

Capítulo 3. Modelo de propagación de ondas

Como se estudió en el Capítulo 1, cuando el oleaje se aproxima a la costa sufre procesos de difracción, refracción, reflexión, someramiento y rotura. En ese capítulo se consideró que la profundidad del lecho sobre el que se propagan las ondas es impermeable y uniforme. Sin embargo, para representar los procesos ya mencionados es necesario asumir que las ondas se propagan en un fondo sí impermeable pero variable. A la ecuación de gobierno de este proceso se le conoce como ecuación de la pendiente suave, presentada por primera vez por Berkhoff (1972), y posteriormente derivada por autores como Smith and Spinks (1975), Lozano and Meyer (1976), Massel (1989), y Miles (1991). Más adelante Losada (1996) y Silva *et al* (2002) desarrollaron la llamada ecuación modificada de la pendiente suave, la cual representa con mayor precisión la propagación del oleaje en presencia de batimetrías complejas al considerar los términos de segundo orden que despreciara Berkhoff (1972). Para dar solución a esta ecuación se asume que el flujo es incompresible, homogéneo e irrotacional, y que las ondas se propagan sobre un fondo impermeable con profundidad total $h(x, y)$, siendo x e y las coordenadas cartesianas horizontales. La coordenada vertical z es positiva hacia arriba y el nivel $z = 0$ se encuentra en el nivel medio del mar.

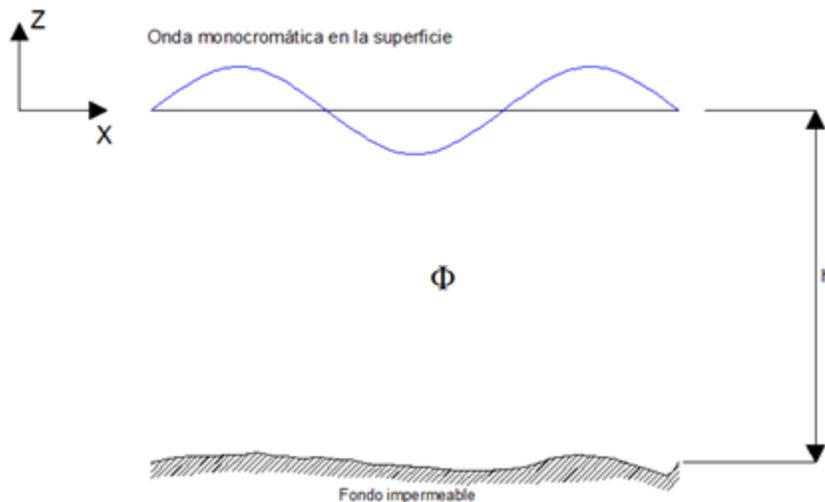


Figura 3. 1 Croquis del problema de propagación en fondo variable

La ecuación de Laplace es la ley que representa el movimiento general del fluido, que de acuerdo a lo anterior puede escribirse como función del potencial de velocidades de la forma

$$\nabla_h^2 \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad -h \leq z \leq 0 \quad (3.1)$$

Donde, al igual que en el Capítulo 1: $\Phi(x, y, z, t)$ es el potencial de velocidades y $\nabla_h = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$.

Las condiciones de frontera necesarias para encontrar la solución son:

1. Condiciones dinámica y cinemática de superficie libre del agua

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad z = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad z = 0 \quad (3.3)$$

2. Condición de impermeabilidad en el fondo

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \nabla_h h \cdot \nabla_h \Phi = 0 \quad z = -h \quad (3.4)$$

3. Presión

$$p = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + gz \right) \quad -h \leq z \leq 0 \quad (3.5)$$

La versión extendida de la ecuación de la pendiente suave dependiente del tiempo es

$$\nabla_h (I_1 \nabla_h \varphi) + K^2 \varphi I_1 + \varphi r(h) - \frac{1}{g} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \varphi \sigma^2 \right) = 0 \quad (3.6)$$

