \quad \beta_{1G^\Delta}]$. The specification of the relation (9-75) is that $\tilde{y}$ is related to X_* but not to X_{**}. The least-variance-ratio principle states that the β coefficients in the definition of $\tilde{y}$ should be so chosen that the ratio of the residual variance when $\tilde{y}$ is regressed on X_* to that when $\tilde{y}$ is regressed on X is made as small as possible; that is, the addition of the "excluded" predetermined variables X_{**} should make a minimal improvement in the explained sum of squares in $\tilde{y}$.

The sum of squares in $\tilde{y}$ is

$$\tilde{y}'\tilde{y} = \beta_{1\Delta} Y_\Delta' Y_\Delta \beta_{1\Delta}'$$

If we regress $\tilde{y}$ on X_*, the vector of estimated coefficients is $(X_*'X_*)^{-1}X_*'\tilde{y}$ and the explained sum of squares is $\tilde{y}'X_*(X_*'X_*)^{-1}X_*'\tilde{y}$ [using (4-22)]. Hence the residual sum of squares is

$$\beta_{1\Delta} Y_\Delta' Y_\Delta \beta_{1\Delta}' - \beta_{1\Delta} Y_\Delta' X_* (X_*'X_*)^{-1} X_*' Y_\Delta \beta_{1\Delta}' = \beta_{1\Delta} W_{\Delta\Delta}^* \beta_{1\Delta}'$$

where
$$W_{\Delta\Delta}^* = Y_\Delta' Y_\Delta - Y_\Delta' X_* (X_*'X_*)^{-1} X_*' Y_\Delta \tag{9-80}$$

Similarly, the residual sum of squares when $\tilde{y}$ is regressed on all the predetermined variables X is

$$\beta_{1\Delta} W_{\Delta\Delta} \beta_{1\Delta}'$$

where
$$W_{\Delta\Delta} = Y_\Delta' Y_\Delta - Y_\Delta' X (X'X)^{-1} X' Y_\Delta \tag{9-81}$$

The least-variance-ratio principle then indicates the choice of $\beta_{1\Delta}$ to minimize the ratio

$$l = \frac{\beta_{1\Delta} W_{\Delta\Delta}^* \beta_{1\Delta}'}{\beta_{1\Delta} W_{\Delta\Delta} \beta_{1\Delta}'} \tag{9-82}$$

Comparison of (9-82) and (9-76) shows that when l in (9-82) is minimized, the likelihood L of (9-76) is maximized. Hence limited information and least-variance ratio give identical results.

Differentiating l partially with respect to β_{1i} $(i = 1, \ldots, G^\Delta)$ and equating to zero gives

$$w_i^* \beta_{1\Delta}' - l w_i \beta_{1\Delta}' = 0 \qquad i = 1, \ldots, G^\Delta \tag{9-83}$$

where w_i^* and w_i denote the ith rows in $W_{\Delta\Delta}^*$ and $W_{\Delta\Delta}$. This set of equations may be written

$$(W_{\Delta\Delta}^* - lW_{\Delta\Delta})\beta_{1\Delta}' = 0 \tag{9-84}$$

which has a nontrivial solution for $\beta_{1\Delta}$ only if the determinantal equation

$$|W_{\Delta\Delta}^* - lW_{\Delta\Delta}| = 0 \tag{9-85}$$

is satisfied. It is seen from the definitions of the W matrices in (9-80) and (9-81) that all their elements are functions of the sample observations. Hence (9-85) gives a polynomial in l, which must be solved for the smallest root $\hat{l}$. This smallest root is substituted back in (9-84) and $\hat{\beta}_{1\Delta}$ obtained from

$$(W_{\Delta\Delta}^* - \hat{l}W_{\Delta\Delta})\hat{\beta}_{1\Delta}' = 0 \tag{9-86}$$

Finally, the parameters of the predetermined variables in the relation are obtained by regressing the composite variable $\tilde{y}$ on the predetermined variables X_* which appear in the relation. As we have seen, the column vector of coefficients in this regression is

$$(X_*'X_*)^{-1}X_*'\tilde{y}$$

Noting that in (9-75) both endogenous and predetermined variables appear on the same side of the relation and using the definition (9-79), we may then compute the estimated row vector of coefficients for the predetermined variables as

$$\hat{\gamma}_{1*} = -\hat{\beta}_{1\Delta} Y_\Delta' X_* (X_*'X_*)^{-1} \tag{9-87}$$

This is exactly what one would obtain if one used Eq. (9-73), namely,

$$\hat{\gamma}_{1*} = -\hat{\beta}_{1\Delta} \hat{\Pi}_{\Delta *}$$

and computed the elements of $\hat{\Pi}_{\Delta *}$ by the straightforward application of least squares for each of the G^Δ endogenous variables on the group of K^* predetermined variables in the relation.

Limited-information estimates for the parameters of (9-75) may thus be computed as follows:

1. Set out the observation matrices Y_Δ, X_*, and X as defined in (9-78).

2. Compute the matrices $W^*_{\Delta\Delta}$ and $W_{\Delta\Delta}$ as defined in (9-80) and (9-81).

3. Find the smallest root l of the equation

$$|W^*_{\Delta\Delta} - lW_{\Delta\Delta}| = 0$$

4. Thence determine $\hat{\beta}_{1\Delta}$ from

$$(W^*_{\Delta\Delta} - lW_{\Delta\Delta})\hat{\beta}'_{1\Delta} = 0$$

and $\hat{\gamma}_{1*}$ from

$$\hat{\gamma}_{1*} = -\hat{\beta}_{1\Delta}Y'_{\Delta}X_*(X'_*X_*)^{-1}$$

9-5. Two-stage Least Squares

Consider again Eq. (9-75), normalize it by setting $\beta_{11} = 1$, and rewrite as

$$\begin{aligned} y_{1t} = -\beta_{12}y_{2t} - \cdots - \beta_{1G^\Delta}y_{G^\Delta t} - \gamma_{11}x_{1t} - \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ - \gamma_{1K^*}x_{K^*t} + u_{1t} \qquad t = 1, \ldots, n \end{aligned} \qquad (9\text{-}88)$$

This set of equations may in turn be written in matrix form as

$$y_1 = -Y_2\beta'_2 - X_*\gamma'_{1*} + u_1 \qquad (9\text{-}89)$$

where

$$y_1 = \begin{bmatrix} y_{11} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{1n} \end{bmatrix} \qquad Y_2 = \begin{bmatrix} y_{21} & \cdots & y_{G^\Delta 1} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ y_{2n} & \cdots & y_{G^\Delta n} \end{bmatrix} \qquad \beta'_2 = \begin{bmatrix} \beta_{12} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_{1G^\Delta} \end{bmatrix}$$

$$X_* = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{K^*1} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ x_{1n} & \cdots & x_{K^*n} \end{bmatrix} \qquad \gamma'_{1*} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma_{1K^*} \end{bmatrix} \qquad (9\text{-}90)$$

As we have seen, u_1 will in general be correlated with the explanatory variables Y_2. The basic idea in two-stage least squares is to replace Y_2 in (9-89) by an estimated matrix $\hat{Y}_2$ based on the least-squares regressions of the variables in Y_2 on *all* the predetermined variables in the model and then to apply least squares again to y_1, $\hat{Y}_2$, and X_*. There is thus a basic similarity between limited information and two-stage least squares in that both methods make use of all the predetermined variables in the model in order to estimate the parameters of a single relation, but do not require a detailed specification of the other relations in the model.

Regressing y_2 on X gives $\hat{y}_2 = X(X'X)^{-1}X'y_2$. Similarly, regressing y_3 on X gives $\hat{y}_3 = X(X'X)^{-1}X'y_3$. Hence

$$\hat{Y}_2 = [\hat{y}_2 \quad \hat{y}_3 \quad \cdots \quad \hat{y}_{G^\Delta}] = X(X'X)^{-1}X'Y_2 \qquad (9\text{-}91)$$

or

$$Y_2 = X(X'X)^{-1}X'Y_2 + V \qquad (9\text{-}92)$$

where V denotes the matrix of reduced-form residuals for the $G^\Delta - 1$ endogenous variables appearing on the right-hand side of (9-89). We can now rewrite (9-89) as

$$y_1 = -(Y_2 - V)\beta'_2 - X_*\gamma'_{1*} + (u - V\beta'_2) \qquad (9\text{-}93)$$

or

$$y_1 = -[(Y_2 - V) \quad X_*]\begin{bmatrix} \beta'_2 \\ \gamma'_{1*} \end{bmatrix} + (u - V\beta'_2) \qquad (9\text{-}94)$$

Applying least squares to this relation gives

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}'_2 \\ \hat{\gamma}'_{1*} \end{bmatrix} = -(A'A)^{-1}A'y_1 \qquad (9\text{-}95)$$

where

$$A = [(Y_2 - V) \quad X_*] \qquad (9\text{-}96)$$

Now

$$(Y_2 - V)'(Y_2 - V) = Y'_2Y_2 - V'Y_2 - Y'_2V + V'V$$

and

$$\begin{aligned} V'Y_2 &= V'(\hat{Y}_2 + V) \qquad \text{using (9-91) and (9-92)} \\ &= V'V \end{aligned}$$

since it is a property of the least-squares fit that the residual is uncorrelated with the regression values; that is, $V'\hat{Y}_2 = 0$. Similarly,

$$Y'_2V = V'V$$

Hence

$$(Y_2 - V)'(Y_2 - V) = Y'_2Y_2 - V'V$$

Moreover,

$$\begin{aligned} X'V &= X'[Y_2 - X(X'X)^{-1}X'Y_2] \\ &= 0 \end{aligned}$$

which illustrates the property of the least-squares fit that the residual is uncorrelated with the explanatory values. Thus X'_*V, which is a submatrix of $X'V$, must also be equal to the zero matrix. Using these results, the two-stage least-squares estimator of (9-95) may be written

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}'_2 \\ \hat{\gamma}'_{1*} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} Y'_2Y_2 - V'V & Y'_2X_* \\ X'_*Y_2 & X'_*X_* \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} Y'_2 - V' \\ X'_* \end{bmatrix} y_1 \qquad (9\text{-}97)$$

The condition that the inverse matrix in (9-97) exists is the condition (9-62) for identifiability, namely, $K^{**} \geq G^\Delta - 1$. $A = [(Y_2 - V) \quad X_*]$ is a matrix of order n by $G^\Delta - 1 + K^*$.

Hence $A'A$ is a square symmetric matrix of order $G^\Delta - 1 + K^*$ and $\rho(A'A) = \rho(A)$. Now

$$A = [(Y_2 - V) \quad X_*] = X\begin{bmatrix}(X'X)^{-1}X'Y_2 & \begin{matrix} I \\ 0 \end{matrix}\end{bmatrix} \qquad \text{using (9-92)}$$

where I is the unit matrix of order K^* and 0 is a zero matrix of order K^{**} by K^*. Thus the rank of A cannot be larger than the rank of X, which is K. If the rank of A is less than $G^\Delta - 1 + K^*$, then $A'A$ is singular. This will happen if

$$K < G^\Delta - 1 + K^*$$

that is, if

$$K^{**} < G^\Delta - 1$$

in which case the relationship (9-88) is unidentifiable.

9-6. k-class Estimators

Theil has developed the k class of estimators from (9-87) by defining[1]

$$\begin{bmatrix}\hat\beta_2' \\ \hat\gamma_{1*}'\end{bmatrix}_k = -\begin{bmatrix} Y_2'Y_2 - kV'V & Y_2'X_* \\ X_*'Y_2 & X_*'X_*\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}Y_2' - kV' \\ X_*'\end{bmatrix} y_1 \qquad (9\text{-}98)$$

Three of the estimators we have met so far are members of the k class. Ordinary least squares corresponds to $k = 0$, for then (9-98) reduces to the straightforward application of least squares to (9-88), with $[Y_2 \quad X_*]$ as the matrix of observations on the explanatory variables. Two-stage least squares corresponds to $k = 1$, and limited information corresponds to $k = l$, where l is defined in (9-85). This last result may be proved as follows.

The limited-information estimators are partially defined in (9-86), namely,

$$(W^*_{\Delta\Delta} - lW_{\Delta\Delta})\hat\beta'_{1\Delta} = 0$$

In k-class estimation we have normalized $\beta_{1\Delta}$ by setting the first element, the coefficient of y_{1t}, equal to unity; that is,

$$\beta_{1\Delta} = [1 \quad \beta_2]$$

where β_2 is the row vector of coefficients of the remaining endogenous variables in the relation (9-88). We can thus dispense with

[1] See H. Theil, *Economic Forecasts and Policy*, 2d ed., North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1961, chap.

the first equation in the set (9-86). To rewrite the remaining equations in the set, notice first of all from the definitions of $W^*_{\Delta\Delta}$ and $W_{\Delta\Delta}$ in (9-80) and (9-81) that we can write

$$W^*_{\Delta\Delta} = Y_\Delta'B_*Y_\Delta = \begin{bmatrix} y_1'B_*Y_\Delta \\ Y_2'B_*Y_\Delta\end{bmatrix} \qquad (9\text{-}99)$$

where $$B_* = I - X_*(X_*'X_*)^{-1}X_*' \qquad (9\text{-}100)$$

and $$Y_\Delta = [y_1 \quad Y_2] \qquad (9\text{-}101)$$

Similarly, $$W_{\Delta\Delta} = Y_\Delta'BY_\Delta = \begin{bmatrix} y_1'BY_\Delta \\ Y_2'BY_\Delta\end{bmatrix} \qquad (9\text{-}102)$$

where $$B = I - X(X'X)^{-1}X' \qquad (9\text{-}103)$$

Taking all equations in (9-86) other than the first thus gives

$$(Y_2'B_*Y_\Delta - lY_2'BY_\Delta)\hat\beta'_{1\Delta} = 0 \qquad (9\text{-}104)$$

If we rewrite the k-class estimators as

$$\begin{bmatrix} Y_2'Y_2 - kV'V & Y_2'X_* \\ X_*'Y_2 & X_*'X_*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat\beta_2' \\ \hat\gamma_{1*}'\end{bmatrix}_k = -\begin{bmatrix}Y_2' - kV' \\ X_*'\end{bmatrix} y_1 \qquad (9\text{-}105)$$

we may multiply out the left-hand side and equate the top element on each side to give

$$(Y_2'Y_2 - kV'V)(\hat\beta_2')_k + Y_2'X_*(\hat\gamma_{1*}')_k = -(Y_2' - kV')y_1 \qquad (9\text{-}106)$$

It is easily shown from (9-92) that

$$V'V = Y_2'BY_2$$

for B is symmetric and idempotent. In the same way

$$V'y_1 = Y_2'By_1$$

Substitution in (9-106) gives

$$(Y_2'Y_2 - kY_2'BY_2)(\hat\beta_2')_k + Y_2'y_1 - kY_2'By_1 + Y_2'X_*(\hat\gamma_{1*}')_k = 0 \qquad (9\text{-}107)$$

Equating the second elements in (9-105) and solving for $(\hat\gamma'_{1*})_k$ gives

$$(\hat\gamma'_{1*})_k = -(X_*'X_*)^{-1}[X_*'Y_2(\hat\beta_2')_k + X_*'y_1] \qquad (9\text{-}108)$$

Substitution in (9-107) then gives

$$(Y_2'B_*Y_2 - kY_2'BY_2)(\hat\beta_2')_k + (Y_2'B_*y_1 - kY_2'By_1) = 0 \qquad (9\text{-}109)$$

which may be written

$$(Y_2'B_*Y_\Delta - kY_2'BY_\Delta)(\hat\beta'_{1\Delta})_k = 0 \qquad (9\text{-}110)$$

LISTA DE SÍMBOLOS UTILIZADOS

Símbolos	*Concepto*
P	Producto bruto interno a precios de 1950
K	Capital fijo reproducible valuado a precios de 1950
L	Población económicamente activa
C_g	Gastos corrientes del gobierno a precios de 1950
C_p	Consumo privado a precios de 1950
E	Exportaciones totales de bienes y servicios a precios de 1950
F_1	Exportaciones de mercancías
F_2	Ingresos por turismo y transacciones fronterizas
M	Importaciones totales de bienes y servicios a precios de 1950
S_1	Importaciones de bienes de consumo
S_2	Importaciones de bienes intermedios
S_3	Importaciones de materiales de construcción
S_4	Importaciones de bienes de capital para la industria
S_5	Importaciones de bienes de capital para la agricultura y el transporte
S_6	Egresos en perímetros libres
S_7	Egresos por turismo
S_8	Importaciones de combustible y lubricantes
I	Inversión bruta fija a precios de 1950
P_K	Participación del factor capital en el producto
P_L	Participación del factor mano de obra en el producto
Y	Producto bruto interno a precios corrientes
N_m	Índice de precios de las importaciones
N_p	Nivel general de precios
t	Tiempo
d	Coeficiente de depreciación del capital fijo reproducible
P_t^*	Valor calculado del producto bruto interno a precios de 1950
p	Producto por hombre ocupado
k	Capital por hombre ocupado
r	Coeficiente de cambio tecnológico
U_{jt}	Términos aleatorios

2.0 *Las relaciones del modelo*

El modelo consta de 19 relaciones de comportamiento, tecnológicas y de definición, que constituyen un sistema completo en cuanto que contiene el número necesario de ecuaciones para determinar los valores de las incógnitas o variables endógenas (producto, consumo privado, gasto corriente del gobierno, importaciones y formación de capital), en función de las variables predeterminadas o exógenas (crecimiento de la mano de obra y exportaciones).

Sin embargo, no debe interpretarse como un sistema exacto de ecuaciones, sino como uno de carácter probabilístico. En efecto, como ocurre en todos los modelos basados en observaciones empíricas, es necesario considerar las alteraciones atribuibles a los componentes o términos aleatorios (U_{jt}) y tomar en cuenta que la estimación de los parámetros está sujeta a errores de muestra. En ese sentido, las proyecciones deben tomarse más que como valores únicos, como valores probables sujetos a determinado rango de variabilidad.

En vista de las consideraciones expuestas, conviene incluir una breve descripción de cada una de las ecuaciones incorporadas en el modelo y hacer explícitas las consideraciones que determinaron su selección, así como algunos de los problemas de estimación que se encontraron en el desarrollo del trabajo.

2.1 *Definición del producto*

A partir de la igualdad contable entre valor agregado e ingreso se ha definido el producto interno bruto en función de la utilización anual del gasto en consumo privado, consumo del gobierno, inversión bruta fija y exportaciones. Al total anterior se deducen las importaciones por estar incorporadas en la producción o en los renglones antes anotados.

De esa manera y evaluando cada uno de los componentes a precios de 1950, se obtiene la conocida expresión contable:

$$P_t = C_{pt} + C_{gt} + I_t + E_t - M_t$$

2.2 *La demanda de bienes de consumo*

En los países en proceso de desarrollo, los cambios en el gasto miliar en bienes y servicios de consumo dependen primordial-

CUADRO 2

SUMARIO DE LAS ECUACIONES DEL MODELO

Núm.	Descripción	Ecuación	R
1	Definición del producto	$P_t = C_{gt} + C_{Pt} + I_t + E_t - M_t$	
2	Demanda de consumo	$C_{Pt} = 1903.7 + 0.7434\, P_t^* + U_{1t}$	0.9902
3	Gasto corriente del gobierno	$\log C_{gt} = 3.65321 + 0.028141\, t + U_{2t}$	0.939
4	Demanda de exportaciones de mercaderías	$E_{1t} = 9327.1\, (1.045)^t$	
5	Demanda por servs. de turismo transacciones fronterizas	$E_{2t} = 4603.6\, (1.07)^t$ o bien $E_{2t} = 4603.6\, (1.061)^t$	
6	Definición de import. Totales	$M_t = \sum_{i=1}^{8} S_{it}$	
7	Import. de bienes de consumo	$\log S_{1t} = 2.724166 + 0.000002505\, P_t^* + U_{3t}$	0.650
8	Import. de bienes intermedios	$\log S_{2t} = -2.1657187 + 1.162194 \log P_t^* + U_{4t}$	0.966
9	Import. de mat. para la construcción	$\log S_{3t} = 2.45809 - 0.02658\, t + U_{5t}$	0.760
10	Import. de bienes de capital para la industria	$\log S_{4t} = -1.221658 + 1.08587 \log I_t + U_{6t}$	0.933
11	Import. de bienes de capital para la agr. y transportes	$S_{5t} = -4879.8 + 1357.65 \log I_t + U_{7t}$	0.920
12	Egresos en perímetros libres	$\log S_{6t} = 2.914018 + 0.012989\, t + U_{8t}$	0.857
13	Egresos por turismo	$\log S_{7t} = -3.223399 - 1.332391 \log P_t^* + U_{9t}$	0.973
14	Import. de comb. y lubricantes	$S_{8t} = 188.1$	
15	Definición de capital	$K_t = I_t + (1-d)\, K_{t-1};\ d = 0.025$	
16	Función de producción	$P_t = 50.3329\, (1.0166)^t\, K^{0.566}\, L^{0.4834}$	
17	Oferta de trabajo	$L_t = 13\,648\, (1.034)^t$	
18	Índice de precios de las importaciones	$m_t = 160.1 + 3.3154\, t + U_{10t}$	
19	Índice general de precios	$N_{Pt} = -7093.816 + 0.362596\, N_{Pt-1} + 44.9618\, N_{mt-1} - 143.9732\, t + U_{11t}$	0.9936

NOTA: los coeficientes de correlación así como las desviaciones estándar de los parámetros aceptaran en todos los casos un nivel de confianza del [illegible]0%, con las pruebas F (Fischer) y T (Student).

manera, se elaboraron las series del periodo 1950-1966, comprendidas en tres categorías principales: ingresos del capital, remuneraciones al trabajo, e ingresos mixtos. Posteriormente se reagruparon estos últimos a partir de estimaciones derivadas del análisis de los datos censales de 1950 y 1960 (véase el cuadro 11).

Como se indicó en párrafos anteriores, una vez elaboradas las series básicas sobre capital, población económicamente activa y distribución del ingreso por factores, se procedió a esti-

CUADRO 11

PARTICIPACIÓN PORCENTUAL DEL TRABAJO Y CAPITAL EN EL INGRESO

(porcientos)

Años	*Trabajo*	*Capital*	*Total*
1939	53.6	46.4	100.0
1940	52.1	47.9	100.0
1941	50.1	49.9	100.0
1942	48.5	51.5	100.0
1943	46.5	53.5	100.0
1944	45.2	54.8	100.0
1945	42.0	58.0	100.0
1946	39.2	60.8	100.0
1947	40.2	59.8	100.0
1948	41.2	58.8	100.0
1949	42.2	57.8	100.0
1950	42.9	57.1	100.0
1951	42.0	58.0	100.0
1952	41.9	58.1	100.0
1953	44.2	55.8	100.0
1954	46.5	53.5	100.0
1955	41.9	55.1	100.0
1956	44.6	55.4	100.0
1957	46.0	54.0	100.0
1958	47.6	52.4	100.0
1959	48.3	51.7	100.0
1960	49.7	50.3	100.0
1961	49.3	50.7	100.0
1962	48.0	52.0	100.0
1963	47.6	52.4	100.0
1964	50.4	49.6	100.0
1965	51.3	48.7	100.0
1966	53.1	46.9	100.0

FUENTE: Véase la nota 15 del texto.

to anual, eliminando por razones de comparabilidad censal el estrato de 10 a 12 años (véase el cuadro 10). La ecuación resultante es como sigue:

$$L_t = (13.648)\ (1.034)^t$$

2.8 *La función de producción*

Una función de producción expresa la relación entre las cantidades producidas y los insumos empleados, así como las que

Cuadro 10

POBLACIÓN ECONÓMICAMENTE ACTIVA Y FUERZA DE TRABAJO*

Años	*Pobl. económicamente activa*	*Fuerza de trabajo*
1939	5 616 717	5 671 361
1940	5 858 115	5 917 353
1941	6 099 513	6 165 [illegible]
1942	6 340 911	6 409 337
1943	6 582 309	6 655 329
1944	6 823 707	6 901 321
1945	7 065 105	7 147 [illegible]
1946	7 306 503	7 393 305
1947	7 547 901	7 639 297
1948	7 789 299	7 885 289
1949	8 030 697	8 131 28[illegible]
1950	8 272 093	8 377 270
1951	8 567 240	8 [illegible] 108
1952	8 862 387	[illegible]
1953	9 157 534	9 285 [illegible]
1954	9 452 681	9 588 622
1955	9 747 828	[illegible]
1956	10 042 975	10 [illegible] 298
1957	10 338 122	10 497 136
1958	10 633 269	10 799 97[illegible]
1959	10 928 416	11 102 812
1960	11 223 561	11 405 649
1961	11 405 000	11 590 523
1962	11 785 000	11 973 560
1963	12 174 000	12 363 784
1964	12 576 000	12 777 216
1965	12 988 000	13 195 806
1966	13 429 000	13 647 854

* Excluye el estrato de 10 a 12 años

Fuente: S I C, Dirección General de Estadística, *Censos de Población*, 1940, 1950 y 1960 y *Anuarios Estadísticos*.

estrangulamiento del sector externo —que provoca dos devaluaciones—, las restricciones impuestas a las compras del exterior durante el periodo bélico y, posteriormente, la política proteccionista, el financiamiento deficitario de la inversión pública y otros de importancia similar.

