



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

---

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN  
INGENIERÍA**

INSTITUTO DE INGENIERÍA

**CONFIABILIDAD DE LUMBRERAS REALIZADAS  
POR EL MÉTODO DE FLOTACIÓN**

**T E S I S**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**MAESTRO EN INGENIERÍA**

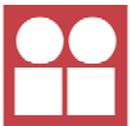
**INGENIERÍA CIVIL – GEOTECNIA**

**P R E S E N T A :**

**ING. VÍCTOR DANIEL ORDUÑO HIGUERA**

DIRECTOR DE TESIS: **DR. GABRIEL AUVINET GUICHARD**

MÉXICO D.F., CIUDAD UNIVERSITARIA  
2009



**INSTITUTO  
DE INGENIERÍA  
UNAM**

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Efraín Ovando Shelley

Secretario: Dr. Rigoberto Rivera Constantino.

Vocal: Dr. Gabriel Auvinet Guichard

1<sup>er</sup> Suplente: M.I. Agustín Deméneghi Colina

2<sup>do</sup> Suplente: M.I. Roberto Magaña del Toro

Lugar donde se realizó la tesis:

Instituto de Ingeniería de la UNAM, Ciudad Universitaria.

Tutor de tesis:

Dr. Gabriel Auvinet Guichard

---

**Firma**

**A mis padres y hermanos, por su apoyo y confianza depositada en un servidor**

## **Agradecimientos**

Mi agradecimiento al Dr. Gabriel Auvinet Guichard por la oportunidad y confianza mostrada en sus estudiantes sin distinción alguna.

Mi más profundo y sincero agradecimiento a cada uno de los invaluable profesores que conocí en esta máxima casa de estudios por compartir conmigo sus conocimientos y experiencias obtenidas en el ámbito de la ingeniería.

# CONFIABILIDAD DE LUMBRERAS REALIZADAS POR EL MÉTODO DE FLOTACIÓN

## ÍNDICE

	Pág.
<b>Resumen</b>	Vi
<b>CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN</b>	
1.1 Antecedentes	1
1.2 Objetivos	2
1.3 Alcances	2
<b>CAPÍTULO 2 CONSTRUCCIÓN DE LUMBRERAS MEDIANTE LA TÉCNICA DE FLOTACIÓN</b>	
2.1 Condiciones geotécnicas en el valle de México	3
2.2 Descripción de la técnica de flotación para la construcción de lumbreras	5
2.2.1 Principio general del método de flotación	5
2.2.2 Secuencia de construcción	7
2.2.2.1 Construcción de brocales preliminares	7
2.2.2.2 Excavación por tableros de la pantalla perimetral de lodo fraguante	7
2.2.2.3 Construcción de los brocales definitivos	8
2.2.2.4 Excavación por tableros de la zanja perimetral	9
2.2.2.5 Demolición del brocal interior y excavación del núcleo	10
2.2.2.6 Instalación de accesorios provisionales	11
2.2.2.7 Colocación del tanque metálico de flotación	12
2.2.2.8 Construcción de la losa de fondo y primera etapa de la lumbrera	12
2.2.2.9 Inmersión de la primera etapa de la lumbrera construida	13
2.2.2.10 Construcción e inmersiones de las etapas subsecuentes de la estructura de la lumbrera	13
2.2.2.11 Construcción de vigas de concreto	14
2.2.2.12 Limpieza interior de la lumbrera y desmantelamiento de instalaciones provisionales	15
2.2.3 Imágenes ilustrativas del procedimiento constructivo de lumbreras por flotación	16
2.3 Experiencias en la construcción de lumbreras flotadas	19
2.4 Características del lodo estabilizador	20
2.4.1 Definición	20
2.4.2 Tipos de lodos	21
2.4.3 Valores recomendables para lodos estabilizadores para la ciudad de México	22
<b>CAPÍTULO 3 MÉTODOS DE REVISIÓN DE ESTABILIDAD PARA LUMBRERAS FLOTADAS</b>	
3.1 Estados límites	23
3.2 Mecanismos de falla	23
3.2.1 Falla del brocal por inestabilidad superficial del suelo	23
a) Método del Elemento Finito 2D axisimétrico	24
b) Método del Elemento Finito 3D	25
3.2.2 Estabilidad de la trinchera con lodo para pantalla perimetral	25
3.2.2.1 Criterio de Nash y Jones en suelos cohesivos (1963)	25
3.2.2.2 Criterio de Aas (1976)	27

3.2.2.3 Criterio de Alberro y Auvinet (1984)	30
3.2.3 Fracturamiento del suelo	34
3.2.4 Falla del núcleo central	35
3.2.4.1 Método analítico	35
3.2.4.2 Método del Elemento Finito 2D axisimétrico	36
3.2.4.3 Método del Elemento Finito 3D	37
3.2.5 Falla por cortante de la pared o del fondo	37
3.2.5.1 Sin Muro-Pantalla	37
a) Equivalencia trinchera	37
b) Método del elemento finito 2D axisimétrico	37
3.2.5.2 Con Muro-Pantalla	38
a) Método tradicional de Skempton	38
b) Método del Elemento Finito 2D axisimétrico	39
3.2.6 Estabilidad del fondo por subpresión	40
3.2.7 Estabilidad por flotación general	43
<b>CAPÍTULO 4 SEGURIDAD Y CONFIABILIDAD</b>	
4.1 Introducción	44
4.2 Conceptos generales	44
4.3 Análisis de confiabilidad	46
4.3.1 Problema básico	46
4.3.2 Confiabilidad en el caso de variables aleatorias con distribuciones comunes	49
4.3.2.1 Distribución normal estándar	49
4.3.2.2 Distribución lognormal	50
4.3.3 Confiabilidad asociada a un estado límite	52
4.3.4 Confiabilidad de sistemas	55
4.3.4.1 Modos de falla múltiple	55
4.3.4.2 Fronteras de probabilidad	57
4.4 Métodos de cálculo	57
4.4.1 Introducción	57
4.4.2 Métodos de primer orden y segundos momentos	58
4.4.2.1 Método estándar	60
4.4.2.2 Métodos avanzados	61
4.4.3 Método de simulación de Monte Carlo	64
4.4.3.1 Generación de números aleatorios	64
4.4.3.2 Números aleatorios con distribución uniforme estándar	66
4.4.3.3 Cálculo de la confiabilidad	67
4.4.3.4 Tamaño de la muestra y error de simulación	67
4.4.4 Método de estimación puntual de Rosenblueth	68
4.4.4.1 Función univariable	68
4.4.4.2 Función multivariable	70
<b>CAPÍTULO 5 APLICACIÓN A LUMBRERAS REALIZADAS POR FLOTACIÓN</b>	
5.1 Planteamiento del análisis	72
5.2 Características geométricas y mecánicas de la lumbrera	73
5.3 Variables aleatorias y de control	75
5.4 Aplicación del método de estimación puntual al diseño de lumbreras	75
5.5 Resultados de los análisis realizados	79
5.5.1 Análisis del núcleo central	79
5.5.2 Análisis de la falla de fondo general por cortante	80
a) Con muro-pantalla perimetral	80
b) Con doble muro-pantalla perimetral	81
5.5.3 Análisis de la falla de fondo por subpresión	83
a) Considerando presión hidrostática del agua	83

b) Considerando presión hidrostática del lodo estabilizador	84
5.5.4 Análisis de la falla por flotación	85
a) Considerando 100 % adherencia entre fuste de la lumbrera y el suelo	85
b) Considerando 75 % adherencia entre el fuste de la lumbrera y el suelo	85
c) Considerando 50 % adherencia entre el fuste de la lumbrera y el suelo	86
5.5.5 Evaluación de la confiabilidad del sistema	87
<b>CAPÍTULO 6 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES</b>	89
Anexo A. Ejemplo ilustrativo, Plaxis 2D axisimétrico	91
Bibliografía y referencias	99



variable uniforme estándar U	65
Fig. 4.13 Relación entre u y x	65
Fig. 4.14 Discretización de la función de densidad de V en dos puntos	68
Fig. 4.15 Principio del método de estimación puntual de Rosenblueth	69
Fig. 5.1 Esquema de construcción de las fases del método de flotación	72
Fig. 5.2 Modelación axisimétrica de lumbrera mediante Plaxis 2D	73
Fig. 5.3 Modelación lumbrera mediante los estados límites subpresión y flotación	74

### ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2.1 Valores promedios típicos de propiedades índices en la zona del lago (Perforación Pc-28, Marsal, 1975)	4
Tabla 2.2 Valores recomendables para lodos estabilizadores para la ciudad de México	22
Tabla 2.3 Valores comunes de viscosidad de Marsal	22
Tabla 4.1 Comparación entre el número de incógnitas y de ecuaciones correspondientes, en función del número de variables aleatorias n (Bolle, 1988)	71
Tabla 5.1 Valores utilizados en plaxis 2D axisimétrico	73
Tabla 5.2 Valores puntuales de las variables aleatorias para el núcleo central	75
Tabla 5.3 Valores puntuales de las variables aleatorias para la falla general del fondo por cortante	76
Tabla 5.4 Valores puntuales para el estado límite de subpresión	77
Tabla 5.5 Valores puntuales para el estado límite de flotación	78
Tabla 5.6 Resumen de los índices de confiabilidad y probabilidades de falla de cada etapa constructiva	87
Tabla 5.7 Probabilidades de falla del sistema para diferentes condiciones sin considerar el núcleo	88

## RESUMEN

Este trabajo analiza la confiabilidad asociada a los principales límites de falla a los que están expuestas las lumbreras construidas por el método de flotación. Este tipo de método se utiliza para la construcción de lumbreras de acceso a los túneles realizados en suelos blandos como los del valle de México. Se describe este método constructivo y se estudian los principales estados límites de falla a los que están expuestas dichas lumbreras, como son: falla del núcleo central, falla de fondo general por cortante, falla por subpresión y falla por flotación. Los dos primeros estados límites se evalúan mediante el método de elemento finito (MEF), utilizando el programa Plaxis 2D axisimétrico; los estados límites de subpresión y flotación se calculan por medio del método de equilibrio límite (MEL) considerando las fuerzas actuantes y resistentes definidas en el modelo geomecánico de la lumbrera. Para el cálculo de la confiabilidad de cada etapa constructiva es necesario evaluar la probabilidad de falla para cada estado límite, para ello se requiere encontrar los valores del factor de seguridad con las propiedades geomecánicas de la lumbrera modelo; después, mediante el método de estimación puntual de Rosenblueth se calculan los parámetros estadísticos (media, varianza, desviación estándar y el índice de confiabilidad) de tal factor de seguridad, para finalmente evaluar la probabilidad de falla mencionada, así como la probabilidad de falla del sistema.

Los resultados obtenidos de estos análisis arrojan que para el núcleo central proporcionan una alta probabilidad de falla, comparado con la baja probabilidad de falla encontrada para el fondo general por cortante. Para el fondo por subpresión, la probabilidad de falla resulta significativa, especialmente si se considera la posibilidad de que el lodo induzca sobrepresiones en la capa dura, y más aún, en caso de abatir bruscamente el nivel del lodo en la excavación. Para el fondo por flotación la probabilidad de falla es despreciable, aún considerando una reducción de hasta el 50% de la adherencia del suelo a lo largo del fuste de la lumbrera. La probabilidad de falla del sistema, considerando los mecanismos de falla de fondo general por cortante, subpresión y flotación, permanece gobernada por el segundo mecanismo, especialmente si se considera que la presencia del lodo puede generar un incremento de presión en la capa dura.

## **CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN.**

### **1.1 Antecedentes.**

En el área de la geotecnia las decisiones de diseño se toman bajo un alto grado de incertidumbre. Las incertidumbres en los análisis geotécnicos provienen de:

- a) Falta de precisión en la determinación de las propiedades ingenieriles de los suelos, presiones de poro y esfuerzos in situ, basada en un número limitado de pruebas de laboratorio y/o campo.
- b) Variabilidad espacial de las propiedades del suelo.
- c) Conocimiento poco preciso de las condiciones de frontera del problema.
- d) Falta de información acerca de la magnitud y distribución de las condiciones impuestas.
- e) Aproximaciones e insuficiencias del modelo matemático utilizado en los análisis ingenieriles.

Debe mencionarse que si la incertidumbre en el modelo matemático empleado es importante, ningún refinamiento en la determinación de las propiedades del suelo mejora la calidad del análisis efectuado.

En muchos problemas geotécnicos, la principal duda recae en la determinación de la relación esfuerzo-deformación del suelo y de su resistencia ante diversas solicitaciones, además de la evaluación de la variabilidad espacial de las propiedades del suelo. Por ello, el empleo de análisis deterministas y factor de seguridad convencionales, resulta ser engañoso y puede conducir a un concepto falso de seguridad.

El diseño de las obras geotécnicas y la evaluación de su seguridad se pueden mejorar recurriendo a métodos probabilistas que tomen en cuenta el carácter incierto de la información, asignando un carácter aleatorio a los parámetros que intervienen en el diseño geotécnico y a su evolución en el espacio y tiempo. Estos métodos permiten estimar la probabilidad de falla de la obra y su complemento a la unidad, la confiabilidad.

El estudio de la confiabilidad de una obra se puede desarrollar de la siguiente forma:

- Identificando todos los mecanismos posibles de falla del sistema.
- Estableciendo, para cada mecanismo, las ecuaciones de falla en función de la resistencia de los elementos que en él intervienen y de las cargas que los solicitan.
- Seleccionando los parámetros del sistema que deben considerarse como aleatorios y definiendo la incertidumbre que los afecta.
- Y finalmente, obteniendo la confiabilidad asociada a cada función de estado límite del sistema y la confiabilidad global del mismo.

El análisis de confiabilidad no permite eliminar las deficiencias propias del modelo geomecánico elegido, por ello el estudio debe realizarse recurriendo al mejor modelo disponible.

La necesidad de un análisis de confiabilidad resulta particularmente obvia en el caso de las obras de infraestructura que se realizan en las complejas condiciones del valle de México y en particular en el caso de los túneles del sistema de drenaje profundo y de sus lumbreras de acceso.

## **1.2 Objetivos.**

El propósito de esta tesis es definir una metodología para estimar la seguridad en lumbreras realizadas por el método de flotación, evaluando los principales estados límites de falla, tales como:

- La falla del núcleo central.
- La falla de fondo general por cortante.
- La falla por subpresión.
- Y la falla por flotación.

Una vez realizados los análisis de los factores de seguridad de cada estado límite, se evaluará la confiabilidad que se tiene en cada uno de ellos por medio del método de estimación puntual de Rosenblueth, determinando la esperanza del factor de seguridad, su varianza, la desviación estándar y el índice de confiabilidad asociado a cada uno de ellos.

## **1.3 Alcances.**

En el capítulo 1 se presentan los antecedentes y se pone énfasis en la importancia de optar por métodos probabilistas cuando se realizan obras ingenieriles, tales como las lumbreras de acceso para los túneles en el valle de México.

En el capítulo 2 se da una breve introducción de las condiciones geotécnicas del área urbana del valle de México. Se describe la técnica general constructiva para realizar lumbreras en el valle de México por el método de flotación, detallando la técnica empleada para la lumbrera 6 del proyecto Río de los Remedios del valle de México; así como algunas figuras ilustrativas del proceso constructivo. También se mencionan los tipos, características y valores recomendados de lodos estabilizadores para la ciudad de México.

En el capítulo 3 se exponen los principales mecanismos de falla a los que están expuestos las lumbreras realizadas por la técnica de flotación, tales como: falla del brocal por inestabilidad local del suelo, estabilidad de la trinchera con lodo para pantalla perimetral, fracturamiento del suelo, falla del núcleo central, estabilidad general del fondo por cortante, estabilidad del fondo por subpresión y estabilidad por flotación general, así como los criterios aplicables para evaluar la seguridad de cada mecanismo de falla.

El capítulo 4 menciona los conceptos generales de confiabilidad y los tipos de niveles de seguridad que existen. Se describe en qué consiste un análisis de confiabilidad, mencionando la confiabilidad de las variables aleatorias con distribuciones comunes: normal estándar y lognormal. Se muestra la confiabilidad asociada a un estado límite, confiabilidad de sistemas, modos de falla múltiples y se definen fronteras de probabilidad. Por último se describen los métodos de cálculo para encontrar la confiabilidad, tales como; el método de Segundo Momento de Primer Orden: estándar y avanzado, método de Simulación de Monte Carlo y el método de Estimación puntual de Rosenblueth.

En el capítulo 5 se presenta el planteamiento del análisis con las características geométricas y mecánicas de la lumbrera, así como las variables aleatorias y de control que se tendrán en cada estado límite de falla analizado. Se muestran los resultados encontrados al aplicar el método de estimación puntual a los estados límites de: núcleo central, fondo general por cortante, subpresión y flotación. Se realiza la evaluación de la confiabilidad del sistema, sin considerar la falla del núcleo central.

Por último, en el capítulo 6 se presentan las conclusiones y recomendaciones obtenidas en este trabajo.

## CAPÍTULO 2 CONSTRUCCIÓN DE LUMBRERAS MEDIANTE LA TÉCNICA DE FLOTACIÓN.

### 2.1 Condiciones geotécnicas en el Valle de México.

El área urbana del valle de México puede ser dividida en tres principales zonas geotécnicas (Marsal & Mazari, 1959): Lomas (Zona I), Transición (Zona II) y Lago (Zona III). La figura 2.1 muestra las tres zonas definidas en el presente reglamento de construcciones del Distrito Federal (GDF, 2004). En la zona de lomas se encuentran terrenos muy compactos pero también suelos volcánicos heterogéneos y lava. Estos materiales contrastan con la alta compresibilidad de los suelos blandos de la zona del lago. En medio de ambas, una zona de transición es encontrada; donde capas de arcilla de origen lacustre alternan con depósitos aluviales de arena distribuidos erráticamente.

Debido a la explotación de aguas subterráneas para el abastecimiento de la población y otros factores, en el curso del siglo XX, la ciudad de México en general ha sufrido un hundimiento que en algunos lugares supera los 10m. Datos recientes muestran que la tasa de subsidencia tiende a disminuir en determinadas zonas. Sin embargo, en las zonas urbanas de nuevo desarrollo, tales como el centro del lago de Texcoco y de los antiguos lagos de Xochimilco y Chalco, en el sur del valle, el proceso de consolidación está en su primera etapa y la tasa de hundimiento alcanza más de 30 cm por año.

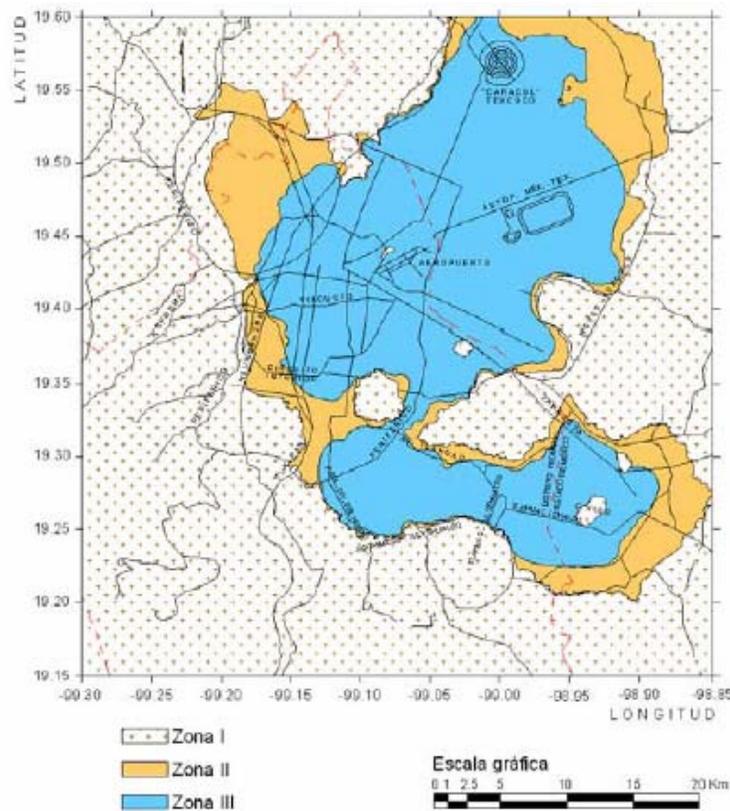
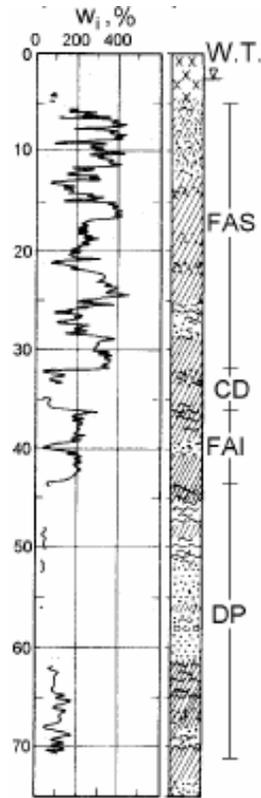


Figura 2.1 Zonificación geotécnica de la ciudad de México (GDF, NTCDDC 2004).



**Figura 2.2 Valores medios típicos de las propiedades índice de la zona del Lago. Perforación Pc 28 (Marsal, 1975).**

En la figura 2.2, un perfil típico del suelo correspondiente a la zona del Lago es presentado (Pc 28), la profundidad está en metros y el nivel de aguas freáticas está cercano a la superficie. Tres capas de arcilla son distinguidas; la primera, Formación Arcillosa Superior (FAS), la segunda, Formación Arcillosa Inferior (FAI) y la tercera conformada por los depósitos profundos (DP). Las arcillas de la FAS son separadas de la FAI por una capa dura (CD), la cual es un estrato de arena arcillosa de algunos tres metros de espesor y suele encontrarse a la profundidad de 30m a 35m. Generalmente la FAS está cubierta por una corteza disecada y/o rellenos artificiales de varios metros de espesor. Los valores medios de las propiedades índices de la perforación Pc 28 son presentados en la tabla 2.1. En algunas áreas de la zona lacustre, las arcillas pueden presentar una resistencia al esfuerzo cortante más baja que los valores indicados en la tabla 2.1, y valores promedios  $q_u = 40 \text{ kN/m}^2$  para la FAS son comunes.

PROPIEDAD	FAS	CD	FAI
Contenido de agua %	270	58	191
Límite Líquido $L_l$ , %	300	59	288
Límite Plástico $L_p$ , %	86	45	68
Densidad de Sólidos, $S_s$	2.3	2.58	2.31
Relación Inicial de Vacíos, $e_o$	6.17	1.36	4.53
Esfuerzo cortante de compresión simple $q_u$ ( $\text{KN/m}^2$ )	85	24	160

**Tabla 2.1 Valores medios típicos de propiedades índices en la zona del lago. (Perforación Pc-28; Marsal, 1975).**

## **2.2 Descripción de la técnica de flotación para la construcción de lumbreras.**

### **2.2.1 Principio general del método de flotación.**

Las lumbreras son accesos verticales o inclinados que permiten realizar todas las operaciones auxiliares en la construcción de un túnel: barrenación, poblado, tronada, ventilación, bombeo, rezaga, amacize, ademe, revestimiento, instalaciones eléctricas y de aire comprimido, traslado de equipo y acceso de personal. Pueden atravesar diferentes tipos de materiales, tales como: arcillas, tobas, andesitas, conglomerados, arenas, lahares, tobas, basalto, limolita, tezontle y marga.

Los procedimientos de construcción para lumbreras varían de acuerdo al tipo de terreno donde están construidas, y se pueden subdividir en dos grandes grupos:

- a) Lumbreras construidas en arcillas y limos.
- b) Lumbreras construidas en estratos más resistentes o roca.

En el primer grupo se encuentra el procedimiento de construcción de lumbreras flotadas. En 1969, los ingenieros Jorge Cravioto y Abel Villareal patentaron el método para construir lumbreras por flotación. Este ingenioso invento eliminó las posibilidades de falla, tanto por extrusión en juntas, como la de fondo de la excavación. Este procedimiento ha permitido construir, con seguridad y eficiencia, más de 30 lumbreras profundas en las arcillas blandas de la ciudad de México. Las dimensiones máximas han sido de 19 metros en diámetro y de 30 metros en profundidad, y los lapsos constructivos han variado entre cuatro y seis meses.

El método de flotación fue diseñado para el control de los mecanismos potenciales de falla que afectan a las excavaciones profundas en suelos muy blandos, incluidas el colapso de las paredes y el fondo de la excavación. Se propuso después de algunos problemas encontrados cuando usan otras técnicas. Las fallas por extrusión en suelos blandos a través de las juntas entre paneles contiguos de concreto colados in situ se han registrado en varios casos (moreno, 1991). La falla de fondo por cortante en excavaciones profundas es difícil controlar por otros métodos de construcción.

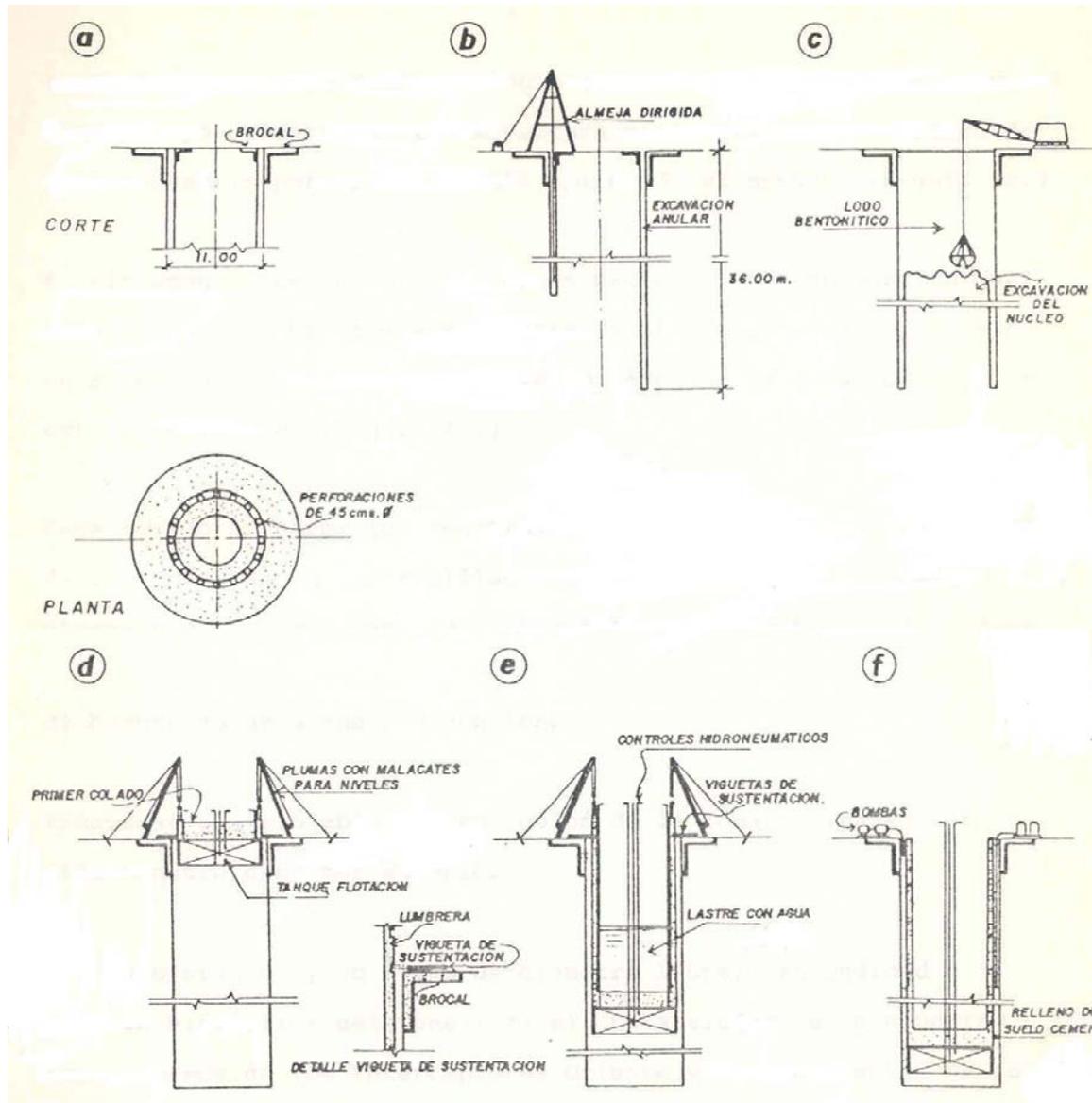
El procedimiento constructivo general del método de flotación es el siguiente:

1. Se construye un brocal de concreto armado, formado por dos coronas concéntricas que permiten excavar, con precisión, una trinchera poligonal de 10, 12, o más lados. En los vértices se hacen, con máquina y hasta la profundidad de desplante de la lumbrera, perforaciones de 45 cm de diámetro, Fig. 2.3 (a). (Actualmente, la trinchera se construye circular).
2. Las perforaciones circulares se mantienen llenas con lodo bentonítico. Con almeja (guiada, preferiblemente), se excava hasta el fondo el suelo entre dos perforaciones, por tramos alternados y ademandando, desde el principio, con lodo bentonítico, hasta concluir la excavación anular, Fig. 2.3 (b).
3. Se demuele la corona interior del brocal y se excava, con almeja, el núcleo de la lumbrera. La estabilidad de la excavación se logra manteniéndola siempre llena con lodo bentonítico recirculada y sometida, continuamente, a un control de densidad muy riguroso, Fig. 2.3 (c).
4. Se coloca en la parte superior de la excavación una estructura de acero con forma de tanque cilíndrico invertido, que funciona como cámara de aire y base para la construcción de la lumbrera. Se arma y cuela la losa de fondo y un primer tramo del muro, sujetando el conjunto, y manteniéndolo nivelado, mediante unas viguetas de acero unidas al brocal. Después del fraguado se descimbra y, luego, se inyecta aire al tanque (desplazando la bentonita de la excavación) hasta que el conjunto flote. Entonces, se le separa de las viguetas y, controlando verticalidad y nivel por medio de plumas con malacate (distribuidas perimetralmente), se sumerge lo construido (al

extraer el aire), hasta que queda en posición adecuada para ser sujetado, nuevamente, por las viguetas del brocal, Fig. 2.3 (d).

Los ciclos de colado de tramos adicionales e inmersión del conjunto flotante se repiten, hasta alcanzar la profundidad proyectada.

5. Cuando el empuje de flotación tiende a ser mayor que el peso del conjunto ya construido, la estructura se lastra con el volumen de agua necesario para poder seguir aplicando el método, Fig. 2.3 (e).
6. Finalmente, se inyecta, de abajo hacia arriba, un mortero que substituya a la bentonita remanente en el tanque y en el espacio entre el muro de la lumbrera y las paredes de la excavación, y se extrae el lastre, Fig. 2.3 (f).



**Figura 2.3 Procedimiento general constructivo de lumbrera flotada (Moreno, 1991).**

Existen diferentes variantes del método. En este trabajo se describirá el método empleado para la construcción de la lumbrera 6 del proyecto Túnel Río de los Remedios en el Valle de México.

## 2.2.2 Secuencia de construcción.

Las distintas etapas del procedimiento constructivo son las siguientes:

### 2.2.2.1 Construcción de brocales preliminares.

Se construyen los brocales interior y exterior preliminares, mediante dos polígonos, concéntricos de lados iguales (19 a 25 lados), de acuerdo al proyecto. La franja anular entre ellos conforma la pantalla perimetral de lodo fraguante. Para control se numeran los lados de los polígonos, ver figuras 2.4 y 2.5.

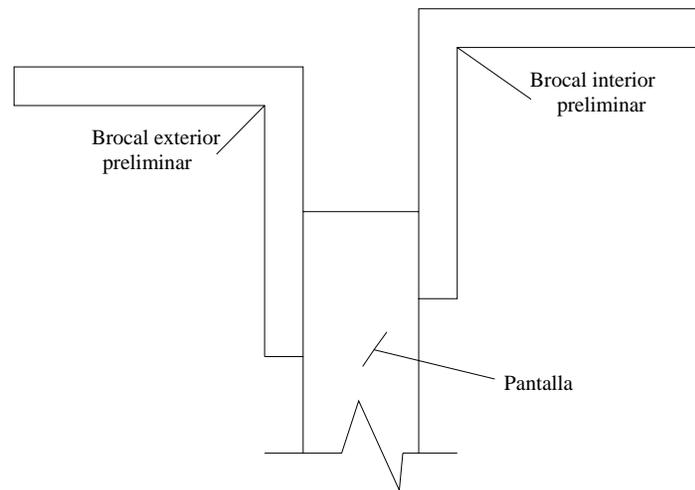


Figura 2.4 Vista en corte de brocales para la construcción de la pantalla

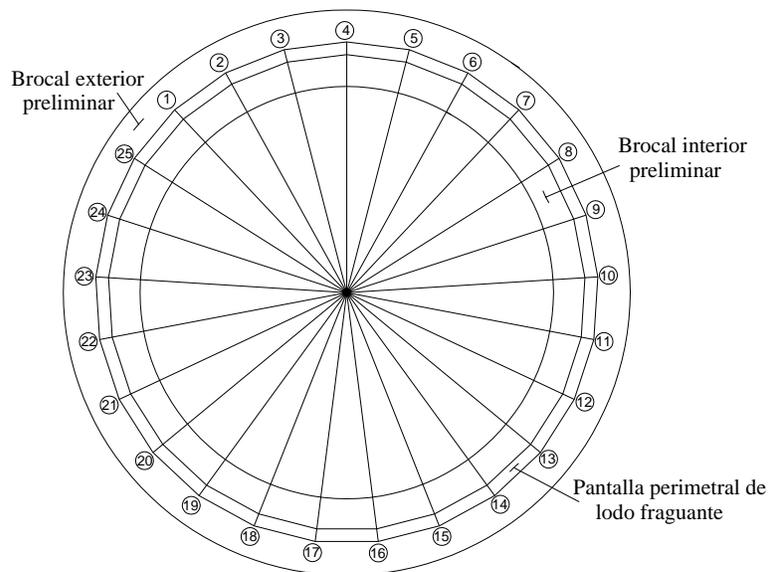


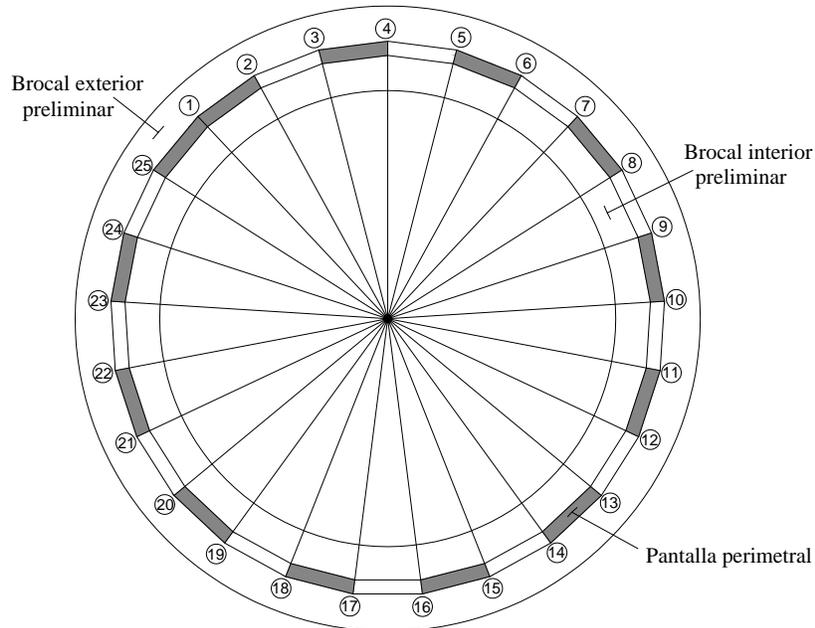
Figura 2.5 Vista en planta de brocales para la construcción de la pantalla

### 2.2.2.2 Excavación por tableros de la pantalla perimetral de lodo fraguante.

Se inicia la excavación de la zanja anular en todo el perímetro para conformar la pantalla de lodo fraguante, ver figura 2.6, actualmente se realiza mediante un equipo guiado, aunque en un inicio del método se utilizaba una almeja libre.

Conforme avance la excavación, el volumen extraído se reemplaza por lodo autofraguante para estabilizar las paredes de corte del suelo, conservando en todo el momento el nivel del espejo del lodo a no más de 0.50 metros por debajo del nivel de brocales. El lodo debe cumplir con las especificaciones de proyecto.

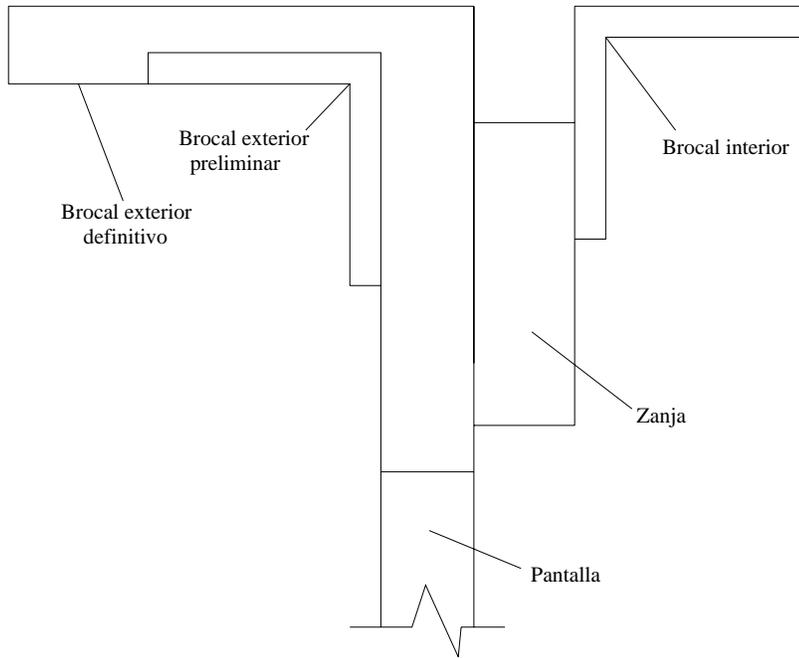
Terminada la excavación hasta la profundidad de proyecto, debe retirarse el azolve del fondo. El lodo permanece en la excavación para permitir su fraguado. La excavación se efectúa avanzando por tableros individuales, correspondiendo cada tablero a cada lado de los polígonos de los brocales. La secuencia de la excavación se hace de manera que no se excaven tableros contiguos a los excavados previamente en los que el lodo aún no alcance una resistencia mínima de  $3 \text{ kg/cm}^2$ .



