

A los asistentes a los cursos del Centro de Educación

Continua

La Facultad de Ingeniería, por conducto del Centro de Educación Continua, otorga constancia de asistencia a quienes cumplan con los requisitos establecidos para cada curso. Las personas que deseen que aparezca su título profesional precediendo a su nombre en el diploma, deberán entregar copia del mismo o de su cédula profesional a más tardar 15 días antes de la terminación del curso, en las oficinas del Centro, con la Sra. Sánchez.

El control de asistencia se efectuará al terminar la primera hora de cada día de clase, mediante listas especiales en las que los interesados anotarán personalmente su asistencia. Las ausencias serán computadas por las autoridades del Centro.

Se recomienda a los asistentes participar activamente con sus ideas y experiencias, pues los cursos que ofrece el Centro están planeados para que los profesores expongan una tesis, pero sobre todo para que coordinen las opiniones de todos los interesados constituyendo verdaderos seminarios.

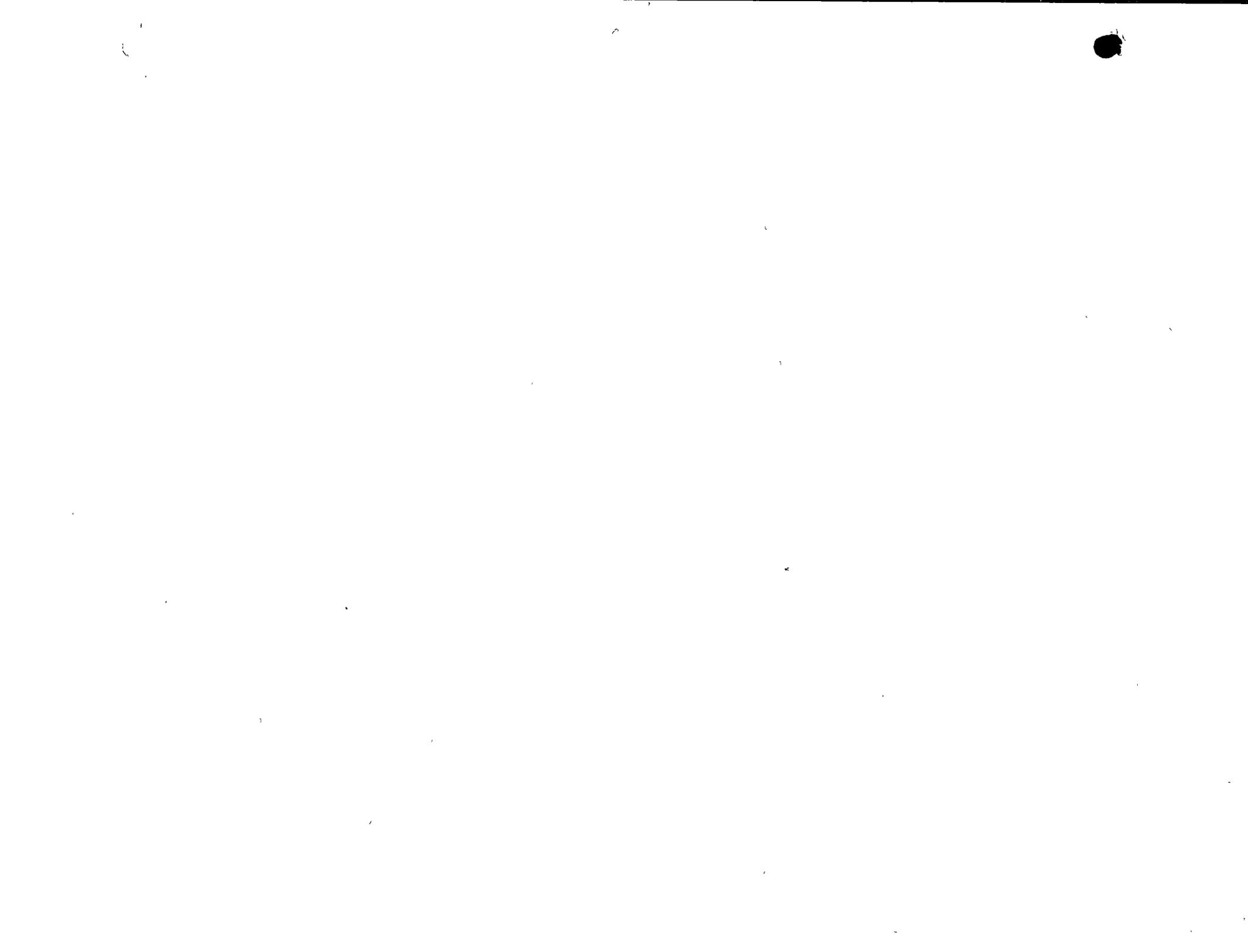
Al finalizar el curso se hará una evaluación del mismo a través de un cuestionario diseñado para emitir juicios anónimos por parte de los asistentes.

Las personas comisionadas por alguna institución deberán pasar a inscribirse en las oficinas del Centro en la misma forma que los demás asistentes.



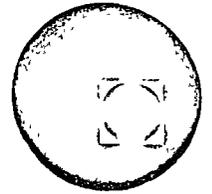
## DISEÑO HIDRAULICO DE SISTEMAS DE TUBOS

Fecha	Duración	Tema	Profesor
Ago 6 y 8	2 Hs. c/clase	MECANICA DEL FLUJO DE LIQUIDOS EN TUBERIAS Ecuaciones básicas Fricción y pérdidas menores	Dr. Gabriel Echávez Aldape
Ago.10,13,15 y 17	2 Hs. c/clase	ANALISIS DE REDES EN FLUJO PERMANENTE Conductos en serie y en paralelo Redes abiertas Redes cerradas	M. I. Francisco J. Echavarría A M. I. Ramón Domínguez Mora
Ago.20,22,24,27 y 29	2 Hs. c/clase	LINEAS DE CONDUCCION Separación óptima de estaciones de bombeo Determinación de diámetros óptimos Diseño económico de los sistemas	M. C. Mario González Petrikows M. I. Luzbel Napoleón Solórzano
Ago. 31, Sep.3,5, 7 y 10	2 Hs. c/clase  Selecc	PLANTAS HIDROELECTRICAS Y DE BOMBEO Curvas características Selección de equipo Sistemas hidroeléctricos y sistema de bombeo Revisión de los sistemas	M. I. Roberto Rincón Gutiérrez
Sep. 12,14 y 17	2 Hs c/clase	TOPICOS ESPECIALES Análisis del flujo no permanente Transporte hidráulico de sólidos	M. I. Gilberto Sotelo Avila M. I. Carlos Cruickshank
Sep. 19	2 Hs.	SEMINARIO SOBRE LOS TEMAS DEL CURSO	

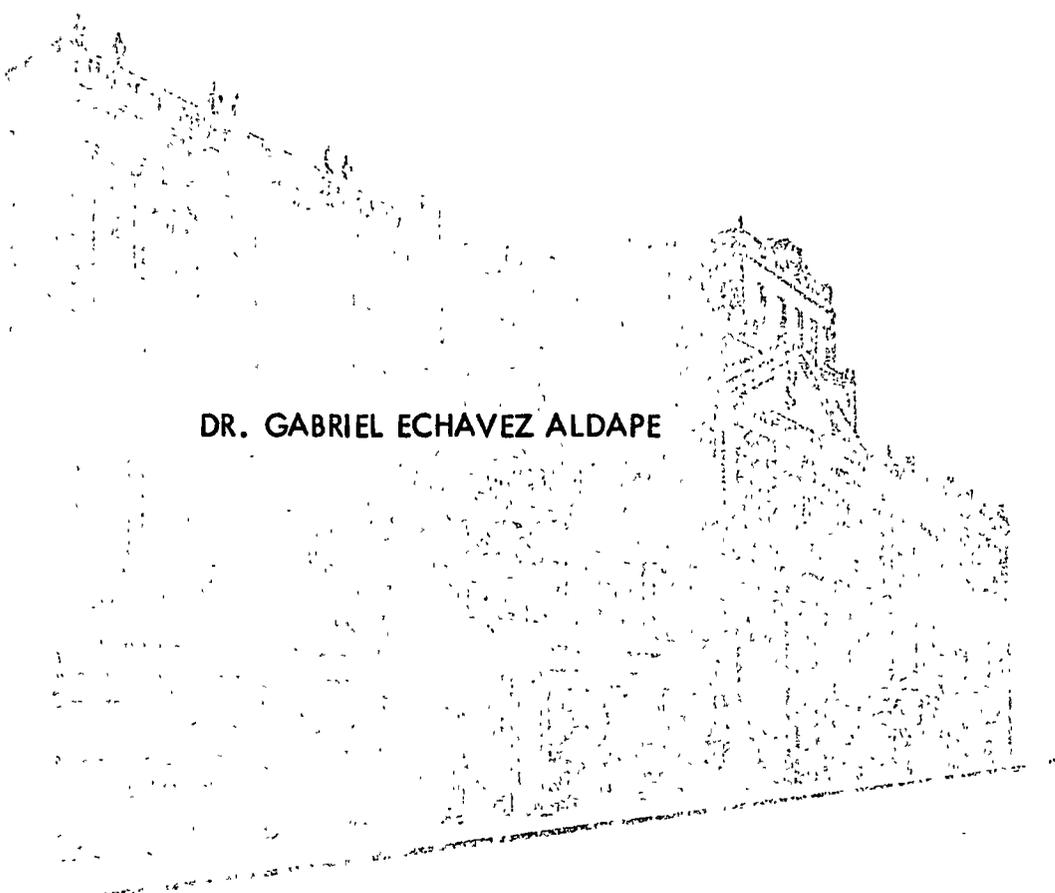




centro de educación continua  
facultad de ingeniería, unam



DISEÑO HIDRAULICO DE SISTEMAS DE TUBOS

A large, faint, dotted background image of a classical building with a prominent dome and multiple windows, likely a university building.

DR. GABRIEL ECHAVEZ ALDAPE

1973

Apuntes del curso intensivo  
DISEÑO HIDRAULICO DE SISTEMAS DE TUBOS  
CENTRO DE EDUCACION CONTINUA  
Gabriel Echávez A.

INDICE

1a	Sesión	pag.
1.	DEFINICION DE LIQUIDO	1
2.	PROPIEDADES DE LOS FLUIDOS	1
2.1	Densidad	1
2.2	Peso específico	2
2.3	Viscosidad	3
2.4	Elasticidad	5
3.	ECUACIONES BASICAS	6
3.1	Forma de análisis	6
3.2	Ecuación de continuidad	6
	Problemas 1 y 2	9
2a	Sesión	
3.3	Ecuación de Bernoulli	10
3.4.	Pérdidas	13
3.4.1	Pérdidas mayores	13
3.4.2	Pérdidas menores	15
	Problemas 3 y 4	20
3.5	Ecuación del Impulso	20
	Problemas 5 y 6	21
	BIBLIOGRAFIA	22

Otro término asociado con esta propiedad es la densidad relativa ( $S$ ), que en algunos manuales es llamada densidad, lo que origina confusiones, y que es el cociente de la densidad del fluido entre la del agua.

Líquido	Densidad, $\rho$ (geokilos)	$S$
Agua	102	1
Agua salada	105	1.03
Un aceite	92	0.9
Mercurio	1390	13.6

2.2 Peso específico ( $\gamma$ , gama). Es el peso por unidad de volumen, sus unidades son  $\text{kg/m}^3$ .

De la segunda ley de Newton se puede encontrar la ecuación que relaciona la densidad y el peso específico, que es:

$$\gamma = \rho g$$

en donde  $g$  es la aceleración de la gravedad y vale

$$g \doteq 9.8 \text{ m/s}^2$$

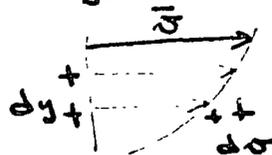
Generalmente es más sencillo recordar el peso específico que la densidad, así que la fórmula anterior se puede utilizar para encontrar la densidad

Líquido	Peso específico $\text{kg/m}^3$
Agua	1000
Agua salada	1030
Un aceite	900
Mercurio	13600

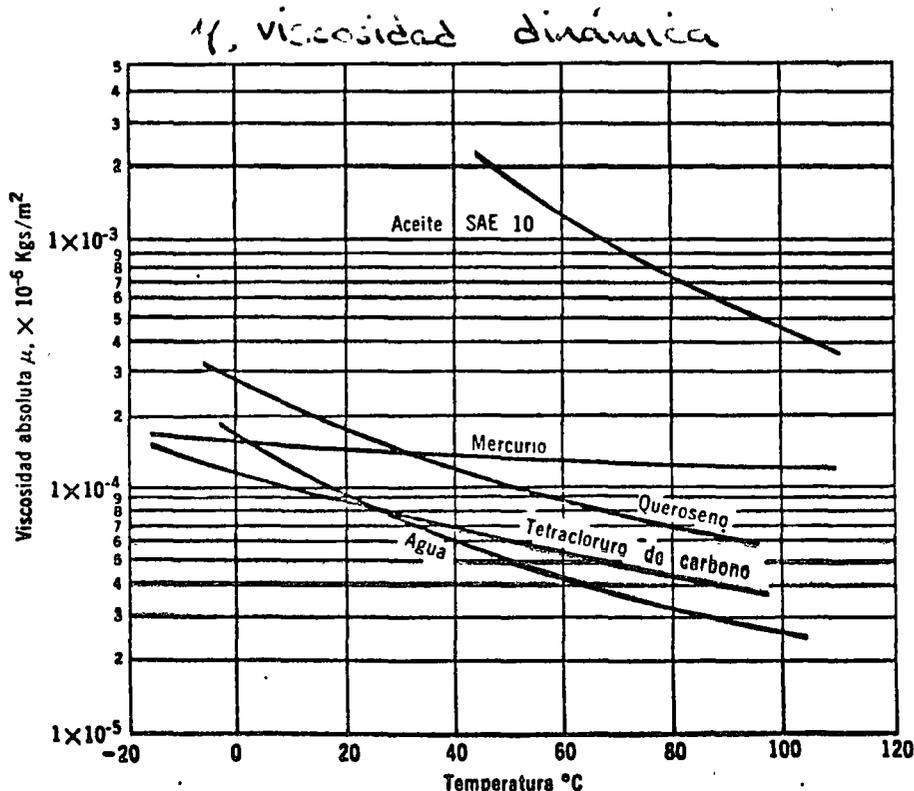
2.3 Viscosidad Por la definición de fluido sabemos que al aplicarle un esfuerzo cortante (tangencial) habrá movimiento, el que será diferente para diversos fluidos. La viscosidad dinámica ( $\mu, \mu_v$ ) es el cociente entre el esfuerzo tangencial y la rapidez de deformación del fluido. O sea

$$\mu = \frac{\tau}{dv/dy} \quad \left[ \frac{\text{kg s}}{\text{m}^2} \right]$$

donde  $dv$  es la variación de velocidad en una distancia, perpendicular a  $v$ ,  $dy$ .



Un flujo muy viscoso ( $\mu$  grande) se deformará (moverá) menos bajo el mismo estado de esfuerzo cortante que otro de poca viscosidad. La viscosidad depende de la temperatura y tiene poca variación con la presión



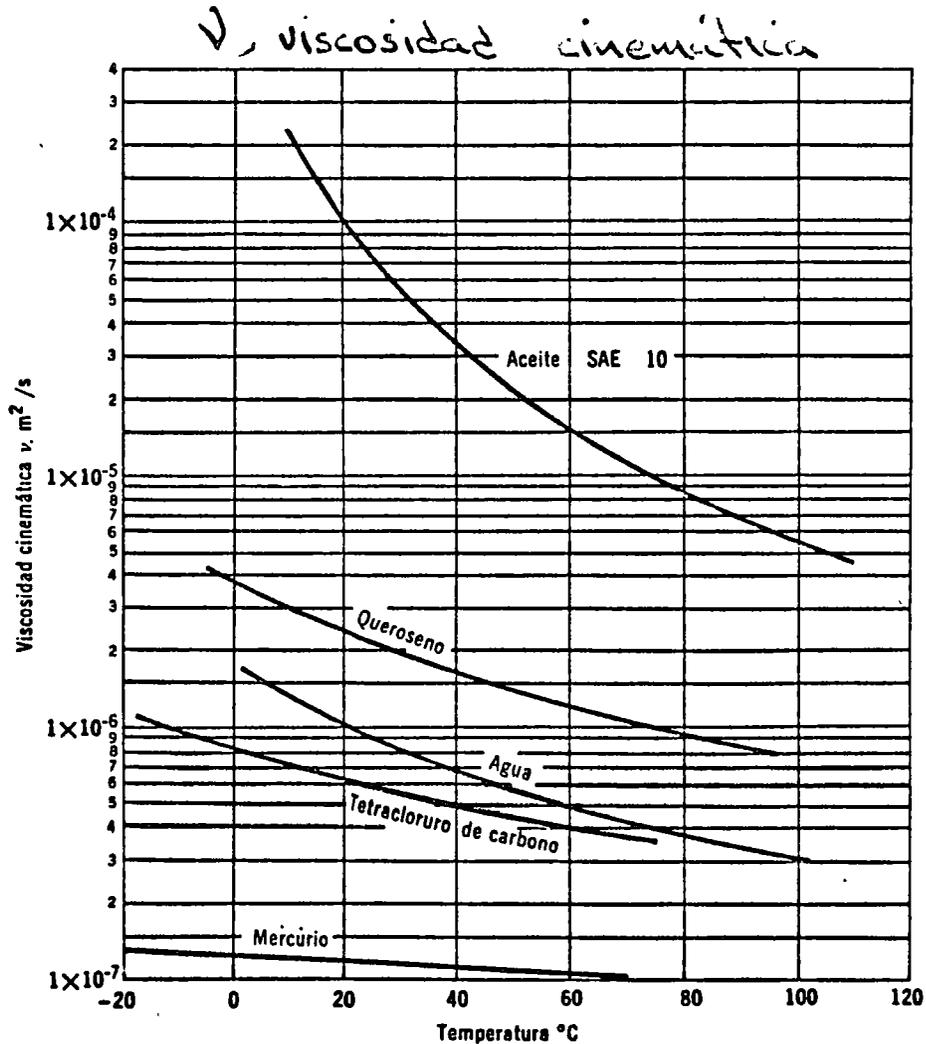
Otra viscosidad más práctica es la viscosidad cinemática ( $\nu$ ,  $\nu_0$ ) definida por:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad \left[ \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right]$$

que tiene la ventaja de que sus unidades son puramente cinemáticas y fáciles de manejar. Para los líquidos,  $\nu$  varía con la temperatura y poco con la presión, para los gases varía con las dos.

Una unidad conocida para la viscosidad cinemática es el stoke igual a  $1 \text{ cm}^2/\text{s}$ , la viscosidad cinemática del agua a  $20^\circ\text{C}$  es de 0.01 stokes.

$1 \text{ m}^2/\text{s} = 10,000 \text{ stokes}$



2.4. Elasticidad. Aunque los líquidos son prácticamente incompresibles hay fenómenos en que las altas velocidades o cambios rápidos en las condiciones de escurrimiento hacen intervenir sus propiedades elásticas. Para cuantificar éstas, se usa el módulo de elasticidad volumétrico,  $E$ , definido por:

$$E = - \frac{\Delta P}{\Delta V/V} \quad \left[ \frac{kg}{m^2} \right] \text{ o } \left[ \frac{kg}{cm^2} \right]$$

donde

$\Delta P$  es el aumento de presión que se le aplicó al volumen  $V^*$

$\Delta V$  es lo que disminuyó el volumen al aplicársele  $\Delta P$

el signo menos se debe a que al ser  $\Delta P$  positiva (compresión) el volumen disminuye.

Como la masa total en ese volumen es  $V\rho$  y se conservará constante al aumentar la presión, otra relación del módulo de elasticidad volumétrico será:

$$E = \frac{\Delta P}{\Delta \rho/\rho}$$

La temperatura y la presión modifican a la  $E$ , pero es suficiente utilizar valores medios.

Material	$E$ ( $kg/cm^2$ )
Agua	21,000 †
Agua salada	22,100
Un aceite	16,000
Mercurio	27,000

† <sup>compresible</sup> 100 veces más que el acero y 20,000 veces menos que el aire.

\* Se usa  $V$  para volumen y  $V$  para velocidad media

### 3. ECUACIONES BASICAS

Hay tres ecuaciones básicas, cada una apoyada en una "ley" fundamental.

#### Ecuación básica

Continuidad  
Bernoulli  
Impulso

#### Ley fundamental

Conservación de la masa  
Conservación de la energía  
Segunda ley de Newton

Para poder representar estas ecuaciones debemos escoger una forma de análisis.

3.1 Forma de Análisis. Se usan dos formas para analizar problemas de fluidos en movimiento: Por medio de sistemas y por medio de volúmenes de control.

Sistema. Es una porción definida de fluido que se sigue en su movimiento (En general el sistema no cambia de masa).

Volúmen de control. Es una región definida en el campo del flujo. El volúmen de control se puede mover y/o deformar, para este curso introductorio se pensará solo en volúmenes de control indeformables y en su mayor parte fijos.

La primera forma de análisis se le atribuye a Lagrange, muy útil para dinámica de sólidos, y la segunda a Euler y es la que más se utiliza en hidráulica.

#### 3.2 Ecuación de Continuidad

Si se considera un volúmen de control (V.C.) dentro de un fluido, la ecuación de continuidad se puede establecer así:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{La masa que entra} \\ \text{al V.C.} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{la masa que sale} \\ \text{del V.C.} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{La variación de la masa} \\ \text{dentro del V.C.} \end{array} \right\}$$

que puesto en <sup>mbalos</sup> signos matemáticos sería:

$$\iint_{s.c.} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} + \frac{d}{dt} \iiint_{v.c.} \rho dV = 0$$

donde la primera integral sobre la superficie del volúmen de control (S.C.) valuaría la masa que entra menos la que sale y la segunda integral indica la variación en el tiempo de la masa dentro del volúmen de control. Los símbolos usados significan lo siguiente:

$\rho$  densidad

$\vec{v}$  vector velocidad

$d\vec{A}$  vector diferencial de area, igual a:

$$d\vec{A} = \vec{n} dS$$

donde  $\vec{n}$  es un vector unitario perpendicular al diferencial de area  $dS$

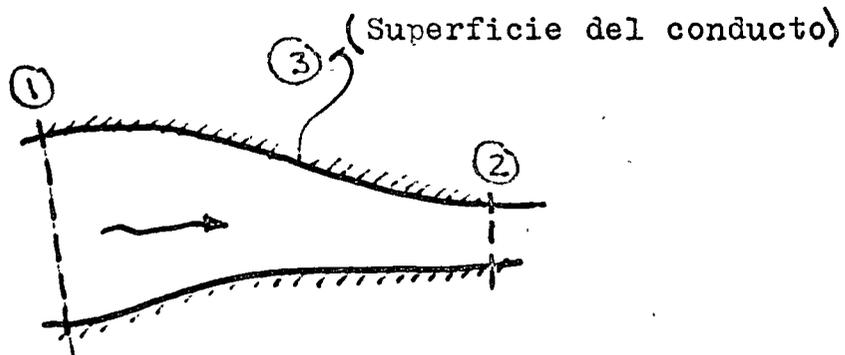
$\frac{d}{dt}$  variación con respecto al tiempo

$dV$  diferencial de volúmen.

Si el escurrimiento es permanente, no habrá variación de ninguna propiedad en el tiempo y la ecuación anterior quedará:

$$\iint_{S.C.} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = 0$$

Si esta ecuación se aplica a un conducto se podrá dividir en tres integrales



$$\iint_{S.C.} = \iint_{(1)} + \iint_{(2)} + \iint_{(3)}$$

pero la última integral  $\int_{\textcircled{3}}$  es cero, pues, en la pared del conducto  $\vec{v} \perp d\vec{A}$ . Si además se introduce el valor medio para la velocidad, definido por:

$$V_i = \frac{1}{A_i} \int_{\textcircled{i}} \vec{v} \cdot d\vec{A} \quad , \quad i=1,2,3 \dots$$

y se acepta la hipótesis de unidimensionalidad, o sea que los valores en el eje del conducto sean representativos de los valores en toda la sección, la ecuación de continuidad quedará:

$$\rho_1 V_1 \Delta_1 = \rho_2 V_2 \Delta_2$$

que para flujos incompresibles  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$  se simplifica a

$$V_1 \Delta_1 = V_2 \Delta_2$$

y por extensión

$$V_1 \Delta_1 = V_2 \Delta_2 = V_3 \Delta_3 = \dots = Q \quad , \quad \text{constante}$$

o sea

$$V_i \Delta_i = Q$$

donde

$V_i$  velocidad media en la sección  $i$

$\Delta_i$  area de la sección  $i$

$Q$  gasto  $[\text{m}^3/\text{s}]$

por lo tanto en un conducto la ecuación de continuidad señala que el producto de la velocidad por el area es constante en todas las secciones. Por lo que en una contracción se tendrán velocidades mayores y en un ensanchamiento menores.

Problema 1. En una tubería se tienen tres diámetros diferentes de tubos, 6", 4" y 3", si el gasto es de  $20 \text{ lt/s}$  ¿Cuánto valen las velocidades en cada tubo?

sol.

m/s

Problema 2. En una tubería de 20" hay una bifurcación en Y en donde una rama tiene 12" y la otra 16". Si la velocidad en el tubo mayor es de 0.5 m/s y el agua se reparte en forma proporcional al diámetro. ¿Cuánto vale el gasto en cada tubo?, ¿Qué velocidades se tendrán en los dos ramales?

sol.

Apuntes del curso intensivo  
DISEÑO HIDRAULICO DE SISTEMAS DE TUBOS  
CENTRO DE EDUCACION CONTINUA  
Gabriel Echávez A.

2a. Sesión (2 horas)

### 3.3 Ecuación de Bernoulli

También llamada ecuación de la energía. Aunque se puede deducir de varias maneras aquí se describirá esquemáticamente su deducción basándose en la ley de la conservación de la energía. Aplicando esta ley a un volumen de control se puede poner:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Calor añadido} \\ \text{al vol. de control} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Trabajo recibido por} \\ \text{el volumen de control} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Aumento de energía} \\ \text{en el vol. de control} \end{array} \right\}$$

En problemas donde la transferencia de calor no es importante, el primer término se anula.

De los dos términos que quedan, el primero es conveniente separarlo en tres componentes:

Trabajo debido a fuerzas normales (presión)

Trabajo debido a fuerzas tangenciales (cortante)

Trabajo de flecha

Esta ecuación también será válida en la unidad de tiempo, o sea como potencia. En esta forma el trabajo por unidad de tiempo debido a las fuerzas normales que actúan en la superficie del volumen de control está dado por:

$$\iint_{s.c.} p \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

donde

$p$  es la presión  $\left[ \frac{kg}{m^2} \right]$

el trabajo debido a fuerzas tangenciales es difícil de valuar, pero se puede eliminar escogiendo un volumen de control adecuada

do o incorporar este término a las pérdidas, que se detallarán más adelante. El trabajo de flecha es el debido a algún mecanismo que le añada (bomba), o extraiga (turbina), potencia al escurrimiento.

En cuanto al segundo miembro de la ecuación, aumento de la energía por unidad de tiempo en el volúmen de control, también conviene dividirlo en tres partes:

$E_i$  energía interna, que depende básicamente de la temperatura del fluido.

$E_p$  energía potencial, función de la altura con respecto a un nivel de referencia.

$E_c$  energía cinética, función de la velocidad.

Para un flujo permanente, la energía que es transportada a través de las paredes del volúmen de control, debe equilibrarse con los trabajos. Las expresiones integrales de este transporte de energía por unidad de tiempo son respectivamente:

$$\iint_{s.c.} E_i \bar{v} \cdot d\bar{A}$$

$$\iint_{s.c.} E_p \bar{v} \cdot d\bar{A} = \iint_{s.c.} \gamma z \bar{v} \cdot d\bar{A}$$

$$\iint_{s.c.} E_c \bar{v} \cdot d\bar{A} = \iint_{s.c.} \frac{\rho v^2}{2} \bar{v} \cdot d\bar{A}$$

donde  $z$  es una distancia vertical. Dejando por ahora el trabajo de flecha, la transferencia de calor y el transporte de energía interna; la ecuación de la energía, ya sustituidos los valores en que se dividió cada término, y después de dividirla entre  $\gamma$ , nos quedará:

$$\iint_{s.c.} \left( \frac{p}{\gamma} + z + \frac{v^2}{2g} \right) \bar{v} \cdot d\bar{A} = 0$$

y aplicando esta ecuación a un conducto, en forma semejante a la que se hizo con la ecuación de continuidad quedará:

$$\left| \frac{P}{\gamma} + z + \frac{V^2}{2g} \right|_1 = \left| \frac{P}{\gamma} + z + \frac{V^2}{2g} \right|_2 \quad [m]$$

en donde los subíndices indican, en la sección 1 y en la sección 2.

$\frac{P}{\gamma}$  se llama carga de presión  $[m]$   
 $z$  carga de posición  $[m]$   
 $\frac{V^2}{2g}$  carga de velocidad  $[m]$

La suma de los dos primeros términos se llama carga piezométrica y se representa por  $h$ , o sea:

$$\frac{P}{\gamma} + z = h \quad [m]$$

e indica la altura, con respecto a un nivel de referencia, que subiría el agua dentro de un pequeño tubo conectado al conducto.

La suma de la carga piezométrica más la de velocidad es la carga total,  $H$ .

$$h + \frac{V^2}{2g} = H$$

El trabajo, por unidad de tiempo, de flecha, en unidades de longitud, se representa por  $\Delta H$  y es igual a:

$$\Delta H = \frac{P}{Q\gamma}$$

donde

$P$  potencia entregada, o sacada del fluido, por el mecanismo que está entre las secciones consideradas.  $[kgm/s]^*$

\* Nota:  $1 C.V. \equiv 75 kgm/s$

Hay que recordar que la potencia nominal de un mecanismo es diferente que la entregada o sacada del fluido, por lo que hay que utilizar las eficiencias apropiadas.

Finalmente, las transferencias de calor y el transporte de energía interna se pueden agrupar en un término de pérdidas puesto que es energía que no se puede recuperar para utilizarla en mover al fluido. Entonces la ecuación de la energía, o de Bernoulli, en forma práctica quedará:

$$\left| \frac{P}{\gamma} + z + \frac{V^2}{2g} \right|_1 = \left| \frac{P}{\gamma} + z + \frac{V^2}{2g} \right|_2 \pm \Delta H + \sum h_{1-2}$$

*suma de pérdidas entre 1 y 2*

donde el doble signo indica que será - si se trata de una bomba y + si es una turbina. Los subíndices señalan la sección, y hay que considerar solo a los mecanismos y las pérdidas comprendidas entre las secciones 1 y 2.

Hay que observar que al sustituir integrales por valores medios se pierden ciertas características, la corrección más importante debido a esto, se hace multiplicando la carga de velocidad por un coeficiente, que en la mayoría de los casos prácticos es próximo a 1.06 por lo que se puede despreciar.

A continuación se verá como se valúa el término de pérdidas .

### 3.4 Pérdidas.

Este término se descompone en dos: pérdidas mayores y pérdidas menores  $\sum h_{1-2} = \sum h_f + \sum h_k$

#### 3.4.1 Pérdidas mayores.

Estas pérdidas son las que se producen por escurrir el flujo en un conducto uniforme y se calculan con la fórmula de Darcy - Weisbach, dada por:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \quad [m]$$

donde

- f coeficiente de fricción;  $0.008 \leq f \leq 0.10$
- L longitud del conducto [m.]
- D diámetro del conducto [m]
- V velocidad [m/s]

El coeficiente de fricción depende de los efectos viscosos y de lo rugoso del conducto, y se valúa con el diagrama de Moody.

Los efectos viscosos se toman en cuenta con el número de Reynolds dado por:

$$R = \frac{VD}{\nu} \quad \text{adimensional}$$

y el efecto de la rugosidad, por la rugosidad relativa

$$\frac{\epsilon}{D} \quad \text{adimensional}$$

donde  $\epsilon$  es una dimensión lineal, proporcional a la altura y tipo de rugosidad del material, que se encuentra tabulada. Así por ejemplo:

Material del tubo	$\epsilon$ , en mm
fierro fundido nuevo	0.25
fierro fundido oxidado	1 a 1.5
fierro galvanizado	0.15
acero soldado nuevo	0.05 a 0.10
asbesto-cemento nuevo	0.025
cemento liso	0.3 a 0.8
cemento no pulido	1 a 2
concreto con acabado normal	1 a 3

El coeficiente de fricción tiene tres formas de comportarse:

- 1) Si  $Re < 2000$  el flujo es laminar (hay poca difusión) y

$$f = f(Re)$$

- 2) Si  $Re$  y  $\frac{\epsilon}{D}$  son tales que se cae

arriba de la curva ① señalada en el diagrama de Moody el flujo será turbulento (mucha difusión) y el tubo muy rugoso, por lo que;

$$f = f\left(\frac{\epsilon}{D}\right)$$

- 3) Si se cae abajo, el flujo será turbulento y la rugosidad intervendrá:

$$f = f\left(Re, \frac{\epsilon}{D}\right)$$

Este comportamiento se puede ver en el diagrama de Moody adjunto (ver anexo a la pag. 15).

