CAPÍTULO 3

Conceptos básicos

Antes de presentar las ecuaciones para determinar el perfil de la superficie libre del agua y la distribución de la carga de presión, es conveniente definir las variables que se consideran en el cálculo. La terminología usada en el análisis del cimacio no siempre es clara para el ingeniero principiante. Los términos: coordenada s, componente de la velocidad v, gasto unitarios q, carga total de operación H, coeficiente de descarga C etc, aparecen frecuentemente en la literatura, y su uso no siempre es equivalente en todas las referencias bibliográficas. En este capítulo se expondrán los significados de los términos relevantes al tema, tal como se emplearán en este trabajo.

Sección 3.1

Definición de variables

El eje s, del sistema, sigue fielmente la forma del fondo curvo y mide la longitud de arco de dicho fondo. Sobre dicho eje se mide la coordenada que define la posición de un plano ortogonal al fondo en cada punto, que contiene la sección transversal del canal y sobre el cual se mide la coordenada n, normal a s.

La curva que representa al fondo se define a través de la función

$$y = \zeta(s) \tag{3.1}$$

siendo necesario que la curva sea continua, además de tener pendiente y curvatura también continuas. De la ecuación anterior se deduce que

$$\frac{d\zeta}{dx} = \tan\theta \tag{3.2}$$

siendo θ la inclinación de la tangente al perfil del cimacio en cada punto, como se muestra en la figura 3.1.

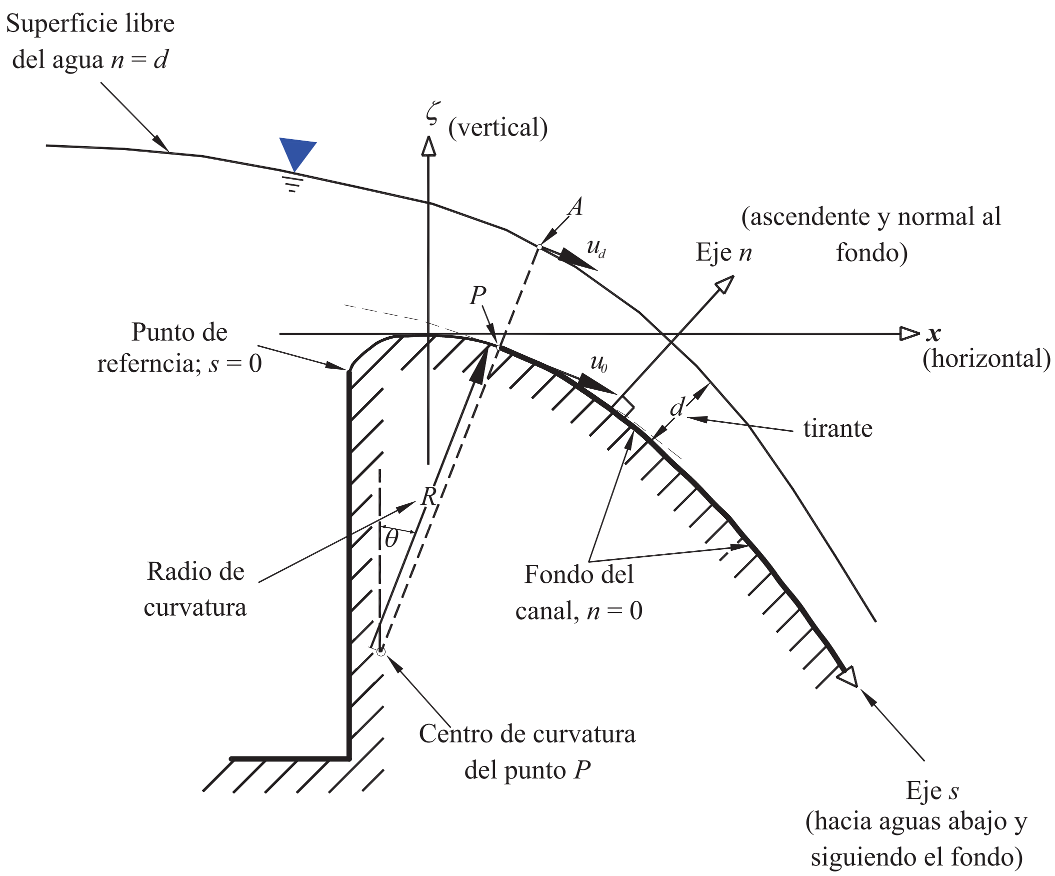

Figura 3.1: Principales variables de un fondo curvo

Las ecuaciones generales deducidas por el Dr. Sotelo en su trabajo doctoral, en las que se basa el desarrollo de esta tesis, toman en cuenta la variable tiempo, pero nosotros analizaremos unicamente el caso de flujo permanente, independiente del tiempo, por lo que eliminaremos ese variable de las ecuaciones que utilizaremos.