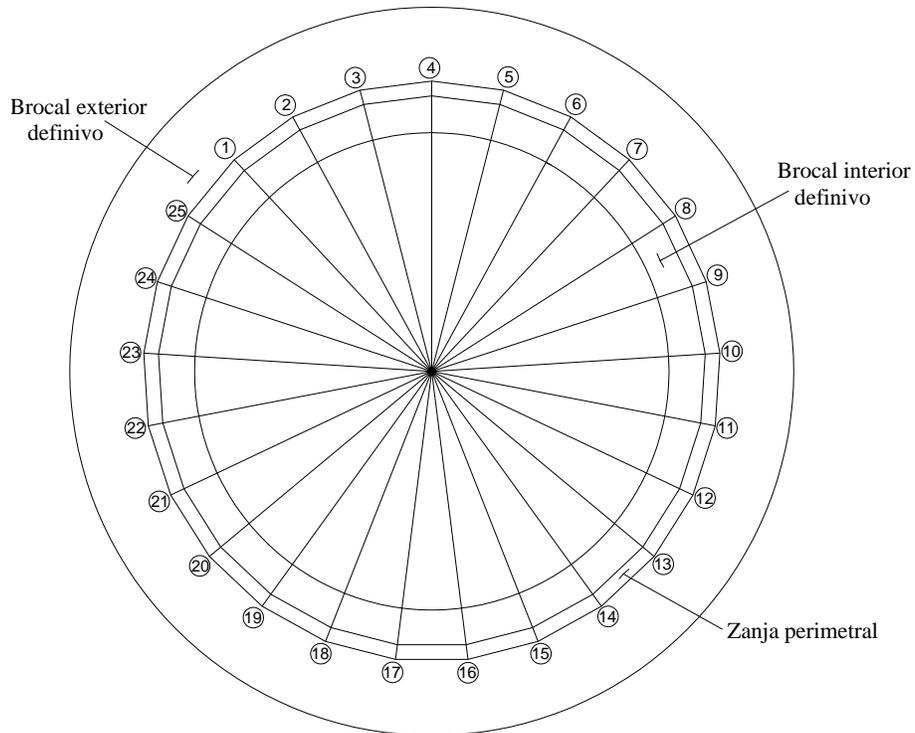
**Figura 2.6** Excavación por tableros de la pantalla perimetral

### 2.2.2.3 Construcción de los brocales definitivos.

Se realiza la construcción de los nuevos brocales para conformar la zanja perimetral; límite de la excavación de la lumbrera. Para ello, se demuele el brocal interior utilizado para la excavación de la pantalla perimetral de lodo fraguante. Los nuevos brocales igualmente se conforman mediante polígonos concéntricos conforme a lo que se indique en el proyecto, ver figuras 2.7 y 2.8.



**Figura 2.7 Vista en corte de brocales para la construcción de la zanja perimetral**

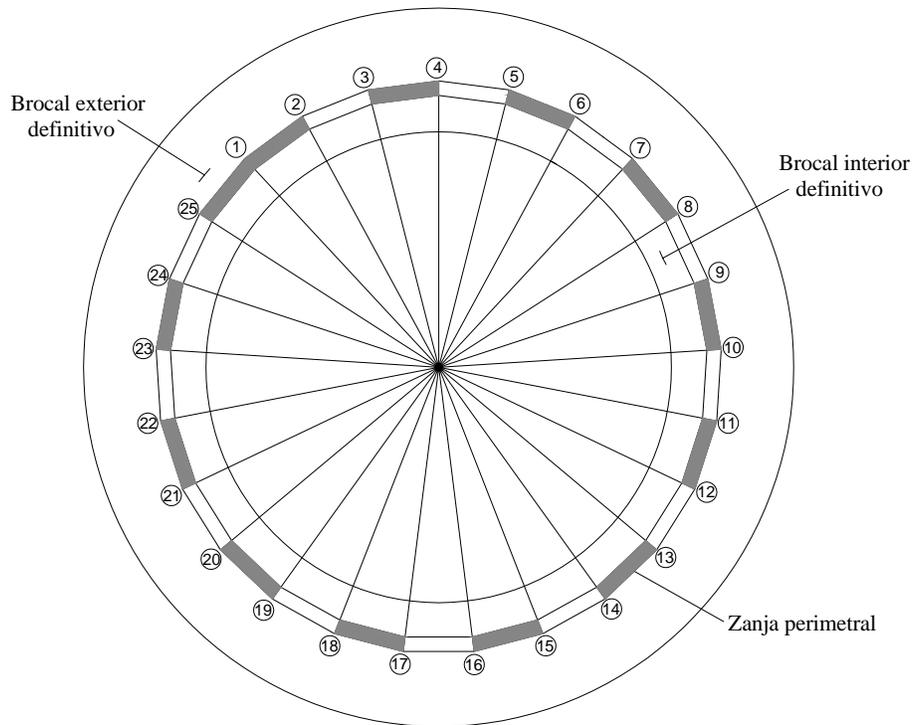


**Figura 2.8 Vista en planta de brocales para la construcción de la zanja perimetral**

#### 2.2.2.4 Excavación por tableros de la zanja perimetral.

Se inicia la excavación de la zanja perimetral de la lumbrera mediante un equipo guiado, avanzando con cada uno de los lados del polígono en forma alternada, hasta la profundidad de proyecto y hasta completar la zanja, ver figura 2.9.

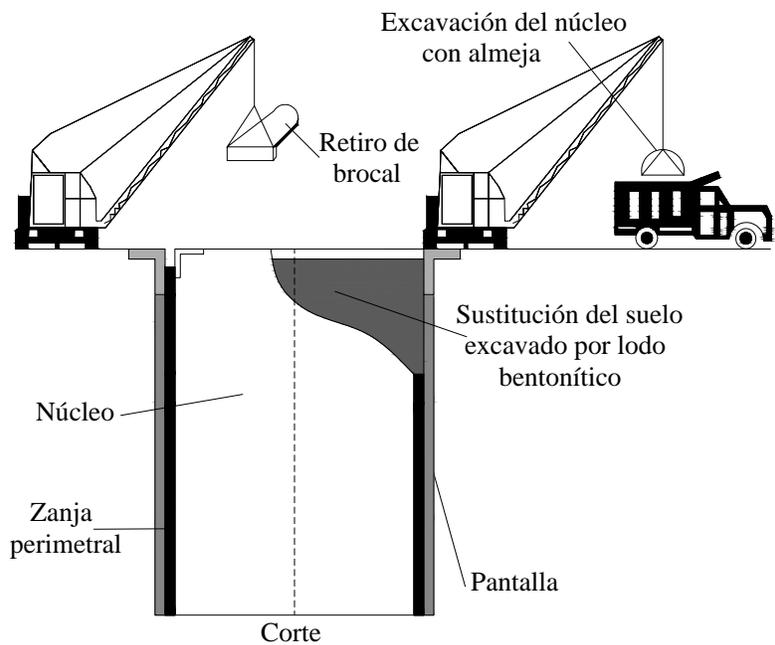
La excavación se estabiliza con lodo bentonítico que se agrega para reemplazar el volumen excavado conforme se avanza, manteniendo siempre las características del lodo, conforme a las especificaciones del proyecto ejecutivo. En todo momento debe mantenerse el nivel del espejo del lodo a no más de 0.50 m de profundidad respecto al nivel de brocales.



**Figura 2.9 Vista en planta de excavación por tableros de la zanja perimetral**

#### 2.2.2.5 Demolición del brocal interior y excavación del núcleo.

Se demuele el brocal interior y se empieza a excavar el núcleo utilizando una almeja libre, se utiliza lodo bentonítico como ademe, aplicado conforme se avanza, sustituyendo el volumen excavado de suelo por lodo, conservando en todo el proceso las características del lodo y profundidad del tirante, con forme al proyecto ejecutivo, ver figura 2.10.

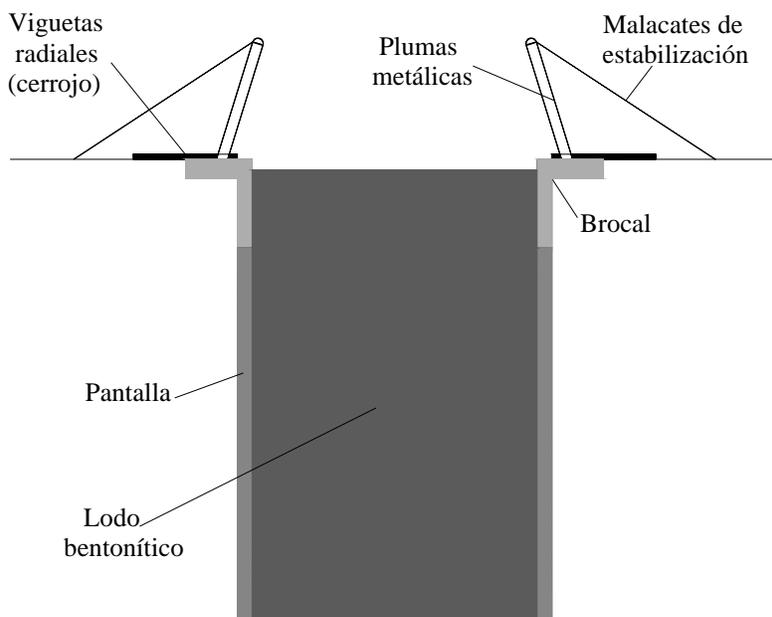


**Figura 2.10 Excavación del núcleo**

Terminada la excavación, se realiza la medición de la profundidad de la excavación en una retícula cubriendo toda el área excavada, rectificando la profundidad mediante reexcavación y extracción de azolve del fondo.

2.2.2.6 Instalación de accesorios provisionales.

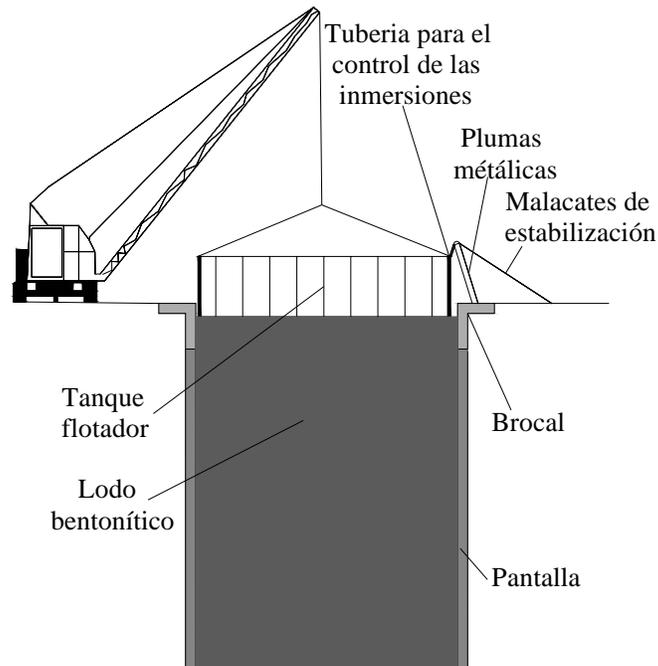
Terminado el núcleo, se realiza la instalación de plumas metálicas, malacates y viguetas cerrojo, utilizando los elementos de anclaje integrados en el brocal exterior, ver figura 2.11.



**Figura 2.11 Instalación de plumas metálicas y vigas de atraque**

### 2.2.2.7 Colocación del tanque metálico de flotación.

Se coloca el tanque metálico de flotación (estructura metálica de aproximadamente tres metros de altura) sobre la superficie del lodo de ademe de la excavación; el tanque tiene en la parte superior una tapa metálica, la cual sirve de base para desplantar la estructura de la lumbrera y su parte inferior se encuentra libre, el diámetro del tanque es similar al diámetro de la lumbrera. La colocación del tanque se realiza controlando su posición mediante las vigas de atraque y las plumas metálicas con malacates, ver figura 2.12.

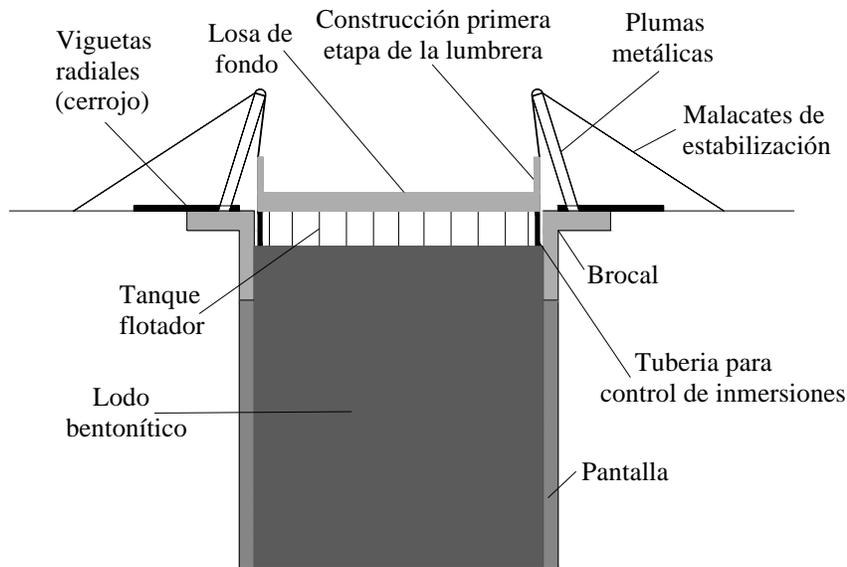


**Figura 2.12 Colocación del tanque flotador**

### 2.2.2.8 Construcción de la losa de fondo y primera etapa de la lumbrera.

A continuación, se inicia la construcción de la losa de fondo, desplantada sobre el tanque de flotación, el cual sirve como plataforma de trabajo. Una vez terminada la losa de fondo, se inicia la primera etapa de la estructura de la lumbrera, cada etapa del proceso consiste en el colado y la inmersión de la fracción construida, para ello, se extrae lodo del interior de la excavación ocupando la estructura de la lumbrera el espacio del lodo desalojado.

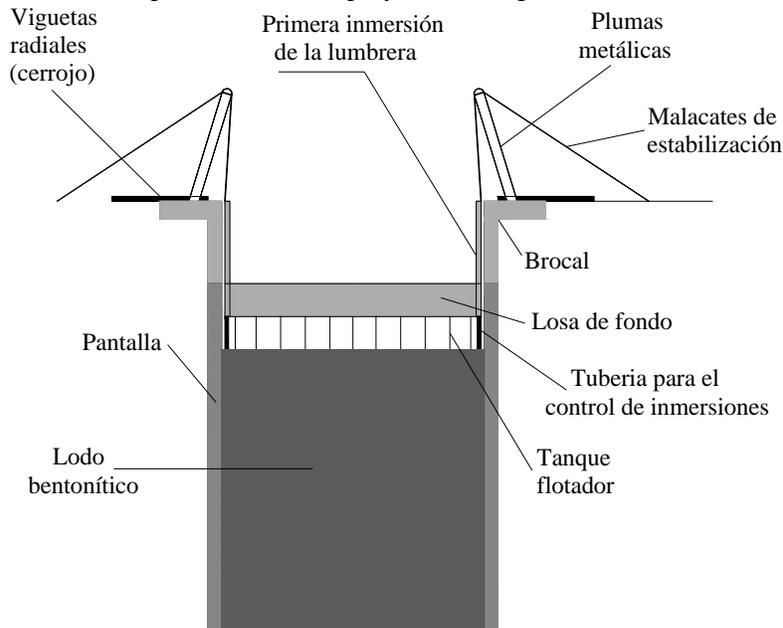
En cada etapa del proceso se construye un muro de concreto armado de aproximadamente dos metros de altura, ver figura 2.13. En el muro se instalan cajas metálicas para insertar posteriormente las vigas de atraque, así también se colocan los anclajes que sirven para conectar la estructura con las plumas metálicas.



**Figura 2.13 Construcción de la losa de fondo y la primera etapa de la lumbrera**

#### 2.2.2.9 Inmersión de la primera etapa de la lumbrera construida.

Una vez construida la primera etapa de la lumbrera, se procede a realizar la inmersión correspondiente mediante el control del volumen de lodo, para mantener permanentemente la flotación del tanque y de la estructura. Para el control del proceso de inmersión se utiliza como apoyo las plumas metálicas y los malacates. Debe mantenerse el nivel del tirante y parámetros del lodo conforme a las especificaciones de proyecto, ver figura 2.14.

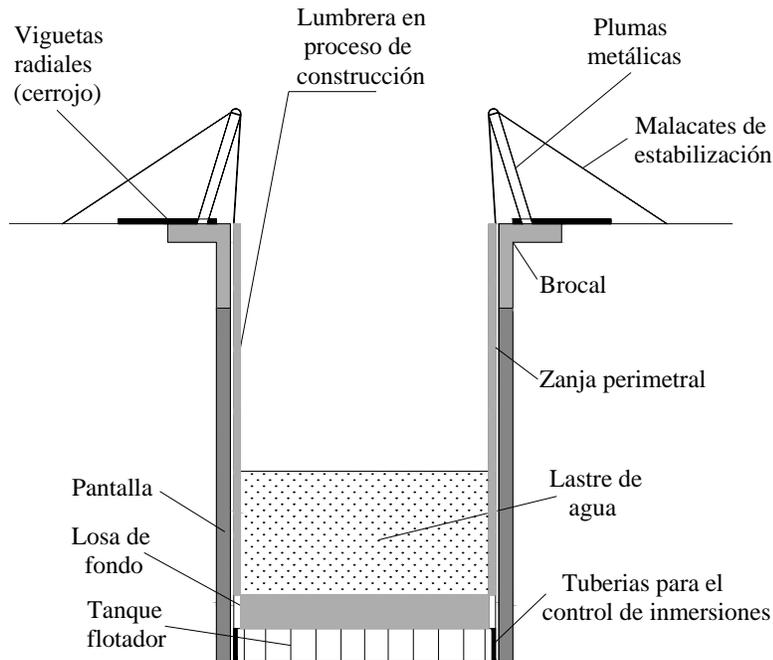


**Figura 2.14 Primera inmersión de la lumbrera**

#### 2.2.2.10 Construcción e inmersiones en las etapas subsiguientes de la estructura de la lumbrera.

Después, se procede a las etapas subsiguientes de la construcción de la estructura de la lumbrera y sus correspondientes inmersiones, ver figura 2.15, manteniendo continuamente las condiciones y características del lodo. Conforme a las instrucciones del proyecto, se aplica

lastre con agua o lodo dentro de la lumbrera, a partir de la profundidad establecida para permitir el descenso de la estructura.

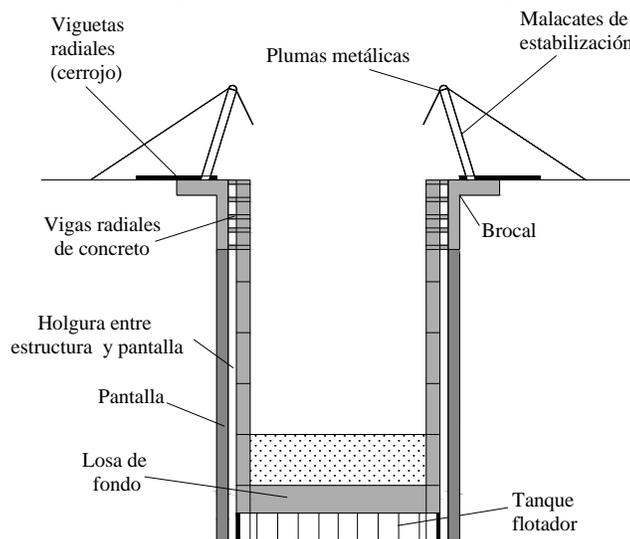


**Figura 2.15 Proceso de construcción e inmersión de etapas de la lumbrera**

Cuando se haya construido el total de la estructura de la lumbrera y se haya sumergido lo correspondiente según el proyecto, se limpia el fondo de la excavación a través de la zanja perimetral.

#### 2.2.2.11 Construcción de vigas de concreto.

Una vez terminado el ciclo de colados e inmersiones respectivas de la lumbrera, se conecta la estructura con el brocal exterior mediante unas vigas de concreto dispuestas radialmente en la periferia a manera de pasadores, la finalidad es adicionar a la lumbrera el peso del brocal, para evitar que ésta emerja del suelo después de la construcción, ver figura 2.16.



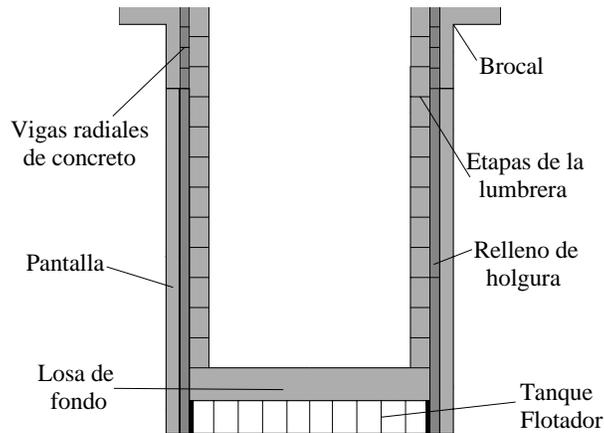
**Figura 2.16 Construcción de las vigas radiales de concreto**

Cuando el concreto de las traves radiales alcance una resistencia  $f_c = 0.85 f'_c$ , se procede a rellenar la holgura entre la estructura de la lumbrera, la pantalla perimetral y en el fondo. Para el relleno (inyección), se emplea mortero de cemento – arena – bentonita – agua, en las proporciones para una resistencia máxima de  $f'_c = 30 \text{ kg/cm}^2$ . La aplicación del relleno se efectúa de la siguiente manera: para el fondo de la excavación, se utilizan tuberías que se instalan en el tanque de flotación; para la zanja perimetral se utiliza la técnica de tubería tremie. En el proceso de esta actividad se mantiene lastrada la lumbrera.

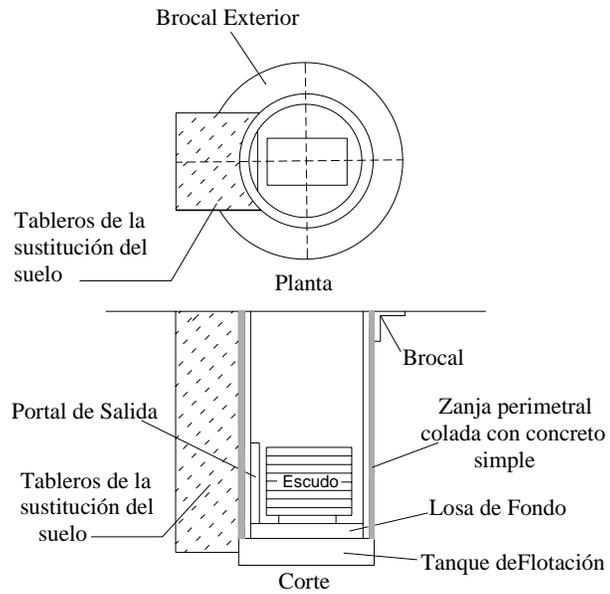
#### 2.2.2.12 Limpieza interior de la lumbrera y desmantelamiento de instalaciones provisionales.

Concluido el relleno entre la holgura de la estructura de la lumbrera, la pantalla perimetral y el fondo; y alcanzada la resistencia de proyecto, o la suficiente para impedir el desplazamiento vertical de la estructura, se retira el lastre (agua o lodo) que se colocó dentro de la lumbrera. Después se realiza la limpieza interior de la lumbrera, y por último; se retiran las instalaciones provisionales, ver figura 2.17.

En esta fase se puede construirse las estructuras adicionales requeridas dentro de la lumbrera para la excavación del túnel, como lo es el mejoramiento del suelo a la salida o llegada del túnel, ver figura, 2.18.



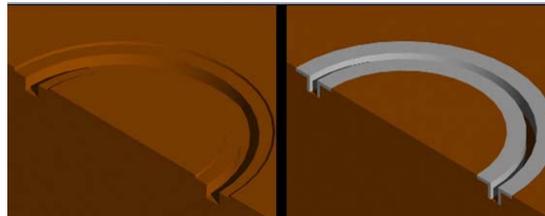
**Figura 2.17 Lumbrera terminada**



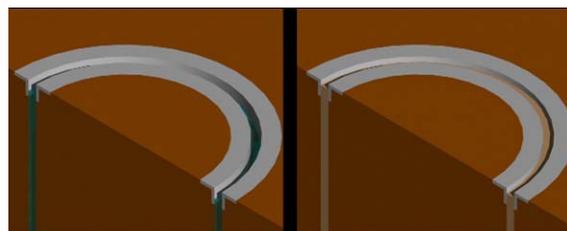
**Figura 2.18 Suelo mejorado a la salida o llegada del tunel**

2.2.3 Imágenes ilustrativas del procedimiento constructivo de lumbreras por flotación (Video grupo ICA).

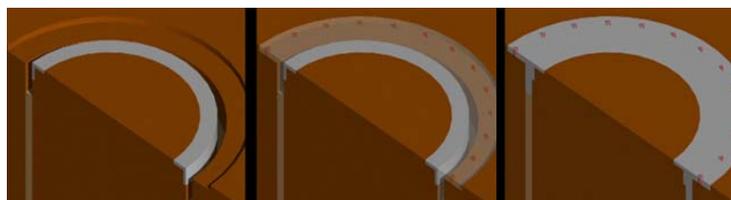
1 Excavación y construcción de brocales



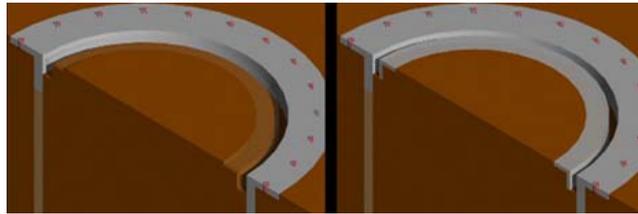
2 Construcción de la pantalla de lodo fraguante



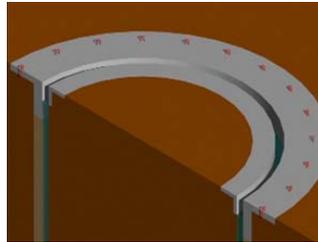
3 Construcción del brocal definitivo



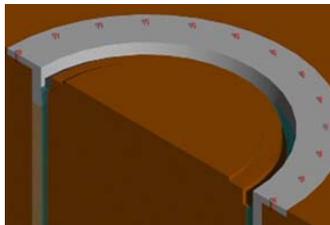
4 Reemplazo del brocal interior



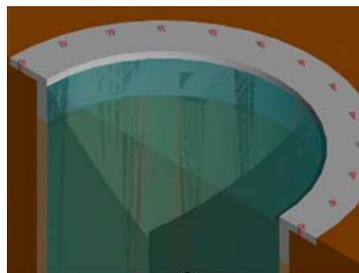
5 Excavación y adomado de la zanja perimetral



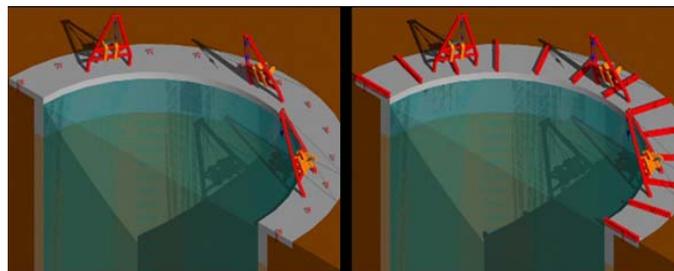
6 Demolición del brocal interior



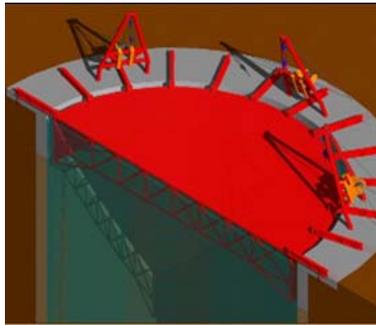
7 Excavación y adomado del núcleo



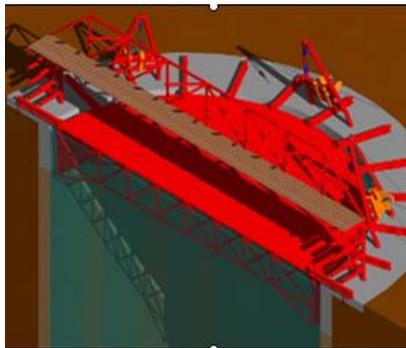
8 Instalación de plumas y viguetas- cerrojo



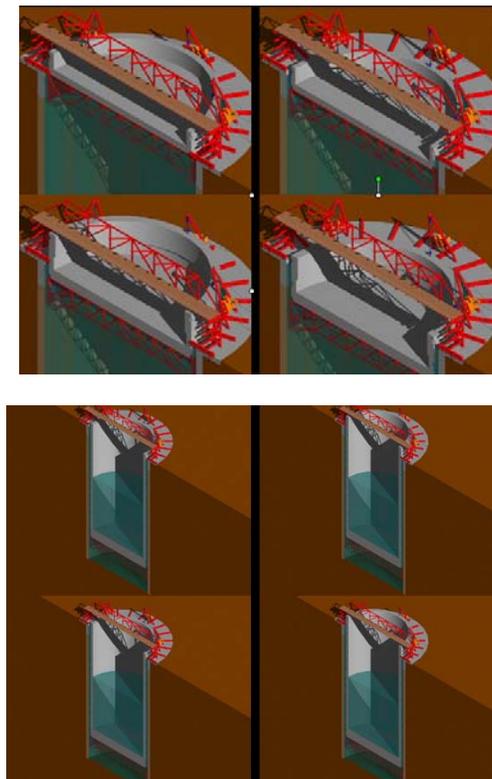
### 9 Posicionamiento del tanque flotador



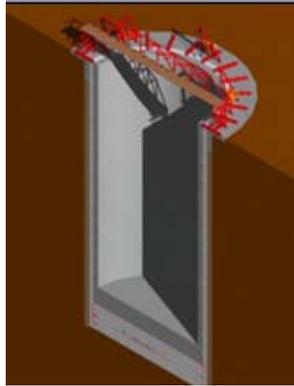
### 10 Instalación del puente auxiliar de maniobras



### 11 Ciclos de colado e inmersión



## 12 Inyección final



## 13 Desmantelamiento de instalaciones provisionales



### 2.3 Experiencias en la construcción de lumbreras flotadas.

Con la técnica de flotación, se elimina en principio toda posibilidad de falla, tanto por extrusión en juntas de muros colados en el lugar, como por falla del fondo de la excavación. Es decir, se garantiza simultáneamente la estabilidad de las paredes de la excavación y del fondo, al utilizar un fluido (p.e. lodo bentonítico) como soporte de las excavaciones durante los momentos críticos del procedimiento constructivo, con lo cual se posibilita la construcción de la losa de fondo y de los muros provisionales y/o definitivos de la lumbrera.

En la práctica, se han observado varias fallas, pero ninguna catastrófica. Durante la construcción de lumbreras del Drenaje Profundo y de las Plantas de bombeo de la DGCOH-DDF, por la técnica de flotación se presentaron problemas relacionados con la estabilidad del fondo de las excavaciones, sedimentación del suelo producto de caídos de las paredes de la excavación en el fondo, inestabilidad rotacional de la plataforma y escape de lodos de las excavaciones durante las primeras etapas de sumergimiento de lumbreras.

Un fenómeno curioso que ha sido observado en varias ocasiones es el levantamiento del núcleo al realizarse el último corte perimetral. Este fenómeno puede atribuirse al hecho de que la presión lateral transmitida por el lodo es superior al esfuerzo horizontal existente en el lugar previamente al corte.

En por lo menos tres ocasiones se ha observado la falla del núcleo durante la excavación del mismo, lo que no ha tenido mayores consecuencias ya que se pudo proceder con la excavación.

Las fallas se pueden presentar si no se mantiene un buen control de la densidad y principalmente del nivel del fluido de soporte de la lumbrera. La etapa más delicada es la excavación del núcleo. Durante esta operación, la planta de bombeo de lodos debe tener una producción suficiente de lodo de calidad adecuada en cuanto a viscosidad y contenido de arena.

En lumbreras flotadas, previamente a cualquier análisis, se debe revisar que el subsuelo del sitio donde se va a trabajar cuente con un estrato superficial suficientemente resistente para poder soportar las maniobras de la maquinaria. El brocal debe ser adecuadamente dimensionado y diseñado estructuralmente, a partir de un estudio cuidadoso de las propiedades mecánicas de los estratos más superficiales del subsuelo. Se sabe de por lo menos un caso en el que el brocal presentó una falla y se incrustó en el núcleo.

Los estratos más profundos deben estar constituidos básicamente por arcillas, debido a que un porcentaje elevado de suelos granulares impediría la estabilización con lodo. La fuga de lodos es uno de los principales factores de pérdida de control de las excavaciones.

Deben mencionarse además los problemas de sedimentación del suelo producto de caídos de las paredes de la excavación en el fondo. Para minimizar el problema de sedimentación de suelo se ha optado por construir una pared cilíndrica periférica de lodo autofraguante concéntrica a la lumbrera antes de iniciar las excavaciones.

Esta técnica complementaria, permite potencialmente:

- a) Mejorar el factor de seguridad global contra falla por cortante de las paredes.
- b) Limitar los desprendimientos locales de las paredes que obstaculizan el descenso de estructuras flotantes o de anillos.
- c) Evitar las pérdidas de lodo durante la excavación.
- d) Controlar la posibilidad de extrusión en juntas abiertas.
- e) Mejorar eventualmente el factor de seguridad contra falla de fondo.
- f) Evitar que la fricción negativa se desarrolle a largo plazo directamente sobre la estructura.

Un factor que debe ser controlado con especial cuidado es la simetría de las cargas en la plataforma flotante para evitar inestabilidad rotacional. Este tipo de problema puede ser propiciado por las preparaciones locales que se dejan en las paredes o anillos para conexión con los túneles.

## **2.4 Características del lodo estabilizador.**

### **2.4.1 Definición.**

Un lodo es una suspensión coloidal de arcilla en agua con propiedades tixotrópicas. Los lodos estabilizadores sirven para estabilizar las paredes de perforaciones o excavaciones y tienen la propiedad de formar una costra delgada en contacto con el suelo, también llamado *cake*. La acción más importante del lodo es la presión hidrostática que ejerce sobre las paredes para estabilizar la excavación, por ello, la densidad es una de sus propiedades de mayor relevancia.

Los objetivos de implementar lodos estabilizadores en las paredes de la excavación son:

- a) Equilibrar la presión horizontal del suelo.
- b) Soportar al menos una parte de la carga vertical que puede ser originada por la maquinaria o por construcciones cercanas.
- c) Actuar como una barrera impermeable para prevenir el flujo de agua o mantener su nivel en los suelos excavados.

## 2.4.2 Tipos de lodos.

### a) Lodo arcilloso espontáneo.

Se forma durante la excavación cuando se utiliza agua como fluido estabilizador, son lodos de baja viscosidad debido a la integración natural de coloides y capaces de obturar y sellar los estratos de arena y vidrio volcánico que se encuentran intercalados en los suelos arcillosos del valle de México.

### b) Lodos bentoníticos.

Se forman con una mezcla de agua y bentonita con una concentración de esta última que puede variar entre 5 y 10%; cuando la concentración es más alta el lodo presenta una viscosidad excesiva y la resistencia del gel dificulta el bombeo y la excavación. Se recomienda usar este tipo de lodos en suelos no cohesivos de baja resistencia y en arenas permeables donde se requiere mayor viscosidad, que únicamente se logra con el uso de bentonita.

La bentonita es una arcilla de alta plasticidad del tipo montmorilonita cuyos depósitos naturales se forman por una alteración de ceniza volcánica en condiciones húmedas o por descomposición de rocas básicas en presencia de agua.

### c) Lodos fraguantes.

Están constituidos por bentonita, cemento y agua en propiedades adecuadas para obtener una determinada resistencia al cabo de cierto tiempo, generalmente algunas horas o días. El contenido de cemento puede variar entre 10 y 20%, utilizando comúnmente el portland tipo I, que adquiere su resistencia máxima a los 28 días; además se le adicionan aditivos para incrementar su viscosidad y agentes retardadores de fraguado. Estos lodos tienen una densidad mayor que los arcillosos o bentoníticos.

La dosificación de los materiales para la elaboración de los lodos depende de la resistencia requerida, la cual es función de las condiciones particulares de cada obra.

### d) Lodos de polímeros.

Químicamente un polímero es una molécula grande formada por un mismo grupo de partículas o moléculas del mismo material; al mezclarse con agua se obtiene rápidamente cualidades estabilizadoras, con una densidad similar a la del agua.