En cambio, durante años más recientes se ha alcanzado una marcada estabilidad de precios atribuible, en cierto grado, a la mayor elasticidad de la oferta y a la diversificación de la economía. Pero también han influido diversas circunstancias favorables. De una parte, se registraron cambios en la composición de la producción agrícola que se desplaza hacia los abastecimientos de alimentos de consumo interno, al deteriorarse la demanda externa e impulsarse la política de precios de sustentación. De otra, el financiamiento del sector público se hace descansar

CUADRO 12

ÍNDICE DE PRECIOS

(1950 = 100)

Años	Índice implícito del producto	Índice de precios al mayoreo[1]	Índice de precios al menudeo[1]	Índice de costo de la vida obrera*
1950	100.0	100.0	100.0	100.0
1951	119.9	124.0	122.8	112.7
1952	129.3	128.6	[illegible]	126.9
1953	128.1	126.1	[illegible]	126.7
1954	142.0	137.9	156.3	132.3
1955	159.5	156.7	180.3	154.0
1956	[illegible]	164.0	186.3	161.5
1957	[illegible]	171.0	191.3	170.9
1958	192.1	173.6	200.7	190.5
1959	200.0	180.7	226.8	195.3
1960	209.8	189.7	227.6	[illegible]
1961	215.4	[illegible]	229.2	208.3
1962	222.8	194.9	231.5	210.7
1963	226.9	196.0	231.7	212.0
1964	[illegible]	204.3	[illegible]	[illegible]
1965	246.9	208.1	[illegible]	224.5
1966	258.0	210.8	247.5	234.1
1967	268.1	216.8	251.3	

* De la ciudad de México

FUENTE: Banco de México, S. A. *Informes anuales* y S.I.C. Dirección General de Estadística, *Anuarios estadísticos*.

A título ilustrativo puede señalarse que en 1963, el 10.6 por ciento de la población colocada en los segmentos de ingreso más elevado, disfrutaban el 50 por ciento del ingreso familiar total.[1] De acuerdo con otras elaboraciones los grupos colocados en el nivel superior (representando el 2.8 por ciento de la población) absorbían poco más del 12 por ciento del consumo del país.[2] No se trata, desde luego, de un fenómeno peculiar a México; en la gran mayoría de los países subdesarrollados lade igualdades en el reparto del ingreso y la imitación de patrones de países más avanzados determinan hábitos dispendiosos de consumo entre las clases sociales de alto ingreso.

Cuadro 13

PROYECCIÓN DE LAS TASAS DE CRECIMIENTO DE EQUILIBRIO DEL PRODUCTO, CONFORME A DISTINTAS HIPÓTESIS

Año de la Proyección	*Hipótesis principal**	*Hipótesis A***	*Hipótesis B****	*Hipótesis C*****	*Hipótesis D******
1	7.08	7.19	7.10	6.80	7.22
2	7.18	7.31	7.22	6.77	7.34
3	7.29	7.42	7.34	6.74	7.47
4	7.39	7.53	7.46	6.71	7.59
5	7.50	7.65	7.57	6.68	7.72
6	7.61	7.76	7.69	6.66	7.84

* Son las tasas de crecimiento de equilibrio necesarias para absorber una P. E. A., que representa el 98.4 por ciento de la fuerza de trabajo.

** La Hipótesis A supone que la P. E. A., representa el 99 por ciento de la fuerza de trabajo, dados los coeficientes de actividad (véase la sección 2.7).

*** La Hipótesis B supone que como la tasa de expansión de los ingresos por turismo —estimada en 7.0 por ciento— se redujo al 6.1 por ciento, el crecimiento del P. N. B., tiene que ser mayor para absorber la oferta de trabajo.

**** En la Hipótesis C se redujeron en 0.05 puntos por año las elasticidades ingreso de las importaciones de materias primas, de los gastos de turismo en el exterior y de las importaciones de materias primas, con lo que resulta menor el esfuerzo interno para absorber la fuerza de trabajo.

***** En la Hipótesis D se combinaron las Hipótesis A (mayor oferta de trabajo) y la B (menores ingresos por turismo).

1 Véase, I. M. de Navarrete, *La distribución del ingreso en México; tendencias y perspectivas*, trabajo presentado al Seminario "El Perfil Económico de México en 1980", del Instituto de Investigaciones Sociales de la UNAM, publicado por Siglo XXI.

2 Véase, [illegible] de México, S. A., *Encuesta sobre ingresos y gastos familiares*, México, 1963, Oficina de Estudios sobre Proyecciones Agrícolas, México, 1965.

En las restantes hipótesis, el comportamiento del consumo sigue tendencias similares que sería ocioso reseñar en detalle (véanse el cuadro 14 y el Apéndice).

Cuadro 14

PROYECCIÓN DEL CONSUMO PRIVADO

Año de la proyección	*Hipótesis principal*	*Hipótesis* A	*Hipótesis* B	*Hipótesis* C	*Hipótesis* D
1	85 450	86 233	85 159	85 341	86 213
2	91 361	92 299	91 392	91 012	92 330
3	97 786	98 905	97 852	97 048	98 971
4	104 775	106 104	104 892	103 451	106 222
5	112 382	113 954	112 570	110 264	114 111
6	120 668	122 522	120 950	117 506	122 864

* Véanse notas explicativas en el cuadro 13 del texto.

En contraste, el consumo del gobierno se expande a un ritmo sensiblemente inferior al del producto (2.8 por ciento anual en el periodo de la proyección). Como se indicó en la sección 2.3, la política gubernamental ha restringido sistemáticamente el crecimiento de algunas de las partidas que lo integran a fin de facilitar el financiamiento de las transferencias y la inversión pública, así como, por motivos de estabilidad monetaria, frente a un sistema impositivo poco elástico. Acaso, el método de proyección de esta variable, sea poco realista desde el punto de vista del cumplimiento de los objetivos incorporados al modelo. Es muy probable que la contención del gasto resulte impracticable debido a la acumulación de necesidades y a la ampliación de las funciones estatales en la regulación de la vida económica. Con todo, alterar la hipótesis de trabajo habría implicado postular una reforma fiscal o una política financiera de corte muy diferente a la que se utiliza en la actualidad.

Las exportaciones de mercaderías y servicios, se elevarían a una tasa media del 5.6 por ciento en la hipótesis principal, y a razón del 5.3 por ciento de adoptarse la alternativa mínima de crecimiento del turismo y las transacciones fronterizas. Sobre

2 Véase la nota 3 del primer capítulo.

últimos cuatro años se han alcanzado coeficientes que oscilan alrededor del 20 por ciento y que varios países en proceso de desarrollo registran niveles similares o aun superiores.[4] Visto el problema desde otro ángulo, bastaría reducir el consumo de los estratos de mayor ingreso que representan el 2.8 por ciento de la población en poco menos del 3 por ciento, para generar el ahorro adicional público y privado que permitiría financiar la inversión a los niveles proyectados.

Cuadro 15

PROYECCIÓN DEL COEFICIENTE DE INVERSIÓN*

(Porcientos)

Año de la proyección	*Hipótesis principal*	*Hipótesis A*	*Hipótesis B*	*Hipótesis C*	*Hipótesis D*
1	19.76	20.01	19.81	19.22	20.05
2	20.17	20.47	20.27	19.07	20.56
3	20.60	20.91	20.74	18.92	21.09
4	21.04	21.44	21.24	18.77	21.64
5	21.51	21.96	21.77	18.62	22.21
6	22.00	22.49	22.31	18.46	22.80

* Véanse las notas explicativas en el cuadro 13 del texto.

Los obstáculos a la intensificación del proceso de formación de capital, no provienen de la escasez propiamente dicha del volumen de fondos susceptible de ser ahorrado; más bien influyen los hábitos de consumo, la limitada capacidad de captación de recursos del sector público y, probablemente también, la ausencia de incentivos apropiados para fomentar la producción de bienes intermedios y de capital (véase el capítulo IV).

En contraste, la estructura de las relaciones económicas con el exterior plantea problemas más complejos, aunque tampoco constituyen un escollo insuperable. La principal dificultad surge de la imposibilidad de reducir a corto plazo las compras de bienes de capital, de materias primas y productos intermedios

[4] En América Latina, en el año de 1967, la inversión como porciento del producto alcanzó las cifras del 23.1 en Perú, el 22.9 en Panamá y el 20.6 en Argentina (véase la *Review of Alliance for Progress Goals*, U. S. Government Office, Washington, 1969).

sin afectar al proceso de desarrollo económico o bien, aumentando los ingresos de divisas del exterior por una vía distinta al crédito. En cierto modo, la inflexibilidad de la balazan de pagos es consecuencia de la política unilateral de sustitución de importaciones de bienes finales de consumo. Ello se refleja en la alta elasticidad-ingreso de las importaciones que hacen subir las cifras proyectadas (hipótesis principal) a un ritmo medio del 6.7 por ciento anual, cálculos que serían aún superiores en algunas de las alternativas restantes (véanse el cuadro 16 y el Apéndice). Por otra parte, siendo menor el crecimiento de las exportaciones, se enfrentaría a un déficit creciente en la cuenta de mercancías y servicios[5] que oscilarían entre 2.7 y 3.5 miles de millones de pesos a precios de 1950.

Cuadro 16

PROYECCIÓN DE LAS IMPORTACIONES

(millones de pesos de 1950)

Año de la proyección	*Hipótesis principal*
1	14 77[illegible]
2	15 933
3	17 212
4	18 630
5	20 20[illegible]
6	21 9[illegible]

Los componentes que más influyen en el comportamiento de las compras al exterior, están dados por el turismo, las compras de bienes intermedios y la adquisición de bienes de capital para la industria. En conjunto, esos rubros elevarían su participación dentro del total en un 77.6 a un 82.1 por ciento durante el periodo de la proyección.

El análisis de la estructura del comercio exterior pone de relieve algunas conclusiones importantes. A corto plazo, las importaciones podrían comprimirse principalmente a través de limitar las erogaciones del turismo —que ocultan un fuerte

[5] Se excluyen los pagos a factores.

tarios de la población, lo cual traería consigo un ensanchamiento también sustancial del mercado interno. Además quedarían sentadas las bases para atenuar la asociación negativa entre niveles de subempleo y capacidad de negociación de los trabajadores, hecho que simplificaría en la práctica muchos esfuerzos orientados a elevar las condiciones de vida de la población. Nótese, por ejemplo, que en los países de América Latina donde se observan menores disparidades en la distribución del ingreso es también donde los desajustes en el mercado de trabajo resultan menos agudos.[6]

Cuadro 17

PROYECCIÓN DE LOS SALARIOS REALES*

(pesos de 1950)

Año de la proyección	*Hipótesis principal*	*Hipótesis* A	*Hipótesis* B	*Hipótesis* C	*Hipótesis* D
1	3 573	3 696	3 573	3 568	3 607
2	3 700	3 880	[illegible]	3 685	3 740
3	3 835	4 031	[illegible]	3 805	3 883
4	3 979	4 192	[illegible]	3 928	4 035
5	4 133	4 364	4 140	4 051	4 199
6	4 297	4 548	4 307	4 183	4 374

* Por trabajador

Pasaremos ahora a examinar la evolución previsible del nivel global de precios. De conformidad con la proyección del comportamiento de las principales fuentes de presión inflacionaria, se registraría una elevación moderada del índice global de precios del orden de 2.5 por ciento anual (véase el cuadro 18), que hace suponer incrementos ligeramente superiores de los índices del consumo y del costo de vida de los trabajadores.

La confiabilidad de los cálculos se ve respaldada por el hecho de existir una alta elasticidad de oferta de los bienes de consumo popular y por otras características estructurales e institucionales de la economía mexicana. De otra parte, no se postularon

6 Véase CEPAL, op. cit.

alteraciones importantes en la distribución del ingreso ni restricciones especiales a las importaciones del exterior que pudieran alterar las tendencias previsibles.

Cuadro 18

PROYECCIÓN DEL ÍNDICE DE PRECIOS

(1950 = 100)

Año de la proyección	*Índice de precios*
1	264.3
2	271.0
3	277.9
4	289.3
5	297.8
6	305.2

Con todo, no cabría descartar la posibilidad de que surgieran tensiones que elevaran los precios, sobre todo en la fase de ajuste de la producción a una tasa más alta de crecimiento de la demanda. Tampoco podrían hacerse de lado otras fuentes de presión inflacionaria, como las que suelen surgir de reformas impositivas, modificaciones a la política de salarios o de protección a la industria nacional.

Antes de terminar este apartado, conviene hacer explícitas algunas consideraciones sobre el carácter de los resultados del sistema estructural de ecuaciones. Desde un punto de vista matemático, las soluciones del modelo no convergen en una tasa estable de expansión del producto, por cuanto que esta última experimentaría un incremento constante en el tiempo. Planteada la misma cuestión desde el ángulo económico, podría señalarse la imposibilidad de hacer crecer la producción anual más allá de ciertas tasas razonables.

Por todo esto, se justifica la insistencia de que el modelo fue diseñado para el análisis del comportamiento de la economía a mediano plazo (5 ó 6 años) y que no se postularon cambios en la política —con excepción de los que supone elevar la absorción del empleo— ni modificaciones importantes en las características dominantes de la organización económica. Como es

12

fácil inferir, las causas de inestabilidad del modelo pueden residir en las deficiencias de su estructuración [illegible] la presencia de factores estructurales que impedirían a largo plazo la continuidad del desarrollo de no darse ciertas transformaciones espontáneas o deliberadas. Al respecto, se efectuaron una serie de pruebas tomando como punto de partida las proyecciones reseñadas hasta aquí.

De un lado, fueron examinados los efectos de incrementar o disminuir la propensión marginal al consumo —que ya se ha visto constituye un fuerte escollo en el proceso de formación de capital— y, de otro, se efectuó un análisis similar reduciendo las elasticidades-ingreso de las importaciones de insumos intermedios y del turismo nacional en el exterior. Así pudo comprobarse la posibilidad de obtener tasas convergentes de crecimiento del producto (véase el cuadro 19). Queda claro, entonces, que el origen de la limitación a la tasa de desarrollo y de ocupación en el futuro de México, obedece a causas que vienen operando desde tiempo atrás, y cuyas manifestaciones más evidentes se observan en las deficiencias estructurales e institucionales, en el aumento de la inversión, en la debilidad del sector externo y en el estrangulamiento de las finanzas públicas (véase la sección 4.3).

Cuadro 19

COMPARACIÓN DE TASAS DE CRECIMIENTO DE EQUILIBRIO CONFORME A NUEVAS HIPÓTESIS

(Porcientos)

Año de la proyección	*Hipótesis principal*	*Hipótesis A**	*Hipótesis B***	*Hipótesis C****
2	7.08	7.26	6.90	[illegible]
3	7.18	7.40	7.10	6.87
4	[illegible]	7.54	7.19	[illegible]
5	7.39	7.81	7.26	6.82
6	7.50	7.94	7.29	6.31
Tasa de equilibrio	—	—	7.35	6.76

* La propensión marginal a consumir se elevó de 0.7434 (cifra correspondiente a la hipótesis principal) a 0.7602.

** La propensión marginal a consumir se redujo al nivel de 0.72.

*** Se adoptó el mismo supuesto que en la hipótesis B y además se redujeron en 0.05 puntos por año las elasticidades-ingreso de las importaciones de bienes intermedios y del turismo hasta reducirlas en 0.25.

CUADRO 20

DESTINO DE LA INVERSIÓN PÚBLICA FEDERAL, 1950-1966

(millones de pesos)

Años	Total	BÁSICAS DE DESARROLLO: Fomento agropecuario	Fomento industrial	Comunic. y trasportes	Otras inversiones	DE BENEFICIO SOCIAL: Servicios públicos	Hosp. y Centros de Asistencia	Educación e investigación	Habitación	ADMINISTRACIÓN Y DEFENSA: Defensa	Edif. Públicos	Otros
1950	*2 672*	515	796	1 079	1	113	80	29	34	11	1	19
1951	*2 836*	579	732	1 158	2	120	90	182	33	19	1	—
1952	*3 280*	561	697	1 378	1	292	53	221	34	15	28	—
1953	*3 076*	563	762	1 344	1	115	10	109	23	6	57	85
1954	*4 183*	626	1 355	1 468	2	231	6	156	18	18	22	275
1955	*4 408*	605	1 738	1 422	2	446	21	74	56	8	3	33
1956	*4 571*	649	1 289	1 703	47	502	108	131	115	8	19	—
1957	*5 628*	670	1 737	2 018	21	649	150	129	130	10	111	5
1958	*6 190*	698	2 090	2 377	2	430	194	155	97	12	119	16
1959	*6 532*	751	1 913	2 747	109	472	153	108	131	9	109	—
1960	*8 376*	580	2 610	3 014	95	748	514	192	431	13	179	—
1961	*10 372*	953	4 601	2 800	6	860	376	273	248	33	222	—
1962	*10 823*	818	4 198	3 119	40	1 016	428	175	653	10	366	—
1963	*13 821*	1 415	4 550	3 397	6	1 598	913	438	1 003	94	347	—
1964	*17 436*	2 369	5 342	3 668	—	1 907	2 573	610	507	94	431	—
1965	*16 301*	1 525	7 232	4 319	—	1 280	487	865	130	28	413	—
1966	*20 669*	1 877	8 775	5 131	—	1 958	827	892	857	37	316	—

FUENTE: Secretaría de la Presidencia, Dirección de Inversiones Públicas, *México, Inversión Pública Federal, 1925-1963.*

CUADRO 20 A

DESTINO DE LA INVERSIÓN PÚBLICA FEDERAL

(millones de pesos y porcientos)

Años	Total	Básicas de desarrollo		Beneficio social		Admón. y Defensa	
		Abs	Porciento	Abs.	Porciento	Abs.	Porciento
1950	*2 672*	2 391	89.5	256	9.6	25	0.9
1951	*2 836*	2 471	87.1	345	12.2	20	0.7
1952	*3 280*	2 657	[illegible]	[illegible]	[illegible]	43	1.3
1953	*3 076*	2 670	86.8	[illegible]	[illegible]	149	4.8
1954	*4 183*	3 481	83.2	[illegible]	9.3	311	7.5
1955	*4 408*	3 767	85.5	595	13.5	44	1.0
1956	*4 571*	3 688	80.7	856	18.7	27	0.6
1957	*[illegible]*	[illegible]	79.0	1 058	18.8	124	2.2
1958	*6 [illegible]*	5 167	83.5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2.3
1959	*6 532*	5 551	85.0	863	13.2	[illegible]	1.8
1960	*8 375*	6 299	75.2	1 885	22.5	192	2.3
1961	*10 372*	8 361	80.6	1 756	16.9	255	2.5
1962	*10 823*	8 175	75.5	2 272	21.0	376	3.5
1963	*13 821*	9 398	68.0	3 982	28.8	441	3.2
1964	*17 436*	[illegible]	[illegible]	5 542	31.8	525	[illegible]
1965	*16 031*	13 096	81.7	2 763	17.2	[illegible]	[illegible]
1966	*20 669*	15 783	76.4	4 534	21.9	352	1.7

FUENTE: Véase cuadro 20.

CUADRO 21

DISTRIBUCIÓN DEL INGRESO

Porcentajes de familias en orden creciente de ingreso	*Porcentajes de ingreso*		
	1950	*1958*	*1963 – 64*
50	19.1	16.7	15.7
30	21.1	20.4	21.7
20	59.8	62.9	62.6
10 por ciento más alto	49.0	[illegible]	49.9
5 por ciento más alto	40.2	38.6	38.3

FUENTE: Ifigenia M. de Navarrete, *op. cit.*

12

trabajo y, seguramente ha aumentado la subocupación en varias ramas de la actividad económica (véase el cuadro 22).

CUADRO 22

TASAS SECTORIALES DE CRECIMIENTO DEL EMPLEO

(porcientos)

Sector	*1930–65*	*1930–40*	*1940–50*	*1950–60*	*1960–65*
Conjunto de la Economía	*2.8*	*1.3*	*3.5*	*3.1*	*3.8*
Agropecuario	*1.9*	*0.5*	*2.3*	*2.4*	*2.7*
No Agrícola					
1. Bienes	*4.0*	*2.8*	*5.8*	*5.0*	*5.2*
a) manufacturas	4.4	1.6	6.3	4.9	5.2
b) minería	3.0	6.8	—1.3	1.9	6.4
c) petróleo	6.0	9.9	4.2	5.7	2.6
d) construcción	6.3	6.5	7.3	6.1	5.1
2. Servicios	*4.0*	*3.0*	*5.3*	*3.5*	*4.9*
a) electricidad	4.5	—2.6	9.6	5.1	7.9
b) transportes y comunicaciones	4.4	3.8	7.4	5.4	5.2
c) gobierno	3.8	2.7	4.0	3.2	6.8
d) comercio y otros servicios	4.1	3.1	5.7	3.3	4.5

FUENTE: Cuadro 5.

Entre los años extremos del mismo período, ocurren cambios muy significativos en la estructura ocupacional. El sector agrícola ve descender su participación en el empleo del 70.7 al 51.4 por ciento, mientras los servicios la acrecientan en 9.9 por ciento y los sectores de la industria, la construcción, la minería y petróleo en 9.3 por ciento (véase el cuadro 23). Una elevación tan pronunciada de la ocupación en servicios —aún descontando a los de carácter básico— no corresponde al grado de desarrollo alcanzado en el país, y parece más bien resultado de la incapacidad de las actividades directamente productivas para ampliar la absorción de mano de obra (véase gráfico 9).

14

CUADRO 23

CAMBIOS EN LA ESTRUCTURA OCUPACIONAL

1930–1965

Sectores	*Cambios porcentuales*
Agricultura	— 19.2
No agrícola	+ 19.2
1. Bienes	9.3
a) manufacturas	6.3
b) minería	0.0
c) petróleo	0.3
d) construcción	2.7
2. Servicios	9.9
a) electricidad	0.1
b) transporte y comunicaciones	1.4
c) gobierno	1.1
d) comercio y otros servicios	7.3

FUENTE: Cuadro 5.

En el gráfico 9 se representa geométricamente la evolución de la estructura del empleo mediante el uso de un sistema de coordenadas triangulares. Este sistema es el más adecuado para la representación plana de un punto P cuyas coordenadas sean (X^1, X^2, X^3) cuando X^1, X^2, X^3 están expresados en porcentajes y $X_1 + X_2 + X_3 = 100$.

En este sistema los ejes $^0X_1$, $^0X_2$, y $^0X_3$ están colocados uno a continuación de otro formando un triángulo equilátero. De manera que cualquier terna ordenada (X_1, X_2, X_3) sólo representa a un punto del triángulo, es decir, existe una relación biunívoca entre el punto y terno ordenada (X_1, X_2, X_3) y viceversa.

Así, la estructura del empleo en México en 1900 era la siguiente:

CUADRO 24

PRODUCTO INDUSTRIAL POR RAMAS

(millones de pesos de 1950)

Grupos industriales	*1950*	*1951*	*1952*	*1953*	*1954*	*1955*	*1956*	*1957*	*1958*	*1959*	*1960*	*1961*	*1962*	*1963*	*1964*	*1965*	*1966*	*1967*
Total de la industria Manufacturera	8 437	9 332	9 744	9 632	10 575	11 605	12 915	13 763	14 500	15 500	17 116	17 726	18 862	20 537	23 573	25 202	27 939	30 234
Alimentos, bebidas y tabaco	2 536	2 835	2 957	3 098	3 257	3 517	3 765	4 055	4 324	4 503	4 945	5 [illegible]	5 436	5 633	6 373	6 860	7 430	7 915
Fabricación de textiles	1 275	1 212	1 337	1 187	1 370	1 411	1 451	1 539	1 605	1 631	1 771	1 755	1 779	1 911	2 254	2 387	2 613	2 850
Calzado, prendas de vestir y artículos de confección textil	803	839	857	839	915	972	1 009	1 051	1 075	1 143	1 203	1 235	1 261	1 321	1 477	1 553	1 651	1 727
Industrias de la madera y el corcho	506	533	399	390	335	403	531	425	371	480	420	393	429	463	519	546	563	578
Papel y productos de papel	185	203	201	197	219	234	262	289	302	323	355	337	407	445	490	569	637	681
Imprenta, editorial e industrias conexas	200	223	231	213	255	265	278	310	321	337	323	352	391	431	494	523	573	676
Cuero y productos del cuero excepto calzado	244	270	278	278	272	261	283	322	333	341	376	342	366	383	396	397	414	424
Productos de hule	127	183	173	170	191	210	241	229	273	313	331	350	380	[illegible]	504	569	635	672
Productos químicos	753	751	938	971	1 167	1 362	1 551	1 654	1 841	2 203	2 426	2 679	3 [illegible]	3 358	3 775	4 172	4 816	5 351
Minerales no metálicos	358	429	425	450	469	547	671	654	657	700	776	763	[illegible]	891	1 051	1 08[illegible]	1 206	1 352
Siderurgia y fabricación de productos metálicos	655	778	831	912	1 060	1 305	1 559	1 732	1 835	2 082	2 310	2 358	2 [illegible]	2 862	3 [illegible]	3 521	3 913	4 375
Construcción de maquinaria	335	369	367	362	409	422	578	715	720	758	904	1 033	1 035	1 154	1 397	1 402	1 659	1 763
Equipo de transporte	261	540	546	418	404	357	531	502	463	613	585	714	712	804	1 073	1 089	1 315	1 47[illegible]
Otras industrias	151	167	174	172	139	205	231	246	260	233	306	317	337	371	420	450	500	537

Fuente: Banco de México, S. A.

25). Por otra parte, estudios comparativos internacionales muestran que el grado de industrialización de la economía mexicana se halla debajo de lo que justificaría su nivel de ingreso. Desde luego, los apuntamientos anteriores no significan que en un futuro inmediato habrá de registrarse marcado debilitamiento en el proceso de industrialización; pero sí indican la presencia de factores, cuya influencia conviene contrarrestar desde ahora.