La componente de la velocidad u_0, tiene la dirección de s y también es perpendicular a una sección ortogonal de coordenada de fondo n, la componente principal de la velocidad $u(s, n)$, tiene la misma dirección s y es perpendicular a un fondo n. La magnitud de u en el fondo de la sección es $u_{0,}$ pero a nivel de la superficie libre es u_d.

El perfil de la superficie libre se desconoce, pero se representa por $n = d(s)$, donde d es la distancia ortogonal desde el fondo hasta la superficie libre (según n) y es función de s y la varible t. En efecto, cuando $n = 0$ se describe el perfil del cimacio.

La curvatura del fondo en un punto P se define como el recíproco del radio de curvatura R en dicho punto, es decir, $\kappa = \frac{1}{R}$. Además, los libros de matemáticas definen a la curvatura κ de la siguiente manera:

$$\kappa = \frac{\frac{d^2\zeta}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{d^2\zeta}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{sen\theta}{\cos\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \cos^3\theta \frac{d^2\zeta}{dx^2} \tag{3.3}$$

La carga total de diseño y una carga total de operación cualquiera, se expresan como H_0 y H respectivamente; donde $H(s)$ es la ecuación equivalente a la de Bernoulli para las líneas de flujo que cruzan una sección plana ortogonal al fondo. La ecuación de Bernoulli describe el comportamiento de un fluido moviéndose a lo largo de una línea de corriente y expresa que en un fluido ideal (sin viscosidad ni rozamiento) en circulación por un conducto cerrado, la energía que posee el fluido permanece constante a lo largo de su recorrido. A las soluciones de la ecuación que describen el perfil de la superficie libre de la lámina vertiente se les denominan con la variable χ.

El gasto unitario en un cimacio de sección rectangular es el gasto total por unidad de longitud efectiva del cimacio, es decir: $q = \frac{Q}{L_e}$, donde Q es el volumen del flujo que pasa a través de una superficie transversal S del canal por unidad de tiempo y queda definido como

$$Q = \frac{dv}{dt} = \int\int_A v.dA \tag{3.4}$$

Se llama velocidad media, a través de la superficie S de área A, al promedio calculado como::

$$V = \frac{\int\int_A v.dA}{A} \tag{3.5a}$$

$$V = \frac{Q}{A} \tag{3.5b}$$

y equivale a suponer que la velocidad se distribuye uniformemente sobre toda la superficie S, con un valor constante V y en dirección perpendicular a la misma.

El parámetro adimensional F relaciona al flujo y la geometría del fondo, y se obtiene mediante el coeficiente de gasto del cimacio C, ecuación 1.1, en efecto, apartir de uno se puede obtener el otro; y se obtiene como:

$$F = \frac{q}{\sqrt{2g}H_0^{\frac{3}{2}}} \tag{3.6}$$

el cual debe de ser constante para cada gasto unitario vertido. Por lo tanto, el valor de F varia de acuerdo con la carga h con la que esta operando el cimacio, medida desde la cresta hasta la superficie libre aguas arriba de la cresta, en el canal de llegada.

De la ecuación 1.1 el coeficiente de gasto se obtiene como

$$C = \frac{q}{H^{\frac{3}{2}}} \tag{3.7}$$

multiplicando y dividiendo la ecuación 3.6 por $H_0^{\frac{3}{2}}$ y sustituyendo la expresión del coeficiente de gasto ecuación 3.7, se obtiene

$$F = \frac{C}{\sqrt{2g}}\left(\frac{H}{H_0}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{3.8}$$

y resulta el coeficiente de gasto C de la forma

$$C = \frac{\sqrt{2g}}{\left(\frac{H}{H_0}\right)^{\frac{3}{2}}} F \tag{3.9}$$

Por lo tanto si se conoce el valor de C para cualquier valor $\frac{H}{H_0}$ se puede obtener el valor de F y viceversa.