En la que

$$r(h) = I_2 (\nabla_h^2) + (\nabla_h^2 h) \left(\frac{\partial I_2}{\partial h} \right) - (\nabla_h h)^2 I_3 \quad (3.7)$$

Además

$$I_1 = \int_{-h}^0 f^2 dz \quad (3.8)$$

$$I_2 = \int_{-h}^0 f \frac{\partial f}{\partial h} dz \quad (3.9)$$

$$I_3 = \int_{-h}^0 \left(\frac{\partial f}{\partial h} \right) dz \quad (3.10)$$

Para obtener la extensión de la ecuación de la pendiente suave independiente del tiempo se utiliza la siguiente separación

$$\varphi(x, y, t) = \phi(x, y) e^{-i\sigma t} \quad (3.11)$$

Que al sustituirla en la ecuación (3.6) se obtiene la ecuación modificada de la pendiente suave, dada por

$$\nabla_h (I_1 \nabla_h \phi) + K^2 \phi I_1 + \phi r(h) = 0 \quad (3.12)$$

Las corrientes más importantes debidas al oleaje se generan en la zona de rompientes, por lo que es esencial que el modelo de oleaje tenga la capacidad de disipar la energía y representar de la mejor manera el decaimiento en la superficie que genera la rotura del oleaje. Para lograrlo, a la ecuación (3.12) se le añade artificialmente un término disipativo, similar al presentado por Dally *et al* (1985), así la ecuación modificada de la pendiente suave queda

$$\nabla_h (I_1 \nabla_h \phi) + \left[(K^2 - i\sigma f_D) I_1 + r(h) \right] \phi = 0 \quad (3.13)$$

Donde:

$$f_D \quad \text{Es el término disipativo, dado por } f_D = \frac{\Re(K) C_k}{\sigma h^*} \left[1 - \left(\frac{C_G h}{H_B} \right)^2 \right]$$

C_k Coeficiente experimental, con valor de 0.15

C_G Coeficiente experimental, con valor de 0.4

σ Es la frecuencia angular

H_B Es la altura de ola de rotura

Una forma más compacta para representar la ecuación modificada de la pendiente suave es en su forma de Helmholtz

$$\nabla_h^2 \psi + K_c^2 \psi = 0 \quad (3.14)$$

Donde:

$$\psi = (I_1)^{1/2} \phi$$

$$K_c^2 = (k^2 + i\sigma W) + \frac{r(h)}{I_1} - \frac{\nabla^2 \sqrt{I_1}}{\sqrt{I_1}}$$

3.1 Relación de dispersión

El desarrollo de la ecuación modificada de la pendiente suave está basado en la teoría lineal, por lo que el modelo está restringido a condiciones en las que la teoría lineal es válida. La relación de dispersión general que ofrece la teoría lineal es

$$\sigma^2 = gk \tanh kh \quad (3.15)$$

Una forma de medir la no linealidad del fenómeno es el número de Ursell definido como

$$Ur = \frac{H_L L^2}{h^3} \quad (3.16)$$

Donde:

H_L Es la altura de ola local

L Es la longitud de onda

h Es la profundidad.

Cuando el número de Ursell es mayor de 40 (lo cual ocurre en aguas poco profundas), la teoría lineal deja de ser válida. Sin embargo, para que el modelo sea aplicable a zonas con poca profundidad, Hedges (1976) propuso una modificación a la relación de dispersión lineal, incluyendo la dispersión debida a la amplitud. La relación queda

$$\sigma^2 = gk \tanh \left[kh \left(1 + \frac{A}{h} \right) \right] \quad (3.17)$$

Donde:

A Es la amplitud máxima local, calculada como

$$A = |\phi| \quad (3.18)$$

Y $|\phi|$ representa la norma del potencial de velocidades.

3.2 Solución a la ecuación modificada de la pendiente suave

3.2.1 Condiciones de frontera

Los modelos matemáticos de oleaje son comúnmente utilizados en la ingeniería costera para predecir la transformación que sufre el oleaje al acercarse a la costa, intentando representar de la mejor manera procesos tales como refracción, difracción, someramiento, disipación y reflexión del oleaje.

