Anexo 1

Teoría lineal

Anexo 1. Teoría lineal

Las perturbaciones presentes en la superficie libre del mar se traducen en variaciones de la elevación de la superficie libre en el tiempo y el espacio. Dichas perturbaciones se propagan en un fluido viscoso sobre un fondo irregular de permeabilidad variable. En general, la propagación de oleaje en un fluido es movimiento oscilatorio no lineal, sin embargo se puede simplificar su análisis físico y matemático para conocer sus características cinemáticas y dinámicas con algunas consideraciones:

- Las fuerzas principales responsables del movimiento ondulatorio son las de gravedad y las producidas por las diferencias de presión.

- Fluido no viscoso. En virtud que los efectos viscosos solo son significativos en las proximidades de los contornos, y para el movimiento oscilatorio el espesor de la capa limite es del orden de milímetros, por lo que se puede aceptar que la viscosidad es propiamente nula y no hay tensiones tangenciales.

- El movimiento oscilatorio puede suponerse irrotacional.

- Fluido incompresible y homogéneo. El agua puede tratarse como un fluido casi incompresible.

- La presión en la superficie libre del mar es uniforme y constante.

- No existe interacción del oleaje con ningún otro movimiento marino.

- El efecto de Coriolis.

- El fondo se tomara fijo e impermeable.

- Amplitud de onda pequeña respecto a la profundidad e invariable en tiempo y espacio.

- Ondas de gran longitud respecto a su amplitud.

- El periodo es constante.

Condiciones de contorno

Condición de contorno cinemática

Para encontrar una expresión que represente una condición cinemática de contorno puede emplearse la ecuación que describe dicho contorno, considérese entonces que cualquier superficie fija o móvil puede ser expresada como:

$$F(x, y, z, t) = 0 \qquad \text{Ec. 1}$$

La dependencia del tiempo se incluye ya que el fenómeno físico en estudio, una onda propagándose en el agua, así lo manifiesta. Esto conlleva a que la derivada total de la superficie con respecto al tiempo sea cero, esto es:

$$\frac{DF(x,y,z,t)}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} + w\frac{\partial F}{\partial z}\bigg|_{F(x,y,z,t)=0} = 0 \qquad \text{Ec. 2}$$

Lo cual también puede escribirse como:

$$-\frac{\partial F}{\partial t} = \overline{u} \cdot \nabla F = \overline{u} \cdot n\left|\nabla F\right| \qquad \text{Ec. 3}$$

donde *n* es un vector unitario normal a la superficie libre, definido por

$$n = \frac{\nabla F}{\left|\nabla F\right|} \qquad \text{Ec. 4}$$

Reagrupando, la condición cinemática de contorno puede ser expresada como:

$$\overline{u} \cdot n = \frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{\left|\nabla F\right|} \qquad en \qquad F(x,y,z,t) = 0 \qquad \text{Ec. 5}$$

donde

$$\left|\nabla F\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} \qquad \text{Ec. 6}$$

Condición cinemática en el fondo

Si el fondo es impermeable:

$$\overline{u} \cdot n = 0 \qquad \text{Ec. 7}$$

La ecuación que describe el fondo es:

$$F(x, y) = z + h(x, y) = 0 \qquad \text{Ec. 8}$$

Sustituyendo la ecuación (8) en la ecuación (4), se obtiene:

$$n = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{\frac{\partial h}{\partial x} i + \frac{\partial h}{\partial y} j + 1k}{\sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 + 1}} \qquad \text{Ec. 9}$$

Realizando el producto punto de $\overline{u}$ por *n*, multiplicando por la raíz cuadrada del denominador se obtiene:

$$u\frac{\partial h}{\partial x} + v\frac{\partial h}{\partial y} + w = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) = 0 \quad \text{en} \quad z = -h(x, y) \qquad \text{Ec. 10}$$

donde

$$w = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\nabla_h h \cdot \nabla_h \Phi \quad \text{en} \quad z = -h(x, y)$$

$$\nabla_h = \left(\partial/\partial x, \partial/\partial y\right) \qquad \text{Ec. 11}$$

Para fondo horizontal, la ecuación (11) queda:

$$w = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \qquad \text{Ec. 12}$$

La cual es la condición de contorno cinemática en el fondo.

Condición cinemática en la superficie libre

La superficie libre del agua puede ser descrita por medio de la siguiente expresión:

$$F(x, y, z, t) = z - \eta(x, y, t) = 0 \qquad \text{Ec. 13}$$

donde η es el desplazamiento de la superficie libre del agua sobre el nivel *z*.

Sustituyendo la ecuación (13) en la ecuación (5), se obtiene la siguiente expresión:

$$\bar{u} \cdot n = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + 1}} \qquad \text{en} \qquad z = \eta(x, y, t) \qquad \text{Ec. 14}$$

Por otro lado, de sustituir la ecuación (13) en la ecuación (4), se obtiene:

$$n = \frac{-\frac{\partial \eta}{\partial x} i - \frac{\partial \eta}{\partial y} j + 1k}{\sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + 1}} \qquad \text{Ec. 15}$$

Realizando el producto punto de $\bar{u}$ por *n*, ecuación (15) e igualando con la ecuación (14), se obtiene:

$$\bar{u} \bullet n = \bar{u} \bullet \frac{\left(-\frac{\partial \eta}{\partial x} i - \frac{\partial \eta}{\partial y} j + 1k\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + 1}} = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + 1}} \qquad \text{Ec. 16}$$

operando igual que en el caso anterior se llega a:

$$w = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} \qquad \text{en} \qquad z = \eta(x, y, t) \qquad \text{Ec. 17}$$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) \qquad \text{en} \quad z = \eta(x, y, t) \qquad \text{Ec. 18}$$

La ecuación (18) es la condición de contorno cinemática de superficie libre.

Condición de contorno dinámica

La condición dinámica de superficie libre queda definida la ecuación de Bernoulli (19), la cual también puede ser expresada como se muestra en la ecuación (20).

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(u^2 + w^2\right) + \frac{p}{\rho} + gz = C(t) \qquad \text{Ec. 19}$$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^{2}+\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^{2}\right]+\frac{p}{\rho}+gz=C(t) \qquad \text{Ec. 20}$$

Cuando el movimiento es considerado irrotacional, se desprecian los términos cuadráticos, por tanto, la solución del problema consiste en determinar la función del potencial de velocidades $\Phi(x,y,z,t)$ que satisface las condiciones de contorno en la superficie libre y en el fondo.

<u>Condición de contorno mixta de superficie libre</u>

Bajo la hipótesis de fluido incompresible, la conservación de la masa se define como:

$$\nabla \cdot \overline{u} = 0 \qquad \text{Ec. 21}$$

donde

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\overline{i}+\frac{\partial}{\partial y}\overline{j}+\frac{\partial}{\partial z}\overline{k} \qquad \text{Ec. 22}$$

$$\overline{u} = (u, v, w) \qquad \text{Ec. 23}$$

La condición de irrotacionalidad en el flujo se expresa por:

$$\nabla \times \overline{u} = \overline{W} = 0 \qquad \text{Ec. 24}$$

donde $\overline{W}$ es la vorticidad del fluido.