Los distribuidores de este tipo de productos especifican una viscosidad Marsh mínima de 40 segundos y un PH (potencial de hidrógeno) variable entre 8 y 10. También mencionan como ventaja, que es fácil de transportar, 19 litros sustituyen una tonelada métrica de bentonita, no forma costra en la pared de la excavación ya que el polímero se infiltra en la tierra y une las partículas por atracción iónica. La densidad de este tipo de lodos se puede incrementar agregándole sulfato de bario y bentonita clásica o sódica.

Además el producto es biodegradable y no contaminante, por ello; permite realizar la obra con gran limpieza y no requiere desarenador, puede ser desalojado directamente al drenaje público sin contaminarlo.

### 2.4.3 Valores recomendables para lodos estabilizadores para la ciudad de México.

A continuación se presenta en la tabla 2.2, valores recomendados de los lodos estabilizadores para la ciudad de México; y en la tabla 2.3, valores comunes de viscosidad Marsh para diferentes tipos de suelos.

Densidad (t/m <sup>3</sup> )	Viscosidad Marsh (s)	Contenido de arena %	Potencial de hidrógeno (PH)	Resistencia de lodo fraguante
1.03 a 1.07	30 a 55	0 a 10	7 a 9.5	Requerida según características de obra

**Tabla 2.2 Valores recomendables para lodos estabilizadores para la ciudad de México**

Densidad: Expresa el peso por unidad de volumen de los lodos.

Viscosidad: Esta propiedad es una medida de la resistencia interna de la mezcla, a mayor viscosidad mayor resistencia.

Contenido de arena: En excavaciones o perforaciones, una pequeñísima cantidad de arena es deseable, en cambio una excesiva cantidad resulta inadecuada ya que forma una costra de mayor espesor, lo cual la hace quebradiza.

Potencial de hidrógeno (PH): Las propiedades de los lodos se ven afectadas por la naturaleza del electrolito presente en el agua, el cual influye en la dispersión coloidal al elevar o disminuir el grado de acidez o alcalinidad de las sustancias. Soluciones neutras tienen un PH igual a 7, ácidas menores a 7, y alcalinas mayores a 7.

Espesor de la costra o cake: Sobre las paredes de la excavación realizada en presencia de lodos coloidales, se deposita una costra delgada (1 o 2 mm) produciendo una pantalla flexible e impermeable.

Tipo de suelo	Viscosidad Marsh en seg.	
	Excavación en seco	Excavación bajo el nivel freático
Arcilla	27 - 32	-
Arena arcillosa y arcilla arenosa	29 - 35	-
Arena con limo	32 - 37	38 - 43
Arena fina a gruesa	38 - 43	41 - 47
Arena con grava	42 - 47	55 - 65
Grava	46 - 52	60 - 70

**Tabla 2.3 Valores comunes de viscosidad de Marsh.**

## **CAPÍTULO 3. MÉTODOS DE REVISIÓN DE ESTABILIDAD PARA LUMBRERAS FLOTADAS.**

### **3.1 Estados límites.**

Los principales mecanismos de falla de las lumbreras construidas por el método de flotación son:

- a) Falla del brocal por inestabilidad local del suelo.
- b) Estabilidad de la trinchera con lodo para pantalla perimetral.
- c) Falla por fracturación.
- d) Falla del núcleo central.
- e) Falla por cortante de la pared o del fondo.
- f) Falla de fondo por subpresión.
- g) Falla por flotación general.

Por otra parte, el buen funcionamiento de las lumbreras requiere que las deformaciones del suelo no afecten las instalaciones de la propia planta ni las construcciones vecinas. Al respecto resultan críticos:

- g) Los desplazamientos inducidos en la periferia durante la construcción.
- h) Los desplazamientos previsibles a mediano y corto plazo por efecto de la consolidación regional, así como su interacción con las lumbreras y los túneles conectados con ellas.

### **3.2 Mecanismos de falla.**

#### **3.2.1 Falla del brocal por inestabilidad superficial del suelo.**

La estabilidad del brocal depende de las características del suelo superficial. La atención debe ser puesta en la existencia de fallas, suelos orgánicos y otros factores tan indeseables como el agrietamiento natural. El penetrómetro portátil dinámico puede utilizarse para una exploración a detalle del subsuelo en los primeros metros. Si el material es muy deficiente, el suelo superficial debe ser sustituido por un material competente como grava reforzada con material geosintético o suelo cemento.

Para evaluar la estabilidad del brocal es posible recurrir al Método del Elemento Finito (MEF). Este método calcula el factor de seguridad basado en la reducción de valores de los parámetros utilizados en el análisis de estabilidad hasta llegar a la falla. El cociente entre los valores de dichos parámetros y los valores críticos es igual al factor de seguridad FS.

Aplicando el MEF para la estabilidad del brocal por inestabilidad superficial del suelo, se puede revisar mediante dos maneras:

- a) Método del Elemento Finito 2D axisimétrico (Wilson 1965, Auvinet y Rodríguez 2004).
- b) Método del Elemento Finito 3D.

a) Método del elemento finito 2D axisimétrico:

Un brocal con carga en la superficie (grúas, sobrecargas locales), puede ser considerado como un sólido con simetría axial sometido a carga no simétrica.

Los problemas que implican los sólidos tridimensionales con simetría axial (o sólidos de revolución) sometidos a carga axial simétrica se reducen a simples problemas bidimensionales. Debido a la total simetría respecto al eje  $z$ , como se observa en la figura 3.1 a, todas las deformaciones y esfuerzos son independientes del ángulo de rotación  $\theta$ . El problema tiene entonces que analizarse en forma bidimensional en el plano  $rz$  (figura 3.1 b). Las fuerzas gravitacionales pueden considerarse si actúan en la dirección  $z$ .

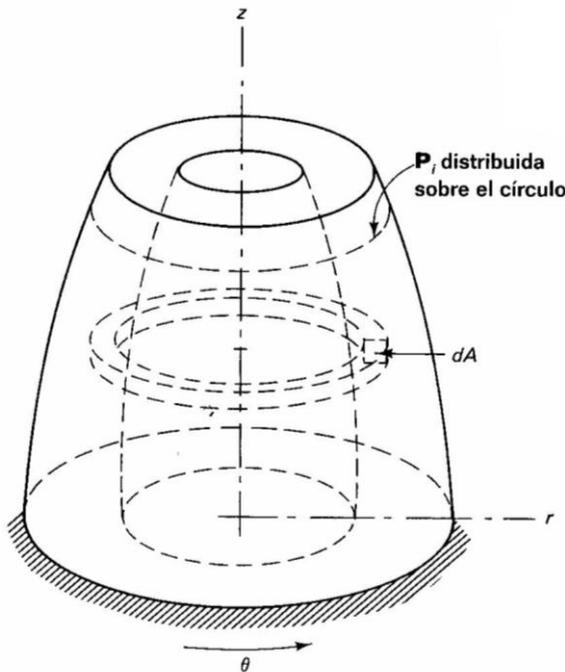


Figura 3.1 a Problema axial

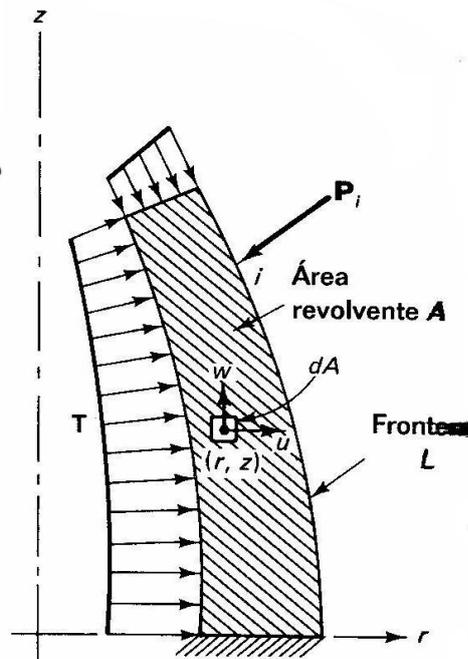


Figura 3.1 b Problema axial 2D

Las estructuras complejas con propiedades de material anisótropos son incluidos en la formulación. La estructura es reemplazada por un sistema de elementos interconectados a lo largo de círculos nodales. Basados en principios de energía, las ecuaciones de equilibrio son formadas para la estructura completa. En el caso de carga axisimétrica, los desplazamientos radiales y axiales son las incógnitas del sistema.

El método puede extenderse al caso de sólidos axisimétricos con cargas no axisimétricas, desarrollando en serie de Fourier los tres desplazamientos de cada círculo nodal. Este método, propuesto por Wilson (1965), viene detallado en el artículo Structural Analysis of Axisymmetric Solids.

Para evaluar los desplazamientos del brocal cuando es sometido al peso del equipo de excavación, el brocal se considera por tanto como un cuerpo axisimétrico sometido a carga local. Los resultados de un análisis de este tipo se presentan en la fig. 3.2 (Auvinet y Rodríguez, 2004).

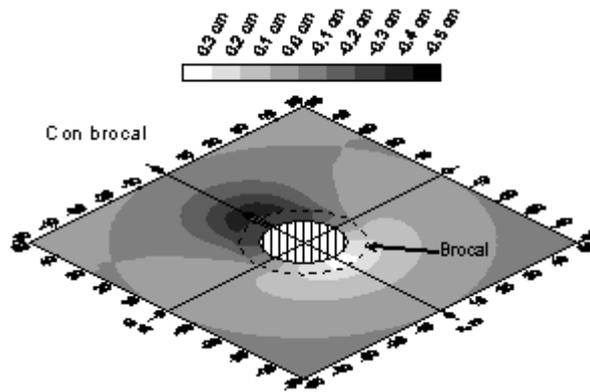


Fig. 3.2 Desplazamientos radiales en la superficie del terreno (Auvinet y Rodríguez, 2004)

b) Método del Elemento Finito 3D.

Se puede analizar la estabilidad del brocal por medio del Método del Elemento Finito 3D, Auvinet 2006, fig. 3.3.

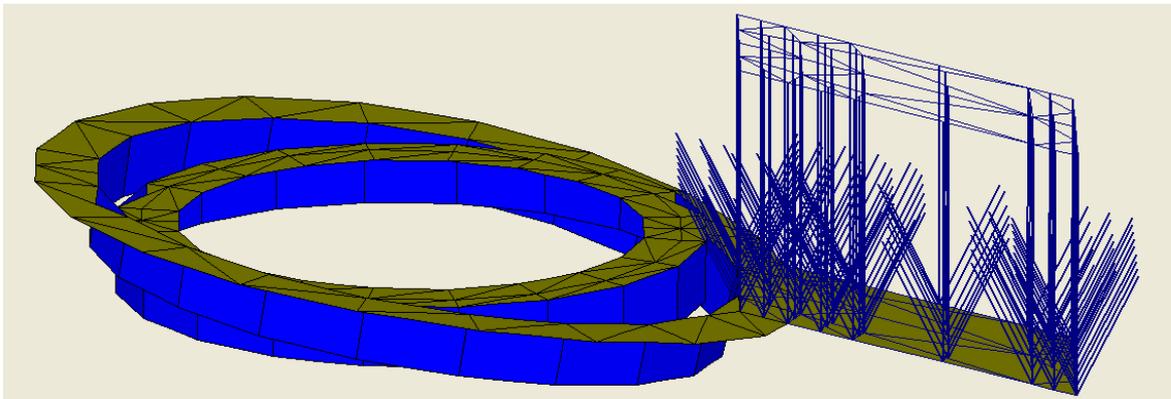


Figura 3.3 Modelación 3D del comportamiento del brocal.

### 3.2.2 Estabilidad de la trinchera con lodo para pantalla perimetral.

#### 3.2.2.1 Criterio de Nash y Jones en suelos cohesivos (1963).

Este criterio analiza la estabilidad de trincheras ademas con lodo bentonítico, suponiendo que se desarrolla una membrana impermeable en la interfaz suelo-lodo, y que se ejerce una fuerza hidrostática en las paredes de la trinchera.

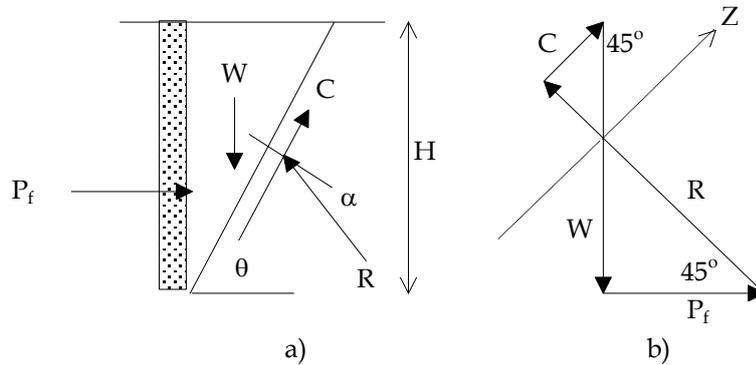
La estabilidad de un corte vertical en arcilla homogénea fue analizada en primera instancia por Coulomb, quien mostró la existencia de una altura crítica, abajo de la cual un corte no se puede autosostener:

$$H_{cr} = \frac{4c}{\gamma} \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi} \quad (3.1)$$

donde  $\gamma$  es el peso específico del suelo,  $c$  y  $\phi$ , su cohesión y ángulo de fricción interna respectivamente, los cuales dependen del tipo del suelo y del tiempo de apertura del corte.

Si se acepta la existencia de una membrana impermeable en la cara interior de la excavación, entonces cualquier fluido ejerce un empuje hacia el suelo, obteniéndose un diagrama de cuerpo libre como el de la fig 3.4a.

Si no se presentan cambios en los esfuerzos efectivos y si el corte permanece abierto sólo por unos días, entonces  $c = c_U$ ,  $\phi = 0$ ,  $\alpha = 0$  y  $\theta_{cr} = 45^\circ$ , fig 3.4b.



**Fig 3.4 Solución de Nash y Jones.**

de la figura anterior:

$$W = \frac{H^2 \tan(90 - \theta) \gamma}{2} = \frac{\gamma H^2}{2} \quad (3.2)$$

$$P_f = \frac{\gamma_L H^2}{2} \quad (3.3)$$

planteando el equilibrio:

$$\sum F_z = 0 \quad (3.4)$$

se obtiene:

$$C = \frac{H^2 (\gamma - \gamma_L)}{2\sqrt{2}} \quad (3.5)$$

donde  $\gamma_L$  = peso específico del lodo.

Es posible observar que:

$$C = \frac{\sqrt{2} H c_U}{F} \quad (3.6)$$

donde  $c_U$  = resistencia no drenada del suelo.

Igualando las ecs 3.5 y 3.6 se obtiene:

$$F = \frac{4c_U}{H(\gamma - \gamma_L)} \quad (3.7)$$

donde  $F$  es el factor de seguridad.

Este análisis ignora la existencia de posibles grietas en el suelo, las que reducen el valor de dicho factor.

### 3.2.2.2 Criterio de Aas (1976).

Se considera adecuado realizar los cálculos de estabilidad considerando un modelo de falla basado en suposiciones simples. Como se observa en la fig 3.5, se supone que la masa deslizante está constituida por dos bloques.

Se considera que la falla se desarrolla por movimiento vertical ( $\delta_v$ ) del bloque superior al mismo tiempo que el bloque inferior experimenta movimiento horizontal ( $\delta_H$ ) hacia el interior de la trinchera.

Por otro lado, se supone que a lo largo de los dos planos inclinados a  $45^\circ$  las condiciones de esfuerzo corresponden a un estado de falla activa, por lo que la resistencia al esfuerzo cortante movilizada a lo largo de estos planos es igual a la medida en el ensaye triaxial de compresión ( $c_T$ ). Además, se considera que en las superficies de deslizamiento verticales se moviliza la resistencia modificada de veleta ( $c_v$ ), que es igual a la resistencia real medida con veleta observada en el fondo del cuerpo deslizante (a la profundidad H) y que decrece en forma lineal hacia la superficie, donde vale cero.

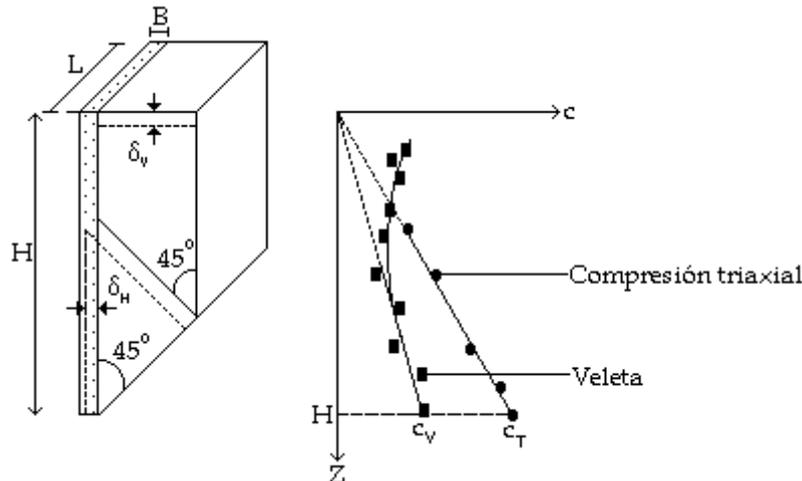


Fig 3.5 Condiciones supuestas de falla.

El propósito de este grupo de consideraciones simples es compensar: a) la presencia de grietas en la superficie intemperizada de la trinchera, b) la ya citada sobreestimación de la resistencia medida con veleta en la zona superficial intemperizada, c) el hecho de que este mecanismo de falla puede no ser el más crítico y, d) la posibilidad de desarrollo de una falla progresiva debido a la más temprana movilización de resistencia a lo largo de los planos inclinados que en los verticales.

En la fig 3.6 se presenta el diagrama de cuerpo libre para el problema en cuestión, considerando que  $\alpha \leq 0.5$  y que  $\Omega < 2\alpha$  ó  $\Omega \approx 2\alpha$ .

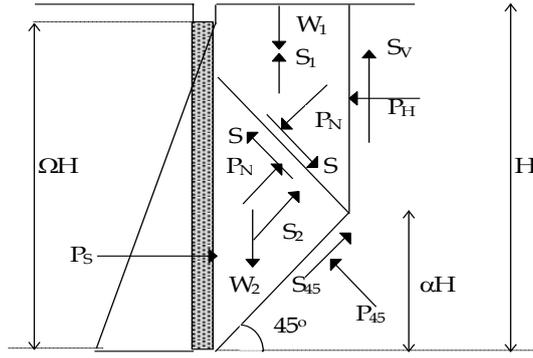


Fig 3.6 Análisis de estabilidad, criterio de G. Aas.

De la figura anterior es posible establecer que:

$$W_1 = \frac{\gamma}{2} H^2 L (2 - 3\alpha) \alpha \quad (3.8)$$

$$S_1 = \frac{c_v}{F} H^2 \left( 1 - 3\alpha + \frac{7}{3} \alpha^2 \right) \alpha \quad (3.9)$$

$$S_v = \frac{c_v}{F} \frac{HL}{2} (1 - \alpha)^2 \quad (3.10)$$

$$S = \frac{c_T}{F} \frac{HL}{\sqrt{2}} (2 - 3\alpha) \alpha \quad (3.11)$$

$$W_2 = \gamma H^2 L \alpha^2 \quad (3.12)$$

$$S_2 = \frac{c_v}{F} 2H^2 (1 - \alpha) \alpha^2 \quad (3.13)$$

$$S_{45} = \frac{c_T}{F} \frac{HL}{\sqrt{2}} (2 - \alpha) \alpha \quad (3.14)$$

$$P_s = 2\gamma H^2 L \left( \frac{\Omega^2}{4} \frac{\gamma_L}{\gamma} \right) \quad (3.15)$$

donde:

$\gamma$  = Peso específico del suelo.

$\gamma_L$  = Peso específico del lodo.

$c_v$  = Resistencia al esfuerzo cortante medida con veleta a la profundidad D.

$c_T$  = Resistencia al esfuerzo cortante medida en la prueba triaxial rápida de compresión a la misma profundidad.

El equilibrio de los bloques inferior y superior se garantiza si

$$W_1 - S_1 - S \frac{1}{\sqrt{2}} - P_n \frac{1}{\sqrt{2}} - S_v = 0 \quad (3.16)$$

$$S_{45} + S_2 - P_n - W_2 \frac{1}{\sqrt{2}} + P_s \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \quad (3.17)$$

$S_1$  y  $S_2$  representan la resistencia al esfuerzo cortante total movilizada a lo largo de las superficies verticales terminales del cuerpo deslizante y actúan en sentido contrario a la dirección de deslizamiento.

Combinando las ecs 3.16 y 3.17 y sustituyendo en las expresiones anteriores se obtiene:

$$F = \frac{c_v}{\gamma H} \left\{ \frac{\left[ \frac{H}{L} \left( \frac{7}{3} - \sqrt{2} \right) \alpha^3 - \left[ \frac{H}{L} (3 - \sqrt{2}) + 2 \frac{c_T}{c_v} - \frac{1}{2} \right] \alpha^2 + \left[ \frac{H}{L} + 2 \frac{c_T}{c_v} - 1 \right] \alpha + \frac{1}{2} \right]}{\alpha - \alpha^2 - \frac{\Omega^2 \gamma_L}{4 \gamma}} \right\} \quad (3.18)$$

Calculando la derivada de  $F$  respecto a  $\alpha$  e igualándola a cero se obtiene la siguiente expresión que determina el valor crítico de  $\alpha$ .

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\Omega^2 \gamma_L}{4 \gamma} \left( \frac{H}{L} + 2 \frac{c_T}{c_v} - 1 \right) + \frac{1}{2} \right] - \left[ \frac{\Omega^2 \gamma_L}{4 \gamma} \left( 3.172 \frac{H}{L} + 4 \frac{c_T}{c_v} - 1 \right) + 1 \right] \alpha \\ & + \left[ \left( 0.586 + 2.757 \frac{\Omega^2 \gamma_L}{4 \gamma} \right) \frac{H}{L} + \frac{1}{2} \right] \alpha^2 - 1.838 \frac{H}{L} \alpha^3 + 0.919 \frac{H}{L} \alpha^4 = 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Para valores típicos de  $\frac{\Omega^2 \gamma_L}{4 \gamma}$  entre 0.1 y 0.2, y para  $\frac{H}{L} < 30$ , la expresión anterior proporciona casi el mismo resultado para valores de  $\alpha$  comprendidos entre 0.47 y 0.50, por lo cual  $\alpha - \alpha^2$  es aproximadamente igual a  $\frac{1}{4}$  y la ec 3.18 de manera aproximada se simplifica:

$$F = \frac{c_v}{H(\gamma - \Omega^2 \gamma_L)} \left[ 2 \frac{c_T}{c_v} + 0.6 + 0.86 \frac{H}{L} \right] \quad (3.20)$$

Se puede demostrar de igual forma que para relaciones  $\frac{H}{L} < 7.5$ , el plano de falla del fondo se extiende teóricamente hasta el nivel del terreno ( $\alpha = 1$ ). Entonces la expresión para determinar el factor de seguridad se convierte en:

$$F = \frac{c_v}{H(\gamma - \Omega^2 \gamma_L)} \left[ 2 \frac{c_T}{c_v} + 0.94 \frac{H}{L} \right] \quad (3.21)$$

Las ecs 3.20 y 3.21 se pueden escribir de manera similar a la bien conocida expresión para los cálculos de estabilidad de cortes y excavaciones

$$F = \frac{c_v}{H(\gamma - \Omega^2 \gamma_L)} N_s \quad (3.22)$$

sin embargo, en este caso, el número de estabilidad no sólo refleja la geometría de la trinchera, sino que también considera la anisotropía en la resistencia al esfuerzo cortante de la arcilla.

La influencia de la sobrecarga en el factor de seguridad puede ser ponderada mediante la expresión:

$$F = \frac{c_v}{H \left( \gamma - \Omega^2 \gamma_L + \frac{4Q}{2H} \right)} \left[ 2 \frac{c_T}{c_v} + 0.94 \frac{H}{L} \right] \quad (3.23)$$

donde  $Q$  = Sobrecarga uniformemente repartida que actúa dentro del área de la traza superior del prisma de falla, en kpa.

Adaptación del criterio noruego de Aas (Santoyo, 1996).

Para aprovechar la experiencia noruega conviene establecer una comparación cualitativa de esas peculiares arcillas con las de México. Al respecto, se puede establecer que:

- Las arcillas de Oslo son tan blandas como las de la Ciudad de México, pero presentan menor plasticidad y mayor peso volumétrico.
- Asumiendo que el peso volumétrico de las de Oslo es del orden de 1.4 veces más grande, y su resistencia similar, se puede aceptar que las de México deben ser potencialmente más estables en condiciones similares.
- A lo anterior se debe agregar que las arcillas noruegas son muy sensitivas; esto es, fácilmente pierden su resistencia aún con deformaciones pequeñas.
- Considerando que en las arcillas sensitivas de Oslo los tiempos de falla varían entre 2 y 10 horas, se puede establecer que en las de México ocurrirá en tiempos mucho mayores.

La ec 2.21 puede ser modificada para las características del subsuelo de la Ciudad de México, aceptando como significativa la resistencia no drenada medida en prueba triaxial rápida de

compresión y que la relación  $\frac{c_T}{c_V}$  para tomar en cuenta la anisotropía, es igual a la unidad, ya

que en el caso de las arcillas de México la resistencia medida con veleta es mayor que la medida en la prueba triaxial (Santoyo, 1969). Bajo estas consideraciones el factor de seguridad se puede expresar como:

$$F = \frac{c_T}{H(\gamma - \Omega^2 \gamma_L)} \left[ 2 + 0.94 \frac{H}{L} \right] \quad (3.24)$$

Nuevamente la influencia de la sobrecarga en el factor de seguridad puede ser ponderada mediante la expresión:

$$F = \frac{c_T}{H\left(\gamma - \Omega^2 \gamma_L + \frac{4Q}{2H}\right)} \left[ 2 + 0.94 \frac{H}{L} \right] \quad (3.25)$$

### 3.2.2.3 Criterio de Alberro y Auvinet (1984).

Este criterio considera una trinchera de largo L y ancho B y revisa las condiciones de estabilidad de una masa prismática truncada por un plano de deslizamiento a  $45^\circ$ , tal como lo muestra la figura 3.7.

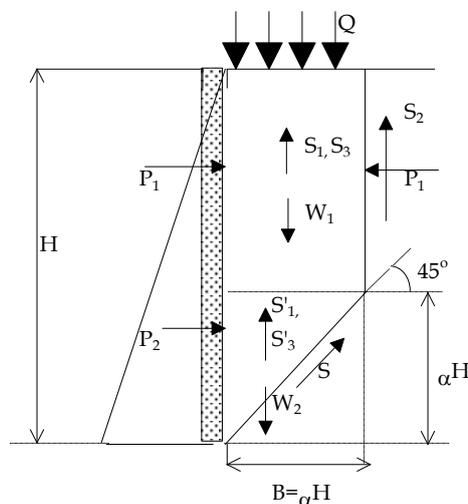


Fig 3.7 Análisis de estabilidad, criterio de Alberro y Auvinet.

Se distinguen tres casos:

a) Cohesión del terreno constante sin sobrecarga.

En este caso las fuerzas a tomar en cuenta para el análisis de estabilidad de la masa de interés son, considerando un factor de seguridad  $F$ :

$$W_1 = \alpha HL(H - \alpha H)\gamma \quad (3.26)$$

$$S_1 + S_2 + S_3 = (2\alpha H + L)(H - \alpha H)\frac{c}{F} \quad (3.27)$$

$$P_2 = \frac{\gamma_L L}{2} [2H^2 \alpha - H^2 \alpha^2] \quad (3.28)$$

$$S'_1 + S'_3 = \alpha^2 H^2 \frac{c}{F} \quad (3.29)$$

$$S = \alpha H \sqrt{2} L \frac{c}{F} \quad (3.30)$$

$$W_2 = \frac{\alpha^2 H^2}{2} L \gamma \quad (3.31)$$

La ecuación de equilibrio se escribe como:

$$P_2 = (W_1 + W_2) - (S_1 + S_2 + S_3 + S'_1 + S'_3 + S\sqrt{2}) \quad (3.32)$$

Sustituyendo las variables anteriores por sus valores y aislando el factor de seguridad se obtiene:

$$F = \frac{2c}{(\gamma - \gamma_L)H} \left[ \frac{1 + \alpha}{\alpha(2 - \alpha)} + \frac{H}{L} \right] \quad (3.33)$$

El factor de seguridad mínimo se obtiene cuando  $\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$ , lo que conduce a

$$F_{\min} = \frac{2c}{(\gamma - \gamma_L)H} \left[ 1.87 + \frac{H}{L} \right] \quad (3.34)$$

donde:

$\gamma$  = Peso volumétrico del suelo.

$\gamma_L$  = Peso volumétrico del lodo.

$c$  = Cohesión del suelo.

b) Cohesión constante con sobrecarga uniforme distribuida  $Q$  en la superficie.

Procediendo de la misma forma se obtiene:

$$F = 2c \frac{L(1 + \alpha) + \alpha H(2 - \alpha)}{(\gamma - \gamma_L)HL\alpha(2 - \alpha) + 2Q\alpha L} \quad (3.35)$$

que presenta un mínimo cuando

$$\alpha = \frac{-2(\gamma - \gamma_L) + \sqrt{12(\gamma - \gamma_L)^2 + 8 \left[ (\gamma - \gamma_L) Q \left( \frac{1}{H} - \frac{2}{L} \right) - \frac{2Q^2}{LH} \right]}}{2(\gamma - \gamma_L) - 4 \frac{Q}{L}} \quad (3.36)$$

donde  $Q$  = sobrecarga uniformemente distribuida expresada en kPa.

c) Cohesión variable con la profundidad y sobrecarga en la superficie.

Se acepta en lo que sigue que:

- La cohesión que puede desarrollarse en planos de falla verticales puede estimarse a partir de la resistencia al corte medida con veleta ( $c_V$ ).
- La cohesión que puede desarrollarse en un plano de falla inclinado a  $45^\circ$  puede estimarse a partir de la resistencia al corte medida en prueba triaxial no drenada ( $c_T$ ).
- Ambas cohesiones presentan una variación lineal con la profundidad.
- Se conocen las cohesiones medidas con veleta ( $c_V$ ) y en ensaye triaxial ( $c_T$ ) a la profundidad  $H$ .

En estas condiciones se tiene:

- Cohesión media en las paredes verticales del prisma

$$c = c_V \frac{1 - \alpha}{2} \quad (3.37)$$

- Cohesión media en las paredes verticales de la cuña

$$c = c_V \frac{2 - \alpha}{2} \quad (3.38)$$

- Cohesión media en el plano de deslizamiento inclinado a  $45^\circ$

$$c = c_T \frac{2 - \alpha}{2} \quad (3.39)$$

Se puede establecer que

$$P_2 + W_1 + W_2 + Q\alpha HL = \gamma_L L \left[ H^2 \alpha - \frac{H^2 \alpha^2}{2} \right] + \gamma L \left[ \alpha H^2 - \frac{\alpha^2 H^2}{2} \right] + Q\alpha HL \quad (3.40)$$

$$S'_1 + S'_3 = \alpha^2 H^2 \frac{c_V}{2F} (2 - \alpha) \quad (3.41)$$

$$S = \frac{\alpha H}{\sqrt{2}} \frac{c_T}{F} L (2 - \alpha) \quad (3.42)$$

Escribiendo nuevamente la ecuación de equilibrio y aislando el factor de seguridad se obtiene:

$$F = \frac{c_V \left[ (2\alpha H + L)(1 - \alpha)^2 + \alpha^2 H(2 - \alpha) \right] + c_T \left[ 2\alpha L(2 - \alpha) \right]}{(\gamma - \gamma_L) L \alpha H (2 - \alpha) + 2Q\alpha L} \quad (3.43)$$

Nuevamente, el factor de seguridad mínimo se obtiene cuando  $\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$ . Para plantear la derivada se establece que

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{\partial}{\partial \alpha} u - u \frac{\partial}{\partial \alpha} v}{v^2} = 0 \quad (3.44)$$

donde

$$u = c_v \left[ (2\alpha H + L)(1 - \alpha)^2 + \alpha^2 H(2 - \alpha) \right] + c_T \left[ 2\alpha L(2 - \alpha) \right] \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = c_v \left[ H(3\alpha^2 - 4\alpha + 2) + 2L(\alpha - 1) \right] + c_T \left[ 4L(1 - \alpha) \right] \quad (3.46)$$

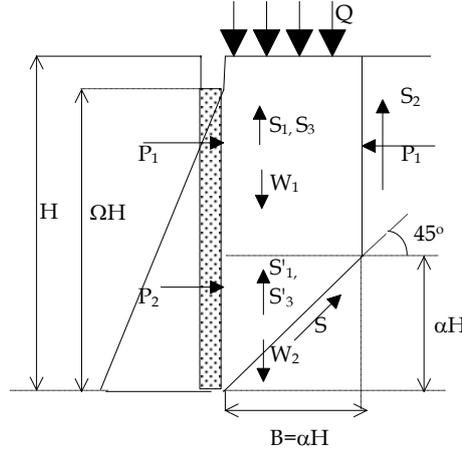
$$v = (\gamma - \gamma_L) L \alpha H(2 - \alpha) + 2Q \alpha L \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = (\gamma - \gamma_L) L H(2 - 2\alpha) + 2QL \quad (3.48)$$

La solución de la ec 3.44 por métodos analíticos es una tarea formidable, por lo que se recurre a la solución numérica aplicando el método de aproximaciones sucesivas (Luthe *et al.*, 1991) para hallar el valor de  $\alpha$  que minimiza el factor de seguridad de la excavación.

d) Modificación al criterio de Alberro y Auvinet para considerar nivel del lodo variable en la trinchera.

El análisis efectuado en el inciso anterior puede ser modificado para considerar nivel del lodo variable en la trinchera. Las fuerzas actuantes en la cuña se observan en la fig 3.8.



**Fig 3.8 Criterio modificado de Alberro y Auvinet.**

El factor de seguridad mínimo se obtiene cuando  $\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$ . Para plantear la derivada nuevamente se establece que

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{\partial}{\partial \alpha} u - u \frac{\partial}{\partial \alpha} v}{v^2} = 0 \quad (3.49)$$

donde:

$$u = c_v \left[ (2\alpha H + L)(1 - \alpha)^2 + \alpha^2 H(2 - \alpha) \right] + c_T \left[ 2\alpha L(2 - \alpha) \right] \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = c_v \left[ 2H(1 - \alpha)^2 - 2(1 - \alpha)(2\alpha H + L) - \alpha^2 H + 2\alpha H(2 - H) \right] + c_T \left[ 2L(2 - \alpha) - 2\alpha L \right] \quad (3.51)$$

$$v = H \alpha^2 L \left[ \gamma_L - \gamma - \frac{2(\Omega \gamma_L - \gamma)}{\alpha} + \frac{2Q}{H \alpha} \right] \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = H\alpha^2 L \left[ \frac{2(\Omega\gamma_L - \gamma)}{\alpha^2} - \frac{2Q}{H\alpha^2} \right] + 2H\alpha L \left[ \gamma_L - \gamma - \frac{2(\Omega\gamma_L - \gamma)}{\alpha} + \frac{2Q}{H\alpha} \right] \quad (3.53)$$

Como en el caso anterior, se recurre a la solución numérica de la ec 3.49 para encontrar el valor de  $\alpha$  que minimiza al factor de seguridad de la trinchera.

### 3.2.3 Fracturamiento del suelo.

Todo cuerpo sólido responde a cargas extremas experimentando grandes deformaciones, localizadas principalmente a lo largo de una superficie de falla, o presentando fracturamiento. El fracturamiento consiste en la pérdida de continuidad entre dos partes del cuerpo, e implica la generación de una grieta y su propagación hasta que se presente la falla general o que se alcance un nuevo equilibrio.

De acuerdo con Irwin (1957), existen 3 modos de agrietamiento, (fig. 3.9):

- 1 Grieta de tensión.
- 2 Grieta de cortante.
- 3 Grieta de cortante por torsión.

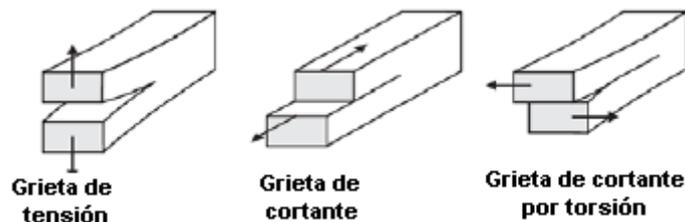


Figura 3.9 Modos de agrietamiento.

Los criterios o teorías de generación de grietas son diversos:

- a) Teoría de Rankine.
- b) Teoría de San Venant.
- c) Teoría de Griffith.

Las grietas pueden clasificarse de acuerdo con el mecanismo de generación como:

- a) Grietas por secado.
- b) Grietas inducidas por fracturamiento hidráulico.
- c) Grietas inducidas por carga o descarga de la superficie del suelo.
- d) Grietas inducidas por consolidación regional del suelo.
- e) Grietas inducidas por fuerzas de filtración inducidas por pozos de bombeo.

Además existen otros factores que pueden inducir el agrietamiento, tales como la existencia de oquedades subterráneas naturales o artificiales inestables (Auvinet, 2008).

Cuando la excavación de una lumbrera es soportada con un lodo bentonítico sin pantalla perimetral o durante la colocación del mortero en la zanja perimetral, es posible que la presión transmitida por el lodo o el mortero, active grietas existentes en el suelo, fig.3.10. En esta figura se muestra como el agrietamiento se propagó horizontalmente hasta varias decenas de metros, causando daños en una fila de tablestacas metálicas. El fracturamiento fue facilitado en este caso por el hecho de que el peso volumétrico del lodo es superior al del agua; sin embargo, fue posible controlar el fenómeno procurando simplemente que el nivel del lodo no se elevara significativamente arriba del nivel freático.