La reorientación de la política de desarrollo manufacturero abarca a la mayoría de los instrumentos que se vienen utilizando. Ello se explica en función de los objetivos que se habrían de perseguir, los cuales presuponen acentuar el énfasis en el fomento selectivo de industrias básicas. Se trata fundamentalmente de ramas donde se conjugan altas elasticidades de la demanda y concentración del avance tecnológico. La importancia de las mismas deriva de la necesidad de cambiar la estructura de la producción dominada por industrias de lento crecimiento, para acentuar la formación de manufacturas dinámicas (véase el cuadro 26).

Cuadro 25

TASAS DE CRECIMIENTO

INDUSTRIA MANUFACTURERA

Ramas	*1955-60*	*1960-65*	*1960-67*
Total	*8.1*	*8.1*	*8.5*
Alimentos, bebidas y tabaco	7.1	6.8	7.0
Fabricación de textiles	4.2	6.1	7.2
Calzado, prendas de vestir, etc.	4.4	5.2	5.7
Madera y corcho	3.5	2.6	2.7
Papel	8.7	9.9	8.9
Imprenta, editorial, etc.	4.0	10.1	10.2
Cuero	4.5	[illegible]	5.5
Productos de hule	9.7	[illegible]	10.6
Productos químicos	12.9	10.8	[illegible]
Minerales no metálicos	7.2	6.9	8.4
Siderurgia y productos metálicos	12.1	8.8	9.4
Construcción de maquinaria	12.9	10.5	[illegible]
Equipo de transporte	8.7	15.2	13.0
Otras industrias	8.0	8.0	8.3

Fuente: Cuadro 23.

CUADRO 26

ESTRUCTURA INDUSTRIAL DE MÉXICO Y OTRAS REGIONES, 1965

(porcientos de la producción total)

Países	*Bienes de consumo no duradero*	*Bienes intermedios*	*Bienes de capital y consumo duradero*
Países capitalistas	35	29	36
Países capitalistas más desarrollados	34	28	38
URSS y países socialistas de Europa Oriental	32	29	39
América Latina	52	33	15
México	49	34	17

FUENTE: Instituto Latinoamericano de Planificación Económica y Social; para México, estimaciones de la Asesoría Económica de la Secretaría de la Presidencia.

Sólo de esa manera podría asegurarse la consolidación de núcleos internos que diesen autonomía al desarrollo económico y a la vez atenuar sobre bases sólidas el desequilibrio externo.[8] En la práctica, las ventas al exterior de productos manufacturados tradicionales —aunque no debiera desaprovecharse— sólo permitirían aliviar las tensiones de la balanza de pagos durante periodos relativamente cortos. A más largo plazo, se volverían a presentar las tendencias divergentes entre importaciones y exportaciones, en virtud del menor crecimiento de la demanda mundial de tales artículos.

Como se examinará más adelante, otra consideración importante en la elaboración de una nueva política de desarrollo industrial se refiere a la necesidad de implantar criterios mucho más estrictos en materia de costos y productividad. Hasta ahora el objetivo central ha sido el crecimiento de la producción aun a riesgo de crear una estructura industrial ineficiente. De aquí,

[8] A título ilustrativo cabe indicar que las industrias metal-mecánicas y químicas explican en gran medida el crecimiento de la producción y el empleo en los países desarrollados. El comercio exterior de dichos productos representa alrededor del 70 por ciento del intercambio mundial de manufacturas. Además, su tasa de crecimiento oscila entre el 15 y el 7 por ciento anual, en tanto que la de las ventas de productos primarios apenas alcanza el 3.5 por ciento (1955–1963).

la diversificación extensiva de las manufacturas ligeras. En cambio, discriminan la elaboración de bienes de capital y productos intermedios debido a que, por un lado algunos insumos industriales básicos están fuertemente gravados y por otro, los bienes de capital terminados tienen un arancel relativamente bajo. La falta de un arancel adecuado a la integración industrial es uno de los factores principales que frenan el desarrollo de la industria pesada. En cierto sentido, se continúa sacrificando la eficiencia y solidez de la base productiva y reduciendo artificialmente los requerimientos técnicos, de capital y organización que demanda el desarrollo industrial.

La protección excesiva ha tendido a propiciar la formación de empresas de carácter oligopólico que desatienden los problemas de costos y competitividad. De esa manera, se ha venido creando una estructura de precios que restringe las dimensiones del mercado, acentúa la concentración del ingreso y relega a un plano secundario los incentivos para la incorporación de los avances tecnológicos (véase el cuadro 27). Las consecuencias de sostener sin mayores alteraciones esas modalidades de política, han entorpecido también la formación de corrientes significativas de exportaciones manufactureras, donde los costos constituyen uno de los criterios fundamentales.

CUADRO 27

ESTRUCTURA DE LOS COSTOS INDUSTRIALES

(porcientos del valor bruto de la producción)

País	Remuneraciones brutas al capital	Otros costos	Sueldos y Salarios	Materias primas	Energía y combustibles
Estados Unidos	19	81	28	51	3
Argentina	32	68	18	48	2
Bolivia	25	75	17	53	5
Brasil	34	66	13	50	3
Colombia	30	70	10	[illegible]	2
Chile	30	70	13	54	3
Ecuador	28	72	16	53	3
México	32	68	14	51	3
Perú	34	66	15	48	3

FUENTE: CEPAL, *El proceso de industrialización en América Latina*, Nueva York, 1965, p. 154.

CUADRO 25

MOVIMIENTOS DE CAPITAL DEL EXTERIOR

(millones de dólares corrientes)

Concepto	1960	1964	1965	1966	1967
I. Entradas de capital	194*	967	565	848	773
A) Largo y mediano plazo	120	904	[illegible]	697	744
1. Sector privado	—81	—2[illegible]	240	132	64
Inversión directa	—38	162	[illegible]	109*	4*
Créditos	—38*	65	[illegible]	15	5
Valores	— 5	— 9	12	8	[illegible]
2. Sector Público	20[illegible]*	685	356	565	680
B) Corto plazo (neto)	74	63	— 31	151	29
II. Salidas de capital (mediano y largo plazo)	—	392	[illegible]	404	420
1. Sector privado	—	12	12	12	[illegible]
2. Sector público					
Amortizaciones	—	366	357	[illegible]	[illegible]
Créditos concedidos al exterior		14	54	[illegible]	—[illegible]
III. Saldo neto total	19[illegible]	575	142	364	[illegible]
Saldo neto de capital a largo y mediano plazo	(120)	(512)	(173)	(213)	(316)
IV. Pagos por intereses de la deuda utilizada de la inversión directa	172	298	297	344**	368**
V. Aporte neto de las transacciones con el capital del exterior III–IV	22	277	—155	—24	—23

*Movimientos netos.

**No incluye la reinversión de utilidades.

FUENTE. Estimaciones basadas en las cifras oficiales de la balanza de pagos.

to de las exportaciones de México. De hecho, el mercado regional ofrece la posibilidad más o menos inmediata de colocar gran variedad de productos —que no serían competitivos en otras zonas y que ya se elaboran— y la de proveer un mercado más amplio que facilite la continuación del proceso de sustitución de importaciones.[13]

[13] Conforme a estudios realizados en la Secretaría de Industria y Comercio, existen varias ramas industriales donde se registran excedentes de capacidad textiles y fibras artificiales, alcohol, zapatos, artículos de plástico, pinturas, cemento, productos de tocador, productos farmacéuticos, conductores eléctricos, loza, cigarrillos y fósforos etcétera, muchos de los cuales podrían colocarse con ventaja en el mercado regional (Véase, García Reynoso, P., "Problemas de Integración Industrial Latinoamericana", Re-

CUADRO 29

FINANZAS DEL GOBIERNO FEDERAL

(millones de pesos corrientes)

Concepto	1950	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967
I. Ingresos corrientes	3 037	10 970	11 392	12 795	14 537	17 249	19 876	20 861	23 183
II. Gastos corrientes	1 731	7 717	9 355	10 643	11 731	13 657	16 449	18 130	19 662
1. Sueldos y compras de bienes y servicios	1 310	4 753	5 151	5 617	6 323	7 069	7 092	9 052	9 790
2. Intereses de la deuda	86	507	703	708	686	1 127	2 267	2 777	2 783
3. Transferencias	335	2 361	3 397	4 138	4 552	5 273	6 107	6 111	6 396
4. Otros		96	104	130	170	183	173	207	793
III. Saldo en cuenta corriente (ahorro**)	1 326	3 253	2 037	2 153	2 806	3 592	3 427	2 734	3 516
IV. Ingresos de capital		18	27	36	42	48	218	891	130
V. Transferencias de capital	419 (IV–VI)	598	531	572	1 103	1 103	1 207	3 196 (V–VI)	3 211 (V–VI)
VI. Inversión financiera		715	515	447	580	1 088	1 499		
VII. Inversión fija	655	2 764	2 651	2 751	2 810	3 913	4 246	4 420	5 119
1. Recursos propios (III + IV — V — VI)	916	1 958	1 015	1 170	1 215	1 419	939	1 029	[illegible]
2. Préstamos	— 261*	806	1 639	1 581	1 565	[illegible]	3 307	3 391	4 734

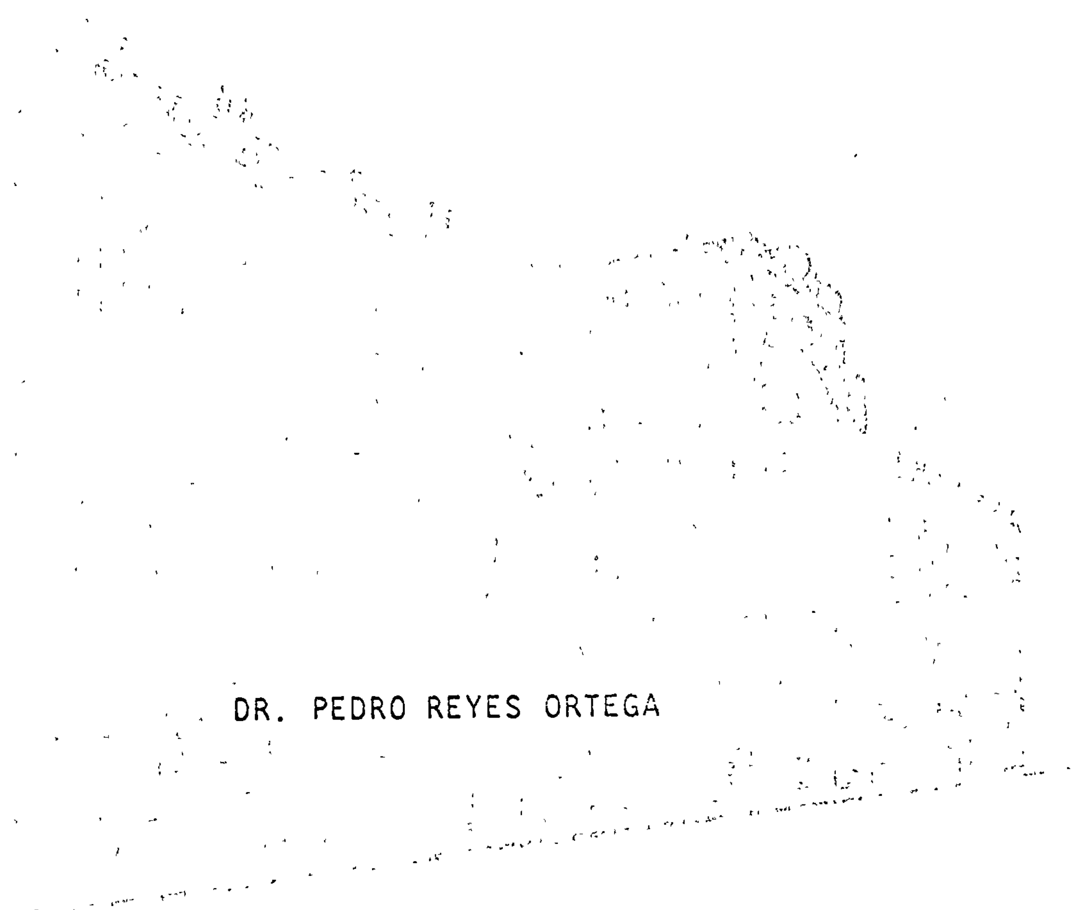
*Estimado por diferencia.

**Por diferencia en las fuentes consultadas este saldo no coincide exactamente con el consignado en el cuadro 31.

FUENTE: *Secretaría de Hacienda y Crédito Público.*

centro de educación contínua
facultad de ingeniería, unam

PROGRAMACION DE INVERSIONES



DR. PEDRO REYES ORTEGA

Tacuba 5, primer piso. México 1, D.F.
Teléfonos: 521-30-95 y 513-27-95

METODO DE LOS MINIMOS CUADRADOS ORDINARIOS.-

Este Método se puede aplicar a un modelo uni-ecuacional. Cuando el modelo consta de 2 o más ecuaciones al tratar de estimar los parámetros de una ecuación, existirán, usualmente, 2 o más variables endógenas en cada relación y entonces no podemos saber cual variable endógena se puede seleccionar como variable dependiente. El resto de las variables endógenas estarán correlacionadas con el término de error en esa relación debido a la naturaleza simultánea de las relaciones en el modelo.

Esto quiere decir, que definitivamente el método enunciado no podrá aplicarse a la estimación de los parámetros de cualquier ecuación de un modelo que contenga 2 o más ecuaciones en vista de que los estimadores serán sesgados e inconsistentes.

Desde luego que esto no necesariamente implica que el Método ordinario de los mínimos cuadrados se deseche, en vista de que la selección de un método en la práctica se debe hacer balanceando las propiedades del método y la simplicidad del cómputo. Más aún, el sesgo no es necesariamente la propiedad más importante de un estimador, pero debe juzgarse junto con la variancia.

METODO INDIRECTO DE LOS MINIMOS CUADRADOS.-

Este Método es factible cuando las relaciones estructurales son exactamente identificables. El procedimiento consiste en estimar los parámetros de la forma reducida mediante la aplicación de los mínimos cuadrados ordinarios a cada una de las relaciones de la forma reducida y entonces calcular los estimadores de los parámetros estructurales. Estos últimos serán insesgados si es que las perturbaciones estructurales están normalmente distribuidas que lo implica que las perturbaciones de la forma reducida también lo serán, y además, que los estimadores de los parámetros de las formas reducidas serán calculados mediante mínimos cuadrados siendo de máxima virosimilitud.

2.1 Identificación.

2.1.1 Sistema de Ecuaciones

Cuando se tiene un modelo con más de una ecuación, ¿las técnicas para estimar los parámetros, usados en modelos uniecuacionales se pueden aplicar? R. En algunos casos depende de si la ecuación "i" es identificable ó no.

$\hat{\theta} =$ BLUE

$\theta = F \ (X_1 , X_2 \ . \ldots Xn)$ (Lineal)

$E \ (\hat{\theta} - \theta) = 0 , \ E \ (\hat{\theta}' - \theta) = 0$

$V \ (\hat{\theta}) \leq V \ (\hat{\theta}')$

2.2.1 Sistema de ecuaciones.

Ecuaciones Estructurales.

(1) $B Y + \Gamma X = u$

$B (g \times g) , \ Y (g \times 1)$

$\Gamma (g \times k) \quad X \ (k \times 1)$

$U \ (g \times 1)$

(2) $Y = - B^{-1} \Gamma X + B^{-1} u$

Ecuaciones reducidas.

Si el sistema (1) se premultiplica por una matriz F g x g

$$F\,B\,Y + F\,\Gamma X = F\,u$$

$$Y = -\,(F\,B)^{-1}\,F\,\Gamma X + (F\,B)^{-1}\,F\,u$$

$$Y = -\,B^{-1}\,F^{-1}\,F\,\Gamma X + B^{-1}\,F^{-1}\,F\,u$$

$$Y = -\,B^{-1}\,\Gamma X + B^{-1} + u \text{ que es (2)}$$

Nota: Tanto F^{-1} como B^{-1} se supone que existen; es decir, B y F son no singular

Se concluye que existe un número infinito de ecuaciones estructurales que tienen la misma forma reducida } Problema de Identificación

La primera ecuación se puede escribir como:

$$(3)\ \beta_{1}\,Y + \gamma_{1}\,x = u_{1}$$

Si premultiplicamos la forma reducida (2) por β_{1} tendremos:

$$(4)\ \beta_{1}\,Y = \beta_{1}\,\Pi X + \beta_{1}\,V_t$$

donde $\Pi = -\,B^{-1}\,\Gamma$

y $V_t = B^{-1}\,u$

en vista de que la matriz B está compuesta de $\left[\beta_{ij}\right]$

Si tomamos el primer renglón $\beta_{1} = \left[\beta_{11} \cdots \beta_{1g}\right)$

Si $B^{-1} = \frac{1}{|B|} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1g} \\ \vdots & & & \\ b_{g1} & \cdots & & b_{gg} \end{bmatrix}$

entonces $\beta_{1}v = \beta_{1} B^{-1} u = \left[1 \ 0 \cdots 0\right]\left[u_{1} \ u_{2} \cdots u_{g}\right]$

$= u_{1}$

esto se debe a que $B B^{-1} = I$ si tomamos el primer renglón de B por B^{-1} nos dará el primer renglón de I que es $\left[1 \ 0 \ 0 \ 0 \cdots 0\right]$

Esto nos conduce a:

(5) $\beta_{1} Y = \beta_{1} \Pi X + u_{1}$

o sea que si se compara con la expresión (3) entonces

(6) $-\gamma_{1} = \beta_{1} \Pi$

Supóngase que existen algunas restricciones sobre algunos de los componentes de B y Γ, sean cero. Entonces podemos agruparlos como:

G^{Δ} = número de variables endógenas que aparecen en la primera ecuación.

K_{n}^{*} = número de variables exógenas que aparecen en la primera ecuación.

$G^{\Delta\Delta} = G - G^{\Delta} =$ número de V endógenas que se excluyen en la la. ecuación.

$K^{**} = K - K^{*} =$ número de V exógenas que se excluyen de la la. ecuación.

Los parámetros de la la. ecuación se pueden arreglar como:

$$\beta_{\cdot} = [\beta_{\cdot\Delta} \; , \; 0_{\Delta\Delta}] \quad y \quad \gamma'_{\cdot} = [\gamma_{\cdot *} \; , \; 0_{**}]$$

La matriz Π se puede particionar a través de sus renglones en los primeros G^{Δ} y los restantes $G^{\Delta\Delta}$

Y sus K columnas en K^{*} y K^{**}

Entonces la expresión (6) se puede escribir como:

$$-[\gamma_{\cdot *} \; , \; 0_{**}] = [\beta_{\cdot\Delta} \; , \; 0_{\Delta\Delta}] \begin{bmatrix} \Pi_{\Delta *} & \Pi_{\Delta **} \\ \Pi_{\Delta\Delta *} & \Pi_{\Delta\Delta **} \end{bmatrix}$$

Lo cual da:

$$(7) \quad -\gamma_{\cdot *} = \beta_{\cdot\Delta} \Pi_{\Delta *}$$

$$(8) \quad 0_{**} = \beta_{\cdot\Delta} \Pi_{\Delta **}$$

Los parámetros de 7 y 8 serán identificables si las expresiones se pueden resolver dando un solo valor para cada componente de $\beta_{1\Delta}$ en términos de la forma reducida $\pi_{\Delta**}$

Con el valor de $\beta_{1\Delta}$ se puede obtener el vector γ_{1*} que será único si existe identificación.

Esto se traduce en:

el rango de $\ell(\pi_{\Delta**}) = G^{\Delta} - 1$

dado que $\pi_{\Delta.**}$ tiene G^{Δ} renglones y K^{**} columnas, una condición necesaria para que el rango sea $G^{\Delta} - 1$ es que

$K^{**} \geq G^{\Delta} - 1$ (condición de orden)

ver copias

otros resultados son:

se puede trabajar con la forma estructural sin obtener la reducida y establecer las condiciones de rango y orden.

Un resultado interesante es que si

$K^{**} = G^{\Delta} - 1$ la ecuación es justamente identificable (usar el método de los mínimos cuadrados indirectos)

$K^{**} > G^{\Delta} - 1$ la ecuación es sobre identificable o sobre-identificada (usar el método de dos etapas u otro).

Si $K^{**} < G^{\Delta} - 1$ se tendrá que volver a especificar la ecuación porque es menos que identificable.

sea

(1) $C_t = \alpha + \beta Y_t + \mu_t$

(2) $Y_t = C_t + Z_t$

donde

C = consumo (endógena)

Y = ingreso (endógena)

Z = no consumo (inversión quizá) exógena

u = perturbación estocástica

t = tiempo

hipótesis de trabajo:

$E(u_t) = 0$

$$E(u_t \; u_{t+s}) = \begin{cases} 0 \text{ para } & s \neq 0 \\ \sigma^2 \text{ para } & s = 0 \end{cases}$$

Z y μ son independientes.

deseamos obtener "buenos estimadores" (BLUE).

se demuestra en las páginas 343 y 344 del libro de Johnston que si se aplican los mínimos cuadrados, los parámetros son sesgados e inconsistentes.

Sin embargo si se obtiene la forma reducida y si a éstos se les aplica el M.C. la obtención de los parámetros estructurales serán BLUE.

En este sentido si aplicamos el criterio de identificación obtendremos para la primera ecuación

$$K^{**} = 1$$

$$\varsigma^{\Delta} = 2$$

$$K^{**} = \varsigma^{\Delta} - 1 = 1 .$$

- o -

El método de las dos etapas se anexa como copia.

Una idea general es la siguiente:

dado que $K^{**} > \varsigma^{\Delta} - 1$ entonces μ estará correlacionada con Y, en nuestro ejemplo.

La idea es filtrar o purgar Y estimando los parámetros s_1 y s_2 de la relación

$$Y = \pi_1 + \pi_2 \; Z + e$$

y con los valores estimados de $Y = \hat{Y}$ se calculan los parámetros de la función de consumo

$$C_t = \alpha + \beta \; \hat{Y}_t + \mu$$

Nota sobre "Indirect Least Square Method"

$$Y_t = \alpha + \beta Y_t + Z_t + U_t$$

$$\text{(i)} \quad Y_t = \frac{\alpha}{1-\beta} + \frac{1}{1-\beta} Z_t + \frac{U_t}{1-\beta}$$

Entonces $E(Y_t) = \dfrac{\alpha}{1-\beta} + \dfrac{1}{1-\beta} Z_t$

$$E\left\{U_t \left[Y_t - E(Y_t)\right]\right\} = \frac{1}{1-\beta} E(U_t^2) \neq 0$$

Como U_t está correlacionado con Y_t, la aplicación directa de los mínimos cuadrados a la función de consumo dará lugar a estimadores sesgados para los parámetros.

En este caso consideramos muestras finitas. Pero también para muestras infinitas el método de M.C.D. el sesgo persiste y los estimadores son inconsistentes.

Definiendo los momentos de 2o. orden:

$$M_{cy} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} (C_t - \bar{C})(Y_t - \bar{Y}), \text{ etc.}$$

sabemos que

$\hat{\beta}$ y $\hat{\alpha}$ de la ecuación (1) son:

$$\hat{\beta} = \frac{M_{cy}}{M_{yy}} \quad \text{y} \quad \alpha = \frac{M_{yy}\,\bar{C} - M_{cy}\,Y}{M_{yy}}$$

por otra parte las ecuaciones reducidas para C_t y Y_t, son:

$$C_t = \frac{\beta}{1-\beta} Z_t + \frac{\alpha}{1-\beta} + \frac{U_t}{1-\beta}$$

$$Y_t = \frac{1}{1-\beta} Z_t + \frac{\alpha}{1-\beta} + \frac{U_t}{1-\beta}$$

Proviene de sustituir (i) en la ecuación (1)

$$C_t = \alpha + \beta \frac{1}{1-\beta} Z_t + \frac{\beta\alpha}{1-\beta} + \frac{\beta U_t}{1-} + \underline{U_t}$$

$$= \frac{(1-\beta)\alpha + \beta Z_t + \beta\alpha + \beta U_t + (1-\beta) U_t}{1-\beta} =$$

$$= \frac{\alpha}{1-\beta} + \frac{\beta}{1-\beta} Z_t + \frac{U_t}{1-\beta}$$

Si $\bar{C}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ y $\bar{U}$ son los promedios de C, Y, Z y U entonces las desviaciones de las ecuaciones anteriores son:

$$C_t - \bar{C} = \frac{\beta}{1-\beta} (Z_t - \bar{Z}) + \frac{(U_t - \bar{U})}{1-\beta}$$

$$Y_t - \bar{Y} = \frac{1}{1-\beta} (Z_t - \bar{Z}) + \frac{(U_t - \bar{U})}{1-\beta}$$

entonces

$$M_{cy} = \frac{\beta}{(1-\beta)^2} M_{zz} + \frac{1}{(1-\beta)^2} M_{uu} + \frac{\beta}{(1-\beta)^2} M_{zu} + \frac{1}{(1-\beta)^2} M_{zu}$$

$$= \frac{\beta}{(1-\beta)^2} M_{zz} + \frac{1+\beta}{(1-\beta)^2} M_{zu} + \frac{1}{(1-\beta)^2} M_{uu}$$

Por un proceso similar se obtiene

$$M_{yy} = \frac{1}{(1-\beta)^2} M_{zz} + \frac{2}{(1-\beta)^2} M_{zu} + \frac{1}{(1-\beta)^2} M_{uu}$$

lo cual da:

$$\hat{\beta} = \frac{M_{cy}}{M_{yy}} = \frac{\beta M_{zz} + (1+\beta) M_{zu} + M_{uu}}{M_{zz} + 2 M_{zu} + M_{uu}}$$

Si el tamaño de la muestra tiende a ∞, entonces $\xrightarrow{n \to \infty}$

$M_{zu} \to 0$, ~~M_{yy}~~ $M_{uu} \to \sigma^2$ y $M_{zz} \to \bar{M}_{zz}$

(constante) con lo cual

$$\operatorname*{plim}_{n \to \infty} \hat{\beta} = \frac{\beta \bar{M}_{zz} + \sigma^2}{\bar{M}_{zz} + \sigma^2} = \beta + \frac{(1-\beta)\sigma^2 / \bar{M}_{zz}}{1 + \frac{\sigma^2}{\bar{M}_{zz}}}$$

Si $\beta < 1$ entonces la fracción es positiva y $\operatorname*{plim}_{n \to \infty} \hat{\beta} > \beta$

lo cual quiere decir que la aplicación de los M.C.D. son sesgados hacia arriba.