La solución numérica de la ecuación (3.14) requiere la implementación de un esquema discreto y las condiciones de frontera apropiadas. A continuación se presentan dichas condiciones:

3.2.1.1 Condición de frontera abierta

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \pm \left(iK_c a_0 \psi + i \frac{a_1}{K_c} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{a_2}{K_c^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y \partial x^2} \right) + 2ik_l \psi_l \cos \theta_l; \quad \text{en } \pm \text{ frontera } y \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \pm \left(iK_c a_0 \psi + i \frac{a_1}{K_c} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{a_2}{K_c^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \right) + 2ik_l \psi_l \cos \theta_l; \quad \text{en } \pm \text{ frontera } x \quad (3.20)$$

3.2.1.2 Condición de frontera parcialmente reflejante

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \gamma \left[iK_c \left(a_0 \psi + \frac{a_1}{K_c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - \frac{a_2}{K_c^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \right]; \quad \text{en } + \text{ frontera } x \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \pm \gamma \left[iK_c \left(a_0 \psi + \frac{a_1}{K_c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) - \frac{a_2}{K_c^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \right]; \quad \text{en } + \text{ frontera } y \quad (3.22)$$

3.2.2 Generación del sistema de ecuaciones

3.2.2.1 Ecuación de gobierno

A partir de la ecuación (3.14), la ecuación de gobierno puede ser representada en forma discreta como

$$\frac{\psi_{i,j-1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j+1}}{\Delta y^2} + \frac{\psi_{i-1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i+1,j}}{\Delta x^2} + K_c^2 \psi_{i,j} = 0 \quad (3.23)$$

3.2.2.2 Ecuación para la frontera abierta

La condición de frontera de lado de mar, puede ser expresada en forma discreta como

$$\begin{aligned}
 & \left(i \frac{a_1}{K_c} 2\Delta x - 3 \frac{a_2}{K_c^2} + \Delta x^2 \right) \psi_{i,j-1} - \\
 & -2 \left(\Delta y^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 \Delta x^2 K_c^2 (1 + 2ia_0) - 2i \frac{a_1}{K_c} \Delta x + 3 \frac{a_2}{K_c^2} \right) \psi_{i,j} + \\
 & + \left(i \frac{a_1}{K_c} 2\Delta x - 3 \frac{a_2}{K_c^2} + \Delta y^2 + \Delta x^2 \right) \psi_{i,j+1} + \\
 & + 4 \frac{a_2}{K_c^2} \psi_{i+1,j+1} \left(\Delta y^2 - 8 \frac{a_2}{K_c^2} \right) \psi_{i+1,j} + \\
 & + 4 \frac{a_2}{K_c^2} \psi_{i+1,j-1} + \frac{a_2}{K_c^2} \psi_{i+2,j+1} - 2 \frac{a_2}{K_c^2} \psi_{i+2,j} + \\
 & + \frac{a_2}{K_c^2} \psi_{i+2,j-1} = 2\Delta x \Delta y^2 i (k + K_c) \psi^g \cos \theta
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

3.2.2.3 Determinación del oleaje en una frontera con fondo variable

Se puede determinar a partir de la siguiente expresión

$$-3\psi_{i-4,1} + 8\psi_{i-3,1} + 18\psi_{i-2,1} - 168\psi_{i-1,1} + (120\Delta x D_1 - 36\Delta x^2 B + 145)\psi_{i,1} = 0 \tag{3.25}$$

3.2.2.4 Determinación del ángulo local

Se utiliza la ecuación propuesta por Isaacson and Qu (1990) para estimar la dirección con la cual se aproxima el oleaje a la costa. La ecuación está en función del gradiente de la fase, tal que

$$\tan \theta = \frac{\frac{\partial \arg(\psi)}{\partial x}}{\frac{\partial \arg(\psi)}{\partial y}} \tag{3.26}$$

3.2.3 Solución del sistema de ecuaciones a través de un método Gaussiano.

Una vez que planteado, el sistema de ecuaciones puede resolverse utilizando un sistema de eliminación de Gauss con pivoteo parcial dando solución directa a un sistema de ecuaciones matriciales.