Si el flujo es irrotacional, entonces se puede demostrar que existe una función potencial $\Phi(x,y,z,t)$, tal que:

$$\overline{u} = -\nabla \Phi \qquad \text{Ec. 25}$$

Bajo este supuesto, la expresión de la conservación de la masa se puede expresar por la ecuación de Laplace como:

$$\nabla^{2}\Phi = \frac{\partial^{2}\Phi}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}\Phi}{\partial y^{2}}+\frac{\partial^{2}\Phi}{\partial z^{2}}=0 \qquad \text{Ec. 26}$$

Para integrar esta ecuación, se deben establecer condiciones en el contorno del dominio de integración, la cuales corresponden a las condiciones cinemáticas, ecuaciones (10) y (18), y dinámica, ecuación (20), presentadas .

Para obtener una condición de contorno mixta de superficie, las ecuaciones (17) y (20) se pueden combinar, para tal efecto, primero considérese la derivada total de la ecuación (20):

$$g\frac{d\eta}{dt}=g\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}-\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}-\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)-\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)-\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right]+\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right]+$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right]-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right]$$

$$\text{en } z=\eta(x,y,t) \qquad \text{Ec. 27}$$

La cual también se puede expresar como:

$$g\left(-\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right]=0$$

$$\text{en } z=\eta\left(x,y,t\right) \qquad \text{Ec. 28}$$

Sustituyendo la ecuación (28) en (18), se obtiene:

$$g\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right]=0$$

$$\text{en } z=\eta(x,y,t) \qquad \text{Ec. 29}$$

Dado que no es posible evaluar $\eta(x,y,z,t)$ *a priori*, se puede hacer una estimación haciendo uso de una expansión en serie de Taylor, tal que:

$$\Phi=\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon^m\Phi_m \qquad \text{Ec. 30}$$

$$\eta=\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon^m\eta_m \qquad \text{Ec. 31}$$

donde ε es un parámetro pequeño que tiene que ser evaluado, y cada potencial de velocidades debe satisfacer la ecuación de Laplace (Ec. 26)

Las condiciones de contorno de superficie libre (20) y (28) se expanden en series de Taylor sobre el nivel de reposo del agua $\eta = 0$, dando como resultado:

$$\eta = -\frac{1}{g}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\eta^{m-1}}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial z^{m-1}}\left[-\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right\}\right] \quad \text{en} \quad z=0 \qquad \text{Ec. 32}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\eta^{m-1}}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial z^{m-1}}\left\{\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\left(-\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right.$$
$$\left.\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right]\right\}=0 \quad \text{en} \quad z=0 \qquad \text{Ec. 33}$$

Teoría de ondas de pequeña amplitud sobre fondo horizontal

La teoría de oleaje más simple es la teoría de ondas de pequeña amplitud, también denominada teoría de (Airy 1845) o (Stokes 1847) de primer orden. Aunque con limitaciones a su aplicabilidad, la teoría lineal es muy útil si las hipótesis de partida se cumplen:

- El fondo del mar constituye un límite horizontal, fijo e impermeable, lo que implica que la velocidad vertical a través de él es nula.
- La amplitud de onda es pequeña y su forma es invariable en el tiempo y espacio.
- Las ondas son planas (de dos dimensiones).
- La relación entre altura de ola *H* y longitud de onda *L* debe ser pequeña.

La teoría de ondas de pequeña amplitud es esencialmente una teoría lineal, los términos de inercia convectivos no lineales son considerados pequeños. Es llamada teoría de pequeña amplitud porque las ecuaciones son teóricamente exactas cuando el movimiento tiende a cero. Esta hipótesis es útil porque la elevación de la superficie libre puede ser despreciada *a priori* y tal solución es asumida válida aunque el movimiento del oleaje sea diferente de cero.

Considérese la expansión en series de Taylor de primer orden, de una onda viajando en la dirección **x**(x,y) sobre un fondo horizontal. Entonces $\partial h / \partial x = 0$ y $\partial h / \partial y = 0$, y la expresión 10 queda:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en} \quad z = -h \qquad \text{Ec. 34}$$

Despreciando los términos de segundo orden o mayores, las condiciones de contorno de superficie libre y dinámica (32) y (33), respectivamente, son:

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\eta = 0 \qquad z = 0 \qquad \text{Ec. 35}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \qquad z = 0 \qquad \text{Ec. 36}$$

Para la condición completa del dominio de integración, es necesario definir dos condiciones laterales, las cuales dependen del problema. Si el movimiento del fluido es armónico (con período T) y longitud de onda L, las condiciones laterales se reducen a una condición de periodicidad. Por ejemplo, para la propagación en el plano **x** es:

$$\Phi(\mathbf{x}, z, t) = \Phi(\mathbf{x} + L, z, t) \qquad \text{Ec. 37}$$

donde $\mathbf{x} = f(x, y)$, y la condición de periodicidad temporal puede ser considerada como una condición inicial del problema.

$$\Phi(\mathbf{x}, z, t) = \Phi(\mathbf{x}, z, t + T) \qquad \text{Ec. 38}$$

A partir de aquí, se aplica el método de separación de variables para encontrar las soluciones del problema de contorno definido por la ecuación de Laplace con las condiciones de contorno en $z = 0$, $z = -h$ y las condiciones laterales. Dado que la ecuación de Laplace no incluye derivadas temporales, el problema analizado se reduce al caso de un tren periódico T; así, la función potencial Φ se puede escribir:

$$\Phi(\mathbf{x}, z, t) = \Re[\phi^*(\mathbf{x}, z)e^{i\sigma t}] \qquad \text{Ec. 39}$$

donde $\Re$ indica la parte real de la función compleja y σ es la frecuencia angular (Ec. 40).

$$\sigma = \frac{2\pi}{T} \qquad \text{Ec. 40}$$

Con lo que la ecuación de Laplace queda ahora en función de ϕ * :

$$\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial z^2} = 0 \qquad \text{Ec. 41}$$

Es decir, en el caso y a diferencia de otras ecuaciones en derivadas parciales, la separación de la variable tiempo no ha impedido que el problema de contorno estudiado siga siendo una ecuación en derivadas parciales. Las condiciones de contorno de este problema son homogéneas para la variable z, por lo que se cumple la condición exigida para aplicar el método de separación de variables, es decir, la ecuación diferencial lineal y homogénea, con condiciones de contorno lineales y homogéneas.

Partiendo de las condiciones del problema analizado, se considera ahora la siguiente separación de variables:

$$\phi^*(\mathbf{x}, z) = \phi(\mathbf{x}) \cdot f(z) \qquad \text{Ec. 42}$$

donde ϕ (**x**) es una función todavía desconocida de las variables x e y, que se denominará potencial de velocidades plano.

Un caso particular del problema rectangular es el movimiento que se realiza en la dirección del eje x, que no está confinado en el sentido y. Este caso, que se conoce con el nombre de ondas de crestas largas, se reduce al problema en dos dimensiones (x,z). Todos aquellos dominios o regiones que no son rectangulares o circulares no admiten una separación del potencial plano ϕ (x,y). Para dichos casos, esta metodología no es válida.