PROGRAMACION DE INVERSIONES

EVALUACION EN FUNCION DEL COSTO DE UN DISEÑO

ANALISIS COMPARATIVO DE VIA CLASICA CONTRA VIA ELASTICA

ING. EDUARDO A. MAC GREGOR B.

PLANEAMIENTO GENERAL

Consideramos que está justificada la construcción de una vía férrea en tangente y a nivel para unir los puntos Y y Z.

Para unir dichos puntos por medio de una vía férrea, tenemos dos diferentes alternativas:

Alternativa A = Vía clásica.

Alternativa B = Vía elástica sobre durmientes R. S.

Se supone que las dos alternativas originan los mismos beneficios, las diferencias entre las alternativas consisten únicamente en sus inversiones iniciales, gastos de mantenimiento, erogaciones para reconstrucciones y vida útil.

1.1) CRITERIO DE EVALUACION

Para realizar el estudio de evaluación sólo se analizan las diferencias entre alternativas. El criterio que adoptamos para la selección entre alternativas es el del valor presente mínimo de los costos.

1.2) DESCRIPCION DE LAS ALTERNATIVAS

Alternativa A - Vía clásica.

Esta vía clavada en durmientes de madera y unidos los rieles por medio de planchuelas, tornillos y roldanas en placas-de asiento. El riel es de 100 lb/yd y es el mismo para las dos alternativas.

Alternativa B - Vía Elástica con durmientes R. S.

Esta vía está sujeta por medio de grapas elásticas, perno tirafondo, al durmiente de concreto R. S., descansando sobre placas de asiento de hule, con cojinete de hule y casquillo -- aislante. En sus extremos lleva la llamada junta de dilatación y los rieles entre sí están soldados con soldadura aluminotérmica y eléctrica. Cada 250 m. de riel se suelda con - aluminotérmica y los tramos de 250 m. se sueldan con eléctrica entre cada riel.

1.3) DURACION DEL HORIZONTE ECONOMICO

Las alternativas que se analizan están asociadas a vidas útiles distintas, con objeto de hacer manifiesta esta diferencia en el análisis, elegimos como horizonte económico, el mínimo común múltiplo de las vidas útiles de las dos alternativas.

Alternativa A = 30 años vida útil estimada.

Alternativa B = 45 años vida útil estimada.

Horizonte económico = 90 años.

RANGO DE LAS TASAS DE ACTUALIZACION

A efecto de conocer la influencia de la variación en la tasa - de actualización dentro del contexto de las alternativas, consideramos un rango del 0 al 18%. Constituyendo lo anterior el análisis de sensibilidad para el parámetro (T) en cues--- tión.

$$0\% \leq r \leq 18\%$$

2) ANALISIS DE COSTOS

2.1) RECOPILACION DE INFORMACION

Las fuentes de información consultadas fueron:

Subgerencia de Vía y Estructuras de los Ferrocarriles Na-- cionales de México.

Subdirección de Adiestramiento de Vía del Instituto de Capacitación Ferrocarrilera de los FF. CC. N. de M.

La información recopilada referente a costo de inversión, -- mantenimiento y reconstrucción se presenta en las Tablas - 2.1 (A) y 2.1 (B).

2.2) COSTOS DE INVERSION

En la Tabla 2.1 (A) se presentan los costo de inversión en - forma desglosada. También se presenta una columna con -- las vidas útiles estimadas para cada concepto.

COSTO DE UN KILOMETRO DE VIA CLASICA

MATERIALES	CANTIDAD	PRECIO UNITARIO	IMPORTE	VIDA UTIL ESTIMADA - años -
Riel de 100 lb/yd	99 213 ton.	$ 2 100.00	208 347.30	30
Planchuelas	169 pares	94.32	15 940.08	30
Tornillos de 1 x 5½	676 pzas.	4.43	3 028.48	15
Roldanas de 1 1/8	676 "	1.50	1 014.00	15
Clavos 5/8 x 6	8 112 "	1.13	9 166.56	15
Anclas	2 028 "	4.20	8 517.60	30
Varillas escantillón	100 "	43.43	4 343.00	30
Durmientes impregnado 7" x 8" x 8'	2 028 "	49.95	101 298.60	15
Placas de asiento	4 056 "	12.50	50 700.00	30
TOTAL MATERIALES			402 355.62	
Obra de mano por colocación de durmientes, nivelación y alineamiento			30 000.00	15
Obra de mano por colocación de riel			5 000.00	30
Costo total materiales y obra de mano			437 355.62	
Costo de conservación por año			8 011.20	

TABLA 2.1(a)

COSTO DE UN KILOMETRO DE VIA ELASTICA SOBRE DURMIENTES R. S.

MATERIALES	CANTIDAD	PRECIO UNITARIO	IMPORTE	VIDA UTIL ESTIMADA - años -
Riel de 100 lb/yd	99 213 ton.	$ 2 100.00	208 317.30	45
Juntas sold. eléctrica	161 juntas	60.00	9 660.00	45
Juntas sold. Alm. T.	8 juntas	130.00	1 040.00	45
Junta de dilatación	½ junta/km.	25 500.00	12 750.00	45
Perno tira fondo	6 600 piezas	5.25	34 650.00	15
Grapas elásticas	6 600 "	6.50	42 900.00	15
Placas asiento hule	3 300 "	18.25	60 225.00	15
Cojinete de hule	3 300 "	1.56	5 148.00	15
Casquillo aislante	6 600. "	2.00	13 200.00	15
Durmiente R. S.	1 650	101.19	166 963.50	45
TOTAL MATERIALES			554 883.80	
Obra de mano por colocación accesorios			3 000.00	15
Obra de mano por colocación de riel y durmientes			32 000.00	45
Costo total Mats. y O. de M.			589 883.80	
Costo de conservación por año			4 000.00	

TABLA 2.1(b)

Alternativa A = \$ 437 355.62

Alternativa B = \$ 589 883.80

2.3) COSTOS DE MANTENIMIENTO

La experiencia de los ferrocarriles europeos y japoneses -- donde se encuentra en uso la vía elástica desde hace varios - años, ha demostrado que puede alcanzarse una economía de- alrededor de un 50% en los gastos de conservación de la vía elástica.

Costo anual promedio de mantenimiento por kilómetro:

Alternativa A = \$ 8 011.20

Alternativa B = \$ 4 000.00

2.4) COSTOS DE RECONSTRUCCION

Como consecuencia de las distintas vidas útiles de los materiales de la vía, se tendrán que sustituir piezas gastadas por otras nuevas, originándose así reconstrucciones cada 15 -- años.

Reconstrucciones (Obra de mano y materiales):

Alternativa A:

Año 15	\$ 144 507.64
Año 30	\$ 437 355.62
Año 45	\$ 144 507.64

Año 60	$ 437 355.62
Año 75	$ 144 507.64

Alternativa B:

Año 15	$ 159 123.00
Año 30	$ 159 123.00
Año 45	$ 589 883.80
Año 60	$ 159 123.00
Año 75	$ 159 123.00

El análisis está hecho a precios constantes de 1969, suponiendo una inflación homogénea.

2.5) COSTOS DE OPERACION

Para el presente análisis consideramos que los costos de operación son iguales y por lo tanto estos costos no los incluimos en el análisis.

2.6) VALORES DE RESCATE

El valor de rescate considerado es nulo.

El riel usado se vende como chatarra, sin embargo, esa ganancia se pierde por el costo de quitar los durmientes y rieles inservibles. El durmiente a los 15 años no tiene ningún valor.

2.7) FLUJO DE COSTOS EN EL HORIZONTE ECONOMICO

Los costos para cada año de las dos alternativas están tabulados en el apéndice.

3) ANALISIS DEL VALOR PRESENTE DE LAS ALTERNATIVAS

Sea C_i el costo en el año i, entonces el valor presente del flujo de costos se puede expresar según la siguiente expresión matemática:

$$\text{Valor presente} = C + \sum \frac{Ci}{(1+r)^n}$$

siendo

n = duración del horizonte económico.

r = tasa de actualización.

Por medio del uso de la computadora se calcularon los valores presentes de los costos para cada alternativa variando la tasa de actualización de 0 a 18%. Estos resultados se presentan en el apéndice.

Costo de equilibrio en el año i

En nuestro estudio el costo de equilibrio corresponde

al año 1

4) CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES FINALES

El análisis de sensibilidad, nos indica que para tasas de actualización menores o iguales a 3% la alternativa selecciona da debe ser la B, ya que el valor presente de sus costos es- menor.

Para tasas mayores al 3% la alternativa A debe seleccio-- narse, según el criterio del costo mínimo.

Los ahorros en mantenimiento no son significativos para ta- sas de actualización altas.

Las tasas de actualización usadas en los análisis económicos en México, son altas debido al costo de oportunidad del capi- tal (del 10% al 18%).

OBSERVACIONES

Es importante hacer notar que existen ciertas consecuencias con la vía elástica, no se consideraron en el análisis como:

1) + Confort por golpeteo

2) + Desgaste por golpeteo en el equipo

3) + Problemas en curvas con los durmiente de concreto

4) + Más velocidad y por lo tanto ahorro en tiempo

A P E N D I C E

FACULTAD DE INGENIERIA

EVALUACION DE PROYECTOS

ALTERNATIVA A VIA CLASICA CON DURMIENTE DE MADERA

ALTERNATIVA B VIA ELASTICA CON DURMIENTE DE CON--
CRETO R. S.

COSTOS ANUALES

AÑO	ALTERNATIVA A	ALTERNATIVA B
0	437355.	589883.
1	8011.	4000.
2	8011.	4000.
3	8011.	4000.
4	8011.	4000.
5	8011.	4000.
6	8011.	4000.
7	8011.	4000.
8	8011.	4000.
9	8011.	4000.
10	8011.	4000.
11	8011.	4000.
12	8011.	4000.
13	8011.	4000.

14	152507.	163123.
15	8011.	4000.
16		
17	8011.	4000.
18	8011.	4000.
19	8011.	4000.
20	8011.	4000.
21	8011.	4000.
22	8011.	4000.
23	8011.	4000.
24	8011.	4000.
25	8011.	4000.
26	8011.	4000.
27	8011.	4000.
28	8011.	4000.
29	445366.	163123.
30	8011.	4000.
31	8011.	4000.
32	8011.	4000.
33	8011.	4000.
34	8011.	4000.
35	8011.	4000.

36	8011.	4000.
37	8011.	4000.
38	8011.	4000.
39	8011.	4000.
40	8011.	4000.
41	8011.	4000.
42	8011.	4000.
43	8011.	4000.
44	152507.	593883.
45	8011.	4000.
46	8011.	4000.
47	8011.	4000.
48	8011.	4000.
49	8011.	4000.
50	8011.	4000.
51	8011.	4000.
52	8011.	4000.
53	8011.	4000.
54	8011.	4000.
55	8011.	4000.
56	8011.	4000.
57	8011.	4000.

58	8011.	4000.
59	445366.	163123.
60	8011.	4000.
61	8011.	4000.
62	8011.	4000.
63	8011.	4000.
64	8011.	4000.
65	8011.	4000.
66	8011.	4000.
67	8011.	4000.
68	8011.	4000.
69	8011.	4000.
70	8011.	4000.
71	8011.	4000.
72	8011.	4000.
73	8011.	4000.
74	152507.	163123.
75	8011.	4000.
76	8011.	4000.
77	8011.	4000.
78	8011.	4000.
79	8011.	4000.

80	8011.	4000.
81	8011.	4000.
82	8011.	4000.
83	8011.	4000.
84	8011.	4000.
85	8011.	4000.
86	8011.	4000.
87	8011.	4000.
88	8011.	4000.
89	8011.	4000.
90	0.	0.

****

FACULTAD DE INGENIERIA

EVALUACION DE PROYECTOS

ALTERNATIVA A VIA CLASICA CON DURMIENTE DE MADERA

ALTERNATIVA B VIA ELASTICA CON DURMIENTE DE CONCRETO R. S.

ANALISIS DE SENSIBILIDAD. VALOR PRESENTE Y COSTOS DE EQUILIBRIO

TASA	ALTERNATIVA A	ALTERNATIVA B	RELACION	C. EQUILIBRIO
0.00	2458552	2172259.	1.1317	286293.
0.01	1767078.	1627964.	1.0854	140504.
0.02	1354757.	1298788.	1.0430	57088.
0.03	1098313.	1092678.	1.0051	5804.
0.04	932110.	959241.	0.9717	28216.
0.05	820108.	870051.	0.9425	52440.
0.06	741875.	808598.	0.9174	70726.
0.07	685442.	765021.	0.8959	85149.
0.08	643564.	733274.	0.8776	96886.
0.09	611711.	709557.	0.8621	106652.
0.10	586957.	691423.	0.8489	114911.
0.11	567361.	677260.	0.8377	121988.
0.12	551594.	664987.	0.8282	128119.
0.13	538728.	656860.	0.8201	133488.
0.14	528095.	649357.	0.8132	138239.
0.15	519208.	643108.	0.8073	142484.

0.16	511707.	637843.	0.8022	146317.
0.17	505316.	633361.	0.7978	149812.
018.	499826.	629512.	0.7939	153028.

****
EL COSTO DE EQUILIBRIO CORRESPONDE AL AÑO 1
****

centro de educación continua
facultad de ingeniería, unam

PROGRAMACION DE INVERSIONES

DR. PEDRO REYES ORTEGA

Tacuba 5, primer piso. México 1, D.F.
Teléfonos: 521-30-95 y 513-27-95

2.1 Identificación.

2.1.1 Sistema de Ecuaciones

— Cuando se tiene un modelo con más de una ecuación, ¿las técnicas para estimar los parámetros, usados en modelos uniecuacionales se pueden aplicar? R. En algunos casos depende de si la ecuación "i" es identificable ó no.

$\hat{\theta}$ = BLUE

$\theta = F \; (X_1 , X_2 \; . \; . \; . \; Xn)$ (Lineal)

$E \; (\hat{\theta} - \theta) = 0 \; , \; E \; (\hat{\theta}' - \theta) = 0$

$V \; (\hat{\theta}) \leq V \; (\hat{\theta}')$

2.2.1 Sistema de ecuaciones.

Ecuaciones Estructurales.

(1) $B \, Y + \Gamma X = u$

$B \; (g \times g) \; , \; Y \; (g \times 1)$

$\Gamma (g \times k) \quad X \; (k \times 1)$

$U \; (g \times 1)$

(2) $Y = - B^{-1} \Gamma X + B^{-1} u$

Ecuaciones reducidas.

Si el sistema (1) se premultiplica por una matriz F g x g

$$F\,B\,Y + F\,\Gamma X = F\,u$$

$$Y = -\,(F\,B)^{-1}\,F\,\Gamma X + (F\,B)^{-1}\,F\,u$$

$$Y = -\,B^{-1}\,F^{-1}\,F\,\Gamma X + B^{-1}\,F^{-1}\,F\,u$$

$$Y = -\,B^{-1}\,\Gamma X + B^{-1} + u \text{ que es (2)}$$

Nota: Tanto F^{-1} como B^{-1} se supone que existen; es decir, B y F son no singular

Se concluye que existe un número infinito de ecuaciones estructurales que tienen la misma forma reducida } Problema de Identificación

La primera ecuación se puede escribir como:

$$(3)\ \beta_{\cdot}\,Y + \gamma_{\cdot}\,x = u_{\cdot}$$

Si premultiplicamos la forma reducida (2) por $\beta_{\cdot}$ tendremos:

$$(4)\ \beta_{\cdot}\,Y = \beta_{\cdot}\,\Pi X + \beta_{\cdot}\,V_t$$

donde $\Pi = -\,B^{-1}\,\Gamma$

y $V_t = B^{-1}\,u$

pero $\beta_1 \; B^{-1} \; u = u_{1t}$

en vista de que la matriz B está compuesta de $\left[\beta_{ij}\right]$

Si tomamos el primer renglón $\beta_1 = \left[\beta_{11} \; \cdots \; \beta_{1g}\right)$

Si $B^{-1} = \frac{1}{|B|} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1g} \\ \vdots & & & \\ b_{g1} & \cdots & & b_{gg} \end{bmatrix}$

entonces $\beta_{1v} = \beta_1 \; B^{-1} u = \left[1 \; 0 \cdots 0\right]\left[u_1 \; u_2 \; \cdots \; u_g\right]$

$= u_1$

esto se debe a que $B \, B^{-1} = I$ si tomamos el primer renglón de B por B^{-1} nos dará el primer renglón de I que es $\left[1 \; 0 \; 0 \; 0 \; \cdots \; 0\right]$

Esto nos conduce a:

(5) $\beta_1 Y = \beta_1 \Pi X + u_1$

o sea que si se compara con la expresión (3) entonces

(6) $-\gamma_1 = \beta_1 \Pi$

Supóngase que existen algunas restricciones sobre algunos - de los componentes de B y Γ, sean cero. Entonces podemos - agruparlos como:

G^{Δ} = número de variables endógenas que aparecen en la primera ecuación.

K_{*}^{*} = número de variables exógenas que aparecen en la primera ecuación.

$G^{\Delta\Delta} = G - G^{\Delta} =$ número de V endógenas que se excluyen en la la. ecuación.

$K^{**} = K - K^{*} =$ número de V exógenas que se excluyen de la la. ecuación.

Los parámetros de la la. ecuación se pueden arreglar como:

$\beta_{1} = \left[\beta_{1\Delta}\ ,\ 0_{\Delta\Delta}\right]$ y $\gamma_{1} = \left[\gamma_{1*}\ ,\ 0_{**}\right]$

La matriz Π se puede particionar a través de sus renglones en los primeros G^{Δ} y los restantes $G^{\Delta\Delta}$
Y sus K columnas en K^{*} y K^{**}

Entonces la expresión (6) se puede escribir como:

$$- \left[\gamma_{1*}\ ,\ 0_{**}\right] = \left[\beta_{1\Delta}\ ,\ 0_{\Delta\Delta}\right] \begin{bmatrix} \Pi_{\Delta *} & \Pi_{\Delta **} \\ \Pi_{\Delta\Delta *} & \Pi_{\Delta\Delta **} \end{bmatrix}$$

Lo cual da:

$$(7) \quad -\gamma_{1*} = \beta_{1\Delta}\Pi_{\Delta *}$$

$$(8) \quad 0_{**} = \beta_{1\Delta}\Pi_{\Delta **}$$

Los parámetros de 7 y 8 serán identificables si las expresiones se pueden resolver dando un solo valor para cada componente de $\beta_{1\Delta}$ en términos de la forma reducida $\Pi_{\Delta **}$

Con el valor de $\beta_{1\Delta}$ se puede obtener el vector γ_{1*} que será único si existe identificación.

Esto se traduce en:

el rango de $\mathcal{E}(\Pi_{\Delta **}) = G^{\Delta} - 1$

dado que $\Pi_{\Delta **}$ tiene G^{Δ} renglones y K^{**} columnas, una condición necesaria para que el rango sea $G^{\Delta} - 1$ es que

$$K^{**} \geqslant G^{\Delta} - 1 \quad \text{(condición de orden)}$$

ver copias

otros resultados son:

se puede trabajar con la forma estructural sin obtener la reducida y establecer las condiciones de rango y orden.

Un resultado interesante es que si

$K^{**} = G^{\Delta} - 1$ la ecuación es justamente identificable (usar el método de los mínimos cuadrados indirectos)

$K^{**} > G^{\Delta} - 1$ la ecuación es sobre identificable o sobreidentificada (usar el método de dos etapas u otro).

Si $K^{**} < G^{\Delta} - 1$ se tendrá que volver a especificar la ecuación porque es menos que identificable.

sea

(1) $C_t = \alpha + \beta Y_t + u_t$

(2) $Y_t = C_t + Z_t$

donde

C = consumo (endógena)

Y = ingreso (endógena)

Z = no consumo (inversión quizá) exógena

u = perturbación estocástica

t = tiempo

hipótesis de trabajo:

$E (u_t) = 0$

$$E (u_t \; u_{t+s}) = \begin{cases} 0 \text{ para } & s \neq 0 \\ \sigma^2 \text{ para } & s = 0 \end{cases}$$

Z y μ son independientes.

deseamos obtener "buenos estimadores" (BLUE).

se demuestra en las páginas 343 y 344 del libro de Johnston que si se aplican los mínimos cuadrados, los parámetros son sesgados e inconsistentes.

Sin embargo si se obtiene la forma reducida y si a éstos se les aplica el M.C. la obtención de los parámetros estructurales serán BLUE.

En este sentido si aplicamos el criterio de identificación obtendremos para la primera ecuación

$$K^{**} = 1$$

$$G^{\Delta} = 2$$

$$K^{**} = G^{\Delta} - 1 = 1$$

- o -

El método de las dos etapas se anexa como copia.

Una idea general es la siguiente:

dado que $K^{**} > G^{\Delta} - 1$ entonces μ estará correlacionada con Y, en nuestro ejemplo.

La idea es filtrar o purgar Y estimando los parámetros s_1 y s_2 de la relación

$$Y = \pi_1 + \pi_2 Z + e$$

y con los valores estimados de $Y = \hat{Y}$ se calculan los parámetros de la función de consumo

$$C_t = \alpha + \beta \hat{Y}_t + \mu$$

Nota sobre "Indirect Least Square Method"

$$Y_t = \alpha + \beta \; Y_t \; + \; Z_t \; + \; U_t$$

(i) $$Y_t = \frac{\alpha}{1 - \beta} + \frac{1}{1 - \beta} Z_t + \frac{u_t}{1 - \beta}$$

Entonces $$E \; (Y_t) = \frac{\alpha}{1 - \beta} + \frac{1}{1 - \beta} Z_t$$

$$E \left\{ U_t \; \left[Y_t - E \; (Y_t) \right] \right\} = \frac{1}{1 - \beta} \; E \; (u_t^2) \neq 0$$

Como U_t está correlacionado con Y_t, la aplicación directa de los mínimos cuadrados a la función de consumo dará lugar a estimadores sesgados para los parámetros.

En este caso consideramos muestras finitas. Pero también para muestras infinitas el método de M.C.D. el sesgo persiste y los estimadores son inconsistentes.

Definiendo los momentos de 2o. orden:

$$M_{cy} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} (C_t - \bar{C}) \; (Y_t - \bar{Y}) \quad , \text{etc.}$$

sabemos que

$\hat{\beta}$ y $\hat{\alpha}$ de la ecuación (1) son:

$$\hat{\beta} = \frac{M_{cy}}{M_{yy}} \quad \text{y} \quad \alpha = \frac{M_{yy} \; \bar{C} - M_{cy} \; Y}{M_{yy}}$$

por otra parte las ecuaciones reducidas para C_t y Y_t, son:

$$C_t = \frac{\beta}{1-\beta} Z_t + \frac{\alpha}{1-\beta} + \frac{U_t}{1-\beta}$$

$$Y_t = \frac{1}{1-\beta} Z_t + \frac{\alpha}{1-\beta} + \frac{U_t}{1-\beta}$$

Proviene de sustituir (i) en la ecuación (1)

$$C_t = \alpha + \beta \frac{1}{1-\beta} \cdot Z_t + \frac{\beta\alpha}{1-\beta} + \frac{\beta U_t}{1-} + \frac{U_t}{}$$

$$= \frac{(1-\beta)\alpha + \beta Z_t + \beta\alpha + \beta U_t + (1-\beta) U_t}{1-\beta} =$$

$$= \frac{\alpha}{1-\beta} + \frac{\beta}{1-\beta} Z_t + \frac{U_t}{1-\beta}.$$

Si $\bar{C}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ y $\bar{U}$ son los promedios de C, Y, Z y U entonces las desviaciones de las ecuaciones anteriores son:

$$C_t - \bar{C} = \frac{\beta}{1-\beta} (Z_t - \bar{Z}) + \frac{(U_t - \bar{U})}{1-\beta}$$

$$Y_t - \bar{Y} = \frac{1}{1-\beta} (Z_t - \bar{Z}) + \frac{(U_t - \bar{U})}{1-\beta}$$

entonces

$$M_{cy} = \frac{\beta}{(1-\beta)^2} M_{zz} + \frac{1}{(1-\beta)^2} M_{uu} + \frac{\beta}{(1-\beta)^2} M_{zu} + \frac{1}{(1-\beta)^2} M_{zu}$$

$$= \frac{\beta}{(1-\beta)^2} M_{zz} + \frac{1+\beta}{(1-\beta)^2} M_{zu} + \frac{1}{(1-\beta)^2} M_{uu}$$

Por un proceso similar se obtiene

$$M_{yy} = \frac{1}{(1-\beta)^2} M_{zz} + \frac{2}{(1-\beta)^2} M_{zu} + \frac{1}{(1-\beta)^2} M_{uu}$$

lo cual da:

$$\hat{\beta} = \frac{M_{cy}}{M_{yy}} = \frac{\beta\ M_{zz} + (1+\beta)\ M_{zu} + M_{uu}}{M_{zz} + 2\ M_{zu} + M_{uu}}$$

Si el tamaño de la muestra tiende a ∞, entonces ~~M~~ $n \to \infty$

$M_{zu} \to 0$, $\cancel{M_{yy} \to \sigma^2}$ $M_{uu} \to \sigma^2$ y $M_{zz} \to \bar{M}_{zz}$

(constante) con lo cual

$$\underset{n \to \infty}{p\lim}\ \hat{\beta} = \frac{\beta\ \bar{M}_{zz} + \sigma^2}{\bar{M}_{zz} + \sigma^2} = \beta + \frac{(1-\beta)\ \sigma^2 / \bar{M}_{zz}}{1 + \frac{\sigma^2}{\bar{M}_{zz}}}.$$

Si $\beta < 1$ entonces la fracción es positiva y ~~plim~~ $\underset{n \to \infty}{p\lim}\ \hat{\beta} > \beta$.

lo cual quiere decir que la aplicación de los M.C.D. son sesgados hacia arriba.