Para utilizarlo se calcula, o estima, el número de Reynolds y se sube verticalmente hasta encontrar, o interpolar, a la curva correspondiente a la rugosidad relativa que se tenga y después se desplaza horizontalmente para hallar la  $f$ .

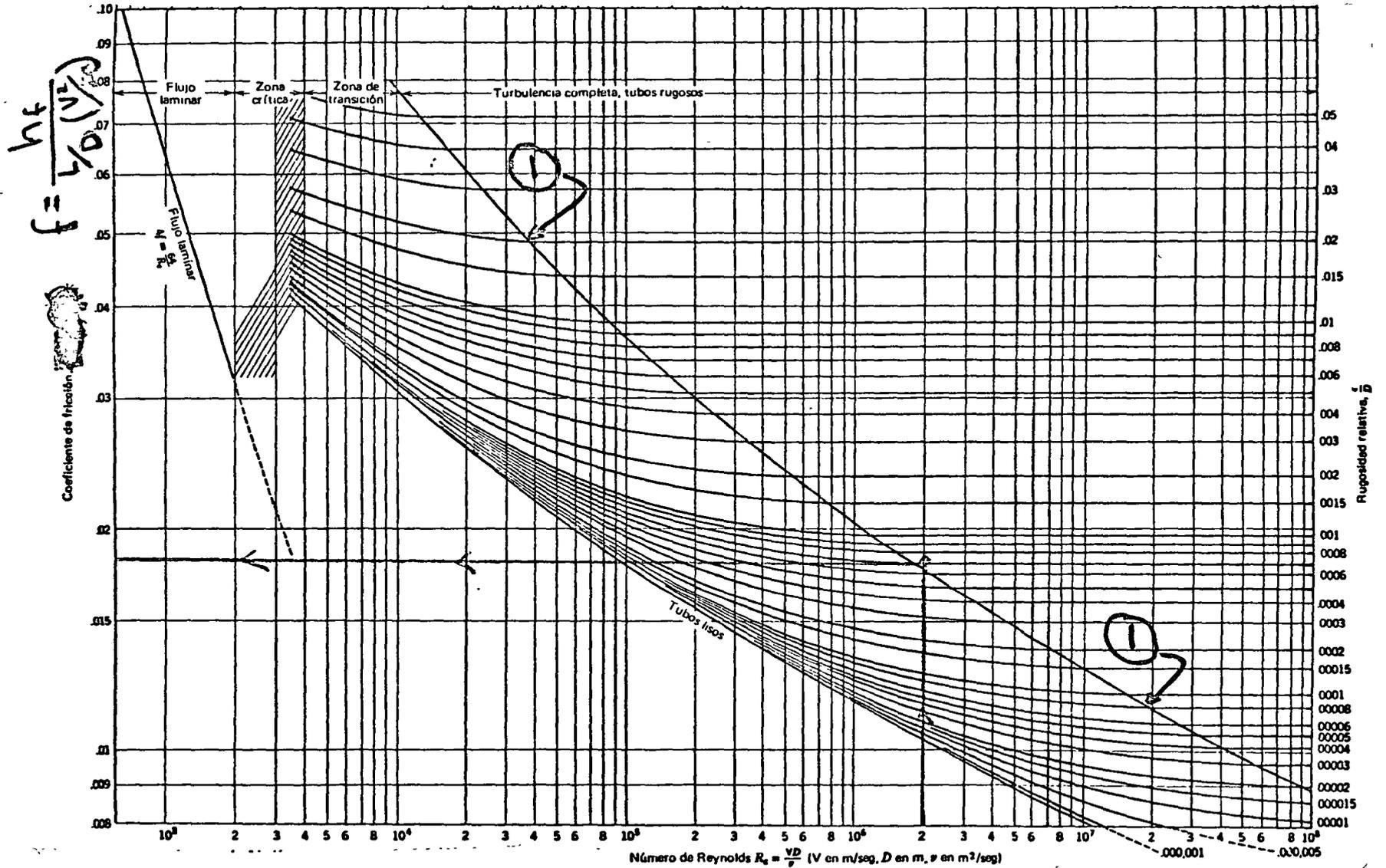
### 3.4.2 Pérdidas menores.

Estas se deben a cualquier cambio en la geometría o la dirección del conducto, a diferencia de las pérdidas mayores, son pérdidas concentradas en una pequeña zona.

La fórmula para valuarlas es:

$$h_k = K \frac{V^2}{2g}$$

en donde  $K$  es el coeficiente de pérdidas y depende de qué tan severo es el cambio en la geometría. Estos valores vienen tabulados en manuales; a continuación se darán algunos de ellos como ilustración:



$$R = \frac{V \text{ cm/s} \cdot D \text{ cm}}{\nu \text{ cm}^2/\text{s}}$$

Diagrama de Moody

Ejemplo:  
 Si  $R = 2 \times 10^6$   
 y  $\epsilon/D = 0.0007$   
 $f = 0.018$

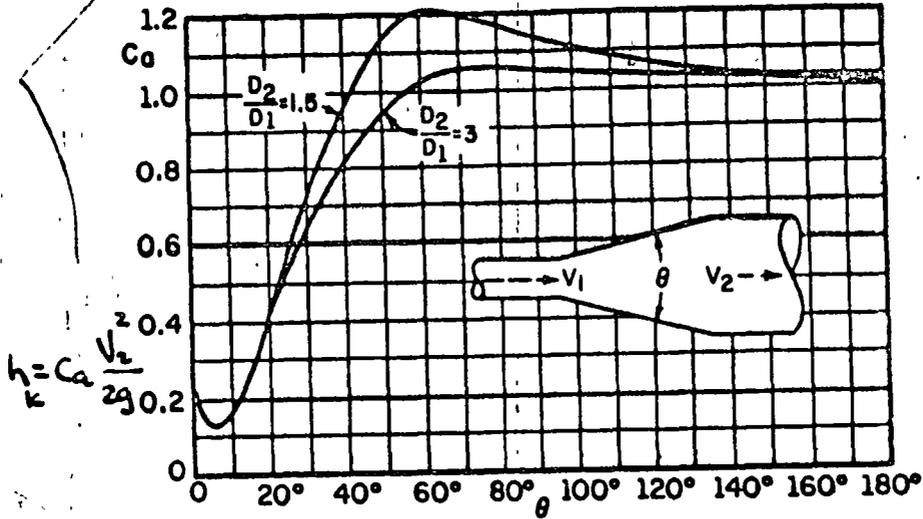
Pérdidas por entrada.

Al inicio de una tubería.

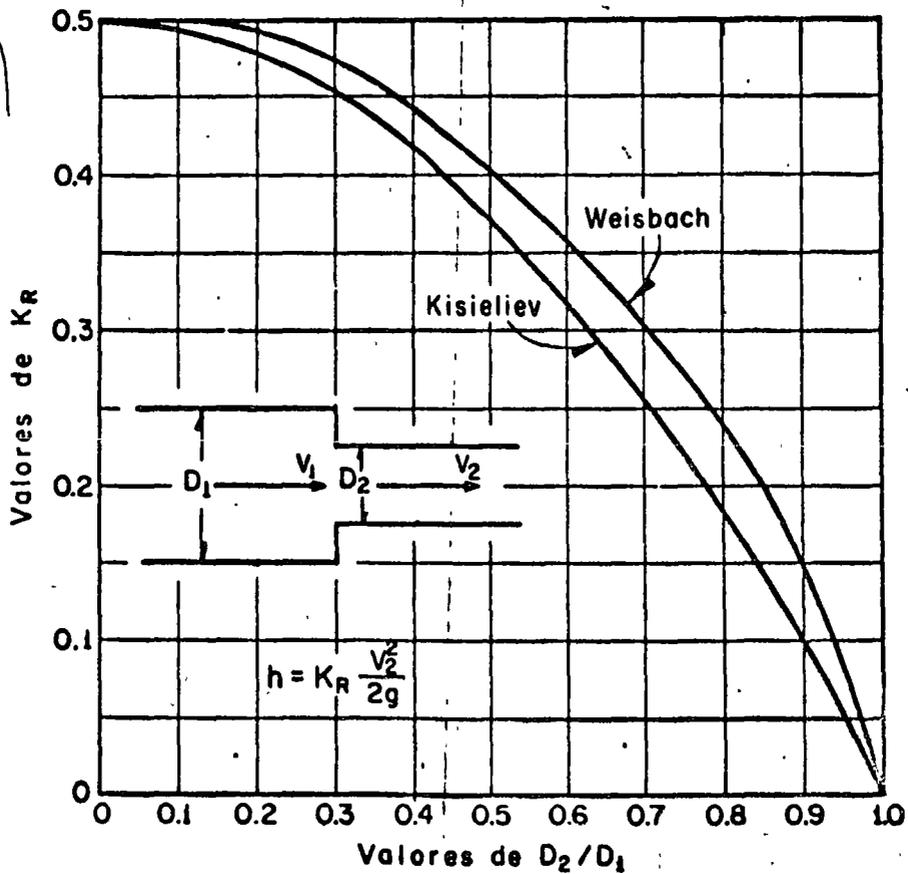
Entrada abocinada  $K = 0.05$

Entrada afilada  $K = 0.5$

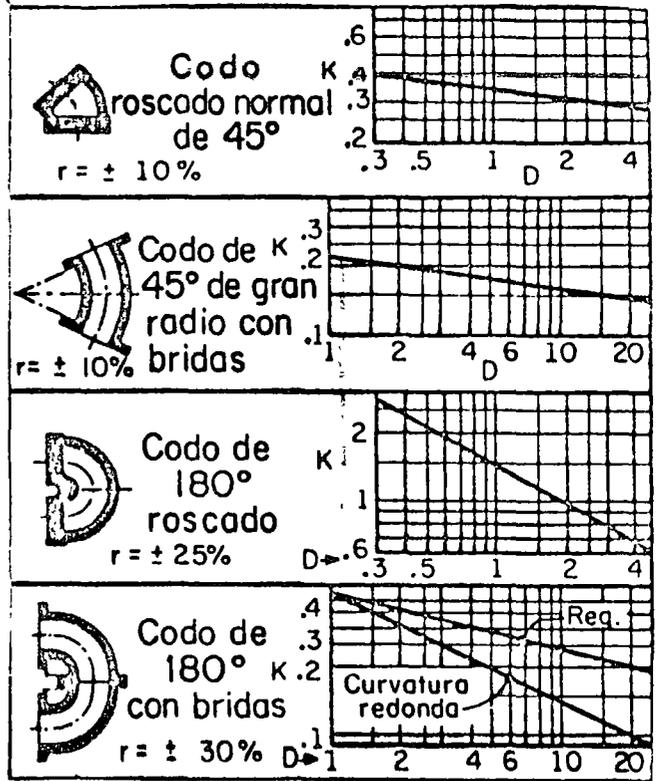
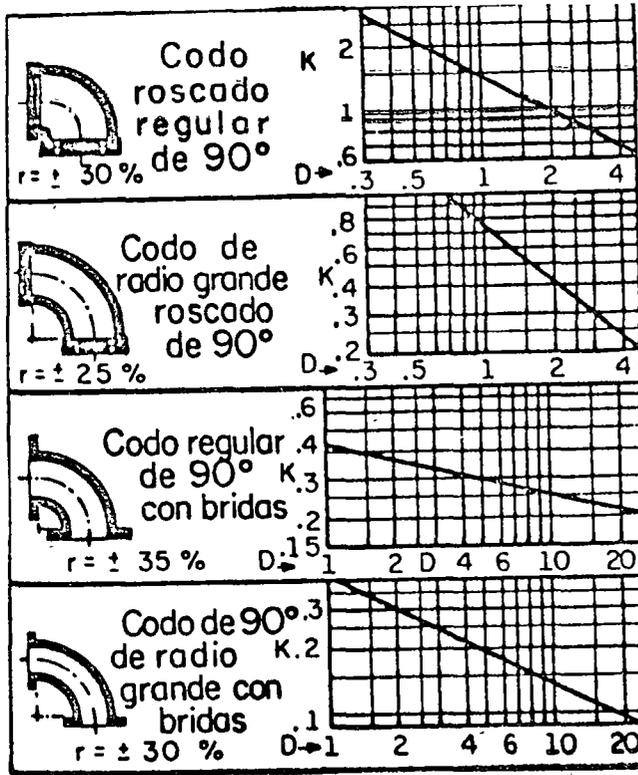
Pérdida por ensanchamiento



Pérdida por contracción brusca.

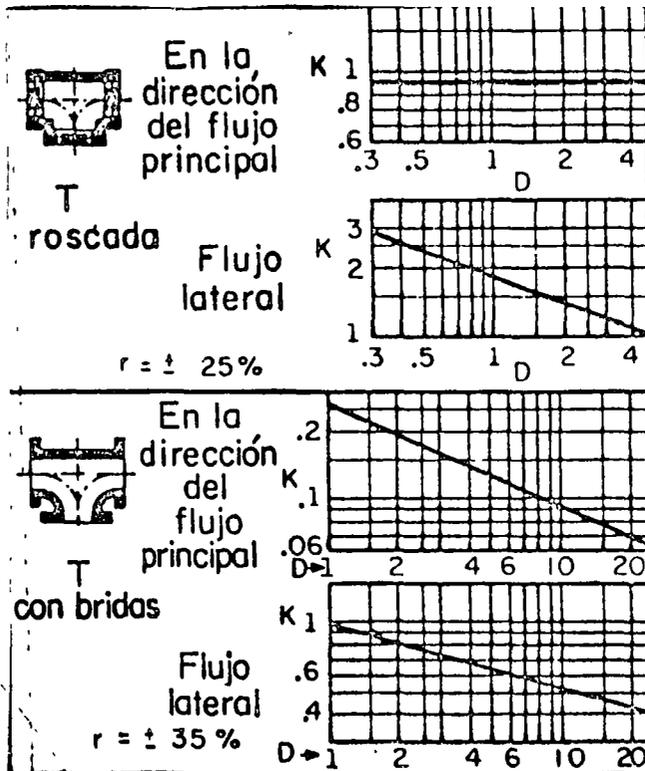


Pérdida por codos

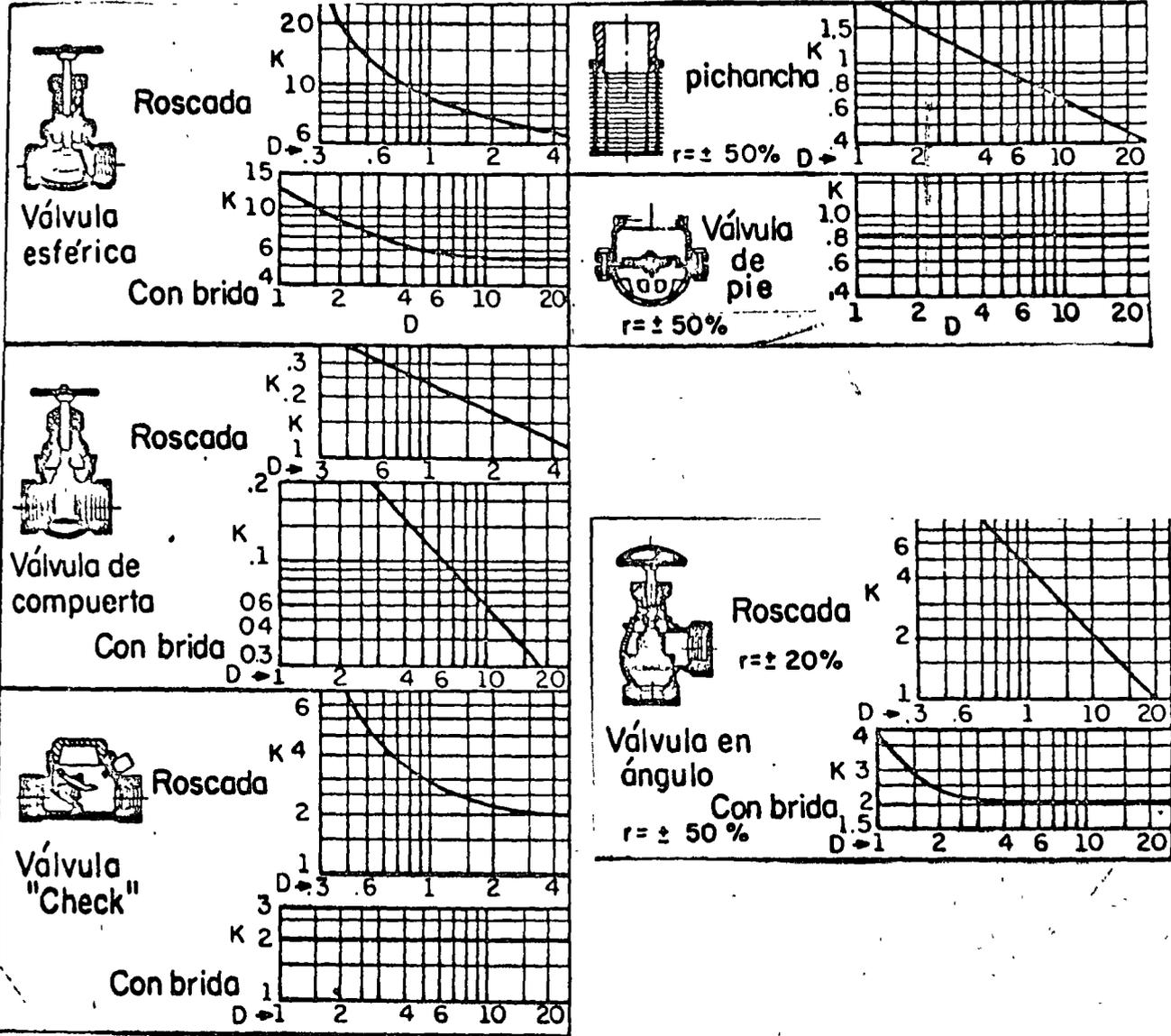


Nota. El diámetro D corresponde al nominal IPS (Iron Pipe Size) y se mide en pulgadas; r es el intervalo aproximado de variación para K

Pérdida por T

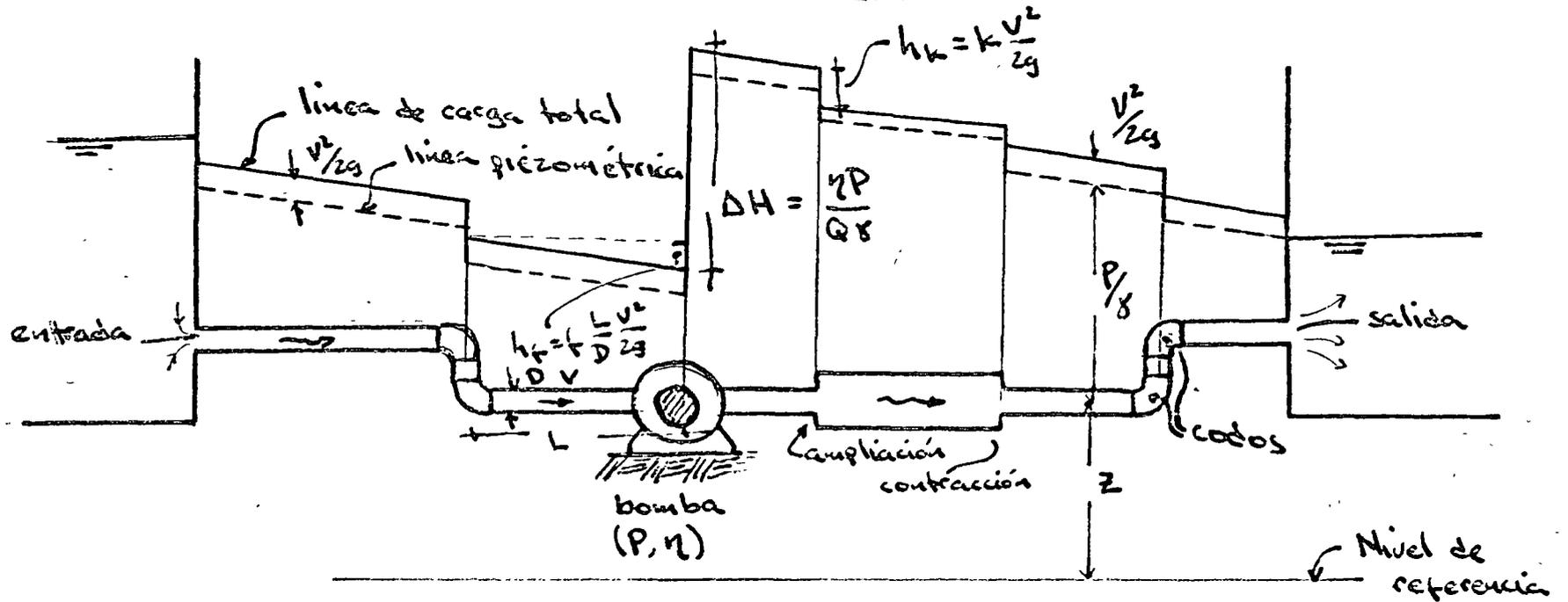


Pérdida por válvula



Pérdida por salida

$K = 1.0$



Esquema de una instalación con las líneas de carga total y piezométrica.

Problema 3. Se tienen dos depósitos a 200 m. uno de otro y con una diferencia en elevación de la superficie del agua de 20 m. Si se conectan con los tres siguientes tubos:

1.- 70 m de tubo de 4"

2.- 70 m de tubo de 6"

3.- 60 m de tubo de 3"

en donde cada conexión es abrupta. Encuentre el gasto que escurre y dibuje las líneas de carga total y de carga piezométrica.

Respuesta =

Problema 4.

Si se bombea agua a una distancia de 100 m a través de un tubo de fierro fundido de 2" y el punto final está a 18 m arriba del inicial. ¿Qué potencia nominal se necesitaría si la eficiencia es de 0.87 y en el tubo hay una válvula de globo y 3 codos de 90° ?

### 3.5 Ecuación del Impulso.

Esta ecuación se usa cuando se desea conocer la fuerza que el fluido ejerce sobre un conducto al haber un cambio de dirección o de sección. En la mayoría de las instalaciones esta fuerza no es importante, pues el conducto está sobrado para resistirla, pero en conductos muy grandes, por ejemplo: en instalaciones hidroeléctricas; en flujos de alta velocidad como boquillas de mangueras; o en ciertas instalaciones de bombas; puede ser importante.

La fórmula se deriva de la segunda ley de Newton, que para la unidad de masa es:

$$\bar{f} = \frac{d}{dt} (e\bar{v})$$

donde

$\bar{f}$  fuerza por unidad de masa  
 $e\bar{v}$  cantidad de movimiento  
 $t$  tiempo

Considerando todas las fuerzas que actúan en un volumen de control y considerando el flujo incompresible y al escurrimiento permanente, la fórmula en valores medios se pondrá:

$$\Sigma \bar{F}_{ext.} + \Sigma \bar{F}_{wergo} = Q \rho (\bar{V}_2 - \bar{V}_1)$$

donde

$\Sigma \bar{F}_{ext.}$  es la suma de todas las fuerzas externas que actúan en el volumen de control.

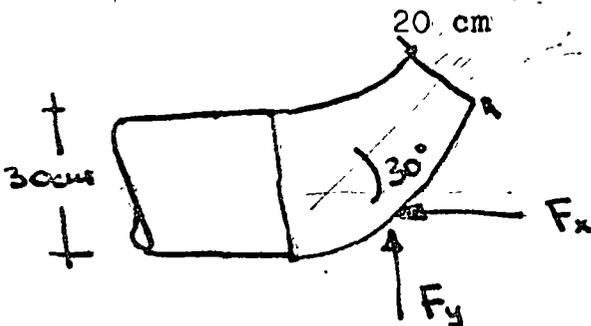
$\Sigma \bar{F}_{wergo}$  es el peso del fluido dentro del volumen de control

$\bar{V}_2$  es la velocidad media vectorial en la Sección 2, con una dirección igual a la del eje del conducto.

$\bar{V}_1$  la velocidad media vectorial para la Sección 1.

A diferencia de las ecuaciones de continuidad y de Bernoulli, que son ecuaciones escalares, ésta es una ecuación vectorial que se puede descomponer en tres escalares.

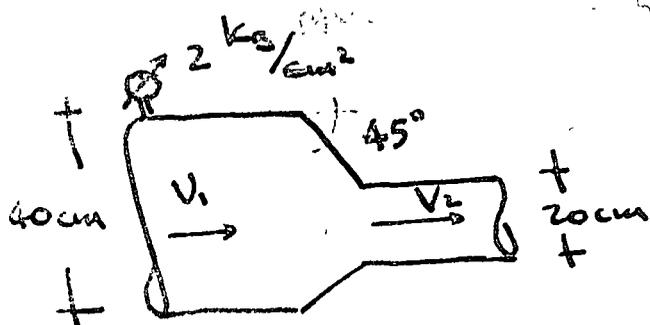
Problema 5. Una tubería termina en un codo de  $30^\circ$  y que reduce el diámetro de 30 cm a 20 cm. ¿Qué fuerza ejerce el codo sobre el agua cuando el gasto de agua es de 100 lt/s?



Solución

Nota: En este problema se emplean las 3 ecuaciones.

Problema 6.



Se tiene una contracción en una tubería. Despreciando las pérdidas calcule el empuje en la contracción si.

$$V_1 = 3 \text{ m/s} \quad \text{y} \quad P_1 = 2 \text{ kg/cm}^2$$

Repítalo sin despreciar pérdidas.

¿Fue mayor o menor?

Nota: Use las gráficas para hallar la  $K$  cuando hay contracción.

BIBLIOGRAFIA

- Sotelo G., "Hidráulica" D12, UNAM, Julio (1971)
- Hansen A.G., "Mecánica de Fluidos", Limusa Wiley, (1971)
- Daily J.W., Harleman D.R.F., "Fluid Dynamics", Addison-Wesley (1966)
- Rouse H., "Elementary Mechanics of Fluids", John Wiley & Sons (1963).



centro de educación continua  
facultad de ingeniería, unam



DISEÑO HIDRAULICO DE SISTEMAS DE TUBOS

ANALISIS DE REDES EN FLUJO PERMANENTE

M. I. Francisco J. Echavarría A.



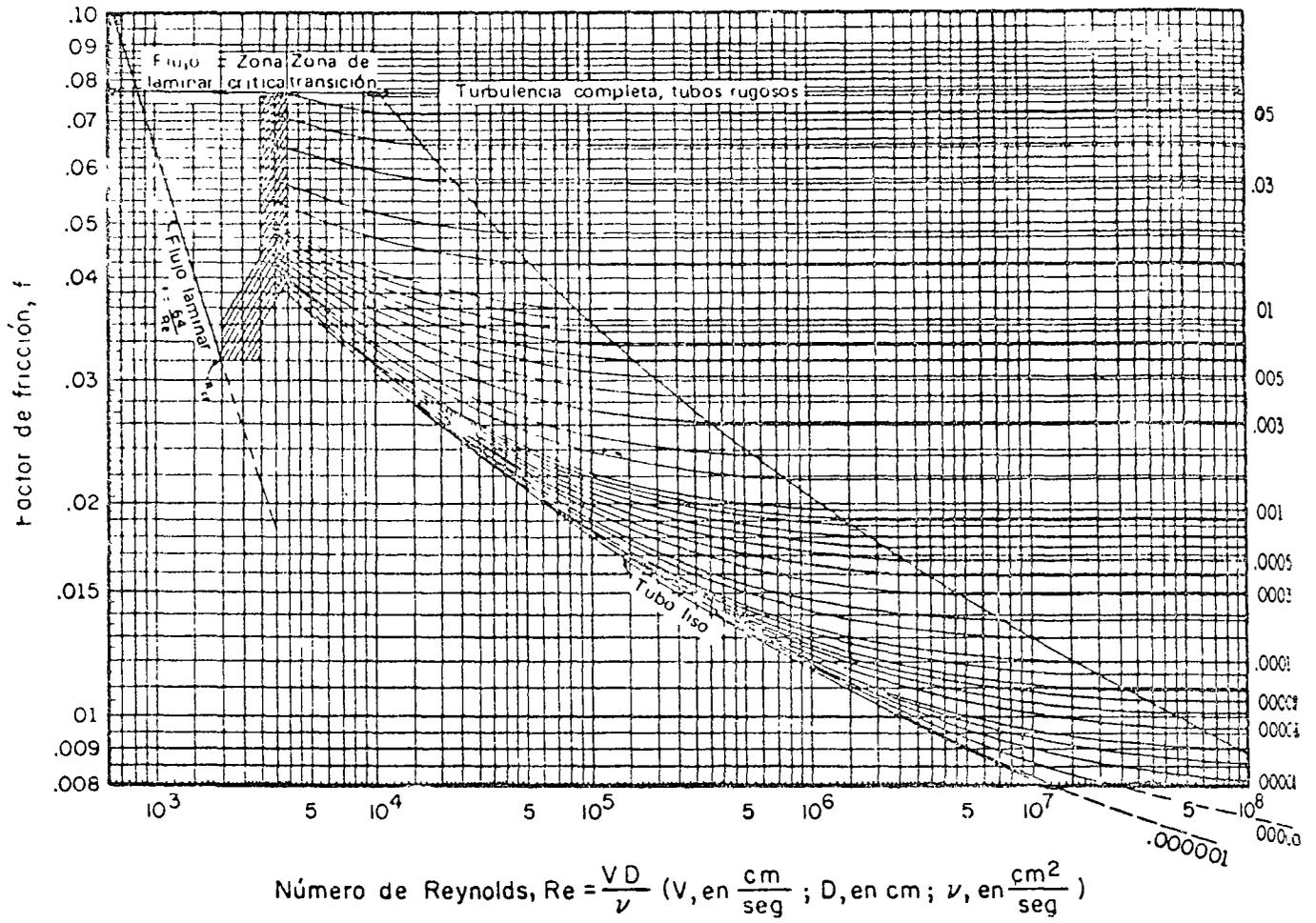


Fig 8.23 Factor de fricción para cualquier tipo y tamaño de tubo

TABLA 8.1 RUGOSIDAD ABSOLUTA  $\epsilon$  EN TUBOS COMERCIALES

Material	$\epsilon$ , en mm
TUBOS LISOS	
De vidrio, cobre, latón, madera (bien cepillada), acero nuevo soldado y con una mano interior de pintura, tubos de acero de precisión sin costu ra, serpentines industriales, plástico, hule	0.0015
Tubos industriales de latón	0.025
Tubos de madera	0.2 a 1
Fierro forjado	0.05
Fierro fundido nuevo	0.25
Fierro fundido, con protección interior de asfalto	0.12
Fierro fundido oxidado	1 a 1.5
Fierro fundido, con incrustaciones	1.5 a 3
Fierro fundido centrifugado	0.05
Fierro fundido nuevo, con bridas o juntas de macho y campana	0.15 a 0.3
Fierro fundido usado, con bridas o juntas de macho y campana	2 a 3.5
Fierro fundido para agua potable, con bastantes in crustaciones y diámetro de 50 a 125 mm	1 a 40
Fierro galvanizado	0.15
Acero rolado nuevo	0.05
Acero laminado nuevo	0.04 a 0.1
Acero laminado con protección interior de asfalto	0.05

## TUBOS DE ACERO SOLDADO DE CALIDAD NORMAL

Nuevo	0.00 a 0.10
Limpio después de uso prolongado	0.15 a 0.20
Moderadamente oxidado, con pocas incrustaciones	0.4
Con muchas incrustaciones	3
Con remaches transversales, en buen estado	0.1
Con costura longitudinal y una línea transversal de remaches en cada junta, o bien laqueado interiormente	0.3 a 0.4
Con líneas transversal de remaches, sencilla o doble, o tubos remachados con doble hilera longitudinal de remaches e hilera transversal sencilla sin incrustaciones	0.5 a 0.7
Acero soldado, con una hilera transversal sencilla de pernos en cada junta, laqueado interior, sin oxidaciones, e incrustaciones, con circulación de agua turbia	1
Acero soldado, con doble hilera transversal de pernos, agua turbia, tuberías remachadas con doble costura longitudinal de remaches y transversal sencilla, interior asfaltado o laqueado	1.2 a 1.3
Acero soldado, con costuras de remaches transversales, doble, muy oxidado. Acero remachado, de cuatro a seis filas longitudinales de remaches, con largo tiempo de servicio	2

## TUBOS REMACHADOS, CON FILAS LONGITUDINALES Y TRANSVERSALES

a) espesor de lámina < 5 mm	0.65
b) espesor de lámina de 5 a 12 mm	1.95
c) espesor de lámina > 12 mm, o entre 6 y 12 mm si las hileras de pernos tienen cubrejuntas	3
d) espesor de lámina > 12 mm con cubrejuntas	5.5
Tubos remachados, con cuatro filas transversales y seis longitudinales con cubrejuntas interiores	4
Asbesto-cemento nuevo	0.025
Asbesto-cemento, con protección interior de asfal to	0.0015
Concreto centrifugado nuevo	0.16
Concreto centrifugado, con protección bituminosa	0.0015 a 0.125
Concreto en galerías colado con cimbra normal de madera	1 a 2
Concreto en galerías colado con cimbra rugosa de madera	10
Concreto armado en tubos y galerías, con acabado interior cuidadosamente terminado a mano	0.01
Concreto de acabado liso	0.025
Conductos de concreto armado, con acabado liso y con varios años en servicio	0.2 a 0.3
Concreto alisado interiormente con cemento	0.25
Galerías con acabado interior de cemento	1.5 a 1.6
Concreto con acabado normal	1 a 3
Concreto con acabado rugoso	10
Cemento liso	0.3 a 0.8
Cemento no pulido	4 a 2

Concreto presforzado Freyssinet	0.04
Concreto presforzado Gona y Focoman	0.25
Mampostería de piedra bien junteada	1.2 a 2.5
Mampostería de piedra rugosa, sin juntear	8 a 15
Mampostería de piedra mal acabada	1.5 a 3

TABLA 8.2 COEFICIENTES  $\underline{a}$  DE LA FORMULA DE GENIJEV

## Grupo I.

Agua con poco contenido mineral que no origina corrosión. Agua con un pequeño contenido de materia orgánica y de solución de fierro:

$\underline{a}$  varía de 0.005 a 0.55; valor medio 0.025

## Grupo II.

Agua con poco contenido mineral que no origina corrosión. Agua que contiene menos de 3 mg/lt de materias orgánicas y fierro en solución:

$\underline{a}$  varía de 0.055 a 0.18; valor medio 0.07

## Grupo III.

Agua que origina fuerte corrosión y con escaso contenido de clorhidros y sulfatos (menos de 100 a 150 mg/lt). Agua con un contenido de hierro de más de 3 mg/lt:

$\underline{a}$  varía de 0.18 a 0.40; valor medio 0.20

## Grupo IV.

Agua que origina corrosión, con un gran contenido de sulfato y clorhidros (más de 500 a 700 mg/lt). Agua turbia con una gran cantidad de materia orgánica:

$\underline{a}$  varía de 0.40 a 0.60; valor medio 0.51

## Grupo V.

Agua con cantidades importantes de carbonato, pero de dureza permanente pequeña, con residuo espeso de 2 000 mg/lt.