Sustituyendo la descomposición de la función potencial Φ^* en la ecuación de Laplace (41) se obtiene:

$$f(z)\left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial \mathbf{x}^2}\right] + \phi(\mathbf{x})\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2} = 0 \qquad \text{Ec. 43}$$

Dividiendo la ecuación anterior por el producto ϕ (**x**) $f(z)$, resulta:

$$\frac{1}{\phi(\mathbf{x})}\left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial \mathbf{x}^2}\right] + \frac{1}{f(z)}\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2} = 0 \qquad \text{Ec. 44}$$

El primer término de la ecuación depende solamente de la variable **x**, mientras que el segundo depende solamente de *z*. Por tanto, es posible escribir la ecuación de la siguiente forma:

$$\frac{1}{\phi(\mathbf{x})}\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial\mathbf{x}^2}\right] = -\frac{1}{f(z)}\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2} = -\mathbf{k}^2 \qquad \text{Ec. 45}$$

donde **k** debe ser una constante.

Se han obtenido de esta forma dos ecuaciones:

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} - \mathbf{k}^2 \cdot f(z) = 0 \qquad \text{Ec. 46}$$

$$\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial\mathbf{x}^2}\right] + \mathbf{k}^2 \cdot \phi(\mathbf{x}) = 0 \qquad \text{Ec. 47}$$

La segunda ecuación, (47), sigue siendo una ecuación en derivadas parciales, que se conoce con el nombre de ecuación de Helmholtz. La constante se ha expresado -$\mathbf{k}^2$ porque, como se verá más adelante, de esta forma se obtiene para $\mathbf{k}^2 > 0$ una dependencia en **x** que no es oscilatoria, sino exponencial (o decreciente con la profundidad). Sin embargo, más adelante se considerarán los casos $\mathbf{k}^2 < 0$ y en ellos el movimiento en *z* será oscilatorio, lo cual corresponde a los llamados modos evanescentes.

Con la separación anterior se ha obtenido un problema de contorno homogéneo con condiciones de contorno homogéneas en *z*, ecuación (46). Aplicando las condiciones de contorno establecidas en las ecuaciones (34) y (36), resulta:

$$\frac{\partial\phi^*}{\partial z} = \phi\frac{df(z)}{dz} = 0; \qquad \frac{df(z)}{dz} = 0 \qquad z = -h \qquad \text{Ec. 48}$$

$$\frac{\partial\phi^*}{\partial z} - \frac{\sigma^2}{g}\phi^* = \phi\left[\frac{df(z)}{dz} - \frac{\sigma^2}{g}f(z)\right] = 0; \qquad \frac{df(z)}{dz} - \frac{\sigma^2}{g}f(z) = 0 \qquad z = 0 \qquad \text{Ec. 49}$$

<u>Separación de la variable profundidad</u>

En la Tabla A1 - 1 Posibles soluciones a la ecuación de Lapalce, basados en la tácnica de separación de variables, Dean y Dalrymple (1984)
se presentan las posibles soluciones que tiene la ecuación de Laplace. De estas, se obvia la correspondiente a $\mathbf{k}^2 = 0$, dado que la solución sería trivial. Para incluir las soluciones imaginaria y real en una sola, la primera se puede expresar como la correspondiente a $\mathbf{k}^2 > 0$, se define, entonces:

$$\mathbf{k}^2 = -\mu^2 \qquad -\mu^2 > 0 \qquad \text{Ec. 50}$$

Con ello la solución se puede escribir:

$$f(z) = A\cos(\mu z) + B\,\text{sen}(\mu z) = A\cos(i\mathbf{k}z) + B\,\text{sen}(i\mathbf{k}z) = Ae^{\mathbf{k}\mathbf{z}} + Be^{-\mathbf{k}\mathbf{z}} \qquad \text{Ec. 51}$$

$\mathbf{k}^2 > 0$	$\mathbf{k}^2 = 0$	$\mathbf{k}^2 < 0, \quad \mathbf{k} = i\lvert\mathbf{k}\rvert$ $\lvert\mathbf{k}\rvert = \text{magnitud de } \mathbf{k}$
$\frac{d^2X}{d\mathbf{x}^2} + \mathbf{k}^2 X = 0$	$\frac{d^2X}{d\mathbf{x}^2} = 0$	$\frac{d^2X}{d\mathbf{x}^2} - \lvert\mathbf{k}\rvert^2 X = 0$
$X(\mathbf{x}) = A\cos\mathbf{kx} + B\,\text{sen}\,\mathbf{kx}$	$X(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + B$	$X(\mathbf{x}) = Ae^{\lvert\mathbf{k}\rvert x} + Be^{-\lvert\mathbf{k}\rvert\mathbf{x}}$
$\frac{d^2Z}{dz^2} - \mathbf{k}^2 Z = 0$	$\frac{d^2Z}{dz^2} = 0$	$\frac{d^2Z}{dz^2} + \lvert\mathbf{k}\rvert^2 Z = 0$
$Z(z) = Ce^{\mathbf{k}z} + De^{-\mathbf{k}z}$	$Z(z) = Cz + D$	$f(z) = C\cos\lvert\mathbf{k}\rvert z + D \;\; \text{sen}\lvert\mathbf{k}z\rvert$

Tabla A1 - 1 Posibles soluciones a la ecuación de Lapalce, basados en la tácnica de separación de variables, Dean y Dalrymple (1984)

Adoptando la misma estructura de solución para los casos $\mathbf{k}^2 > 0$ y $\mathbf{k}^2 < 0$, la aplicación de la condición en el fondo, ecuación (48), conduce a:

$$\mathbf{k}\left[Ae^{-\mathbf{k}h} - Be^{+\mathbf{k}h}\right] = 0 \qquad \text{Ec. 52}$$

$$A = B \cdot e^{2\mathbf{k}h} \qquad \text{Ec. 53}$$

$$f(z)=2Be^{\mathbf{k}h}\left[\frac{e^{\mathbf{k}(z+h)}+e^{-\mathbf{k}(z+h)}}{2}\right]=B'\cosh\mathbf{k}(h+z) \qquad \text{Ec. } 54$$

Sustituyendo este valor en la condición de contorno mixta en la superficie, $z=0$, ecuación (49), se obtiene:

$$B'\mathbf{k}\operatorname{senh}\ \mathbf{k}h-\frac{\sigma^2}{g}B'\cosh\mathbf{k}h=0 \qquad \text{Ec. } 55$$

o expresado de otra forma

$$\sigma^2=g\mathbf{k}\tanh\mathbf{k}h \qquad \text{Ec. } 56$$

La ecuación (56) relaciona **k**, a partir de aquí llamado número de onda, con σ y permite identificar los autovalores del problema de contorno estudiado. Conocidos estos, se está en condiciones de analizar las soluciones del problema definido por la ecuación (47). La relación de dispersión, ecuación (56), tiene una solución real e infinitas soluciones imaginarias puras, conocidos como modos evanescentes, para **k**.