METODO DE LOS MINIMOS CUADRADOS ORDINARIOS.-

Este Método se puede aplicar a un modelo uni-ecuacional. Cuando el modelo consta de 2 o más ecuaciones al tratar de estimar los parámetros de una ecuación, existirán, usualmente, 2 o más variables endógenas en cada relación y entonces no podemos saber cual variable endógena se puede seleccionar como variable dependiente. El resto de las variables endógenas estarán correlacionadas con el término de error en esa relación debido a la naturaleza simultánea de las relaciones en el modelo.

Esto quiere decir, que definitivamente el método enunciado no podrá aplicarse a la estimación de los parámetros de cualquier ecuación de un modelo que contenga 2 o más ecuaciones en vista de que los estimadores serán sesgados e inconsistentes.

Desde luego que esto no necesariamente implica que el Método ordinario de los mínimos cuadrados se deseche, en vista de que la selección de un método en la práctica se debe hacer balanceando las propiedades del método y la simplicidad del cómputo. Más aún, el sesgo no es necesariamente la propiedad más importante de un estimador, pero debe juzgarse junto con la variancia.

METODO INDIRECTO DE LOS MINIMOS CUADRADOS.-

Este Método es factible cuando las relaciones estructurales son exactamente identificables. El procedimiento consiste en estimar los parámetros de la forma reducida mediante la aplicación de los mínimos cuadrados ordinarios a cada una de las relaciones de la forma reducida y entonces calcular los estimadores de los parámetros estructurales. Estos últimos serán insesgados si es que las perturbaciones estructurales están normalmente distribuidas que lo implica que las perturbaciones de la forma reducida también lo serán; y además, que los estimadores de los parámetros de las formas reducidas serán calculados mediante mínimos cuadrados siendo ~~serán~~ de máxima virosimilitud.

Modelo del Multiplicador - Acelerador de Samuelson, Aplicado a la Economía Mexicana.

I. INTRODUCCION.

1. ¿Qué es el Multiplicador?

En la "Teoría General del Empleo, Interés y Dinero", Keynes establece entre otras funciones, la del consumo que se puede expresar como

$$C_t = a + b\,Y_t$$

en donde a es una constante y b se define como la propensión marginal al consumo que se define como el incremento en el consumo al obtenerse un incremento en el ingreso Y; o sea p.m.c. = $\frac{\Delta C}{\Delta Y}$ (ley psicológica de Keynes) y que es menor que la unidad y positiva, lo que implica que no todo lo que se gana se consume, a nivel agregado
o sea $0 < b < 1$

Estudios empíricos han demostrado que $0 < b < 1$ con diferentes hipótesis como la de Friedman, Modigliani, Duesenberry y otros.

El multiplicador se define como $\frac{1}{1-b} > 1$

Si se tiene el modelo simple

$Y = C + I$

$C = a + by$

se puede obtener $Y = \frac{a}{1-b} + \frac{I}{1-b}$, siendo I = Inversión.

Esto significa que si I se incrementa en ΔI el ingreso se incrementará en una cantidad mayor que ΔI en vista de que el multiplicador es mayor a la unidad.

2. Acelerador. (σ)

Este concepto data de 1917 (J. M. Clark) "Business Acceleration and the law of Demand", Journal of -- Political Economy, Vol 25, No. 1 March 1917.

En su forma simplista, el acelerador se define como una relación fija entre capital y Producto:

$\frac{K_t}{Y_t} = \sigma$ Con lo cual se puede obtener $(I \text{ neta})_t = \sigma \Delta Y_t$

que en este concepto de flujo se traduce a - que la inversión es proporcional al cambio en el producto; ejemplo, si el producto se mantuviere a un nivel muy alto pero sin incrementarse, la inversión neta sería cero.

Muchas son las críticas que se le hacen a este concepto tales como (a) su inoperatividad cuando existe un exceso de capacidad y se puede esperar que I crezca cuando el exceso de capacidad es muy pequeño.

(b) la existencia de retardos entre la orden y la entrega en la producción de bienes de capital pudiendo dar lugar a "cuellos de botella".

(c) Se puede decir que los empresarios no saben cual puede ser su producción durante un año dado. Se podría decir que obtienen sus expectaciones en base a la producción del período anterior. En este caso I neta = $\sigma \Delta Y_{t-1}$

Si se agreganlas inversiones de replazo y autónoma:

$I_t = \sigma \Delta Y_t + D_t + A_t = \sigma \Delta Y_t + \ell$, ℓ = constante.

Esta expresión es muy vulnerable pues:

(d) I es explicada pobremente y σ es no significativa.

(2) el valor de σ es mucho muy pequeño comparado con K/Y

<u>El acelerador del ajuste del stock.</u>

Se supone que:

$$I\ neta_t = \mu\ (K_t \text{ deseado} - K_{t-1} \text{ actual})$$

donde μ es la brecha, una fracción, entre el stock - actual Y el deseado al tiempo T

Si suponemos que K_t deseado $= \sigma Y_t$ entonces

$$I\ neta_t = \mu\ (\sigma Y_t - K_{t-1})$$

El acelerador en base a la capacidad.

Si la expresión anterior se divide por K_{t-1}

$$\frac{I\ neta_t}{K_{t-1}} = \cancel{\mu\left(\sigma \frac{Y_t}{K_{t-1}} - 1\right)} = \mu\left(\sigma \frac{Y_t}{K_{t-1}} - 1\right)$$

El acelerador Flexible.

Se supone que el acervo de capital es proporcional a alguna ponderación del producto previo a través de - un cierto número de períodos y que en la medida en - que nos alejemos del presente las ponderaciones son menores.

Koyck supuso en su publicación "Distributed lags and Investment Analysis". Amsterdam: North-Holland 1954 - que las ponderaciones declinan geométricamente.

Entonces si $0 < \lambda < 1$

$$K_t = \sigma (1 - \lambda)\ (Y_t + \lambda Y_{t-1} + \lambda^2 Y_{t-2} \cdots + \lambda^k Y_{t-k} \ldots)$$

para llegar a una expresión manejable se puede hacer lo siguiente:

Si la expresión anterior se escribe para el período t - 1 y se multiplica por λ :

$$\lambda k_{t-1} = \sigma(1-\lambda)(\lambda Y_{t-1} + \lambda^2 Y_{t-2} + \lambda^3 Y_{t-3} + \ldots)$$

entonces

$$k_t - \lambda k_{t-1} = \sigma(1-\lambda)\ Y_t$$

o sea $k_t = \sigma(1-\lambda)\ Y_t + \lambda\ k_{t-1}$

dado que $k_t = I \text{ neta} + k_{t-1}$, entonces

$$I \text{ neta} + k_{t-1} = \sigma(1-\lambda)\ Y_t + \lambda\ k_{t-1}$$

$$I \text{ neta} = \sigma(1-\lambda)\ Y_t - (1-\lambda)\ k_{t-1}$$

agregando la depreciación (D) a ambos miembros

$$I \text{ bruta} = \sigma(1-\lambda)\ Y_t - (1-\lambda)\ k_{t-1} + D$$

y si D es proporcional a k_{t-1} :. $D = \delta k_{t-1}$, entonces

$$I \text{ bruta} = \sigma(1-\lambda)\ Y_t - (1-\lambda-\delta)\ k_{t-1}$$

Sobre este último concepto y variando la distribución de λ se han construido diferentes modelos.

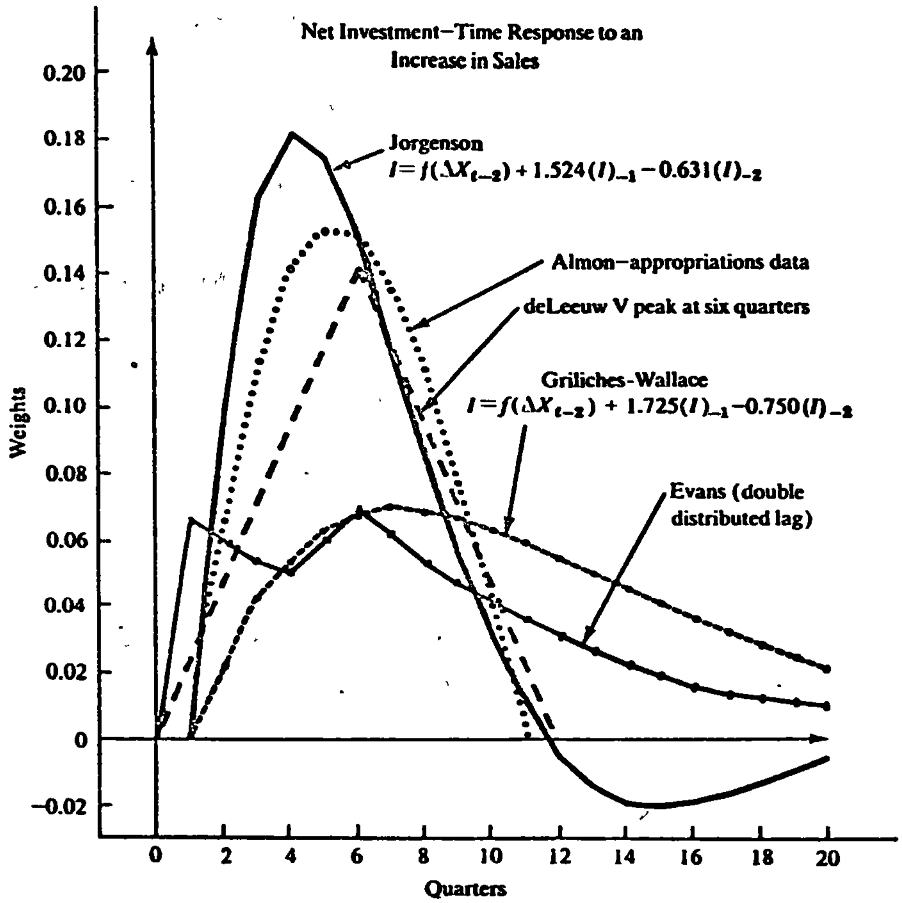


Figure 4.14

The functions seem to fall into two groups. One is formed by the Jorgenson, Almon, and deLeeuw functions, which peak fairly sharply and have zero weights in either the eleventh or twelfth quarter. The other group consists of the Evans and Griliches–Wallace functions, which stretch out over a much longer period of time. The Evans function is the only one with a double peak, a fact that is not too surprising when we consider that all the other functions except the Almon function were specifically formulated to give a single peak. It is interesting to note that in 1958 when sales dropped off sharply, cancellations were at their highest, giving additional support to the relationship be tween modifications in investment and sales with a short lag. Additional work that will relate the appropriations themselves to economic variables should be helpful in giving more information about the time path of investment with respect to sales.

There has often been some confusion about the role of financial variables in the double distributed lag function. As explained above, firms make their

I Con estos elementos, el modelo de Samuelson

es (1) $Y_t = C_t + I_t + A_t$

(2) $C_t = b\,Y_{t-1}$

(3) $I_t = \sigma(Y_{t-1} - Y_{t-2})$

Substituyendo (2) y (3) en (1), obtenemos

(4) $Y_t = b\,Y_{t-1} + \sigma\,(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + A_t$

que es una ecuación en diferencias finitas de 2º orden que enseguida discutimos.

Solución:

<u>Solucion particular</u>

$Y_t = Y_{t-1} = Y_{t-2} = Y$

$Y_t\,(1-b) = A_t \quad \therefore (5)\ Y_t = \dfrac{A_t}{1-b}$ donde $\dfrac{1}{1-b}$ es el multiplicador.

<u>Solución complementaria</u>:

haciendo $Y_t = \lambda^t$, $Y_{t-1} = \lambda^{t-1}$, $Y_{t-2} = \lambda^{t-2}$, obtenemos (de (4))

$$\lambda^t - b\,\lambda^{t-1} - \sigma(\lambda^{t-1} - \lambda^{t-2}) = 0$$

o sea $\lambda^2 - b\lambda - \sigma(\lambda - 1) = 0$

$$\lambda^2 - (b+\sigma)\lambda + \sigma = 0$$

(6) $$\lambda_{1,2} = \frac{(b+\sigma) \pm \sqrt{(b+\sigma)^2 - 4\sigma}}{2}$$

<u>Solucion completa</u>

(7) $$Y_t = \frac{A_t}{1-b} + F_1\lambda_1^t + F_2\lambda_2^t$$

de condiciones iniciales.

<u>Las propiedades de las Soluciones</u> (Para Convergencia y/o Divergencia hacemos $t \to \infty$)

Del radical se desprenden las propiedades.

i) si $(b+\sigma)^2 > 4\sigma$

o bien $b > 2\sqrt{\sigma} - \sigma$

dado que $\lambda_1 + \lambda_2 = b + \sigma$ ..... (8)

y $\lambda_1 \lambda_2 = \sigma$ ...... (9)

se desprende que λ_1 y λ_2 reales y distintos

en vista de que σ y $b > 0$

• Estabilidad: Convergencia y Divergencia

En vista de que $\lambda_1, \lambda_2 > 0$; λ_1^t y λ_2^t no tienen oscilaciones

Existe convergencia si $\lambda_1, \lambda_2 < 1$ lo que implica que en (9). $\underline{\sigma < 1}$ y en (8) que $\underline{b < 1}$

si $\lambda_1 < \lambda_2 = 1$ entonces

en (9) $\sigma = \lambda_1 < 1$

y en (8) $\lambda_1 + 1 = b + \sigma$

$\sigma + \cancel{1} = b + \sigma$ o sea $b = 1$

lo cual no puede ser porque contradice nuestro supuesto.

Existe divergencia si $\lambda_1, \lambda_2 > 1$

lo que implica que $\underline{\sigma > 1}$ pero tal que

$\underline{\sigma > 2 - b}$

ii) raices iguales

implica que el radical es cero

y $\lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{b+\sigma}{2}$ . . . . (10)

entonces $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

para que exista convergencia $\lambda_1, \lambda_2 < 1$, que implica $\underline{\sigma <}$

Para que exista divergencia $\lambda > 1$, que implica $\underline{\sigma > 1}$

λ no puede ser $\lambda = 1$ porque significa que

$$2\lambda = b+\sigma$$
$$\lambda^2 = \sigma$$

o sea $\quad 2 = b+\sigma$
$\quad 1 = \sigma \quad \therefore \; b = 1$ lo cual contradice

nuestro supuesto.

iii) Raices Complejas

Para esto se requiere que el radicando sea negativo; o sea, que $(b+\sigma)^2 < 4\sigma$. Las soluciones de λ_1 y λ_2 serán el conjugado complejo:

$\lambda_1, \lambda_2 = h \pm v i \qquad$ siendo $|v| = \dfrac{\sqrt{|(b+\sigma)^2 - 4\sigma|}}{2}$

y h la parte real

$$h = \frac{b+\sigma}{2}$$

La solucion complementaria se puede escribir como

$$Y_{tc} = F_1(h+vi)^t + F_2\,(h-vi)^t$$

aplicando el Teorema de Moivre :

$$(h \pm vi)^t = R^t (\cos\theta t \pm i \operatorname{sen} \theta t)$$

donde $R = \sqrt{h^2 + v^2}$ que en nuestro caso es

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{(b+\sigma)^2 + 4\sigma - (b+\sigma)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma}$$

$$\cos\theta = \frac{h}{R}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{h}{R}$$

· Convergencia : dado que la solución es en R^t para que exista convergencia , $R < 1$

lo que implica que $0 < \sqrt{\sigma} < 2$ con lo que se tienen oscilaciones amortiguadas

Divergencia : si $R > 1$ en oscilaciones explosivas

si $R = 1$ se tienen oscilaciones regulares.

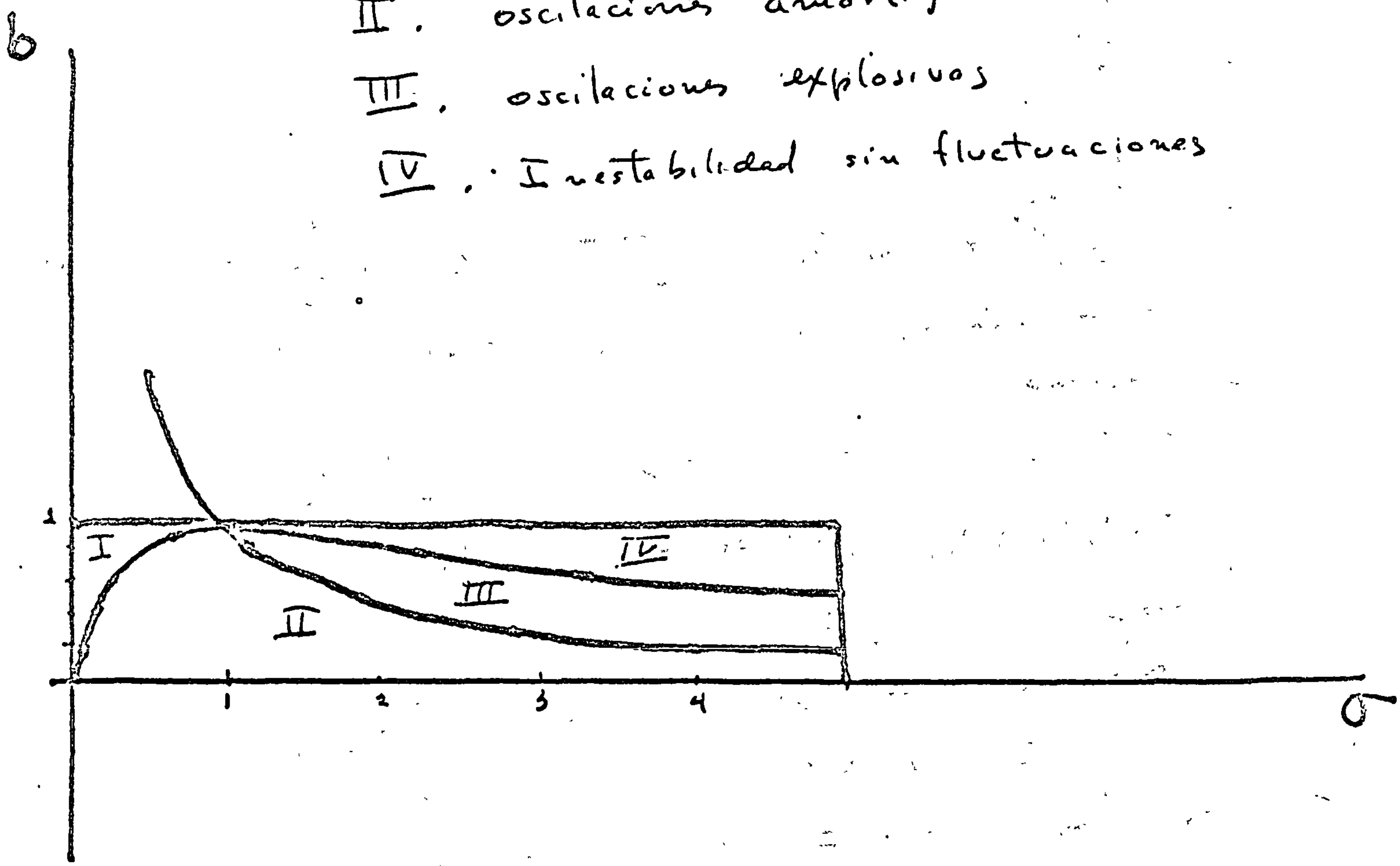
Todos estos resultados se pueden llevar a una Gráfica con la propensión marginal a consumir en un eje, y en el otro el acelerador, las regiones son:

I. Estable, sin fluctuaciones

II. oscilaciones amortiguadas

III. oscilaciones explosivos

IV. Inestabilidad sin fluctuaciones



III. Identificación de las ecuaciones

En la segunda ecuación, el número de variables exógenas excluidas K^{**} es 2 y el número de endógenas incluidas es $G^{\Delta} = 1$, entonces

$(K^{**} = 2) > (G^{\Delta} - 1 = 0)$

lo que implica que la función de consumo ~~está~~ es sobre identificada.

Para la tercera ecuación

$K^{**} = 1 \qquad G^{\Delta} = 1$

$\therefore \quad (K^{**} = 1) > (G^{\Delta} - 1 = 0)$ con lo cual

la tercera ecuación es sobre identificada.

En ambas ecuaciones se emplea el método de dos etapas.

Secretaría de Hacienda y C.P.
Dirección de Programación y
Descentralización Administrativa.
Departamento de Sistemas.

Cuadro N° 1

(Millones de pesos a precios de 1960)

AÑO	INGRESO NACIONAL	CONSUMO PRIVADO	INVERSION BRUTA TOTAL	$= A_t$	IMPUESTO SOBRE LA RENTA	$\hat{Y}_t$	$\hat{Y}_{t-1} - \hat{Y}_{t-2}$
1950	76 792	75 340	12 499	- 11 047	1 606.3		
1951	82 673	80 367	13 619	- 11 313	2 090.2		
1952	85 985	78 253	16 437	- 8 705	2 339.3	87 146	
1953	86 090	83 473	15 403	- 12 736	1 865.5	91 687	4 541
1954	95 173	86 536	18 699	- 10 112	1 863.7	91 356	-331
1955	103 576	89 807	20 991	- 7 222	2 611.7	100 156	8 800
1956	110 385	94 146	24 663	- 8 424	3 065.7	109 485	9 329
1957	118 752	106 099	24 283	- 11 630	3 110.7	117 564	8 079
1958	125 205	109 346	23 510	- 7 651	2 980.2	125 657	8 093
1959	128 877	112 960	23 302	- 7 385	3 206.9	132 622	6 965
1960	139 034	116 197	30 209	- 7 322	3 628.1	136 672	4 050
1961	143 916	125 420	27 863	- 9 367	3 963.9	147 836	11 074
1962	151 107	131 189	27 395	- 7 477	4 448.1	152 847	5 011
1963	160 628	138 305	34 896	- 12 573	5 044.4	161 584	8 737
1964	176 849	155 222	39 756	- 18 129	6 320.1	172 928	11 344
1965	186 418	159 492	41 931	- 15 005	7 325.8	189 453	16 525
1966	200 489	166 135	47 081	- 12 727	7 023.4	199 531	10 078
1967	213 380	176 618	48 997	- 12 235	7 957.5	214 392	14 861
1968	228 399	188 749	52 081	- 12 431	9 122.7	228 357	13 965
1969	245 055	202 938	53 114	- 10 997	10 216.6	244 131	15 774
1970		225 685	57 436		10 932.9		

Fuentes "La Economía en Cifras." Nacional Financiera 1970.

INTERACCIONES ENTRE EL ANALISIS MULTIPLICADOR Y EL PRINCIPIO DE ACELERACION

ALTERNATIVA I

El modelo que se usa es el siguiente*:

(1) $Y_t = C_t + I_t + A_t$

(2) $C_t = a + b\, Y_{t-1}$

(3) $I_t = d + \gamma(Y_{t-1} - Y_{t-2})$

en donde

Y - es el Ingreso Nacional

C - es el Consumo Privado

I - es la Inversión Bruta Total

t - es el tiempo en años

t-i - es un retraso de i años.

A_t - está definida a partir de la relación (1)

b - propensión marginal al consumo $0 < b < 1$

γ - acelerador $\gamma > 0$

La relación (1) es obtenida por definición; y las re- relaciones (2) y (3) se obtienen por el método bietápico.- Para elllo se sigue el método propuesto por Bassman y Theil que consite en estimar Y_t en función de Y_{t-1}, Y_{t-2} y A_t

$$\hat{Y} = -3471.3779 + 1.0365\ Y_{t-1} + 0.0398\ Y_{t-2} - 0.2140\ A_t$$

* Ver P.A. Samuelson: "Interactions between the Multiplier Analisis and the Principle of acceleration". The Review of Economic Statistics, vol. 21 (May 1939), pp.75-78.

Con los valores de $\hat{Y}_t$ del periodo anterior se estima C y I_t

$$C_t = 4332.6332 + 0.8906\ \hat{Y}_{t-1}$$

$$I_t = 14748.4829 + 2.2020\ (\hat{Y}_{t-1} - \hat{Y}_{t-2})$$

en donde " $\wedge$ " indica, la estimada de la variable.

Los datos que se usaron para estimar estas ecuaciones se presentan en el Cuadro No. 1.