$\underline{a}$  varía de 0.6 y más que 1.

Problema 8.5

Calcular la pérdida por fricción en un tramo de tubo liso de 153 m de longitud y 0.10 m de diámetro, donde fluye aceite de peso específico  $\gamma = 930 \text{ kg/m}^3$ , viscosidad  $\mu = 0.00486 \text{ kg seg/m}^2$ , si la velocidad media es a)  $V = 0.60 \text{ m/seg}$  y b)  $V = 3 \text{ m/seg}$ .

Solución a:

El número de Reynolds es

$$Re = \frac{VD\rho}{\mu} = \frac{0.60 \times 0.10 \times 930}{9.8 \times 0.00486} = 1172 < 2000$$

luego el flujo es laminar y vale la ec 8.10

$$f = \frac{64}{Re} = \frac{64}{1172} = 0.0546$$

La pérdida de carga es

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} = \frac{0.0546 \times 153 \times 0.36}{0.1 \times 19.6} = 1.535 \text{ m}$$

Solución b:

Siguiendo un procedimiento semejante,

$$Re = \frac{3 \times 0.10 \times 930}{9.8 \times 0.00486} = 5858$$

Del diagrama de Moody, para un tubo liso  $f = 0.0356$ ,

$$h_f = \frac{0.0356 \times 153 \times 9}{0.1 \times 19.6} = 25.01 \text{ m}$$

Problema 8.6

Determinar el gasto que fluye en un tubo de acero de 0.30 m de diámetro que conduce agua potable con temperatura de 15°C si se especifica que la pérdida de fricción sea de 1.20 m por cada 100 m de tubería ( $\epsilon/D = 0.00085$ ).

Solución:

Se supone  $f = 0.0188$  para un número de Reynolds alto. De la fórmula de Darcy - Weisbach

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{h_f D}{f L} = \frac{1.20 \times 0.30}{0.0188 \times 100} = 0.1915 \text{ m}$$

$$V = 1.939 \text{ m/seg}$$

Para el agua de 15°C,  $\nu = 1.145 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{seg}$ , el número de Reynolds resulta

$$Re = \frac{1.939 \times 0.30 \times 10^6}{1.145} = 508\ 035$$

y del diagrama de Moody  $f = 0.0195$ , luego

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{1.20 \times 0.30}{0.0195 \times 100} = 0.185 \text{ m}$$

$$V = 1.905 \text{ m/seg}$$

El nuevo número de Reynolds es  $Re = 499130$ ; por lo tanto,  $f = 0.0195$ .

El gasto vale, finalmente

$$Q = \frac{3.14 \times 0.09}{4} \times 1.905 = 0.135 \text{ m}^3/\text{seg.}$$

Problema 8.7

Determinar el diámetro de un tubo de acero ( $\epsilon = 0.0000458 \text{ m}$ ) necesario para transportar  $0.250 \text{ m}^3/\text{seg}$  de aceite de viscosidad cinemática  $\nu = 0.00001 \text{ m}^2/\text{seg}$  a una distancia de  $3000 \text{ m}$  con una pérdida de carga de  $2.3 \text{ m}$ .

Solución:

De la fórmula de Darcy - Weisbach

$$h_f = f \frac{L}{D^5} \frac{16 Q^2}{2 g \pi^2 D^4}$$

Por lo tanto,

$$D^5 = \frac{8 L Q^2}{2 \pi^2 h_f} \quad f = \frac{8 \times 3000 \times 0.0025}{9.8 \times 9.8 \times 2.3} \quad f = 0.674 \quad f$$

además

$$Re = \frac{4 Q D}{\pi \nu D^2} = \frac{4 \times 0.250}{3.1416 \times 0.00001} \frac{1}{D} = \frac{31831}{D}$$

Si  $f = 0.02$

$$D = \sqrt[5]{0.021 \times 0.02} = \sqrt[5]{0.01042} = 0.423 \text{ m}$$

Con el valor aproximado de  $D$ ,  $Re$  es

$$Re = \frac{31831}{0.423} = 75400$$

$$\frac{\epsilon}{D} = \frac{0.0000453}{0.485} = 0.00000944$$

Del diagrama de Moody  $f = 0.019$ , el diámetro es

$$D = \sqrt[5]{0.671 \times 0.019} = \sqrt[5]{0.01275} = 0.42 \text{ m}$$

Es decir, prácticamente el mismo valor que en el caso anterior, correspondiendo al diámetro definitivo de la tubería.

### 8.9 Tubos de sección no circular

En el caso de tubos de sección no circular, con esquinas pronunciadas, el esfuerzo cortante en la dirección del flujo es menor en las mismas que a lo largo de las paredes. Lo anterior provoca la formación de corrientes secundarias desde la zona de alto cortante hacia el centro del tubo mientras ocurre un flujo de circulación hacia las esquinas, con la tendencia a uniformizar el cortante en la pared. El estudio fue hecho por Schiller y Nikuradse, mismos que determinaron la ley de fricción y la distribución de velocidades para tubos de sección rectangular, triangular, trapezoidal y circular, ésta última con escotadura. Como conclusión a sus estudios, encontraron que en estas secciones con poca simetría el factor de fricción podía calcularse en las tres distintas zonas de escurrimiento con las fórmulas obtenidas para tubos de sección circular, bastando cambiar  $D$  (diámetro del tubo circular) por  $4 R_h$ , donde  $R_h$  representa el radio hidráulico de la sección transversal del tubo.

Sin embargo, en 1963 J. Malaika (ref 35) realizó experimentos en tubos de sección no circular, con objeto de encontrar fórmulas para el factor de fricción  $f$ . La idea partió del hecho de que un mismo valor del radio hidráulico puede caracterizar a un número ilimitado de geometrías de

la sección, por lo que deberían intervenir otros parámetros de la sección capaces de tomar en cuenta esta contingencia. Malaika encontró que los errores causados al despreciar los efectos geométricos son a menudo más pequeños que los que se cometen en la apreciación de la rugosidad del conducto; sin embargo, dichos efectos pueden inducir errores en el factor de fricción hasta de 35 por ciento, dependiendo su magnitud del gasto y de las condiciones de frontera.

Las conclusiones de Malaika fueron:

a). Como el diámetro del círculo inscrito en una sección cualquiera es una dimensión lineal más representativa de la sección, para ser usada en los números de Reynolds y en la rugosidad relativa en el diagrama universal de Moody, es posible utilizar las ecuaciones antes obtenidas si en lugar del diámetro  $D$  se usa el diámetro  $d$  del círculo inscrito en las secciones (fig 8.24).

b). La eficiencia hidráulica relativa de una variedad de formas de secciones transversales de conductos puede expresarse por la relación adimensional entre el diámetro del círculo inscrito y el radio hidráulico.

En la fig 8.24 se muestran cuatro formas distintas de la sección transversal de conductos, incluyendo el diámetro  $d$  del círculo inscrito en ellas.

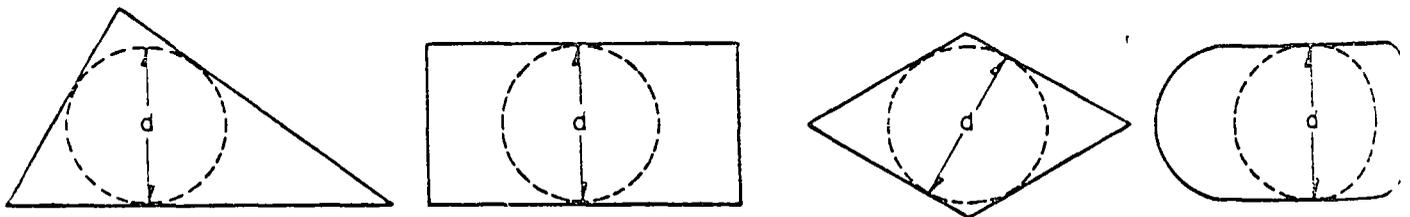


Fig 8.24 Círculo inscrito en las formas geométricas de tubos

Problema 8.8

Considerando que una cantidad de bióxido de carbono fluye isotérmicamente en un tubo de sección cuadrada de 2.54 cm de lado (1 pulg), 12 m de longitud con rugosidad  $\epsilon = 1.53 \times 10^{-6}$  m y descarga contra una presión absoluta de 1 atm; y viscosidad cinemática del gas  $\nu = 1.88 \times 10^{-5}$  m<sup>2</sup>/seg a 43°C. Determinar la pérdida de carga cuando el gasto es  $Q = 4.7$  lt/seg y verificar que en este caso se puede despreciar la compresibilidad del gas.

Solución:

La velocidad media en la sección es

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.0047}{(0.0254)^2} = 7.285 \text{ m/seg}$$

el radio hidráulico del tubo

$$R_h = \frac{A}{P} = \frac{(0.0254)^2}{4 \times 0.0254} = 0.00635 \text{ m}$$

la rugosidad relativa

$$\frac{\epsilon}{4 R_h} = \frac{1.53 \times 10^{-6}}{4 \times 0.635 \times 10^{-2}} = 6.0236 \times 10^{-5}$$

el número de Reynolds

$$Re = \frac{4V \cdot R_h}{\nu} = \frac{4 \times 7.285 \times 0.00635 \times 10^5}{1.88} = 9.8425 \times 10^3$$

Del diagrama de Moody,  $f = 0.031$ , dentro de la zona de tubo liso, la pérdida de carga vale

$$h_f = 0.031 \times \frac{12}{4 \times 0.00635} \times \frac{(7.285)^2}{19.6} = 39.656 \text{ m}$$

Esto es, 39.656 m de carga de una columna del gas.

Para determinar la compresibilidad, es necesario conocer la constante  $R_0$  del bióxido de carbono, la cual vale

$$R_0 = 19.27 \text{ kg}\cdot\text{m}/\text{kg}\cdot^\circ\text{K}$$

la temperatura absoluta del gas resulta

$$T = 273 + 43 = 316 \text{ }^\circ\text{K}$$

De la ec B.23b del Apéndice B, para la presión a la salida  $p_2 = 1 \text{ kg}/\text{cm}^2 = 10^4 \text{ kg}/\text{m}^2$

$$p_2 = \frac{P_2}{g R_0 T} = \frac{10^4}{9.8 \times 19.27 \times 316} = 0.1676 \text{ kg seg}^2/\text{m}^4$$

y el peso específico

$$\gamma_2 = p_2 g = 0.1676 \times 9.8 = 1.642 \text{ kg}/\text{m}^3$$

La presión a la entrada del tubo es

$$p_1 = p_2 + \gamma h_f = 10^4 + 65.11 = 10065.11 \text{ kg}/\text{m}^2 = 1.0065 \text{ atm}$$

y la relación  $p_1/p_2 \approx 0.99$  por lo que el efecto de compresibilidad es despreciable.

### 8.10 Fórmulas empíricas de fricción

#### 8.10.1. Ecuaciones de tipo exponencial

Antes de que se conocieran las fórmulas de tipo logarítmico, las únicas ecuaciones disponibles para el diseño eran las de tipo exponencial puramente empíricas, cuyo único mérito estriba en su sencillez. Sin embargo, fueron y siguen siendo ampliamente usadas. Para tubos que transportan agua, dichas ecuaciones toman normalmente la forma

$$V = a D^x \left( \frac{f}{f} \right)^y \quad (8.81)$$

donde  $f$  es la pendiente de fricción  $h_f/L$ , y el coeficiente  $a$  y los exponentes  $x$ ,  $y$  son empíricos. La expresión no es adimensional, por lo que se debe tener cuidado en la conversión de unidades. En este subcapítulo se presentan las fórmulas correspondientes al sistema MKS.

Es conveniente investigar la relación entre el factor de fricción y los términos anteriores. Para ello, si se sustituye la ec 8.2b de Darcy - Weisbach en la 8.81, resulta

$$V = a D^x \left( \frac{f V^2}{2 g D} \right)^y \quad (8.82)$$

de la cual

$$f = 2 g \frac{D^{1-x/y}}{a^{1/y} V^{2-1/y}} \quad (8.83)$$

debido a que  $a$  normalmente varía con la rugosidad, y la viscosidad tiene por ello las mismas características que  $f$ .

Cuando las fórmulas exponenciales se representan gráficamente

te en el diagrama estándar  $f - Re$ , aparecen como líneas rectas con diferentes pendientes. Debido a que la verdadera forma de la ecuación del factor de fricción es del tipo logarítmico de concavidad hacia arriba (excepto en tubos rugosos en la zona turbulenta), la fórmula exponencial es aproximadamente válida únicamente en un intervalo limitado. En sus extremos, la línea recta queda debajo de la curva, resultando con ella, una subestimación de la pérdida por fricción; por lo tanto, es importante tener cuidado con el intervalo en el que se puede aplicar cada fórmula exponencial, dado que cualquier intento de extrapolación puede conducir a serios errores. Normalmente, la desviación máxima no excede de 3 por ciento, lo cual está dentro de los límites de seguridad en la estimación de la rugosidad.

Tubos lisos. Los tubos de aluminio, latón, cobre, plomo, plástico, vidrio y asbesto-cemento se pueden clasificar como lisos.

La fórmula de Blasius (ec 8.11) se aplica para  $Re > 10^5$  y se puede expresar en la forma exponencial

$$c_f = \frac{0.3164}{Re^{1/4}} \frac{V^2}{2gD} = 0.3164 \left( \frac{v}{VD} \right)^{1/4} \frac{V^2}{2gD} \quad (8.84)$$

Sustituyendo  $v = 1.145 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{seg}$  para agua a 15 °C, se obtiene

$$V = 13.33 D^{5/7} S_f^{4/7} \quad (8.85)$$

Tubos en la zona de transición. Existe un buen número de fórmulas de tipo exponencial para estos casos, siendo probablemente la de Hazen - Williams la mas común (sistema M K S) (ref 42)

$$V = 0.355 C_H D^{0.63} S_f^{0.54} \quad (8.86a)$$

o bien en función del gasto

$$Q = 0.279 C_H D^{2.63} S_F^{0.54} \quad (8.85b)$$

donde el valor de  $C_H$  para agua en condiciones normales depende del material del tubo:

Material	Valor de $C_H$
Acero corrugado	60
Acero con juntas <u>lock - bar</u> (nuevo)	135
Acero galvanizado (nuevo y en uso)	125
Acero remachado (nuevo)	110
Acero remachado (en uso)	85
Acero soldado (nuevo)	120
Acero soldado (en uso)	90
Acero soldado con revestimiento especial (nuevo y en uso)	130
Plástico	150
Asbesto-cemento	135
Cobre	130
Concreto, acabado liso	130
Concreto, acabado común	120
Fierro fundido (nuevo)	130
Fierro fundido (en uso)	90
Fierro fundido, tubos revestidos con cemento	110
Barro vitrificado	110
Lalón	130
Madera, en duelas	120
Conductos con revestimiento de cemento alisado	100
Vidrio	140

Tubos rugosos en la zona turbulenta. La fórmula general es la de Chezy, la cual se expresa en forma un poco distinta que la ec 8.83.

cuyos valores de  $n$  son en relación con los materiales (ref 20):

Material	Valores de $n$
Madera cepillada y cemento pulido	0.10
Tubos de fierro fundido o de acero (nuevos)	0.25
Madera no cepillada y concreto pulido	0.20
Tubos de fierro fundido sin incrustaciones	0.275
Tubos de fierro fundido o acero con algunos años de servicio	0.35
Tubos de fierro fundido con numerosas incrustaciones	0.45

c) Fórmula de Manning. Es quizá la más utilizada tanto en tubos como en canales

$$C = \frac{R_h^{1/6}}{n} \quad (8.91)$$

por lo cual, la ec 8.87 resulta

$$V = \frac{1}{n} R_h^{2/3} S_f^{1/2} \quad (8.92)$$

en la que  $n$  se puede valorar en función de la rugosidad absoluta  $\epsilon$  del conducto a través de la ecuación aproximada

$$n = \frac{\epsilon^{1/6}}{21.1} \quad (8.93)$$

Algunos valores de  $n$  son (ref 88):

Material	Valores de $n$
Tubería monolítica de concreto hecha con cimbras deslizantes ( $D > 1.25$ M)	0.010 a 0.011

En la ecuación de Darcy - Weisbach, con  $D = 4 R_h$ , se obtiene

$$V = \sqrt{\frac{2g}{f}} \sqrt{D S_f} = \sqrt{\frac{8g}{f}} \sqrt{R_h S_f} \quad (8.87a)$$

$$V = C \sqrt{R_h S_f} \quad (8.87b)$$

donde

$$C = \sqrt{\frac{8g}{f}} \quad (8.88)$$

es un coeficiente que depende de la rugosidad del tubo. Para su determinación existen varias fórmulas empíricas, siendo las más conocidas:

a) Fórmula de Bazin

$$C = \frac{87}{1 + \frac{\Delta}{\sqrt{R_h}}} \quad (8.89)$$

donde el valor de  $\Delta$  depende del material del tubo (ref 28):

Material	Valor de $\Delta$
Tubos de asbesto-cemento (nuevos)	0.06
Tubos de acero laminado (nuevos)	0.10
Tubos de hierro fundido (nuevos)	0.15
Tubos de concreto (en buen estado)	0.18
Tubos de hierro fundido (usados)	0.23
Tubos de hierro fundido con incrustaciones	0.36

b) Fórmula de Kutter

$$C = \frac{100 R_h}{m + \sqrt{R_h}} \quad (8.90)$$

Bien cimbrada y pulida ( $D > 1.25$ m)	0.011 a 0.0123
Bien cimbrada y sin oulir ( $D > 1.25$ m)	0.014 a 0.015
Con acabado tosco ( $D > 1.25$ m)	0.015 a 0.017
Tubería de concreto con juntas de macho y campana ( $D > 0.5$ m)	0.0105 a 0.012
Con juntas colocadas descuidadamente ( $D > 0.5$ m)	0.0125 a 0.014
Con juntas colocadas descuidadamente ( $D < 0.5$ m)	0.014 a 0.017
Tuberías de madera (nuevas)	0.0105
Tuberías de madera (en uso)	0.012
Tuberías de madera (usadas)	0.015

En tuberías de asbesto-cemento es preferible emplear la fórmula de Ludin

$$V = 140 R_h^{0.645} C_f^{5/9}$$

Túneles perforados en roca sin revestimiento	0.025 a 0.040
Tuberías de fierro fundido limpio	0.013
Tuberías de acero remachado	0.015 a 0.016
Tuberías de acero soldado	0.012 a 0.013
Tuberías de lámina galvanizada	0.014
Tuberías de barro vitrificado	0.011

De la ec 8.88, al sustituir la 9.91, se obtiene

$$f = \frac{8 n^2 g}{R_h^{1/3}} \quad (8.94)$$

### 8.10.2 Fórmulas de tipo logarítmico

Con base en los resultados de diferentes investigadores, Kozeny obtuvo una fórmula que, por su sencillez y precisión, se puede utilizar con gran ventaja para tubos rugosos en la zona turbulenta. De la

sustitución de la ecuación de Nikuradse (ec 8.68) en la de Darcy - Weisbach, 8.87a, resulta

$$v = \sqrt{\frac{2g}{f}} \left( 2.3 \log \frac{D}{2\epsilon} + 1.74 \right) \sqrt{v_f D} = \left( 8.85 \log \frac{D}{2\epsilon} + 1.756 \right) \sqrt{v_f D}$$

$$v = (8.85 \log D + N) \sqrt{v_f D} \quad (8.95)$$

que es la fórmula de Kozeny (ref 27) en la cual  $N$  depende de la rugosidad del tubo

$$f = \frac{2g}{(8.85 \log D + N)^2} \quad (8.96)$$

Los valores de  $N$  para distintos materiales son

Material	Valor de $N$
Hierro fundido (nuevo o limpio)	35
Hierro fundido (viejo)	30
Tubos de acero sin costura (nuevos)	38
Tubos de acero sin costura (viejos)	35
Tubos remachados (nuevos)	31
Tubos remachados (usados)	28 a 26
Tubos con remache avellanado y embutido, o soldados y nuevos	34
Tubos con remache avellanado y embutido, o soldados y viejos	31 a 27
Concreto simple o reforzado muy liso, monolítico	38
Con juntas (viejo)	30
De acabado rugoso	25 a 27
Conductos para alcantarillado	28
Sarro vitrificado (drenes)	34

Para tubos de funcionamiento liso, Kozeny encontró fórmulas distintas para C:

En el caso de conductos de asbesto - cemento

$$V = (7.78 \log Re - 5.95) \sqrt{S_f D} \quad (8.97)$$

Para tubos de madera

$$V = (6.5 \log Re - 5.15) \sqrt{S_f D} \quad (8.98)$$

y para tubos de hule (como mangueras para incendios) a partir de la fórmula de Richter

$$f = 0.01113 + 0.917 Re^{-0.41} \quad (8.99)$$

Para flujos a presión se eligen normalmente secciones circulares, debido a que estas poseen el mínimo perímetro mojado para una área hidráulica determinada. Debe aclararse que por distintas razones se utilizan también otras formas de sección, especialmente en las redes de alcantarillado. Empleando el criterio de cambiar  $D$  por  $4R_h$ , Kozeny modificó sus fórmulas originales para las secciones no circulares más comunes: ovoide, compuesta y herradura.

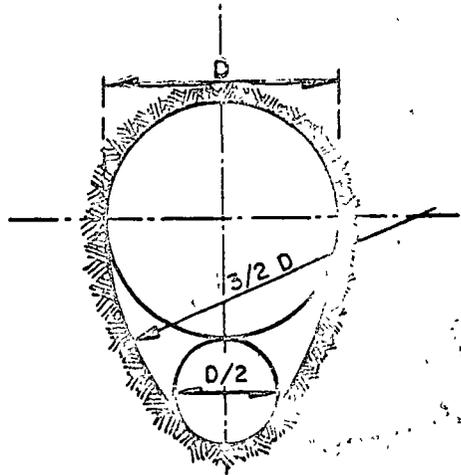


Fig 8.25 Sección ovoide

Para la sección ovoide (fig 8.25) el área hidráulica total se calcula con la fórmula  $A = 1.463 \frac{\pi D^2}{4} = 1.148 D^2$ , y su radio hidráulico  $R_h = \frac{A}{P} = 0.29 D$

Por lo tanto, en la fórmula de Kozeny

$$C = 8.86 \log (4 R_h) + N$$

como  $N = 28$  para tubos de alcantarillado, se obtiene la fórmula para la sección ovoide

$$V = (9.54 \log D + 30.8) \sqrt{S_f D} \quad (8.100)$$

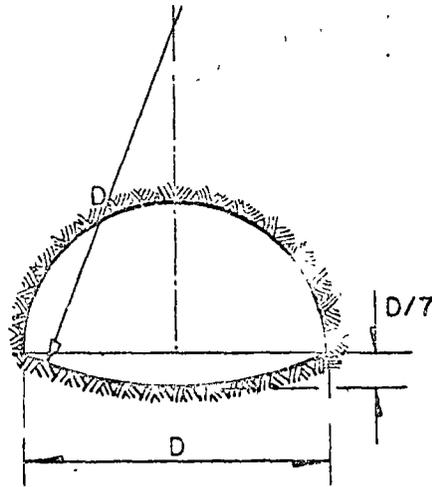


Fig 8.26 Sección compuesta

Para una sección compuesta (Fig 8.26) el área hidráulica es

$$A = 0.316 \frac{\pi D^2}{4} = 0.484 D^2$$

$$R_h = 0.185 D$$

y también con  $N = 28$

$$V = (7.64 \log D + 23.2) \sqrt{S_f D}$$

La velocidad media para sección circular y las dos partes es prácticamente la misma y el diámetro  $D$  igual.

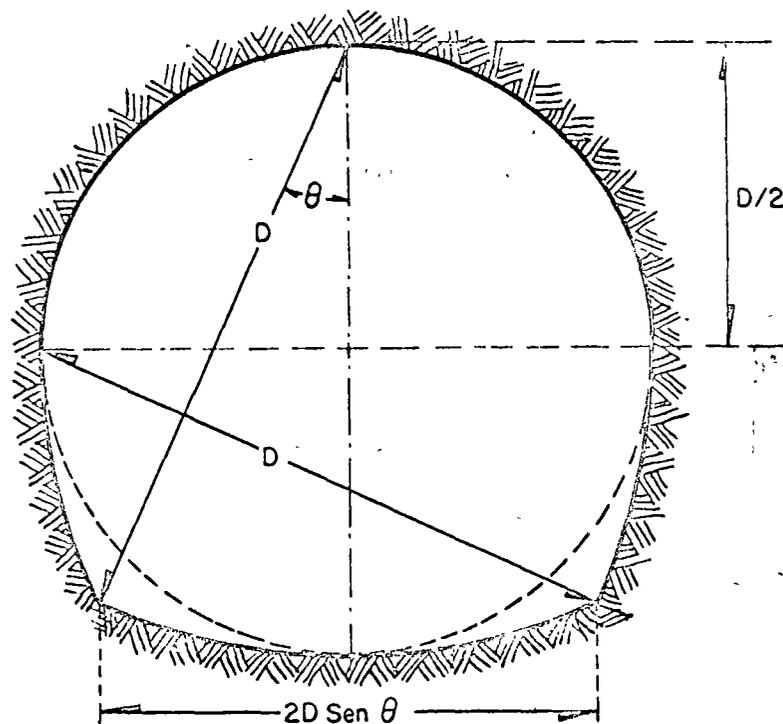


Fig 8.27 Sección herradura

La sección herradura (fig 8.27) se utiliza frecuentemente en galerías a presión. Si se introduce el ángulo en la clave  $\theta$ , entonces

$$\text{sen} ( 45^\circ - \theta ) = \frac{1}{\sqrt{8}} , \quad \theta = 24^\circ 4'$$

conoce el área hidráulica, perímetro mojado y radio hidráulico resultan

$$A = 0.828 D^2$$

$$P = 3.267 D$$

$$R_h = 0.2534 D$$

$$4 R_h = 1.014 D$$

La fórmula de Kozeny es

$$V = (8.86 \log 1.014 D + N) \sqrt{1.014 S_f D}$$

Para un acabado bastante aceptable en la pared interior  $N = 3A$ ,

$$V = (8.92 \log D + 30.32) \sqrt{S_f D} \quad (8.102)$$

## 8.11 Pérdidas locales

### 8.11.1 Fórmula general

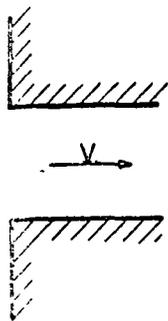
Las tuberías de conducción que se utilizan en la práctica están compuestas, generalmente, por tramos rectos y curvos para ajustarse a los accidentes topográficos del terreno, así como a los cambios que se presentan en la geometría de la sección y de los distintos dispositivos para el control de las descargas (válvulas y compuertas). Estos cambios originan pérdidas de energía distintas a las de fricción, localizadas en el sitio mismo del cambio de geometría o de la alteración del flujo. Este tipo de pérdida de carga se conoce como pérdida local. Su magnitud se expresa como una fracción de la carga de velocidad inmediatamente aguas abajo del sitio donde se produjo la pérdida. La fórmula general de pérdida local es

$$h = K \frac{V^2}{2g} \quad (8.103)$$

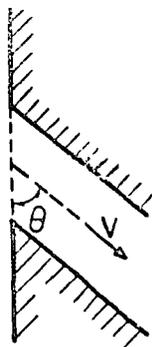
donde

- $h$  pérdida de energía, en m
- $K$  coeficiente sin dimensiones que depende del tipo de pérdida que se trate, del número de Reynolds y de la rugosidad del tubo
- $V^2/2g$  la carga de velocidad aguas abajo de la zona de alteración del flujo (salvo aclaración en contrario), en m.

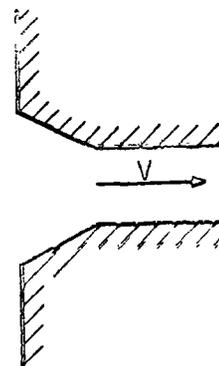
En los siguientes incisos se presentan los valores del coeficiente  $K$ , de acuerdo con el tipo de perturbación.