**Figura 3.10** Agrietamiento inducido por la presión de lodo autofraguante en un panel de una pared colocada in situ (Lumbrera 3, Túnel Río de los Remedios).

En general, cuando existen grietas en el subsuelo antes de la construcción de una lumbrera, o que en el suelo se presentan zonas de tensión, es probable que se generen fugas de lodo o consumos importantes de mortero.

### 3.2.4 Falla del núcleo central.

El núcleo es un cilindro largo de masa de suelo confinado lateralmente por lodo bentonítico. La estabilidad de la masa de suelo bajo su propio peso puede ser calculada por una simple evaluación de esfuerzos cortantes actuando en este sólido.

La estabilidad del núcleo central se puede analizar de tres formas:

- 1 Método analítico.
- 2 Método del Elemento Finito 2D axisimétrico.
- 3 Método del Elemento Finito (MEF) 3D.

#### 3.2.4.1 Método Analítico.

Una vez realizada la excavación de las zanjas perimetrales utilizando lodo bentonítico como sistema de soporte, ver figura 3.11, el núcleo central de suelo se encuentra sometido a un estado de esfuerzos horizontales  $\sigma_3 = \gamma_L H_L$ , donde ( $\gamma_L$  = peso volumétrico del lodo y  $H_L$  = altura del lodo), que es menor al esfuerzo horizontal geostático previo del suelo  $\sigma_3 = \kappa_0 \gamma Z$ , donde ( $\gamma$  = peso volumétrico del suelo y  $Z$  = profundidad).

La estabilidad del núcleo se verifica comparando el esfuerzo cortante generado al disminuir el esfuerzo horizontal,  $\tau = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2}$ , contra la resistencia cortante del suelo en condiciones no drenadas,  $C_u$ . Por lo tanto el factor de seguridad contra la falla del núcleo central del suelo es:

$$FS_N = \frac{C_u}{\tau} = \frac{C_u}{(\sigma_1 - \sigma_3)/2} = \frac{2C_u}{(\gamma * Z - \gamma_L * H_L)} \quad (3.54)$$

Se debe destacar que cuando el nivel del lodos en la zanja perimetral se abate, el esfuerzo cortante inducido aumenta (el denominador crece) y por ende el factor de seguridad baja.

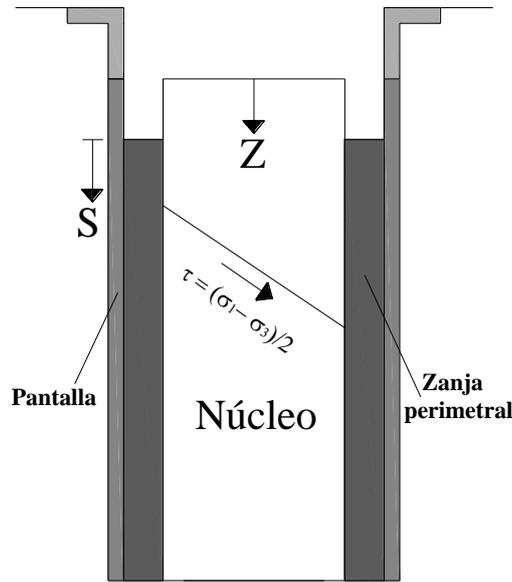


Figura 3.11 Estabilidad del núcleo

### 3.2.4.2 Método del Elemento Finito 2D axisimétrico.

La estabilidad del núcleo central se puede analizar empleando el Método del Elemento Finito 2D axisimétrico, figura 3.12.

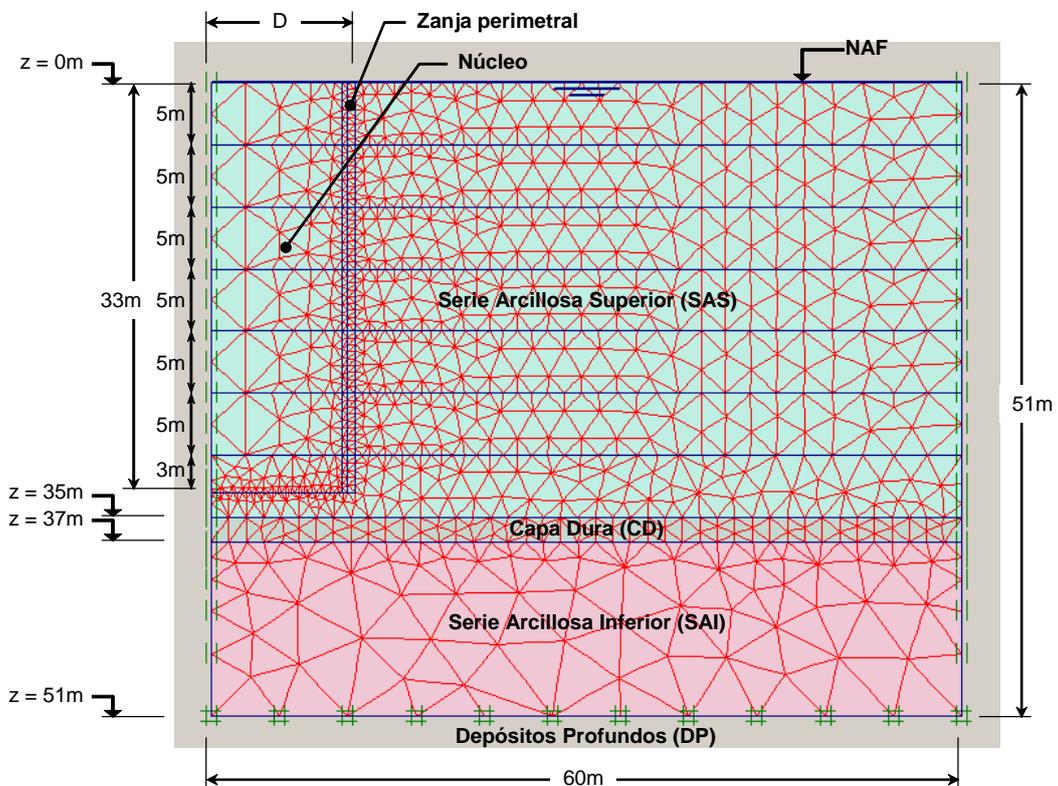
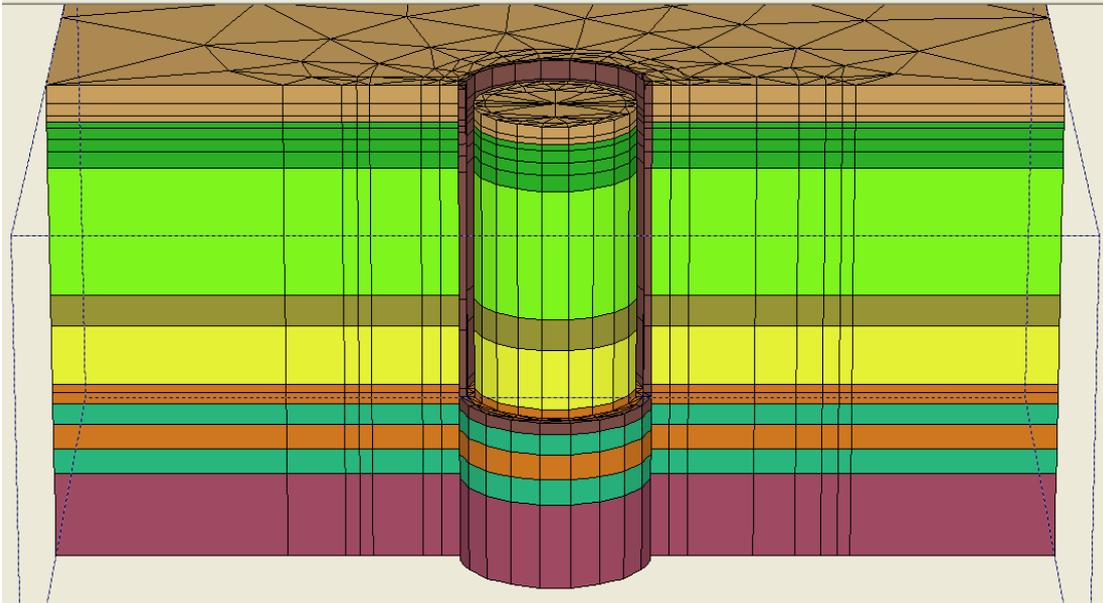


Figura 3.12 Modelación del núcleo mediante el MEF axisimétrico 2D.

### 3.2.4.3 Método del Elemento Finito 3D.

Para un análisis más completo de la estabilidad del núcleo central, la modelación del Método de Elemento Finito (MEF) 3D puede emplearse, figura 3.13, (Auvinet 2006).



**Figura 3.13 Modelación del núcleo mediante MEF 3D.**

### 3.2.5 Falla por cortante de la pared o del fondo.

Para analizar la estabilidad general de la excavación debe tomarse en cuenta que, en ausencia de muro-pantalla perimetral, el mecanismo de falla más crítico es generalmente el de la pared; por lo contrario, en presencia de una pantalla resistente el mecanismo crítico es el de falla de fondo.

#### 3.2.5.1 Sin muro-pantalla.

##### a) Equivalencia trinchera.

Este método aproximado consiste en aceptar que la excavación cilíndrica puede considerarse como una trinchera de longitud igual a su diámetro. Es entonces posible aplicar el criterio de Alberro y Auvinet (1984) descrito en la sección 3.2.2.3.

##### b) Método del elemento finito 2D axisimétrico.

Se puede revisar la estabilidad por cortante de la pared, mediante el método del elemento finito 2D axisimétrico, fig. 3.14.

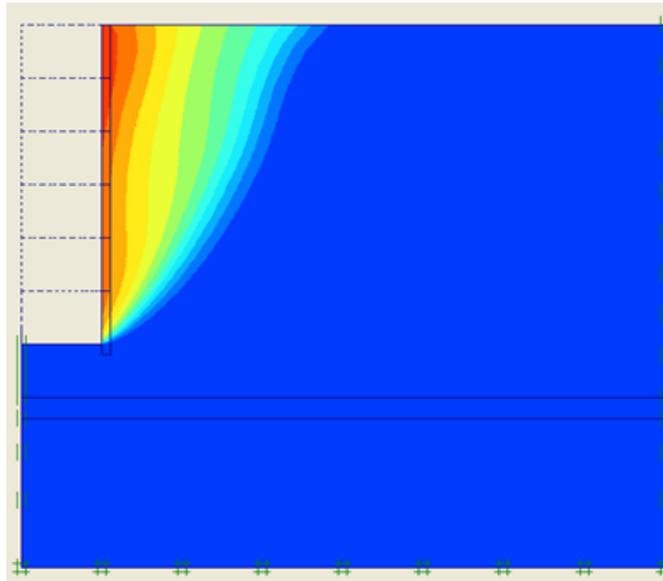


Figura 3.14 Estabilidad por cortante de la pared sin muro-pantalla, MEF 2D axisimétrico.

### 3.2.5.2 Con muro-pantalla.

#### a) Método tradicional de Skempton.

Skempton propone adoptar para la capacidad de carga en suelos puramente cohesivos una expresión de forma totalmente análoga a la de Terzaghi, según la cual:

$$q_c = CN_c + \gamma D_f \quad (3.55)$$

$N_c$  es función de la relación D/B, en que D es la profundidad de entrada del cimiento en el suelo resistente y B es el ancho del cimiento. En la fig. 3.15 aparecen los valores obtenidos por Skempton para  $N_c$ , en el caso de cimientos largos y de cimientos cuadrados o circulares.

En los casos de suelos heterogéneos estratificados debe manejarse con cuidado el término  $\gamma D_f$ , que representa la presión del suelo al nivel del desplante y que, por lo tanto, deberá calcularse tomando en cuenta los diferentes espesores de los estratos con sus respectivos pesos específicos, en la condición de suelo de que se trate, más cualquier sobrecarga distribuida en la superficie del suelo.

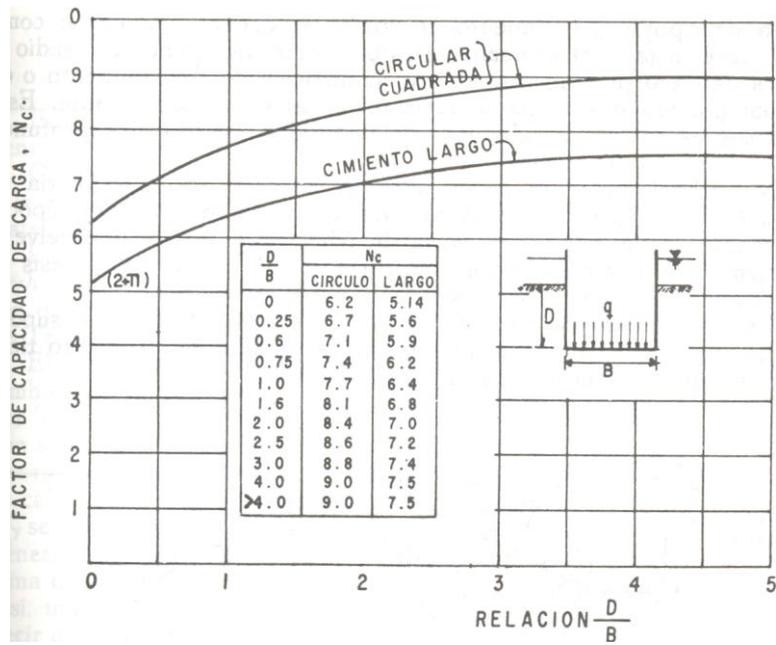


Figura 3.15 Fig. 3.15 Valores de  $N_c$  según Skempton, para suelos puramente cohesivos.

b) Método del elemento finito 2D axisimétrico.

Cuando se tiene muro-pantalla, se puede revisar la estabilidad por cortante del fondo, realizando un análisis mediante el MEF 2D axisimétrico, fig. 3.16.

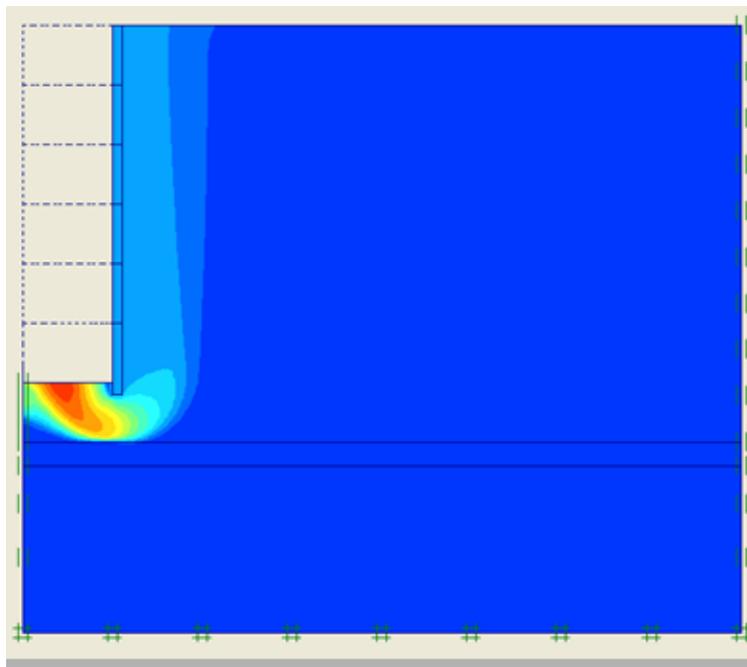


Figura 3.16 Estabilidad por cortante del fondo en presencia de muro-pantalla, MEF 2D axisimétrico.

### 3.2.6 Estabilidad del fondo por subpresión.

Método analítico.

La presión existente en estratos permeables localizados directamente debajo del fondo de una excavación puede producir el levantamiento del mismo y en ciertas condiciones la falla del fondo, figura 3.17.

Empleando el método del equilibrio límite se hace obtiene la siguiente expresión para calcular el factor de seguridad contra la subpresión, el cual es:

$$FS_S = \frac{f_{rSI}}{f_{aSI}} \quad (3.56)$$

Donde:

$$f_{rSI} = (H - H_L)\gamma_L + (T \cdot \gamma_S) + f_{ra}$$

$$f_{aSI} = (H + T - Z_{naf})\gamma_w$$

$$f_{ra} = \frac{\pi \cdot B \cdot T \cdot \alpha C_1}{\left(\frac{\pi B^2}{4}\right)}$$

Sustituyendo los términos en la expresión del factor de seguridad por subpresión, resulta:

$$FS_S = \frac{(H - H_L)\gamma_L + (T \cdot \gamma_S) + \left[ \frac{\pi \cdot B \cdot T \cdot \alpha C_1}{\frac{\pi B^2}{4}} \right]}{(H + T - Z_{naf})\gamma_w} \quad (3.57)$$

donde:

$f_{rSI}$  = Fuerza resistente de subpresión.

$f_{aSI}$  = Fuerza actuante de subpresión.

$f_{ra}$  = Resistencia al corte del suelo arcilloso bajo la lumbrera.

$B$  = Diámetro de la lumbrera.

$T$  = Distancia entre la base de la lumbrera y el estrato permeable.

$C_1$  = Cohesión de la serie arcillosa superior.

$\alpha = 1.94$  = Constante debido al incremento de la resistencia con la profundidad.

$\gamma_S$  = Peso volumétrico del suelo.

$\gamma_L$  = Peso volumétrico del lodo.

$\gamma_w$  = Peso volumétrico del agua.

$H$  = Profundidad de la lumbrera.

$H_L$  = Profundidad del lodo.

$Z_{naf}$  = Profundidad del nivel de aguas freáticas.

$FS_S$  = Factor de seguridad contra subpresión.

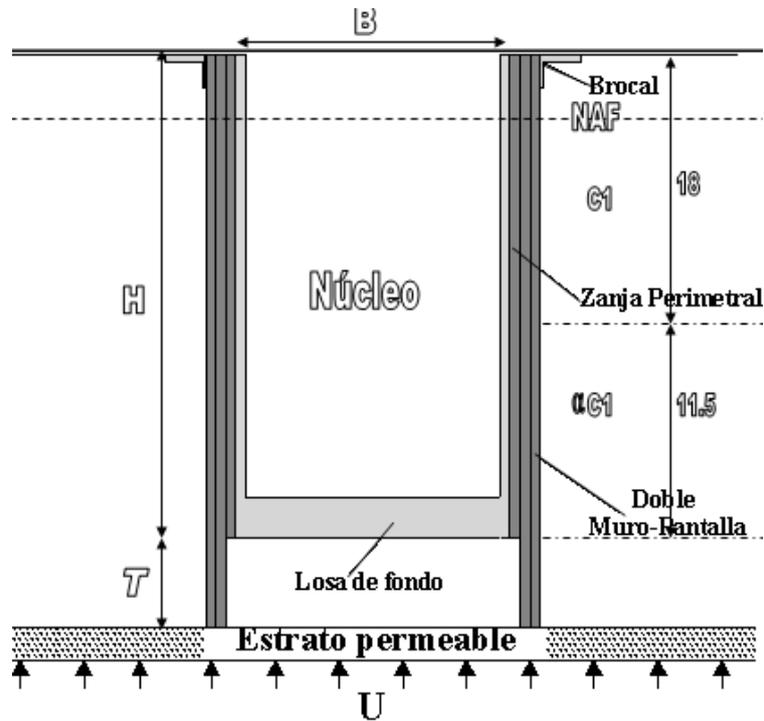


Figura 3.17 Estabilidad del fondo por subpresión y flotación

Conviene observar que la presencia del lodo en la excavación puede inducir en el estrato permeable una presión mayor, que la hidrostática debido a su mayor peso volumétrico, figura 3.18. En este último caso resulta particularmente crítico un abatimiento del nivel del lodo, figura 3.19. La falla observada en la lumbrera 6 del túnel Río de los Remedios (figura 3.20), se ha atribuido a este fenómeno (Auvinet, 2006).

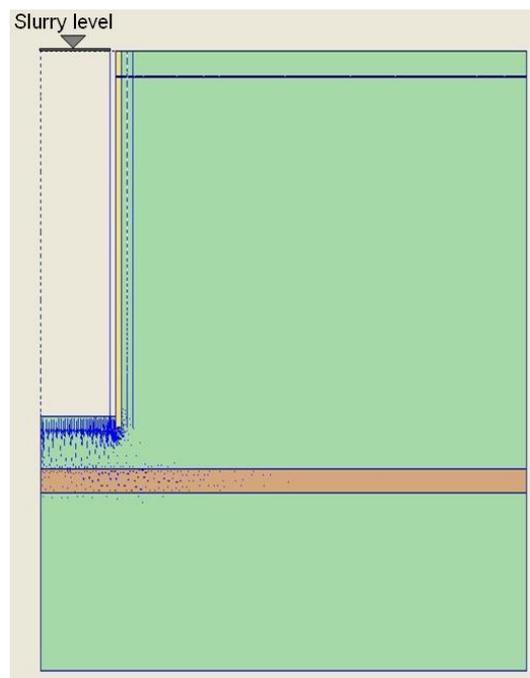
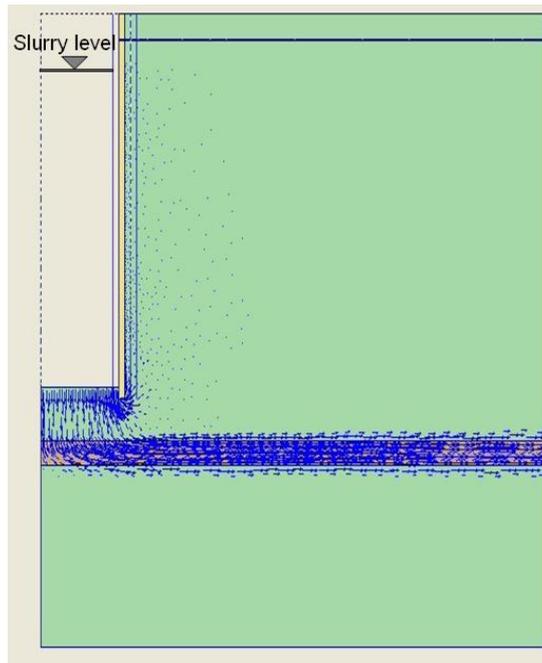


Figura 3.18 Flujo hacia la capa dura inducido por el lodo



**Figura 3.19** Flujo desde la capa dura hacia el fondo de la lumbrera debido al abatimiento del lodo

La seguridad contra falla en estas condiciones puede evaluarse sustituyendo simplemente el peso volumétrico del agua por el del lodo en la ecuación 3.57.



**Figura 3.20** Falla lumbrera L6 del Túnel del Río de los Remedios

### 3.2.7 Estabilidad por flotación general.

Este fenómeno corresponde a la emersión de la lumbrera respecto a la superficie del terreno debido al efecto del empuje de Arquímedes (empuje hidrostático: “*El empuje vertical hacia arriba sobre un cuerpo sumergido parcial o totalmente en un líquido es igual al peso del volumen del líquido desplazado*”). Este empuje puede ser suficiente para provocar la flotación de la lumbrera.

Este efecto puede presentarse de manera inmediata cuando se vacía la lumbrera o puede manifestarse a lo largo del tiempo. Para evitar esta condición, se revisa que el empuje de Arquímedes quede contrarrestado por el peso de la lumbrera, considerando además una resistencia por adherencia entre la superficie de contacto vertical entre la estructura de la lumbrera y el suelo. Adecuando el modelo a emplear, figura 3.17, el factor de seguridad contra flotación general, resulta:

$$FS_F = \frac{W_L + (C_1 * 18m + \alpha C_1 * 11.5m)\pi B}{(H - Z_{naf})\gamma_w \pi \frac{B^2}{4}} \quad (3.58)$$

$W_L$  = Peso de la lumbrera.

$C_1$  = Cohesión de la serie arcillosa superior.

$B$  = Diámetro de la lumbrera.

$H$  = Profundidad de la lumbrera.

$\alpha = 1.94$  = Constante debido al incremento de la resistencia a la profundidad.

$Z_{naf}$  = Profundidad del nivel de aguas freáticas.

$\gamma_w$  = Peso volumétrico del agua.

$FS_F$  = Factor de seguridad contra flotación.

Debe hacerse notar que este mecanismo de falla tiene mayor posibilidad de presentarse para lumbreras de gran diámetro, puesto que el empuje de Arquímedes crece con el cuadrado del diámetro de la lumbrera mientras que el peso de la misma y la resistencia lateral crecen aproximadamente en forma proporcional a este diámetro.

## CÁPITULO 4 SEGURIDAD Y CONFIABILIDAD.

### 4.1 Introducción.

Desde tiempos muy remotos, el concepto de seguridad ha sido fundamental en la práctica de la ingeniería civil. El primer código de construcción conocido que pone énfasis en la seguridad data de 1750 años antes de Cristo (Código de Hammurabi; Finet, 1996).

En geotecnia el concepto de seguridad es particularmente crítico debido a las numerosas incertidumbres que afectan los diferentes aspectos del diseño geotécnico. Nunca es posible eliminar totalmente las dudas en cuanto a la representatividad de las muestras de suelo obtenidas durante la exploración o la precisión y validez de los ensayos de campo y de laboratorio. Además, las limitaciones de los modelos usados para evaluar la estabilidad de obras térreas son bien conocidas. Por otra parte, es común que las cargas consideradas en el momento del diseño geotécnico sean cargas de anteproyecto y presenten una incertidumbre considerable.

### 4.2 Conceptos generales.

La *Confiabilidad* puede definirse como la probabilidad de que un sistema lleve a cabo sus funciones de manera adecuada, durante un periodo propuesto y bajo condiciones de operación establecidas (Kaufmann, 1977). Desde el punto de vista probabilista, la confiabilidad es el complemento a la unidad de la probabilidad de falla en las mismas condiciones.

Resulta interesante definir también el concepto de *riesgo*, entendido como el producto de la probabilidad de un evento indeseable por su costo.

Frecuentemente, la seguridad se evalúa comparando la sollicitación o demanda máxima  $S$  prevista para el sistema, con su resistencia o capacidad  $R$ . Tradicionalmente se recurre al concepto de factor de seguridad  $\theta$ .

$$\theta = \frac{R}{S} \quad (4.1)$$

Este planteamiento supone que se satisfacen las siguientes condiciones:

- $S$  no se incrementa durante el periodo de vida de la obra y es igual o mayor a la máxima sollicitación prevista para la estructura.
- $R$  es siempre igual o inferior a la mínima resistencia o capacidad estimada.

En la práctica estas condiciones no son siempre absolutas y por tanto involucran un riesgo de falla.

La evaluación de los niveles de seguridad se puede efectuar de diversas maneras, dependiendo de la precisión con que sean modeladas las sollicitaciones y las resistencias. Al respecto se pueden distinguir los siguientes niveles de análisis:

#### Nivel 0

Es el correspondiente a la utilización de factores de seguridad tradicionales.  $R$  y  $S$  son considerados como parámetros deterministas. En este caso el establecimiento de factores de seguridad mínimos es producto del empirismo.

## Nivel 1

En este nivel se reconoce el carácter aleatorio de la resistencia (esperanza  $\mu_R$  y coeficiente de variación  $V_R$ ) y de la sollicitación (esperanza  $\mu_S$  y coeficiente de variación  $V_S$ ) y se verifica que la capacidad calculada a partir de valores mínimos de resistencia (*resistencia nominal*) sea superior a la demanda estimada a partir de valores máximos de sollicitación (*solicitación nominal*), obteniendo un factor de seguridad (*factor de seguridad nominal*). Se puede hablar en este nivel de *métodos semi-probabilistas*.

Cornell (1969) plantea la revisión de seguridad a este nivel como:

$$R_n \geq \theta^* S_n \quad (4.2)$$

donde  $R_n = (1 - k_R V_R) \mu_R$  y  $S_n = (1 + k_S V_S) \mu_S$  son valores *nominales* o *característicos* de la resistencia y de la sollicitación respectivamente y  $\theta^*$  es el coeficiente de seguridad *nominal* definido como:

$$\theta^* = \frac{1 - k_R V_R}{1 + k_S V_S} \theta \quad (4.3)$$

donde  $k_R$  y  $k_S$  son factores que garantizan que las resistencias y sollicitaciones nominales tengan probabilidades pequeñas de no ser alcanzadas y de ser rebasadas respectivamente.

Los nuevos reglamentos, denominados LRFD (en inglés; Load and Resistance Factor Design), entre los cuales se encuentra el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, pertenecen a este nivel.

## Nivel 2

Los métodos de análisis de confiabilidad de nivel 2 tienen su origen en un trabajo presentado por Mayer (1926), pero no fue sino hasta los años 60 cuando tuvieron gran desarrollo gracias a los trabajos de Cornell (1969), Ravindra *et al.* (1969) y Rosenblueth y Esteva (1971).

Debido a que los métodos de nivel 2 requieren únicamente el conocimiento de los dos primeros momentos de las variables aleatorias (esperanza y varianza), así como de la covarianza de las variables correlacionadas, éstos se conocen como *métodos de segundos momentos*.

En este nivel se supone implícitamente que las sollicitaciones pueden ser superiores a las resistencias y que por ello la probabilidad de falla no es nula.

La medida de la confiabilidad asociada con un diseño particular es el *índice de confiabilidad*  $\beta$ , que representa el valor recíproco del coeficiente de variación del margen de seguridad  $R-S$ . La confiabilidad resulta ser, para cualquier distribución de  $R$  y  $S$  (Cornell, 1969):

$$\begin{aligned} P[R > S] &= P[R - S > 0] \\ &= P\left[\frac{(R - S) - \mu_{R-S}}{\sigma_{R-S}} > \frac{-\mu_{R-S}}{\sigma_{R-S}}\right] \\ &= P\left[U > -\frac{1}{V_{R-S}}\right] = 1 - F_U(-\beta) \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde  $P[ ]$  denota la probabilidad del evento,  $\mu_{R-S}$  representa la media del margen de seguridad,  $V_{R-S}$  es su coeficiente de variación y  $U$  es una variable aleatoria estandarizada con función de distribución acumulada  $F_U( )$  no especificada. Entre mayor sea  $\beta$ , mayor será la confiabilidad del diseño y menor la probabilidad de comportamiento insatisfactorio.

El objetivo principal de los métodos de este nivel es proporcionar una técnica simple más racional para estimar la seguridad estructural por medio de la evaluación de incertidumbre estadística de las variables de diseño, a fin de estimar la confiabilidad estructural.

Al respecto, Chowdhury y Xu (1993) distinguen tres tipos de métodos numéricos aproximados de nivel 2 para evaluar la confiabilidad de obras geotécnicas:

- Métodos de primer orden y segundos momentos (FOSM).
- Método de Simulación de Monte Carlo.
- Método de Estimación Puntual de Rosenblueth (1975) (PEM).

### Nivel 3

En este nivel se efectúa el análisis de confiabilidad de un sistema estructural basado en el cálculo exacto de la probabilidad de falla, utilizando las distribuciones de las variables del problema.

Este análisis de confiabilidad constituye el método más complejo. Todas las variables aleatorias quedan descritas por su distribución de probabilidad y se requiere el conocimiento de la distribución de la función de estado límite; la probabilidad de falla se evalúa a partir del cálculo de las integrales de convolución apropiadas, lo que generalmente representa una tarea formidable.

A pesar de que los métodos de nivel 3 generalmente no son aplicables a casos reales debido a las dificultades teóricas y numéricas encontradas, son necesarios para verificar la validez y precisión de los métodos simplificados de nivel 1 y 2.

## 4.3 Análisis de confiabilidad.

### 4.3.1 Problema básico.

El problema de la confiabilidad de sistemas ingenieriles puede ser básicamente tratado como un problema de *oferta vs demanda*. En otras palabras, este problema consiste en la determinación del grado en que la capacidad de oferta satisface los requerimientos de demanda. Preocupa la certeza de que la resistencia de la estructura (oferta) sea suficiente para soportar las solicitaciones máximas aplicadas (demanda), durante la vida útil del sistema.

En estos términos la confiabilidad de un sistema puede ser medida de forma más realista en términos probabilistas. Para tal propósito se definen las siguientes variables aleatorias:

$R$  = Capacidad de oferta.

$S$  = Demanda.

El objetivo del análisis de confiabilidad es entonces evaluar la probabilidad  $P[R > S]$  a través de la vida útil o alguna vida específica del sistema ingenieril. Es por ello que esta probabilidad representa una medida realista de la confiabilidad del sistema. Inversamente, la probabilidad del

evento complementario  $P[R < S]$  constituye la medida de la *no confiabilidad* o *probabilidad de falla*.

En ciertas situaciones simples el tiempo no juega un papel significativo y las solicitudes o demandas pueden expresarse a través de una variable aleatoria continua única (demanda  $S$ ), existiendo un solo estado límite determinista (capacidad de oferta  $R$ ). La definición de la confiabilidad resulta entonces muy sencilla. Si  $S$  tienen una función de densidad de probabilidad  $f_S(s)$ , la confiabilidad  $C$  del sistema se escribe como:

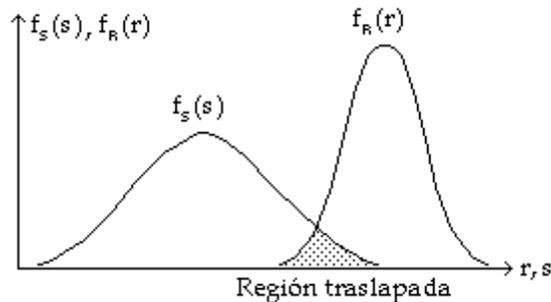
$$\text{Confiabilidad} = C = P[R > S] = P[R - S > 0] = \int_{-\infty}^r f_S(s) ds \quad (4.5)$$

Ahora bien, si la capacidad de oferta es también una variable aleatoria continua e independiente de la anterior y las funciones de densidad de probabilidad o las funciones de distribución de  $R$  y  $S$  están disponibles, esto es,  $f_R(r)$  o  $F_R(r)$  y  $f_S(s)$  o  $F_S(s)$  son conocidas, entonces las probabilidades requeridas pueden formularse como sigue (Kapur y Lamberson, 1977), recordando que  $F'_R(r) = f_R(r)$  (Rétháti, 1988):

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} f_R(r) \left[ \int_{-\infty}^r f_S(s) ds \right] dr = \int_{-\infty}^{\infty} f_S(s) \left[ \int_s^{\infty} f_R(r) dr \right] ds \quad (4.6)$$

La probabilidad de falla  $P[R < S]$  o no confiabilidad, bajo las mismas consideraciones impuestas anteriormente a las variables aleatorias es:

$$F = P[R < S] = 1 - C = \int_{-\infty}^{\infty} F_R(s) f_S(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} [1 - F_S(r)] f_R(r) dr \quad (4.7)$$



**Fig 4.1 Densidad de probabilidad de  $R$  y  $S$ .**

Como se aprecia en la fig 4.1, la región traslapada de las funciones de densidad de probabilidad representa una medida cuantitativa de la probabilidad de falla. Al respecto se puede comentar lo siguiente:

- La región traslapada depende de la posición relativa de  $f_R(r)$  y  $f_S(s)$ ; esto significa que si las dos curvas se separan la probabilidad de falla disminuye, mientras que si se acercan este valor aumenta. La posición relativa entre  $f_R(r)$  y  $f_S(s)$  puede ser medida por medio de la relación  $\frac{\mu_R}{\mu_S}$ , denominada *factor de seguridad central* o mediante la diferencia  $\mu_R - \mu_S$ , llamada *margen de seguridad*.
- La región traslapada también depende del grado de dispersión de  $f_R(r)$  y  $f_S(s)$ , ya que a menor dispersión corresponde una región traslapada y una probabilidad de falla menor,

mientras que si la dispersión es mayor ambos parámetros se incrementan. Estas dispersiones pueden ser expresadas en términos de los coeficientes de variación  $V_R$  y  $V_S$ ; por tanto se puede establecer que  $F = f\left(\frac{\mu_R}{\mu_S}, V_R, V_S\right)$ .

De lo expuesto anteriormente se puede concluir que la confiabilidad y la probabilidad de falla dependen de la forma de  $f_R(r)$  y  $f_S(s)$ ; sin embargo, esta información es difícil de conseguir en la realidad, pudiendo solo establecerse generalmente los primeros momentos de las variables aleatorias.

Las ecs 4.6 y 4.7 suponen independencia de las variables. En general éstas pueden estar correlacionadas, obteniéndose las siguientes ecuaciones para determinar la confiabilidad y la probabilidad de falla en los términos de la función de densidad de probabilidad conjunta:

$$C = \int_0^{\infty} \left[ \int_0^r f_{R,S}(r,s) ds \right] dr \quad (4.8)$$

$$F = \int_0^{\infty} \left[ \int_0^s f_{R,S}(r,s) dr \right] ds \quad (4.9)$$

Si ahora se define a  $M=R-S$ , donde  $M$  es la llamada *variable aleatoria de interferencia o margen de seguridad*, entonces es posible escribir:

$$C = P[M > 0] = \int_0^{\infty} f_M(m) dm \quad (4.10)$$

$$F = P[M \leq 0] = \int_{-\infty}^0 f_M(m) dm \quad (4.11)$$

Se observa que si  $R$  y  $S$  son variables aleatorias independientes mayores o iguales a cero, la confiabilidad  $C$  resulta ser:

$$C = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f_R(m+s) f_S(s) ds dm \quad (4.12)$$

y la probabilidad de falla o no confiabilidad:

$$F = \int_{-\infty}^0 \int_0^{\infty} f_R(m+s) f_S(s) ds dm \quad (4.13)$$

En la figura 4.2 se observa que la confiabilidad  $C$  se puede expresar en términos de  $M$  como  $C = P[M > 0]$ . En este caso, el índice de confiabilidad  $\beta$  se interpreta como el número de desviaciones estándar  $\sigma_M$  que separa a la media  $\mu_M$  del origen.