<u>Condición de periodicidad espacial</u>

La ecuación (47), ahora debe de cumplir con la condición de contorno lateral dada por la condición de periodicidad espacial:

$$\phi(\mathbf{x})=\phi(\mathbf{x}+L) \qquad \text{Ec. } 57$$

El problema en **x** no tiene la estructura del problema regular de Sturm-Liouville, es decir, no tiene dos condiciones de contorno homogéneas y lineales. En este caso no se cumple el teorema por el cual a cada autovalor le corresponde una única autofunción. De hecho, en la resolución de la ecuación diferencial se obtienen dos autofunciones (seno y coseno) linealmente independientes para el mismo autovalor. Este problema se dice que es un problema singular (o no regular) de Sturm-Liouville y al cual se le pueden aplicar la mayoría de los teoremas correspondientes al problema regular, en particular el correspondiente a la ortogonalidad de las autofunciones; si bien para ello, en algunos casos, es necesario aplicar el método de ortogonalización de Gram-Schnidt.

Por conveniencia para desarrollos posteriores, la solución de $\phi(\mathbf{x})$, se escribirá en forma compleja, dada la posibilidad de aplicar el principio de superposición.

La solución adoptada en este desarrollo es:

$$\phi(\mathbf{x}) = Ae^{\pm i\mathbf{kx}} \qquad \text{Ec. 58}$$

Aplicando la condición de periodicidad, (57), se tiene:

$$e^{\pm i\mathbf{kx}} = e^{\pm i\mathbf{k}(\mathbf{x}+L)} \qquad \text{Ec. 59}$$

$$e^{\pm i\mathbf{k}L} = 1 \qquad \text{Ec. 60}$$

Dicha ecuación se puede expresar como:

$$\cos \mathbf{k}L = 1 \qquad \text{Ec. 61}$$

$$\mathrm{sen}\mathbf{k}L = 0 \qquad \text{Ec. 62}$$

por tanto,

$$\mathbf{k}L = n\pi \qquad n = 0, 2, 4, ... \qquad \text{Ec. 63}$$

Las dos soluciones iniciales, n = 0 y n = 2, corresponden a las dos primeras repeticiones del movimiento periódico, por tanto,

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L} \qquad \text{Ec. 64}$$

Solución general

De la condición dinámica en el nivel medio, $z = 0$, ecuación **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, se obtiene una relación entre el potencial total, $\Phi(\mathbf{x},z,t)$, y la superficie libre, η, dada por:

$$\eta = +\frac{1}{g}\frac{\partial \Phi}{\partial t} \qquad z = 0 \qquad \text{Ec. 65}$$

$$\eta = \Re\left[-\frac{i\sigma}{g}\cosh(\mathbf{k}h)\cdot A \cdot e^{i(\mathbf{kx}-\sigma t)}\right] \qquad \text{Ec. 66}$$

Dado que se busca una solución periódica de la superficie libre que represente una onda progresiva, se define:

$$\eta = \Re\left[ae^{i(\mathbf{kx}-\sigma t)}\right] \qquad \text{Ec. 67}$$

donde $a = H/2$ es la amplitud del movimiento y H la altura de ola.

Comparando las expresiones (66) y (67), se obtiene:

$$A = -\frac{g}{i\sigma}\frac{a}{\cosh \mathbf{k}h} \qquad \text{Ec. 68}$$

Sustituyendo (68) en el potencial resulta:

$$\Phi(\mathbf{x}, z, t) = \Re\left[-\frac{ig}{\sigma}a\frac{\cosh \mathbf{k}(h+z)}{\cosh \mathbf{k}h}e^{+i(\mathbf{kx}-\sigma t)}\right] \qquad \text{Ec. 69}$$

Finalmente, tomando el signo negativo en la exponencial se puede escribir:

$$\Phi(\mathbf{x}, z, t) = \Re\left[-\frac{ig}{\sigma}a\frac{\cosh \mathbf{k}(h+z)}{\cosh \mathbf{k}h}e^{-i(\mathbf{kx}-\sigma t)}\right] \qquad \text{Ec. 70}$$

La ecuación (70) es la solución general del potencial de velocidades para una onda propagándose sobre un fondo horizontal. A partir de esta ecuación se derivan las llamadas propiedades ingenieriles de la teoría lineal, que son las expresiones con las que se determinan las características del flujo.

La solución lineal del potencial de velocidades obtenida, permite estudiar las variables hidrodinámicas fundamentales del movimiento oscilatorio para ondas de pequeña amplitud, mismas que son la base de muchas aplicaciones en el campo de la ingeniería.

Las variables cinemáticas fundamentales son la velocidad y la aceleración. La aceleración se ha descompuesto en aceleración local y aceleraciones convectivas. Estas últimas provienen de la variación espacial del cuadrado de la velocidad, por ello, en el marco de la teoría lineal son despreciables frente a la aceleración local.

Las variables dinámicas son las fuerzas, que, en general, se descomponen en fuerzas normales y tangenciales. Los fluidos perfectos, ideales o no viscosos no tienen mecanismos para producir esfuerzos tangenciales, por ello, en teoría de ondas, en general, las variables dinámicas son las fuerzas normales por unidad de superficie o presiones.

Una vez conocido el valor de estas variables o de una combinación de ellas, se puede proceder a su integración en toda la columna de agua. De este modo se puede calcular la energía instantánea o los flujos instantáneos de masa, cantidad de movimiento y energía.

La descripción de estas variables hidrodinámicas se puede hacer desde el punto de vista Euleriano, estableciendo un punto fijo de referencia con respecto al cual se estudia como es el movimiento, bien mediante una descripción Lagrangiana, analizando el comportamiento del fluido siguiendo el movimiento de una partícula.

Aplicando dichas descripciones, resultan las siguientes expresiones que permiten el cálculo de los parámetros de interés que intervienen en el oleaje.

Variación de la superficie libre: $$\eta = \frac{H}{2}\cos(kx - \sigma t)$$ Ec. 71

Energía media total por unidad de superficie: $$E = \frac{1}{8}\rho g H^2$$ Ec. 72

Longitud de onda: $$L = \frac{gT^2}{2\pi}\tanh(\mathbf{k}h)$$ Ec. 73

Celeridad: $$\mathrm{C} = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}} = \frac{\sigma}{\mathbf{k}} = \frac{\mathrm{gT}}{2\pi}\tanh(\mathbf{k}\mathrm{h})$$ Ec. 74

Celeridad de grupo: $$C_g = nC = \frac{C}{2}\left(1 + \frac{2\mathbf{k}h}{\operatorname{senh} 2\mathbf{k}h}\right)$$ Ec. 75

Velocidad de las partículas:

Horizontal

$$u = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{ag\mathbf{k}}{\sigma}\frac{\cosh \mathbf{k}(h+z)}{\cosh \mathbf{k}h}\cos(\mathbf{k}x - \sigma t)$$ Ec. 76

Vertical

$$w = \frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{ag\mathbf{k}}{\sigma}\frac{\operatorname{senh} \mathbf{k}(h+z)}{\cosh \mathbf{k}h}\operatorname{sen}(\mathbf{k}x - \sigma t)$$

Aceleración de las partículas:

Horizontal Ec. 77

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} = ag\mathbf{k}\frac{\cosh \mathbf{k}(h+z)}{\cosh \mathbf{k}h}\operatorname{sen}(\mathbf{k}x - \sigma t)$$

Vertical

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} = -ag\mathbf{k}\frac{\operatorname{senh}\mathbf{k}(h+z)}{\cosh\mathbf{k}h}\operatorname{sen}(\mathbf{k}x-\sigma t)$$