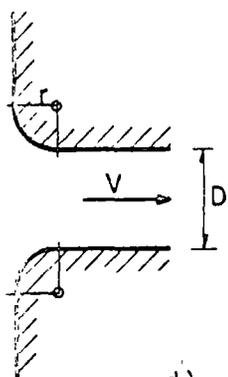
a)  $K = 0.5$



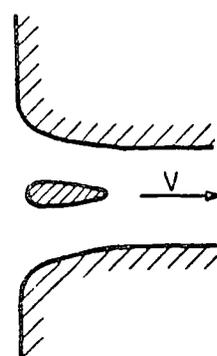
b)  $K = 0.5 + 0.3 \cos \theta + 0.2 \cos^2 \theta$



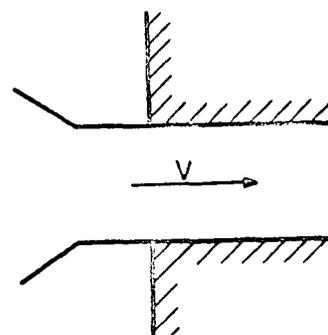
c)  $K = 0.15$  a  $0.25$



d)

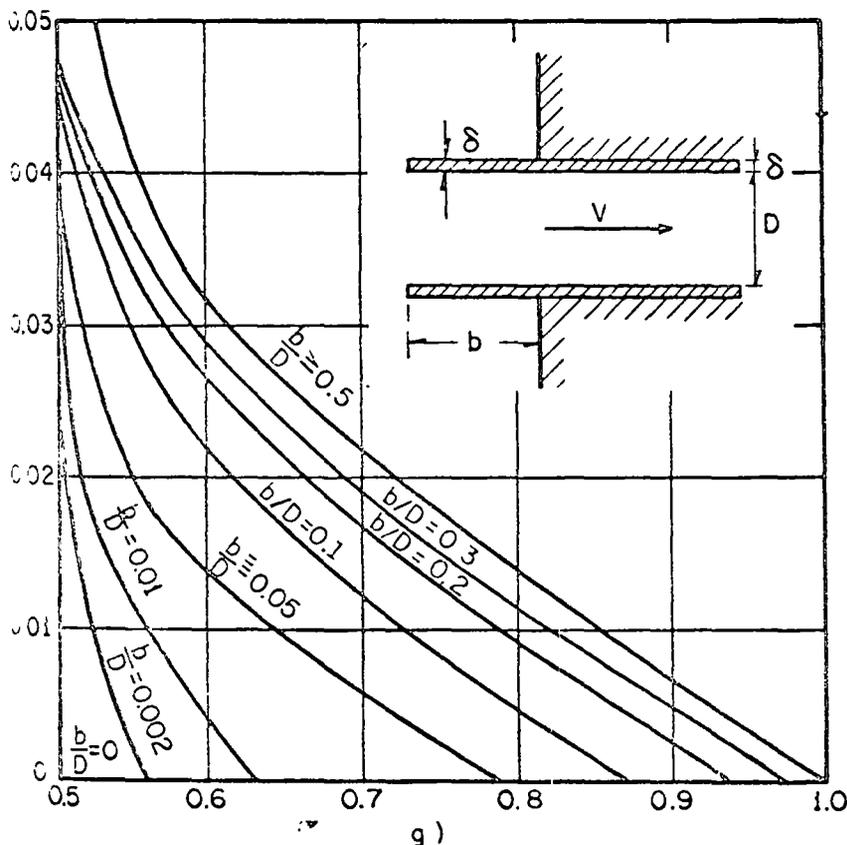


e)  $K = 0.06$  a  $0.10$

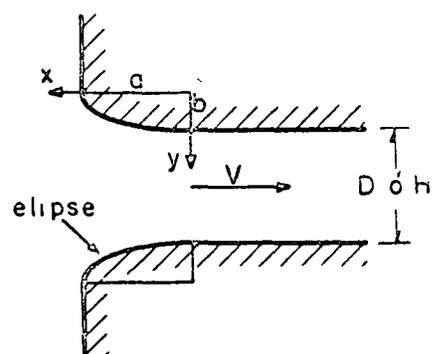


f)  $K = 0.5$

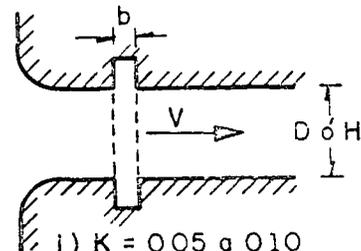
r/D	0	0.04	0.08	0.12	0.16	>0.2
K	0	0.26	0.15	0.09	0.06	>0.03



g)



h)  $K = 0.04$  a  $0.10$   
para tubo circular ó  
de  $0.07$  a  $0.2$  para  
tubo rectangular



i)  $K = 0.05$  a  $0.10$   
Si  $b/D > 1$  ó  $b/H > 0.2$   
y  $V > 2$  m/seg. f lo  
contrario  $K \approx 0$

Fig 8.28 Coeficientes de pérdida por entrada para diferentes formas

### 8.11.2 Pérdida por entrada

A la entrada de las tuberías se produce una pérdida por el efecto de contracción que sufre la vena líquida y la formación de zonas de separación, cuyo coeficiente  $K$  depende, principalmente, de la brusquedad con que se efectúa la contracción del chorro. En la fig 8.26 se muestran algunos valores.

La entrada elíptica (fig 8.26h) es la que produce el mínimo de pérdidas. Si el tubo es de sección circular, la ecuación de la elipse de entrada es (ref 87), (ver también capítulo 6)

$$\frac{x^2}{(0.5 D)^2} + \frac{y^2}{(0.15 D)^2} = 1 \quad (8.104)$$

Si es de sección rectangular, la ecuación resulta

$$\frac{x^2}{H^2} + \frac{y^2}{(0.33 H)^2} = 1 \quad (8.105)$$

donde  $H$  es la dimensión vertical del conducto para definir la forma del perfil superior e inferior y  $y$  la dimensión horizontal para la forma de las entradas laterales.

### 8.11.3 Pérdida por rejilla.

Con objeto de impedir la entrada de cuerpos sólidos a las tuberías, suelen utilizarse estructuras de rejillas formadas por un sistema de barras o soleras verticales, regularmente espaciadas, que se apoyan sobre miembros estructurales, dichas rejillas obstaculizan el flujo y producen una pérdida de energía. Cuando están parcialmente sumergidas y sobresalen del nivel de la superficie del agua, el coeficiente  $K$  puede calcularse con la fórmula de Kirschmer que está de acuerdo con las experiencias de

Fellenius y Spangler, siendo válida para el flujo normal al plano de rejillas

$$K = C_f \left(\frac{s}{b}\right)^{4/3} \text{sen } \theta \quad (8.106)$$

donde  $C_f$  es un coeficiente que depende de la forma de la reja y  $V$ , en la ec 8.103, es la velocidad  $V_0$  frente a las rejillas como si estas no existieran.

En la fig 8.29 se indica el significado de cada término.

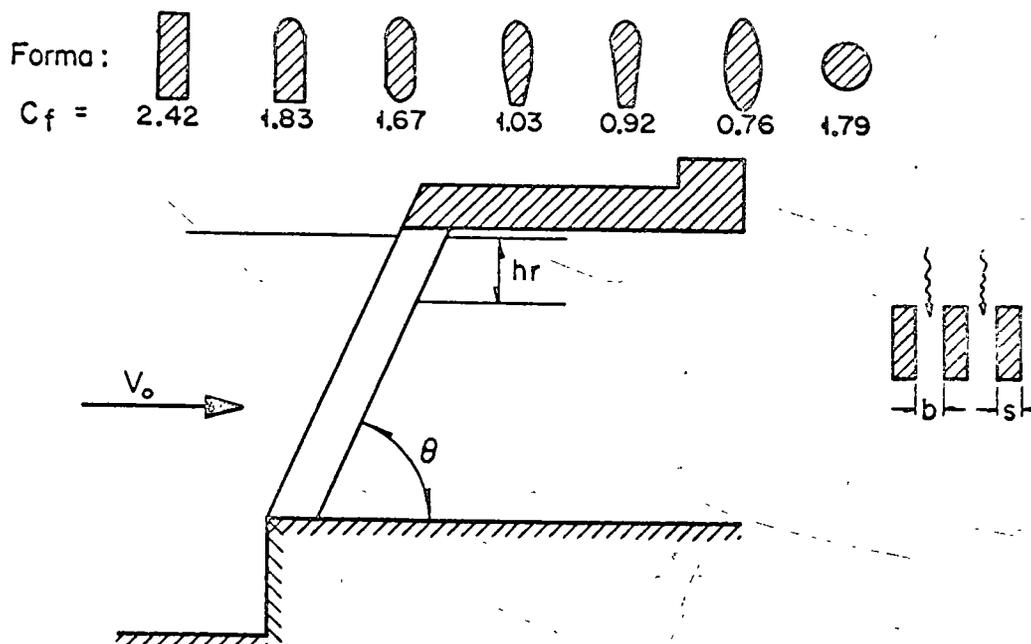


Fig 8.29 Coeficientes  $C_f$  aplicables a la fórmula de Kirschmer de acuerdo con la forma de las barras

Cuando la dirección del flujo no es normal al plano de rejillas, la pérdida es mayor y el coeficiente  $K$  se calcula con la fórmula de

$$K_{\delta} = K \beta \quad (8.107)$$

donde K es el coeficiente de pérdida para flujo no esviado y  $\beta$  otro coeficiente que depende del cociente  $s/b$  y del ángulo  $\delta$  de esviamiento con los valores se presentan en la fig 8.30.

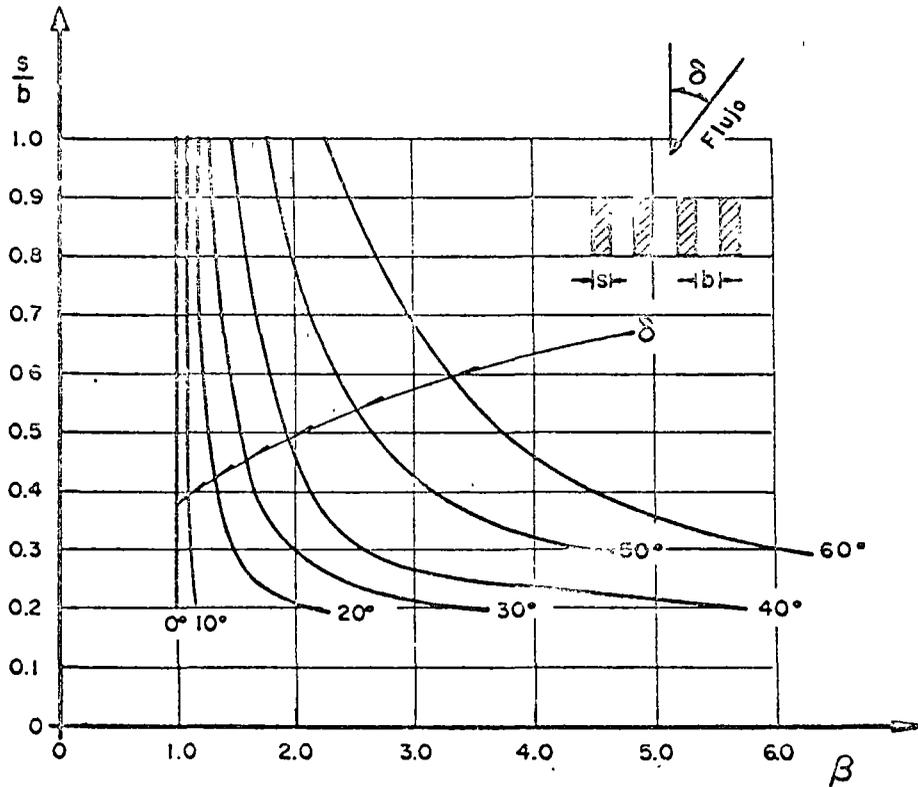


Fig 8.30 Valores de  $\beta$  para flujo esviado, según Mosonyi

Como el grado de aplicación de las fórmulas anteriores a rejillas completamente sumergidas se desconoce, se puede obtener una aproximación media con la fórmula de Creager (ref 87)

$$K = 1.45 - 0.45 \left( \frac{A_n}{A_b} \right) - \left( \frac{A_n}{A_b} \right)^2 \quad (8.108)$$

donde

$A_n$  área neta de paso entre rejillas

$A_g$  Área bruta de la estructura de rejillas

Debe aclararse que  $V$  en la ec 8.103 es la velocidad neta a través de las rejillas.

#### 8.11.4 Pérdida por ampliación

Se origina al producirse una ampliación de la sección transversal del tubo. El coeficiente  $K$  depende de la brusquedad de la ampliación y para encontrarlo se usa la fórmula de Borda - Carnot (ec 4.56b)

$$K = C_a \left( \frac{A_2}{A_1} - 1 \right)^2 \quad (8.109)$$

donde  $C_a$  depende del ángulo  $\theta$  del difusor como se muestra en la fig 8.31, la cual incluye los resultados de Gibson. Para ampliaciones bruscas se usa la misma fórmula con  $C_a = 1$ .

La pérdida de carga mínima se obtiene para ángulos de difusión  $\theta = 0^\circ$ . Para  $\theta \geq 30^\circ$  una ampliación brusca es tan confiable como la gradual.

A fin de evitar separaciones y cavitaciones, según el Bureau of Reclamation el ángulo  $\theta$  del difusor debe ser

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{g}}{2V} \quad \text{para } \theta < 30^\circ$$

$$\text{donde } D = (D_1 + D_2)/2 \quad \text{y} \quad V = (V_1 + V_2)/2$$

Según Hutarew (ref 19), el ángulo  $\theta$  óptimo depende del número de Reynolds (fig 8.32). Para calcular  $\theta$  en transiciones con sección distinta de la circular, se usa el criterio del cono equivalente, es decir, un cono truncado

o limitado por áreas circulares de la misma magnitud que las reales en los extremos de la transición.

Para determinar la pérdida por fricción en la ampliación, es necesario emplear la fórmula de Richter (ref 51)

$$K = \frac{f}{8 \sin \frac{\theta}{2}} \left[ \frac{n^2 - 1}{n^2} + \left( \frac{n - 1}{n} \right)^2 \sin \theta \right] \quad (8.110)$$

donde  $n = A_2/A_1$  y  $f$  es el factor de fricción de Darcy.

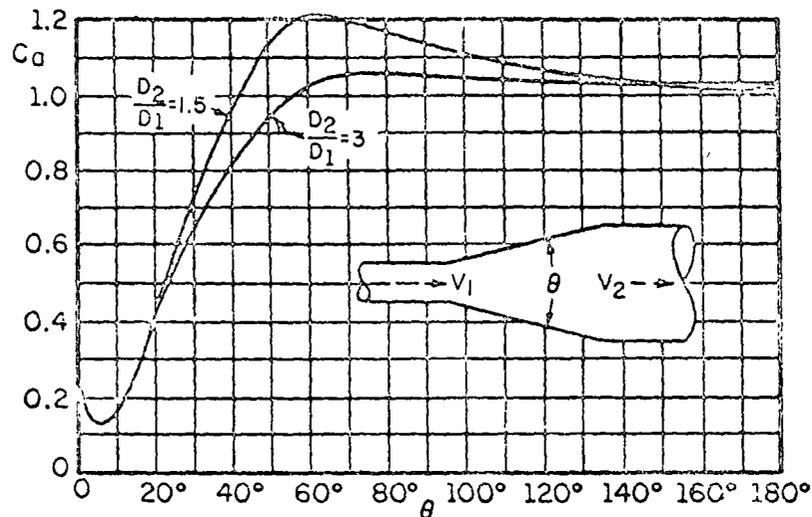


Fig 8.31 Coeficientes de pérdida para ampliaciones graduales

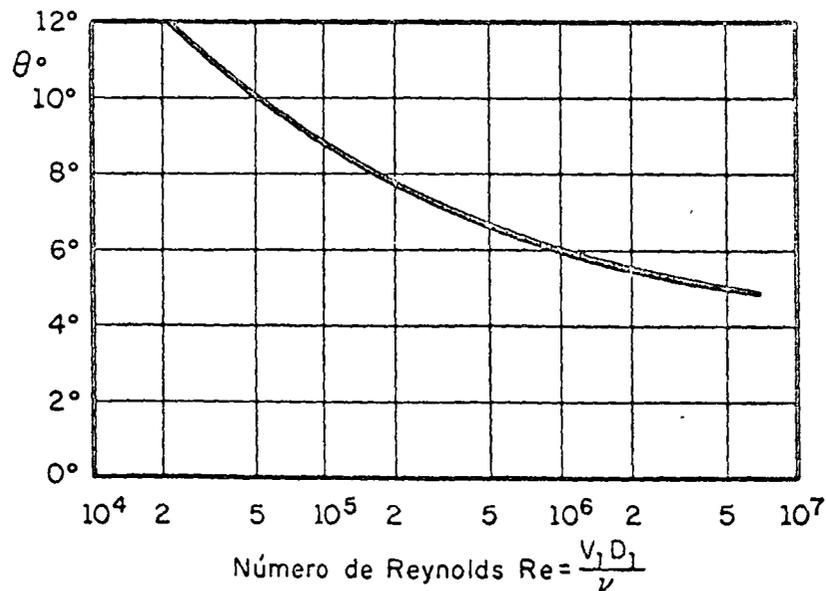


Fig 8.32 Angulo del difusor en función del número de Reynolds

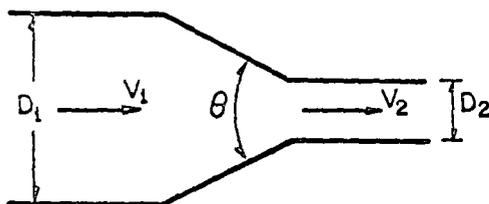
## 8.11.5 Pérdida por reducción

En este caso, se produce un fenómeno de contracción súbita al de entrada a la tubería, el cual también conviene que sea gradual, si bien en este caso la pérdida es inferior a la de la ampliación, dependiendo de la brusquedad con que se efectúa la contracción, el coeficiente de pérdida está supeditado al ángulo  $\theta$  con que esta se produzca, de acuerdo con la tabla de Kisieliev (ref 25)

$\theta$	4 a 5°	7°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	60°	75°	80°
K	0.060												
	0.005	0.16	0.16	0.16	0.20	0.22	0.24	0.26	0.28	0.30	0.32	0.34	0.35

Con objeto de evitar pérdidas grandes, según el Bureau of Reclamation, el ángulo de reducción no debe exceder de un valor especificado (fig 8.33).

Dicho ángulo vale



$$\tan \theta = \sqrt{\frac{gD}{V}}$$

$$\text{en que } D = \frac{D_1 + D_2}{2} ; V = \frac{V_1 + V_2}{2}$$

Fig 8.33

en este caso,  $K_r = 0.1$

La pérdida de carga por fricción es

$$K_f = \frac{f}{8 \sin \frac{\theta}{2}} \frac{n^2 - 1}{n^2} \quad (8.111)$$

Los diámetros equivalentes son

$$D_R = \sqrt{\frac{4 A_{r1}}{\pi}} = \sqrt{\frac{120}{0.785}} = 12.37 \text{ m}$$

$$D_N = \sqrt{\frac{30}{0.785}} = 6.19 \text{ m}$$

$$\theta = 2 \operatorname{ang} \tan \frac{D_R - D_N}{2(LE/2)} = 2 \operatorname{ang} \tan 0.309$$

De la tabla de pérdida por reducción  $K = 0.26$ , con  $A_2/A_N = 0.105$ , se reduce a 0.00286

3. Entrada. Para forma de trompeta  $K = 0.08$ , con  $A_2/A_0 = 0.25$  se reduce a 0.005

4. Escotaduras. Para  $V > 2$  m/seg,  $K = 0.05$ ; con  $A_2/A_N = 0.105$ , se reduce a 0.00055

5. Válvula de mariposa abierta. Se supone  $K = 0.05$ ; con  $A_2/A_0 = 0.25$ , se reduce a 0.0031

6. Pérdida por bifurcación. De la tabla para separación  $K = 0.04$  (cerrada la derivación lateral) con  $A_2/A_0 = 0.2$ , se reduce a 0.0025

7. Pérdida por reducción. Con  $\theta$  entre 4 y 5°, se elige  $K = 0.019$ ; con  $A_2/A_1 = 0.445$ , se reduce a 0.00375

8. Cambio de dirección. Con  $\theta = 30^\circ$ ,  $e/D_1 = 0.5/3000 = 1.67 \times 10^{-4}$ , y  $R/D \approx 2$ ; de la fig 8.37a,  $C_c = 0.18$  y de la ec 8.114

$$K = 0.18 \times \frac{30}{90} = 0.06$$

Con  $A_2/A_1 = 0.445$  se reduce a 0.0118

9. Válvula de aguja.  $K = 1.2$ , con  $A_2/A_1 = 0.445$ , se reduce a 0.2364

10. Fricción en la zona de entrada. Se considera cero

11. Fricción en el tramo de longitud  $L_0$ .  $\epsilon/d_0 = 1.25 \times 10^{-4}$  y con Re grande, del diagrama de Moody  $f = 0.0125$  y  $f_0 L_0/d_0 = 0.128$ ; con  $A_2/A_0 = 0.25$ , se reduce a 0.01175

12. Fricción en el tramo de longitud  $L_1$ .  $\epsilon/d_0 = 1.67 \times 10^{-4}$  y  $f_1 = 0.0132$  y  $f_1 L_1/d_1 = 0.176$ ; con  $A_2/A_1 = 0.445$ , se reduce a 0.03465  
total : 0.31241

De la ec 8.8, la velocidad a la salida es

$$V_2 = \sqrt{\frac{19.6 \times 150}{1.31241}} = 47.3 \text{ m/seg}$$

y el gasto

$$Q = 47.3 \times 3.14 = 148.2 \text{ m}^3/\text{seg}$$

La pérdida total de energía en toda la conducción es

$$h = H_0 - \frac{V_2^2}{2g} = 150 - \frac{(47.3)^2}{19.6}$$

$$h = 36.5 \text{ m}$$

#### Problema 9.4

La instalación hidroeléctrica con la geometría mostrada en la fig 9.10 abastece a una casa de máquinas un gasto de  $8.98 \text{ m}^3/\text{seg}$ . La instalación consta de una galería con acabado interior de cemento de 3.00 m de diámetro, una cámara de oscilación y una tubería de acero soldado nuevo de 1.50 m de diámetro. Determinar: a) la carga neta sobre las máquinas, b) la potencia neta, en kW, que produce el sistema si las máquinas tienen una eficiencia de 82 por ciento, c) la eficiencia de todo el sistema, d) el ni

vel de la superficie del agua en la cámara de oscilación que para las condiciones de flujo normal actúa como un simple tubo piezométrico.

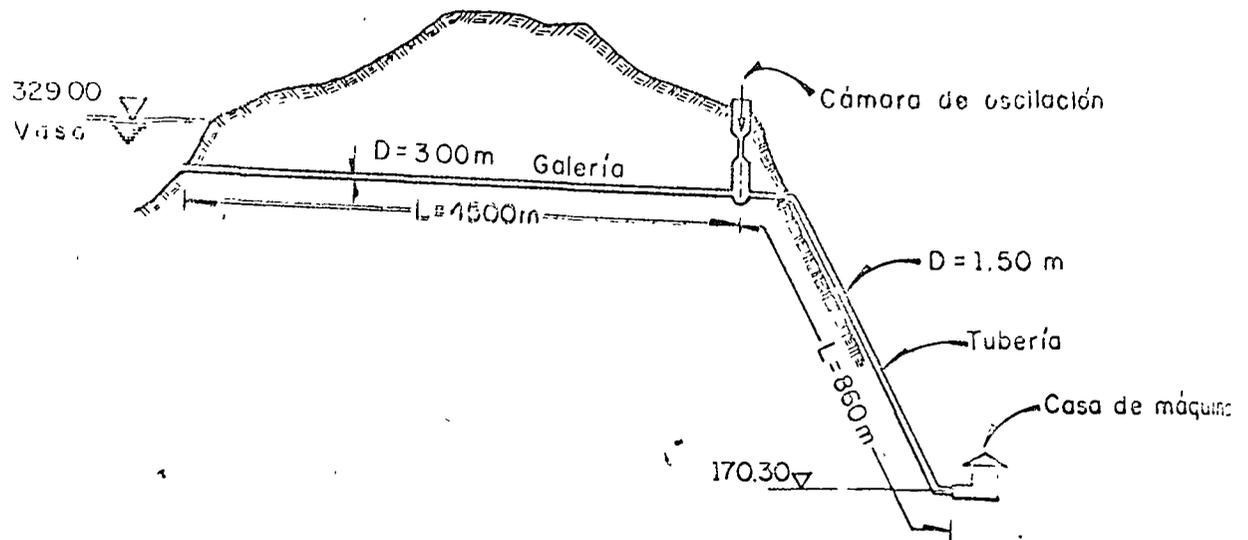


Fig 9.10 Instalación hidroeléctrica del problema 9.4

Solución a:

Las áreas en la galería y tubería son respectivamente

$$A_g = 0.7854 (3)^2 = 7.069 \text{ m}^2$$

$$A_t = 0.7854 (1.5)^2 = 1.767 \text{ m}^2$$

y las velocidades

245

$$V_g = \frac{3.53}{2.769} = 1.27 \text{ m/seg}$$

$$V_t = \frac{8.98}{1.767} = 5.09 \text{ m/seg}$$

La ecuación de la energía entre una sección dentro del vaso y la de salida de la tubería es

$$329 = 170.2 + \frac{p_i}{\gamma} + \frac{V_i^2}{2g} + \sum h$$

La carga neta sobre las máquinas es

$$H_n = \frac{p_t}{\gamma} + \frac{V_t^2}{2g} = 158.7 - \sum h$$

Debido a que la longitud de los tubos es grande, las pérdidas locales se consideran despreciables respecto de las de fricción.

El número de Reynolds en la galería para agua a 15°C ( $\nu = 1.145 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{seg}$ ) es

$$Re = \frac{1.27 \times 3 \times 10^6}{1.145} = 3.33 \times 10^6$$

y en la tubería

$$Re = \frac{5.09 \times 1.5 \times 10^6}{1.145} = 6.66 \times 10^6$$

De la tabla 8.1 y del diagrama de Moody

para la galería:  $\epsilon = 1.5 \text{ mm}$ ,  $\epsilon/D = 0.0005$ ,  $f = 0.0169$

para la tubería:  $\epsilon = 0.075 \text{ mm}$ ,  $\epsilon/D = 0.00005$ ,  $f = 0.011$

Las pérdidas de fricción son

$$h_{fg} = 0.0169 \frac{4 \cdot 500}{3} \frac{(1.27)^2}{19.6} = 2.09 \text{ m}$$

$$h_{ft} = 0.011 \times \frac{860}{1.5} \frac{(5.09)^2}{19.6} = 18.74 \text{ m}$$
$$\sum h = 20.83 \text{ m}$$

y la carga neta

$$H_n = 158.7 - 20.83 = 137.87 \text{ m}$$

Solución b:

La potencia neta del sistema es

$$P = \eta_m \gamma Q H_n = 0.82 \times 1000 \times 8.98 \times 137.87$$

$$P = 1015219.5 \text{ kg m/seg}$$

En caballos de vapor

$$P = \frac{1015219.5}{75} = 13536.3 \text{ CV}$$

En kilowatts

$$P = \frac{13536.3}{0.736} = 17409.4 \text{ kW}$$

Solución c:

La eficiencia de todo el sistema es la relación entre la potencia neta y la que se produciría con la carga bruta al no ocurrir pérdidas en la conducción y en las máquinas.

La carga bruta es

$$H_b = 329 - 170.3 = 158.7 \text{ m}$$

y la eficiencia del sistema

$$\eta_c = \frac{\eta_m \gamma Q H_n}{\gamma Q H_b} = \frac{\eta_m H_n}{H_b} = \frac{0.82 \times 137.87}{158.7} = 0.712; 71.2 \text{ por ciento, siendo la eficiencia de la conducción}$$

$$\eta_c = \frac{\gamma Q H_n}{\gamma Q H_b} = \frac{137.87}{158.7} = 0.868; 86.8 \text{ por ciento.}$$

Solución d:

De la ecuación de la energía entre el vano y la sección de

la galería en la base de la cámara de oscilación, con  $h_{fg} = 2.09$  de los cálculos anteriores, resulta:

$$329 = N C + \frac{v^2}{2g} + h_{fg}$$

$$N C = 329 - \frac{(1.27)^2}{19.6} - 2.09 = 326.825 \text{ m}^*$$

### Problema 9.5

El sifón mostrado en la fig 9.11 consiste en un tubo de acero soldado, de rugosidad  $\epsilon = 0.15$  mm, con una descarga de 1 000 lt/seg; el radio de las curvas es  $R = 1.5 D$ . Determinar el diámetro comercial necesario y la carga de presión en el punto S.

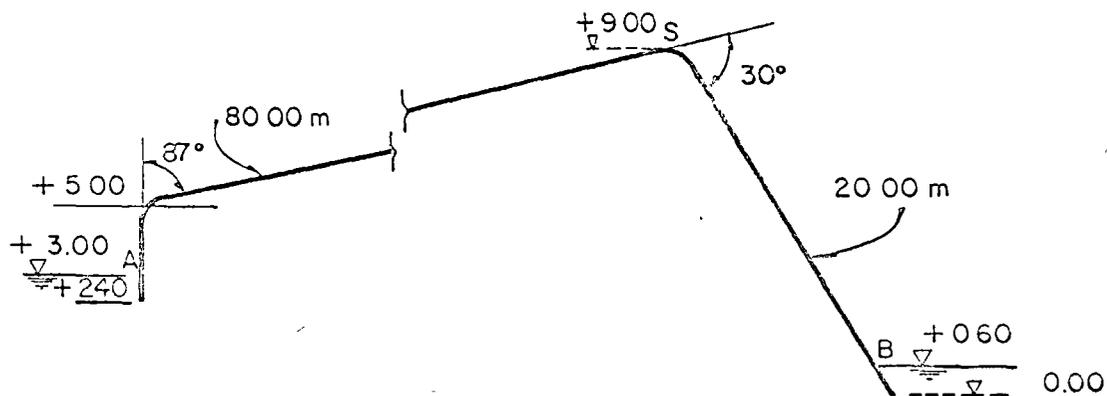


Fig 9.11 Ilustración del problema 9.5

Debido a que el flujo dentro de la galería se encuentra en la zona turbulenta, es posible emplear las fórmulas de tipo exponencial o logarítmico. Por ejemplo, con  $N = 34$  en la fórmula de Kozeny, la pérdida de energía en la galería es

$$h_{fg} = \frac{v^2 L}{[8.86 \log D + N]^2 D} = \frac{(1.27)^2 \times 4\,500}{[8.86 \log (3) + 34]^2 \times 3} = 1.655 \text{ m}$$

que es inferior al obtenido con la fórmula de Darcy.

## Solución:

En un primer tanteo al despreciar las pérdidas locales, se supone  $f = 0.016$ . Con  $L = 102.6$  m y  $H = 3 - 0.6 = 2.40$  m, de la ec 9.9

$$D = \sqrt[5]{\frac{0.016 \times 102.6 \times 1^2}{2.4}} \approx 0.58 \text{ m}$$

Puesto que considerar las pérdidas locales implicaría seguramente un diámetro mayor, se supone que  $D = 0.60$  m, por lo que el área del tubo sería

$$A = \frac{\pi}{4} (0.6)^2 = 0.2827 \text{ m}^2$$

y la velocidad

$$V = \frac{1}{0.2827} = 3.54 \text{ m/seg}$$

De la ecuación de la energía entre A y B, incluyendo todas las pérdidas

$$3.00 = 0.60 + \frac{V^2}{2g} + f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} + K_e \frac{V^2}{2g} + K_c \frac{V^2}{2g}$$

$$2.40 = \frac{V^2}{2g} (1 + f \frac{L}{D} + K_e + K_c)$$

Para la pérdida por fricción, el número de Reynolds aproximado para  $\nu = 1.145 \times 10^6 \text{ m}^2/\text{seg}$  es

$$Re = \frac{3.54 \times 0.6 \times 10^6}{1.145} = 1.825 \times 10^6$$

Con  $\epsilon/D = 0.00015/0.6 = 0.00025$  del diagrama de Moody  $f = 0.0148$ , y el coeficiente de pérdida por fricción, resulta

$$f \frac{L}{D} = \frac{0.0148 \times 102.6}{0.6} = 2.535$$

Si se considera como coeficiente de pérdida por entrada  $K = 0.5$  y de la fig 8.37  $C_c = 0.206$ , entonces de la ec 8.114 los coeficientes de pérdida por curvatura son

$$\text{Curva a } 87^\circ : K_c = 0.206 \frac{87}{90} = 0.20$$

$$\text{Curva a } 30^\circ : K_c = 0.206 \frac{30}{90} = 0.07$$

$$\text{Total: } 0.27$$

$$1 + f \frac{L}{D} + K_e + K_c = 3.885$$

y la velocidad es

$$V = \sqrt{\frac{2.40 \times 19.6}{3.885}} = 3.48 \text{ m/seg}$$

siendo el gasto

$$Q = 0.2827 \times 3.48 = 0.985 \text{ m}^3/\text{seg}$$

o sea que como es 1.5 por ciento menor que el gasto deseado, el diámetro necesario es de 0.60 m.

La carga de presión en S se calcula de la ecuación de la energía entre A y S

$$3.00 = 9.00 + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} (1 + f \frac{L}{D} + K_e + K_c)$$

luego entonces

$$\frac{p}{\gamma} = -6.00 - \frac{v^2}{2g} (1 + f \frac{L}{D} + K_e + K_c)$$

donde L es ahora 82.60 m, y  $K_c$  únicamente es de la primera curva

$$f \frac{L}{D} = 0.0148 \times \frac{82.6}{0.6} = 2.04$$

$$K_e = 0.08$$

$$K_c = 0.20$$

$$\text{Total} = 2.32$$

$$\frac{p}{\gamma} = -6.00 - \frac{(3.49)^2}{19.6} \times 2.32 = -8.06 \text{ m}$$

De lo anterior, resulta en S una carga de presión inferior a la atmosférica próxima a la de vaporización del agua (sección 1.7).

### Problema 9.6

Una bomba de 53.4 CV con 80 por ciento de eficiencia, debe abastecer un gasto de  $6 \text{ m}^3/\text{min}$  de agua a  $10^\circ\text{C}$  a un recipiente cuyo nivel se encuentra 10 m arriba del cárcamo de bombeo. La tubería de conducción es de fierro fundido con incrustaciones ( $\epsilon = 2 \text{ mm}$ ), con una longitud de 100 m, tres curvas de radio  $R = 5D$  (dos de  $45^\circ$  y una de  $90^\circ$ ) y una válvula con  $K = 5.4$ . Determinar el diámetro necesario en la tubería.