Sección 3.2

Características del flujo

Para simplificar los cálculos se ha considerado algunas hipótesis de partida: la curvatura κ del fondo es la única que influye en las líneas de corriente del flujo y queda excluida cualquier discontinuidad de κ. La cantidad κd se puede considerar como un indicador de la pequeñez de la profundidad, ya que es el cociente del tirante del flujo y el radio de curvatura del fondo; se considera que el flujo es de poca profundidad cuando κd es pequeño; además el flujo se considera incompresible (dado que es a superficie libre), irrotacional y no viscoso.

3.2.1. Irrotacionalidad

Un flujo curvilíneo irrotacional es cuando en un flujo el vector $rot\ v$ es igual a cero para cualquier punto e instante. El flujo irrotacional ocurre con bastante frecuencia en los problemas de la práctica; y sólo será necesario entender con claridad el concepto físico de irrotacionalidad. Si bien el término rotación implica un giro de partículas, esto no significa que es rotacional todo movimiento efectuado de acuerdo a una trayectoria curva o bien que todo movimiento rectilíneo es irrotacional.

Un vórtice es un flujo turbulento en rotación espiral con trayectorias de corriente cerradas. Como vórtice puede considerarse cualquier tipo de flujo circular o rotatorio que posee vorticidad. La vorticidad es un concepto matemático usado en la dinámica de fluidos que se puede relacionar con la cantidad de circulación o rotación de un fluido. La vorticidad se define como la circulación por unidad de área en un punto del flujo. La velocidad de las partículas en cada punto de intersección sigue la ley del vórtice libre y es

$$vr = \kappa \tag{3.10}$$

donde r es la distancia del centro de curvatura al punto P figura 3.1.

De la sección ortogonal al fondo de coordenada s, la velocidad en el punto P es

$$u(s,n) = \frac{u_0(s)}{1-\kappa n} \tag{3.11}$$

que equivale a la distribución típica de la velocidad en un vórtice. La componente u sólo depende de n. En efecto, se tiene

$$1 - \kappa n = 1 - \frac{n}{R} = \left(\frac{R-n}{R}\right) = \frac{r}{R}$$

La componente prinicipal de la velocidad en el punto A sobre la superficie libre resulta

$$u_d = \frac{u_0(s)}{1-\kappa d} \tag{3.12}$$

3.2.2. Ecuación de continuidad

El flujo de masa del agua a través de la sección de un canal es ρVA, donde ρ es la densidad del líquido, V la velocidad media en la sección y A su área hidráulica. Cuando el flujo sigue la dirección del eje del canal según la coordenada curvilínea s sobre el fondo (figura 3.1), y no hay aportaciones o salidas de líquido en el trayecto, la forma matemática de la ecuación de continuidad para el flujo unidimensional permanente en toda su longitud es

$$\frac{\partial\left(\rho VA\right)}{\partial s}=0 \tag{3.13}$$

es decir, el flujo de masa no cambia al variar s. En un flujo a superficie libre ρ es constante (incompresible) y se puede elimnar en la ecuación anterior,

$$\frac{\partial\left(VA\right)}{\partial s}=0 \tag{3.14}$$

que al integrar entre dos secciones resulta

$$V_1A_1=V_2A_2 \tag{3.15}$$

El gasto en una sección se obtiene mediante la ecuación 3.4. El gasto en una sección plana está dado por

$$Q\left(s\right)=\int_0^{d(s,t)}uBdn \tag{3.16a}$$

donde $B(s,t)$ es la dimensión horizontal de la sección que es una función conocida de s y n. Al sustituir la ecuación 3.11 en la anterior se obtiene

$$Q\left(s\right)=u_0\int_0^d\frac{Bdn}{1-\kappa n}=u_0\mathbf{I}_Q \tag{3.16b}$$

Además con la ecuación 3.5b y $dA=Bdn$ la velocidad media sigue su definición (de la ecuación 3.5a) y es

$$V=\frac{1}{A}\int{}_0^d udA \tag{3.17a}$$

de donde

$$V=\frac{u_0}{A}\mathbf{I}_Q \tag{3.17b}$$

donde en las expresiones 3.16b y 3.17b el valor del integral $\mathbf{I}_Q$ depende de la forma de la sección que adopte el canal y se ha representado como:

$$\mathbf{I}_Q = \int_0^d \frac{B\ dn}{1 - \kappa n} \tag{3.18}$$

3.2.3. Ecuación del movimiento transversal

La ecuación equivalente a la de Bernouli para las líneas de flujo que cruzan una sección plana ortogonal al fondo es

$$H(s) = \zeta + n\cos\theta + \frac{p}{g\rho} + \frac{1}{(1-\kappa n)^2}\frac{u_o^2}{2g} = \text{constante} \tag{3.19a}$$