Sustituyendo las ecuaciones (2) y (3) en la ecuación (1) se tiene.

$$Y_t = a + bY_{t-1} + d + \quad Y_{t-1} - \quad Y_{t-2} + A_t$$

$$= (a + d + A_t) + (b + \delta)\ Y_{t-1} - \delta Y_{t-2}$$

$$= K + \delta Y_{t-1} - \delta Y_{t-2}$$

que es una ecuación en diferencias finitas de segundo orden y cuya solución es de la forma Y_t = Y general + Y particular;

Para la solución general se hace $Y_t = \lambda^t$ resolviendo, se obtiene

$\lambda_{1,2} = 1/2(\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4\delta}\ )$ que son las soluciones generales de la ecuación.

$$\lambda^2 - \delta\lambda + \delta = 0$$

Para la solución particular hacemos:

$$Y_t = Y_{t-1} = Y_{t-2} = Y$$

o

$$Y = K + \delta Y - \sigma Y$$

por lo que

$$Y_t = \frac{K}{1 - \delta + \sigma}$$

es una solución particular. Luego la solución general será

$$Y_t = M \lambda^t_{1,2} + \frac{K}{1 - \delta + \sigma}$$

con la condición

$t = 0$, $Y_t = Y_0$, se tiene $M = Y_0$

y

$$Y_t = Y_0 \lambda^t_{1,2} + \frac{K}{1 - \delta + \sigma}$$

Substituyendo las estimadas de los parámetros se tiene.

$$Y_t = 1911.0761 + A_t + 3.0926\ Y_{t-1} - 22020\ Y_{t-2}$$

La ecuación de segundo grado en λ, será

$$\lambda^2 - 3.0926\ \lambda + 2.2020 = 0$$

cuyas soluciones son:

$$\lambda_1 = 1.9810$$

$$\lambda_2 = 1.1115$$

En el caso de que $K \neq 0$ se tiene $\frac{K}{1 - \delta + \sigma} = 174689 + 9.1407\ A_t$

la solución general estará dada por

$$Y_t = 76792\ \lambda^t_{1,2} + (\ 174689 + 9.1407\ \ A_t)$$

y substituyendo en (2) y (3), se tendrá

$$C_t = 159940.6566 + 8.140\ A_{t-1} + 68390.9552\ \lambda_{1,2}^{t-1}$$

$$I_t = 14748.4429 + 20.1262\ (A_{t-1} - A_{t-2})$$

$$+ 169095.9840\ (\lambda_{1,2}^{t-1} - \lambda_{1,2}^{t-2})$$

ALTERNATIVA II.

Las ecuaciones del modelo son

(1) $Y_t = C_t + I_t + A_t$

(2) $C_t = \alpha Y_{t-1}$

(3) $I_t = \beta (Y_{t-1} - Y_{t-2})$

en donde

Y - es el Ingreso Nacional

C - es el Consumo Privado.

I - es la Inversión Bruta Total

t - es el tiempo en años.

t-i - es un retraso de i años.

Al igual que en la alternativa anterior la relación (1) se obtiene por definición y las relaciones (2) y (3) se obtienen por el método bietápico.

Para las ecuaciones (2) y (3) las estimadas de los parámetros son: $\alpha = 0.9082$ y $\beta = 3.5071$

por lo que

$$C_t = 0.9082\ \hat{Y}_{t-1}$$

$$I_t = 3.5071\ (\hat{Y}_{t-1} - Y_{t-2})$$

y los coeficientes de correlación son 0.9993 y 0.9623 para C_t y $\hat{Y}_{t-1}$ e I_t y $\hat{Y}_{t-1} - \hat{Y}_{t-2}$ respectivamente. la ecuación estimada para Y_t, es la misma que en el caso anterior, a saber

$$Y_t = -3471.3779 + 1.0365\ Y_{t-1} + 0.0398\ Y_{t-2} - 0.2140\ A_t$$

Sustituyendo las relaciones estimadas para C_t, e I_t en (1), se tiene

$$Y_t = 0.9082\ Y_{t-1} + 3.5071\ Y_{t-1} - 3.5071\ Y_{t-2} + A_t$$

cuyas soluciones para

$A_t = 0$ y $\lambda^t = Y_t$

son

$$\lambda_1 = 1.0356$$

$$\lambda_2 = 3.3796$$

que son las raíces de la ecuación

$$\lambda^2 - 4.4153 \quad + 3.5071 = 0$$

por lo que

$$Y = Y_o \lambda^t_{1,2}$$

en donde $Y = Y_0$ para $t = 0$,

para $A_t = 0$, $Y_t = Y_{t-1} = Y_{t-2} = Y$

o

$$Y_t = 10.8932\ A_t.$$

y la solución general está dada por

$$Y_t = 76792\ \lambda^t_{1,2} + 10.8932\ A_t$$

substituyendo en (2) y (3) se obtiene

$$C_t = 69742.4944\ \lambda^{t-1}_{1,2} + 9.8932\ A_{t-1}$$

$$I_t = 269317.2232\ (\lambda^{t-1}_{1,2} - \lambda^{t-2}_{1,2}) -$$

$$-38.2035\ (A_{t-1} - A_{t-2}).$$

El análisis que se sigue, de acuerdo con los valores obtenidos para el multiplicador (0.9082) y para el acelerador (3.5071), es que a un nivel constante de gasto gubernamental resultará en un ingreso nacional, siempre incrementado, eventualmente con una tasa de crecimiento de interés compuesto.

Un simple impulso de inversión neta, además hará tender al sistema hacia infinito a una tasa de crecimiento de interés compuesto.

Por otra parte, una simple unidad infinitesimal de desinversión conducirá siempre al sistema hacia abajo a una tasa incrementada. Esta es una situación altamente inestable, pero corresponde más cercanamente al caso puro de inyectar dinero en la economía (Pump-Priming) donde el incremento total en el ingreso nacional no sostiene una -relación finita a los estimulos originales.

A LINEAL PROGRAMMING MODEL APPLIED TO THE AGRICULTURAL SECTOR OF THE MEXICAN ECONOMY.

Autor: DR. PEDRO REYES ORTEGA

Este modelo sirvió de base para el trabajo presentado por la Sra. Lic. Ifigenia Martínez de Navarrete, en el libro intitulado "Bienestár Campesino y Desarrollo Económico", Fondo de Cultura Económica 1971. El modelo es muy simple y fue examinado en la Universidad del Sur de California por un grupo de Economistas el que hizo la presentación fue un servidor, quien es el que estructuró y estimó el modelo. Como nota aclaratoria. debemos decir que el modelo en su forma matemática no aparece en la publicación mencionada.

En síntesis, se trata de contestar a la siguiente pregunta: ¿Cuánto se requerirá del Sector Agrícola en cuanto a capital para los años 1970 y 1980, suponiendo condiciones de empleo pleno y niveles de productos agrícolas pre-fijados?

El tratamiento que se le da a este problema es a un nivel bastante agregado y las hipótesis son bastante fuertes. La técnica que se propone usar es de Programación Lineal con divisibilidad perfecta de los sectores productivos y sustitución perfecta entre ellos.

Aún cuando había diseñado modelos más ricos con hipótesis no tan fuertes, la poca confiabilidad y disponibilidad de los datos me obligaron a usar un modelo poco detallado.

Para empezar, el Sector Agrícola se dividió en 3 subsectores de acuerdo con ciertos rangos de productividad; así, la región 1 es la más altamente productiva, la región 2 es de productividad media y la región 3 es de productividad muy baja.

La parte medular de el modelo consiste en encontrar una solución, con costos mínimos de capital, que conlleve a empleo pleno como ya se dijo, que incremente el ingreso rural de los campesinos a través de incrementar sus productividades.

Hipótesis de Trabajo:

1) La tasa de crecimiento de la oferta de trabajo en cada región y la tasa migratoria se suponen constantes. Aunque esta hipótesis es demasiado fuerte, a nivel agregado, Benítez y Cabrera en su publicación "Proyecciones Demográficas

en México 1965-1980, Banco de México, S.A.", el efecto neto sobre la tasa de crecimiento de la población rural en cada región es casi nula.

2) Se supone que toda la fuerza de trabajo agrícola se empleará.

3) Que la oferta de los productos agrícolas iguala a las demandas interna y externa. En caso de que exista un exceso de oferta se supone que el Gobierno la absorberá.

4) Para cada región existirá una función de producción lineal y homogénea con respecto al producto, el trabajo, y el capital.

5) Los coeficientes marginales de producción del trabajo y el capital evolucionarán de la siguiente manera:

a) Para la primera región los coeficientes en los años de 1970 y 1980 se obtendrán mediante extrapolación directa de sus valores en 1950 y 1960.

b) Para la segunda región, supondremos que para 1980 los coeficientes serán iguales a los de

1970 de la primera región.

c) Para la tercera región, supondremos que los coeficientes del año 2000 serán iguales a los del año 1970 de la primera región.

Esta hipótesis de trabajo con sus tres sub-hipótesis reflejan la aplicación de la teoría de la transcisión demográfica al Sector Agrícola.

6) El valor del producto en cada región se supone mayor o por lo menos igual a las proyecciones históricas para los años de 1970 y 1980.

C. The Mathematical Presentation.

Let us define the following:

$i=1,2,3$ number of regions

$j=1,2$ number of factors of production

V_i = product of the i-th region

$X_{i1} = L_i$ = labor used in the i-th region.

$X_{i2} = K_i$ = capital used in the i-th region

a_{i2} are the marginal coefficients of production

L = total supply of labor

b_i , c_i are predetermined constants

The model in its static form is as follows:

$$\text{MIN } K = K_1 + K_2 + K_3$$

subject to

$$a_{11}L_1 + a_{12}K_1 \geq V_1$$

$$a_{21}L_2 + a_{22}K_2 \geq V_2$$

$$a_{31}L_3 + a_{32}K_3 \geq V_3$$

$$L_1 \geq b_1$$

$$L_2 \geq b_2$$

$$L_3 \geq b_3$$

$$L = L_1 + L_2 + L_3$$

$$K_1 \geq c_1$$

$$K_2 \geq c_2$$

$$K_3 \geq c_3$$

Introducing the variable (t)-time:

$$MIN\ K_t = K_{1t} + K_{2t} + K_{3t}$$

subject to

$$a_{11t}\,L_{1t} + a_{12t}\,K_{1t} \geq V_{1t}$$

$$a_{21t}\,L_{2t} + a_{22t}\,K_{2t} \geq V_{2t}$$

$$a_{31t}\,L_{3t} + a_{32t}\,K_{3t} \geq V_{3t}$$

$$L_{1t} \geq L_{1t-1}$$

$$L_{2t} \geq L_{2t-1}$$

$$L_{3t} \geq L_{3t-1}$$

$$L_t = L_{1t} + L_{2t} + L_{3t}$$

$$K_{1t} \geq K_{1t-1}$$

$$K_{2t} \geq K_{2t-1}$$

$$K_{3t} \geq K_{3t-1}$$

Where $a_{ijt} = a_{ij1960}\, e^{d_{ij}t} \quad \forall\, i, j$

d_{ij} are determined on basis of assumptions number five.

I want to emphasize that once one estimates the future values of the parameters, the problem is not longer dynamic, it is static.

IV. Estimation of the Parameters.

Production Functions (L is in 10^3 persons. P and K in 10^6 pesos of 1960).

Regions	1950	1960
first	$6.9653L_1 + 0.0470K_1 = V_1$	$6.7296L_1 + 0.1163K_1 = V_1$
second	$3.5218L_2 + 0.0922K_2 = V_2$	$4.3497L_2 + 0.0889K_2 = V_2$
third	$2.4028L_3 + 0.0429K_3 = V_3$	$2.3637L_3 + 0.0899K_3 = V_3$

The marginal coefficients were estimated by using the L.S. method with zero constant term,- due to the assumption of homogeneity

A summary of the statistical formulas is :

$$x_1 = b_{12}\, x_2 + b_{13}\, x_3 + u$$

where u is $N(0,\sigma)$

$$b_{12} = \frac{\Sigma x_1 x_2 \Sigma x_3^2 - \Sigma x_1 x_3 \Sigma x_2 x_3}{\Sigma x_2^2 \Sigma x_3^2 - (\Sigma x_2 x_3)^2}$$

$$b_{13} = \frac{\Sigma x_1 x_3 \Sigma x_2^2 - \Sigma x_1 x_2 \Sigma x_2 x_3}{\Sigma x_2^2 \Sigma x_3^2 - (\Sigma x_2 x_3)^2}$$

$$R^2 = \frac{b_{12} \Sigma x_1 x_2 + b_{13} \Sigma x_1 x_3}{\Sigma x_1^2}$$

$$r_{23}^2 = \frac{(\Sigma x_2 x_3)^2}{\Sigma x_2^2 \Sigma x_3^2}$$ (similarly for r_{12}^2 and r_{13}^2)

$$s_{b_{12}}^2 = \frac{1 - R^2}{(1-r_{23}^2)(n-2)} \cdot \frac{\Sigma x_1^2}{\Sigma x_2^2}$$

$$s_{b_{13}}^2 = \frac{\Sigma x_2^2}{\Sigma x_3^2} \cdot s_{b_{12}}^2 .$$

$$\sigma^2 = \frac{(1 - R^2)\Sigma x_1^2}{n - 2}$$

First Alternative .

It consists in perfect mobility of the labor force.

1970 :

$MIN\ K = K_1 + K_2 + K_3$

subject to

$6.4939L_1 + 0.1856K_1 \geq 8814$

$5.1776L_2 + 0.0856K_2 \geq 11149$

$2.3246L_3 + 0.1369K_3 \geq 13741$

$L_1 \geq 537$

$L_2 \geq 1179$

$L_3 \geq 3196$

$L = L_1 + L_2 + L_3 = 5196$

$K_1 \geq 17641$

$K_2 \geq 13859$

$K_3 \geq 20623$

1980 :

$MIN\ K = K_1 + K_2 + K_3$

subject to

$6.2852L_1 + 0.2549K_1 \geq 13118$

$6.4939L_2 + 0.1856K_2 \geq 24590$

$3.7144L_3 + 0.1531K_3 \geq 28705$

$L_1 \geq 853$

$L_2 \geq 1924$

$L_3 \geq 3448$

$L = L_1 + L_2 + L_3 = 7967$

$K_1 \geq 17641$

$K_2 \geq 13859$

$K_3 \geq 41829$

N o t e : The right sides of the last six inequalities are the obtained values in the solution of the first problem.

Second Alternative

Assuming that the mobility (of the labor force) between the different regions is zero, the first six inequalities are transformed in equalities. The values L_i are estimated from direct projection in each region. Due to these conditions, each region behaves independently from each other. The problems are solved by using simple algebra in which the unkowns are the K's.

For symbolic reasons, let us write the problems as if they were of linear programming:

1970.

$$\text{MIN } K = K_1 + K_2 + K_3$$

subject to

$$6.4939L_1 + 0.1856K_1 = 8814$$
$$5.1776L_2 + 0.0856K_2 = 11149$$
$$2.3246L_3 + 0.1369K_3 = 13741$$
$$L_1 = 661$$
$$L_2 = 1467$$
$$L_3 = 4097$$

1980.

$$\text{MIN } K = K_1 + K_2 + K_3$$

subject to

$$6.2852L_1 + 0.2549K_1 = 13118$$
$$6.4939L_2 + 0.1856K_2 = 24590$$
$$3.7144L_3 + 0.1531K_3 = 28705$$
$$L_1 = 818$$
$$L_2 = 1844$$
$$L_3 = 5305$$

VI. Results

The results are shown in the following tables.

1970 .

(L is in 10^3 persons. K and V in $\$10^6$ of 1960)

Regions	First alternative variables L	K	V	Second alternative variables L	K	V
first	853	17641	8873	661	24362	8814
second	1924	13859	11255	1467	41512	11149
third	3448	41829	13746	4097	29818	13741
total	6225	73329	33874	6225	75693	33704

1980 .

Regions	First alternative variables L	K	V	Second alternative variables L	K	V
first	1128	23638	13117	818	31293	13118
second	3391	13859	24599	1844	67970	24590
third	3448	103839	28693	5305	58785	28705
total	7967	141336	66409	7967	158048	66413

Summary of Statistical Results.

PRODUCTION FUNCTIONS.

(The values of L_i are in 10^3 persons. K and V in 10^6 mexican pesos of 1960).

1950

Regions	PARAMETERS (labor) a	(capital) b	Standard deviation of the parameters S_a	S_b	Correlation Coefficients R^2	$r^2_{V,L}$	$r^2_{V,K}$	$r^2_{K,L}$
1st	6.9[illegible]53	0.0470	0.3434	0.0463	0.9903	0.98[illegible]	0.70[illegible]	[illegible]
2nd	[illegible].[illegible]218	0.0922	0.663	0.0150	0.9797	0.959[illegible]	0.8450	[illegible]
3rd	2.4[illegible]28	0.0[illegible]29	0.4899	0.07[illegible]	0.9555	0.[illegible]	0.8[illegible]	0.[illegible]

1960

Regions	PARAMETERS (labor) a	(capital) b	Standard Deviation of the Parameters S_a	S_b	Correlation Coefficients R^2	$r^2_{V,L}$	$r^2_{V,K}$	$r^2_{K,L}$
1st	6.7296	0.1163	1.1900	0.0619	0.9749	0.9532	0.9[illegible]	[illegible]
2nd	4.3497	0.0889	0.7611	0.0446	0.98[illegible]	0.97[illegible]	[illegible]	[illegible]
3rd	2.3637	0.0899	0.[illegible]243	0.0632	0.9[illegible]55	0.[illegible]	0.8763	0.85[illegible]

1950

```
/INPUT
/INCLUDE LPRAX
Ø,1Ø,6
Ø,1,9
1,1,1,Ø,Ø,Ø
6.2852,Ø,Ø,Ø.2549,Ø,Ø
Ø,6.4939,Ø,Ø,Ø.1856,Ø
Ø,Ø,3.7144,Ø,Ø,Ø.1531
1,Ø,Ø,Ø,Ø,Ø
Ø,1,Ø,Ø,Ø,Ø
Ø,Ø,1,Ø,Ø,Ø
Ø,Ø,Ø,1,Ø,Ø
Ø,Ø,Ø,Ø,1,Ø
Ø,Ø,Ø,Ø,Ø,1
7967,13118,24593,237Ø5,853,1924,3448,17641,13859,41829
Ø,Ø,Ø,-1,-1,-1/
/END RUN
M.ØØ73 ACTION IN PROGRESS.
       YOUR VARIABLES   1 THROUGH   6
    SURPLUS VARIABLES   7 THROUGH  15
ARTIFICIAL VARIABLES  16 THROUGH  25
      ANSWERS
      VARIABLE       VALUE
           3          Ø.3448ØØØE Ø4
          1Ø          Ø.2754685E Ø3
          11          Ø.1466531E Ø4
          15          Ø.62ØØ998E Ø5
           1          Ø.1128469E Ø4
           2          Ø.3391531E Ø4
          13          Ø.59971Ø2E Ø4
           4          Ø.236381ØE Ø5
           5          Ø.13859ØØE Ø5
           6          Ø.1Ø38389E Ø6
        OBJECTIVE FUNCTION VALUE  -Ø.1413359E Ø6
/END READ
M.ØØ74 ACTION COMPLETE.
M.ØØ72 BEGIN ACTIVITY.
/OFF
M.ØØ75 GOOD-BYE
```

1970

```
/OFF
M.ØØ72 BEGIN ACTIVITY.
/INPUT
/INCLUDE LPRAX
Ø,1Ø,6
Ø,1,9
1,1,1,Ø,Ø,Ø
6.4939,Ø,Ø,Ø.1856,Ø,Ø
Ø,5.1776,Ø,Ø,Ø.Ø856,Ø
Ø,Ø,2.3246,Ø,Ø,Ø.1369
1,Ø,Ø,Ø,Ø,Ø
Ø,1,Ø,Ø,Ø,Ø
Ø,Ø,1,Ø,Ø,Ø
Ø,Ø,Ø,1,Ø,Ø
Ø,Ø,Ø,Ø,1,Ø
Ø,Ø,Ø,Ø,Ø,1
6225,8814,11149,13741,537,1179,3196,17641,13859,2Ø623
Ø,Ø,Ø,-1,-1,-1
/END RUN
M.ØØ73 ACTION IN PROGRESS.
         YOUR VARIABLES  1 THROUGH  6
      SURPLUS VARIABLES  7 THROUGH 15
   ARTIFICIAL VARIABLES 16 THROUGH 25
        ANSWERS
        VARIABLE         VALUE
            3            Ø.344773ØE Ø4
           1Ø            Ø.316Ø82ØE Ø3
           11            Ø.7451875E Ø3
           15            Ø.212Ø616E Ø5
            1            Ø.853Ø82ØE Ø3
            2            Ø.1924188E Ø4
            4            Ø.17641ØØE Ø5
           12            Ø.25173Ø5E Ø3
            5            Ø.138590ØE Ø5
            6            Ø.4182916E Ø5
        OBJECTIVE FUNCTION VALUE  -Ø.7332913E Ø5
/END READ
M.ØØ73 ACTION COMPLETE.
M.ØØ72 BEGIN ACTIVITY.
```

CONCLUSIONES:

Comparando los valores de las variables de ambas alternativas, las recomendaciones generales son las siguientes:

1) El Gobierno Mexicano necesita movilizar a cierto número de campesinos de la región más poble y las regiones de productividad media y comercial.

2) Al mismo tiempo y una vez que se fijen los niveles de producto en cada región, el Gobierno deberá invertir en obras de infra-estructura agrícola dándole prioridad a la región más poble. Debemos mencionar que los gastos de capital de la primera alternativa son menores que en la segunda, lo que refleja la bondad del empleo de la Programación Lineal.

47

Bibliography.

Fisher, W.

1. "Econometric Models and Methods." Journal Of Farm Economics Vol. 29. No. 34, Nov. 1967

2. "Simplification of Economic Models." Econometrica. Vol. 34 July 1966.

Marishal Harris

"Shifts in Entrepreneurial Functions in Agriculture." American Journal of Agricultural Economics. Vol. 51. Aug 1969.

Goldberger, A.

" Econometric Theory." (John Wiley & Sons, Inc. 1964)

Hadley, G.

"Linear Programming." (Addison-Wesley Co. 1964)

"Non-Linear and Dynamic Programming." (Addison-Wesley Co. 1964)

Koopmans, T.

" Activity Analysis of Production and Allocation." (John Wiley & Sons, Inc. 1951)

Mennes, Tinbergen, and Waardenburg.

" The Element of Space in Development Planning." (North-Holland Co. 1969)

Morgan, R.
" A Hand Book in Statistics." The Hague. Dec. 1965

Crecimiento Demografico y Desarrollo Agricola."
Boletin Mensual de Economia y Estadistica Agricolas.
Vol. 18 Abril 1969

Problemas Relativos a la Ocupacion que Afectan el Desarrollo
gricola Lationo- Americano."
oletin Mensual de Economia y Estadistica Agricolas.
ol. 18 Agosto 1969

Numeros Indice de la Produccion Agricola y Elementos
itivos Explicativos que la Componen."
letin Mensual de Economia y Estadistica Agricolas(F.A.O.)
l. 17 Oct. 1969

LISTA DE SÍMBOLOS UTILIZADOS

Símbolos	*Concepto*
P	Producto bruto interno a precios de 1950
K	Capital fijo reproducible valuado a precios de 1950
L	Población económicamente activa
C_g	Gastos corrientes del gobierno a precios de 1950
C_p	Consumo privado a precios de 1950
E	Exportaciones totales de bienes y servicios a precios de 1950
E_1	Exportaciones de mercancías
E_2	Ingresos por turismo y transacciones fronterizas
M	Importaciones totales de bienes y servicios a precios de 1950
S_1	Importaciones de bienes de consumo
S_2	Importaciones de bienes intermedios
S_3	Importaciones de materiales de construcción
S_4	Importaciones de bienes de capital para la industria
S_5	Importaciones de bienes de capital para la agricultura y el transporte
S_6	Egresos en perímetros libres
S_7	Egresos por turismo
S_8	Importaciones de combustible y lubricantes
I	Inversión bruta fija a precios de 1950
P_K	Participación del factor capital en el producto
P_L	Participación del factor mano de obra en el producto
Y	Producto bruto interno a precios corrientes
N_m	Índice de precios de las importaciones
N_p	Nivel general de precios
t	Tiempo
d	Coeficiente de depreciación del capital fijo reproducible
P_t^*	Valor calculado del producto bruto interno a precios de 1950
p	Producto por hombre ocupado
k	Capital por hombre ocupado
r	Coeficiente de cambio tecnológico
U_{jt}	Términos aleatorios

2.0 *Las relaciones del modelo*

El modelo consta de 19 relaciones de comportamiento, tecnológicas y de definición, que constituyen un sistema completo en cuanto que contiene el número necesario de ecuaciones para determinar los valores de las incógnitas o variables endógenas (producto, consumo privado, gasto corriente del gobierno, importaciones y formación de capital), en función de las variables predeterminadas o exógenas (crecimiento de la mano de obra y exportaciones).

Sin embargo, no debe interpretarse como un sistema exacto de ecuaciones, sino como uno de carácter probabilístico. En efecto, como ocurre en todos los modelos basados en observaciones empíricas, es necesario considerar las alteraciones atribuibles a los componentes o términos aleatorios (U_{jt}) y tomar en cuenta que la estimación de los parámetros está sujeta a errores de muestra. En ese sentido, las proyecciones deben tomarse más que como valores únicos, como valores probables sujetos a determinado rango de variabilidad.

En vista de las consideraciones expuestas, conviene incluir una breve descripción de cada una de las ecuaciones incorporadas en el modelo y hacer explícitas las consideraciones que determinaron su selección, así como algunos de los problemas de estimación que se encontraron en el desarrollo del trabajo.

2.1 *Definición del producto*

A partir de la igualdad contable entre valor agregado e ingreso se ha definido el producto interno bruto en función de la utilización anual del gasto en consumo privado, consumo del gobierno, inversión bruta fija y exportaciones. Al total anterior se deducen las importaciones por estar incorporadas en la producción o en los renglones antes anotados.