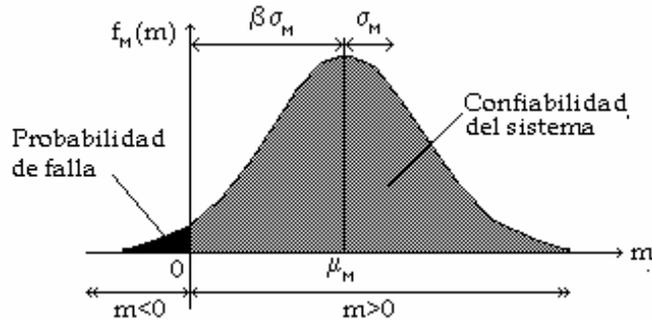


Fig 4.2 Probabilidad de falla y confiabilidad.

### 4.3.2 Confiabilidad en el caso de variables aleatorias con distribuciones comunes.

Si  $R$  y  $S$  son variables aleatorias de oferta y demanda, la forma en que varían puede ser evaluada a partir de observaciones y recurriendo a la estadística. Se obtienen tablas de distribución de frecuencias, histogramas y polígonos de frecuencia. Esta información relativa a la variación de las variables aleatorias solamente es de utilidad si es suficientemente representativa para permitir la estimación de las funciones de densidad de probabilidad o funciones de distribución teóricas (para variables discretas o continuas). Sin embargo, el establecimiento de dichas funciones requiere un gran número de observaciones.

La selección de la función de densidad adecuada a partir de una tabla de distribución de frecuencias se realiza comúnmente por simple ajuste (fig 4.3); a menos que la función de distribución describa correctamente el modelo general de variación, una extrapolación hacia los extremos origina una estimación errónea de la confiabilidad en dichas zonas.

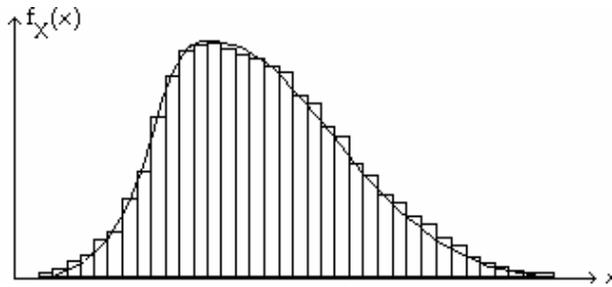


Fig 4.3 Ajuste de la función de densidad  $f_X(x)$ .

Las únicas funciones que evitan este problema son aquellas que representan un modelo definitivo de variación como resultado de ciertas suposiciones básicas relativas a su origen y que son comentadas en los siguientes puntos (Freudenthal, 1956).

#### 4.3.2.1 Distribución normal estándar.

Esta distribución es simétrica y se presenta comúnmente cuando la variable aleatoria  $M$  es la suma de un gran número de variables aleatorias de peso similar, independientes y con distribución arbitraria.

Sea la variable aleatoria de interferencia  $M$  con distribución de probabilidad normal estándar (fig 3.4a), entonces:

$$f_M(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)m^2}, -\infty < m < \infty \quad (4.14)$$

Una notación corta para esta distribución es  $N(0,1)$ , es decir,  $\mu=0$  y  $\sigma=1$ . La confiabilidad y probabilidad de falla están dadas respectivamente por las siguientes expresiones (Rao, 1992):

$$\begin{aligned}
 C &= P[M > 0] = \int_0^{\infty} f_M(m) dm = 1 - \Phi \left[ -\frac{\mu_M}{\sigma_M} \right] \\
 &= 1 - \Phi \left[ -\frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \right] = \Phi \left[ \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \right]
 \end{aligned}
 \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
 F &= P[M \leq 0] = \int_{-\infty}^0 f_M(m) dm = \Phi \left[ -\frac{\mu_M}{\sigma_M} \right] \\
 &= \Phi \left[ -\frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \right] = 1 - \Phi \left[ \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \right]
 \end{aligned}
 \tag{4.16}$$

donde  $\Phi$  es la función de distribución normal estándar de la variable aleatoria de interferencia normalizada.

A la expresión  $\left[ \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \right]$  se le denota por  $\beta$  y se le conoce como *índice de confiabilidad* o *índice de seguridad*.

#### 4.3.2.2 Distribución lognormal.

Esta distribución es sesgada y puede interpretarse que: a) es producto de un gran número de variables independientes, o que b) depende de la acumulación de operaciones aleatorias independientes realizadas en forma consecutiva sobre una variable con acumulación de los efectos previos (por ejemplo la erosión progresiva del diámetro de las partículas en materiales granulares aluviales).

La forma estándar de la función de densidad lognormal (fig 4.4b) es:

$$f_{\theta}(\theta) = \frac{1}{\theta \sigma_{\theta} \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_{\theta}^2} (\ln \theta - \mu_{\theta})^2 \right], \quad \theta > 0
 \tag{4.17}$$

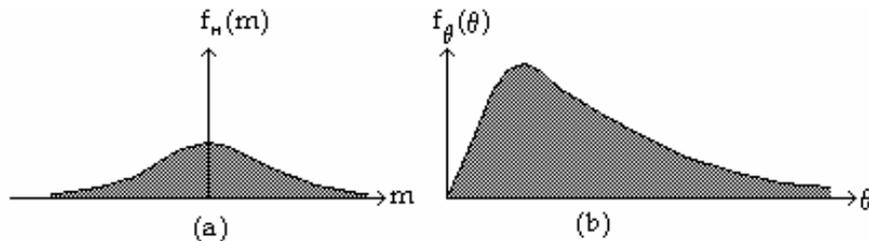


Fig 4.4 Distribuciones de probabilidad (a) normal estándar, (b) lognormal

En el caso de variables aleatorias mayores o iguales a cero, la confiabilidad y falla pueden asociarse a los eventos  $[\theta > I]$  y  $[\theta < I]$ , respectivamente, donde  $\theta = \frac{R}{S}$ .

Cuando las variables aleatorias  $R$  y  $S$  son independientes y con distribución lognormal, es posible evaluar la confiabilidad calculando  $P\left[\frac{R}{S} > I\right]$ , ya que la variable aleatoria  $\theta = \frac{R}{S}$ , conocida como *factor de seguridad* presenta también distribución lognormal. Por tanto

$$C = P[\theta \geq I] = \int_I^{\infty} f_{\theta}(\theta) d\theta \quad (4.18)$$

$$F = P[\theta < I] = \int_0^I f_{\theta}(\theta) d\theta = F_{\theta}(I) \quad (4.19)$$

Para este caso se demuestra (Ang y Cornell, 1974) que

$$F = 1 - \Phi \left[ \frac{\text{Ln} \left( \frac{\mu_R}{\mu_S} \right) \sqrt{\frac{I + V_S^2}{I + V_R^2}}}{\sqrt{\text{Ln}(I + V_R^2) + (I + V_S^2)}} \right] \quad (4.20)$$

$$C = \Phi \left[ \frac{\text{Ln} \left( \frac{\mu_R}{\mu_S} \right) \sqrt{\frac{I + V_S^2}{I + V_R^2}}}{\sqrt{\text{Ln}(I + V_R^2) + (I + V_S^2)}} \right] \quad (4.21)$$

Si  $V_R, V_S \leq 0.30$ , entonces

$$F \approx 1 - \Phi \left[ \frac{\text{Ln} \left( \frac{\mu_R}{\mu_S} \right)}{\sqrt{V_R^2 - V_S^2}} \right] \quad (4.22)$$

$$C \approx \Phi \left[ \frac{\text{Ln} \left( \frac{\mu_R}{\mu_S} \right)}{\sqrt{V_R^2 - V_S^2}} \right] \quad (4.23)$$

donde:

$V_R =$  coeficiente de variación de  $R$ .

$V_S =$  coeficiente de variación de  $S$ .

De la misma manera es posible demostrar (Ang y Tang, 1984) que

$$F = \Phi \left[ -\frac{\lambda_\theta}{\sigma_\theta} \right] = 1 - \Phi \left[ \frac{\text{Ln} \frac{R_M}{S_M}}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \right] \quad (4.24)$$

$$C = \Phi \left[ \frac{\text{Ln} \left( \frac{R_M}{S_M} \right)}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \right] \quad (4.25)$$

donde:

$$\lambda_\theta = E(\text{Ln } \theta).$$

$$\sigma_\theta^2 = \text{Var}(\text{Ln } \theta).$$

$R_M = \text{Mediana de } R.$

$S_M = \text{Mediana de } S.$

En este caso la confiabilidad es función de  $\theta_M = \frac{R_M}{S_M}$ , llamado *factor mediano de seguridad*, la

desviación estándar es  $\sigma_\theta = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}$  y la razón  $\frac{\lambda_\theta}{\sigma_\theta} = \beta$  es también conocida como índice de confiabilidad.

### 4.3.3 Confiabilidad asociada a un estado límite.

Como se mencionó anteriormente, el cálculo de la confiabilidad y de la probabilidad de falla de un sistema ingenieril requiere del conocimiento de las distribuciones  $f_R(r)$  y  $f_S(s)$  o de la distribución conjunta  $f_{R,S}(r,s)$ . En la práctica esta información no está disponible o es difícil de obtener debido a la insuficiencia de datos. Además, aún cuando las distribuciones requeridas puedan ser especificadas, la exacta evaluación de las probabilidades generalmente requiere la integración de las ecs 4.6 a 4.13, lo cual puede resultar impráctico; como una alternativa práctica se puede recurrir a la utilización de distribuciones normales equivalentes como una aproximación, tal como se verá más adelante. A lo anterior tiene que sumarse el hecho de que las variables  $R$  y  $S$  son a su vez funciones de otras variables básicas.

Frecuentemente la información estadística disponible puede ser suficiente solo para evaluar el primer y segundo momentos de las variables aleatorias. Por tanto, las medidas prácticas de seguridad o confiabilidad deben estar limitadas a funciones de estos dos momentos.

Teniendo en cuenta la variable aleatoria margen de seguridad,  $M = R - S$ , el *estado de seguridad* del sistema puede ser definido como  $[M > 0]$ , mientras que el *estado de falla* es el evento  $[M < 0]$ . La frontera que separa al estado de seguridad del de falla es el *estado límite*, definido por la ecuación  $M = 0$ .

En el espacio de las variables normalizadas  $R'$  y  $S'$  la ecuación del estado límite,  $M = 0$ , resulta ser:

$$M = \sigma_R R' - \sigma_S S' + \mu_R - \mu_S = 0 \quad (4.26)$$

que representa una línea recta como se muestra en la figura 4.5. La distancia desde esta línea de falla al origen es en sí misma una medida de confiabilidad; es posible demostrar (Ang y Tang, 1984) que:

$$d = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (4.27)$$

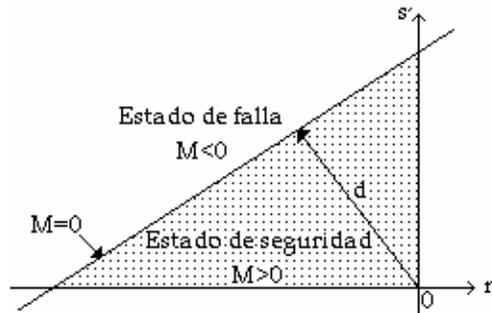


Fig 4.5 Espacio de las variables normalizadas  $R'$  y  $S'$ .

De acuerdo con la ec 4.15 se puede observar que para  $R$  y  $S$  con distribución normal estándar la distancia  $d$  es también el índice de confiabilidad  $\beta$ . Entonces  $d = \beta$  y la confiabilidad es  $C = \Phi(d)$ .

En general, el análisis de confiabilidad de un sistema ingenieril real implica múltiples variables aleatorias básicas de diseño de todos tipos y relaciones generalmente no lineales entre ellas, siendo la oferta y la demanda funciones de varias variables. En un amplio sentido, la confiabilidad de un sistema ingenieril puede ser definida como la probabilidad de ejecutar su función o misión objetivo. En este contexto y para el propósito de una formulación general se define una *función de comportamiento* o *función de estado* bajo sollicitaciones de operación, accidentales o ambientales (Shinozuka, 1983) como:

$$M = g(\mathbf{X}) = g(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (4.28)$$

donde  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  es un vector de variables básicas (de sollicitación y resistencia) de estado o diseño del sistema y la función  $g(\mathbf{X})$  determina el comportamiento o estado del mismo.

Al respecto conviene observar que en la evaluación de la confiabilidad de una obra de ingeniería debe distinguirse entre variables aleatorias y de control. Las primeras se refieren a aquellos parámetros sobre los cuales el diseñador o el constructor no puede o no desea, por motivos económicos o de otra índole, ejercer un adecuado dominio, y que están asociados a fenómenos físicos que son aleatorios por naturaleza o sobre los cuales no se cuenta con información adecuada o completa para efectuar predicciones y estimaciones. Las variables de control tienen por lo contrario un carácter determinista. Su selección, que es parte fundamental del diseño, puede incidir fuertemente sobre la confiabilidad del sistema. En el vector de variables de la ec. 4.28, intervienen ambos tipos de variables.

En estos términos, el requerimiento límite de comportamiento puede ser definido como  $g(\mathbf{X})=0$ , que representa el estado límite del sistema. Se establece por tanto que:

$$[g(\mathbf{X}) > 0] = \text{Estado de seguridad} \quad (4.29)$$

$$[g(\mathbf{X}) < 0] = \text{Estado de falla} \quad (4.30)$$

Geoméricamente la ecuación del estado límite  $g(\mathbf{X})=0$  es una superficie  $n$ -dimensional que es llamada *superficie de falla*. En este caso un lado de la superficie de falla es el estado seguro  $g(\mathbf{X})>0$ , mientras que el otro es el estado de falla  $g(\mathbf{X})<0$ .

Por tanto, si la distribución de probabilidad conjunta de las variables de diseño  $X_1, X_2, \dots, X_n$  es  $f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)$ , la probabilidad del estado seguro o confiabilidad es:

$$C = P_S = \int_{\{g(\mathbf{X})>0\}} \dots \int f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (4.31)$$

que puede ser escrita de forma breve como:

$$C = P_S = \int_{\{g(\mathbf{x})>0\}} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (4.32)$$

La ec 4.32 es simplemente la integral de volumen de la función  $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$  sobre la región de seguridad  $g(\mathbf{X})>0$ . De igual forma la probabilidad de falla es la integral de volumen sobre la región de falla es:

$$F = P_F = \int_{\{g(\mathbf{X})<0\}} \dots \int f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (4.33)$$

brevemente:

$$P_F = F = \int_{g(\mathbf{x})<0} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (4.34)$$

En general, las variables básicas  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de las ecuaciones anteriores pueden estar correlacionadas. Sin embargo, se trata primero el caso de variables no correlacionadas, introduciendo un conjunto de variables normalizadas o reducidas no correlacionadas (Freudenthal, 1956):

$$X'_i = \frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}}; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.35)$$

Evidentemente los estados de seguridad y falla pueden también ser expresados en el espacio de las variables reducidas anteriores, separados por la ecuación de estado límite apropiada. En el caso de dos variables esta situación puede ser representada como en la figura 4.6.

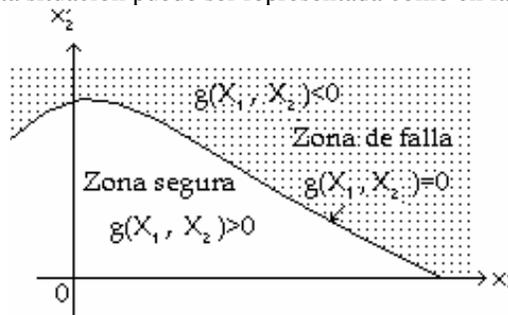


Fig 4.6 Estados de falla y seguridad en el espacio de las variables reducidas.

En términos de las variables reducidas,  $X'_i$ , la ecuación de estado límite es:

$$g(\sigma_{x_1} X'_1 + \mu_{x_1}, \dots, \sigma_{x_n} X'_n + \mu_{x_n}) = 0 \quad (4.36)$$

Se observa en la fig 4.6 que conforme la superficie de estado límite (o superficie de falla)  $g(\mathbf{X})=0$  se aleja o acerca al origen, la región de seguridad  $g(\mathbf{X})>0$  crece o decrece respectivamente. Por tanto, la posición de la superficie de falla relativa al origen de las variables reducidas determina la seguridad o confiabilidad del sistema. La posición de la superficie de falla puede ser representada por la mínima distancia desde la superficie  $g(\mathbf{X})=0$  al origen de las variables reducidas (Hasofer y Lind, 1974). Shinozuka (1983) ha mostrado que el punto sobre la superficie de falla con la mínima distancia al origen es el punto de falla de máxima verosimilitud. Entonces, en un sentido aproximado, esta distancia mínima puede ser usada como una medida de confiabilidad.

#### 4.3.4 Confiabilidad de sistemas.

El problema considerado anteriormente involucra estrictamente un sólo modo de falla, definido por un sólo estado límite. Sin embargo, los problemas de ingeniería frecuentemente involucran múltiples modos de falla; esto es, pueden existir varios modos potenciales de falla y la ocurrencia de cualquiera de ellos produce la falla del sistema o de sus componentes. En general, los diferentes modos de falla pueden estar correlacionados (cuando menos de manera parcial).

En realidad, en un sistema ingenieril complejo multicomponente, las posibilidades de ocurrencia de falla de un sistema pueden estar tan involucradas que es necesario el establecimiento de un modelo para identificar todos los mecanismos potenciales y sus respectivas consecuencias. En estos casos los modelos de *árboles de falla* y *de eventos* son muy útiles. El diagrama de árbol de falla descompone al evento principal de falla (evento tope) en uniones e intersecciones de subeventos o combinaciones de los mismos; el proceso de descomposición se lleva a cabo hasta que las probabilidades de los subeventos pueden ser evaluadas como probabilidades de falla de modo simple.

Los cálculos de estas últimas probabilidades requieren la aplicación de las ecuaciones descritas anteriormente. La consecuencia de un evento de falla particular (evento tope) puede depender de la secuencia de eventos posteriores al mismo. La identificación sistemática de la secuencia posible de eventos se realiza a través de un árbol de eventos.

##### 4.3.4.1 Modos de falla múltiple.

La confiabilidad de un sistema multicomponente es esencialmente un problema de modos de falla múltiples; esto es, la falla de los diferentes componentes o grupos de componentes constituyen los diferentes modos de falla del sistema. La consideración de múltiples modos de falla es, por tanto, fundamental para resolver el problema de confiabilidad de un sistema. La identificación de los modos individuales de falla y la evaluación de sus respectivas probabilidades constituyen en sí un problema complejo.

Considerando un sistema con  $k$  modos potenciales de falla resulta evidente que cada modo presenta a su vez diferentes funciones de comportamiento.

Suponiendo que estas funciones se pueden expresar como:

$$g_j(\mathbf{X}) = g_j(X_1, X_2, \dots, X_n); \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (4.37)$$

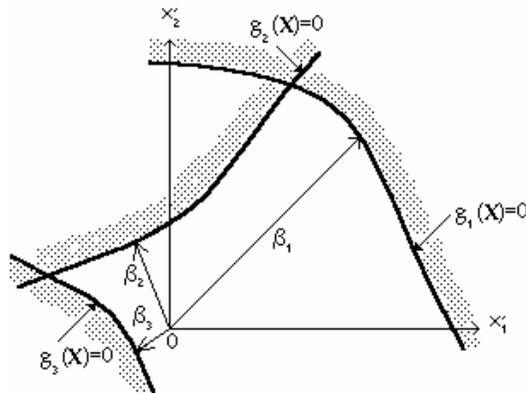
de tal suerte que los eventos individuales de falla son:

$$E_j = [g_j(\mathbf{X}) < 0] \quad (4.38)$$

entonces los complementos de  $E_j$  son los eventos de seguridad, esto es:

$$\bar{E}_j = [g_j(\mathbf{X}) > 0] \quad (4.39)$$

En el caso de dos variables los eventos anteriores pueden ser representados gráficamente como en la figura 4.7, en la cual se observan tres modos de falla expresados por las ecuaciones de estado límite  $g_j(\mathbf{X}) = 0, j = 1, 2, \dots, n$ .



**Fig 4.7 Modos múltiples de falla.**

La confiabilidad de un sistema corresponde a la probabilidad del evento  $\bar{E}$  tal que ninguno de los  $k$  modos de falla ocurre; es decir:

$$\bar{E} = \bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \cap \dots \cap \bar{E}_k \quad (4.40)$$

Contrariamente, el evento de falla es:

$$E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k \quad (4.41)$$

La ec 4.41 literalmente significa que puede ocurrir uno o más de los eventos potenciales de falla. Teóricamente, por tanto, la confiabilidad o probabilidad de seguridad del sistema puede expresarse como la integral multidimensional:

$$C = P_s = \int_{(\bar{E}_1 \cap \dots \cap \bar{E}_k)} \dots \int f_{x_1, x_2, \dots, x_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (4.42)$$

mientras que la probabilidad de falla del sistema es:

$$F = P_F = \int_{(E_1 \cup \dots \cup E_k)} \dots \int f_{x_1, x_2, \dots, x_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (4.43)$$

#### 4.3.4.2 Fronteras de probabilidad.

El cálculo de la confiabilidad o de la probabilidad de falla de un sistema por medio de las ecs 4.42 o 4.43 es generalmente una tarea muy difícil que se resuelve por medio de aproximaciones.

La probabilidad asociada al evento de la ec. 4.40 (confiabilidad del sistema) puede calcularse a partir de las probabilidades de cada evento individual (confiabilidad en cuanto algún modo particular) y de sus intersecciones utilizando la fórmula de Poincaré:

$$P[\bar{E}] = P[\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \dots \bar{E}_K] = \sum_i P[\bar{E}_i] - \sum_{i \neq j} P[\bar{E}_i \cap \bar{E}_j] + \sum_{i \neq j \neq l} P[\bar{E}_i \cap \bar{E}_j \cap \bar{E}_l] \dots \quad (4.44)$$

Otra estrategia consiste en obtener límites o “fronteras” superior e inferior de la correspondiente probabilidad (Ditlevsen, 1996).

#### FÓRMULA DE POINCARÉ

La probabilidad asociada al evento de la ec. 4.41 (probabilidad de falla del sistema) puede calcularse a partir de las probabilidades de cada evento individual (probabilidad de falla por algún modo particular) y de sus intersecciones utilizando la fórmula de Poincaré:

$$P[E] = P[E_1, E_2, \dots, E_K] = \sum_i P[E_i] - \sum_{i \neq j} P[E_i, E_j] + \sum_{i \neq j \neq l} P[E_i, E_j, E_l] - \dots \quad (4.45)$$

En muchos casos, bastará con conservar los primeros términos de esta expresión para obtener una precisión adecuada. Esta expresión resulta particularmente útil cuando se recurre al método de Monte Carlo.

### 4.4 Métodos de cálculo.

#### 4.4.1 Introducción.

Resulta importante establecer que las funciones de densidad de probabilidad de las variables aleatorias que intervienen en el cálculo de la confiabilidad no son conocidas en la práctica. Se cuenta solamente con estimaciones de algunos parámetros, generalmente los primeros momentos estadísticos, a partir de un número limitado de observaciones económicamente factibles.

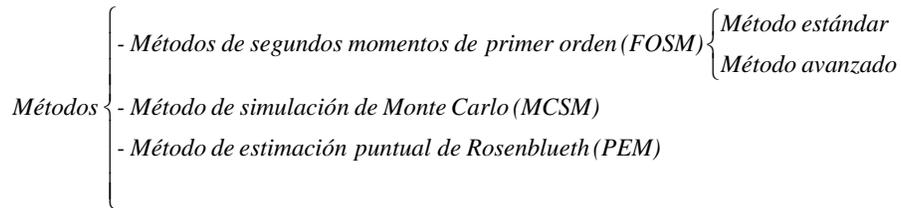
Como se estableció anteriormente, la probabilidad del estado seguro o confiabilidad de un sistema ingenieril se puede expresar como:

$$C = P_S = \int_{g(\mathbf{X}) > 0} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (4.46)$$

donde  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  representa la función de densidad conjunta de  $\mathbf{X}$ . Como se ha citado, la dificultad para la aplicación de la ec 4.46 radica en dos puntos:

- Resulta impráctico el establecimiento de la función de densidad conjunta con base en un grupo de datos estadísticos insuficiente, particularmente para el rango crítico de variables aleatorias con gran desviación estándar.
- Prácticamente para todos los casos de interés ingenieril, la integración analítica multidimensional sobre el dominio irregular  $g(\mathbf{X}) > 0$  es una tarea muy compleja.

Con el propósito de tener un panorama más amplio se presenta el siguiente cuadro sinóptico con los métodos numéricos que se pueden utilizar para el cálculo de la confiabilidad.



#### 4.4.2 Métodos de primer orden y segundos momentos.

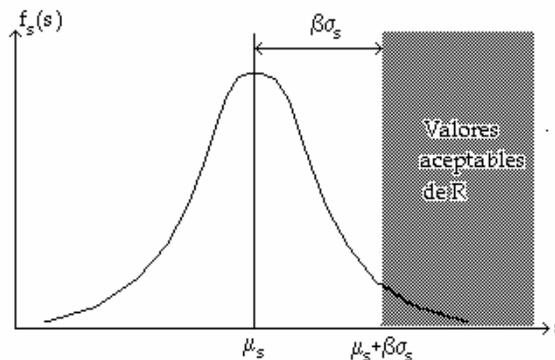
Con el objeto de exponer el significado de confiabilidad en términos de segundos momentos, es preferible iniciar el análisis con un problema que involucra una sola variable aleatoria. Suponiendo que un sistema que tiene una resistencia determinista  $R$  es solicitado por una carga aleatoria  $S$ , la falla ocurre si  $S > R$ . Bajo estas circunstancias el análisis probabilista consiste en evaluar la probabilidad del evento de falla  $P(S > R)$ . Si esta probabilidad es menor que un valor pequeño  $\varepsilon$  *socialmente aceptado* (Hasofer y Lind, 1974) el diseño es válido.

Debido a que generalmente no se cuenta con información suficiente relacionada con la distribución de  $S$ , se reemplaza el criterio  $P(S > R) < \varepsilon$  por un criterio que involucra únicamente a la media y a la desviación estándar de  $S$ .

Este criterio es

$$R > \mu_s + \beta\sigma_s \tag{4.47}$$

y se muestra en la fig 4.8:



**Fig 4.8 Índice de confiabilidad para una variable.**

El máximo valor de  $\beta$  que satisface la ecuación anterior se denomina *índice de confiabilidad de diseño*.

El significado de la ec 4.47 establece que se espera que la mayoría de la probabilidad de la variable aleatoria  $S$  quede concentrada entre la media y algunas desviaciones estándar. Es por ello que este criterio asegura esencialmente que la máxima probabilidad de  $S$  está asociada con aquellos valores ubicados en la región segura  $S < R$ .

Generalizando, para cualquier carga  $S$  se puede definir una región segura  $G(S)$ , consistente en el grupo de valores de  $S$  para los cuales el sistema no falla.

El criterio de confiabilidad en términos de segundos momentos consiste en que el intervalo  $[\mu_s - \beta\sigma_s, \mu_s + \beta\sigma_s]$  se encuentre contenido completamente en la región  $G(S)$ .

Considerando los conceptos anteriores se puede definir una *carga normalizada*  $S' = \frac{S - \mu_s}{\sigma_s}$ .

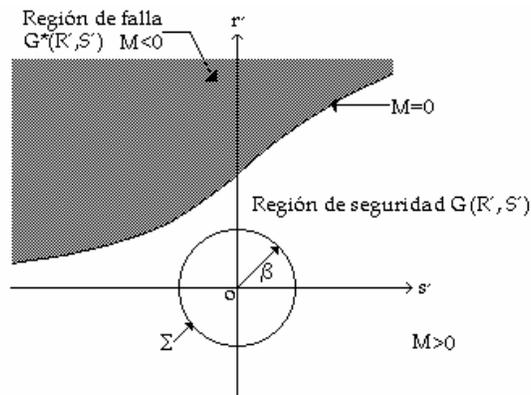
En el espacio de esta nueva variable se ubica una nueva región de seguridad  $G(S')$ , y el criterio de confiabilidad en términos de segundos momentos estipula que el intervalo  $[-\beta, +\beta]$  debe estar completamente contenido en  $G(S')$ . En otras palabras, si se denota a la zona de falla por  $G^*(S')$ , se requiere que la distancia desde el origen hasta ésta sea mayor que  $\beta$ .

De manera más concreta se puede establecer que la distancia desde el punto  $\mu_s$  hasta la región de falla  $G^*(S)$ , cuando  $S$  se mide en unidades de desviación estándar, debe ser mayor que  $\beta$ .

De esta forma se puede generalizar el criterio de confiabilidad en términos de segundos momentos a un problema que involucra más de una variable aleatoria. Para ello, es preferible ilustrar el método con un problema de dos variables.

Suponiendo que la resistencia  $R$  del análisis anterior adopta la forma de variable aleatoria y que el criterio de falla determinista establece que  $P(R-S) < 0$ , el plano  $R$  y  $S$  se divide en una región segura  $G(R, S)$  y en una de falla  $G^*(R, S)$ .

Asumiendo que  $R$  y  $S$  no están correlacionadas e introduciendo las variables aleatorias normales estandarizadas  $R'$  y  $S'$ , el criterio de falla divide ahora el plano de  $R'$  y  $S'$  en una región de seguridad  $G(R', S')$  y en una región de falla  $G^*(R', S')$ . Se requiere que el círculo  $\Sigma$ , con radio  $\beta$  centrado en el origen, esté contenido completamente dentro de la región de seguridad  $G(R', S')$ . Este criterio se muestra en la figura 4.9.



**Fig 4.9 Índice de confiabilidad para dos variables.**

Este criterio generalizado se basa en el hecho de que se espera que la mayoría de la probabilidad conjunta de  $R$  y  $S$  esté concentrada en el círculo  $\Sigma$  y esté asociada con sus valores seguros.

Cabe destacar que la utilización de variables normalizadas asegura que las medidas a lo largo de los ejes de la fig 4.9 sean comparables. En caso de no utilizar variables normalizadas y tomar el círculo centrado en  $[\mu_R, \mu_S]$ , cualquier incremento de su radio agrega regiones de gran probabilidad cerca del eje de la variable aleatoria con mayor desviación estándar y regiones de menor probabilidad cerca del eje de la variable aleatoria cuya desviación estándar es menor (Hasofer y Lind, 1974).

#### 4.4.2.1 Método estándar.

Este método considera el caso especial de las *funciones de comportamiento lineal*. A parte de su propia utilidad, ciertos aspectos del caso lineal constituyen la base para una aproximación a las funciones de comportamiento no lineal que son analizadas por el método avanzado.

Las funciones de comportamiento lineal presentan la siguiente forma:

$$g(\mathbf{X}) = a_o + \sum_i a_i X_i \quad (4.48)$$

donde  $a_o$  y  $a_i$  son constantes. La ecuación correspondiente de estado límite es:

$$a_o + \sum_i a_i X_i = 0 \quad (4.49)$$

En términos de las variables normales estandarizadas la ecuación de estado límite adopta la siguiente forma:

$$a_o + \sum_i a_i (\sigma_{X_i} X'_i + \mu_{X_i}) = 0 \quad (4.50)$$

En el espacio tridimensional, la ecuación anterior se transforma en:

$$a_o + a_1 (\sigma_{X_1} X'_1 + \mu_{X_1}) + a_2 (\sigma_{X_2} X'_2 + \mu_{X_2}) + a_3 (\sigma_{X_3} X'_3 + \mu_{X_3}) = 0 \quad (4.51)$$

que representa la superficie plana en el espacio tridimensional  $x'_1, x'_2, x'_3$  mostrada en la figura 4.10.

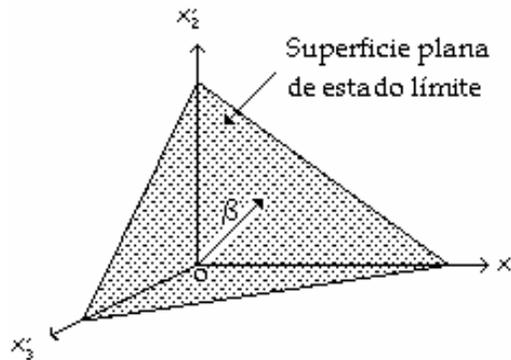


Fig 4.10 Superficie de estado límite lineal en el espacio de  $X'$ .

La distancia del plano de falla al origen del espacio de las variables reducidas  $X'$  es (Ang y Tang, 1987).

$$\beta = \frac{a_o + \sum_i a_i \mu_{X_i}}{\sqrt{\sum_i (a_i \sigma_{X_i})^2}} \quad (4.52)$$

Anteriormente se especificó que para dos variables normales estandarizadas no correlacionadas,  $R'$  y  $S'$ , la confiabilidad es directamente una función de la distancia entre la línea de falla y el origen del espacio de las variables estandarizadas, esto es, la distancia  $\beta$ . Este resultado puede ser generalizado, es decir, si las variables aleatorias  $X_1, X_2, \dots, X_n$  son variables normales estandarizadas no correlacionadas, la confiabilidad es:

$$\begin{aligned}
C = P_S &= P\left(a_o + \sum_i a_i X_i > 0\right) \\
&= 1 - \Phi\left[\frac{-(a_o + \sum a_i \mu_{X_i})}{\sqrt{\sum (a_i \sigma_{X_i})^2}}\right] \\
&= \Phi\left[\frac{a_o + \sum a_i \mu_{X_i}}{\sqrt{\sum (a_i \sigma_{X_i})^2}}\right]
\end{aligned}
\tag{4.53}$$

Comparando las ecs 4.52 y 4.53 se observa que el argumento dentro del corchete de la ecuación 4.53 es la distancia  $\beta$ . Por tal motivo la confiabilidad es nuevamente función de la distancia entre el plano de falla  $g(\mathbf{X})$  y el origen del espacio de las variables normales estandarizadas. Así, en el caso general de  $n$  variables normales estandarizadas no correlacionadas, la confiabilidad es:

$$C = \Phi(\beta) \tag{4.54}$$

#### 4.4.2.2 Métodos avanzados.

En la evaluación de la confiabilidad generalmente están involucradas funciones no lineales de comportamiento  $g(\mathbf{X})$ , las cuales son analizadas por el método avanzado. En estos casos la ecuación de estado límite  $g(\mathbf{X})=0$  tampoco es lineal, por lo que no existe una distancia única desde la superficie de falla hasta el origen de las variables reducidas como en el caso anterior.

Para propósitos prácticos, el índice de confiabilidad puede evaluarse de manera aproximada. De acuerdo con Shinozuka (1983) el punto  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  sobre la superficie de falla con mínima distancia al origen de las variables normales estandarizadas representa el punto de falla más probable. En este caso el plano tangente a la superficie de falla en  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  puede ser utilizado para aproximar la superficie de falla no lineal actual, lo que permite evaluar el índice de confiabilidad como en el caso anterior. Según la superficie de falla sea convexa o cóncava hacia el origen, esta aproximación esta del lado de la seguridad o inseguridad, respectivamente, tal como se ilustra en la fig 4.11 para el caso de dos variables normales estandarizadas no correlacionadas.

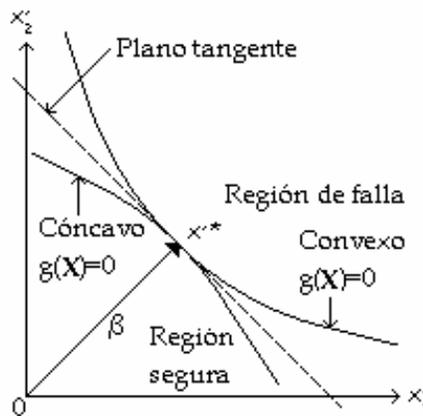


Fig 4.11 Plano tangente a  $g(\mathbf{X})$  en  $\mathbf{x}^*$ .

El plano tangente en  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  se obtiene por medio de la expansión de la superficie de estado límite en serie de Taylor (Shinozuka, 1983) en el punto  $\mathbf{x}^*$  sobre la superficie de falla  $g(\mathbf{x}^*) = 0$ ; esto es:

$$g(X_1, X_2, \dots, X_n) = g(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) + \sum_{i=1}^n (X_i - x_i^*) \left( \frac{\partial g}{\partial X_i} \right)_* + \frac{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (X_i - x_i^*) (X_j - x_j^*)}{\left( \frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j} \right)_*} + \dots \quad (4.55)$$

donde las derivadas son evaluadas en  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ . Pero  $g(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0$  sobre la superficie de falla; por tanto:

$$g(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n (X_i - x_i^*) \left( \frac{\partial g}{\partial X_i} \right)_* + \frac{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (X_i - x_i^*) (X_j - x_j^*)}{\left( \frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j} \right)_*} + \dots \quad (4.56)$$

recordando que:

$$X_i - x_i^* = (\sigma_{X_i} X'_i + \mu_{X_i}) - (\sigma_{X_i} x_{i^*}' + \mu_{X_i}) = \sigma_{X_i} (X'_i - x_{i^*}') \quad (4.57)$$

e introduciendo el vector gradiente

$$\mathbf{G} = \left( \frac{\partial g}{\partial X'_1}, \frac{\partial g}{\partial X'_2}, \dots, \frac{\partial g}{\partial X'_n} \right) \quad (4.58)$$

donde

$$\frac{\partial g}{\partial X_i} = \frac{\partial g}{\partial X'_i} \left( \frac{dX'_i}{dX_i} \right) = \frac{1}{\sigma_{X_i}} \left( \frac{\partial g}{\partial X'_i} \right) \quad (4.59)$$

entonces

$$g(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n (X'_i - x_{i^*}') \left( \frac{\partial g}{\partial X'_i} \right)_* + \dots \quad (4.60)$$

En la aproximación de primer orden, es decir, truncando la serie anterior hasta el término de primer orden, la ec 4.60 es:

$$g(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n (X'_i - x_{i^*}') \left( \frac{\partial g}{\partial X'_i} \right)_* = 0 \quad (4.61)$$

donde las derivadas parciales  $\left(\frac{\partial g}{\partial X_i'}\right)_*$  son evaluadas en  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ .

Con base en la aproximación anterior, la varianza aproximada de primer orden es:

$$\sigma_g^2 \cong \sum_{i=1}^n \sigma_{x_i}^2 \left(\frac{\partial g}{\partial X_i'}\right)_*^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i'}\right)_*^2 \quad (4.62)$$

mientras que el valor medio de la función  $g(\mathbf{X})$  es

$$\mu_g \cong - \sum_{i=1}^n x_i^* \left(\frac{\partial g}{\partial X_i'}\right)_* \quad (4.63)$$

En base a la aproximación anterior, la distancia desde el *plano tangente mínimo* al origen de las variables estandarizadas es el índice de confiabilidad apropiado, el cual puede utilizarse para representar la medida de la confiabilidad.

A partir de las ecs 4.62 y 4.63 el índice de confiabilidad se define como:

$$\beta = \frac{\mu_g}{\sigma_g} = \frac{- \sum_{i=1}^n x_i^* \left(\frac{\partial g}{\partial X_i'}\right)_*}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i'}\right)_*^2}} \quad (4.64)$$

Se debe enfatizar que las aproximaciones de primer orden de  $\mu_g$  y  $\sigma_g$  derivadas anteriormente deben ser evaluadas en el punto sobre la superficie de falla donde  $g(\mathbf{X})=0$ . En algunos trabajos anteriores (p.e. Cornell, 1969; Ang y Cornell, 1974) las aproximaciones de primer orden se evaluaron a partir de las medias  $(\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \dots, \mu_{x_n})$ , lo que indujo errores significativos para

funciones  $g(\mathbf{X})$  no lineales, ya que la correspondiente relación  $\frac{\mu_g}{\sigma_g}$  evaluada de esa forma puede no ser la distancia desde el origen del espacio de las variables reducidas hasta la superficie de falla no lineal.

Más aún, las aproximaciones de primer orden evaluadas a partir de las medias de las variables básicas originan el problema de invarianza para estados límite equivalentes (Hasofer y Lind, 1974); esto es, el resultado depende de la manera en que un determinado evento de estado límite se defina. Por ejemplo, para los eventos de estado límite equivalente  $[R - S < 0]$  y  $\left[\frac{R}{S} < 1\right]$ , la aproximación de primer orden evaluada a partir de las medias proporciona valores diferentes del índice de confiabilidad. Tal problema de invarianza puede evitarse si las aproximaciones de primer orden se evalúan en un punto sobre la superficie de falla.

En el presente caso, el punto apropiado de tangencia sobre la superficie de falla no se conoce *a priori*. En consecuencia, la determinación del índice de confiabilidad requerido no es tan simple como en el caso lineal, a pesar de que se involucra una aproximación de este tipo.

#### 4.4.3 Método de simulación de Monte Carlo.

*Simulación* es el proceso por medio del cual se reemplaza el mundo real con base en un conjunto de hipótesis y modelos concebidos en la realidad.

La simulación de Monte Carlo es una herramienta poderosa que puede ser aplicada para el análisis estadístico de la incertidumbre en problemas de ingeniería. Es particularmente útil en problemas complejos en los cuales una gran cantidad de variables aleatorias están relacionadas a través de ecuaciones no lineales.

En el campo de la ingeniería civil, la simulación puede aplicarse para predecir o estudiar el comportamiento y/o respuesta de un sistema; a través de repartidas simulaciones se puede evaluar su sensibilidad ante variaciones de sus parámetros constitutivos, pudiéndose aplicar este método para evaluar diseños alternativos o para determinar diseños óptimos. El método de Monte Carlo resulta especialmente útil para problemas que implican variables aleatorias con distribución de probabilidad conocida o supuesta; involucra una serie de repeticiones del proceso de simulación, empleando en cada una un conjunto particular de valores de la variable aleatoria generada de acuerdo con sus distribuciones de probabilidad correspondientes.

Repitiendo el proceso se puede obtener una muestra de soluciones, cada una correspondiente a un conjunto diferente de valores de la variable aleatoria. Los resultados de un proceso de simulación de Monte Carlo pueden presentarse en forma de histogramas y ser tratados aplicando métodos de estimación estadística. Por ello el método de simulación de Monte Carlo constituye también una técnica de muestreo y como tal comparte los mismos problemas de la teoría correspondiente.

##### 4.4.3.1 Generación de números aleatorios.

Una de las principales tareas en la aplicación del método de simulación de Monte Carlo consiste en la sustitución de cada variable aleatoria por su correspondiente conjunto de números con las mismas propiedades estadísticas, denominados *números aleatorios*.

Para simulaciones de Monte Carlo empleando computadoras digitales es necesaria la generación de números aleatorios con distribuciones de probabilidad específica. Esto se lleva a cabo sistemáticamente para cada variable generando en primer lugar un número aleatorio uniformemente distribuido entre 0 y 1 y posteriormente, por medio de una transformación adecuada, obteniendo el número aleatorio correspondiente con la distribución de probabilidad especificada.

Las bases para este procedimiento son las siguientes (Ang y Tang, 1984):

Sea  $X$  la variable aleatoria que se pretende muestrear. Si se considera una variable  $U$  con densidad de probabilidad uniforme:

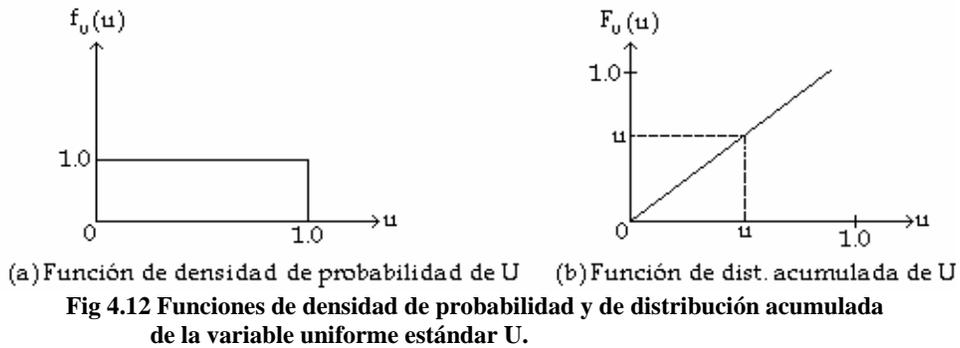
$$f_U(u) = \begin{cases} 0; & u < 0 \\ 1; & 0 \leq u \leq 1 \\ 0; & u > 1 \end{cases} \quad (4.65)$$

y con función de distribución:

$$F_U(u) = \begin{cases} 0; & u < 0 \\ u; & 0 \leq u \leq 1 \\ 1; & u > 1 \end{cases} \quad (4.66)$$

es posible muestrear la variable  $U$  mediante números aleatorios comprendidos entre 0 y 1 y asociar a cada valor de  $U$  el valor de  $X$  definido como sigue:

$$x = F_X^{-1}(u) \quad (4.67)$$



donde  $F_X^{-1}$  denota la inversa de la función  $F_X$ .

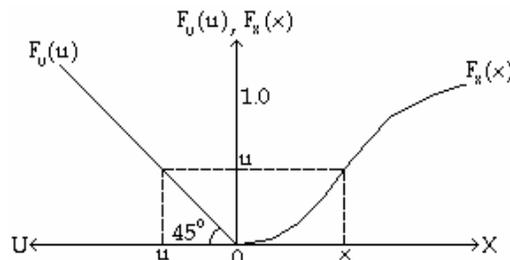
El valor así obtenido de la variable  $X$  tiene una probabilidad acumulada

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= P[F_X^{-1}(U) \leq x] \\ &= P[U \leq F_X(x)] \\ &= F_U[F_X(x)] = F_X(x) \end{aligned} \quad (4.68)$$

Lo que significa que si  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  es un grupo de valores de  $U$ , el correspondiente conjunto de valores obtenidos:

$$x_i = F_X^{-1}(u_i); \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.69)$$

es efectivamente una muestra de valores de la variable aleatoria  $X$  con función de distribución acumulada  $F_X(x)$ .



#### 4.4.3.2 Números aleatorios con distribución uniforme estándar.

A través de las ecs 4.65 a 4.69 se observa que la generación de números aleatorios uniformemente distribuidos entre 0 y 1, es decir, valores de la *variable uniforme estándar*, es básica para la generación de números aleatorios con una distribución general de probabilidad.

Los métodos para la generación de números aleatorios uniformemente distribuidos se basan generalmente en cálculos recursivos de los residuos del módulo  $m$  de una transformación lineal. Un ejemplo de relación recursiva para este propósito es:

$$x_{i+1} = (ax_i + c)(\text{mod } m) \quad (4.70)$$

donde  $a$ ,  $c$  y  $m$  son números enteros no negativos. Si  $k_i$  es la parte entera de la relación  $\frac{ax_i + c}{m}$ , es decir:

$$k_i = \text{Int}\left(\frac{ax_i + c}{m}\right) \quad (4.71)$$

entonces el correspondiente residuo del módulo  $m$  es:

$$x_{i+1} = ax_i + c - mk_i \quad (4.72)$$

Normalizando los valores obtenidos a partir de la ecuación anterior por el módulo  $m$  se obtiene:

$$u_{i+1} = \frac{x_{i+1}}{m} \quad (4.73)$$

que constituye un grupo de números aleatorios entre 0 y 1 con distribución de probabilidad uniforme estándar.

En realidad los números generados por medio de un proceso sistemático tal como el descrito anteriormente pueden ser duplicados exactamente y por ello constituyen un conjunto determinista. Estrictamente hablando, por tanto, tales números aleatorios generados no son realmente aleatorios, por lo que pueden ser denominados *números pseudoaleatorios*.

Los números pseudoaleatorios generados así son cíclicos, es decir, se repiten con un periodo dado menor que  $m$  (Knuth, 1969); por ello, para asegurar la aleatoriedad, el periodo debe ser lo más largo posible, lo que garantiza que los números generados son uniformemente distribuidos y estadísticamente independientes.

Otra relación recursiva común para la generación de números aleatorios es la *generación congruente multiplicativa*:

$$x_{i+1} = ax_i(\text{mod } m) \quad (4.74)$$

y

$$u_i = \frac{x_i}{m} \quad (4.75)$$

#### 4.4.3.3 Cálculo de la confiabilidad.

Debido a la naturaleza aleatoria de los parámetros que influyen en el comportamiento de un sistema ingenieril, existe una posibilidad de que éste no desempeñe su tarea satisfactoriamente.

El método de Monte Carlo puede ser aplicado para estimar la confiabilidad o la probabilidad de falla del sistema. En este método se utiliza un número aleatorio uniformemente distribuido para generar un valor de muestra para cada una de los parámetros aleatorios del sistema. Estos parámetros son entonces utilizados para predecir su comportamiento. El desempeño de las muestras del sistema es comparado con un patrón de comportamiento requerido. Se considera que la muestra es exitosa si el comportamiento requerido es satisfecho; si esto no sucede se considera que la muestra ha fallado. Después de la generación del número predeterminado de muestras, la confiabilidad global del sistema se calcula como:

$$\left( \begin{array}{l} \text{Confiabilidad} \\ \text{del sistema} \end{array} \right) = \left( \frac{\text{Número de muestras exitosas del sistema}}{\text{Número total de muestras generadas en el sistema}} \right) \quad (4.76)$$

#### 4.4.3.4 Tamaño de la muestra y error de simulación.

Es importante evaluar el error involucrado en la estimación de la confiabilidad o probabilidad de falla al aplicar el método de Monte Carlo. Resulta igualmente importante conocer el número de simulaciones requeridas para lograr una precisión específica. Al respecto, es relevante la teoría de la distribución muestral (Cochran, 1980) relativa a muestras de tamaño  $n$  extraídas de una población en las que cada elemento muestreado tiene determinada probabilidad de exhibir (éxito) o no (falla) una propiedad determinada. El análisis de confiabilidad realizado por el Método de Monte Carlo corresponde al problema anterior siendo la probabilidad de éxito  $C$  (confiabilidad) y la de falla  $P_F$ , con:

$$P_F = 1 - C \quad (4.77)$$

Bajo estas consideraciones es posible determinar la desviación estándar del resultado arrojado por el cálculo de confiabilidad considerando que el número de resultados que exhiben la propiedad dentro de la muestra de tamaño  $n$  tiene distribución binomial y que la proporción de resultados con esta característica tiene por tanto una desviación estándar:

$$\sigma_C = \sqrt{\frac{C \cdot P_F}{n}} = \sqrt{\frac{C(1-C)}{n}} \quad (4.78)$$

Vale la pena destacar que para grandes valores de  $n$  ( $n \geq 30$ ) la distribución muestral está muy próxima a una distribución normal.

#### 4.4.4 Método de Estimación Puntual de Rosenblueth.

Emilio Rosenblueth (1975) desarrolló una técnica que permite estimar los primeros momentos de una función continua de variables aleatorias, a partir del conocimiento de los tres primeros momentos de cada variable. La técnica consiste en recurrir a una distribución de probabilidad discreta con los mismos momentos que la densidad continua. Rosenblueth mostró que la técnica se puede generalizar a un número cualquiera de puntos de estimación, sin embargo, en este trabajo nos limitaremos al caso bipuntual.

##### 4.4.4.1 Función univariable.

Sea  $f_V(v)$  la densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua  $V$ , con dos valores de  $v$ ,  $v_-$  y  $v_+$ , localizados en ambos lados de su valor medio,  $\mu_V$  (fig. 4.14). Si se considera que  $v_-$  y  $v_+$  constituyen el dominio de definición de alguna variable aleatoria discreta  $v^0$ , las probabilidades correspondientes a esa variable aleatoria se definen por:

$$\begin{aligned} P_+ &= \text{probabilidad}[v^0 = v_+] \\ P_- &= \text{probabilidad}[v^0 = v_-] \end{aligned} \quad (4.79)$$

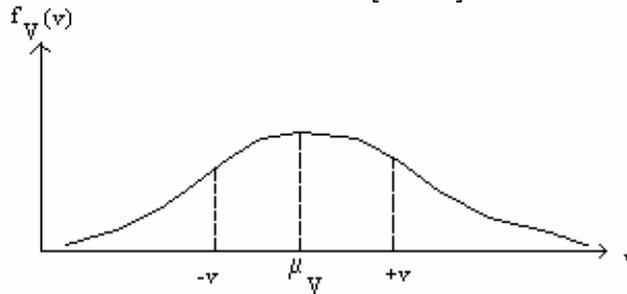


Fig. 4.14 Discretización de la función de densidad de  $V$  en dos puntos.

Es decir Rosenblueth supone que  $v^0$  es equivalente a la de  $V$ , ( $\mu_{v^0} = \mu_V$ ); donde:

$$\mu_V = P_+V_+ + P_-V_- \quad (4.80)$$

La varianza de  $V^0$  es equivalente a la de  $V$ ,  $\sigma_{v^0}^2 = \sigma_V^2$ , donde:

$$\sigma_V^2 = P_+(V_+ - \mu_V)^2 + P_-(V_- - \mu_V)^2 \quad (4.81)$$

El tercer momento central de  $v^0$  es equivalente al de  $V$ :

$$\beta_1\sigma_V^3 = P_+(V_+ - \mu_V)^3 + P_-(V_- - \mu_V)^3 \quad (4.82)$$

Siendo,  $\beta_1$ , el coeficiente de asimetría.

Finalmente se cumple:

$$P_+ + P_- = 1 \quad (4.83)$$

A partir de las ecs. (4.80) a (4.83) se pueden obtener los valores de  $V_+$ ,  $P_+$ ,  $V_-$  y  $P_-$ , como:

$$\begin{aligned}
 P_+ &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\beta_{IV}}{|\beta_{IV}|} \sqrt{1 - \frac{1}{1 + (\beta_{IV}/2)^2}} \right] \\
 P_- &= 1 - P_+ \\
 V_+ &= \mu_V + \sigma_V \sqrt{P_- / P_+} \\
 V_- &= \mu_V - \sigma_V \sqrt{P_+ / P_-}
 \end{aligned} \tag{4.84}$$

Si la función de distribución es simétrica ( $\beta_{IV} = 0$ ), las expresiones anteriores se simplifican:

$$\begin{aligned}
 P_+ &= P_- = 1/2 \\
 V_{\pm} &= \mu_V \pm \sigma_V
 \end{aligned} \tag{4.85}$$

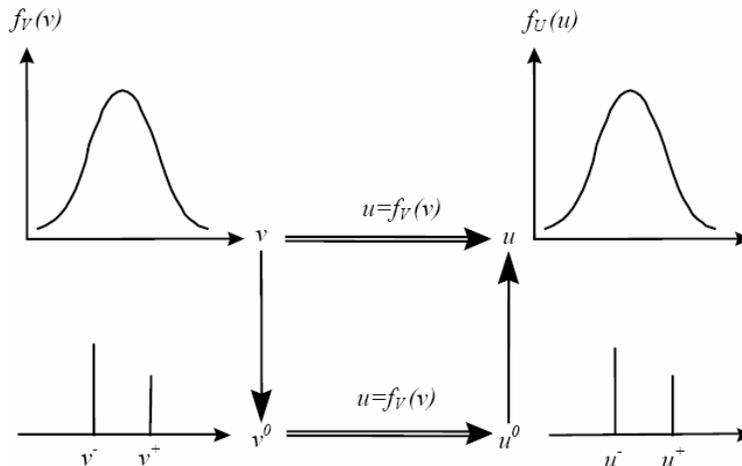
En el método se considera que la densidad de probabilidad de la función  $U = f(V)$ , en la que  $V$  es una variable aleatoria, se puede representar por una aproximación puntual de  $\mu^0$ , definida por los valores de  $\mu_+$  y  $\mu_-$  y sus probabilidades. Los valores  $\mu_+$  y  $\mu_-$  se pueden obtener por aplicación de las funciones y sus probabilidades correspondientes:

$$\begin{aligned}
 \mu_+ &= f(V_+) \\
 \mu_- &= f(V_-) \\
 P_+ &= \text{probabilidad}[\mu^0 = \mu_+] \\
 P_- &= \text{probabilidad}[\mu^0 = \mu_-]
 \end{aligned} \tag{4.86}$$

Conociendo  $V_+$ ,  $P_+$ ,  $V_-$  y  $P_-$ , los parámetros de la distribución  $f_U(u)$  se pueden obtener aplicando las expresiones:

$$\begin{aligned}
 \mu_U &= P_+ \mu_+ + P_- \mu_- \\
 \sigma_U^2 &= P_+ (\mu_+ - \mu_V)^2 + P_- (\mu_- - \mu_V)^2 \\
 \beta_1 \sigma_U^3 &= P_+ (\mu_+ - \mu_V)^3 + P_- (\mu_- - \mu_V)^3
 \end{aligned} \tag{4.87}$$

El principio del método descrito en los párrafos anteriores se ilustra en la fig. 4.15.



**Fig. 4.15 Principio del método de estimación puntual de Rosenbluth.**

#### 4.4.4.2 Función multivariable.

Sea una función  $U = f(V_1, V_2, V_3, \dots, V_n)$  en la que  $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$  son variables aleatorias independientes o correlacionadas.

Las ecuaciones para el cálculo de los primeros momentos de la función multivariable se obtienen en forma análoga al caso univariable.

En el caso de dos variables aleatorias:

$$\mu_U = P_{++}u_{++} + P_{+-}u_{+-} + P_{-+}u_{-+} + P_{--}u_{--} \quad (4.88)$$

donde:

$$U_{\pm\pm} = f\left(\mu_{V_1} \pm \sigma_{V_1}(P_- / P_+)^{\pm 1/2}, \mu_{V_2} \pm \sigma_{V_2}(P_- / P_+)^{\pm 1/2}\right) \quad (4.89)$$

$$\mu_{U^n} = P_{++}u_{++}^n + P_{+-}u_{+-}^n + P_{-+}u_{-+}^n + P_{--}u_{--}^n \quad (4.90)$$

$$\text{Var}[U] = \sigma_U^2 = \mu_{U^2} - (\mu_U)^2 \quad (4.91)$$

En el caso de tres variables:

$$\mu_U = P_{+++}u_{+++} + P_{++-}u_{++-} + P_{+-+}u_{+-+} + P_{-++}u_{-++} + P_{---}u_{---} + P_{--+}u_{--+} + P_{-+-}u_{-+-} + P_{-++}u_{-++}$$

$$\mu_{u^n} = P_{+++}u_{+++}^n + P_{++-}u_{++-}^n + P_{+-+}u_{+-+}^n + P_{-++}u_{-++}^n + P_{---}u_{---}^n + P_{--+}u_{--+}^n + P_{-+-}u_{-+-}^n + P_{-++}u_{-++}^n$$

$$\text{Var}[U] = \sigma_U^2 = \mu_{U^2} - (\mu_U)^2 \quad (4.92)$$

Si la densidad de las variables es simétrica y además son independientes:

$$P_{++} = P_{+-} = P_{-+} = P_{--} = \frac{1}{4} \quad (4.93)$$

$$P_{+++} = P_{\dots} = P_{---} = \frac{1}{8} \quad (4.94)$$

Si las variables son simétricas pero correlacionadas:

$$P_{++} = P_{--} = (1 + \rho) \frac{1}{4} \quad P_{+-} = P_{-+} = (1 - \rho) \frac{1}{4} \quad (4.95)$$

$$P_{+++} = P_{---} = (1 + \rho_{12} + \rho_{23} + \rho_{31}) / 8$$

$$P_{++-} = P_{--+} = (1 + \rho_{12} - \rho_{23} - \rho_{31}) / 8$$

$$P_{+-+} = P_{-+-} = (1 - \rho_{12} - \rho_{23} + \rho_{31}) / 8$$

$$P_{+--} = P_{-++} = (1 - \rho_{12} + \rho_{23} - \rho_{31}) / 8 \quad (4.96)$$

donde;  $\rho_{ij}$ , es el coeficiente de correlación entre las variables  $V_i$  y  $V_j$ . El signo que le precede al valor de  $\rho_{ij}$  se obtiene como el producto de los signos que aparecen en las posiciones  $i$  y  $j$  de las distintas permutaciones.

Si las variables aleatorias son independientes pero asimétricas:

$$\begin{aligned} P_{++} &= P_+(v_1)P_+(v_2) & P_{--} &= P_-(v_1)P_-(v_2) \\ P_{+-} &= P_+(v_1)P_-(v_2) & P_{-+} &= P_-(v_1)P_+(v_2) \end{aligned} \quad (4.97)$$

donde los valores de  $P_+(v_1), P_-(v_1), P_+(v_2), P_-(v_2)$ , están dados por las relaciones (4.85).

En el caso general de n variables aleatorias:  $U = f(V_1, V_2, V_3, \dots, V_n)$ :

$$\begin{aligned} \mu_U &= \sum_I^{2^n} P_{i,j,k,l,\dots,n} u_{i,j,k,l,\dots,n} \\ \mu_{U^n} &= \sum_I^{2^n} P_{i,j,k,l,\dots,n} u_{i,j,k,l,\dots,n}^n \end{aligned} \quad (4.98)$$

$$\text{Var}[U] = \sigma_U^2 = \mu_{U^2} - (\mu_U)^2$$

donde los subíndices i, j, k, l, ... n representan las permutaciones de los signos  $\pm$ . El número total de posibles permutaciones es igual a  $2^n$ .

Si las variables aleatorias son correlacionadas, la probabilidad correspondiente a cada variable está dada por:

$$P_{i,j,k,l,\dots,n} = \frac{\left[ 1 \pm \rho_{n,l} \pm \sum_{i=1}^{n-l} \rho_{i,i+l} \right]}{2^n} \quad (4.99)$$

Si las variables son independientes, entonces:

$$P_{i,j,k,l,\dots,n} = \frac{1}{2^n} \quad (4.100)$$

Si las variables aleatorias son asimétricas:

$$P_{i,j,k,l,\dots,n} = P_i(v_1)P_j(v_2)P_k(v_3)\dots P_n(v_n) \quad (4.101)$$

Existe una observación al método de aproximaciones bipuntuales en el caso de que las variables aleatorias sean todas correlacionadas. Bolle (1988) notó que cuando el número de variables aleatorias n era superior a 3 tabla (4.1), el número de incógnitas para determinar los primeros momentos excedía el número de relaciones disponibles, por lo que la aplicación del método original de Rosenblueth con dos puntos de estimación por variable no era posible. Sin embargo, el método original permanece aplicable cuando las variables son no correlacionadas y el número de las mismas no es muy elevado (< 12). Para los casos en los que el número de variables aleatorias sea importante, se han sugerido otras variantes con la intención de reducir el volumen de cálculos (Bolle, 1988); (Christian y Becker, 2002).

<b>Número de variables n</b>	1	2	3	4	5	6	7
<b>Número de incógnitas</b>	1	2	4	8	16	32	64
<b>Número de ecuaciones</b>	1	2	4	7	11	16	22

**Tabla 4.1** Comparación entre el número de incógnitas y de ecuaciones correspondientes, en función del número de variables aleatorias n (Bolle, 1988).

## 5.1 Planteamiento del análisis.

En el diagrama de la figura 5.1, se muestran las etapas para la construcción de lumbreras mediante el método de flotación, en el cual se tiene ciertas fases ( $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  y  $A_4$ ) y un costo respectivo ( $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_{41}$ ,  $C_{42}$  Y  $C_{43}$ ) dependiendo de la etapa de construcción en la cual se encuentre.

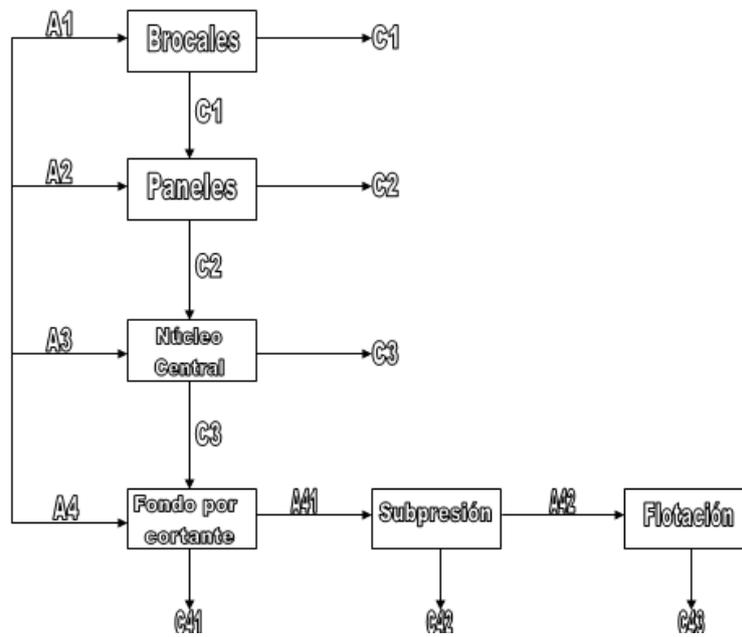


Figura 5.1 Esquema de construcción de las fases del método de flotación.

La construcción de lumbreras realizadas por el método de flotación se puede considerar como un sistema en paralelo hasta la excavación del núcleo, y un sistema en serie después de esta etapa constructiva. En efecto, fallas registradas en las etapas  $A_1$  a  $A_3$  solo implican costos parciales. Por lo contrario cualquier falla de las indicadas para la etapa  $A_4$  lleva a la pérdida total de la lumbreira.

En este trabajo, se prestará especial atención a las etapas  $A_3$  y  $A_4$ .

Los métodos de revisión serán los siguientes:

- Inestabilidad del núcleo central y falla de fondo general por cortante. Ambas se revisan por medio del método del elemento finito (MEF), usando el programa comercial Plaxis 2D axisimétrico.
- Falla por subpresión y flotación. Ambas se revisarán mediante el método de equilibrio límite (MEL).

La confiabilidad de cada etapa del método constructivo, se evaluará por medio del método de estimación bipuntual de Rosenblueth por los motivos siguientes.

1. Esta técnica no requiere muchas corridas del programa Plaxis 2D, sobre todo si se compara con el método de Monte Carlo, que requiere un número elevado de corridas para obtener una precisión adecuada.
2. Las derivadas que se requieren en el método de primer orden segundos momentos tendrían que calcularse en forma numérica y externa al programa ya que Plaxis es un programa comercial que no puede modificarse.
3. Se sabe que el método de estimación puntual da buenos resultados, siempre y cuando la dispersión de las variables aleatorias seleccionadas no sea muy grande.

Las variables aleatorias se tomarán con distribuciones gaussianas e independientes entre sí. Se calculará la esperanza del factor de seguridad, su varianza, desviación estándar y el índice de confiabilidad asociado a la etapa constructiva en estudio.

## 5.2 Características geométricas y mecánicas de la lumbrera.

En el análisis axisimétrico para la estabilidad del núcleo central y la estabilidad general de falla de fondo por cortante mediante el método del elemento finito, utilizando el programa Plaxis 2D, se considerará la geometría siguiente:

Diámetro de la lumbrera = 16 m.

Profundidad de la lumbrera = 29.5 m.

Profundidad del muro-pantalla = 35 m.

Las dimensiones y la malla de elementos finitos utilizada se muestran en la figura 5.2, las acotaciones están en metros. Las propiedades de cada material se muestran en la tabla 5.1.

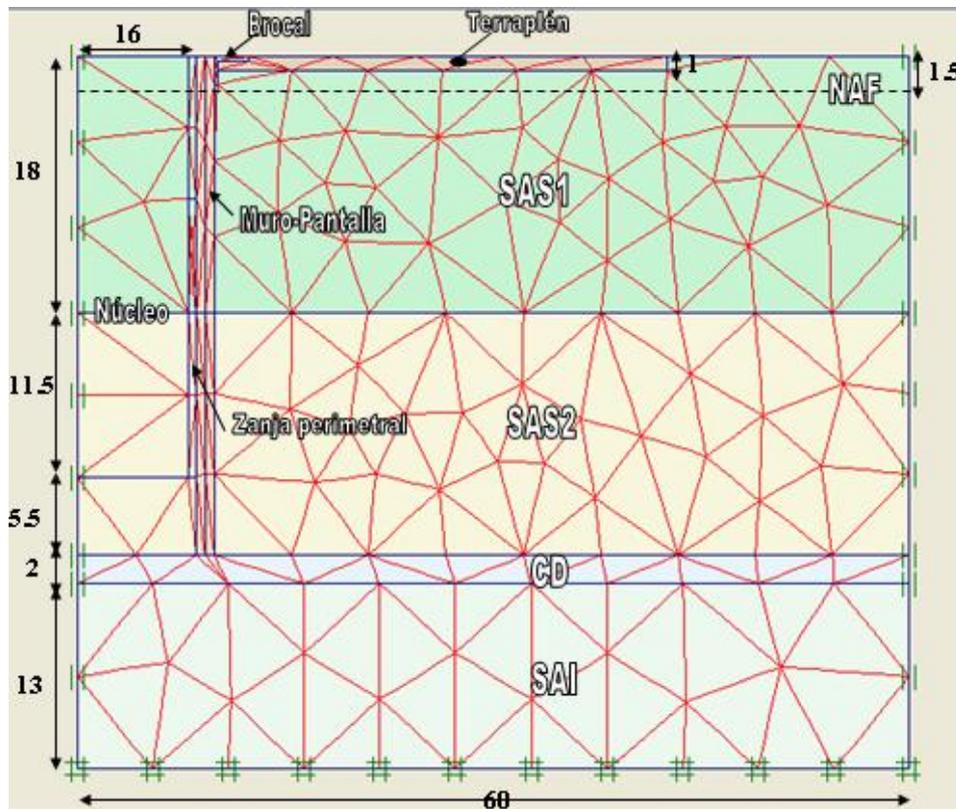


Figura 5.2 Modelación axisimétrica de una lumbrera mediante Plaxis 2D.

Material	$\gamma$ , kN/m <sup>3</sup>	E, MPa	$\nu$	C, kPa	$\phi$ , °
Terraplén	14.0	20	0.33	0	40
SAS <sub>1</sub>	12.0	5	0.46	15	0
SAS <sub>2</sub>	12.0	5	0.46	30	0
CD	18.0	50	0.33	0	40
SAI	12.5	10	0.49	40	0
Muro-Pantalla	16.0	5,000	0.25	1,000	0
Brocal	24.0	20,000	0.20	1,000	40

Tabla 5.1 Valores utilizados en la modelación con Plaxis 2D axisimétrico.

- SAS<sub>1</sub> = Serie arcillosa superior 1.
- SAS<sub>2</sub> = Serie arcillosa superior 2.
- CD = Capa dura.
- SAI = Serie arcillosa Inferior.
- $\gamma$  = Peso volumétrico del material.
- E = Módulo de elasticidad no drenado.
- $\nu$  = Relación de Poisson.
- C = Cohesión.
- $\phi$  = Ángulo de fricción.

Una vez realizado el análisis axisimétrico, se hará el análisis de estabilidad de subpresión y flotación de la lumbrera mediante el método de equilibrio límite, la figura 5.3 muestra la geometría de la lumbrera. La constante  $\alpha = 1.94$  es por el incremento de la resistencia del suelo debido a la profundidad.

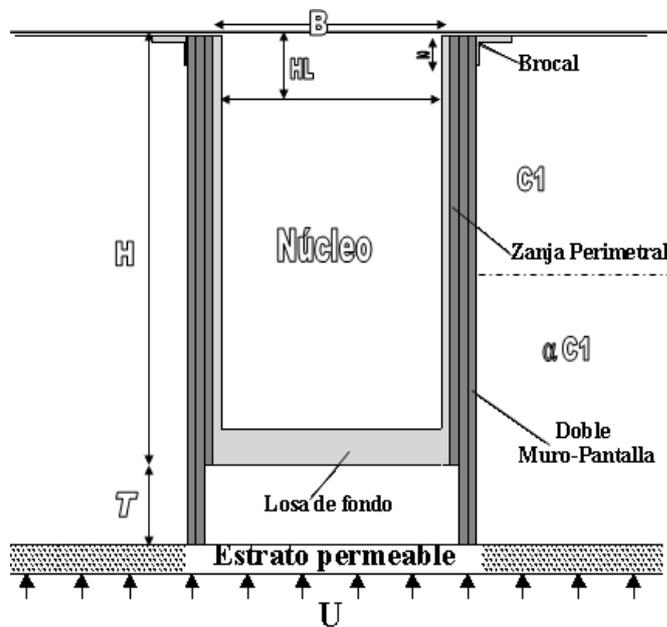


Figura 5.3 Modelación de una lumbrera para la revisión de los estados límites por subpresión y flotación.

La ecuación para el cálculo del factor de seguridad por subpresión es:

$$FS_S = \frac{(H - H_L)\gamma_L + (T \cdot \gamma_s) + \left[ \frac{\pi \cdot B \cdot T \cdot \alpha C_1}{\pi B^2} \right]}{(H + T - Z_{naf})\gamma_w}$$

y para el cálculo del factor de seguridad por flotación, la expresión es:

$$FS_F = \frac{W_L + (C_1 * 18m + \alpha C_1 * 11.5m)\pi B}{(H - Z_{naf})\gamma_w \pi \frac{B^2}{4}}$$

### 5.3 Variables aleatorias y de control.

La confiabilidad de una obra ingenieril depende de variables de control y aleatorias.

Las primeras están relacionadas con los parámetros sobre los cuales el ingeniero puede ejercer suficiente dominio, ya que cuenta con: el equipo adecuado, datos suficientes y con experiencia en eventos similares.

Las segundas se refieren a aquellos parámetros sobre los cuales el geotecnista no puede ejercer un adecuado dominio, debido a que están asociados a fenómenos físicos que son aleatorios por naturaleza o porque no se cuenta con información adecuada o completa para efectuar predicciones y estimaciones.

Para la evaluación de la confiabilidad de lumbreras realizadas mediante el método de flotación, las variables de control serán:

Las dimensiones de la lumbrera (diámetro, profundidad, profundidad del muro pantalla y peso de la lumbrera), así como también la distancia entre la base de la lumbrera y el estrato permeable, el peso volumétrico del agua y el peso volumétrico del lodo estabilizador.

En el grupo de las variables aleatorias estará constituido por:

El peso volumétrico del suelo “ $\gamma_{\text{Suelo}}$ ”, su resistencia al corte “ $C_1$ ”, el módulo de elasticidad no drenado del suelo “ $E$ ”, así como el nivel del lodo estabilizador “ $H_L$ ”.

### 5.4 Aplicación del método bipuntual de Rosenblueth al diseño de lumbreras.

Para encontrar la confiabilidad asociada a las etapas constructivas del método de flotación, se utilizará el método de estimación bipuntual de Rosenblueth, determinando los primeros momentos del factor de seguridad a partir de los primeros momentos de las funciones de densidad de las variables de entrada.

**Para los estados límites del núcleo central y falla de fondo general por cortante, la secuencia será la siguiente:**

- La ecuación de la esperanza es:

$$E[y^M] = P_{++++} [f_u(\gamma_+, C_+, E_+, H_{L+})] + P_{+++-} [f_u(\gamma_+, C_+, E_+, H_{L-})] + \dots + P_{----} [f_u(\gamma_-, C_-, E_-, H_{L-})]$$

- La esperanza y la desviación estándar consideradas para las 4 variables aleatorias, se indican en las tablas 5.2 y 5.3 para el estado límite del núcleo central, y para el estado límite de fondo general por cortante respectivamente. En estas mismas tablas se indican los dos valores puntuales  $V_+$  y  $V_-$  de las distribuciones discretas bipuntuales equivalentes.