Desplazamiento de las partículas: $\zeta = \int u dt = -a\frac{g\mathbf{k}}{\sigma^2}\frac{\cosh\mathbf{k}(h+z)}{\cosh\mathbf{k}h}\operatorname{sen}(\mathbf{k}x-\sigma t)$

Horizontal Ec. 78

Vertical $\xi = \int w dt = a\frac{g\mathbf{k}}{\sigma^2}\frac{\operatorname{senh}\mathbf{k}(h+z)}{\cosh\mathbf{k}h}\cos(\mathbf{k}x-\sigma t)$

Presión total:
(hidrostática + dinámica) $p = -\rho gz + \rho g\frac{\cosh\mathbf{k}(h+z)}{\cosh\mathbf{k}h}\cos(\mathbf{k}x-\sigma t)$ Ec. 79

Flujo de energía $\overline{F} = \left(\frac{1}{8}\rho gH^2\right)\frac{\sigma}{\mathbf{k}}\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{2\mathbf{k}h}{\operatorname{senh}2\mathbf{k}h}\right)\right]$ Ec. 80

Las ecuaciones anteriores se pueden simplificar, para aplicaciones de tipo ingenieril, cuando:

- $kh \rightarrow 0$, la $\tanh(kh) \rightarrow kh$, por lo tanto se dice que el oleaje se propaga en aguas relativamente someras.
- $kh \rightarrow \infty$, (p.e. la $\tanh(kh) \rightarrow 1$), por lo tanto se dice que el oleaje se propaga en aguas relativamente profundas.

Para fines prácticos, si se asume que el error máximo permisible entre la solución exacta y una aproximación debe de ser menor que el 1%, estos límites se pueden situar de la siguiente forma: para aguas someras, $kh < \pi/10$, y para aguas profundas $kh > \pi$. A continuación se presentan las aproximaciones para aguas someras, en transición y aguas profundas.

Para aguas someras

Longitud de onda : $L = T\sqrt{gh}$ Ec. 81

Celeridad: $$C = \frac{L}{T} = \sqrt{gh}$$ Ec. 82

Celeridad de grupo: $$C_g = C = \sqrt{gh}$$ Ec. 83

Velocidad de las partículas:

Horizontal $$u = a\sqrt{\frac{g}{h}}\cos(kx - \sigma t)$$

Vertical $$w = a\sigma\left(1 + \frac{z}{h}\right)\operatorname{sen}(kx - \sigma t)$$ Ec. 84

Aceleración de las partículas:

Horizontal $$a_x = a\sigma\sqrt{\frac{g}{h}}\operatorname{sen}(kx - \sigma t)$$ Ec. 85

Vertical $$a_z = -a\sigma^2\left(1 + \frac{z}{h}\right)\cos(kx - \sigma t)$$

Desplazamiento de las partículas:

Horizontal $$\zeta = -a\sigma\sqrt{\frac{g}{h}}\operatorname{sen}(kx - \sigma t)$$ Ec. 86

Vertical $$\xi = a\left(1 + \frac{z}{h}\right)\cos(kx - \sigma t)$$

Presión total: $$p = -\rho g z + \rho g \eta$$ Ec. 87

(hidrostática + dinámica)

Flujo de energía: $$\overline{F} = \left(\frac{1}{8}\rho g H^2\right)\sqrt{gh}$$ Ec. 88

Para aguas profundas

Longitud de onda : $$L = \frac{gT^2}{2\pi}$$ Ec. 89

Celeridad: $$C = \frac{gT}{2\pi}$$ Ec. 90

Celeridad de grupo:	$C_g = \dfrac{C}{2}$	Ec. 91
Velocidad de las partículas: Horizontal Vertical	$u = a\sigma e^{kz}\cos(kx - \sigma t)$ $w = a\sigma e^{kz}\,\mathrm{sen}(kx - \sigma t)$	Ec. 92
Aceleración de las partículas: Horizontal Vertical	$a_x = a\sigma^2 e^{kz}\,\mathrm{sen}(kx - \sigma t)$ $a_z = -a\sigma^2 e^{kz}\cos(kx - \sigma t)$	Ec. 93
Desplazamiento de las partículas: Horizontal Vertical	$\zeta = -ae^{kz}\,\mathrm{sen}(kx - \sigma t)$ $\xi = ae^{kz}\cos(kx - \sigma t)$	Ec. 94
Presión total: (hidrostática + dinámica)	$p = -\rho gz + \rho g\eta e^{kz}$	Ec. 95
Flujo de energía:	$\overline{F} = \left(\dfrac{1}{8}\rho gH^2\right)\dfrac{1}{2}C$	Ec. 96

Anexo 2

Tablas de resultados

Anexo 2. Tablas de resultados

Tabla A2 - 1 Alturas y periodos de ola medios (sensor 2)

Sitio	T(s)	Cama	Hm (cm)	Tm (s)	Muestra	T(s)	Cama	Hm (cm)	Tm (s)
Akumal	1.0	Plana	11.01	1.00	Pto. E	1.4	Rizos	12.28	1.41
	1.0	Rizos	10.98	1.00		1.6	Plana	11.11	1.59
	1.2	Plana	12.11	1.20		1.6	Rizos	11.14	1.58
	1.2	Rizos	11.92	1.22		1.8	Plana	11.27	1.79
	1.4	Plana	12.32	1.41		1.8	Rizos	11.37	1.79
	1.4	Rizos	12.31	1.42		2.0	Plana	11.67	2.01
	1.6	Plana	11.22	1.59		2.0	Rizos	11.92	2.01
	1.6	Rizos	11.22	1.59	Pto.10	1.0	Plana	10.70	1.00
	1.8	Plana	10.99	1.79		1.0	Rizos	10.70	1.00
	1.8	Rizos	11.11	1.78		1.2	Plana	11.83	1.21
	2.0	Plana	11.38	2.02		1.2	Rizos	11.87	1.22
	2.0	Rizos	11.66	2.01		1.4	Plana	12.19	1.40
Puerto Morelos	1.0	Plana	13.46	1.00		1.4	Rizos	12.72	1.41
	1.0	Rizos	13.43	1.00		1.6	Plana	11.28	1.58
	1.2	Plana	11.88	1.21		1.6	Rizos	11.28	1.58
	1.2	Rizos	10.29	1.21		1.8	Plana	11.64	1.79
	1.4	Plana	11.85	1.41		1.8	Rizos	11.70	1.79
	1.4	Rizos	12.03	1.41		2.0	Plana	11.73	2.00
	1.6	Plana	13.19	1.59		2.0	Rizos	11.70	2.01
	1.6	Rizos	13.45	1.59	Holbox	1.0	Plana	10.78	1.00
	1.8	Plana	10.25	1.79		1.2	Plana	11.87	1.20
	1.8	Rizos	10.32	1.81		1.2	Rizos	11.80	1.20
	2.0	Plana	11.05	2.01		1.4	Plana	12.29	1.41
	2.0	Rizos	11.30	2.03		1.6	Plana	11.25	1.59
Sian Ka'an	1.0	Plana	10.86	1.00		1.6	Rizos		
	1.0	Rizos	11.11	0.99		1.8	Plana	11.68	1.78
	1.2	Plana	11.87	1.20		1.8	Rizos	11.90	1.78
	1.2	Rizos	11.95	1.20		2.0	Plana	11.91	2.01
	1.4	Plana	12.15	1.41		2.0	Rizos	12.03	2.01
	1.4	Rizos	12.38	1.40	*Chelem*	1.0	*Plana*	10.54	1.00
	1.6	Plana	11.21	1.58		1.0	*Rizos*	10.66	1.00
	1.6	Rizos	11.30	1.58		1.2	*Plana*	11.87	1.20
	1.8	Plana	11.77	1.79		1.2	*Rizos*	11.83	1.21
	1.8	Rizos	11.63	1.79		1.4	*Plana*	11.92	1.41
	2.0	Plana	11.66	2.00		1.4	*Rizos*	11.94	1.39
	2.0	Rizos	11.59	2.00		1.6	*Plana*	11.14	1.58
Isla Mujeres	1.0	Plana	10.77	1.00		1.6	*Rizos*	11.38	1.58
	1.0	Rizos	11.15	1.00		1.8	*Plana*	10.85	1.78
	1.2	Plana	12.03	1.20		1.8	*Rizos*	10.80	1.79
	1.2	Rizos	12.09	1.20		2.0	*Plana*	11.68	2.01
	1.4	Plana	12.19	1.40		2.0	*Rizos*	12.17	2.01
	1.4	Rizos	12.14	1.41	*Bahía Tortugas*	1.0	*Plana*	10.73	1.00
	1.6	Plana	11.26	1.58		1.0	*Rizos*	10.84	1.01
	1.6	Rizos	11.41	1.58		1.2	*Plana*	11.91	1.21
	1.8	Plana	11.78	1.78		1.2	*Rizos*	12.26	1.20
	1.8	Rizos	12.29	1.78		1.4	*Plana*	12.28	1.41
	2.0	Plana	11.89	2.01		1.4	*Rizos*	12.15	1.42
	2.0	Rizos	11.85	2.01		1.6	*Plana*	11.33	1.58
Pto. E	1.0	Plana	10.51	1.01		1.6	*Rizos*	11.44	1.59
	1.0	Rizos	10.78	1.00		1.8	*Plana*	11.43	1.80
	1.2	Plana	11.76	1.20		1.8	*Rizos*	10.90	1.79
	1.2	Rizos	11.89	1.20		2.0	*Plana*	11.90	2.01
	1.4	Plana	12.02	1.41		2.0	*Rizos*	11.80	2.01