De esa manera y evaluando cada uno de los componentes a precios de 1950, se obtiene la conocida expresión contable:

$$P_t = C_{pt} + C_{gt} + I_t + E_t - M_t$$

2.2 *La demanda de bienes de consumo*

En los países en proceso de desarrollo, los cambios en el gasto miliar en bienes y servicios de consumo dependen primordial-

CUADRO 2

SUMARIO DE LAS ECUACIONES DEL MODELO

Núm.	*Descripción*	*Ecuación*	*R*
1	Definición del producto	$P_t = C_{gt} + C_{Pt} + I_t + E_t - M_t$	
2	Demanda de consumo	$C_{Pt} = 1903.7 + 0.7434\, P_t^* + U_{1t}$	0.9902
3	Gasto corriente del gobierno	$\log C_{gt} = 3.65321 + 0.028141\, t + U_{2t}$	0.989
4	Demanda de exportaciones de mercaderías	$E_{1t} = 9327.1\, (1.045)^t$	
5	Demanda por servs. de turismo transacciones fronterizas	$E_{2t} = 4603.6\, (1.07)^t$ o bien $E_{2t} = 4603.6\, (1.061)^t$	
6	Definición de import. Totales	$M_t = \sum_{i=1}^{8} S_{it}$	
7	Import. de bienes de consumo	$\log S_{1t} = 2.724166 + 0.000002505\, P_t^* + U_{3t}$	0.660
8	Import. de bienes intermedios	$\log S_{2t} = -2.1657187 + 1.162194 \log P_t^* + U_{4t}$	0.966
9	Import. de mat. para la construcción	$\log S_{3t} = 2.45809 - 0.02658\, t + U_{5t}$	0.760
10	Import. de bienes de capital para la industria	$\log S_{4t} = -1.221638 + 1.08587 \log I_t + U_{6t}$	0.938
11	Import. de bienes de capital para la agr. y transportes	$S_{5t} = -4879.8 + 1357.65 \log I_t + U_{7t}$	0.920
12	Egresos en perímetros libres	$\log S_{6t} = 2.914018 + 0.012989\, f + U_{8t}$	0.857
13	Egresos por turismo	$\text{Log}\, S_{7t} = -3.223399 + 1.332391 \log P_t^* + U_{9t}$	0.978
14	Import. de comb. y lubricantes	$S_{8t} = 188.1$	
15	Definición de capital	$K_t = I_t + (1 - d)\, K_{t-1};\ d = 0.025$	
16	Función de producción	$P_t = 50.3329\, (1.0166)^t\, K^{0.5166}\, L^{0.4834}$	
17	Oferta de trabajo	$L_t = 13\,648\, (1.034)^t$	
18	Índice de precios de las importaciones	$m_t = 160.1 + 3.3154\, t + U_{10t}$	
19	Índice general de precios	$N_{Pt} = -7093.846 + 0.36\,2596\, N_{Pt-1} + 44.9618\, N_{mt-1} - 143.9732\, t + U_{11t}$	0.9986

NOTA: los coeficientes de correlación así como las desviaciones estándar de los parámetros aceptarán en todos los casos un nivel de confianza del 90%, con las pruebas F (Fischer) y T (Srudent).

to anual, eliminando por razones de comparabilidad censal el estrato de 10 a 12 años (véase el cuadro 10). La ecuación resultante es como sigue:

$$L_t = (13.648)\ (1.034)^t$$

2.8 *La función de producción*

Una función de producción expresa la relación entre las cantidades producidas y los insumos empleados, así como las que

CUADRO 10

POBLACIÓN ECONÓMICAMENTE ACTIVA Y FUERZA DE TRABAJO*

Años	*Pobl. económicamente activa*	*Fuerza de trabajo*
1939	5 616 717	5 671 361
1940	5 858 115	5 917 353
1941	6 099 513	6 163 345
1942	6 340 911	6 409 337
1943	6 582 309	6 655 329
1944	6 823 707	6 901 321
1945	7 065 105	7 147 313
1946	7 306 503	7 393 305
1947	7 547 901	7 639 297
1948	7 789 299	7 885 289
1949	8 030 697	8 131 281
1950	8 272 093	8 377 270
1951	8 567 240	8 680 108
1952	8 862 387	8 982 946
1953	9 157 534	9 285 784
1954	9 452 681	9 588 622
1955	9 747 828	9 891 460
1956	10 042 975	10 194 298
1957	10 338 122	10 497 136
1958	10 633 269	10 799 974
1959	10 928 416	11 102 812
1960	11 223 561	11 405 649
1961	11 408 000	11 590 523
1962	11 785 000	11 973 560
1963	12 174 000	12 368 784
1964	12 576 000	12 777 216
1965	12 988 000	13 195 806
1966	13 429 000	13 647 884

* Excluye el estrato de 10 a 12 años

FUENTE: S.I.C., Dirección General de Estadística, *Censos de Población*, 1940, 1950 y 1960 y *Anuarios Estadísticos.*

manera, se elaboraron las series del periodo 1950-1966, comprendidas en tres categorías principales: ingresos del capital, remuneraciones al trabajo, e ingresos mixtos. Posteriormente se reagruparon estos últimos a partir de estimaciones derivadas del análisis de los datos censales de 1950 y 1960 (véase el cuadro 11).

Como se indicó en párrafos anteriores, una vez elaboradas las series básicas sobre capital, población económicamente activa y distribución del ingreso por factores, se procedió a esti-

CUADRO 11

PARTICIPACIÓN PORCENTUAL DEL TRABAJO Y CAPITAL EN EL INGRESO

(porcientos)

Años	Trabajo	Capital	Total
1939	53.6	46.4	100.0
1940	52.1	47.9	100.0
1941	50.1	49.9	100.0
1942	43.5	51.5	100.0
1943	46.5	53.5	100.0
1944	45.2	54.8	100.0
1945	42.0	58.0	100.0
1946	39.2	60.8	100.0
1947	40.2	59.8	100.0
1948	41.2	58.8	100.0
1949	42.2	57.8	100.0
1950	42.9	57.1	100.0
1951	42.0	58.0	100.0
1952	41.9	58.1	100.0
1953	44.2	55.8	100.0
1954	46.5	53.5	100.0
1955	44.9	55.1	100.0
1956	44.6	55.4	100.0
1957	46.0	54.0	100.0
1958	47.6	52.4	100.0
1959	48.3	51.7	100.0
1960	49.7	50.3	100.0
1961	49.3	50.7	100.0
1962	48.0	52.0	100.0
1963	47.6	52.4	100.0
1964	50.4	49.6	100.0
1965	51.3	48.7	100.0
1966	53.1	46.9	100.0

FUEN[illegible] Véase la nota 15 del texto.

estrangulamiento del sector externo —que provoca dos devaluaciones—, las restricciones impuestas a las compras del exterior durante el periodo bélico y, posteriormente, la política proteccionista, el financiamiento deficitario de la inversión pública y otros de importancia similar.

En cambio, durante años más recientes se ha alcanzado una marcada estabilidad de precios atribuible, en cierto grado, a la mayor elasticidad de la oferta y a la diversificación de la economía. Pero también han influido diversas circunstancias favorables. De una parte, se registraron cambios en la composición de la producción agrícola que se desplaza hacia los abastecimientos de alimentos de consumo interno, al deteriorarse la demanda externa e impulsarse la política de precios de sustentación. De otra, el financiamiento del sector público se hace descansar

CUADRO 12

ÍNDICE DE PRECIOS

(1950 = 100)

Años	Índice implícito del producto	Índice de precios al mayoreo[1]	Índice de precios al menudeo[1]	Índice de costo de la vida obrera*
1950	100.0	100.0	100.0	100.0
1951	119.9	124.0	122.8	112.7
1952	129.3	128.6	148.6	128.9
1953	128.1	126.1	142.8	126.7
1954	142.0	137.9	156.3	132.8
1955	159.5	156.7	180.3	154.0
1956	170.6	164.0	186.3	161.5
1957	182.2	171.0	194.6	170.9
1958	192.1	178.6	209.7	190.5
1959	200.0	180.7	220.8	195.3
1960	209.8	189.7	227.6	204.8
1961	215.4	191.4	229.2	208.3
1962	222.8	194.9	231.5	210.7
1963	226.9	196.0	231.7	212.0
1964	241.0	204.3	242.3	216.7
1965	246.9	208.1	246.4	224.5
1966	258.0	210.8	247.5	234.1
1967	268.1	216.8	251.3	

* De la ciudad de México

FUENTE: Banco de México, S. A. *Informes anuales* y S.I.C. Dirección General de [illegible]adística, *Anuarios estadísticos.*

A título ilustrativo puede señalarse que en 1963, el 10.6 por ciento de la población colocada en los segmentos de ingreso más elevado, disfrutaban el 50 por ciento del ingreso familiar total.[1] De acuerdo con otras elaboraciones los grupos colocados en el nivel superior (representando el 2.8 por ciento de la población) absorbían poco más del 12 por ciento del consumo del país.[2] No se trata, desde luego, de un fenómeno peculiar a México; en la gran mayoría de los países subdesarrollados la desigualdades en el reparto del ingreso y la imitación de patrones de países más avanzados determinan hábitos dispendiosos de consumo entre las clases sociales de alto ingreso.

CUADRO 13

PROYECCIÓN DE LAS TASAS DE CRECIMIENTO DE EQUILIBRIO DEL PRODUCTO, CONFORME A DISTINTAS HIPÓTESIS

Año de la Proyección	*Hipótesis principal**	*Hipótesis* A**	*Hipótesis* B***	*Hipótesis* C****	*Hipótesis* D*****
1	7.08	7.19	7.10	6.80	7.22
2	7.18	7.31	7.22	6.77	7.34
3	7.29	7.42	7.34	6.74	7.47
4	7.39	7.53	7.46	6.71	7.59
5	7.50	7.65	7.57	6.68	7.72
6	7.61	7.76	7.69	6.66	7.84

* Son las tasas de crecimiento de equilibrio necesarias para absorber una P. E. A., que representa el 98.4 por ciento de la fuerza de trabajo.

** La Hipótesis A supone que la P. E. A., representa el 99 por ciento de la fuerza de trabajo, dados los coeficientes de actividad (véase la sección 2.7).

*** La Hipótesis B supone que como la tasa de expansión de los ingresos por turismo —estimada en 7.0 por ciento— se redujo al 6.1 por ciento, el crecimiento del P. N. B., tiene que ser mayor para absorber la oferta de trabajo.

**** En la Hipótesis C se redujeron en 0.05 puntos por año las elasticidades ingreso de los gastos de turismo en el exterior y de las importaciones de materias primas, con lo que resulta menor el esfuerzo internopara absorber la fuerza de trabajo.

***** En la Hipótesis D se combinaron las Hipótesis A (mayor oferta de trabajo) y la B (menores ingresos por turismo).

1 Véase, I. M. de Navarrete, *La distribución del ingreso en México; tendencias y perspectivas*, trabajo presentado al Seminario "El Perfil Económico de México en 1980", del Instituto de Investigaciones Sociales de la UNAM, publicado por Siglo XXI.

2 Véase, Banco de México, S. A., *Encuesta sobre ingresos y gastos familiares*, México, 1963, Oficina de Estudios sobre Proyecciones Agrícolas, México, 1965.

En las restantes hipótesis, el comportamiento del consumo sigue tendencias similares que sería ocioso reseñar en detalle (véanse el cuadro 14 y el Apéndice).

CUADRO 14

PROYECCIÓN DEL CONSUMO PRIVADO

Año de la proyección	*Hipótesis principal*	*Hipótesis* A	*Hipótesis* B	*Hipótesis* C	*Hipótesis* D
1	85 450	86 233	85 459	85 341	86 243
2	91 361	92 299	91 392	91 012	92 330
3	97 786	98 905	97 852	97 048	98 971
4	104 775	106 104	104 892	103 451	106 222
5	112 382	113 954	112 570	110 264	114 144
6	120 668	122 522	120 950	117 506	122 804

* Véanse notas explicativas en el cuadro 13 del texto.

En contraste, el consumo del gobierno se expande a un ritmo sensiblemente inferior al del producto (2.8 por ciento anual en el periodo de la proyección). Como se indicó en la sección 2.3, la política gubernamental ha restringido sistemáticamente el crecimiento de algunas de las partidas que lo integran[2] a fin de facilitar el financiamiento de las transferencias y la inversión pública, así como, por motivos de estabilidad monetaria, frente a un sistema impositivo poco elástico. Acaso, el método de proyección de esta variable, sea poco realista desde el punto de vista del cumplimiento de los objetivos incorporados al modelo. Es muy probable que la contención del gasto resulte impracticable debido a la acumulación de necesidades y a la ampliación de las funciones estatales en la regulación de la vida económica. Con todo, alterar la hipótesis de trabajo habría implicado postular una reforma fiscal o una política financiera de corte muy diferente a la que se utiliza en la actualidad.

Las exportaciones de mercaderías y servicios, se elevarían a una tasa media del 5.6 por ciento en la hipótesis principal, y a razón del 5.3 por ciento de adoptarse la alternativa mínima de crecimiento del turismo y las transacciones fronterizas. Sobre

2 Véase la nota 3 del primer capítulo.

últimos cuatro años se han alcanzado coeficientes que oscilan alrededor del 20 por ciento y que varios países en proceso de desarrollo registran niveles similares o aun superiores.[4] Visto el problema desde otro ángulo, bastaría reducir el consumo de los estratos de mayor ingreso que representan el 2.8 por ciento de la población en poco menos del 3 por ciento, para generar el ahorro adicional público y privado que permitiría financiar la inversión a los niveles proyectados.

CUADRO 15

PROYECCIÓN DEL COEFICIENTE DE INVERSIÓN*

(Porcientos)

Año de la proyección	*Hipótesis principal*	*Hipótesis A*	*Hipótesis B*	*Hipótesis C*	*Hipótesis D*
1	19.75	20.01	19.81	19.22	20.06
2	20.17	20.47	20.27	19.07	20.56
3	20.60	20.94	20.74	18.92	21.09
4	21.04	21.44	21.24	18.77	21.64
5	21.51	21.96	21.77	18.62	22.21
6	22.00	22.49	22.31	18.48	22.80

* Véanse las notas explicativas en el cuadro 13 del texto.

Los obstáculos a la intensificación del proceso de formación de capital, no provienen de la escasez propiamente dicha del volumen de fondos susceptible de ser ahorrado; más bien influyen los hábitos de consumo, la limitada capacidad de captación de recursos del sector público y, probablemente también, la ausencia de incentivos apropiados para fomentar la producción de bienes intermedios y de capital (véase el capítulo IV).

En contraste, la estructura de las relaciones económicas con el exterior plantea problemas más complejos, aunque tampoco constituyen un escollo insuperable. La principal dificultad surge de la imposibilidad de reducir a corto plazo las compras de bienes de capital, de materias primas y productos intermedios

[4] En América Latina, en el año de 1967, la inversión como porciento del producto alcanzó las cifras del 23.1 en Perú, el 22.9 en Panamá y el 20.6 en Argentina (véase *A. Review of ... ce for Progress Goals*, U. S. Government Office, Washington, 1969).

sin afectar al proceso de desarrollo económico o bien, aumentando los ingresos de divisas del exterior por una vía distinta al crédito. En cierto modo, la inflexibilidad de la balazan de pagos es consecuencia de la política unilateral de sustitución de importaciones de bienes finales de consumo. Ello se refleja en la alta elasticidad-ingreso de las importaciones que hacen subir las cifras proyectadas (hipótesis principal) a un ritmo medio del 6.7 por ciento anual, cálculos que serían aún superiores en algunas de las alternativas restantes (véanse el cuadro 16 y el Apéndice). Por otra parte, siendo menor el crecimiento de las exportaciones, se enfrentaría a un déficit creciente en la cuenta de mercancías y servicios[5] que oscilarían entre 2.7 y 3.5 miles de millones de pesos a precios de 1950.

CUADRO 16

PROYECCIÓN DE LAS IMPORTACIONES

(millones de pesos de 1950)

Año de la proyección	*Hipótesis principal*
1	14 778
2	15 933
3	17 212
4	18 630
5	20 204
6	21 954

Los componentes que más influyen en el comportamiento de las compras al exterior, están dados por el turismo, las compras de bienes intermedios y la adquisición de bienes de capital para la industria. En conjunto, esos rubros elevarían su participación dentro del total en un 77.6 a un 82.1 por ciento durante el periodo de la proyección.

El análisis de la estructura del comercio exterior pone de relieve algunas conclusiones importantes. A corto plazo, las importaciones podrían comprimirse principalmente a través de limitar las erogaciones del turismo —que ocultan un fuerte

[5] Se excluyen los pagos a factores.

57

fácil inferir, las causas de inestabilidad del modelo pueden residir en las deficiencias de su estructuración, o en la presencia de factores estructurales que impedirían a largo plazo la continuidad del desarrollo de no darse ciertas transformaciones espontáneas o deliberadas. Al respecto, se efectuaron una serie de pruebas tomando como punto de partida las proyecciones reseñadas hasta aquí.

De un lado, fueron examinados los efectos de incrementar o disminuir la propensión marginal al consumo —que ya se ha visto constituye un fuerte escollo en el proceso de formación de capital— y, de otro, se efectuó un análisis similar reduciendo las elasticidades-ingreso de las importaciones de insumos intermedios y del turismo nacional en el exterior. Así pudo comprobarse la posibilidad de obtener tasas convergentes de crecimiento del producto (véase el cuadro 19). Queda claro, entonces, que el origen de la limitación a la tasa de desarrollo y de ocupación en el futuro de México, obedece a causas que vienen operando desde tiempo atrás, y cuyas manifestaciones más evidentes se observan en las deficiencias estructurales e institucionales, en el aumento de la inversión, en la debilidad del sector externo y en el estrangulamiento de las finanzas públicas (véase la sección 4.3).

CUADRO 19

COMPARACIÓN DE TASAS DE CRECIMIENTO DE EQUILIBRIO CONFORME A NUEVAS HIPÓTESIS

(Porcientos)

Año de la proyección	*Hipótesis principal*	*Hipótesis A**	*Hipótesis B***	*Hipótesis C****
2	7.08	7.26	6.90	6.90
3	7.18	7.40	7.10	6.87
4	7.29	7.54	7.19	6.84
5	7.39	7.81	7.26	6.82
6	7.50	7.94	7.29	6.81
Tasa de equilibrio	—	—	7.35	6.76

* La propensión marginal a consumir se elevó de 0.7434 (cifra correspondiente a la hipótesis principal) a 0.7602.
** La propensión marginal a consumir se redujo al nivel de 0.72.
*** Se adoptó el mismo supuesto que en la hipótesis B y además se redujeron en 0.05 puntos por año las elasticidades-ingreso de las importaciones de bienes intermedios y del turismo hasta reducirlas en 0.25.

58

CUADRO 20

DESTINO DE LA INVERSIÓN PÚBLICA FEDERAL, 1950-1966

(millones de pesos)

		BÁSICAS DE DESARROLLO				DE BENEFICIO SOCIAL				ADMINISTRACIÓN Y DEFENSA		
Años	*Total*	*Fomento agropecuario*	*Fomento industrial*	*Comunic. y transportes*	*Otras inversiones*	*Servicios públicos*	*Hosp. y Centros de Asistencia*	*Educación e investigación*	*Habitación*	*Defensa*	*Edif. Públicos*	*Otros*
1950	*2 672*	515	796	1 079	1	113	80	29	34	11	1	13
1951	*2 836*	579	732	1 158	2	120	90	102	33	19	1	—
1952	*3 280*	561	697	1 378	1	292	53	221	34	15	28	—
1953	*3 076*	563	762	1 344	1	115	10	109	23	6	57	86
1954	*4 183*	626	1 365	1 488	2	231	6	136	18	18	22	271
1955	*4 408*	605	1 738	1 422	2	446	21	74	56	8	3	33
1956	*4 571*	649	1 289	1 703	47	502	108	131	115	8	19	—
1957	*5 628*	670	1 737	2 018	21	649	150	129	130	10	111	3
1958	*6 190*	698	2 090	2 377	2	430	194	155	97	12	119	16
1959	*6 532*	751	1 943	2 747	109	472	153	108	131	9	109	—
1960	*8 376*	580	2 610	3 014	95	748	514	192	431	13	179	—
1961	*10 372*	953	4 601	2 800	6	860	376	273	248	33	222	—
1962	*10 823*	818	4 198	3 119	40	1 016	428	175	653	10	366	—
1963	*13 821*	1 415	4 580	3 397	6	1 598	943	438	1 003	94	347	—
1964	*17 436*	2 369	5 322	3 668	—	1 907	2 528	610	507	94	431	—
1965	*16 301*	1 525	7 252	4 319	—	1 280	487	866	130	28	413	—
1966	*20 669*	1 877	8 775	5 131	—	1 958	827	892	857	37	316	—

FUENTE: Secretaría de la Presidencia, Dirección de Inversiones Públicas, *México, Inversión Pública Federal, 1925-1963.*

tarios de la población, lo cual traería consigo un ensanchamiento también sustancial del mercado interno. Además quedarían sentadas las bases para atenuar la asociación negativa entre niveles de subempleo y capacidad de negociación de los trabajadores, hecho que simplificaría en la práctica muchos esfuerzos orientados a elevar las condiciones de vida de la población. Nótese, por ejemplo, que en los países de América Latina donde se observan menores disparidades en la distribución del ingreso es también donde los desajustes en el mercado de trabajo resultan menos agudos.[6]

Cuadro 17

PROYECCIÓN DE LOS SALARIOS REALES*

(pesos de 1950)

Año de la proyección	*Hipótesis principal*	*Hipótesis A*	*Hipótesis B*	*Hipótesis C*	*Hipótesis D*
1	3 573	3 606	3 573	3 568	3 607
2	3 700	3 880	3 701	3 685	3 740
3	3 835	4 031	3 838	3 805	3 883
4	3 979	4 192	3 984	3 928	4 035
5	4 133	4 364	4 140	4 054	4 199
6	4 297	4 548	4 307	4 183	4 374

* Por trabajador

Pasaremos ahora a examinar la evolución previsible del nivel global de precios. De conformidad con la proyección del comportamiento de las principales fuentes de presión inflacionaria, se registraría una elevación moderada del índice global de precios del orden de 2.5 por ciento anual (véase el cuadro 18), que hace suponer incrementos ligeramente superiores de los índices del consumo y del costo de vida de los trabajadores.

La confiabilidad de los cálculos se ve respaldada por el hecho de existir una alta elasticidad de oferta de los bienes de consumo popular y por otras características estructurales e institucionales de la economía mexicana. De otra parte, no se postularon

6 Véase CEPAL, *op. cit.*

alteraciones importantes en la distribución del ingreso ni restricciones especiales a las importaciones del exterior que pudieran alterar las tendencias previsibles.

Cuadro 18

PROYECCIÓN DEL ÍNDICE DE PRECIOS

(1950 = 100)

Año de la proyección	*Índice de precios*
1	264.3
2	271.0
3	277.9
4	289.3
5	297.8
6	305.2

Con todo, no cabría descartar la posibilidad de que surgieran tensiones que elevaran los precios, sobre todo en la fase de ajuste de la producción a una tasa más alta de crecimiento de la demanda. Tampoco podrían hacerse de lado otras fuentes de presión inflacionaria, como las que suelen surgir de reformas impositivas, modificaciones a la política de salarios o de protección a la industria nacional.

Antes de terminar este apartado, conviene hacer explícitas algunas consideraciones sobre el carácter de los resultados del sistema estructural de ecuaciones. Desde un punto de vista matemático, las soluciones del modelo no convergen en una tasa estable de expansión del producto, por cuanto que esta última experimentaría un incremento constante en el tiempo. Planteada la misma cuestión desde el ángulo económico, podría señalarse la imposibilidad de hacer crecer la producción anual más allá de ciertas tasas razonables.

Por todo esto, se justifica la insistencia de que el modelo fue diseñado para el análisis del comportamiento de la economía a mediano plazo (5 ó 6 años) y que no se postularon cambios en la política —con excepción de los que supone elevar la absorción del empleo— ni modificaciones importantes en las características dominantes de la organización económica. Como es

Cuadro 24

PRODUCTO INDUSTRIAL POR RAMAS

(millones de pesos de 1950)

Grupos industriales	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960	1961	1962	1963	1954	1965	1966	1967
Total de la industria Manufacturera	8 437	9 332	9 744	9 632	10 575	11 605	12 915	13 763	14 500	15 800	17 116	17 726	18 862	20 597	23 523	25 202	27 999	30 294
Alimentos, bebidas y tabaco	2 536	2 835	2 987	3 098	3 257	3 517	3 765	4 055	4 334	4 503	4 946	5 063	5 406	5 688	6 373	6 860	7 480	7 918
Fabricación de textiles	1 278	1 242	1 337	1 187	1 370	1 441	1 484	1 539	1 606	1 691	1 771	1 755	1 779	1 911	2 254	2 387	2 613	2 880
Calzado, prendas de vestir y artículos de confección textil	803	809	857	839	915	972	1 009	1 051	1 093	1 143	1 203	1 235	1 261	1 344	1 477	1 553	1 661	1 787
Industrias de la madera y el corcho	506	533	399	390	395	403	534	425	371	480	480	398	429	463	519	546	563	578
Papel y productos de papel	185	203	201	197	219	234	262	289	302	323	355	387	407	445	490	569	607	644
Imprenta, editorial e industrias conexas	209	223	231	218	255	265	278	310	321	337	323	332	394	431	494	523	588	636
Cuero y productos del cuero excepto calzado	244	270	278	248	272	261	288	322	353	341	326	342	366	383	386	397	414	414
Productos de hule	147	183	173	170	194	210	221	229	273	313	334	350	380	440	504	560	635	678
Productos químicos	745	751	938	971	1 167	1 362	1 551	1 684	1 841	2 203	2 496	2 679	3 066	3 388	3 775	4 172	4 816	5 361
Minerales no metálicos	368	429	425	450	469	547	621	664	657	700	776	763	803	891	1 051	1 083	1 206	1 362
Siderurgia y fabricación de productos metálicos	648	778	831	912	1 060	1 306	1 589	1 732	1 886	2 082	2 310	2 388	2 487	2 862	3 320	3 521	3 943	4 326
Construcción de maquinaria	356	369	367	362	409	492	578	715	740	788	904	1 003	1 035	1 154	1 387	1 492	1 658	1 769
Equipo de transporte	261	540	546	418	404	387	504	502	463	613	586	714	712	804	1 073	1 039	1 315	1 404
Otras industrias	151	167	174	172	189	208	231	246	260	283	306	317	337	373	420	450	500	537

Fuente: Banco de México, S. A.