Variable	$\mu$	$\sigma$	$V_+$	$V_-$
$\gamma_{\text{Suelo}}$ (kN/m <sup>3</sup> )	12	0.3	12.3	11.7
$C_1$ (kPa)	15.5	0.5	16.0	15.0
$E$ (MPa)	5	0.25	5.25	4.75
$H_L$ (m)	0.10	0.10	0.20	0.00

Tabla 5.2 Valores puntuales de las variables aleatorias para el núcleo central.

Variable	$\mu$	$\sigma$	$V_+$	$V_-$
$\gamma_{\text{Suelo}} \text{ (kN/m}^3\text{)}$	12	0.3	12.3	11.7
$C_1 \text{ (kPa)}$	15.5	0.5	15.0	16.0
$E \text{ (MPa)}$	5	0.25	5.25	4.75
$H_L \text{ (m)}$	1.0	1.0	2.0	0.00

Tabla 5.3 Valores puntuales de las variables aleatorias para la falla general del fondo por cortante.

Considerando independientes las variables, el valor de la probabilidad P de cada combinación de valores será:

$$P = \frac{1}{2^N} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} = 0.0625$$

- Se evalúa el factor de seguridad mediante el programa Plaxis 2D axisimétrico, para cada combinación de las variables aleatorias ( $\gamma$ , C, E y  $H_L$ ), esto es:

$$FS(\gamma_+, C_+, E_+, H_{L+}) = FS_1$$

$$FS(\gamma_+, C_+, E_+, H_{L-}) = FS_2$$

$$FS(\gamma_+, C_+, E_-, H_{L+}) = FS_3$$

$$\dots\dots\dots$$

$$FS(\gamma_-, C_-, E_-, H_{L-}) = FS_{16}$$

- Después con los valores puntuales obtenidos, se calcula la esperanza del factor de seguridad, la cual se obtiene mediante la expresión:

$$E[FS] = 0.0625FS_1(\gamma_+, C_+, E_+, H_{L+}) + 0.0625FS_2(\gamma_+, C_+, E_+, H_{L-}) + \dots\dots\dots + 0.0625FS_{16}(\gamma_-, C_-, E_-, H_{L-})$$

- La varianza del factor de seguridad se calcula a partir de los valores obtenidos para las diferentes combinaciones de los valores puntuales y de la esperanza calculada, esto es:

$$Var[FS] = P_{++++}[f_u(\gamma_+, C_+, E_+, H_{L+}) - E\{FS_1\}]^2 + P_{++--}[f_u(\gamma_+, C_+, E_+, H_{L-}) - E\{FS_2\}]^2 + \dots\dots + P_{----}[f_u(\gamma_-, C_-, E_-, H_{L-}) - E\{FS_{16}\}]^2$$

- Por último, se calcula el índice de confiabilidad  $\beta$ , mediante la ecuación:

$$\beta = \frac{E[FS] - 1}{Var[FS]^{0.5}}$$

**Para el estado límite por subpresión, la secuencia será la siguiente:**

Mediante la ecuación siguiente se obtiene el factor de seguridad por subpresión:

$$FS_{\text{Subpresión}} = \frac{(H - H_L)\gamma_L + (T \cdot \gamma_s) + \left[ \frac{\pi \cdot B \cdot T \cdot \alpha C_1}{\frac{\pi B^2}{4}} \right]}{(H + T - Z_{naf})\gamma_w}$$

- Los valores puntuales, tabla 5.4., de las variables aleatorias que intervienen  $(\gamma, C_1, H_L)$ , son:

Variable	$\mu$	$\sigma$	$V_+$	$V_-$
$\gamma_{\text{Suelo}} \text{ (kN/m}^3\text{)}$	12	0.3	12.3	11.7
$C_1 \text{ (kPa)}$	15.5	0.5	15.0	16.0
$H_L \text{ (m)}$	1.0	1.0	2.0	0.0

Tabla 5.4 Valores puntuales para el estado límite de subpresión.

- La esperanza es:

$$E[y^M] = P_{+++} [f_u(\gamma_+, C_+, H_{L+})] + P_{++-} [f_u(\gamma_+, C_+, H_{L-})] + \dots + P_{---} [f_u(\gamma_-, C_-, H_{L-})]$$

- Considerando las variables aleatorias como independientes, y sus densidades gaussianas, el valor de P de cada una de las combinaciones será:

$$P = \frac{1}{2^N} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0.125$$

- A continuación se evalúan los valores puntuales  $V_+$  y  $V_-$  para cada combinación de las variables aleatorias, encontrando el factor de seguridad asociado a cada valor, esto es:

$$FS(\gamma_+, C_+, H_{L+}) = FS_1$$

$$FS(\gamma_+, C_+, H_{L-}) = FS_2$$

.....

$$FS(\gamma_-, C_-, H_{L-}) = FS_8$$

- Después, con los valores puntuales obtenidos del factor de seguridad, se calcula la esperanza del factor de seguridad, mediante la expresión:

$$E[FS] = 0.125FS_1(\gamma_+, C_+, H_{L+}) + 0.125FS_2(\gamma_+, C_+, H_{L-}) + \dots + 0.125FS_8(\gamma_-, C_-, H_{L-})$$

- La varianza del factor de seguridad se calcula a partir de los valores obtenidos para las diferentes permutaciones de los valores puntuales y de la esperanza calculada:

$$Var[FS] = P_{+++} [f_u(\gamma_+, C_+, H_{L+}) - E\{FS_1\}]^2 + P_{++-} [f_u(\gamma_+, C_+, H_{L-}) - E\{FS_2\}]^2 + \dots + P_{---} [f_u(\gamma_-, C_-, H_{L-}) - E\{FS_8\}]^2$$

- Por último, se calcula el índice de confiabilidad  $\beta$ , mediante la ecuación:

$$\beta = \frac{E[FS] - 1}{Var[FS]^{0.5}}$$

**Para el estado límite por flotación, la secuencia será la siguiente:**

El factor de seguridad contra flotación, se obtiene mediante la expresión:

$$FS_F = \frac{W_L + (C_1 * 18m + \alpha C_1 * 11.5m)\pi B}{(H - Z_{naf})\gamma_w \pi \frac{B^2}{4}}$$

- Los valores puntuales, de la variable aleatoria, tabla 5.4, son:

Variable	$\mu$	$\sigma$	$V_+$	$V_-$
$C_1$ (kPa)	15.5	0.5	16.0	15.0

**Tabla 5.5 Valores puntuales para el estado límite de flotación.**

- La esperanza es:

$$E[y^M] = P_+[f_u(C_+)] + P_-[f_u(C_-)]$$

- Considerando que la variable aleatoria tiene una densidad gaussiana, el valor de P será:

$$P = \frac{1}{2^N} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} = 0.5$$

- A continuación se evalúan los valores puntuales  $V_+$  y  $V_-$  para cada valor de la variable aleatoria, encontrando el factor de seguridad asociado a cada valor, esto es:

$$FS(C_+) = FS_1$$

$$FS(C_-) = FS_2$$

- Después con los valores puntuales obtenidos, se calcula la esperanza del factor de seguridad, mediante la expresión:

$$E[FS] = 0.5FS_1(C_+) + 0.5FS_2(C_-)$$

- La varianza del factor de seguridad se calcula a partir de los valores obtenidos para los valores puntuales y de la esperanza calculada, esto es:

$$Var[FS] = P_+[f_u(C_+) - E\{FS_1\}]^2 + P_-[f_u(C_-) - E\{FS_2\}]^2$$

- Por último, se calcula el índice de confiabilidad  $\beta$ , mediante la ecuación:

$$\beta = \frac{E[FS] - 1}{Var[FS]^{0.5}}$$

## 5.5 Resultados de los análisis.

### 5.5.1 Análisis de la estabilidad del núcleo central.

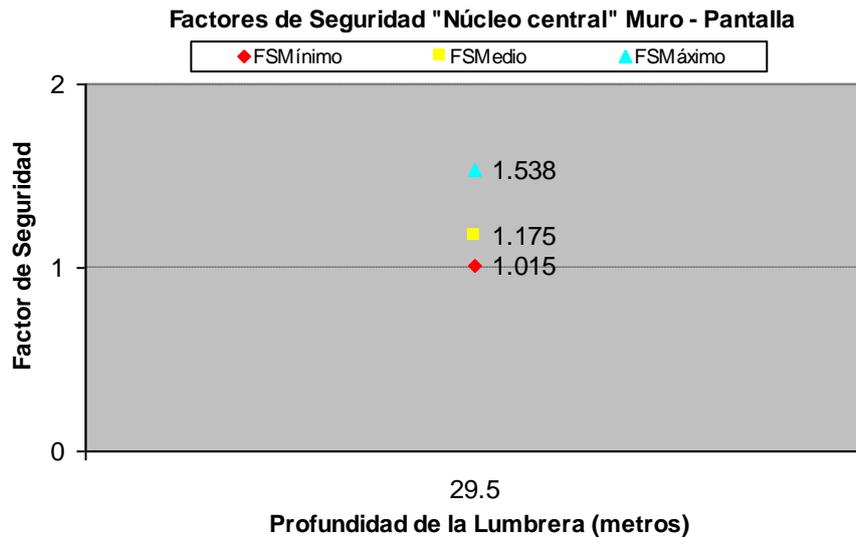
Los valores del factor de seguridad calculados para las distintas combinaciones de valores de las variables aleatorias resultan:

Factor de Seguridad, Profundidad 29.5 m			
$(\gamma_+, C_{1+}, E_+, H_{L+})$	(12.3,16.0,5.25,0.20)	<b>FS<sub>1</sub></b>	1.072
$(\gamma_+, C_{1+}, E_+, H_{L-})$	(12.3,16.0,5.25,0.0)	<b>FS<sub>2</sub></b>	1.123
$(\gamma_+, C_{1+}, E_-, H_{L+})$	(12.3,16.0,4.75,0.20)	<b>FS<sub>3</sub></b>	1.070
$(\gamma_+, C_{1-}, E_+, H_{L+})$	(12.3,15.0,5.25,0.20)	<b>FS<sub>4</sub></b>	1.016
$(\gamma_-, C_{1+}, E_+, H_{L+})$	(11.7,16.0,5.25,0.20)	<b>FS<sub>5</sub></b>	1.443
$(\gamma_+, C_{1+}, E_-, H_{L-})$	(12.3,16.0,4.75,0.0)	<b>FS<sub>6</sub></b>	1.123
$(\gamma_-, C_{1-}, E_+, H_{L+})$	(11.7,15.0,5.25,0.20)	<b>FS<sub>7</sub></b>	1.373
$(\gamma_-, C_{1+}, E_-, H_{L+})$	(11.7,16.0,4.75,0.20)	<b>FS<sub>8</sub></b>	1.443
$(\gamma_-, C_{1+}, E_+, H_{L-})$	(11.7,16.0,5.25,0.0)	<b>FS<sub>9</sub></b>	1.538
$(\gamma_+, C_{1-}, E_+, H_{L-})$	(12.3,15.0,5.25,0.0)	<b>FS<sub>10</sub></b>	1.087
$(\gamma_+, C_{1-}, E_-, H_{L+})$	(12.3,15.0,4.75,0.20)	<b>FS<sub>11</sub></b>	1.015
$(\gamma_+, C_{1-}, E_-, H_{L-})$	(12.3,15.0,4.75,0.0)	<b>FS<sub>12</sub></b>	1.087
$(\gamma_-, C_{1-}, E_-, H_{L+})$	(11.7,15.0,4.75,0.20)	<b>FS<sub>13</sub></b>	1.373
$(\gamma_-, C_{1+}, E_-, H_{L-})$	(11.7,16.0,5.25,0.0)	<b>FS<sub>14</sub></b>	1.538
$(\gamma_-, C_{1-}, E_+, H_{L-})$	(11.7,15.0,5.25,0.0)	<b>FS<sub>15</sub></b>	1.494
$(\gamma_-, C_{1-}, E_-, H_{L-})$	(11.7,15.0,4.75,0.0)	<b>FS<sub>16</sub></b>	1.495

<b>E[FS]</b> =	1.175
<b>Var[FS]</b> =	0.049
<b><math>\sigma_{FS}</math></b> =	0.221
<b><math>\beta</math></b> =	0.789

Con este valor del índice de confiabilidad, y considerando una distribución normal estandarizada probabilidad de falla para el núcleo central es de 0.2148. Este valor resulta muy alto.

En ingeniería civil es común considerar que valor mínimo de  $\beta$  debe ser de por lo menos 3, lo que corresponde a una probabilidad de falla menor de 0.00135. Sin embargo, el valor mínimo de  $\beta$  no puede definirse sin tomar en cuenta las consecuencias de la falla. En este caso, tomando en cuenta que las consecuencias de la falla no son graves, podría resultar aceptable una probabilidad de falla más alta. Sin embargo, el valor calculado de  $\beta$  es muy bajo y justifica que se tomen precauciones especiales, en particular para controlar el nivel del lodo.



- Se puede observar que el factor de seguridad para el núcleo central es muy bajo. El bajar el lodo en la excavación de la zanja perimetral resulta crítico para la estabilidad del núcleo. En los análisis realizados se observa que bajar más de 20 cm el nivel del lodo respecto a la superficie del terreno es indeseable, ya que conduce a la inestabilidad del núcleo central.
- El módulo de elasticidad del suelo no afecta sustancialmente los resultados encontrados, en cambio, el peso volumétrico del suelo “ $\gamma$ ” y su resistencia al corte “ $C_1$ ” si son determinantes para bajar o aumentar el factor de seguridad.
- Los factores de seguridad encontrados en los análisis con doble muro-pantalla perimetral respecto al de un solo muro-pantalla, en general son un poco más bajos, pero la media y el índice de confiabilidad “ $\beta$ ” con doble muro pantalla resultan mayores.

### 5.5.2 Análisis de la falla de fondo general por cortante.

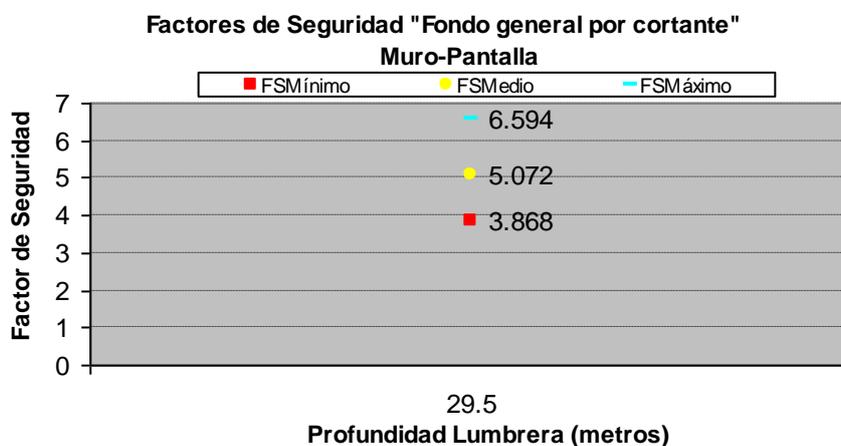
a) Con muro-pantalla perimetral.

Factor de Seguridad, Profundidad 29.5 m			
$(\gamma_+, C_{1+}, E_+, H_{L+})$	(12.3,16.0,5.25,2.0)	<b>FS<sub>1</sub></b>	4.073
$(\gamma_+, C_{1+}, E_+, H_{L-})$	(12.3,16.0,5.25,0.0)	<b>FS<sub>2</sub></b>	5.283
$(\gamma_+, C_{1+}, E_-, H_{L+})$	(12.3,16.0,4.75,2.0)	<b>FS<sub>3</sub></b>	4.091
$(\gamma_+, C_{1-}, E_+, H_{L+})$	(12.3,15.0,5.25,2.0)	<b>FS<sub>4</sub></b>	4.065
$(\gamma_-, C_{1+}, E_+, H_{L+})$	(11.7,16.0,5.25,2.0)	<b>FS<sub>5</sub></b>	4.765
$(\gamma_+, C_{1+}, E_-, H_{L-})$	(12.3,16.0,4.75,0.0)	<b>FS<sub>6</sub></b>	5.276
$(\gamma_-, C_{1-}, E_+, H_{L+})$	(11.7,15.0,5.25,2.0)	<b>FS<sub>7</sub></b>	4.757
$(\gamma_-, C_{1+}, E_-, H_{L+})$	(11.7,16.0,4.75,2.0)	<b>FS<sub>8</sub></b>	4.191
$(\gamma_-, C_{1+}, E_+, H_{L-})$	(11.7,16.0,5.25,0.0)	<b>FS<sub>9</sub></b>	6.587
$(\gamma_+, C_{1-}, E_+, H_{L-})$	(12.3,15.0,5.25,0.0)	<b>FS<sub>10</sub></b>	5.245
$(\gamma_+, C_{1-}, E_-, H_{L+})$	(12.3,15.0,4.75,2.0)	<b>FS<sub>11</sub></b>	4.021

Factor de Seguridad (continuación), Profundidad 29.5 m			
$(\gamma_+, C_{1-}, E_-, H_{L-})$	(12.3,15.0,4.75,0.0)	<b>FS<sub>12</sub> =</b>	5.254
$(\gamma_-, C_{1-}, E_-, H_{L+})$	(11.7,15.0,4.75,2.0)	<b>FS<sub>13</sub> =</b>	3.868
$(\gamma_-, C_{1+}, E_-, H_{L-})$	(11.7,16.0,5.25,0.0)	<b>FS<sub>14</sub> =</b>	6.594
$(\gamma_-, C_{1-}, E_+, H_{L-})$	(11.7,15.0,5.25,0.0)	<b>FS<sub>15</sub> =</b>	6.545
$(\gamma_-, C_{1-}, E_-, H_{L-})$	(11.7,15.0,4.75,0.0)	<b>FS<sub>16</sub> =</b>	6.553

<b>E[FS] =</b>	5.072
<b>Var[FS] =</b>	0.976
<b><math>\sigma_{FS}</math> =</b>	0.988
<b><math>\beta</math> =</b>	4.122

Con el índice de confiabilidad obtenido, la probabilidad de falla para el fondo general por cortante teniendo un muro-pantalla perimetral es de 0.00000317.



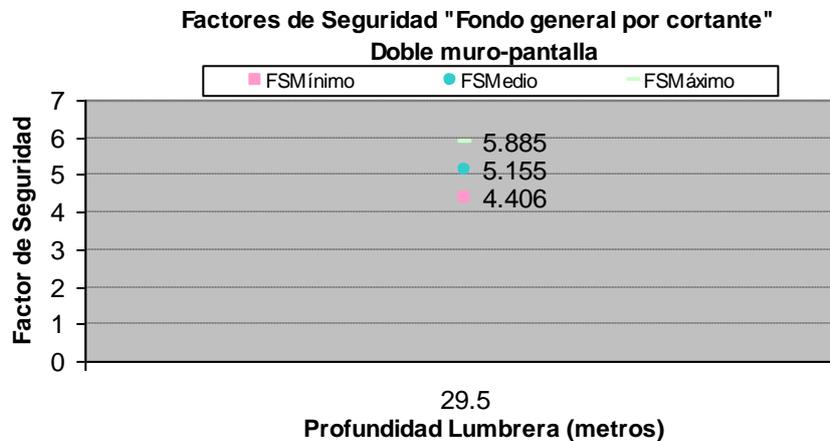
b) Con doble muro-pantalla perimetral.

Factor de Seguridad, Profundidad 29.5 m			
$(\gamma_+, C_{1+}, E_+, H_{L+})$	(12.3,16.0,5.25,2.0)	<b>FS<sub>1</sub> =</b>	4.426
$(\gamma_+, C_{1+}, E_+, H_{L-})$	(12.3,16.0,5.25,0.0)	<b>FS<sub>2</sub> =</b>	5.478
$(\gamma_+, C_{1+}, E_-, H_{L+})$	(12.3,16.0,4.75,2.0)	<b>FS<sub>3</sub> =</b>	4.430
$(\gamma_+, C_{1-}, E_+, H_{L+})$	(12.3,15.0,5.25,2.0)	<b>FS<sub>4</sub> =</b>	4.405
$(\gamma_-, C_{1+}, E_+, H_{L+})$	(11.7,16.0,5.25,2.0)	<b>FS<sub>5</sub> =</b>	4.936
$(\gamma_+, C_{1+}, E_-, H_{L-})$	(12.3,16.0,4.75,0.0)	<b>FS<sub>6</sub> =</b>	5.476
$(\gamma_-, C_{1-}, E_+, H_{L+})$	(11.7,15.0,5.25,2.0)	<b>FS<sub>7</sub> =</b>	4.890
$(\gamma_-, C_{1+}, E_-, H_{L+})$	(11.7,16.0,4.75,2.0)	<b>FS<sub>8</sub> =</b>	4.938
$(\gamma_-, C_{1+}, E_+, H_{L-})$	(11.7,16.0,5.25,0.0)	<b>FS<sub>9</sub> =</b>	5.881
$(\gamma_+, C_{1-}, E_+, H_{L-})$	(12.3,15.0,5.25,0.0)	<b>FS<sub>10</sub> =</b>	5.440
$(\gamma_+, C_{1-}, E_-, H_{L+})$	(12.3,15.0,4.75,2.0)	<b>FS<sub>11</sub> =</b>	4.406
$(\gamma_+, C_{1-}, E_-, H_{L-})$	(12.3,15.0,4.75,0.0)	<b>FS<sub>12</sub> =</b>	5.443
$(\gamma_-, C_{1-}, E_-, H_{L+})$	(11.7,15.0,4.75,2.0)	<b>FS<sub>13</sub> =</b>	4.900

Factor de Seguridad (continuación), Profundidad 29.5 m			
$(\gamma_-, C_{1+}, E_-, H_{L-})$	(11.7,16.0,5.25,0.0)	<b>FS<sub>14</sub> =</b>	5.885
$(\gamma_-, C_{1-}, E_+, H_{L-})$	(11.7,15.0,5.25,0.0)	<b>FS<sub>15</sub> =</b>	5.766
$(\gamma_-, C_{1-}, E_-, H_{L-})$	(11.7,15.0,4.75,0.0)	<b>FS<sub>16</sub> =</b>	5.776

<b>E[FS] =</b>	5.155
<b>Var[FS] =</b>	0.315
<b><math>\sigma_{FS}</math> =</b>	0.561
<b><math>\beta</math> =</b>	7.402

Con el índice de confiabilidad obtenido, la probabilidad de falla para el fondo general por cortante teniendo doble muro-pantalla perimetral es de 0.000000019.



- Se observa que los factores encontrados para la falla de fondo general por cortante son altos, resultando mayores con doble muro-pantalla.
- El módulo de elasticidad del suelo, al igual que en el estado límite del núcleo central, no afecta sustancialmente los resultados encontrados. Por lo contrario, el nivel del lodo que se tenga en la excavación, el peso volumétrico del suelo " $\gamma$ " y su resistencia al corte " $C_1$ ", son determinantes para aumentar o disminuir el factor de seguridad.
- Se observa que la esperanza del factor de seguridad y el índice de confiabilidad " $\beta$ " son altos.

### 5.5.3 Análisis de la falla de fondo por subpresión.

En los análisis realizados, se evaluó la subpresión hidrostática del agua que se genera en el estrato permeable, así como también la subpresión hidrostática debida al lodo, que resulta más desfavorable y crítica, sí se da un abatimiento brusco del nivel del lodo estabilizador (3.2.6).

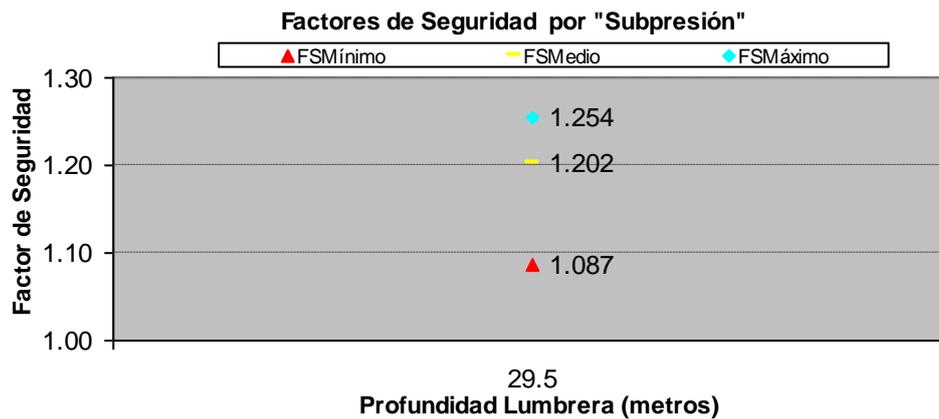
Los resultados fueron los siguientes:

a) Considerando la presión hidrostática del agua ( $\gamma_w * H$ ) resulta:

$(\gamma_+, C_{1+}, H_{L+})$	(12.3, 16.0, 2.0)	<b>FS<sub>1</sub> =</b>	1.087
$(\gamma_+, C_{1+}, H_{L-})$	(12.3, 16.0, 0.0)	<b>FS<sub>2</sub> =</b>	1.192
$(\gamma_+, C_{1-}, H_{L+})$	(12.3, 15.0, 2.0)	<b>FS<sub>3</sub> =</b>	1.254
$(\gamma_+, C_{1-}, H_{L-})$	(12.3, 15.0, 0.0)	<b>FS<sub>4</sub> =</b>	1.246
$(\gamma_-, C_{1-}, H_{L-})$	(11.7, 15.0, 0.0)	<b>FS<sub>5</sub> =</b>	1.236
$(\gamma_-, C_{1-}, H_{L+})$	(11.7, 15.0, 2.0)	<b>FS<sub>6</sub> =</b>	1.244
$(\gamma_-, C_{1+}, H_{L-})$	(11.7, 16.0, 0.0)	<b>FS<sub>7</sub> =</b>	1.173
$(\gamma_-, C_{1+}, H_{L+})$	(11.7, 16.0, 2.0)	<b>FS<sub>8</sub> =</b>	1.181

<b>E[FS] =</b>	1.202
<b>Var[FS] =</b>	0.003
<b><math>\sigma_{FS}</math> =</b>	0.053
<b><math>\beta</math> =</b>	3.838

Con el índice de confiabilidad obtenido, la probabilidad de falla considerando la presión hidrostática del agua es de 0.0000115.

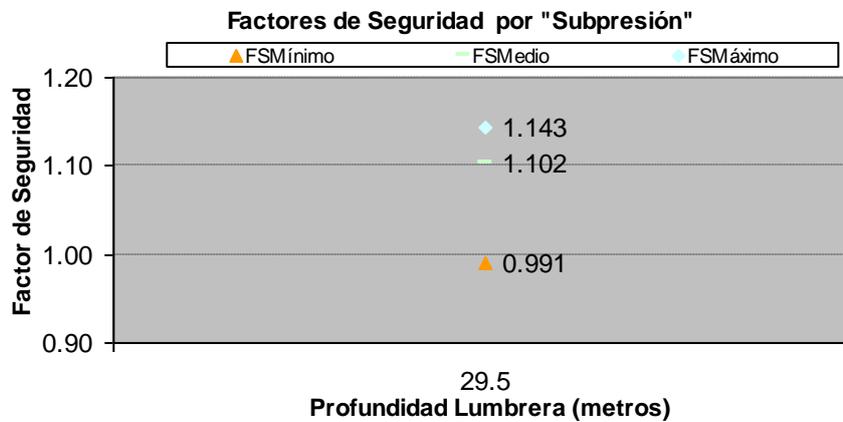


b) Considerando la presión hidrostática del lodo estabilizador ( $\gamma_L * H$ ) en capa dura, los factores de seguridad resultan:

$(\gamma_+, C_{1+}, H_{L+})$	(12.3,16.0,2.0)	<b>FS<sub>1</sub> =</b>	0.991
$(\gamma_+, C_{1+}, H_{L-})$	(12.3,16.0,0.0)	<b>FS<sub>2</sub> =</b>	1.137
$(\gamma_+, C_{1-}, H_{L+})$	(12.3,15.0,2.0)	<b>FS<sub>3</sub> =</b>	1.143
$(\gamma_+, C_{1-}, H_{L-})$	(12.3,15.0,0.0)	<b>FS<sub>4</sub> =</b>	1.136
$(\gamma_-, C_{1-}, H_{L-})$	(11.7,15.0,0.0)	<b>FS<sub>5</sub> =</b>	1.127
$(\gamma_-, C_{1-}, H_{L+})$	(11.7,15.0,2.0)	<b>FS<sub>6</sub> =</b>	1.134
$(\gamma_-, C_{1+}, H_{L-})$	(11.7,16.0,0.0)	<b>FS<sub>7</sub> =</b>	1.070
$(\gamma_-, C_{1+}, H_{L+})$	(11.7,16.0,2.0)	<b>FS<sub>8</sub> =</b>	1.077

<b>E[FS] =</b>	1.102
<b>Var[FS] =</b>	0.002
<b><math>\sigma_{FS}</math> =</b>	0.050
<b><math>\beta</math> =</b>	2.050

Con el índice de confiabilidad obtenido, la probabilidad de falla considerando la presión hidrostática del lodo es de 0.02275.



- Los factores de seguridad por subpresión resultan bajos.
- Cuando se considera la presión hidrostática del lodo hay una reducción en los valores de los factores de seguridad, incluso hay un factor de seguridad parcial inferior a 1.
- El índice de confiabilidad baja sensiblemente casi a la mitad considerando la densidad del lodo en vez de la del agua.

#### 5.5.4 Análisis de la falla por flotación.

Se realizaron los análisis del factor de seguridad por flotación considerando que no existe reducción de la adherencia entre el fuste de la lumbrera y el suelo, y reduciéndola un 25% y 50%.

- a) Considerando 100 % adherencia entre fuste de la lumbrera y el suelo.

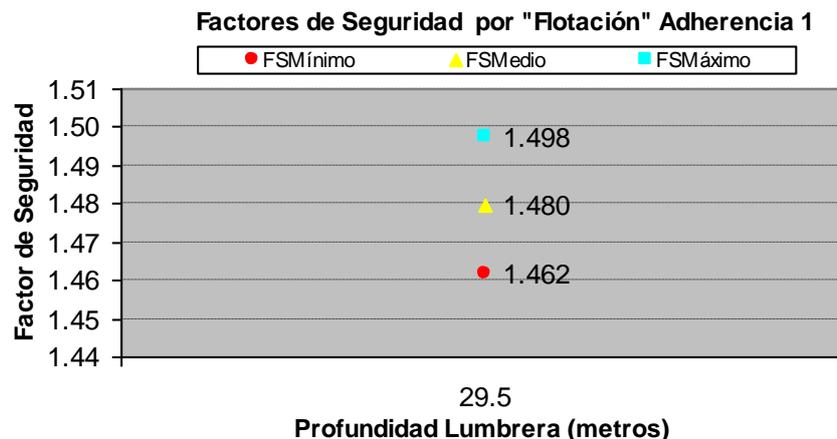
$$(C_+) = FS(16.0) = FS_1$$

$$(C_-) = FS(15.0) = FS_2$$

$FS_1 =$	1.498
$FS_2 =$	1.462

$E[FS] =$	1.480
$Var[FS] =$	0.00033
$\sigma_{FS} =$	0.01816
$\beta =$	26.410

Con el índice de confiabilidad obtenido, la probabilidad de falla por flotación considerando la adherencia total entre el suelo y el fuste de la lumbrera es de 0.000000005.



- b) Considerando 75 % adherencia entre el fuste de la lumbrera y el suelo.

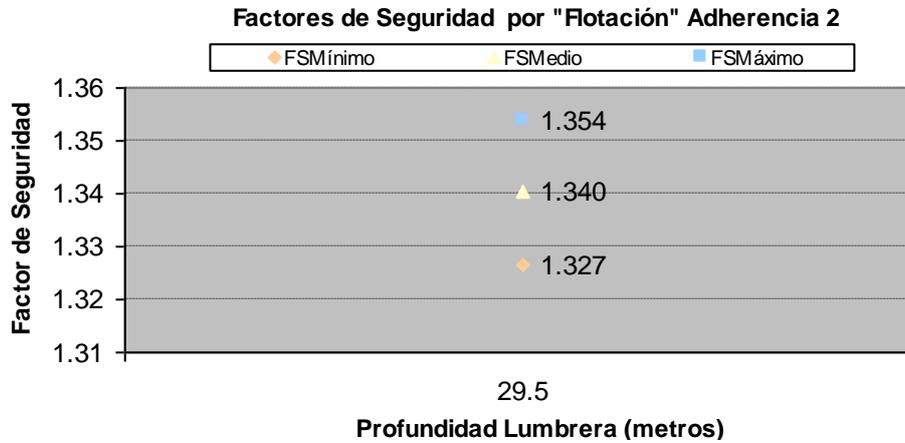
$$(C_+) = FS(12.0) = FS_1$$

$$(C_-) = FS(11.25) = FS_2$$

$FS_1 =$	1.354
$FS_2 =$	1.327

$E[FS] =$	1.340
$Var[FS] =$	0.00018
$\sigma_{FS} =$	0.01350
$\beta =$	25.207

Con el índice de confiabilidad obtenido, la probabilidad de falla por flotación considerando  $\frac{3}{4}$  partes de adherencia entre el suelo y el fuste de la lumbrera es de 0.0000000070.



c) Considerando 50 % adherencia entre el fuste de la lumbrera y el suelo

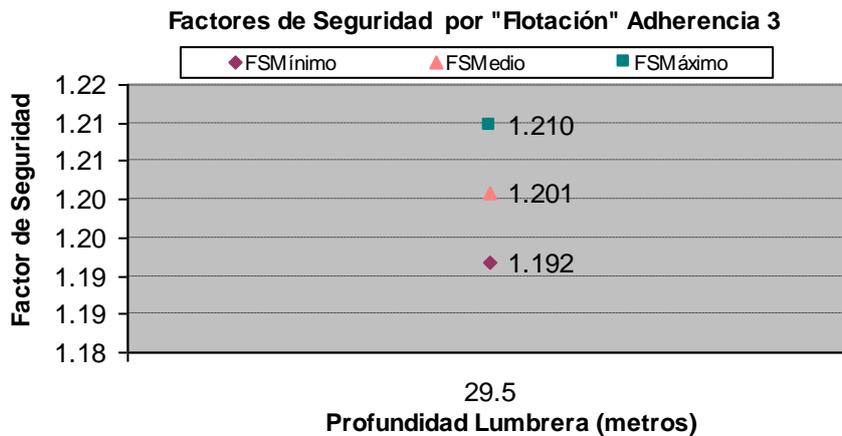
$$(C_+) = FS(8.00) = FS_1$$

$$(C_-) = FS(7.50) = FS_2$$

<b>FS<sub>1</sub> =</b>	1.210
<b>FS<sub>2</sub> =</b>	1.192

<b>E[FS] =</b>	1.201
<b>Var[FS] =</b>	0.0001
<b>σ<sub>FS</sub> =</b>	0.00900
<b>β =</b>	22.310

Con el índice de confiabilidad obtenido, la probabilidad de falla por flotación considerando la mitad de la adherencia entre el suelo y el fuste de la lumbrera, es de 0.0000000095.



- Los resultados de los análisis muestran que para lumbreras del tamaño considerado, el factor de seguridad contra flotación es aceptable, aún considerando una reducción del 50 % de la cohesión en la adherencia entre el fuste de la lumbrera y el suelo.
- Debe hacerse notar que el empuje de Arquímedes es función del cuadrado del diámetro de la lumbrera; por ello debe revisarse con mayor cautela esta condición, cuando se quieran construir lumbreras de gran diámetro.

#### 5.5.5 Evaluación de la confiabilidad del sistema.

En la tabla 5.6 se resumen los resultados obtenidos en cada etapa analizada, su índice de confiabilidad y su probabilidad de falla respectiva.

Estado límite	índice de Confiabilidad $\beta$	Probabilidad de falla
Núcleo central	0.789	0.2148
Fondo general por cortante (muro-pantalla)	4.122	0.00000317
Fondo general por cortante (Doble muro-pantalla)	7.402	0.00000019
Subpresión hidrostática del agua	3.838	0.0000115
Subpresión hidrostática del lodo	2.05	0.02275
Flotación adherencia 1	26.41	0.000000050
Flotación adherencia 2	25.207	0.000000070
Flotación adherencia 3	22.310	0.000000095

**Tabla 5.6 Resumen de los índices de confiabilidad y probabilidades de falla de cada etapa constructiva**

Tomando en cuenta que la falla del núcleo central presenta una probabilidad elevada pero no tiene consecuencias importantes, la confiabilidad del sistema se evaluará tomando en cuenta solamente la falla general por cortante, la falla por subpresión y la falla por flotación considerados como elementos en serie.

Para evaluar esta probabilidad puede usarse el teorema de Poincaré (ecuación 4.45). En lo que sigue, por sencillez, se considerará solamente el primer término de la expresión de Poincaré que constituye un límite superior de la probabilidad de falla del sistema.

En la tabla 5.7 se muestran las probabilidades de falla del sistema así calculadas, para diferentes condiciones (muro-pantalla, doble muro-pantalla, subpresión hidrostática del agua, subpresión hidrostática del lodo, adherencia 1, adherencia 2 y adherencia 3 del suelo).