Tabla A2 - 2 Velocidades en dirección del flujo registradas por los Vectrinos										
Sitio	T(s)	Cama	Vectrino 1 cm/s				Vectrino 2 cm/s			
			U_{rms}	$U_{máx}$	$U_{mín}$	U_{med}	U_{rms}	$U_{máx}$	$U_{mín}$	U_{med}
Akumal	1.0	Plana	14.92	22.45	-31.06	-4.59	13.83	20.03	-27.06	-4.30
	1.0	Rizos	15.17	18.86	-30.41	-5.92	14.14	19.76	-27.70	-3.86
	1.2	Plana	16.59	26.24	-30.37	-3.38	17.09	30.47	-28.62	-2.92
	1.2	Rizos	16.98	25.56	-30.47	-4.90	17.41	29.83	-32.93	-3.44
	1.4	Plana	17.43	29.17	-29.81	-3.62	18.30	33.26	-26.94	0.42
	1.4	Rizos	17.71	31.48	-33.28	-4.09	18.47	33.20	-32.32	-4.17
	1.6	Plana	18.50	35.55	-29.73	-2.83	19.21	34.95	-28.92	-0.59
	1.6	Rizos	18.66	33.58	-31.15	-3.20	18.59	35.75	-32.36	-2.19
	1.8	Plana	18.27	41.35	-29.30	-2.47	18.63	37.59	-27.75	-2.16
	1.8	Rizos	18.16	29.43	-27.58	-5.25	18.52	33.29	-29.14	-4.67
	2.0	Plana	18.07	35.37	-27.23	-2.40	18.43	36.67	-26.05	-2.24
	2.0	Rizos	17.87	37.31	-26.98	-2.63	18.42	38.64	-25.85	-2.41
Puerto Morelos	1.0	Plana					14.18	19.41	-29.94	-3.68
	1.0	Rizos	14.64	21.91	-28.40	-2.44	14.06	22.66	-28.51	-1.85
	1.2	Plana	16.56	28.29	-44.41	-2.91	18.11	27.82	-35.29	-2.23
	1.2	Rizos	16.73	26.77	-33.09	-0.81	17.67	29.24	-31.22	-0.97
	1.4	Plana	17.37	29.79	-32.23	-2.90	19.31	27.09	-31.93	-6.22
	1.4	Rizos	16.45	30.84	-31.44	-2.72	18.75	32.10	-24.88	-0.74
	1.6	Plana	18.93	37.21	-27.25	0.33	19.91	35.18	-32.71	-1.92
	1.6	Rizos	17.93	27.89	-31.29	-4.83	19.68	34.25	-26.78	1.83
	1.8	Plana	18.05	38.30	-25.73	-1.49	19.87	36.49	-28.39	-2.44
	1.8	Rizos	17.54	33.03	-29.20	-2.72	18.75	32.09	-28.11	-3.74
	2.0	Plana	18.30	32.00	-30.21	-2.10	19.27	34.35	-27.19	-4.70
	2.0	Rizos	19.00	36.31	-29.00	-3.50	18.94	31.57	-28.99	-4.27
Sian Ka'an	1.0	Plana	13.72	22.23	-23.45	-0.53	13.21	22.26	-33.74	-0.73
	1.0	Rizos	14.54	19.81	-28.25	-4.66	12.85	15.88	-22.54	-2.67
	1.2	Plana	16.45	24.19	-30.16	-3.56	16.42	29.47	-30.04	-2.46
	1.2	Rizos	16.72	26.65	-29.12	-3.59	16.39	24.81	-30.21	-3.27
	1.4	Plana	16.85	32.57	-27.70	-0.77	17.94	31.48	-30.19	-2.51
	1.4	Rizos	18.00	28.92	-29.24	-4.11	17.59	30.76	-31.76	-2.41
	1.6	Plana	18.24	35.88	-29.58	-2.02	18.33	33.05	-29.57	-1.86
	1.6	Rizos	18.47	34.67	-28.75	-2.60	18.14	30.44	-30.30	-2.54
	1.8	Plana	17.73	37.41	-28.69	-2.13	17.87	35.42	-26.92	-2.35
	1.8	Rizos	17.95	30.94	-28.59	-3.66	17.45	27.61	-29.00	-4.36
	2.0	Plana	17.51	38.79	-28.61	-1.37	17.67	34.18	-22.77	-0.58
	2.0	Rizos	18.54	36.45	-28.77	-2.98				
Isla Mujeres	1.0	Plana	14.52	16.85	-25.91	-4.93	14.07	21.16	-29.82	-3.13
	1.0	Rizos	14.49	16.76	-26.49	-4.95	12.73	36.67	-29.35	-3.07
	1.2	Plana	16.15	23.94	-29.79	-3.56	17.41	25.28	-34.84	-4.84
	1.2	Rizos	16.79	23.76	-29.52	-4.99	17.79	24.50	-31.07	-5.06
	1.4	Plana	17.22	29.11	-29.46	-3.23	18.90	41.68	-31.78	-2.89
	1.4	Rizos	17.33	28.44	-28.87	-4.33				
	1.6	Plana	17.55	27.57	-27.46	-2.69	19.49	35.86	-31.18	-2.14
	1.6	Rizos	17.89	29.50	-28.62	-2.89	18.97	33.45	-31.82	-4.09
	1.8	Plana	17.44	35.30	-26.37	-2.17	18.75	36.29	-28.09	-1.11
	1.8	Rizos	17.54	36.45	-27.48	-0.62	18.16	31.47	-26.19	-1.38
	2.0	Plana	18.50	36.10	-29.00	-3.01	19.04	36.94	-26.26	-2.07
	2.0	Rizos	16.16	32.84	-23.09	-2.40				
Pto. E	1.0	Plana	14.58	22.25	-24.18	-1.63	14.19	19.18	-28.46	-1.94
	1.0	Rizos	14.85	22.63	-28.03	-2.47	13.92	21.82	-26.39	-2.05
	1.2	Plana	16.47	20.87	-29.89	-4.95	17.36	29.48	-27.92	-1.46
	1.2	Rizos	16.61	23.30	-30.31	-4.45	17.47	25.85	-34.36	-4.27
	1.4	Plana	16.91	30.75	-27.31	-0.73	19.00	32.79	-31.11	-1.96
	1.4	Rizos	17.60	29.46	-29.14	-3.65	18.92	31.23	-31.76	-3.87
	1.6	Plana	18.00	36.06	-30.27	-2.00	19.27	34.84	-31.36	-2.09