25). Por otra parte, estudios comparativos internacionales muestran que el grado de industrialización de la economía mexicana se halla debajo de lo que justificaría su nivel de ingreso. Desde luego, los apuntamientos anteriores no significan que en un futuro inmediato habrá de registrarse marcado debilitamiento en el proceso de industrialización; pero sí indican la presencia de factores, cuya influencia conviene contrarrestar desde ahora.

La reorientación de la política de desarrollo manufacturero abarca a la mayoría de los instrumentos que se vienen utilizando. Ello se explica en función de los objetivos que se habrían de perseguir, los cuales presuponen acentuar el énfasis en el fomento selectivo de industrias básicas. Se trata fundamentalmente de ramas donde se conjugan altas elasticidades de la demanda y concentración del avance tecnológico. La importancia de las mismas deriva de la necesidad de cambiar la estructura de la producción dominada por industrias de lento crecimiento, para acentuar la formación de manufacturas dinámicas (véase el cuadro 26).

Cuadro 25

TASAS DE CRECIMIENTO

INDUSTRIA MANUFACTURERA

R a m a s	*1955–60*	*1960–65*	*1960–67*
Total	***8.1***	***8.1***	***8.5***
Alimentos, bebidas y tabaco	7.1	6.8	7.0
Fabricación de textiles	4.2	6.1	7.2
Calzado, prendas de vestir, etc.	4.4	5.2	5.7
Madera y corcho	3.6	2.6	2.7
Papel	8.7	9.9	8.9
Imprenta, editorial, etc.	4.0	10.1	10.2
Cuero	4.5	4.0	3.5
Productos de hule	9.7	10.9	10.6
Productos químicos	12.9	10.8	11.5
Minerales no metálicos	7.2	6.9	8.4
Siderurgia y productos metálicos	12.1	8.8	9.4
Construcción de maquinaria	12.9	10.5	10.1
Equipo de transporte	8.7	13.2	13.3
Otras industrias	8.0	8.0	8.3

Fuente: Cuadro 23.

CUADRO 20 A

DESTINO DE LA INVERSIÓN PÚBLICA FEDERAL

(millones de pesos y porcientos)

Años	Total	Básicas de desarrollo		Beneficio social		Admón. y Defensa	
		Abs.	Porciento	Abs.	Porciento	Abs.	Porciento
1950	*2 672*	2 391	89.5	256	9.6	25	0.9
1951	*2 836*	2 471	87.1	345	12.2	20	0.7
1952	*3 280*	2 637	80.4	600	18.3	43	1.3
1953	*3 076*	2 670	86.8	257	8.4	149	4.8
1954	*4 183*	3 481	83.2	391	9.3	311	7.5
1955	*4 408*	3 767	85.5	596	13.5	44	1.0
1956	*4 571*	3 688	80.7	856	18.7	27	0.6
1957	*5 628*	4 446	79.0	1 058	18.8	124	2.2
1958	*6 190*	5 167	83.5	876	14.2	147	2.3
1959	*6 532*	5 551	85.0	863	13.2	118	1.8
1960	*8 376*	6 299	75.2	1 885	22.5	192	2.3
1961	*10 372*	8 361	80.6	1 756	16.9	255	2.5
1962	*10 823*	8 175	75.5	2 272	21.0	376	3.5
1963	*13 821*	9 398	68.0	3 982	28.8	441	3.2
1964	*17 436*	11 359	65.1	5 542	31.8	525	3.1
1965	*16 031*	13 096	81.7	2 763	17.2	441	1.1
1966	*20 669*	15 783	76.4	4 534	21.9	352	1.7

FUENTE: Véase cuadro 20.

CUADRO 21

DISTRIBUCIÓN DEL INGRESO

Porcentajes de familias en orden creciente de ingreso	*Porcentajes de ingreso*		
	1950	*1958*	*1963 - 64*
50	19.1	16.7	15.7
30	21.1	20.4	21.7
20	59.8	62.9	62.6
10 por ciento más alto	49.0	49.3	49.9
5 por ciento más alto	40.2	38.6	38.3

FUENTE: Ifigenia M. de Navarrete, *op. cit.*

CUADRO 23

CAMBIOS EN LA ESTRUCTURA OCUPACIONAL

1930-1965

Sectores	*Cambios porcentuales*
Agricultura	— 19.2
No agrícola	+ 19.2
1. Bienes	*9.3*
a) manufacturas	6.3
b) minería	0.0
c) petróleo	0.3
d) construcción . .	2.7
2. Servicios	*9.9*
a) electricidad	0.1
b) transporte y comunicaciones	1.4
c) gobierno	1.1
d) comercio y otros servicios	7.3

FUENTE: Cuadro 5.

En el gráfico 9 se representa geométricamente la evolución de la estructura del empleo mediante el uso de un sistema de coordenadas triangulares. Este sistema es el más adecuado para la representación plana de un punto P cuyas coordendas sean (X^1, X^2, X^3) cuando X^1, X^2, X^3 están expresados en porcentajes y $X_1 + X_2 + X_3 = 100$.

En este sistema los ejes $^0X_1$, $^0X_2$, y $^0X_3$ están colocados uno a continuación de otro formando un triángulo equilátero. De manera que cualquier terna ordenada (X_1, X_2, X_3) sólo representa a un punto del triángulo, es decir, existe una relación biunívoca entre el punto y terno ordenada (X_1, X_2, X_3) y viceversa.

Así, la estructura del empleo en México en 1900 era la siguiente:

CUADRO 26

ESTRUCTURA INDUSTRIAL DE MÉXICO Y OTRAS REGIONES, 1965

(porcientos de la producción total)

Países	*Bienes de consumo no duradero*	*Bienes intermedios*	*Bienes de capital y consumo duradero*
Países capitalistas	35	29	36
Países capitalistas más desarrollados	34	28	38
URSS y países socialistas de Europa Oriental	32	29	39
América Latina	52	33	15
México	49	34	17

FUENTE: Instituto Latinoamericano de Planificación Económica y Social para México, estimaciones de la Asesoría Económica de la Secretaría de la Presidencia.

Sólo de esa manera podría asegurarse la consolidación de núcleos internos que diesen autonomía al desarrollo económico y a la vez atenuar sobre bases sólidas el desequilibrio externo.[8] En la práctica, las ventas al exterior de productos manufacturados tradicionales —aunque no debiera desaprovecharse— sólo permitirían aliviar las tensiones de la balanza de pagos durante periodos relativamente cortos. A más largo plazo, se volverían a presentar las tendencias divergentes entre importaciones y exportaciones, en virtud del menor crecimiento de la demanda mundial de tales artículos.

Como se examinará más adelante, otra consideración importante en la elaboración de una nueva política de desarrollo industrial se refiere a la necesidad de implantar criterios mucho más estrictos en materia de costos y productividad. Hasta ahora el objetivo central ha sido el crecimiento de la producción aun a riesgo de crear una estructura industrial ineficiente. De aquí,

[8] A título ilustrativo cabe indicar que las industrias metal-mecánicas y químicas explican en gran medida el crecimiento de la producción y el empleo en los países desarrollados. El comercio exterior de dichos productos representa alrededor del 70 por ciento del intercambio mundial de manufacturas. Además, su tasa de crecimiento oscila entre el 15 y el 7 por ciento anual, en tanto que la de las ventas de productos primarios apenas alcanza el 3.5 por ciento (1953-1963).

la diversificación extensiva de las manufacturas ligeras. En cambio, discriminan la elaboración de bienes de capital y productos intermedios debido a que, por un lado algunos insumos industriales básicos están fuertemente gravados y por otro, los bienes de capital terminados tienen un arancel relativamente bajo. La falta de un arancel adecuado a la integración industrial es uno de los factores principales que frenan el desarrollo de la industria pesada. En cierto sentido, se continúa sacrificando la eficiencia y solidez de la base productiva y reduciendo artificialmente los requerimientos técnicos, de capital y organización que demanda el desarrollo industrial.

La protección excesiva ha tendido a propiciar la formación de empresas de carácter oligopólico que desatienden los problemas de costos y competitividad. De esa manera, se ha venido creando una estructura de precios que restringe las dimensiones del mercado, acentúa la concentración del ingreso y relega a un plano secundario los incentivos para la incorporación de los avances tecnológicos (véase el cuadro 27). Las consecuencias de sostener sin mayores alteraciones esas modalidades de política, han entorpecido también la formación de corrientes significativas de exportaciones manufactureras, donde los costos constituyen uno de los criterios fundamentales.

CUADRO 27

ESTRUCTURA DE LOS COSTOS INDUSTRIALES

(porcientos del valor bruto de la producción)

País	*Remuneraciones brutas al capital*	*Otros costos*	*Sueldos y Salarios*	*Materias primas*	*Energía y combustibles*
Estados Unidos	19	81	28	51	3
Argentina	32	68	18	48	2
Bolivia	25	75	17	53	5
Brasil	34	66	13	50	3
Colombia	30	70	10	58	2
Chile	30	70	13	54	3
Ecuador	28	72	16	53	3
México	32	68	14	51	3
Perú	34	66	15	48	3

FUENTE: CEPAL, *El proceso de industrialización en América Latina*, Nueva York, 1965, p. 154.

CUADRO 28 65

MOVIMIENTOS DE CAPITAL DEL EXTERIOR

(millones de dólares corrientes)

Concepto	*1960*	*1964*	*1965*	*1966*	*1967*
I. Entradas de capital	*194**	*967*	*565*	*848*	*773*
A) Largo y mediano plazo	*120*	*904*	*596*	*697*	*744*
1. Sector privado	*—81*	*—219*	*240*	*132*	*64*
Inversión directa	—38	162	214	109*	4*
Créditos	—38*	66	14	15	5
Valores	— 5	— 9	12	8	55
2. Sector Público	201*	685	356	565	680
B) Corto plazo (neto)	74	63	— 31	151	29
II. Salidas de capital (mediano y largo plazo)	—	*392*	*423*	*484*	*428*
1. Sector privado	—	12	12	12	10
2. Sector público					
Amortizaciones	—	366	357	459	449
Créditos concedidos al exterior		14	54	13	—31
III. Saldo neto total	194	575	142	364	345
Saldo neto de capital a largo y mediano plazo	(120)	(512)	(173)	(213)	(316)
IV. Pagos por intereses de la deuda utilizada de la inversión directa	172	298	297	344**	368**
V. Aporte neto de las transacciones con el capital del exterior III-IV	22	277	—155	—24	—23

*Movimientos netos.
**No incluye la reinversión de utilidades.
FUENTE: Estimaciones basadas en las cifras oficiales de la balanza de pagos.

to de las exportaciones de México. De hecho, el mercado regional ofrece la posibilidad más o menos inmediata de colocar gran variedad de productos —que no serían competitivos en otras zonas y que ya se se elaboran— y la de proveer un mercado más amplio que facilite la continuación del proceso de sustitución de importaciones.[13]

[13] Conforme a estudios realizados en la Secretaría de Industria y Comercio, existen varias ramas industriales donde se registran excedentes de capacidad textiles y fibras artificiales, alcohol, zapatos, artículos de plástico, pinturas, cemento, productos de tocador, productos farmacéuticos, conductores eléctricos, loza, cigarrillos y fósforos, etcétera, much de los cuales podrían colocarse con venta,a en el mercado regional (véase, García ıoso, P., "Problemas de Integración Industrial Latinoamericana", *Re-*

CUADRO 29 66

FINANZAS DEL GOBIERNO FEDERAL

(millones de pesos corrientes)

Concepto	*1950*	*1960*	*1961*	*1962*	*1963*	*1964*	*1965*	*1966*	*1967*
I. Ingresos corrientes	3 057	10 970	11 392	12 796	14 537	17 249	19 876	20 864	23 183
II. Gastos corrientes	1 731	7 717	9 355	10 643	11 731	13 657	16 449	18 130	19 662
1. Sueldos y compras de bienes y servicios	1 310	4 753	5 151	5 647	6 323	7 069	7 092	9 052	9 790
2. Intereses de la deuda	86	507	703	708	656	1 127	2 267	2 727	2 783
3. Transferencias	335	2 361	3 397	4 158	4 552	5 273	6 107	6 144	6 396
4. Otros		96	104	130	170	188	173	207	793
III. Saldo en cuenta corriente (ahorro**)	1 326	3 253	2 037	2 153	2 806	3 592	3 427	2 734	3 516
IV. Ingresos de capital		18	27	36	42	48	218	891	130
V. Transferencias de capital	410	598	534	572	1 103	1 103	1 207	3 196	3 211
VI. Inversión financiera		715	515	447	500	1 088	1 499		
VII. Inversión fija	655	2 764	2 654	2 751	2 810	3 913	4 246	4 420	5 119
1. Recursos propios (III + IV — V — VI)	916	1 958	1 015	1 170	1 245	1 449	939	1 029	335
2. Préstamos	—261*	806	1 639	1 581	1 565	2 464	3 307	3 391	4 784

*Estimado por diferencia.
**Por diferencia en las fuentes consultadas este saldo no coincide exactamente con el consignado en el cuadro 31.
FUENTE: Secretaría de Hacienda y Crédito Público.

BIBLIOGRAFIA.-

Econometric Theory. Goldbergen

Econometric Methods . Johnston, lera. y 2a. ediciones.

Distributed Lags Problems of Estimations and Formulation. Dhrymes.

Macroeconomic Theory. Allen

Foundations of Economic Analysis. Samuelson.

Money, Interest and Prices. Patinkin

Macroeconomic Activity Theory Forecasting and Control. Michael Evans.

Stochastic Economics. Gerhard Tintner/Jati K. Sengupter.

Efficient Method of Estimating Seemingly Unrelated Regressions and Tests for Aggregation Bias. Arnold Zellner.

The Short Run Revisited. Louis de Alessi.

Technical Change and the Aggregate Product Function. Robert M. Solow.

Bienestar Campesino y Desarrollo Económico. Lic. Ifigenia M. de Navarrete.

Capital Theory and Investment Behavior. Jorgenson AER May 1963.

The Determinants of Investment Revisited. Z. Griliches/N. Wallace

Theory and Institutions in the Study of Investment Behavior. Edwin Kuh.

On the Theory of Optimal Investment Decision. J. Hirshleifer.

On Keynesian Economics and the Economics of Keynes: A Study in Monetary Theory. Axel Leijonhufund.

Macroeconomic Theory. Gardner Ackley.

National Income and the Price Level. Martin Bailey

Economic Theory in Retrospect. Blaug.

BIBLIOGRAFIA.-

The General Theory of Employment, Interest and Money. J.M. Keynes.

Income, Employment and Economic Growth. Wallace Paterson

Metastatics and Macroeconomics. William Vickrey

Macroeconomic Theory and Stabilization Policy. John Culbertson.

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO DE PROGRAMACION DE INVERSIONES
(DEL 21 DE AGOSTO AL 2 DE OCTUBRE DE 1973)

NOMBRE Y DIRECCION	EMPRESA Y DIRECCION
1. ING. UBALDO ALARCON SANTANA Abelardo Menchaca No. 36 México, D. F.	LADRILLERA FRISCO, S. A. DE C. V. Paseo de la Reforma No. 243-400 México, D. F. Tel: 5-33-22-20 y 5-65-92-33
2. ING. RAMON DE J. ANGULO ANGULO Parras No. 17-502 Col. Hipódromo Condesa México 11, D. F. Tel: 5-11-89-55	C. F. E. UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO Ródano No. 14-4o. Piso Ciudad Universitaria México, D. F. Tel: 5-14-56-14
3. ING. F. HORACIO ARCEO TENA Boulevard Xola No. 1114 México 12, D. F. Tel: 5-43-08-83	SECRETARIA DE RECURSOS HIDRAULICOS Paseo de la Reforma No. 77-1er. P. México, D. F. Tel: 5-91-18-30 y 5-35-72-90
4. ING. RODOLFO CAÑETE PEREZ Saratoga 1206-5 Col. Portales México 13, D. F.	PLAN NACIONAL HIDRAULICO Rio Mixcoac 25-1er. Piso México, D. F.
5. LIC. SERGIO CAMARGO PIÑUELA Monterrey No. 117 Col. Roma México 7, D. F. Tel: 5-84-08-25	DIESEL NACIONAL, S. A. Av. Universidad y Miguel Laurent. México, D. F. Tel: 5-59-05-43
6. ING. CARLOS CECEÑA CERVANTES Donatello No. 25-103 México, D. F. Tel: 5-98-07-85	SIDERURGICA NACIONAL, S. A. Av. Universidad Esq. Miguel Laurent México, D. F. Tel: 5-75-83-22
7. ING. VICTOR MANUEL CONTRERAS VARGAS Cerro del Cubilete No. 141-301 Col. Campestre Churubusco México 21, D. F. Tel: 5-39-48-06	SECRETARIA DE OBRAS PUBLICAS Xola No. 1755-9o. Piso México, D. F. Tel: 5-30-99-71 y 60
8. ING. GONZALO N. CRUZ BERISTAIN Concepción Beistegui 2103-402-E Col. Narvarte México, D. F.	SECRETARIA DE OBRAS PUBLICAS Xola 1755-9o. Piso México, D. F. Tel: 5-30-99-71 y 5-30-99-67

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO DE PROGRAMACION DE INVERSIONES
(DEL 21 DE AGOSTO AL 2 DE OCTUBRE DE 1973)

NOMBRE Y DIRECCION	EMPRESA Y DIRECCION
9. ING. MAXIMINO CHACON CERVANTES Frontera 16 Col. Roma México 7, D. F.	PETROLEOS MEXICANOS Av. Marina Nacional No. 329 México, D. F. Tel: 5-90-75-60 Ext. 2875
10. ING. JORGE DE LA MADRID VIRGEN Retorno 3 de Epsilon 41-209 Col. Romero de Terreros México 21, D. F. Tel: 5-54-10-23.	SECRETARIA DE OBRAS PUBLICAS Xola 1755-4o. Piso México, D. F. Tel: 5-19-80-46
11. ING. ALAIN DESVIGNES TREVIÑO Magnolia No. 122 México 20, D. F. Tel: 5-75-68-00	COMPLEJO INDUSTRIAL CIUDAD SAHAGUN Av. Universidad Esq. Miguel Laurent. Tel: 5-95-02-33
12. ING. MARIO ESCALANTE VIVEROS Circuito Economistas No. 69-A Cd. Satélite Edo. de México	ASOCIACION HIPOTECARIA MEXICANA Paseo de la Reforma No. 96 México, D. F. Tel: 5-55-05-51
13. ECONOMISTA MERCEDES ESCAMILLA F-28 I-41 Lomas de Plateros México 19, D. F. Tel: 5-93-05-01	PLAN NACIONAL HIDRAULICO Río Mixcoac No. 25 México, D. F. Tel: 5-34-43-84
14. SR. JORGE A. FIGUEROA CERVERA México, D. F. Tel: 5-61-11-14	SECRETARIA DE OBRAS PUBLICAS Xola No. 1755 México, D. F. Tel: 5-19-12-85
15. ING. JOSE F. GARZA ALDAPE Panzacola No. 53 México, D. F. Tel: 5-54-19-18	SERVICIOS ADMINISTRATIVOS FRISCO, S. A. DE C. V. Paseo de la Reforma No. 243-400 México, D. F. Tel: 5-33-22-20
16. SR. RIGOBERTO MARTINEZ PEREZ Edificio A-2 Dpto. 1102 Torres de Mixcoac México, D. F. Tel: 5-21-73-22	NACIONAL FINANCIERA, S. A. Isabel la Católica No. 51 México, D. F.

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO DE PROGRAMACION DE INVERSIONES
(DEL 21 DE AGOSTO AL 2 DE OCTUBRE DE 1973)

NOMBRE Y DIRECCION	EMPRESA Y DIRECCION
17. LIC. ARMANDO MUJICA MONTOYA Ixcateopan No. 255-1 México, D. F.	FONDO DE LA VIVIENDA, I.S.S.T.E. Balderas No. 58-4o. Piso México, D. F. Tel: 5-10-28-27
18. SR. CLEMENTE NIETO CRUZ Vermont No. 70-2 Col. Nápoles México 18, D. F. Tel: 5-43-94-93	NACIONAL FINANCIERA, S. A. Isabel la Católica No. 51-6o. Piso México, D. F. Tel: 5-18-16-80 Ext. 605
19. ING. GUILLERMO NORMA SUINAGA Carlos B. Zetina No. 30 México 11, D. F. Tel: 5-33-16-76	PROCEL DE MEXICO Durango No. 367 México 7, D. F. Tel: 5-15-86-00
20. ING. JORGE E. ORDOÑEZ C. Retorno Fuente Aguilas y Flores No. 4 Tecamachalco Edo. de México Tel: 5-89-12-44	MINERA FRISCO, S. A. Paseo de la Reforma No. 243-400 México 5, D. F. Tel: 5-33-22-20
21. ING. MARCO ANTONIO RANGEL QUINTERO Mártires de Tacubaya No. 17 México 18, D. F. Tel: 5-15-97-71	SECRETARIA DE OBRAS PUBLICAS Xola 1755 México, D. F. Tel: 5-19-12-85
22. LIC. SALVADOR RODRIGUEZ Y RODRIGUEZ Hda. de Xajay No. 203 Edo. de México Tel: 5-60-33-90	INSTITUTO DE INVESTIGACIONES ECONOMICAS, UNAM. Edificio Centro de Cálculo Electrónico México, D. F. Tel: 5-48-13-48
23. LIC. FCO. ANTONIO RUBIN DE CELIS Hortensias 238 Col. Florida México, D. F. Tel: 5-24-28-11	DIESEL NACIONAL, S. A. Miguel Laurent No. 803 México, D. F. Tel: 5-59-05-43

DIRECTORIO DE ASISTENTES AL CURSO DE PROGRAMACION DE INVERSIONES
(DEL 21 DE AGOSTO AL 2 DE OCTUBRE DE 1973)

NOMBRE Y DIRECCION	EMPRESA Y DIRECCION
24. ING. FRANCISCO TAVERA ESCOBAR Rinconada Diligencias No. 58 Fracc. Lomas Verdes Naucalpan Edo. de México Tel: 5-72-24-44	INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL Unidad Profesional de Zacatenco Edificio 4 México 14, D. F. Tel: 5-86-28-05
25. ING. GUILLERMO CESAR URIAS R. Retorno 12 No. 6 México 21, D. F. Tel: 5-49-38-66	UNION CARBIDE Ave. Presidente Mazaryk México, D. F. Tel: 5-45-67-00
26. ING. FRANKEMBERG VELASCO Fundidores No. 30 Col. T. del Hierro México, D. F. Tel: 5-87-39-41	PETROLEOS MEXICANOS Marina Nacional No. 329-7o. Piso México, D. F.
27. ING. ROBERTO VINIEGRA VELAZQUEZ Martín Mendalde No. 1868-301 Col. del Valle México 12, D. F. Tel: 5-24-89-83	SECRETARIA DE OBRAS PUBLICAS Xola No. 1755-7o. Piso México, D. F. Tel: 5-30-99-75

DIRECTORIO DE PROFESORES DEL CURSO PROGRAMACION DE INVERSIONES

1. M.I. JOSE JESUS ACOSTA FLORES
   Asesor de la Dirección General
   de Ingeniería de Sistemas, SOP
   Av. Univ. y Xola frente a Mitla
   México, D.F.

2. DR. REYNALDO ANGULO TORRES
   Jefe del Depto. de Bienestar Social
   Dirección de Inversiones
   Secretaría de la Presidencia
   Palacio Nacional 4° Piso

3. ING. GUILLERMO CASTELLANOS GUZMAN
   Sub-Jefe del Depto. de Bienestar Social
   Dirección de Inversiones Públicas
   Secretaría de la Presidencia
   Palacio Nacional 3° Piso

4. ING. ANGEL DE LA CAMPA BAEZ
   Asesor en el Instituto Mexicano de
   Planeación de Operación de Sistemas
   e Ing. de Sistemas en la S. O. P.

5. ING. FRANCISCO ESCUTIA NAVARRO
   Jefe de la Oficina de Recuperación
   de Información de la Dirección
   General de Ingeniería de Sistemas,
   S. O. P.

6. ING. ALEJANDRO GONZALEZ CUETO OLVERA
   Director de Evaluación
   S. R. H.
   P. de la Reforma 51-15° Piso
   México, D.F.

7. ING. EDUARDO MAC GREGOR BELTRAN
   Analista del Depto. de Transportes y Comu
   nicaciones de la Dirección de Inversiones
   Públicas.
   Palacio Nacional 4° Piso
   México, D.F.

DIRECTORIO DE PROFESORES DEL CURSO DE PROGRAMACION

DE INVERSIONES

8. ING. ALBERTO MORENO BONETT
Jefe del Depto. de Análisis
de Sistemas S.O.P.
Ave. Universidad y Xola

9. DR. FELIPE OCHOA ROSSO

10. ING. PEDRO REYES ORTEGA
Subdirector de Descentralización
Administrativa
Dir. Gral. de Programación y
Descentralizacion
Secretaría de Hda. y Cred. Público
Lafragua 18-9°

11. ING. JORGE LUIS VARGAS ROMERO
Jefe del Depto. de Integración de
Proyectos, S. R. H.
Insurgentes Centro 56-5°
México, D.F.