La ecuación de cualquier matriz en forma de banda se puede representar como

$$BX = G$$

Donde:

- B Es la matriz de banda con dimensión de $M \times N$, siendo N la longitud de la matriz (es decir, el número de puntos de agua que tiene la malla) y M el ancho de banda de la matriz,
- X Es la matriz de incógnitas con dimensión $N \times E$, donde la variable es el potencial de oleaje en el dominio de estudio, y E contiene las condiciones del oleaje (el mismo periodo, pero diferentes alturas de ola y direcciones de propagación),
- G Es otra matriz de dimensiones $N \times E$, que incluye las condiciones de frontera dadas.

3.3 Programa computacional MWAPO_V4

El nombre del programa viene de las siglas en inglés *Wave Propagation On the coast* versión 4, y se encarga de resolver la ecuación de la matriz de banda utilizando un procedimiento espacial de almacenamiento en disco duro, el cual reemplaza el uso de memoria virtual por el uso de memoria física (disco duro).

La ecuación modificada de la pendiente suave (3.14) se programó en lenguaje fortran 77, con las condiciones de frontera y el sistema de ecuaciones ya descritos para crear el programa WAPO_V4. Para la utilización en una forma más sencilla de este programa, se implementó un programa de preproceso llamado BWAPO4. El programa de proceso WAPO_V4 y el de preproceso BWAPO4 se ejecutan a través del programa MWAPO_V4.

El programa de preproceso BWAPO4 fue diseñado para que a partir de unas condiciones iniciales e información batimétrica del área en estudio, se construya una base de datos con todas las condiciones iniciales que necesita el programa WAPO_V4 para su funcionamiento. El programa WAPO_V4 tiene la función de generar y resolver el sistema de ecuaciones para estimar los potenciales de velocidades locales a lo largo y ancho de una malla computacional creada por el programa de preproceso BWAPO4.

3.3.1 Descripción de archivos de entrada

Como se mencionó anteriormente, los programas BWAPO4 y WAPO_V4 se ejecutan a través del programa MASTER llamado MWAPO_V4. La información necesaria para ejecutar los programas se introducen a través de una serie de archivos de entrada. A continuación se hace una descripción y se presenta un ejemplo de los archivos de entrada, correspondientes al caso de aplicación que se estudiará más adelante.

3.3.1.1 Ejemplo de archivo de entrada con una lista de casos

Se debe crear un archivo de texto (extensión *.txt), escribiendo en la primera línea el número de casos a ejecutar y posteriormente el nombre de cada caso. El nombre de los casos se compone de tal forma, que los dos primeros caracteres indican el escenario físico (clave) y los siguientes dos identifican la condición de modelo (caso); a estos cuatro caracteres se les conoce como "CLAVECASO". Finalmente el nombre debe estar compuesto como "CLAVECASOWAP.INP". En la figura 3.2 se muestra un ejemplo de archivo de entrada con la lista de casos.

```

24
KA01WAP.INP
KA02WAP.INP
KA03WAP.INP
KA04WAP.INP
KA05WAP.INP
KA06WAP.INP
KA07WAP.INP
KA08WAP.INP
KA09WAP.INP
KA10WAP.INP
KA11WAP.INP
KA12WAP.INP
KA13WAP.INP
KA14WAP.INP
KA15WAP.INP
KA16WAP.INP
KA17WAP.INP
KA18WAP.INP
KA19WAP.INP
KA20WAP.INP
KA21WAP.INP
KA22WAP.INP
KA23WAP.INP
KA24WAP.INP
    
```

Figura 3. 2 Ejemplo de archivo de entrada con lista de casos

3.3.1.2 Ejemplo de archivo con las condiciones generales

Los archivos con las condiciones de modelado deben de tener la siguiente estructura para el nombre “CLAVECASOWAP.INP” y deben contener la siguiente información:

# de renglón	Texto
1	Comentario
2	Comentario
3	Zona por la que entra el oleaje con profundidad constante
4	Periodo de onda en segundos
5	Amplitud de onda
6	Ángulo de incidencia del oleaje
7	Rotura de ola, =1 cuando hay disipación por rotura; =0 cuando no hay disipación por rotura
8	Aproximación del número de onda
9	Profundidad mínima que se considera como agua
10	Nivel de marea
11	Número de regiones con diferente factor de fricción
12	Valor y posición i,j de inicio y final de cada región
13	Número de regiones con diferente factor de reflexión, frontera norte
14	Valor y coordenadas de inicio y final
15	Número de regiones con diferente factor de reflexión, frontera oeste
16	Valor y coordenadas de inicio y final
17	Número de regiones con diferente factor de reflexión, frontera este
18	Valor y coordenadas de inicio y final
19	Número de regiones con diferente factor de reflexión, frontera sur
20	Valor y coordenadas de inicio y final
21	Número de regiones con diferente factor de reflexión, interior (dominio)
22	Valor y posición i,j de inicio y final de cada región

3.3.1.3 Criterio para establecer la dirección del oleaje incidente

En el tercer renglón se debe escribir la dirección por la que entra el oleaje con una profundidad constante. Esto se anotará de acuerdo a lo siguiente:

- Para oleaje incidiendo desde la frontera norte con profundidad constante, el valor del tercer renglón debe ser igual a 1.
- Para oleaje incidiendo desde la frontera oeste con profundidad constante, el valor del tercer renglón debe ser igual a 2.
- Para oleaje incidiendo desde la frontera este con profundidad constante, el valor del tercer renglón debe ser igual a 3.
- Para oleaje incidiendo desde la frontera sur con profundidad constante, el valor del tercer renglón debe ser igual a 4.

En la figura 3.3 se presenta un ejemplo de archivo con las condiciones de entrada.

```

VERSION - JUNE 2009 - Boundaries (1=NORTH,2=WEST,3=EAST,4=SOUTH),
WAPO+REFDIF(5,6,7,8)
3          IDS: REFDIF(11=NORTE,12=OESTE,13=ESTE,14=SUR)
10.0      PERIOD (SEC)
1.0       INCIDENT WAVE AMPLITUDE
-22.5     ANGLE
1         BREAKING (YES = 1, NO = 0)
1         WAVENUMBER APPROXIMATION (LINEAR=1, HEDGES = 2)
0.1      MINIMUM WATER DEPTH CONSIDERED AS A WATER
0.0      TIDAL LEVEL (M)
1        NUMBER OF DIFFERENTS FRICTION AREAS
0.0  1   1 601 251 ,VALUE AND RECTANGULAR COORDINATES
1        NUMBER OF DIFFERENTS REFLECTION COEF. AREAS TOP
0.0  1  251 ,VALUE AND RECTANGULAR COORDINATES
1        NUMBER OF DIFFERENTS REFLECTION COEF. AREAS LEFT
0.0  1  601 ,VALUE AND RECTANGULAR COORDINATES
1        NUMBER OF DIFFERENTS REFLECTION COEF. AREAS RIGHT
0.0  1  601 ,VALUE AND RECTANGULAR COORDINATES
1        NUMBER OF DIFFERENTS REFLECTION COEF AREAS BOTTOM
0.0  1  251 VALUE AND RECTANGULAR COORDINATES
1        NUMBER OF DIFFERENTS REFLECTION COEF AREAS BOTTOM
0.3  1   1 601 251 VALUE AND RECTANGULAR COORDINATES
    
```

Figura 3. 3 Ejemplo de archivo con condiciones de entrada

3.3.1.4 Descripción del archivo de entrada con los datos batimétricos

El archivo debe tener la extensión *.grd en formato ASCII, compatible con cualquier versión de SURFER.

La estructura del archivo de batimetría se ilustra en la figura 3.4.