	1.6	Rizos	17.71	32.00	-27.29	-4.01	19.26	34.37	-32.72	-3.92
	1.8	Plana	17.49	35.70	-28.01	-2.13	18.81	37.51	-29.62	-3.09
	1.8	Rizos	17.83	34.01	-27.95	-1.72	18.44	33.37	-28.16	-2.68
	2.0	Plana	19.18	32.88	-28.25	-4.27	18.91	35.53	-28.86	-2.52
	2.0	Rizos	16.58	37.21	-19.78	-0.23	18.48	34.63	-27.26	-2.25
Pto.10	1.0	Plana	14.60	23.26	-28.33	-3.08	14.48	21.77	-28.33	-2.83
	1.0	Rizos	14.94	20.38	-30.04	-4.11	14.19	22.33	-29.24	-2.79
	1.2	Plana	16.02	24.99	-28.91	-2.28	17.26	29.42	-29.98	-1.99
	1.2	Rizos	16.95	29.91	-31.00	-3.42	17.82	27.52	-32.40	-3.40
	1.4	Plana	17.19	31.88	-29.02	-2.88	18.88	34.03	-32.09	-2.09
	1.4	Rizos	17.24	30.03	-33.13	-3.62	19.08	29.89	-30.94	-4.81
	1.6	Plana	18.24	35.82	-28.70	-2.39	19.36	34.22	-31.82	-2.53
	1.6	Rizos	17.75	29.19	-27.10	-3.81	18.80	32.11	-32.28	-4.57
	1.8	Plana	18.01	34.55	-27.25	-3.00	19.01	36.82	-31.05	-2.62
	1.8	Rizos	18.02	34.69	-28.01	-3.07	19.12	30.71	-28.24	-7.03
	2.0	Plana	18.82	34.46	-31.39	-4.53	18.70	36.51	-29.74	-3.01
	2.0	Rizos	18.92	37.33	-26.08	-1.12				
Holbox	1.0	Plana	14.39	22.21	-26.86	-3.99	13.71	20.70	-25.23	-1.14
	1.2	Plana	15.86	26.79	-28.07	-2.23	17.20	27.69	-31.58	-2.89
	1.2	Rizos	16.78	21.97	-29.46	-4.23	17.61	24.27	-31.96	-4.65
	1.4	Plana	17.33	28.33	-33.51	-4.05	18.83	32.67	-31.08	-2.47
	1.6	Plana	17.92	38.11	-29.83	-1.98	19.36	35.51	-31.44	-1.78
	1.6	Rizos	17.47	29.22	-26.96	-4.64	18.24	28.34	-28.92	-4.48
	1.8	Plana	17.59	38.85	-26.43	-0.95	18.92	34.54	-29.60	-2.25
	1.8	Rizos	17.56	35.25	-26.02	-2.23	19.01	44.12	-45.97	-3.02
	2.0	Plana	18.05	39.93	-28.27	-1.19	18.91	33.77	-28.57	-6.23
	2.0	Rizos	18.43	34.71	-28.36	-4.17				
Chelem	1.0	*Plana*	*14.18*	*22.17*	*-26.12*	*-4.06*	*13.73*	*20.88*	*-25.42*	*-2.28*
	1.0	*Rizos*	*14.49*	*20.75*	*-29.08*	*-4.13*	*14.04*	*17.74*	*-30.95*	*-3.93*
	1.2	*Plana*	*16.04*	*24.02*	*-27.68*	*-2.19*	*17.15*	*29.06*	*-27.44*	*-0.57*
	1.2	*Rizos*	*16.54*	*24.93*	*-30.41*	*-5.06*	*17.61*	*25.95*	*-31.36*	*-4.95*
	1.4	*Plana*	*17.06*	*29.79*	*-32.13*	*-2.93*	*18.72*	*32.51*	*-29.35*	*-1.77*
	1.4	*Rizos*	*17.40*	*33.52*	*-27.52*	*-3.03*	*18.65*	*28.77*	*-28.93*	*-4.31*
	1.6	*Plana*	*18.09*	*35.61*	*-31.70*	*-1.68*	*19.22*	*32.34*	*-32.58*	*-2.93*
	1.6	*Rizos*	*17.67*	*30.79*	*-28.42*	*-3.00*	*19.80*	*33.17*	*-33.57*	*-5.03*
	1.8	*Plana*	*17.75*	*37.33*	*-27.22*	*-2.14*	*18.70*	*32.80*	*-29.13*	*-4.59*
	1.8	*Rizos*	*17.17*	*32.90*	*-25.43*	*-3.09*				
	2.0	*Plana*	*17.04*	*38.14*	*-20.69*	*0.73*	*18.75*	*38.03*	*-30.98*	*-3.70*
	2.0	*Rizos*	*19.07*	*37.99*	*-29.76*	*-1.41*	*18.86*	*36.57*	*-26.79*	*-0.21*
Bahía Tortugas	1.0	*Plana*	*14.49*	*16.93*	*-34.75*	*-4.89*	*14.82*	*18.35*	*-30.83*	*-5.36*
	1.0	*Rizos*	*14.21*	*20.74*	*-24.60*	*-2.94*	*14.07*	*20.10*	*-27.60*	*-3.05*
	1.2	*Plana*	*16.04*	*27.51*	*-31.68*	*-2.48*	*17.65*	*30.76*	*-27.39*	*-0.14*
	1.2	*Rizos*	*17.17*	*28.70*	*-30.97*	*-3.00*	*17.90*	*28.99*	*-31.43*	*-3.13*
	1.4	*Plana*	*17.15*	*31.49*	*-31.10*	*-1.93*	*18.98*	*32.81*	*-29.93*	*-2.73*
	1.4	*Rizos*	*17.27*	*30.13*	*-30.41*	*-4.20*				
	1.6	*Plana*	*18.15*	*34.89*	*-29.24*	*-2.05*	*19.73*	*37.48*	*-28.25*	*0.25*
	1.6	*Rizos*	*17.53*	*32.37*	*-28.25*	*-2.87*				
	1.8	*Plana*	*17.66*	*37.99*	*-29.80*	*-1.96*	*19.28*	*38.10*	*-28.97*	*-2.27*
	1.8	*Rizos*	*17.49*	*32.93*	*-27.19*	*-3.28*				
	2.0	*Plana*	*18.77*	*32.70*	*-27.50*	*-3.88*	*19.09*	*39.50*	*-28.43*	*-2.24*
	2.0	*Rizos*	*18.80*	*35.90*	*-26.98*	*-2.45*				