<b>Falla del sistema</b>	<b>Probabilidad de falla</b>
Muro-pantalla, subpresión agua y adherencia 1	0.000014675
Muro-pantalla, subpresión agua y adherencia 2	0.000014677
Muro-pantalla, subpresión agua y adherencia 3	0.00001467950
Muro-pantalla, subpresión lodo y adherencia 1	0.022753175
Muro-pantalla, subpresión lodo y adherencia 2	0.022753177
Muro-pantalla, subpresión lodo y adherencia 3	0.0227537950
Doble muro-pantalla, subpresión agua y adherencia 1	0.000011524
Doble muro-pantalla, subpresión agua y adherencia 2	0.000011526
Doble muro-pantalla, subpresión agua y adherencia 3	0.00001152850
Doble muro-pantalla, subpresión lodo y adherencia 1	0.022750024
Doble muro-pantalla, subpresión lodo y adherencia 2	0.022750026
Doble muro-pantalla, subpresión lodo y adherencia 3	0.0227500285

**Tabla 5.7 Probabilidades de falla del sistema para diferentes condiciones sin considerar el núcleo**

Se observa que la probabilidad de falla del sistema queda controlada básicamente por la posibilidad de falla por subpresión en caso de que la presencia de lodo genere un incremento de presión en la capa dura y que se presente un abatimiento brusco del nivel del lodo en la excavación.

Conviene subrayar que esta conclusión es solamente aplicable a la configuración analizada. En otros casos los mecanismos de falla por cortante o por flotación pueden tener un peso mayor.

Debe esperarse en particular que la probabilidad de falla por cortante tome mayor importancia en el caso de eliminar la pantalla o de recurrir a una pantalla simple o a una pantalla que no alcance la capa dura.

Ya se señaló por otra parte que para lumbreras de gran diámetro (20m o más), el mecanismo de flotación puede volverse extremadamente crítico y requerir medidas especiales (lastre).

Es por tanto recomendable que el tipo de análisis de confiabilidad presentado en esta tesis se repita para lumbreras con características diferentes.

## **CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.**

En el presente trabajo se explicó el método constructivo de flotación, el cual es utilizado para la realización de lumbreras en los suelos blandos del valle de México. Se estudiaron los principales mecanismos de falla a los que están expuestas las lumbreras flotadas.

Se describieron los conceptos de la teoría de la confiabilidad y su aplicación al sistema constructivo de flotación. Se evaluaron los estados límites de falla más relevantes en este método constructivo, los cuales son: falla del núcleo central, falla del fondo general por cortante, falla por subpresión y falla por flotación.

La evaluación de los estados límites del núcleo central y fondo general por cortante fue realizada mediante el método de elemento finito (MEF), utilizando el programa Plaxis 2D axisimétrico.

Los estados límites de subpresión y flotación se evaluaron mediante el método de equilibrio límite (MEL) considerando las fuerzas actuantes y resistentes definidas en el modelo geomecánico de la lumbrera.

Para el cálculo de la confiabilidad de cada etapa constructiva, se encontraron los valores del factor de seguridad con las propiedades geomecánicas de la lumbrera modelo. Mediante el método de estimación puntual de Rosenblueth se encontró la media, varianza, desviación estándar, el índice de confiabilidad y la probabilidad de falla para cada estado límite. Por último, se encontró la probabilidad de falla del sistema.

Al término de este trabajo se puede concluir y recomendar lo siguiente:

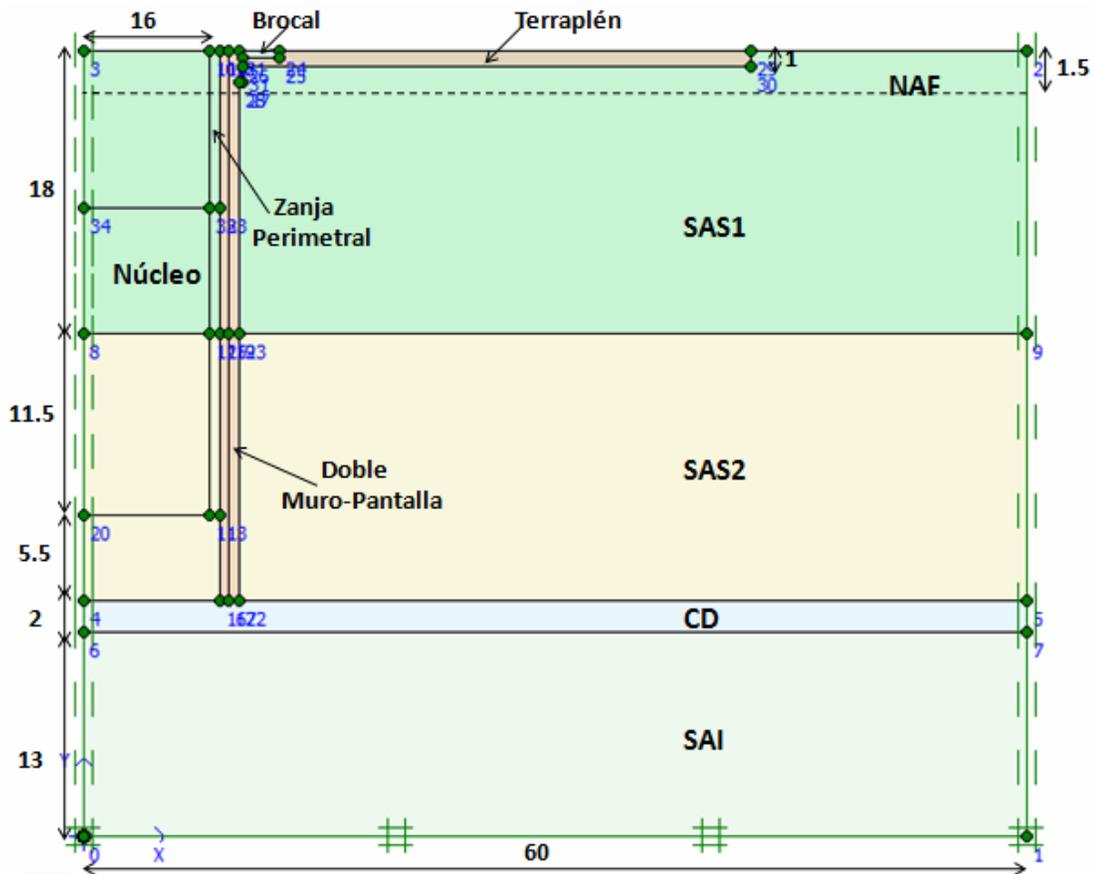
- El diseño tradicional determinista de las obras geotécnicas y la evaluación de su seguridad se pueden complementar con probabilistas, los cuales toman en cuenta el carácter incierto de la información, asignando un carácter aleatorio a los parámetros que intervienen en el diseño geotécnico. Estos métodos permiten estimar la probabilidad de falla de la obra y su complemento a la unidad (confiabilidad).
- Los métodos probabilistas de análisis de confiabilidad permiten introducir un grado mayor de realismo en la evaluación de la seguridad de obras ingenieriles, como lo es el caso de las lumbreras de acceso en el valle de la ciudad de México. Proporcionan un análisis de sensibilidad de la obra en cuestión variando los parámetros del diseño y tomando en cuenta la incertidumbre que en ellos exista.
- La probabilidad de falla del núcleo central durante la construcción resulta alta si no se tiene un buen control del nivel del lodo. Cuando se realice la excavación de la zanja perimetral para asegurar la estabilidad del núcleo central, es importante no bajar el nivel del lodo; por ello, se recomienda mantener el nivel del lodo estabilizador igual al del brocal (superficie). Sin embargo, en caso de que el núcleo central de la lumbrera resulte inestable durante su excavación, las consecuencias no son graves, ya que se puede proseguir con la excavación quitando el material excavado y sustituyéndolo por lodo bentonítico.
- Con el sistema de doble pantalla apoyada en la capa dura considerado en este trabajo, la probabilidad de falla por cortante de la excavación es baja, siempre y cuando los parámetros resistentes del suelo sean igual o mayores que los tomados en este trabajo.
- La probabilidad de falla de fondo por subpresión resulta significativa, especialmente si se toma en cuenta la posibilidad de que el lodo induzca sobrepresiones en la capa dura. En efecto, la presión inducida en el estrato permeable por el propio lodo puede resultar

crítica en caso de que se abata bruscamente el nivel del lodo en la excavación. Se pueden instalar pozos de abatimiento para controlar la presión en el estrato permeable y con ello reducir la fuerza actuante, y lograr una mayor estabilidad en cuanto al estado límite por subpresión.

- Aun cuando en el caso analizado la probabilidad de flotación es despreciable, para lumbreras de gran diámetro (20m o más), el mecanismo de flotación resulta crítico, ya que el empuje de Arquímedes crece con el cuadrado del diámetro de la lumbrera, por ello, puede requerirse medidas especiales (lastre) para equilibrar este empuje.
- La probabilidad de falla del sistema, considerando los mecanismos de falla de fondo general por cortante, subpresión y flotación, permanece gobernada por el segundo mecanismo, especialmente si se considera que la presencia del lodo puede generar un incremento de presión en la capa dura.
- El método de estimación puntual de Rosenblueth es muy útil y sencillo para obtener la confiabilidad del sistema. Requiere pocos cálculos, y proporciona resultados satisfactorios, comparables con aquellos arrojados por el método probabilista riguroso, siempre y cuando los coeficientes de variación de las variables independientes no excedan límites moderados.
- Tomando en cuenta que las condiciones estratigráficas y la geometría de las lumbreras son muy variables, es recomendable repetir el tipo de análisis de confiabilidad presentado en este trabajo, para lumbreras con características diferentes construidas por el método de flotación.

**Anexo A.** Ejemplo ilustrativo, Plaxis 2D axisimétrico.

- Se dibuja la geometría y condiciones de frontera en el modelo de estudio a realizar, Figura A.1



**Figura A.1** Modelación axisimétrica de lumbrera mediante Plaxis 2D.

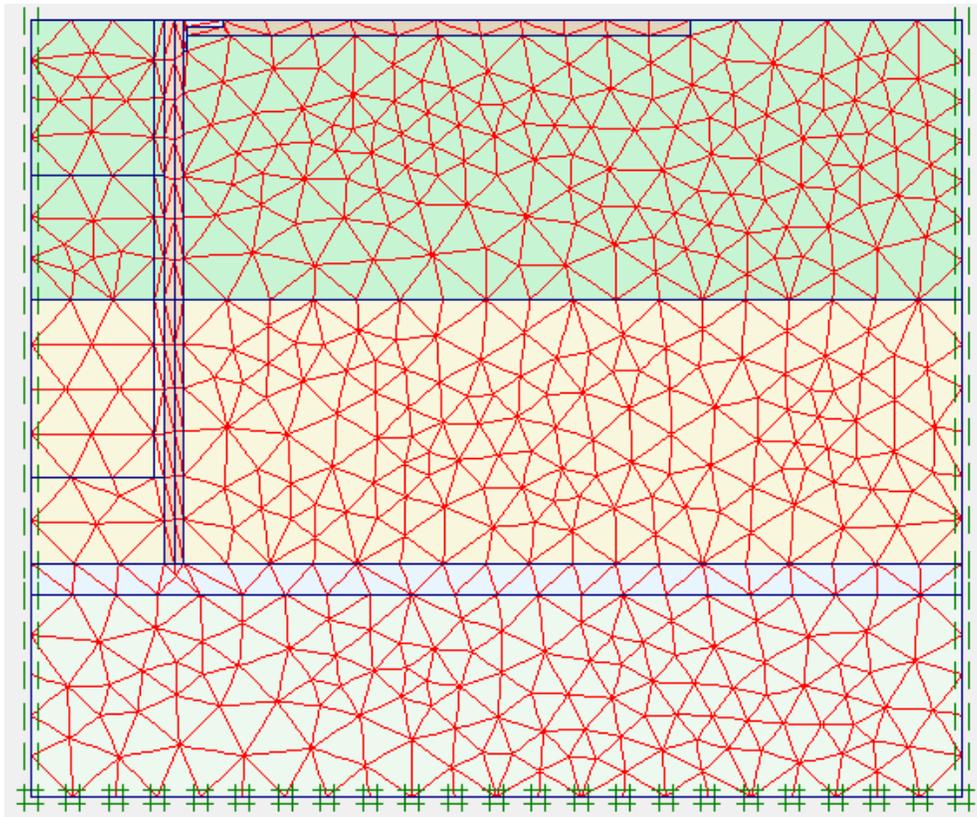
- Se proporcionan las propiedades de cada material del modelo. Tabla A.1.

Material	$\gamma$ , kN/m <sup>3</sup>	E, MPa	$\nu$	C, kPa	$\phi$ , °
Terraplén	14.0	20	0.33	0	40
SAS <sub>1</sub>	12.0	5	0.46	15	0
SAS <sub>2</sub>	12.0	5	0.46	30	0
CD	18.0	50	0.33	0	40
SAI	12.5	10	0.49	40	0
Muro -Pantalla	16.0	5,000	0.25	1,000	0
Brocal	24.0	20,000	0.20	1,000	40

**Tabla A.1** Valores utilizados en Plaxis 2D axisimétrico.

$SAS_1$  = Serie arcillosa superior 1.  
 $SAS_2$  = Serie arcillosa superior 2.  
 $CD$  = Capa dura.  
 $SAI$  = Serie arcillosa Inferior.  
 $\gamma$  = Peso volumétrico del material.  
 $E$  = Módulo de elasticidad no drenado.  
 $\nu$  = Relación de Poisson.  
 $C$  = Cohesión.  
 $\phi$  = Ángulo de fricción.

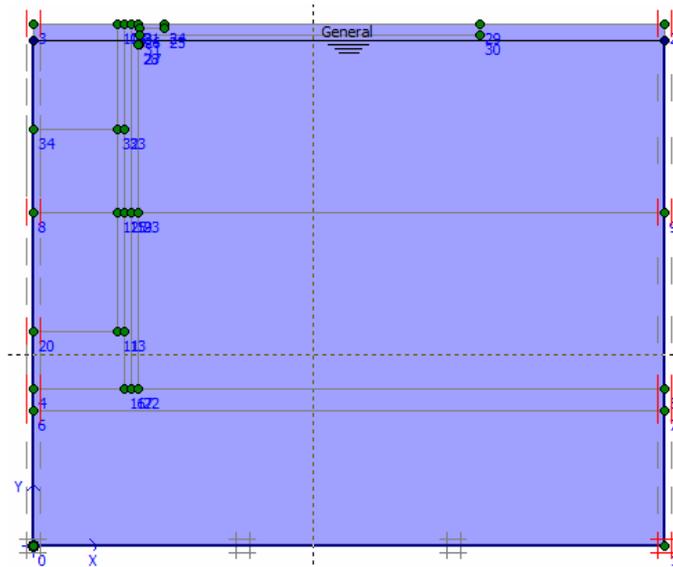
- A continuación se genera la malla de elementos finitos.



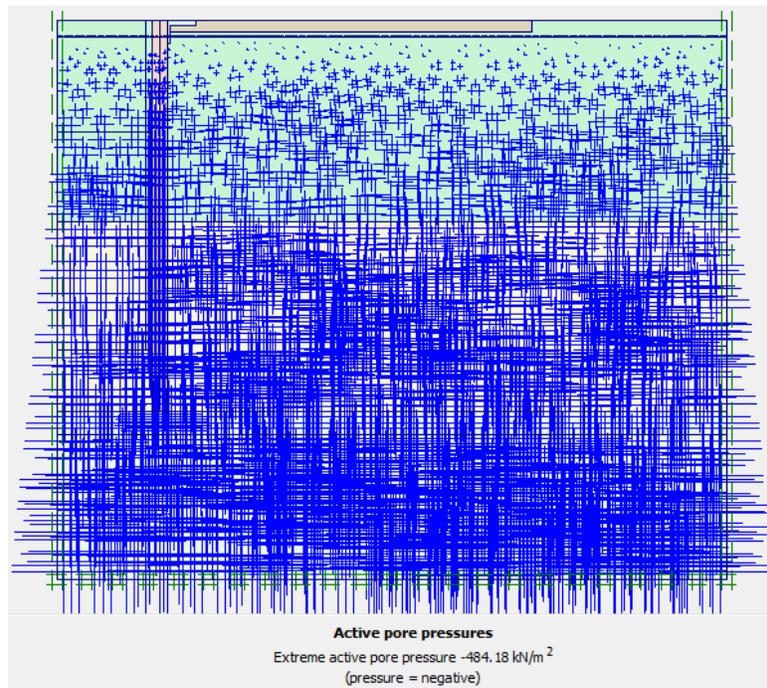
**Figura A.2 Generación de la malla de elementos finitos.**

Modelo = Axisimétrico.  
Elementos = 15 Nodos.  
Número de elementos = 1048.  
Número de nodos = 8553.

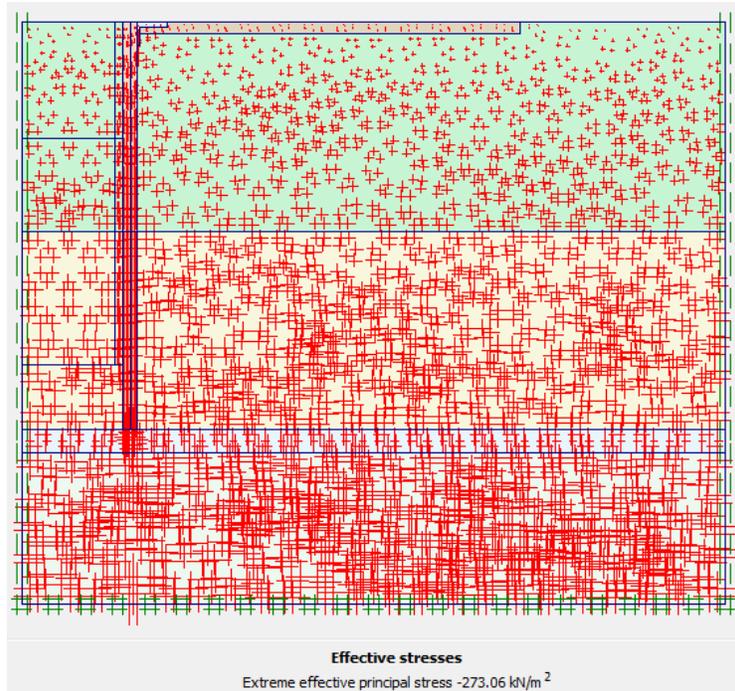
- Se dan las condiciones iniciales a las que se encuentra el modelo, figuras (A.3, A.4 y A.5)



**Figura A.3 Condiciones iniciales del NAF.**

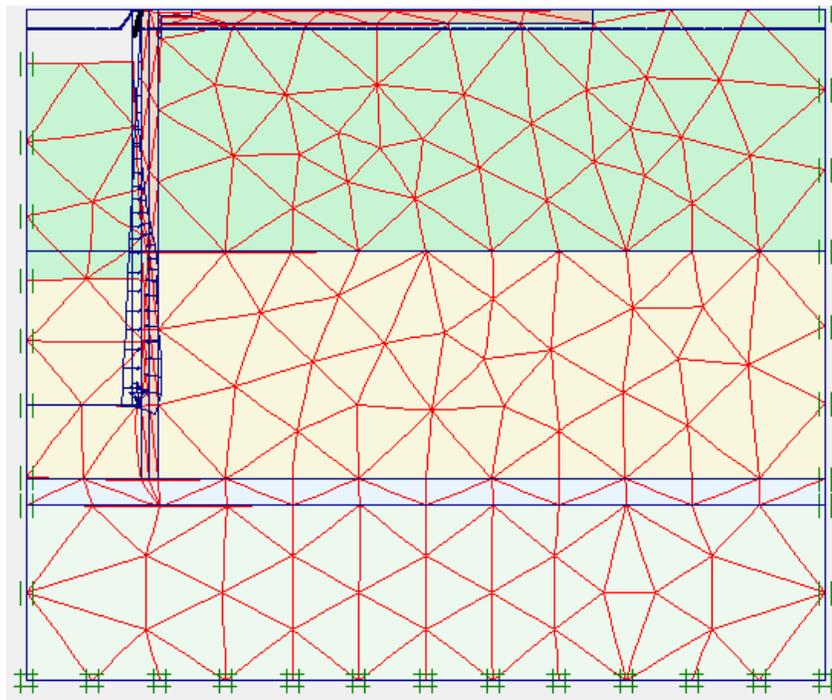


**Figura A.4 Presión de poro activa.**

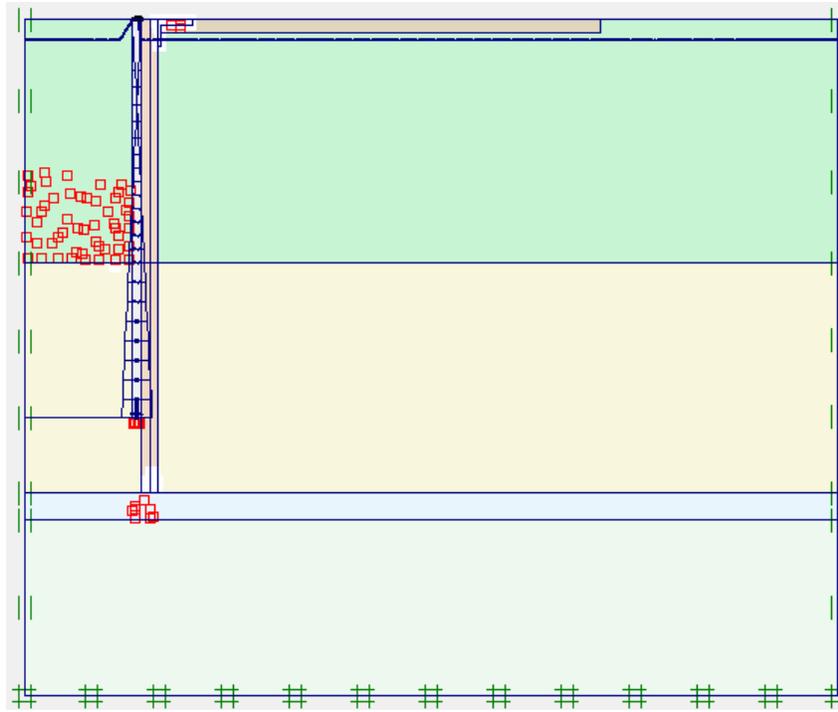


**Figura A.6 Esfuerzos efectivos.**

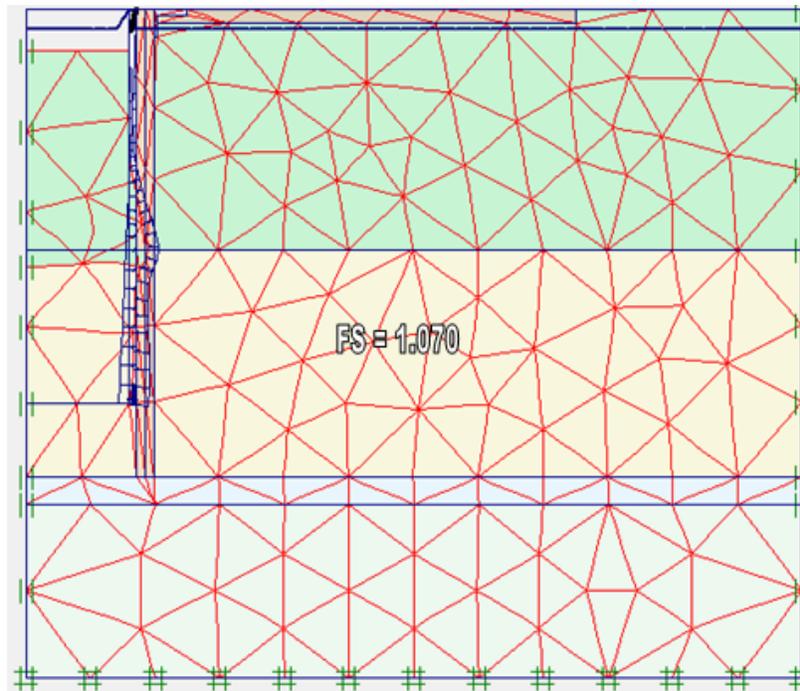
- Posteriormente se realizan las etapas de excavación de la lumbrera y evaluación de las mismas, figuras (A.7, A.8.....A.14).



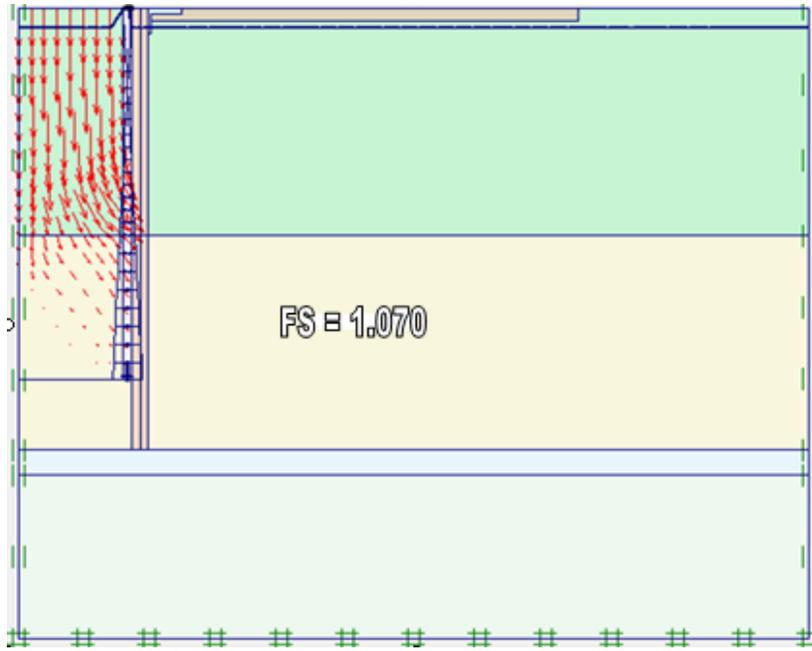
**Figura A.7 Evaluación del núcleo, Malla deformada**



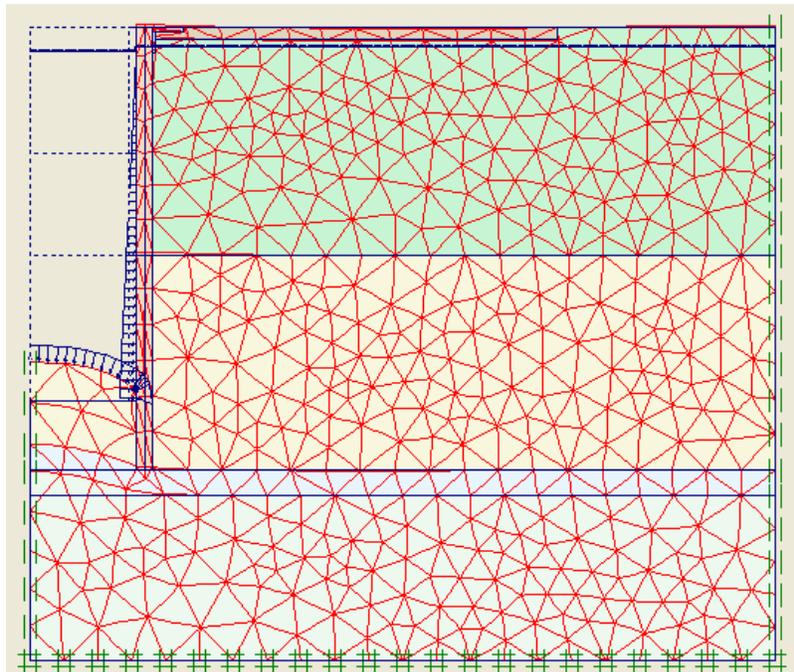
**Figura A.8 Evaluación del núcleo, Elementos plastificados**



**Figura A.9 Evaluación del Factor de Seguridad del núcleo central, Malla deformada**



**Figura A.10 Evaluación del Factor de Seguridad del núcleo central, Desplazamientos totales**



**Figura A.11 Evaluación de la falla general por cortante, Malla deformada**

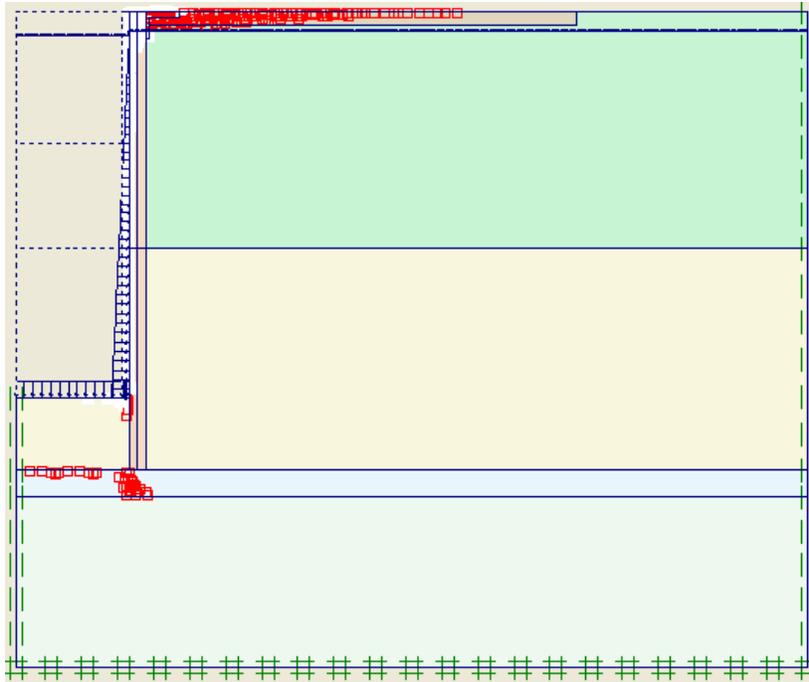


Figura A.12 Evaluación de la falla general por cortante, Puntos plastificados

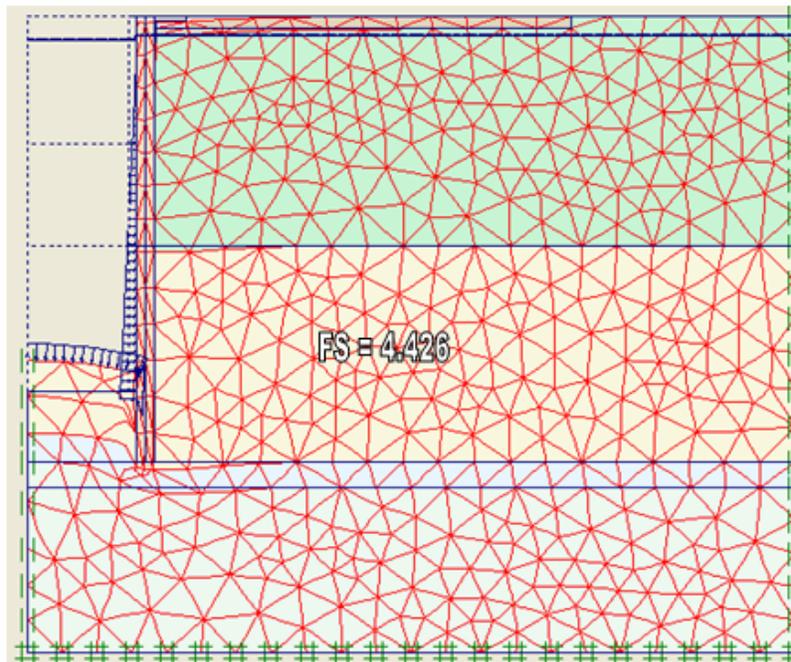
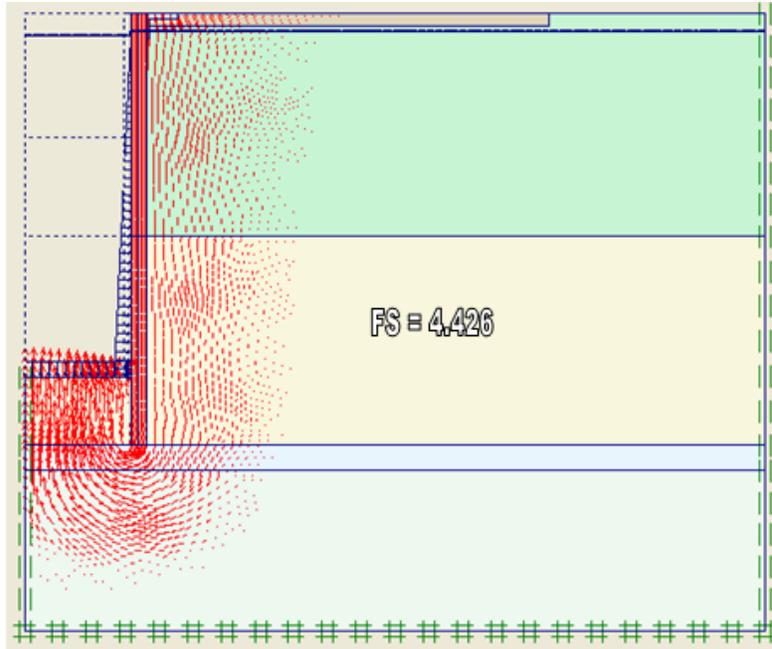


Figura A.13 Evaluación del factor de seguridad de la falla de fondo general, Malla deformada



**Figura A.14 Evaluación del factor de seguridad de la falla de fondo general,  
Desplazamientos totales**

## **BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS.**

Alberro, J. y Hernández, R. (1990). Fuerzas de filtración y fracturamiento hidráulico, Series del Instituto de Ingeniería, N° 528, Universidad Nacional Autónoma de México.

Ang, A. & Tang, W. (1975). Probability concepts in engineering planning and design, Vol. 1, Basic principles, John Wiley & Sons, New York, USA.

Ang, A. & Tang, W. (1984). Probability concepts in engineering planning and design, Vol. 2, Decision, risk and reliability, John Wiley & Sons, New York, USA.

Arias, A. (1997). Confiabilidad de trincheras estabilizadas con lodo, Tesis de Maestría en Mecánica de Suelos. División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería Civil, UNAM, (Dir. G. Auvinet).

Auvinet, G., (2000). Apuntes de probabilidad y estadística. División de Estudios de Posgrado UNAM.

Auvinet, G. (2002). Incertidumbre en Geotecnia, XVI Conferencia Nabor Carrillo, SMMS, México.

Auvinet, G. (2006). Construction of deep tunnel shafts in Mexico City soft clays by the flotation method; Invited Lecture, Proceedings, ISSMGE ATC-47 Pre-Workshop, pp. 41-50, Busan, South Korea.

Auvinet G. y Rodríguez J. F. (2003). Informe de análisis y diseño de las lumbreras de la planta de bombeo Casa colorada para construirse por la técnica de flotación, Parte A, Instituto de Ingeniería, UNAM.

Auvinet, G. & Rodríguez J. F. (2004). Análisis de lumbreras cilíndricas sometidas a cargas locales (Analysis of shafts subjected to local loads), Proceedings, XXII<sup>th</sup> National Soil Mechanics Meeting, AMMS, Guadalajara, México, Vol. 2, pp. 317-322.

Auvinet, G., Rodríguez, J.F. & Rangel, J.L., (2008), Construction of tunnel shafts in Mexico City soft clays by the flotation method, "Geomechanik und Tunnelbau" (Geomechanics and tunnelling) published by Ernst & Sohn., Austria.

Auvinet G. y Lugo O. I. (2009). Criterios de diseño empleados para el proyecto ejecutivo de la planta de bombeo profunda Casa Colorada de 40 m<sup>3</sup>/seg. (Comunicación personal)

Bjerrum, L. y Eide O. (1956), Stability of strutted excavation in clay; Norwegian Geotechnical Institute, Publication 19, Oslo.

Chandrupatla T. R. y Belegundu A. D. (1999). Introducción al estudio de Elemento Finito en Ingeniería, segunda edición, editorial Prentice Hall.

Department of Defense Handbook "Foundations & Earth Structures" NAVFAC DM-7.02, 1986.

Harr, M. E. (1987). Reliability – Based design in civil engineering, Mc. Graw Hill, USA.

Hernández C. J. (1996). Trabajo final de Mecánica de suelos aplicada. Profesor: Dr. Auvinet G, Universidad Nacional Autónoma de México.

Juárez Badillo y Rico R. (1996). Mecánica de suelos, Tomo 2, Teoría y aplicaciones de la mecánica de suelos, editorial LIMUSA.

- Marsal, R. J. y Mazari, M. (1959). El subsuelo de la ciudad de México, Facultad de Ingeniería, UNAM, México.
- Moreno F. A. (julio 1991). Lumbreras y túneles en suelos, Experiencias innovadoras en la ingeniería mexicana, trabajo de ingreso a la Academia Mexicana de Ingeniería.
- PLAXIS 2D V8 Professional Version (2006). Finite Element Code for Soil and Rock Analyses, Edited by R.B.J. Brinkgreve & W. Broere. Delft University of Technology & PLAXIS b.v., The Netherlands.
- Rosenblueth, E. (1975). Point estimates for probability moments, Proceedings of the National Academy of Science, 72 (10) USA.
- Rosenblueth, E. (1981). Two-Point Estimates in Probabilities, Applied Mathematical Modeling, 5.
- Sociedad Mexicana de Mecánica de Suelos, A. C. (2007), Memorias conmemorativas, 50 Aniversario, 1957-2007, México, D.F.
- Teodoso C. N. (1998). Procedimiento constructivo de lumbreras flotadas y de anillos en suelos blandos para el sistema de drenaje profundo de la ciudad de México”, tesis licenciatura para Ingeniero Civil, UNAM.
- Terzaghi K., Peck R. B. y Mesri G. (1996). Soil mechanics in engineering practice, third edition.
- Vázquez G. F. (2005). Incertidumbre en el modelado de la construcción de presas de tierra mediante elementos finitos”. Tesis maestría en Ingeniería (Mecánica de Suelos), DEPMI, UNAM, México, D.F. (Dir. G. Auvinet).
- Wilson, E. (1965). Structural Analysis of Axisymmetric Solid”, AIAA Journal, Vol. 3, No. 12, pp. 2269-2273, December, USA.