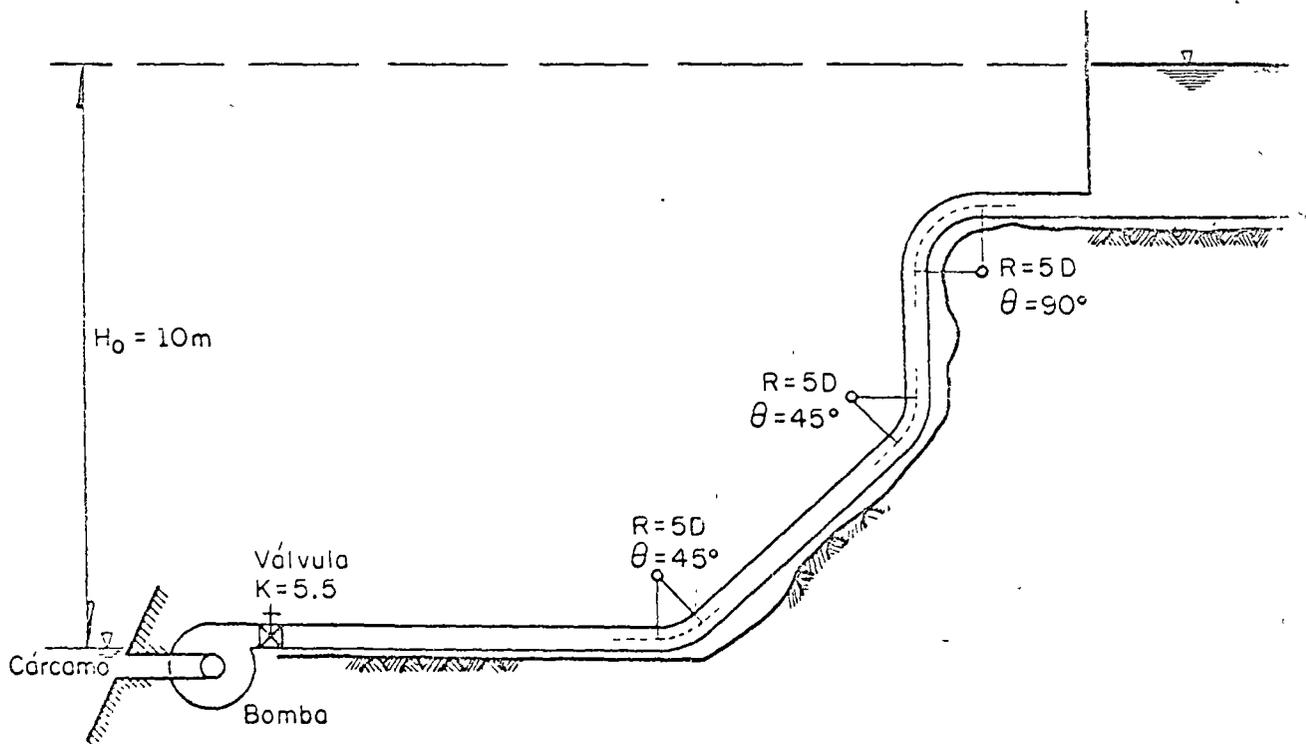


Fig 9.12 Ilustración del problema 9.6

Solución:

La potencia suministrada por la bomba a la tubería es

$$P = 75 \times 0.8 \times 53.4 = 3205 \text{ kg m/seg}$$

siendo la carga de bombeo para  $Q = 5/60 = 0.1 \text{ m}^3/\text{seg}$

$$H_n = \frac{P}{\gamma Q} = \frac{3205}{1000 \times 0.1} = 32.05 \text{ m}$$

Como se dispone de esta energía inmediatamente después de la bomba, de la ecuación de la energía

$$32.05 = 10 + \frac{V^2}{2g} + f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} + K_c \frac{V^2}{2g} + K_v \frac{V^2}{2g}$$

$$22.05 = \frac{V^2}{2g} (1 + f \frac{L}{D} + K_c + K_v)$$

Igual que en el problema anterior, se resuelve por tanteos. Después de efectuar varios ciclos, se propone  $D = 0.18 \text{ m}$  cuya área, velocidad y carga de velocidad son

$$A = \frac{\pi}{4} (0.18)^2 = 0.0255 \text{ m}^2$$

$$V = \frac{0.1}{0.0255} = 3.93 \text{ m/seg}$$

$$\frac{V^2}{2g} = 0.785 \text{ m}$$

El número de Reynolds para  $\nu = 0.0131 \text{ cm}^2/\text{seg}$  es

$$Re = \frac{3.93 \times 0.18 \times 10^6}{1.31} = 540\,000$$

y para  $\epsilon/D = 0.2/18 = 0.012$  del diagrama de Moody,  $f = 0.038$

$$f \frac{L}{D} = \frac{0.038 \times 100}{0.18} = 21.2$$

De la fig 8.37a,  $C_c = 0.21$  y ec 9.114

$$\text{Curvasa } 45^\circ \quad 2 \times 0.21 \times \frac{45}{90} = 0.21$$

Curva a  $90^\circ$ 

0.21

$$K_c = \frac{0.21}{0.42}$$

por lo tanto

$$V = \sqrt{\frac{19.6 \times 22.05}{1 + 21.2 + 0.42 + 5.4}} = 3.93 \text{ m/seg}$$

siendo el gasto

$$Q = 3.93 \times 0.0255 = 0.1 \text{ m}^3/\text{seg}$$

entonces el diámetro,  $D = 0.18 \text{ m}$ , es el deseado.Problema 9.7 (ref 14)

En una tubería horizontal de diámetro  $D$  se mantiene una presión  $p_1$  a la entrada, existiendo a lo largo de la misma  $n$  orificios laterales localizados a iguales distancias, cada uno de los cuales descarga un gasto  $q$  (lt/seg). Calcular la presión  $p$  en el extremo cerrado del tubo si su longitud es  $l = 600 \text{ m}$ , su diámetro  $D = 15 \text{ cm}$ ,  $n = 20$ ,  $q = 1 \text{ lt/seg}$ , y la presión en el extremo inicial es de  $0.5 \text{ atm}$ .

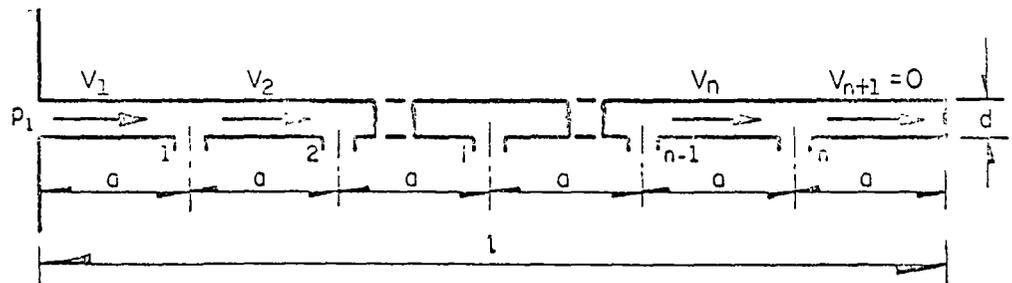


Fig 9.13 Ilustración del problema 9.7

Solución:

Como el gasto total en el tubo es  $nq$ , la velocidad a la entrada resulta  $V_1 = 4 nq/\pi D^2 = \alpha n$ , siendo  $\alpha = 4q/\pi D^2$ ; velocidad que se reduce después del primer orificio a  $V_2 = \alpha(n-1)$  y después del  $i$ ésimo orificio a  $V_i = \alpha[n - (i-1)]$ , por lo cual  $V_n = \alpha$  y  $V_{n+1} = 0$

La distancia  $a$  entre cada orificio es  $a = 1/n + 1$ .

La pérdida de fricción para el tramo  $i$  es

$$h_i = f_i \frac{a}{D} \frac{V_i^2}{2g} = f_1 \frac{a \alpha^2}{2gD} [n - (i-1)]^2$$

Como  $f$  no cambia, la pérdida total de fricción es

$$H_f = \sum_{i=1}^n h_i = \frac{f a \alpha^2}{2gD} \sum_{i=1}^n [n - (i-1)]^2$$

Puesto que

$$\sum_{i=1}^n [n - (i-1)]^2 = \frac{n}{6} (n+1) (2n+1)$$

resulta

$$H_f = \frac{4}{3} \frac{f \alpha^2}{n^2 g D^5} n (2n+1)$$

Sustituyendo a  $q = \pi D^2 V_1/4n$  en la ecuación anterior, se obtiene

$$H_f = \frac{1}{3} \frac{f}{D} \frac{1}{2g} \frac{V_1^2}{n} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)$$

Ya que  $(f/2gD) V_1^2$  es la pérdida por fricción en todo el tubo, en el supuesto de que no se hicieran las derivaciones, para  $n$  grande, resulta

$$H_f = \frac{1}{3} H$$

Con los datos proporcionados:  $q = 1 \text{ lt/seg}$ ,  $l = 600 \text{ m}$ ,  $D = 15 \text{ cm}$ ,  $n = 20$  y  $f = 0.03$ , se obtiene que  $H_f = 2.677 \text{ m}$ .

La carga de presión en el extremo cerrado del tubo se calcula de la ecuación de energía

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p}{\gamma} + H_f$$

Con  $V_1 = n q = 1.102 \text{ m/seg}$ ,  $p/\gamma = 2.309 \text{ m}$

La ecuación de energía entre un punto en el orificio de entrada y el punto  $i$  (con  $C_i$  velocidad de descarga del orificio  $i$ ) conduce a

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_i}{\gamma} + \frac{C_i^2}{2g} + \frac{f a}{D} \sum_{m=1}^i \frac{V_m^2}{2a} + K \frac{V_i^2}{2g}$$

donde

$$V_m = c [n - (m - 1)]$$

$$K = 3$$

por lo que

$$c_i^2 = \frac{2}{\rho} (p_1 - p_i) + V_1^2 - 3 V_i^2 - \frac{f a}{D} c^2 \sum_{m=1}^i [n - (m - 1)]^2 \quad (a)$$

resulta ahora

$$\sum_{m=1}^i [n - (m - 1)]^2 = \sum_{m=1}^i [(n + 1)^2 - 2m(n + 1) + m^2] =$$

$$= i(n + 1)^2 - 2(n + 1) \sum_{m=1}^i m + \sum_{m=1}^i m^2$$

puesto que

$$\sum_{m=1}^i m = \frac{i}{2} (i + 1)$$

$$\sum_{m=1}^i m^2 = \frac{1}{6} i (i + 1) (2i + 1)$$

se obtiene

$$\sum_{m=1}^i [n - (m - 1)]^2 = \frac{1}{6} 6n(n + 1 - i) + i(2i - 3) + 1 = S_{n,i}$$

por lo tanto,

$$C_i^2 = \frac{2}{\rho} (p_1 - p_i) + a^2 [n^2 - 3 \{n - (i - 1)\}^2 - f \frac{a}{D} S_{n,i}] \quad (b)$$

El diámetro  $d_i$  del orificio  $i$  se determina de

$$q = \frac{\pi d_i^2}{4} C_i \quad (c)$$

a) Puesto que  $a = 4q / \pi D^2 = 0.0566$  m/seg, de la ec b se pueden obtener las velocidades  $C_i$  correspondientes a los orificios desde  $i = 1$  hasta 20 y de la ec c los diámetros de los mismos. Los cálculos se indican en la siguiente tabla

$i$	$S_{n,i}$	$C_i$ , en m/seg	$d_i$ , en cm
1	400	9.392	1.154
2	761	9.055	1.185
5	1530	8.191	1.247

$i$	$S_{n,i}$	$C_i$	$d_i$
10	2465	7.263	1.324
15	2815	6.845	1.359
$\Sigma$	2570	6.845	1.359

### 9.3 Sistema de derivación

En ocasiones resulta necesario derivar varias ramales de un mismo tubo (fig 9.14), pudiéndose presentar dos casos:

1. Se conoce la pérdida entre A y B y se desea determinar el gasto en cada ramal.
2. Se conoce el gasto total y se desea determinar la pérdida entre A y B.

Ambos casos ocurren independientemente de las energías que existan en A y B. El primero no ofrece dificultad puesto que una vez conocida la pérdida, se puede calcular el gasto en cada ramal con base en que funciona con una carga igual a la pérdida determinada, esto es, que con

$\Delta H_1 = \Delta H_2 = \dots = \Delta H$ , la pérdida de carga es

$$\Delta H = K_i \frac{v_i^2}{2g} \quad (9.11a)$$

por lo que

$$v_i = \sqrt{\frac{2g \Delta H}{K_i}} \quad (9.11b)$$

donde

$$K_i = f_i \frac{L_i}{D_i} + \sum K_{1i}$$

siendo el gasto

$$Q_i = A_i v_i \quad (9.12)$$

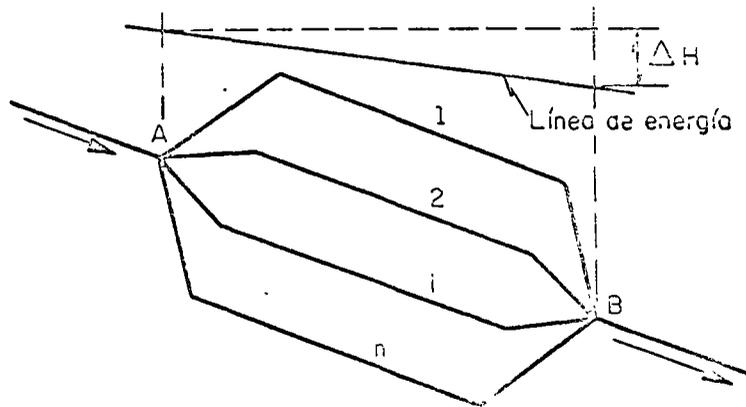


Fig 9.14 Sistema en derivación

Para el segundo caso, se supone la existencia de una tubería ficticia que transporta el gasto total equivalente a todos los ramales con una pérdida en la misma de  $\Delta H_e = \Delta H_1 = \Delta H_2 = \dots = \Delta H_n$ .

Al sustituir las ecs 9.11b y 9.12 en la de continuidad

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$$

y simplificar, resulta

$$\frac{D_e^2}{\sqrt{K_e}} = \sum_{i=1}^n \frac{D_i^2}{\sqrt{K_i}}$$

o bien

$$\frac{K_e}{D_e^4} = \left[ \frac{1}{\sum (D_i^2 / \sqrt{K_i})} \right]^2 \quad (9.13)$$

que es la condición de equivalencia entre los conductos, en los que se elige un valor arbitrario para  $D_e$  o  $K_e$  y el otro se calcula con la ec 9.13, luego entonces,

$$\Delta H = K_e \frac{v_e^2}{2g} = \frac{8 K_e}{\pi^2 D_e^4} \frac{Q^2}{g}$$

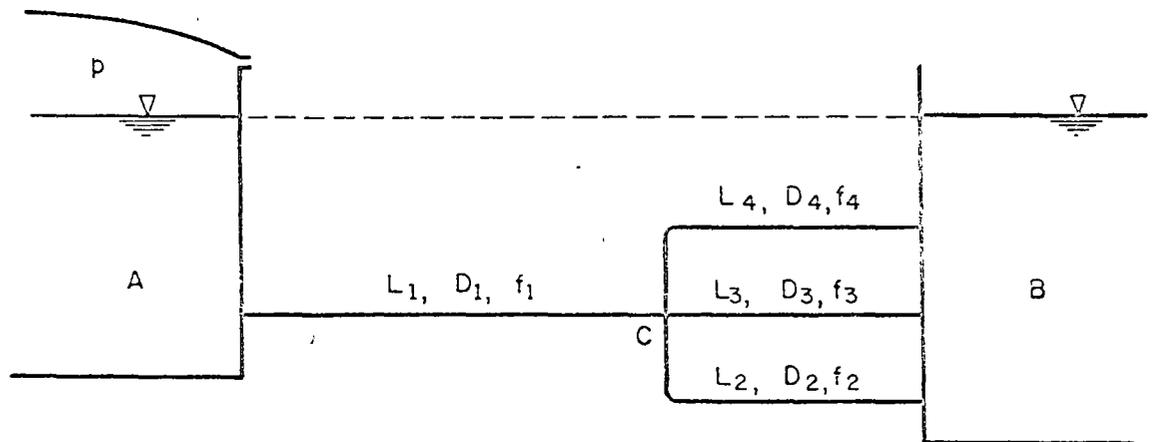
Sustituyendo la ec 9.13

$$H = \frac{8}{\pi \sum_{i=1}^n \left( \frac{Q_i^2}{\sqrt{k_i}} \right)^2} \frac{Q^2}{g} \quad (9.14)$$

Una vez que la pérdida  $\Delta H$  se conoce, el problema se torna en uno del primer caso.

### Problema 9.8

En la fig 9.15 se muestra un sistema con un tanque (en el cual existe la presión  $p$  sobre la superficie libre) que conecta con otro recipiente a través de una tubería maestra con tres derivaciones, siendo la geometría del sistema:  $L_1 = 400$  m,  $L_2 = 180$  m,  $L_3 = 50$  m,  $L_4 = 400$  m;  $D_1 = D_4 = 200$  mm,  $D_2 = D_3 = 100$  mm,  $f_1 = f_4 = 0.02$ ,  $f_2 = f_3 = 0.025$ . Calcular la presión  $p$  necesaria en el recipiente A para que el gasto  $Q_4 = 40$  lt/seg. Despreciar las pérdidas locales.



Solución:

Fig 9.15 Ilustración del problema 9.8

La pérdida de energía entre el punto C y B se determina con el gasto en el tubo cuatro. Eligiendo como plano de referencia la elevación de la superficie libre en los dos recipientes, de la ecuación de la energía entre A y B, se tiene

$$\frac{Q}{\gamma} = (\Delta H)_1 + (\Delta H)_4 + \frac{(V_4)^2}{2g}$$

el área, la velocidad y la carga de velocidad en el tubo cuatro son:

$$A_1 = A_4 = 0.7854 (0.2)^2 = 0.0314 \text{ m}^2$$

$$\frac{V_4^2}{2g} = \frac{1.62}{19.6} = 0.083 \text{ m}$$

como únicamente se considera la pérdida por fricción, de la fórmula de Darcy - Weisbach

$$(\Delta H)_4 = 0.02 \frac{400}{0.20} \times 0.083 = 3.304 \text{ m}$$

y de las ecs 9.4 y 9.5

$$Q_3 = 0.7854 (0.1)^2 \sqrt{\frac{19.6 \times 3.304 \times 0.1}{0.025 \times 50}} = 0.01785 \text{ m}^3/\text{seg}$$

$$Q_2 = 0.7854 (0.1)^2 \frac{19.6 \times 3.304 \times 0.1}{0.025 \times 180} = 0.0094 \text{ m}^3/\text{seg}$$

conduce a un gasto total

$$Q_1 = 0.040 + 0.01785 + 0.0094 = 0.06725 \text{ m}^3/\text{seg}$$

La velocidad, carga de velocidad y pérdida en el tubo 1 son:

$$V_1 = \frac{0.06725}{0.0314} = 2.14 \text{ m/seg}$$

$$\frac{V_1^2}{2g} = \frac{4.59}{19.6} = 0.234 \text{ m}$$

$$(\Delta H)_1 = 0.02 \frac{400}{0.2} \times 0.234 = 9.36 \text{ m}$$

finalmente, la carga de presión en el recipiente A

$$\frac{z}{\gamma} = 9.36 + 3.304 + 0.083 = 12.76 \text{ m}$$

o bien, la presión en atmósferas

$$p = \frac{12.76}{10.33} = 1.235 \text{ atm.}$$

### Problema 9.9

El sistema mostrado en la fig 9.16 tiene la siguiente geometría:  $H = 24 \text{ m}$ ;  $L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 100 \text{ m}$ ;  $D_1 = D_2 = D_4 = 100 \text{ mm}$ ;  $D_3 = 200 \text{ mm}$ ; además,  $f_1 = f_2 = f_4 = 0.025$ , y  $f_3 = 0.02$ , siendo el coeficiente de pérdida en la válvula  $K_v = 30$ . Calcular los gastos en cada tubo despreciando las pérdidas locales.

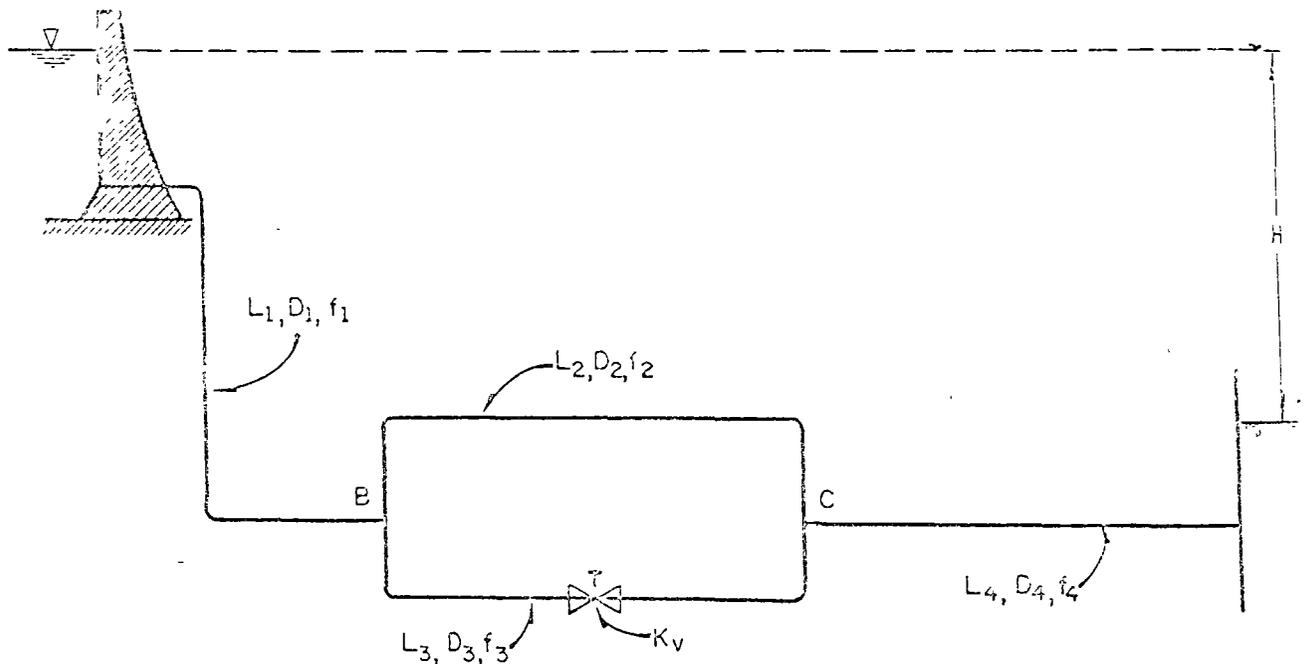


Fig 9.16 Ilustración del problema 9.9

Solución:

La pérdida de energía entre B y C está dada por la ec 9.14. Como en los tubos uno, dos y cuatro únicamente hay pérdida por fricción re

sulta

$$K_2 = f_2 \frac{L_2}{D_2} = 0.025 \frac{100}{0.1} = 25$$

$$K_1 = K_4 = 25$$

En el tubo tres

$$K_3 = f_3 \frac{L_3}{D_3} + K_V = \frac{0.02 \times 100}{0.2} + 30 = 40$$

Para la ec 9.14

$$\sum_{i=1}^n \frac{D_i^5}{\sqrt{K_i}} = \frac{0.01}{\sqrt{25}} + \frac{0.04}{\sqrt{40}} = 0.00831$$

$$\left[ \pi \sum_{i=1}^n \frac{D_i^5}{\sqrt{K_i}} \right]^2 = (3.14 \times 0.00831)^2 = 0.000685$$

De la ec 9.14

$$\Delta H = \frac{8}{0.000685 \times 9.8} Q_4^2 = 1191 Q_4^2$$

Además, con  $D_1 = D_4$  en la ecuación de continuidad

$$\frac{V_1^2}{2g} = \left(\frac{D_4}{D_1}\right)^4 \frac{V_4^2}{2g} = \frac{V_4^2}{2g}$$

$$\frac{V_4^2}{2g} = \frac{Q_4^2}{2g (\pi D_4^2/4)^2} = \frac{Q_4^2}{19.6 (0.7854 \times 0.01)^2} = 825 Q_4^2$$

De la ecuación de la energía entre A y D

$$24 = K_1 \frac{V_4^2}{2g} + 1191 Q_4^2 + K_4 \frac{V_4^2}{2g} + \frac{V_4^2}{2g}$$

Sustituyendo términos

$$24 = (2 \times 25 \times 825 + 1191 + 825) Q_4^2$$

$$Q_4 = \sqrt{\frac{24}{43266}} = 0.0235 \text{ m}^3/\text{seg}$$

La pérdida de energía entre B y C es

$$\Delta_1 = 1191 (0.0237)^2 = 0.671 \text{ m}$$

Para el tubo 2

$$0.671 = 25 \frac{v_2^2}{2g}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{19.6 \times 0.671}{25}} = 0.725 \text{ m/seg}$$

$$Q_2 = 0.7854 \times 0.01 \times 0.725 = 0.00568 \text{ m}^3/\text{seg}$$

En la misma forma

$$Q_3 = 0.7854 \times 0.04 \sqrt{\frac{19.6 \times 0.671}{40}} = 0.01799 \text{ m}^3/\text{seg}$$

y como comprobación

$$Q = 0.00569 + 0.01799 = 0.02367 \text{ m}^3/\text{seg}$$

que es prácticamente el gasto total.

#### 1.4 Redes abiertas

Se dice que una red es abierta cuando los tubos que la componen se ramifican sucesivamente sin intersectarse después para formar circuitos. Los extremos finales de las ramificaciones pueden terminar en un recipiente o descargar libremente a la atmósfera.

Un ejemplo de red abierta se esquematiza en la fig 9.17. De acuerdo con los niveles de los distintos recipientes y la longitud de los tubos, se deberá conocer o suponer la dirección del gasto en los diversos tramos.

De la ecuación de la energía entre el recipiente superior y los extremos de los tubos resulta

$$z_1 - \left( z_j + \frac{v_j^2}{2g} \right) = \sum_{i=1}^j h \quad (9.15)$$

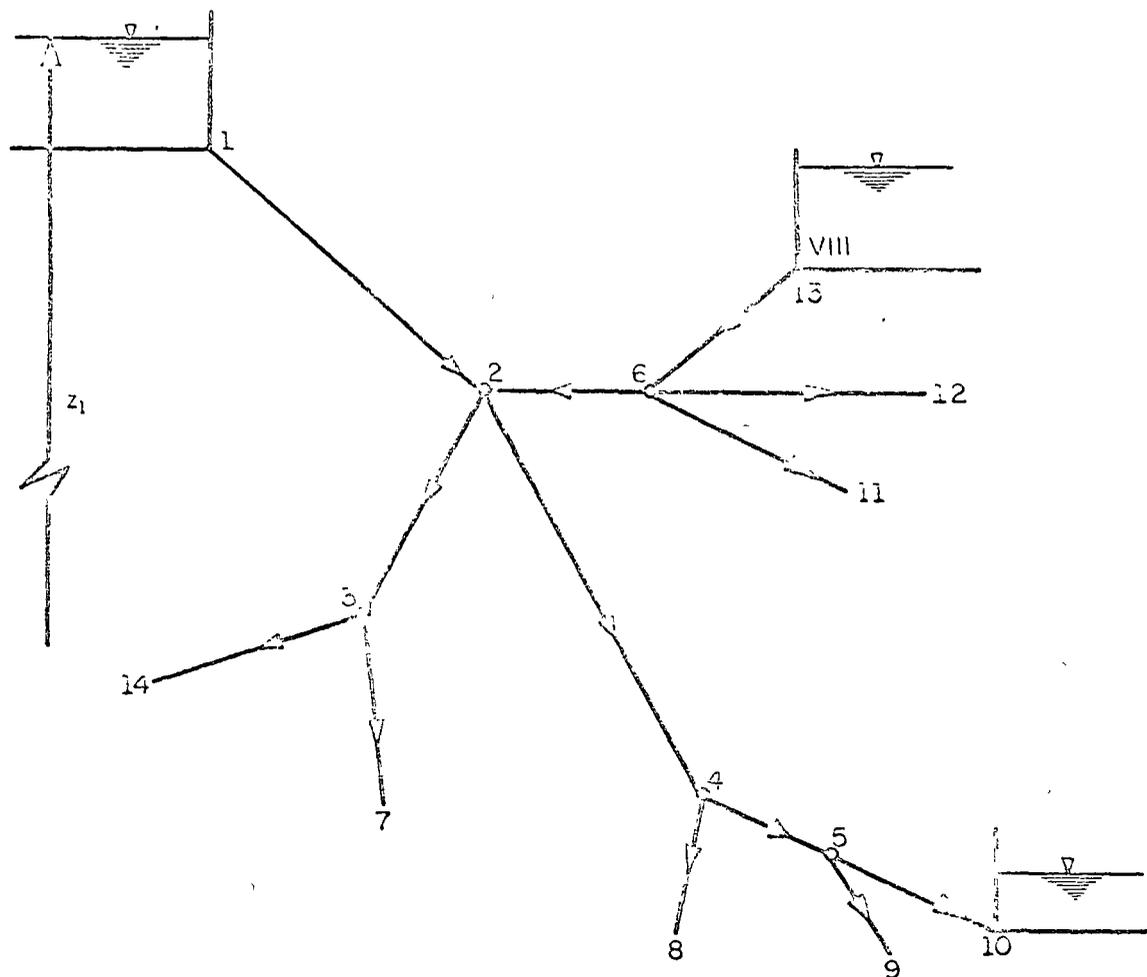


Fig 9.17 Red abierta

donde  $z_j$  es el nivel de la superficie libre del agua si el tubo descarga a un recipiente, o bien el nivel del centro de la sección final si el tubo descarga a la atmósfera, el subíndice  $j$  corresponde a las características hidráulicas en el punto  $j$ . El término  $\sum_{i=1}^j h$  es la suma de las pérdidas de energía de los tubos que se encuentran en el recorrido desde el punto 1 hasta el extremo  $j$ , tomando signo positivo para  $h$  en aquellos elementos en que la dirección del gasto coincide con la dirección del recorrido y negativo en caso contrario.

Por ejemplo, para el extremo 7, la ec 9.15 es

$$z_1 - \left( z_7 + \frac{v_7^2}{2g} \right) = \sum h_{21} + \sum h_{32} + \sum h_{73}$$

y de acuerdo con la dirección supuesta de los gastos en la fig 9.17, para el extremo 13

$$z_1 - z_{13} = \sum h_{21} - \sum h_{52} - \sum h_{136}$$

donde  $\sum r_{ij}$  representa la suma de las pérdidas locales y de fricción en el tramo que va del nudo  $j$  al nudo  $i$ .

Además, en cada punto de ramificación (nudo) se satisface la ecuación de continuidad

$$\sum Q = 0 \quad (9.16)$$

estableciendo como convención que los gastos que lleguen al nudo tengan signo positivo y negativo los que salgan del nudo.

Si el problema es de revisión, el resultado será un sistema de tantas ecuaciones del tipo 9.15 como extremos finales tenga la red, y de tantas ecuaciones del tipo 9.9 como nudos existan. Para la red de la fig 9.17 se pueden establecer ocho ecuaciones del primer tipo y cinco del

segundo.

Si el problema es el diseño de una red en la que se conoce su geometría y los gastos de cada tubo, se deberán elegir por lo menos (1-m) diámetros de los l tramos que componen la red (m, número de extremos finales), para evitar la indeterminación del problema, ya que las ecuaciones de nudo se convierten en identidades.