Tabla A2 - 3 Esfuerzo cortante crítico											
Sitio	T(s)	Cama	τ_{cr}	θ_{cr}	D*	Muestra	T(s)	Cama	τ_{cr}	θ_{cr}	D*
Akumal	1.0	Plana	0.1311	0.0704	3.377	Pto. E	1.4	Rizos	0.1940	0.0387	7.731
	1.0	Rizos	0.2390	0.1283	3.377		1.6	Plana	0.2170	0.0433	7.731
	1.2	Plana	0.3116	0.1673	3.377		1.6	Rizos	0.1661	0.0331	7.731
	1.2	Rizos	0.2618	0.1406	3.377		1.8	Plana	0.3343	0.0666	7.731
	1.4	Plana	0.1283	0.0689	3.377		1.8	Rizos	0.1936	0.0386	7.731
	1.4	Rizos	0.1229	0.0660	3.377		2.0	Plana	0.3726	0.0743	7.731
	1.6	Plana	0.1508	0.0810	3.377		2.0	Rizos	0.1866	0.0372	7.731
	1.6	Rizos	0.2011	0.1080	3.377	Pto.10	1.0	Plana	0.1405	0.0216	9.964
	1.8	Plana	0.3826	0.2055	3.377		1.0	Rizos	0.1363	0.0209	9.964
	1.8	Rizos	0.1850	0.0993	3.377		1.2	Plana	0.2126	0.0326	9.964
	2.0	Plana	0.3530	0.1896	3.377		1.2	Rizos	0.1982	0.0304	9.964
	2.0	Rizos	0.1521	0.0817	3.377		1.4	Plana	0.2497	0.0383	9.964
Puerto Morelos	1.0	Plana	0.1076	0.0363	4.445		1.4	Rizos			
	1.0	Rizos	0.1391	0.0470	4.445		1.6	Plana	0.3041	0.0467	9.964
	1.2	Plana	0.2085	0.0704	4.445		1.6	Rizos	0.1700	0.0261	9.964
	1.2	Rizos	0.1814	0.0613	4.445		1.8	Plana	0.3688	0.0566	9.964
	1.4	Plana	0.3352	0.1132	4.445		1.8	Rizos	0.1573	0.0241	9.964
	1.4	Rizos	0.1830	0.0618	4.445		2.0	Plana	0.2752	0.0423	9.964
	1.6	Plana	0.5429	0.1834	4.445		2.0	Rizos	0.1609	0.0247	9.964
	1.6	Rizos	0.5146	0.1738	4.445	Holbox	1.0	Plana	0.1144	0.0148	12.232
	1.8	Plana	0.2075	0.0701	4.445		1.2	Plana	0.4943	0.0638	12.232
	1.8	Rizos	0.3272	0.1105	4.445		1.2	Rizos	0.3220	0.0416	12.232
	2.0	Plana	0.1382	0.0467	4.445		1.4	Plana	0.3059	0.0395	12.232
	2.0	Rizos	0.3980	0.1344	4.445		1.6	Plana	0.4774	0.0616	12.232
Sian Ka'an	1.0	Plana	0.1151	0.0273	6.509		1.6	Rizos	0.2247	0.0290	12.232
	1.0	Rizos	0.5094	0.1206	6.509		1.8	Plana	0.5547	0.0716	12.232
	1.2	Plana	0.3188	0.0755	6.509		1.8	Rizos	0.2888	0.0373	12.232
	1.2	Rizos	0.2788	0.0660	6.509		2.0	Plana	0.2957	0.0382	12.232
	1.4	Plana	0.3977	0.0942	6.509		2.0	Rizos	0.2478	0.0320	12.232
	1.4	Rizos	0.2677	0.0634	6.509	Chelem	1.0	Plana	0.0968	0.0168	8.826
	1.6	Plana	0.4631	0.1096	6.509		1.0	Rizos	0.1626	0.0282	8.826
	1.6	Rizos	0.1279	0.0303	6.509		1.2	Plana	0.2494	0.0432	8.826
	1.8	Plana	0.2057	0.0487	6.509		1.2	Rizos	0.1445	0.0251	8.826
	1.8	Rizos	0.2778	0.0658	6.509		1.4	Plana	0.3453	0.0599	8.826
	2.0	Plana	0.1746	0.0413	6.509		1.4	Rizos	0.3261	0.0565	8.826
	2.0	Rizos	0.2659	0.0630	6.509		1.6	Plana	0.2698	0.0468	8.826
Isla Mujeres	1.0	Plana	0.1140	0.0335	5.427		1.6	Rizos	0.1235	0.0214	8.826
	1.0	Rizos	0.0869	0.0256	5.427		1.8	Plana	0.5567	0.0965	8.826
	1.2	Plana	0.3006	0.0883	5.427		1.8	Rizos	0.1412	0.0245	8.826
	1.2	Rizos	0.1038	0.0305	5.427		2.0	Plana	0.3472	0.0602	8.826
	1.4	Plana	0.1230	0.0361	5.427		2.0	Rizos	0.7116	0.1234	8.826
	1.4	Rizos	0.2688	0.0790	5.427	Bahía Tortugas	1.0	Plana	0.0643	0.0038	25.317
	1.6	Plana	0.2669	0.0784	5.427		1.0	Rizos			
	1.6	Rizos	0.1088	0.0320	5.427		1.2	Plana	0.1395	0.0083	25.317
	1.8	Plana	0.2166	0.0637	5.427		1.2	Rizos	0.1198	0.0071	25.317
	1.8	Rizos	0.0913	0.0268	5.427		1.4	Plana	0.3106	0.0184	25.317
	2.0	Plana	0.3696	0.1086	5.427		1.4	Rizos	0.1073	0.0064	25.317
	2.0	Rizos	0.1415	0.0416	5.427		1.6	Plana	0.1719	0.0102	25.317
Pto. E	1.0	Plana	0.2274	0.0453	7.731		1.6	Rizos	0.0803	0.0048	25.317
	1.0	Rizos	0.1479	0.0295	7.731		1.8	Plana	0.2973	0.0176	25.317
	1.2	Plana	0.2092	0.0417	7.731		1.8	Rizos	0.0674	0.0040	25.317
	1.2	Rizos	0.2114	0.0422	7.731		2.0	Plana	0.1915	0.0114	25.317
	1.4	Plana	0.2100	0.0419	7.731		2.0	Rizos	0.1226	0.0073	25.317