La presión es cero en cualquier punto sobre la superficie libre, es decir $n = d$, $p = 0$ con ello, la energía en la ecuación anterior resulta:

$$H(s) = \zeta + d\cos\theta + \frac{1}{(1-\kappa d)^2}\frac{u_o^2}{2g} \tag{3.19b}$$

O bien de la ecuación 3.12 también es

$$H = \zeta + d\cos\theta + \frac{u_d^2}{2g} \tag{3.19c}$$

Sustityuendo $u_d = \frac{V}{\lambda}$ en la ecuación 3.19c, La energía total de un flujo rectilíneo en una sección que se puede localizar con la altitud del fondo respecto del nivel de referencia coincidente con la cresta y con el tirante d es

$$H = \zeta + d\cos\theta + \frac{1}{\lambda^2}\frac{V^2}{2g} \tag{3.19d}$$

donde λ es el coeficiente de curvatura, que permite el intercambio de la velocidad en la superfiie libre por la media y que depende de la curvatura del fondo y del tirante

d medido en dirección perpendicular al fondo. La expresión 3.19d es válida para el fondo cóncavo o convexo. Cabe destacar que para calcular la energía en una sección del ‡ujo con curvatura vertical, no es necesario conocer la distribución de la presión ni la que hay en el fondo, sólo el coeficente de curvatura.

En un canal rectangular se puede emplear el concepto de gasto unitario, $q = \frac{V}{d}$, de manera que la expresión anterior es también

$$H = \zeta + d\cos\theta + \frac{1}{\lambda^2 d^2}\frac{q^2}{2g} \tag{3.19e}$$

Sección 3.3

Ecuación de la lámina vertiente

Las ecuaciones que se desarrollaron, fueron obtenidas por Dr. Gilberto Sotelo Ávila en el 2001, en ese trabajo se muestra la aplicación de la teoría del flujo sobre fondos curvos que permite una predicción teórica de la distribución de la presión en el fondo, cuando se conoce el perfil geométrico y las condiciones en las que se opera. La teoría desarrollada es nueva, y para su validación se requiere de los resultados experimentales en curvas con éstas características

Las ecuaciones diferenciales del flujo poco profundo y para una sección rectangular permiten obtener la integral I_Q valuada mediante la ecuación 3.20 que es

$$I_Q = -\left(\frac{L_e}{\kappa}\right)\ln\left(1 - \kappa d\right) \tag{3.20}$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación 3.16b el gasto unitario q resulta

$$q(s) = \frac{Q}{L_e} = -\frac{\ln\left(1 - \kappa d\right)}{\kappa}u_0 \tag{3.21a}$$

o bien

$$u_0 = -\frac{\kappa}{\ln(1-\kappa d)} q(s) \tag{3.21b}$$

La energía total por unidad de peso en una sección ortogonal al fondo se obtiene de la ecuación 3.19b. Al sustituir la ecuación 3.21b en la ecuación 3.19b, se obtiene

$$H = \zeta + d\cos\theta + [(1-\kappa d)\ln(1-\kappa d)]^{-2}\,\frac{\kappa^2 q^2}{2g} \tag{3.22}$$

Se aplican las ecuaciones particulares del canal rectangular al flujo permanente que se produce sobre un vertedor tipo cimacio, cuyo diseño geométrico sigue los lineamientos estándar que usan una carga total H_0 de diseño. El perfil de la superficie libre de la lámina vertiente queda definido por la ecuación 3.22, la cual al dividir por H_0, se expresa de la siguiente manera

$$\left[\frac{H}{H_0} - \frac{\zeta}{H_0}\right] = \frac{\cos\theta}{\kappa H_0}\chi + \left[\frac{F\kappa H_0}{(1-\chi)\ln(1-\chi)}\right]^2 \tag{3.23}$$

donde la suma de términos antes del signo igual, representa a la energía específica en cada sección. La ecuación anterior tiene dos soluciones χ para cada valor de $\frac{H}{H_0}$y $\frac{x}{H_0}$; una en régimen subcrítico y la otra en supercrítico. Éstas equivalen a los llamados valores alternos en un canal de fondo plano.