Problema 9.10

Determinar la magnitud y sentido de los gastos en los tubos que forman el sistema mostrado en la fig 9.18. Los tubos son de fierro fundido con 15 años de servicio ( $N$  de Kozeny = 30) y tienen la siguiente geometría:

$$D_1 = 0.55 \text{ m}$$

$$L_1 = 650 \text{ m}$$

$$D_2 = 0.60 \text{ m}$$

$$L_2 = 520 \text{ m}$$

$$D_3 = 0.80 \text{ m}$$

$$L_3 = 800 \text{ m}$$

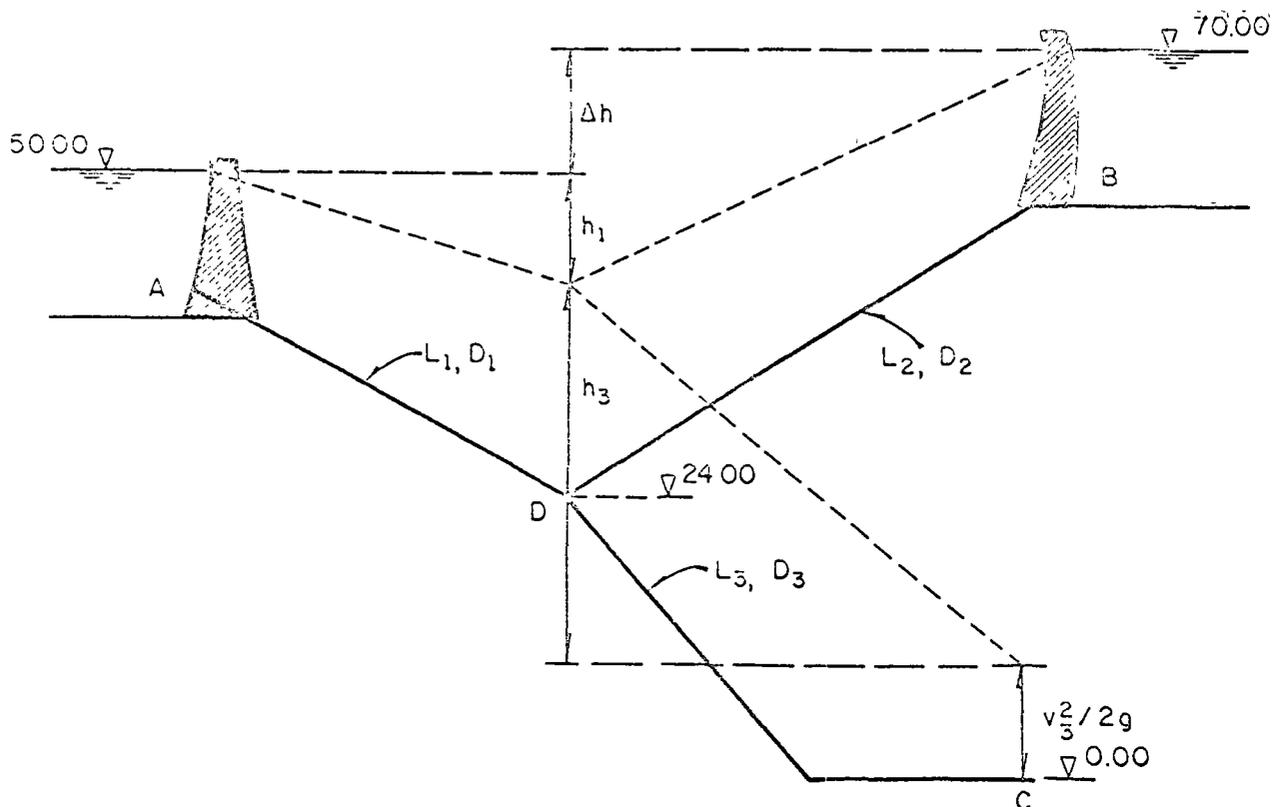


Fig 9.18 Ilustración del problema 9.10

266  
Solución:

Primero, es necesario suponer un sentido de los gastos en el nudo D y luego resolver y comprobar esta suposición. Por ejemplo, se acepta que A y B alimentan a C, esto es

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

Por otra parte, siendo la pérdida por fricción la única importante,  $h_1$  será la pérdida en 1,  $(h_1 + \Delta h)$  en 2 y  $h_3$  la pérdida en 3. Esta última en el su puesto de despreciar la carga de velocidad en el tubo tres.

De la fórmula de Kozeny se obtiene que

$$Q_1 = \frac{\pi}{4} D_1^2 (8.86 \log D_1 + N) \sqrt{\frac{h_1}{L_1}} D_1$$

$$Q_2 = \frac{\pi}{4} D_2^2 (8.86 \log D_2 + N) \sqrt{\frac{h_1 + \Delta h}{L_2}} D_2$$

$$Q_3 = \frac{\pi}{4} D_3^2 (8.86 \log D_3 + N) \sqrt{\frac{h_3}{L_3}} D_3$$

de la geometría del sistema,  $h = 20$  m,  $h_3 = 50 - h$ . Además, las constantes son

$$D_1 = 0.55 \text{ m} \quad D_1^2 = 0.303 \quad C_1 = 8.86 \log D_1 + 30 = 27.7, \quad D_1^2 C_1^2 = 8.393$$

$$D_2 = 0.60 \text{ m} \quad D_2^2 = 0.360 \quad C_2 = 28.04 \quad D_2^2 C_2^2 = 10.08$$

$$D_3 = 0.80 \text{ m} \quad D_3^2 = 0.640 \quad C_3 = 29.14 \quad D_3^2 C_3^2 = 18.65$$

Por lo tanto, las tres últimas ecuaciones sustituidas en la de continuidad conducen a

$$D_1^2 C_1 \sqrt{\frac{h_1}{L_1}} + D_2^2 C_2 \sqrt{\frac{(h_1 + \Delta h)}{L_2}} = D_3^2 C_3 \sqrt{\frac{(50 - h_1)}{L_3}}$$

que con valores de las constantes resulta

$$h_1^2 - 66 h_1 + 914.93 = 0$$

de ahí que

$$h_1 = 19.81 \text{ m}$$

lo cual significa que sí existe raíz real de la ecuación y que, por lo tanto, la suposición del sentido de gastos en el nudo D es correcta.

Con este valor

$$Q_1 = 0.834 \text{ m}^3/\text{seg}$$

$$Q_2 = 1.696 \text{ m}^3/\text{seg}$$

$$Q_3 = 2.54 \text{ m}^3/\text{seg}$$

se puede calcular  $V_3^2/2g$

$$\frac{V_3^2}{2g} = \frac{16 Q^2}{\pi^2 2g D_3^4} = 1.306 \text{ m}$$

y corregir los resultados anteriores. En efecto, la única modificación se hace en la ecuación para calcular  $Q_3$ .

$$Q_3 = \frac{\pi}{4} \left[ D_3^2 (6.36 \log D_3 + h) \right] \sqrt{\frac{(5.9 - h_1 - 1.306)}{L_3}} D_3$$

Entrando nuevamente la ecuación de segundo grado, esta resulta

$$h_1^2 - 64.01 h_1 + 859 = 0$$

$$h_1 = 19.16 \text{ m}$$

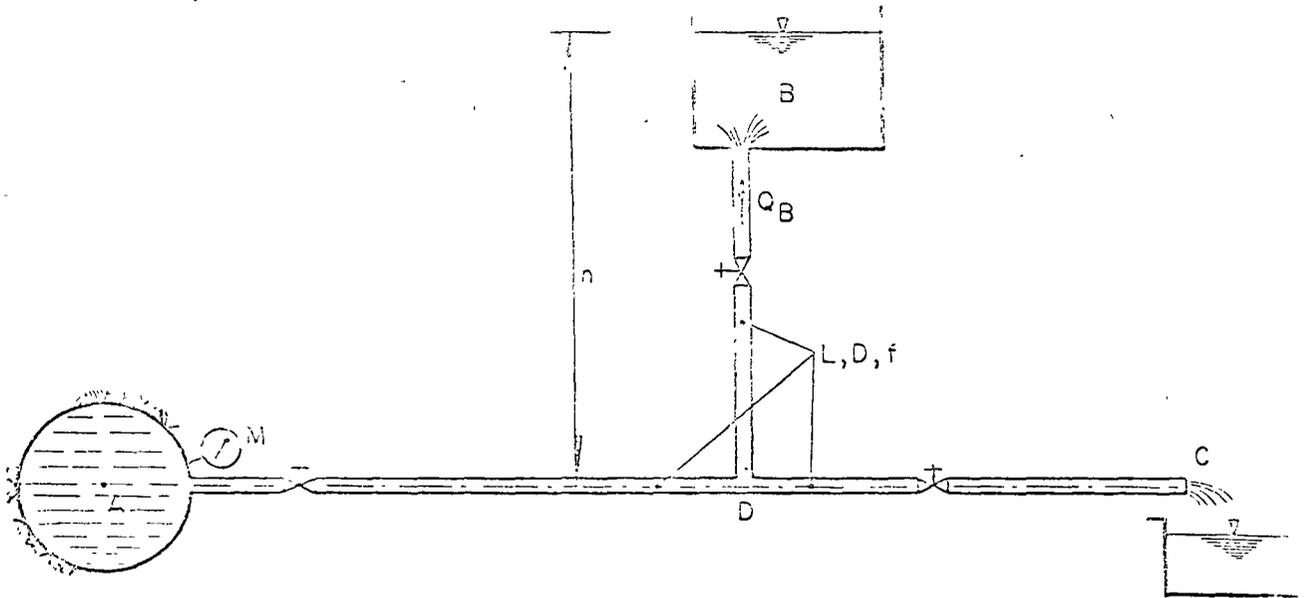
$$Q_1 = 0.818 \text{ m}^3/\text{seg}$$

$$Q_2 = 1.682 \text{ m}^3/\text{seg}$$

$$Q_3 = 2.517 \text{ m}^3/\text{seg}$$

Problema 9.11

Una tubería principal A, abastece al sistema mostrado en la fig 9.19. En el punto de unión el manómetro M marca una presión de 4.3 atm. Las características de los tres tubos son iguales:  $L = 210$  m,  $D = 100$  mm,  $f = 0.025$ . Calcular la carga  $h$  para que el gasto alimentado al recipiente B sea de  $3$  lit/seg con las tres válvulas abiertas



Solución:

Fig 9.19 Ilustración del problema 9.11

El área de los tubos es

$$A = 0.7854 (0.1)^2 = 0.007854 \text{ m}^2$$

la velocidad y carga de velocidad del tubo que conduce al gasto  $Q_B$  son

$$V_B = \frac{0.005}{0.007854} = 0.638 \text{ m/seg}$$

$$\frac{V_B^2}{2g} = 0.0207 \text{ m}$$

Las velocidades en los otros tramos son

$$V_C = \frac{Q_C}{0.007854} = 127.5 Q_C$$

$$V_C^2 = 15250 Q_A^2$$

también

$$V_A^2 = 15250 Q_A^2$$

el coeficiente de pérdida por fricción es el mismo en los tres tubos

$$K_f = f \frac{L}{D} = 0.025 \frac{210}{0.1} = 52.5$$

de la ecuación de la energía entre A y B ( $\frac{P_A}{\gamma} = 43 \text{ m}$ ) se tiene

$$43 = h + 52.5 \frac{V_A^2}{2g} + (52.5 + 1) 0.0207$$

$$43 = h + 40800 Q_A^2 + 1.11 \quad (a)$$

ahora, entre A y C

$$43 = 52.5 \frac{V_A^2}{2g} + (52.5 + 1) \frac{V_C^2}{2g}$$

o bien

$$43 = \frac{52.5 \times 15250 Q_A^2}{19.6} + \frac{53.5 \times 15250 Q_C^2}{19.6} \quad (b)$$

Además, de la ecuación de continuidad

$$Q_A = 0.005 + Q_C \quad (c)$$

$$Q_A^2 = 0.000025 + 0.01 Q_C + Q_C^2 \quad (d)$$

En el sistema de ecs a, b y d existen tres incógnitas:  $h$ ,  $Q_A$  y  $Q_C$ . Sustituyendo la ec d en la b

$$43 = 40\,800 (0.000025 + 0.01 Q_C + Q_C^2) + 41\,500 Q_C^2$$

$$43 = 1.02 + 408 Q_C + 40\,800 Q_C^2 + 41\,500 Q_C^2$$

$$Q_C^2 + 0.00495 Q_C - 0.000509 = 0$$

la solución de esta ecuación es

$$Q_C = -0.002475 \pm 0.0227$$

El signo menos no tiene significado físico por las condiciones en las que se planteó el problema, por lo tanto

$$Q_C = 0.0202 \text{ m}^3/\text{seg}$$

Sustituyendo este resultado en la ec c

$$Q_A = 0.0252 \text{ m}^3/\text{seg}$$

finalmente, en la a, resulta

$$h = 15.89 \text{ m}$$

### Problema 9.12

En la fig 9.20 se presenta una red abierta y su geometría. Se desea que los gastos sean:  $Q_5 = 25 \text{ lt/seg}$ ,  $Q_4 = 30 \text{ lt/seg}$  hacia los tanques 0 y  $Q_2 = 11 \text{ lt/seg}$ . Determinar los diámetros  $D_1$ ,  $D_3$  y  $D_4$  necesarios para que

se satisfagan las condiciones impuestas. El factor de fricción en todos los tubos es  $f = 0.014$  y los tanques A y B abastezcan a C y D.

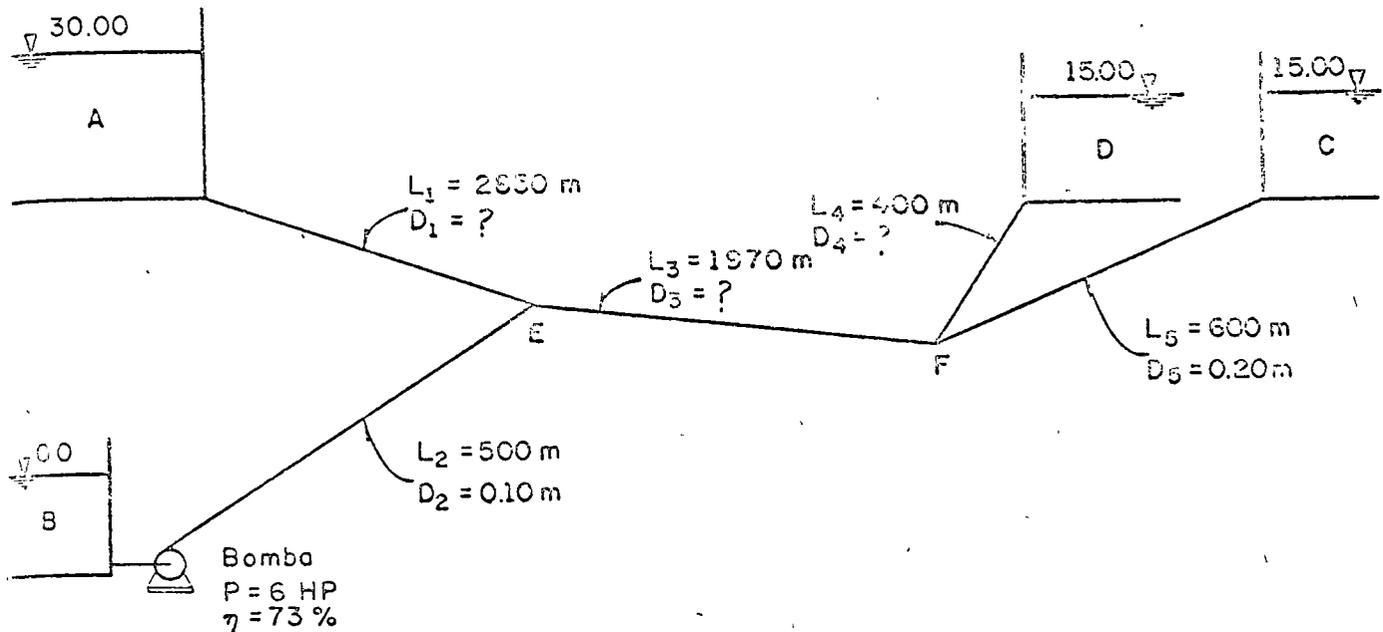


Fig 9.20 Ilustración del problema 9.12

Solución:

La carga producida por la bomba es

$$P = \frac{\gamma Q H_B}{76 \eta}$$

$$H_B = \frac{76 \eta P}{\gamma Q} = \frac{76 \times 0.73 \times 6}{1000 \times 0.011} = 30.3 \text{ m}$$

De la ecuación de continuidad en los nudos, los gastos son

$$Q_3 = Q_4 + Q_5 = 0.055 \text{ m}^3/\text{seg}$$

$$Q_1 = Q_3 - Q_2 = 0.044 \text{ m}^3/\text{seg}$$

Las velocidades y cargas de velocidad en los tubos son

272

$$v_1 = \frac{1.044}{0.7854 D_1^2} = \frac{1.044}{D_1^2} ;$$

$$\frac{v_1^2}{2g} = \frac{(0.056)^2}{19.6 D_1^4} = \frac{0.000161}{D_1^4}$$

$$v_2 = \frac{0.011}{0.7854 \times 0.01} = 1.4 \text{ m/seg} ; \quad \frac{v_2^2}{2g} = 0.1 \text{ m}$$

$$v_3 = \frac{0.055}{0.7854 D_3^2} = \frac{1.07}{D_3^2} \text{ m/seg} ; \quad \frac{v_3^2}{2g} = \frac{0.00025}{D_3^4}$$

$$v_4 = \frac{0.030}{0.7854 D_4^2} = \frac{0.0378}{D_4^2} ; \quad \frac{v_4^2}{2g} = \frac{0.000073}{D_4^4}$$

$$v_5 = \frac{0.025}{0.7854 \times 0.04} = 0.796 \text{ m/seg} ; \quad \frac{v_5^2}{2g} = 0.0322 \text{ m}$$

Ecuación de la energía entre r y C

$$E_F = 15.00 + \left(0.014 \frac{600}{0.20} + 1\right) 0.0322 = 16.325 \text{ m}$$

Ecuación de energía entre F y D

$$E_F = 16.325 = 15.00 + \left(0.014 \frac{400}{D_4} + 1\right) \frac{0.000073}{D_4^4}$$

$$1.325 = \frac{0.000409}{D_4^5} + \frac{0.000073}{D_4^4}$$

Esta ecuación se satisface para

$$D_4 = 0.20 \text{ m}$$

Ecuación de energía entre B y E

$$30.3 + 0.1 = E_E + 0.014 \frac{500}{0.10} 0.1$$

$$E_E = 30.4 - 7.0 = 23.4 \text{ m}$$

Ecuación de energía entre A y E

$$30.00 = 23.4 + 0.014 \frac{2350}{D_1} \frac{0.000161}{D_1^4}$$

$$D_1 = \sqrt[5]{\frac{0.00643}{6.6}} = \sqrt[5]{0.000976}$$

$$D_1 = 0.25 \text{ m}$$

Ecuación de energía entre E y F

$$23.4 = 16.325 + 0.014 \frac{1970}{D_3} \frac{0.00025}{D_3^4}$$

$$D_3 = \sqrt[5]{\frac{0.0069}{7.075}} = \sqrt[5]{0.000976} = 0.25 \text{ m}$$

## 9.5 Redes cerradas

### 9.5.1 Planteamiento del problema

Se conoce como red cerrada aquella en que los conductos que la componen se cierran en forma de circuitos (fig 9.21). Es el caso de las redes de distribución de agua potable en ciudades o de agua para industrias.

La solución del problema se basa en dos tipos de ecuaciones:

la de nudo y la de pérdida de carga.

a) Ecuación de nudo. Por razones de continuidad (ec 9.16) en cada nudo se debe satisfacer

$$\sum_{j \in i} Q_{ij} + Q_i = 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, n \quad (9.17)$$

donde

$Q_{ij}$  gasto que va del nudo  $j$  al nudo  $i$  (positivo si llega al nudo  $i$  y negativo si sale)

$Q_i$  gasto que sale o entra al nudo  $i$

donde  $n = A_2/A_1$ , y  $f$  el factor de fricción de Darcy.

Si la contracción es brusca, se usan los coeficientes de Weisbach (fig 8.34, en la que aparece también la curva de Kisieliev) (ref 25) la cual pretende dar los valores medios de todos los autores que han estudiado el problema.

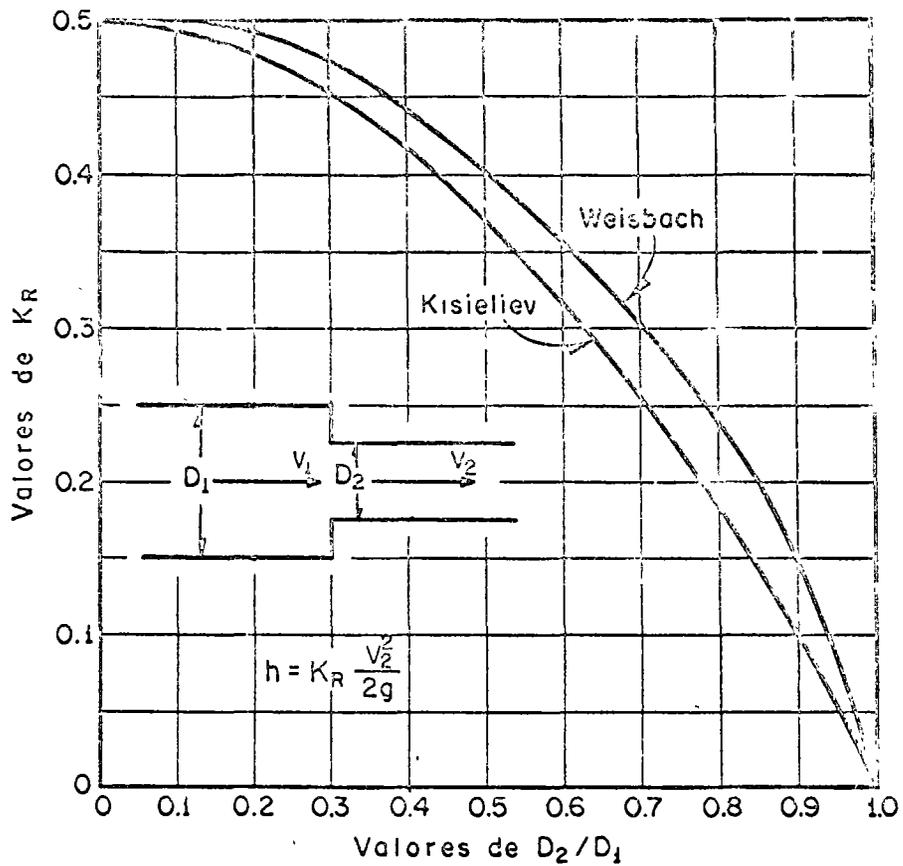


Fig 8.34 Pérdida de carga en una contracción brusca

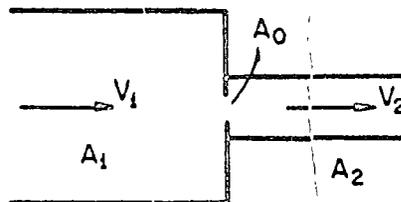


Fig 8.35

Quando la contracción brusca contenga un diafragma como el de la fig 8.35 (ref 51), el coeficiente de pérdida vale

$$K = \left( \frac{A_1}{\mu A_0} - 1 \right) \quad (8.112)$$

donde

$$\mu = 0.63 + 0.37 \left( \frac{A_0}{A_1} \right)^3 \quad (8.113)$$

Si  $A_1 = A_2$  y el diafragma tiene cantos afilados

$\frac{A_0}{A_1}$	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
K	1070	223	47.8	17.5	7.8	3.73	1.79	1.80	0.23	0.09	0

Si  $A_1 = A_2$

$$K = \left( \frac{A_2}{\mu A_0} - 1 \right)^2$$

$\frac{A_2}{A_1}$	1	1.25	1.5	2	3	5	10
K	0.44	1.17	2.25	5.44	15	53.7	245.5

Si  $A_0 < 0.1 A_1$

$\frac{A_0}{A_2}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
K	231.7	51	19.78	9.61	5.25	3.08	1.88	1.17	0.73	0.48

Si  $A_1 \geq 0.1 A_1$  y el diafragma tiene cantos afilados

$\frac{A_0}{A_1}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
K	0.63	0.64	0.65	0.67	0.69	0.72	0.77	0.85	0.92	1

se usa la fórmula general para diafragmas.

## 8.11.6 Pérdida por cambio de dirección

Si se visualiza el flujo en un cambio de dirección, se observa que los filetes tienden a conservar su movimiento rectilíneo en razón de su inercia, lo que modifica la distribución de velocidades y produce zonas de separación en el lado interior y sobrepresiones en el exterior con un movimiento espiral que persiste en una distancia de 50 veces el diámetro. Si el cambio de dirección es gradual con una curva circular de radio medio  $R$  y rugosidad absoluta  $\epsilon$ , para obtener el coeficiente de pérdida  $C_c$  se usa la gráfica de Hoffman (fig 8.36a) que, además, toma en cuenta la fricción en la misma

$$K = C_c \frac{0^\circ}{90^\circ} \quad (8.114)$$

Si el tubo es liso, se usa la gráfica de la fig 8.36b de Wasieliewski (ref 89).

Para curvas en ductos rectangulares, se emplea la fórmula de Abramovich (ref 25)

$$K = 0.73 C D E \quad (8.115)$$

donde  $C$ ,  $D$  y  $E$  son coeficientes que se obtienen de la fig 8.37.

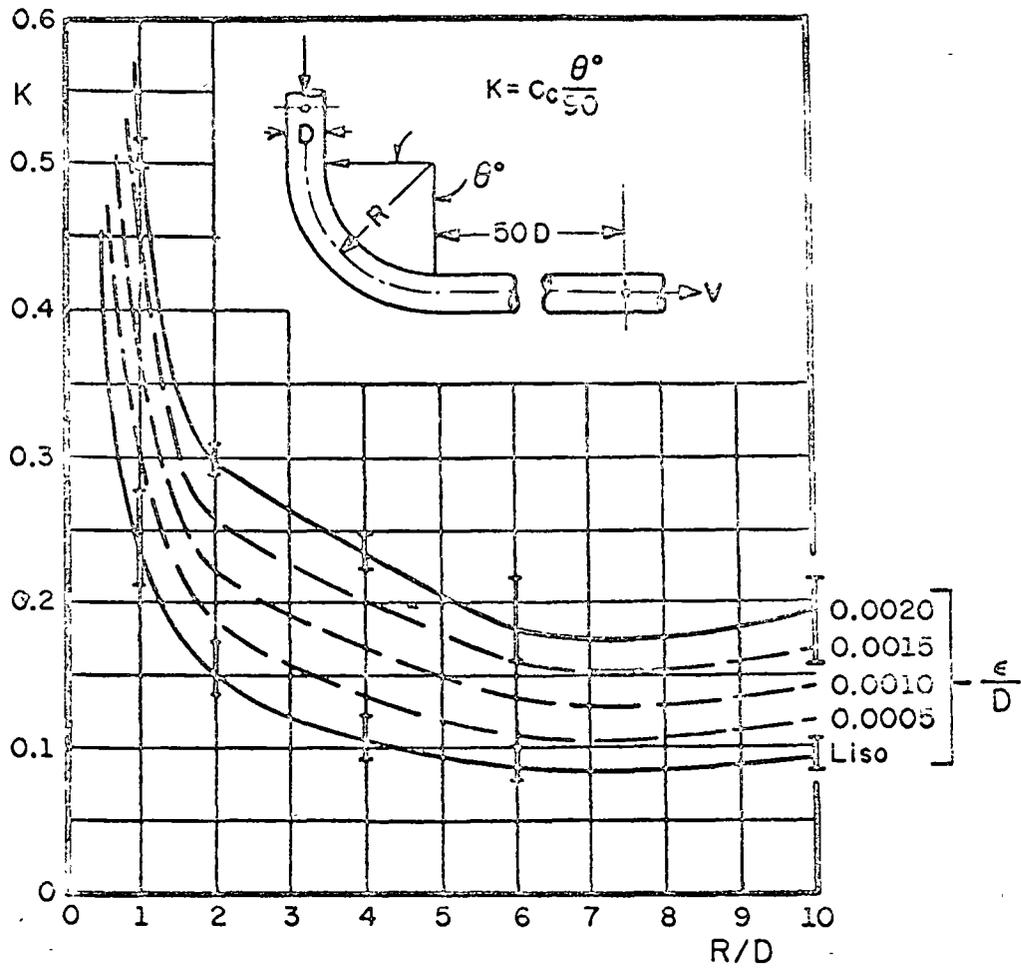


Fig 8.36 a) Coeficientes  $C_c$  para curvas de diámetro constante

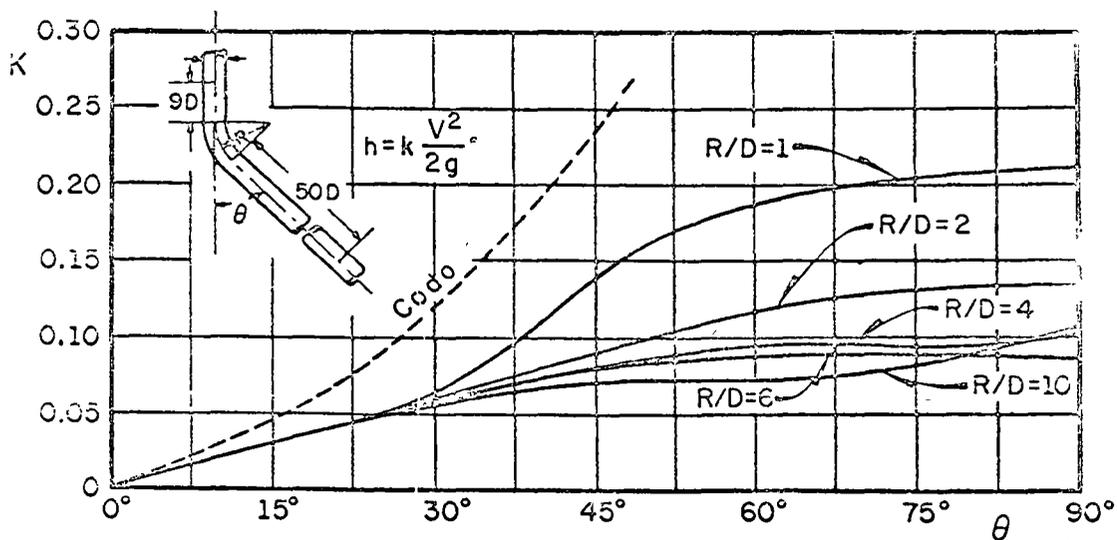


Fig 8.36 b) Coeficientes de pérdida en curvas de diámetro constante con superficie lisa y número de Reynolds de  $2.25 \times 10^3$

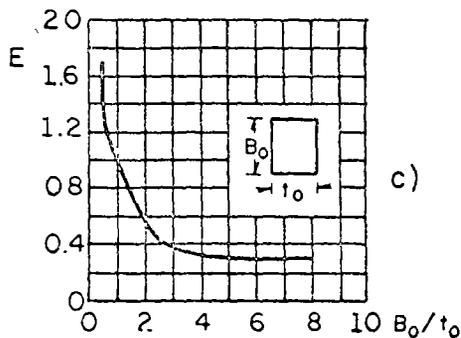
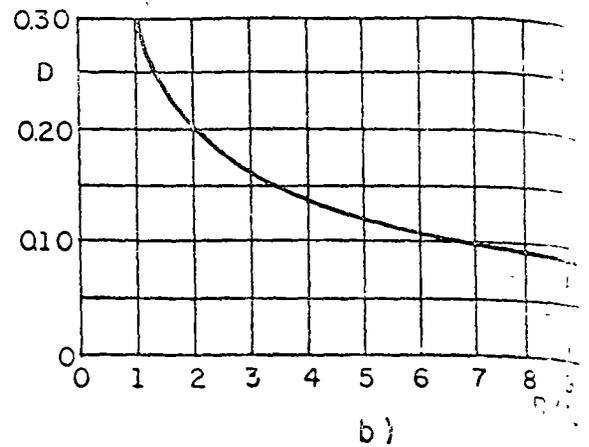
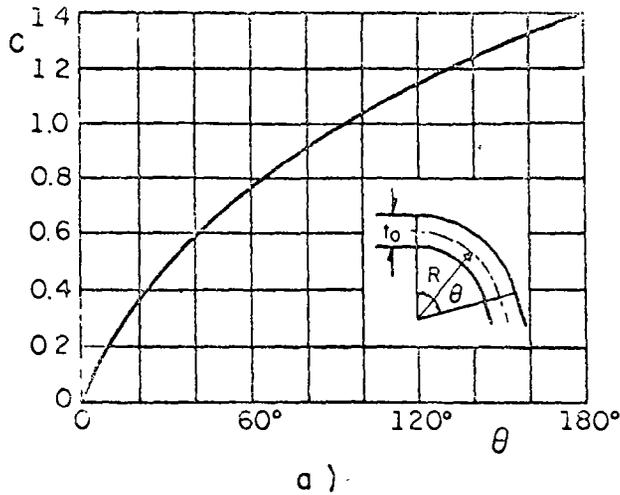
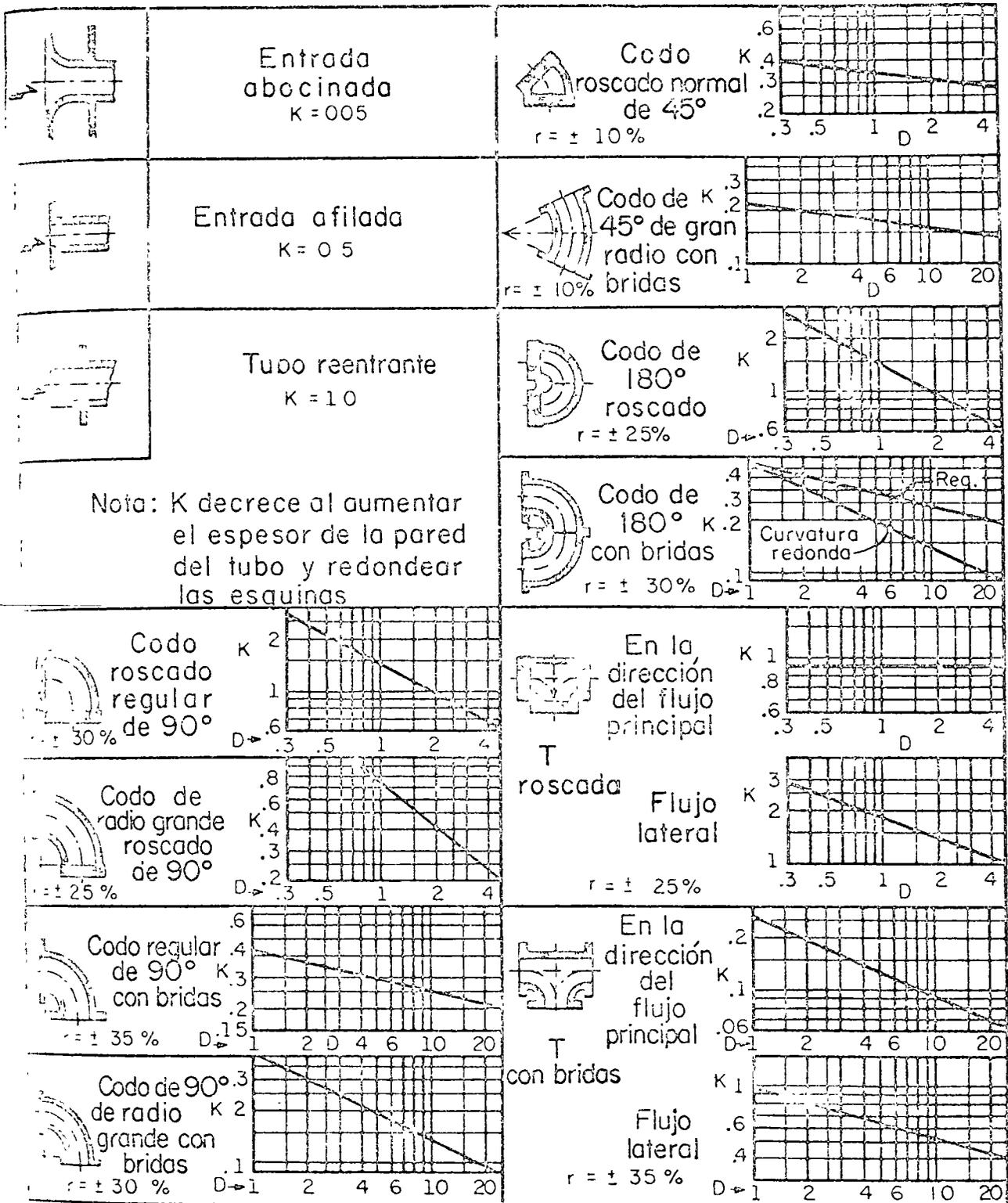


Fig 8.37 Coeficientes C, D y E para el cálculo de la pérdida en una curva de un tubo de sección rectangular

Los coeficientes de las figs 8.37a, b y c son válidos para curvas en tubos de gran diámetro. Si se trata de codos de tubos de menor diámetro, se usan los resultados de la fig 8.38 (ref 89) de acuerdo con el diámetro nominal del tubo.