DSAA				
NY NX				
Ymin Ymax				
Xmin Xmax				
Hmin Hmax				
H(NX,1)	H(NX,2)	H(NX,3)	H(NX,NY)
H(NX-1,1)	H(NX-1,2)	H(NX-1,3)	H(NX-1,NY)
H(NX-2,1)	H(NX-2,2)	H(NX-2,3)	H(NX-2,NY)
.....
H(2,1)	H(2,2)	H(2,3)	H((2,NY)
H(1,1)	H(1,2)	H(1,3)	H((1,NY)

Figura 3. 4 Estructura de archivo de batimetría

Donde:

- DSAA Es un texto que necesita SURFER para identificar el fichero tipo grd.
- NX Es el número de filas
- NY Es el número de columnas
- Xmin Es la coordenada en x donde empieza la batimetría
- Xmax Es la coordenada en x donde termina la batimetría
- Ymin Es la coordenada en y donde empieza la batimetría
- Ymax Es la coordenada en y donde termina la batimetría
- Hmin Es la profundidad mínima
- Hmax Es la profundidad máxima
- H (i, j) Es la profundidad de la celda (i, j).

Nota: las cotas batimétricas son negativas y las cotas topográficas tienen signo positivo

3.3.2 Descripción de los archivos de salida

Una vez ejecutado, el programa WAPO_v4 resuelve la ecuación modificada de la pendiente suave y genera dos archivos correspondientes a la amplitud máxima, y superficie libre instantánea para cada caso ejecutado.

3.3.2.1 Archivo de resultados con la amplitud máxima

Es un archivo con extensión *.grd en formato ASCII y compatible con cualquier versión de SURFER. Su nombre se escribe como "CLAVECASOAMP.grd". La estructura de este archivo se muestra a continuación en la figura 3.5.

```

DSAA
NY,NX
0.,(NY-1.)*DY
0.,(NX-1.)*DX
ALTMl, ALTMA
A(NX,1) A(NX,2) A(NX,3) .....A(NX,NY)
A(NX-1,1) A(NX-1,2) A(NX-1,3) ..... A(NX-1,NY)
A(NX-2,1) A(NX-2,2) A(NX-2,3) ..... A(NX-2,NY)
.....
A(2,1) A(2,2) A(2,3).....A((2,NY)
A(1,1) A(1,2) A(1,3).....A((1,NY)
    
```

Figura 3. 5 Estructura de archivo de resultados con amplitud máxima

Donde:

- ALTMl Es la altura de ola mínima en el dominio
- ALTMA Es la altura de ola máxima en el dominio
- NX Es el número de celdas en la dirección x
- NY Es el número de celdas en la dirección y
- DX Es el tamaño de celda en dirección x
- DY Es el tamaño de celda en dirección y
- A (i, j) Es la altura de ola local.

3.3.2.2 Archivo de resultados con la superficie libre instantánea

Es un archivo con extensión *.grd en formato ASCII y compatible con cualquier versión de SURFER. Su nombre se escribe como "CLAVECASOSUP.grd". La estructura de este archivo se muestra a continuación en la figura 3.6.

```

DSAA
NY,NX
0.,(NY-1.)*DY
0.,(NX-1.)*DX
SMl, SMA
S(NX,1) S(NX,2) S(NX,3) .....S(NX,NY)
S(NX-1,1) S(NX-1,2) S(NX-1,3) ..... S(NX-1,NY)
S(NX-2,1) S(NX-2,2) S(NX-2,3) ..... S(NX-2,NY)
.....
S(2,1) S(2,2) S(2,3).....S((2,NY)
S(1,1) S(1,2) S(1,3).....S((1,NY)
    
```

Figura 3. 6 Estructura de archivo de resultados con la superficie libre instantánea

Donde:

- SMI Es la superficie libre instantánea de ola mínima en el dominio
- SMA Es la superficie libre instantánea de ola máxima en el dominio
- S (i, j) Es la superficie libre instantánea de ola local.