Si el cambio de dirección es brusco, el coeficiente de pérdida depende del número de Reynolds como se muestra en la fig 8.39 (ref 89) de Kirchbach y Schubart para diferentes ángulos. Si el cambio de dirección es a base de pequeños tramos rectos, los coeficientes de pérdida se obtienen de la fig 8.40 (ref 89) que contiene los resultados de diferentes investigadores para tubos lisos y rugosos.



Nota: El diámetro D corresponde al nominal IPS (Iron Pipe Size) y se mide en pulgadas; r es el intervalo aproximado de variación para K

Fig 8.38 Coeficientes de pérdida para válvulas y uniones

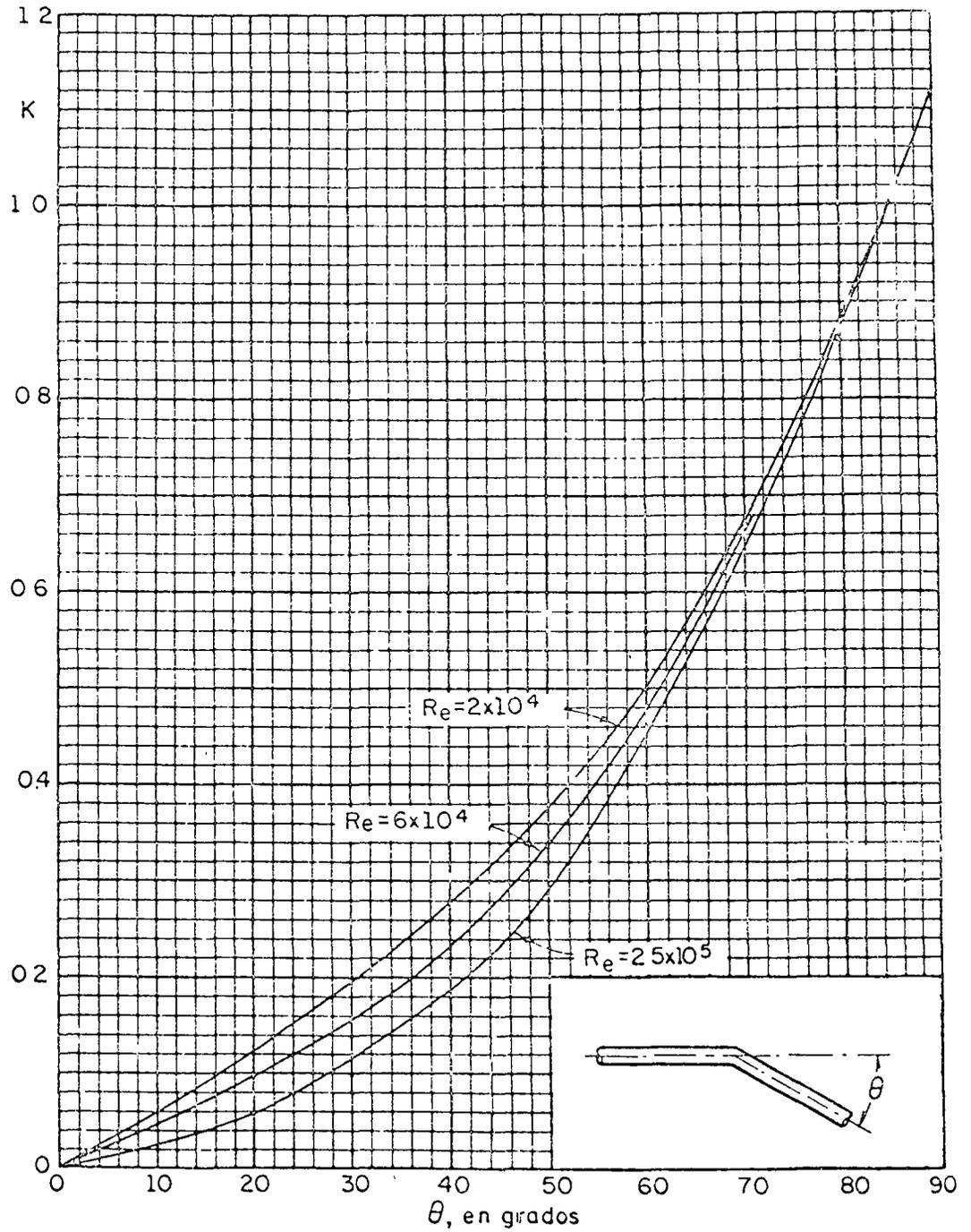
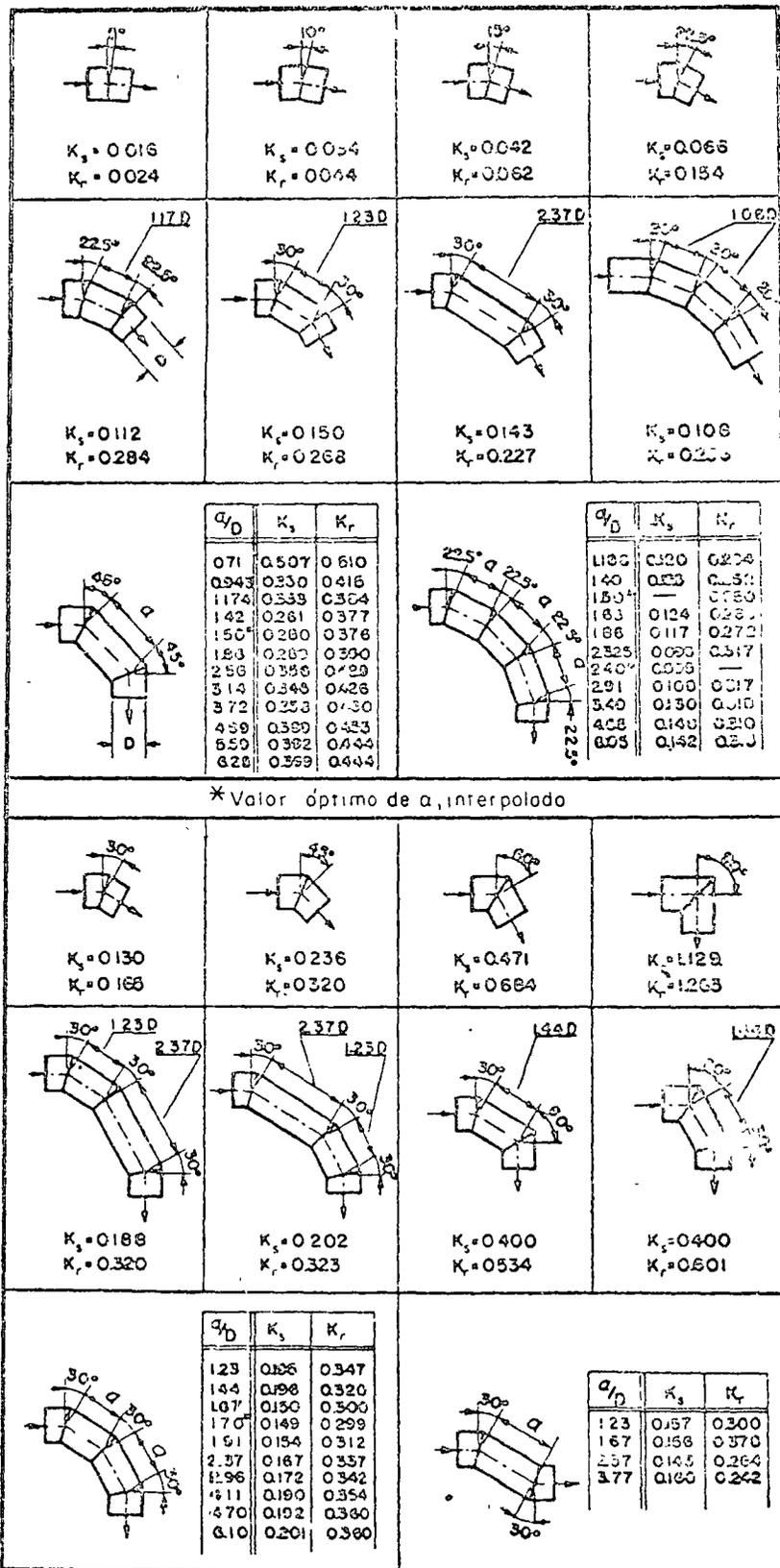


Fig 8.39 Coeficiente de pérdidas por codo,  $K$



\* Valor óptimo de  $a$ , interpolado

$K_s$  = Coeficiente de pérdida para una superficie lisa  
 $K_r$  = Coeficiente de pérdida para una superficie rugosa,  $\frac{\epsilon}{D} = 0.0022$

Fig 8.40 Coeficiente de pérdida para curvas compuestas y número de Reynolds de  $2.25 \times 10^5$

Los coeficientes de pérdida por válvulas varían de acuerdo con el tipo y deben ser proporcionados por los fabricantes para distintas posiciones. A falta de estos datos, se pueden utilizar los valores medios que a continuación se indican.

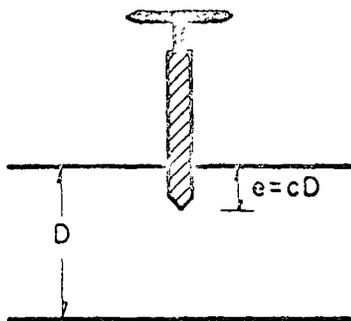


Fig 8.41 Compuerta

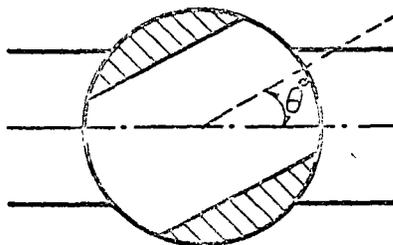


Fig 8.42 Esférica

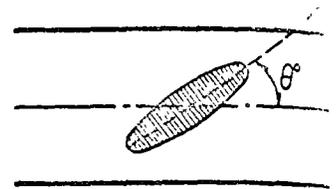


Fig 8.43 Mariposa

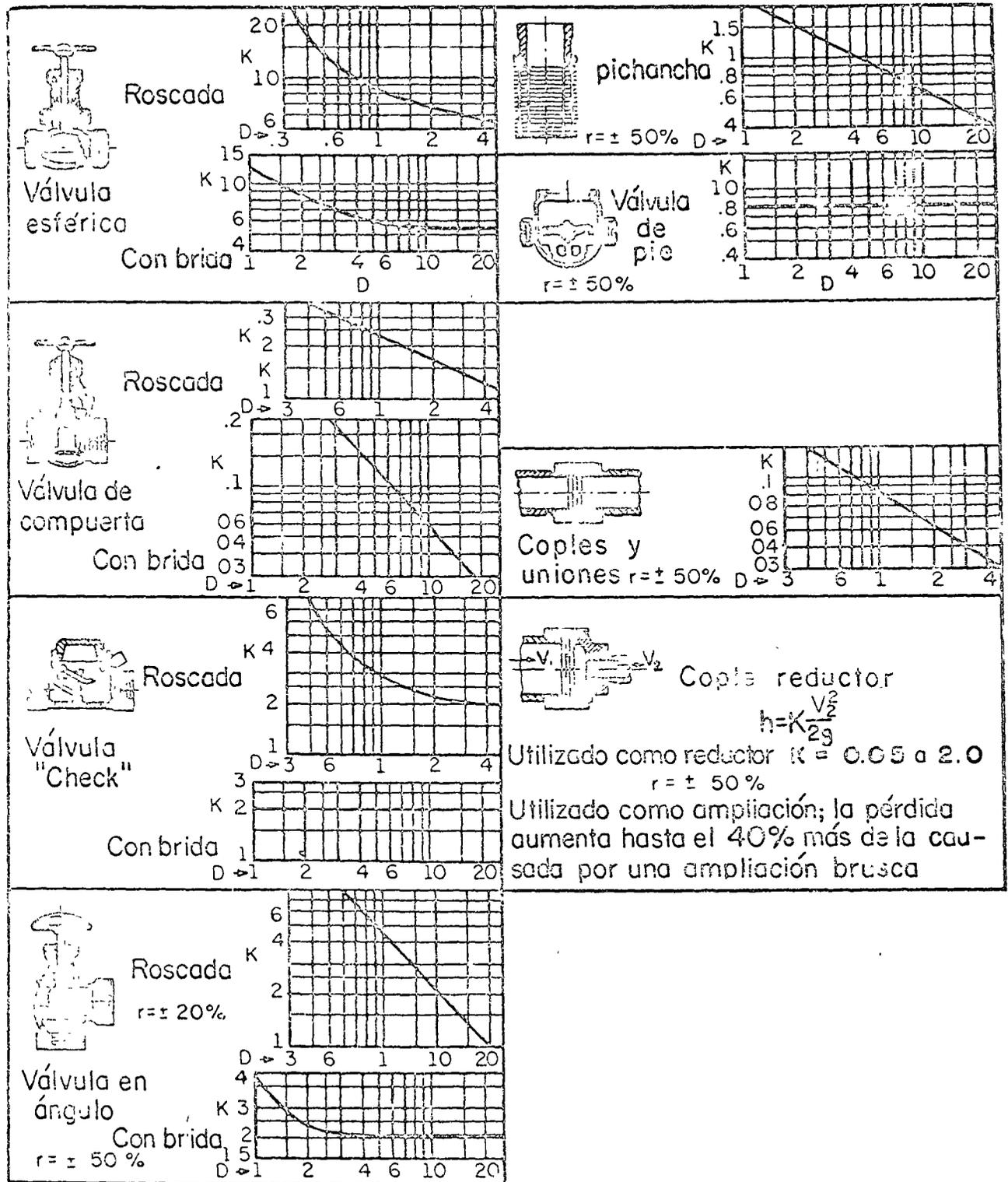
Para válvulas de compuerta (fig 8.41), los coeficientes de pérdida, así como la relación del área abierta al área total del conducto, varía como sigue (para  $D = 50$  mm) (ref 81):

$e$	1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8	21/32
$K$	0.07	0.25	0.81	2.03	5.52	17	97.6	∞
$\frac{A}{A_0}$	0.949	0.855	0.74	0.609	0.466	0.315	0.189	—

Si la válvula de compuerta es de diámetro inferior o mayor de 50 mm, la siguiente tabla sirve para encontrar el coeficiente de pérdida.

D mm	VALORES DE $e$											
	0.95	0.9	0.8	0.75	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.25	0.2	0
25	-	-	-	32	-	-	4.1	-	-	0.23	-	0.23
100	-	-	-	16	-	-	2.6	-	-	0.14	-	0.14
150	350	215	47	-	16	7	3.3	1.7	1.05	-	0.68	-
300	680	165	35	-	12	5.5	2.7	1.3	0.65	-	0.29	-
900	-	-	28	-	9	4	1.8	-	-	-	-	-

Para válvula totalmente abierta deben emplearse las tablas y gráficas del Hydraulic Institute de la fig 8.44 (ref 39).



Nota El diámetro D corresponde al nominal IPS ( Iron Pipe Size ) y se mide en pulgadas. r es el intervalo aproximado de variación de K

Fig 8.44 Coeficientes de pérdida para válvulas completamente abiertas y uniones

Los coeficientes de pérdida K para válvulas esféricas (fig 8.43) dependen del ángulo de apertura,  $\theta$ , como sigue:

$\theta^\circ$	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
K	0.24	0.52	0.9	1.54	2.51	3.91	6.22	10.8	18.7	32.6	50.8	110	253
$\frac{A}{A_0}$	0.991	0.929	0.741	0.537	0.377	0.260	0.183	0.127	0.089	0.061	0.041	0.027	0.018

Para válvulas esféricas totalmente abiertas, véase la fig 8.44.

Para válvulas de mariposa o lenteja (fig 8.43), K vale

$\theta^\circ$	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	90
K	0.00	0.29	0.75	1.56	3.10	5.17	9.68	17.3	31.2	52.6	86	206	406	$\infty$
$\frac{A}{A_0}$	0.926	0.85	0.772	0.692	0.613	0.535	0.458	0.385	0.315	0.25	0.19	0.137	0.091	0

Si la válvula de mariposa está completamente abierta, el coeficiente de pérdida vale aproximadamente (ref 25)

$$K = t/d = \frac{\text{espesor de la hoja}}{\text{diámetro}} \quad (8.115)$$

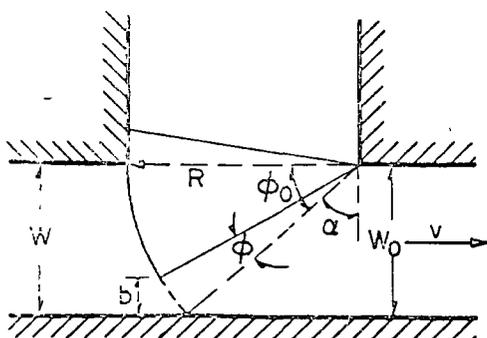
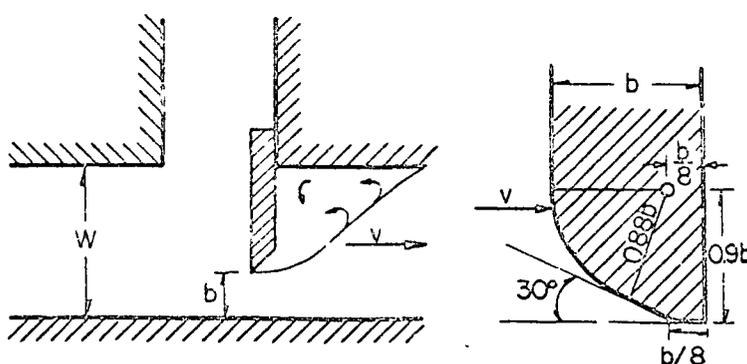


Fig 8.45



a)

b)

Fig 8.46

En el caso de que se utilice una compuerta de sector (fig 8.45) para controlar la descarga en una conducción a presión, el coeficiente de pérdida, según Abeljew (ref 36) vale

$$K = 0.3 + 1.3 \left( \frac{1}{n} - n \right)^2 \quad (8.117)$$

donde

$$n = \frac{\phi}{\phi_0}, \text{ con } \frac{n}{W} = 1 - \frac{\cos(C + \phi)}{\cos \alpha} \text{ y } R = \frac{W}{\cos C} \quad (8.118)$$

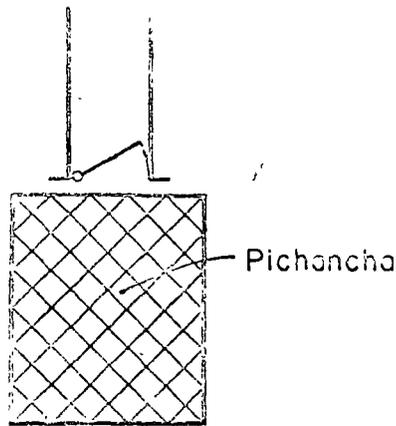
que se presenta tabulado a continuación

$\frac{\phi}{\phi_0}$	0.10	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	1.00
$b/W$	0.07	0.15	0.24	0.34	0.43	0.54	0.65	0.77	0.86	0.94	1.00
K	128	30.2	12.2	6.03	3.23	1.79	0.99	0.55	0.36	0.31	0.

Si se utilizan compuertas deslizantes como la mostrada en la fig 8.46, el coeficiente de pérdida depende no únicamente de la relación de abertura  $b/W$ , sino también de la forma del lado inferior de la compuerta. El coeficiente de pérdida vale

$b/W$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
K canto afilado	186.5	44.1	17.8	8.66	4.57	2.43	1.31	0.68	0.38	0.3
K canto redondo	—	23.2	10.8	4.95	2.7	1.48	0.96	0.58	0.36	0.24

Para válvulas de pie (fig 8.47) con pichanca completamente abierta, el coeficiente de pérdida depende del diámetro (ref 37)



D, en m	K	D, en m	K
0.040	12.9	0.20	5.2
0.050	10.0	0.25	4.4
0.065	8.8	0.30	3.7
0.080	8.0	0.35	3.4
0.100	7.0	0.40	3.1
0.125	6.5	0.45	2.8
0.150	6.0	0.50	2.5

Fig 8.47

Para calcular la pérdida de carga exclusivamente en la pichancho, el coeficiente vale (ref 43)

$$K = (0.675 \text{ a } 1.575) \left(\frac{A}{A_c}\right)^2 \quad (8.119)$$

donde

A área del tubo

A<sub>c</sub> área neta (únicamente las perforaciones de la pichancho)

Para una válvula check o de retención (fig 8.40), completamente abierta, el coeficiente de pérdida depende del diámetro (ref 37)

Den m	0.05	0.075	0.10	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.5
K	18	11	8	6.5	5.5	4.5	3.5	3	2.5	0.8

Si la válvula de retención está parcialmente abierta (fig 8.49) (ref 69),

δ°	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70
K	90	62	42	30	20	14	9.5	6.6	4.6	3.2	2.3	1.7

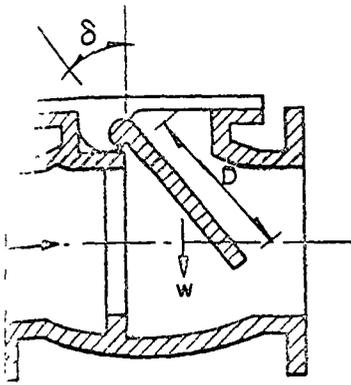


Fig 8.48 Válvula de retención

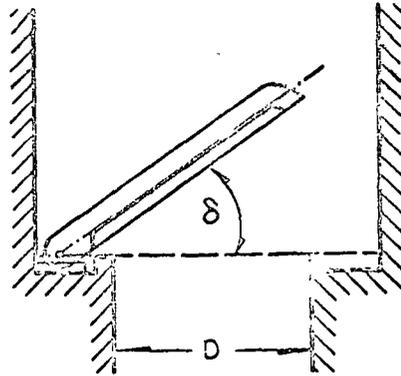


Fig 8.49 Válvula de retención

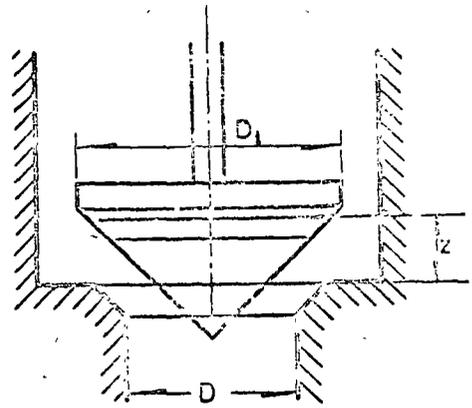


Fig 8.50 Válvula de alivio

Para válvulas de alivio (fig 8.50), resulta conveniente emplear la fórmula (ref 69)

$$K = 2.6 - 0.8 \frac{D}{z} + 0.14 \left(\frac{D}{z}\right)^2 \quad (8.120)$$

Si la válvula es semejante a la de la fig 8.51 (ref 18), entonces

$$K = 0.6 + 0.15 \left(\frac{d}{z}\right)^2 \quad (8.121)$$

Para válvula de chorro hueco (fig 8.52) el gasto vale, según la firma Voith (ref 26)

$$Q = \frac{c}{m^3x} 2.6 D^2 \sqrt{H_n} \quad \text{en sistema M K S} \quad (8.122)$$

donde  $e_{\text{máx}} = 0.5 D$  y  $H_n$  la energía neta antes de la válvula.

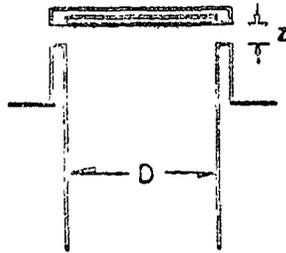


Fig 8.51

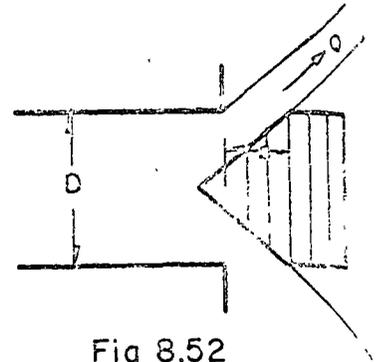


Fig 8.52

8.11.8 Pérdida por salida

La pérdida vale

$$h = K \frac{(V_a - V_2)^2}{2g} \quad (8.123)$$

donde K se obtiene de la siguiente tabla (ref 3C)(fig 8.53)

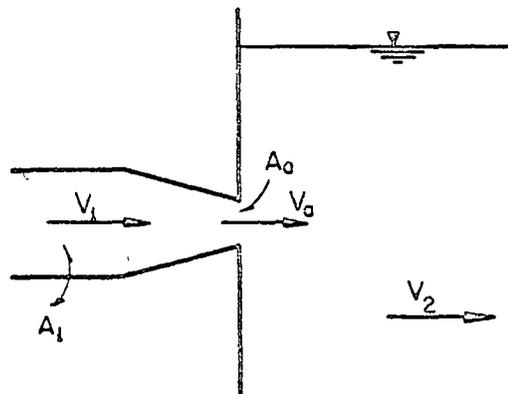


Fig 8.53

$\frac{A_a}{A_1}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
K	0.83	0.84	0.85	0.87	0.88	0.90	0.92	0.94	0.955	1

Si la descarga es a la atmósfera

$$h_a = \frac{V_a^2}{2g} \text{ para } A_a = A_1$$

## 8.11.9 Pérdidas por bifurcación

La pérdida de carga en una bifurcación de conductos depende, además del ángulo que forma la tubería secundaria con la tubería maestra, de la relación entre los diámetros de ambas tuberías y de la dirección de la corriente. Dicha pérdida es mayor en la unión que en la bifurcación (figs 8.54 a y b) y se expresa como un porcentaje de la carga de velocidad, demostrándose que el coeficiente  $K$  es independiente del número de Reynolds.

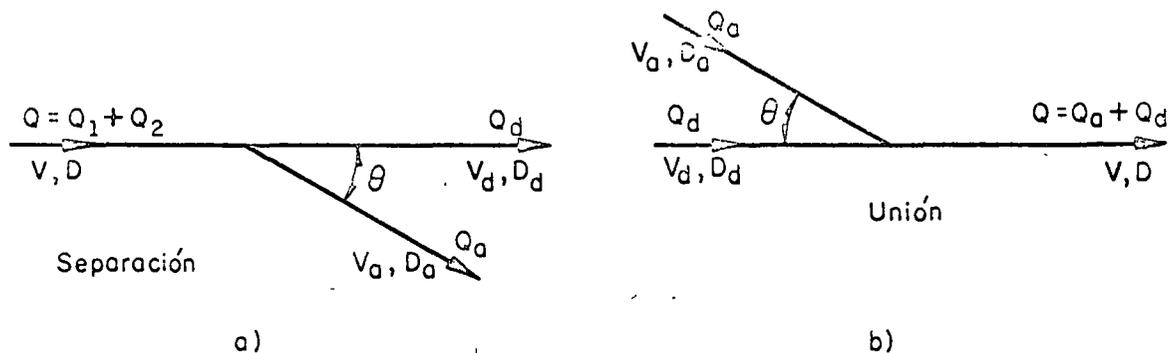


Fig 8.54

Los estudios de Vogel, Petermann y Kinne con bifurcaciones de piezas lisas cuyos cantos de entrada eran previamente redondeados, fueron realizados para tres diámetros y ángulos  $\theta$  diferentes, encontrando que las pérdidas de carga en el caso de separación y unión de tuberías, se pueden calcular en función de la carga de velocidad en la tubería que conduce el gasto total, con las fórmulas

$$h_a = K_a \frac{v^2}{2g}$$

$$h_d = K_d \frac{v^2}{2g}$$

donde los coeficientes  $K$  dependen de los ángulos  $\theta$  como sigue (ref 51)

$\frac{Q}{a}$	Separación				Unión			
	$\theta = 90^\circ$		$\theta = 45^\circ$		$\theta = 90^\circ$		$\theta = 45^\circ$	
	$K_0$	$K_d$	$K_0$	$K_d$	$K_0$	$K_d$	$K_0$	$K_d$
0.0	0.96	0.05	0.90	0.04	-1.20	0.05	-0.90	0.05
0.2	0.88	-0.08	0.68	-0.06	-0.40	0.16	-0.37	0.16
0.4	0.89	-0.04	0.50	-0.04	0.10	0.30	0.03	0.19
0.6	0.96	0.07	0.38	0.07	0.47	0.40	0.22	0.05
0.8	1.10	0.21	0.35	0.20	0.72	0.50	0.37	-0.16
1.0	1.29	0.35	0.48	0.33	0.92	0.60	0.36	-0.54

## CAPITULO 9. ANALISIS DE SISTEMAS DE TUBOS

9.1 Dispositivos de aforo en tuberías

El gasto en la sección de una tubería se puede medir indirectamente con dispositivos de aforo en el sitio en el que se desea conocer. Los más comunes son los venturímetros, toberas y diafragmas que se adaptan generalmente a tuberías de medianas y grandes dimensiones, en las que es necesario llevar un control de los gastos, como en el caso de redes de abastecimiento de agua.

La función básica de los venturímetros consiste en provocar un estrangulamiento en la sección transversal de la tubería o canal, la cual modifica las presiones. Con la medición de ese cambio es posible conocer el gasto que circula por la sección. El estrangulamiento de esta es muy brusca, pero la ampliación hasta la sección original es, por el contrario, gradual.

En la fig 9.1 se presenta el corte longitudinal de un venturímetro para una tubería, con algunos detalles sobre su geometría. En la fórmula se supone despreciable la pérdida de carga y también que los coeficientes de corrección  $C$  son iguales a 1.

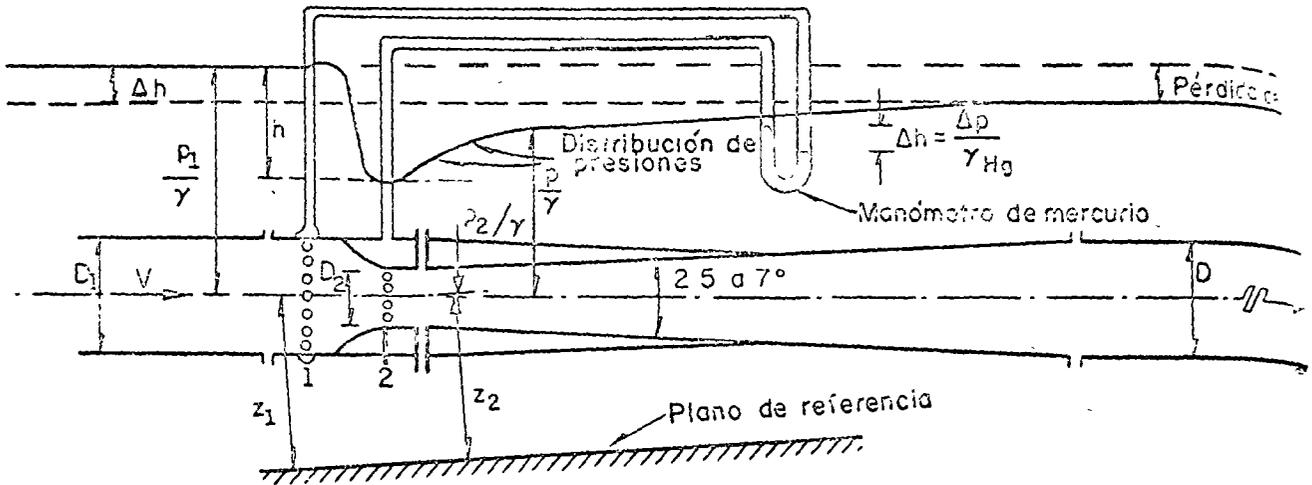


Fig 9.1 Venturímetro en una tubería

Con  $z_1$  y  $z_2$  como cargas de posición de las secciones 1 y 2 respecto de un plano de referencia cualquiera, la ecuación de Bernoulli resulta

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} \quad (9.1)$$

Por otra parte, de la ecuación de continuidad

$$V_1 = \frac{V_2 A_2}{A_1} \quad (9.2)$$

Con  $h = (z_1 + \frac{p_1}{\gamma}) - (z_2 + \frac{p_2}{\gamma})$ , sustituyendo la ec 9.2 en la

ec 9.1 se obtiene

$$V_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}}$$

y en términos de la deflexión en el manómetro de mercurio, el gasto teórico es

$$Q = \frac{A_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}} \sqrt{2gh} = \frac{A_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}} \sqrt{2g\Delta h \left(\frac{\gamma_m}{\gamma} - 1\right)}$$

Para corregir los errores cometidos, en la no inclusión de la pérdida de carga y que  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ , la ecuación anterior se afecta de un coeficiente  $C_c$ . Además, con

$$C_d = \frac{C_c}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}} = \frac{C_c}{\sqrt{1 - m^2}} \quad (9.3)$$

como  $m = \frac{A_2}{A_1}$  es el grado de estrangulamiento, se obtiene finalmente

$$Q = C_d A_2 \sqrt{2 g \Delta h \left(\frac{\gamma}{\gamma} m - 1\right)} \quad (9.4)$$

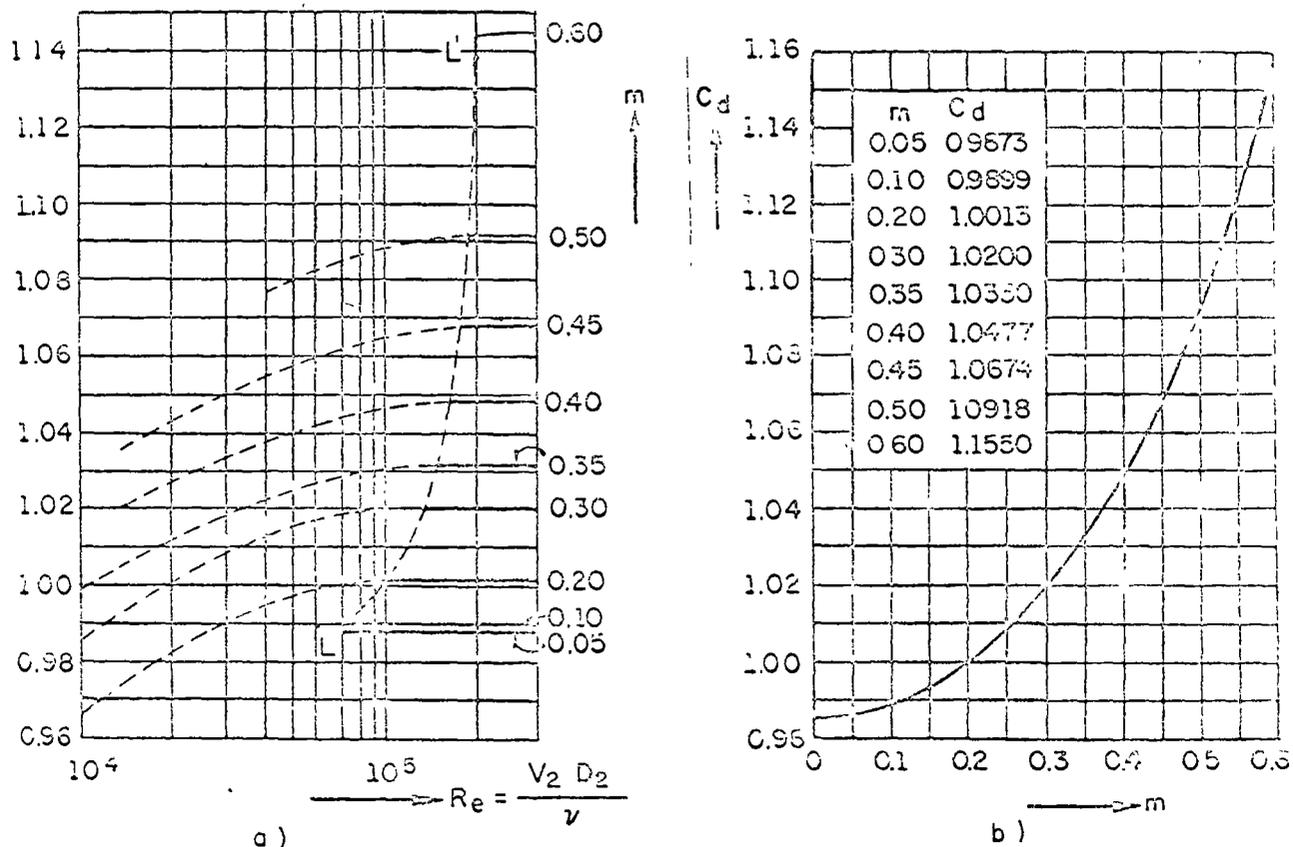


Fig 9.2 Coeficiente  $C_d$  para un venturímetro (ec 9.4)

Por un análisis dimensional (ver Apéndice A), se demuestra que el coeficiente  $C_d$  depende del grado de estrangulamiento  $m$ , de los efectos viscosos y rugosidad del tubo contenidos en los términos de pérdida de

carga y  $\alpha_1$ , y  $\alpha_2$  y además del tipo de venturímetros. Valores típicos medios fueron determinados experimentalmente y se presentan en la fig 9.2a (ref 69), la cual muestra que  $C_d$  depende de  $m$  y de  $Re$  hasta el límite fijado por la línea LL', a la derecha de la cual,  $C_d$  es independiente de  $Re$  y dependiente solo de  $m$ , como se presenta en la fig 9.2b. En estas figuras el número de Reynolds es

$$Re = \frac{V_2 D_2}{\nu}$$

donde  $D_2$  es el diámetro de la sección estrangulada,  $V_2$  la velocidad media en la misma, y  $\nu$  la viscosidad cinemática del líquido.

#### Problema 9.1

Un venturímetro tiene un diámetro a la entrada  $D_1 = 0.15$  m y un diámetro en el estrangulamiento  $D_2 = 0.075$  m. La deflexión en el manómetro de mercurio es de 0.15 m. Calcular el gasto para una temperatura del agua de 10°C.

Solución:

El peso específico del mercurio es  $\gamma_m = 13\,560$  kg/m<sup>3</sup> y la viscosidad cinemática del agua a 10°C es  $\nu = 0.013$  cm<sup>2</sup>/seg.

El área de las secciones transversales vale

$$A_1 = 0.785 \times (0.15)^2 = 0.01765 \text{ m}^2$$

$$A_2 = 0.785 \times (0.075)^2 = 0.00441 \text{ m}^2$$

El grado de estrangulamiento es

$$m = \frac{A_2}{A_1} = 0.25$$

Considerando inicialmente que  $C_d$  es independiente de  $Re$ , de la fig 9.2b se obtiene que  $C_d = 1.009$ . De la ec 9.4 resulta

$$Q = 1.009 \times 0.00441 \sqrt{19.6 \times 0.15 \left( \frac{13.56}{1} - 1 \right)}$$

$$Q = 0.0271 \text{ m}^3/\text{seg}$$

Para este gasto, la velocidad en la sección 2 sería

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0.0271}{0.00441} = 6.14 \text{ m/seg}$$

y el número de Reynolds

$$Re_2 = \frac{V_2 D_2}{\nu} = \frac{614 \times 7.5}{0.013} = 3.54 \times 10^5$$

Con este valor de  $Re$  y con  $m = 0.25$ , se obtiene el mismo valor  $C_d = 1.009$  de la fig 9.2a, lo cual comprueba el resultado obtenido para  $Q = 0.0271 \text{ m}^3/\text{seg}$ . En caso de haber obtenido un valor distinto de  $C_d$  en la fig 9.2a, con este nuevo coeficiente se corregiría el gasto y se obtendría otro  $Re$ , hasta ajustar todos los valores.

En tuberías donde se permita una gran pérdida de carga para efectuar el aforo, se pueden utilizar diafragmas para estrangular a la sección (fig 9.3). Estos consisten en una placa donde se practica un orificio de área  $A_0$  las cuales se insertan dentro de la tubería en una determinada sección. La modificación en las velocidades ocasiona un cambio de presiones antes y después del diafragma, cuyo valor determina el gasto.

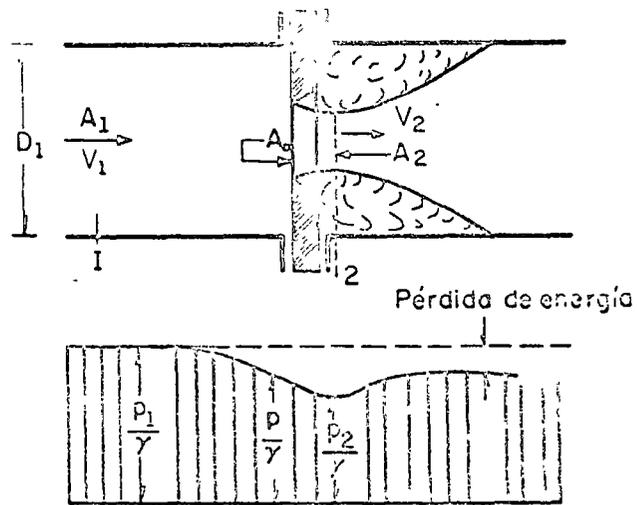


Fig 9.3 Difragma

Las ecuaciones de continuidad y de Bernoulli para las secciones 1 y 2 de la fig 9.3 son

$$V_1 = \frac{A_2}{A_1} V_2$$

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

Con sustituciones análogas que en el venturímetro, el gasto teórico es

$$Q = \frac{A_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}} \sqrt{2g \frac{(p_1 - p_2)}{\gamma}}$$

Con los coeficientes de contracción  $C_c = \frac{A_0}{A_2}$  y de abertura  $C_d = \frac{A_0}{A_1}$ , de la ecuación anterior se obtiene

$$Q = \frac{C_c A_0}{\sqrt{1 - C_c^2 C_d^2}} \sqrt{2g \frac{(p_1 - p_2)}{\gamma}}$$

El gasto real es más pequeño al incluir el coeficiente de gasto  $C_d$  y midiendo además la diferencia de presiones en términos de la deflexión  $\Delta h$  en un manómetro de mercurio, el gasto real es finalmente

$$Q = C_d A_o \sqrt{2 g \Delta h \left( \frac{\gamma_M}{\gamma} - 1 \right)} \quad (9.5)$$

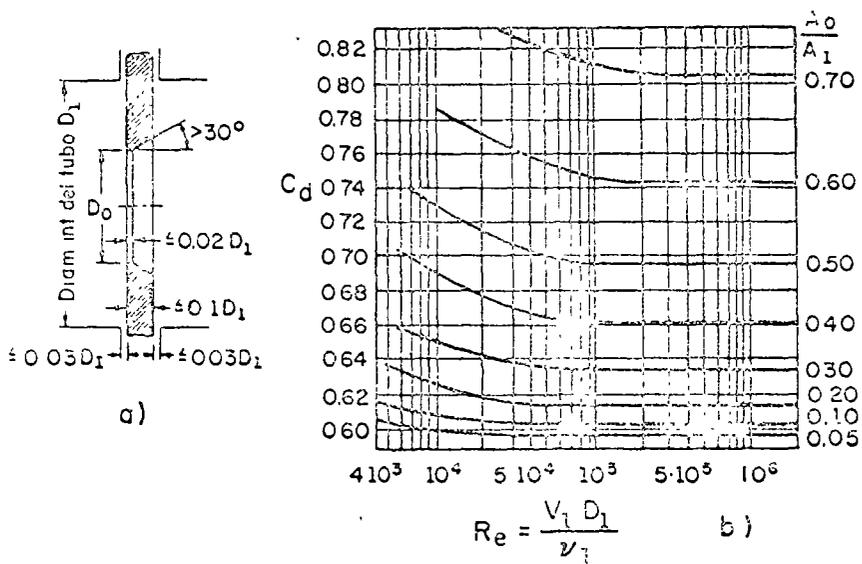


Fig 9.4 Orificio VDI y coeficientes de gasto (ref 39)

El coeficiente  $C_d$  depende no solo de la geometría del diafragma y de la rugosidad de las paredes, sino también del número de Reynolds que incluye el efecto de viscosidad del flujo. De la fig 9.4 se pueden obtener los valores de  $C_d$  para el diafragma tipo VDI estándar de la NACA. Para este tipo de diafragma, las tomas piezométricas deben quedar localizadas 2.5 cm antes y después de la placa. Se observa que para  $Re \geq 10^3$ ,  $C_d$  es prácticamente independiente de  $Re$ .

En el caso de tuberías con diámetros mayores de 30 cm, se emplean toteras en lugar de diafragmas. Dos formas comúnmente usadas se muestran en las figs 9.5a y 9.6. La primera ha sido estudiada y sus dimensiones especificadas por la Verein Deutscher Ingenieure (VDI), cuya forma elimina el coeficiente de contracción haciéndolo igual a uno. Esto es, las dimensiones

del orificio coinciden con las del área contraída de la fig 9.3 y vale la ec 9.5 con la única salvedad que  $A_0 = A_2$ . De la fig 9.4b se puede obtener el valor de  $C_d$  en la ecuación

$$Q = C_d A_2 \sqrt{2g \Delta h \left( \frac{\gamma_m}{\gamma} - 1 \right)} \quad (9.3)$$

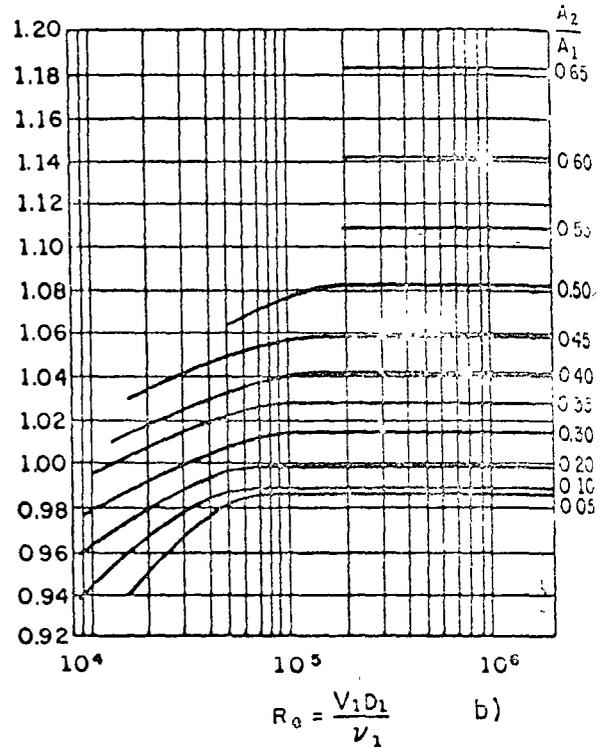
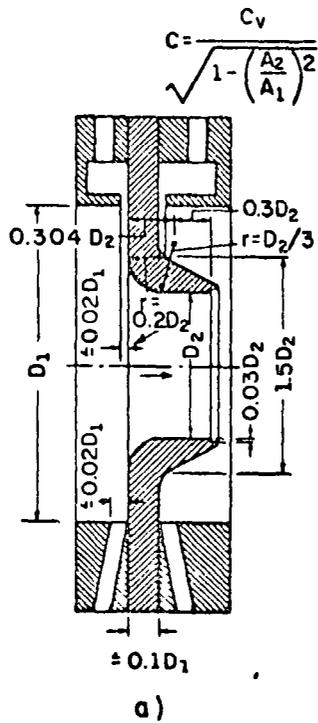


Fig 9.5 Tobera VDI y sus coeficientes de gasto (ref 39)

Para la tobera de la fig 9.6,  $C_d$  varía aproximadamente entre 0.95 para  $Re_2 = V_2 D_2 / \nu = 10^3$  hasta 0.90 para  $Re_2 = 10^5$ , a partir del cual conserva constante este último valor.

Problema 9.2

Determinar el gasto en una tubería de 0.15 m de diámetro en la cual se ha insertado una tobera de 0.10 m de diámetro. El manómetro diferencial de mercurio marca una deflexión de 0.25 m y la temperatura del agua es de 15°C.

Solución:

De los datos se obtiene que  $A_2 = 0.00785 \text{ m}^2$ ,  $A_1 = 0.01765 \text{ m}^2$

y para agua a  $15^{\circ}\text{C}$   $\nu = 0.0114 \text{ cm}^2/\text{seg}$  y  $A_2/A_1 = 0.444$ . Suponiendo inicialmente que  $C_d$  no depende de  $Re$ , de la fig 9.5b  $C_d = 1.056$  y de la ec 9.6 el gasto vale

$$Q = 1.056 \times 0.00705 \sqrt{19.6 \times 0.25 \left( \frac{13.56}{1} - 1 \right)} = 0.065 \text{ m}^3/\text{seg}$$

Entonces

$$V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0.065}{0.01765} = 3.69 \text{ m/seg}$$

y el número de Reynolds es

$$Re = \frac{V_1 D_1}{\nu} = \frac{369 \times 15}{0.0114} = 4.86 \times 10^5$$

De la fig 9.5b resulta que  $C_d$  es efectivamente independiente de  $Re$  y el gasto es  $0.065 \text{ m}^3/\text{seg}$ .

Otro tipo de aforador es el llamado "de codo" y consiste en medir la diferencia de presiones que se genera entre el intrados y el extrados de una curva en una tubería. En la fig 9.7 se detalla la disposición de las tomas piezométricas.

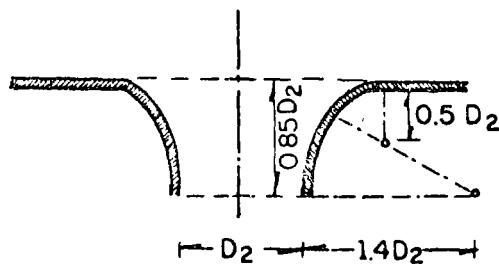


Fig 9.6 Tobera

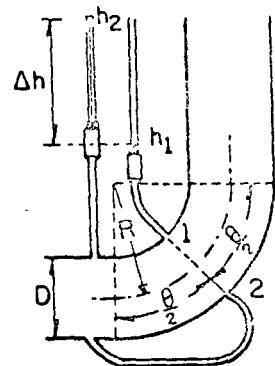


Fig 9.7 Aforador de codo

El gasto se obtiene de la ecuación

$$Q = C_d K A \sqrt{2 g \Delta h} \quad (9.7)$$

donde A es el área de la tubería,  $\Delta h = h_2 - h_1$ , la diferencia en cargas de presión (expresada en metros de columna de agua) entre el extrados y el intrados,  $g$  la aceleración de la gravedad,  $C_d$  y K son coeficientes sin dimensiones, el primero de gasto y el segundo de forma que dependen de la relación R/D radio del codo a diámetro del tubo, de acuerdo con la tabla 9.1.

TABLA 9.1 COEFICIENTES K PARA EL AFORADOR DE CODO (SEGUN ADDISON (REF 28))

R/D	1.0	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00
$C_d$	1.23	1.10	1.07	1.05	1.04	1.03	1.03	1.02	1.02
K	0.570	0.697	0.794	0.880	0.954	1.02	1.02	1.14	1.20

## 9.2 Conducto sencillo

Es el más sencillo de los sistemas. Consiste en un conducto único alimentado en el extremo aguas arriba por un recipiente o una bomba con descarga libre o a otro recipiente. El conducto puede tener cambios geométricos u obstrucciones que producen pérdidas locales de energía, además de la propia de fricción.

En la fig 9.8 se muestra el comportamiento de las líneas de energía y gradiente hidráulico para el tubo que conecta dos recipientes. Ambas líneas interpretan el significado físico de la ecuación de la energía (inciso 4.4.4). En la fig 4.14 se presenta el sistema alimentado por una bomba.

Para el análisis del conducto sencillo se utiliza la ecuación de continuidad y la de energía. La primera establece la invariabilidad del gasto en cualquier sección  $i$  del conducto

$$Q = A_i V_i$$

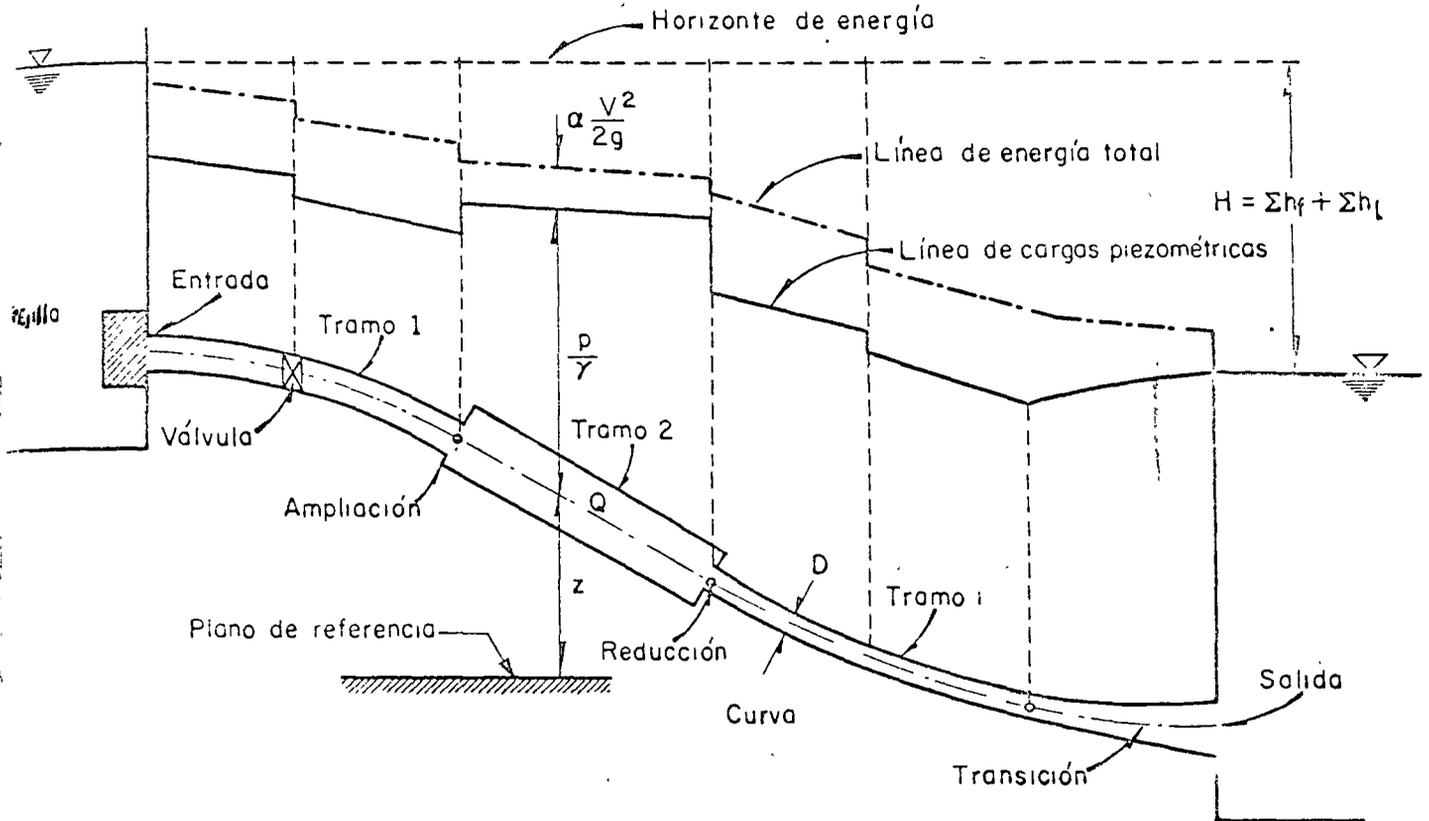


Fig 9.8 Conducto sencillo

La segunda establece la constancia de la energía entre dos secciones transversales 1 y 2 del conducto, para lo cual se acepta, usualmente, que el coeficiente de Coriolis en dichas secciones valga uno. Esto

es

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \sum_1^2 h_f + \sum_1^2 h_l$$

$\sum_1^2 h_f$  suma de las pérdidas de fricción  $h_f$  en cada tramo de la sección 1 a la 2

$\sum_1^2 h_l$  suma de las pérdidas locales que ocurren de la sección 1 a la 2 debidas a entrada, cambios de sección, válvulas, etc.

Los dos términos se expresan en razón de la carga de velocidad dentro del tramo de sección constante si la pérdida es de fricción, o aguas abajo del punto donde se produce la pérdida local. Por esta razón, la ecuación de la energía contendrá los valores de la velocidad en distintas secciones del conducto, mismos que se pueden sustituir por la velocidad en un solo tramo utilizando la ecuación de continuidad.

Si en el sistema de la fig 9.8, el recipiente de aguas abajo no existe, es decir, si el conducto descarga libremente a la atmósfera, el desnivel  $H$  se mide como la diferencia de niveles entre la superficie libre en el depósito superior y el centro de gravedad de la sección final del tubo. En cualquier caso, dicho desnivel será

$$H = \sum h_f + \sum h_l$$

Se presentan dos tipos de problema:

a) Revisión. Conociendo  $H$ , la geometría y rugosidad del tubo se desea calcular el gasto.

Solución:

Supuesto que se desconoce la zona de flujo (laminar, transición o turbulento) en la que trabaja el tubo, la velocidad y los coeficientes de pérdida son incógnitas. Si la sección 1 se elige dentro del depósito superior y la 2 dentro del inferior, de tal manera que la velocidad de

llegada sea despreciable, de la ecuación de la energía

$$H = \left( z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} \right) - \left( z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) = \frac{V_s^2}{2g} + \sum_1^2 h_f + \sum_1^2 h_l$$

en que  $V_s$  es la velocidad en la sección final de la tubería.

Por la fórmula de Darcy - Weisbach y de pérdidas menores

$$H = \frac{V_s^2}{2g} + \left( f_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{V_1^2}{2g} + f_2 \frac{L_2}{D_2} \frac{V_2^2}{2g} + \dots \right) + \left( K_1 \frac{V_1^2}{2g} + K_2 \frac{V_2^2}{2g} + \dots \right)$$

y debido a que  $V_s A_s = V_i A_i$

$$H = \frac{V_s^2}{2g} \left( 1 + \frac{f_1 L_1}{D_1} \frac{A_s^2}{A_1^2} + \frac{f_2 L_2}{D_2} \frac{A_s^2}{A_2^2} + \dots + K_1 \frac{A_s^2}{A_1^2} + K_2 \frac{A_s^2}{A_2^2} + \dots \right)$$

la velocidad en la sección final vale

$$V_s = \sqrt{\frac{2gH}{1 + \sum_{i=1}^n \left( \frac{f_i L_i}{D_i} \frac{A_s^2}{A_i^2} + K_i \frac{A_s^2}{A_i^2} \right)}} \quad (9.8)$$

y el gasto

$$Q = V_s A_s$$

Puesto que se conoce  $\epsilon_i/D_i$ , se puede estimar un valor para  $\underline{ca}$  da  $f_i$  por inspección del diagrama de Moody, el cual al sustituirse en la ec 9.8 se determina el gasto. De este,  $V_i = 4Q/\pi D_i$  y los números de Reynolds, se obtienen nuevos valores  $f_i$  repitiendo el proceso.

b) Diseño. Conociendo  $H$ , la geometría (con excepción de uno de los diámetros), la rugosidad y el gasto, se desea calcular uno de los diámetros (con más de un diámetro como incógnita, la solución es imposible).

Solución:

Igual que el problema anterior, se utiliza la ec 9.8, estimando  $f$  y  $D$  desconocidos que se sustituyen reiteradamente hasta obtener el costo. Este problema es poco común.

De la ec 9.8, con las pérdidas locales despreciables

$$Q = \frac{\pi \sqrt{g H}}{4 f L/D^5}$$

$$D = \sqrt[5]{\frac{8 L Q^2}{\pi^2 H f}} = \sqrt[5]{\frac{0.0827 L Q^2}{H} f} \quad (9.9)$$

también en el número de Reynolds

$$Re = \frac{V D}{\nu} = \frac{4 Q}{\pi \nu} \frac{1}{D} = \frac{C_2}{D} \quad (9.10)$$

en el que se conoce

$$C_2 = 4 Q / \pi \nu$$

La solución consiste en los siguientes pasos:

- Se estima un valor de  $f$  (por ejemplo 0.02)
- Se calcula  $D$  de la ec 9.9
- Se calcula  $Re$  de la ec 9.10
- Con  $Re$  y  $\epsilon/D$ , del diagrama de Moody se determina un nuevo valor de  $f$
- Con el nuevo valor de  $f$  se repite el procedimiento hasta que esta no cambie en más de dos ciclos sucesivos.

### Problema 9.3 (ref 46)

En la fig 9.9 se presenta una tubería para la descarga de fondo de una presa con una derivación lateral. Los datos son:  $H_0 = 150$  m,

$L_E = 20 \text{ m}$ ,  $L_O = 60 \text{ m}$ ,  $L_1 = 40 \text{ m}$ ,  $d_o = 4 \text{ m}$ ,  $d_1 = 3 \text{ m}$ ,  $d_2 = 2 \text{ m}$ ,  $A_o = 12.57 \text{ m}^2$ ,  
 $A_1 = 7.07 \text{ m}^2$ ,  $A_2 = 3.14 \text{ m}^2$ ,  $A_o = 120 \text{ m}^2$ ; rejillas con  $s/b = 0.1$ ,  $C_f = 1.67$   
 y  $\theta = 70^\circ$ ; en la compuerta de emergencia  $A_N = 30 \text{ m}^2$ , ancho de escotadoras  
 $b/h = 0.2$ , rugosidad del tubo  $\epsilon = 0.5 \text{ mm}$ .

Determinar el gasto  $Q$  de la tubería, supuesto que se cierra el paso a la derivación lateral.

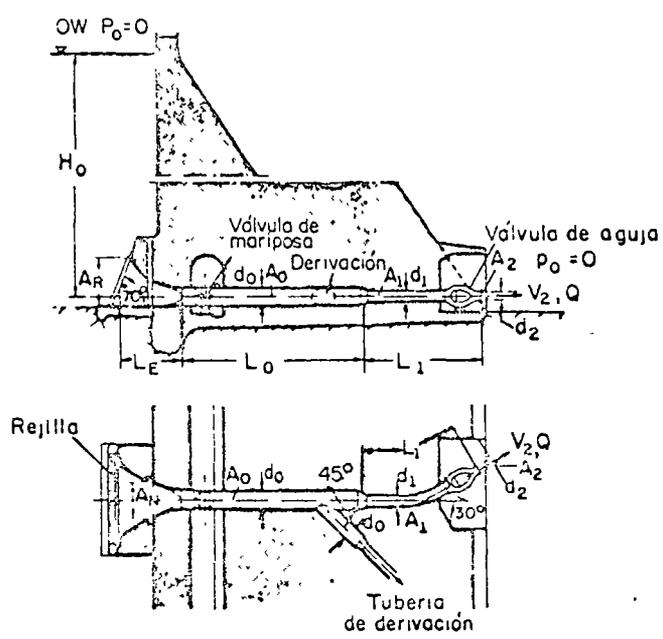


Fig 9.9 Descarga libre del desague de fondo del problema 9.3

Solución:

Se aplica la ec 9.8, donde  $H = H_o$  para descarga libre.

Los diferentes términos se valúan como sigue:

1. Rejilla.  $K = 0.073$  según la ec 8.106, reducido con  $A_2/A_R = 0.0262$ , resulta 0.00005.
2. Reducción después de la rejilla. Se usa el criterio del cono equivalente.

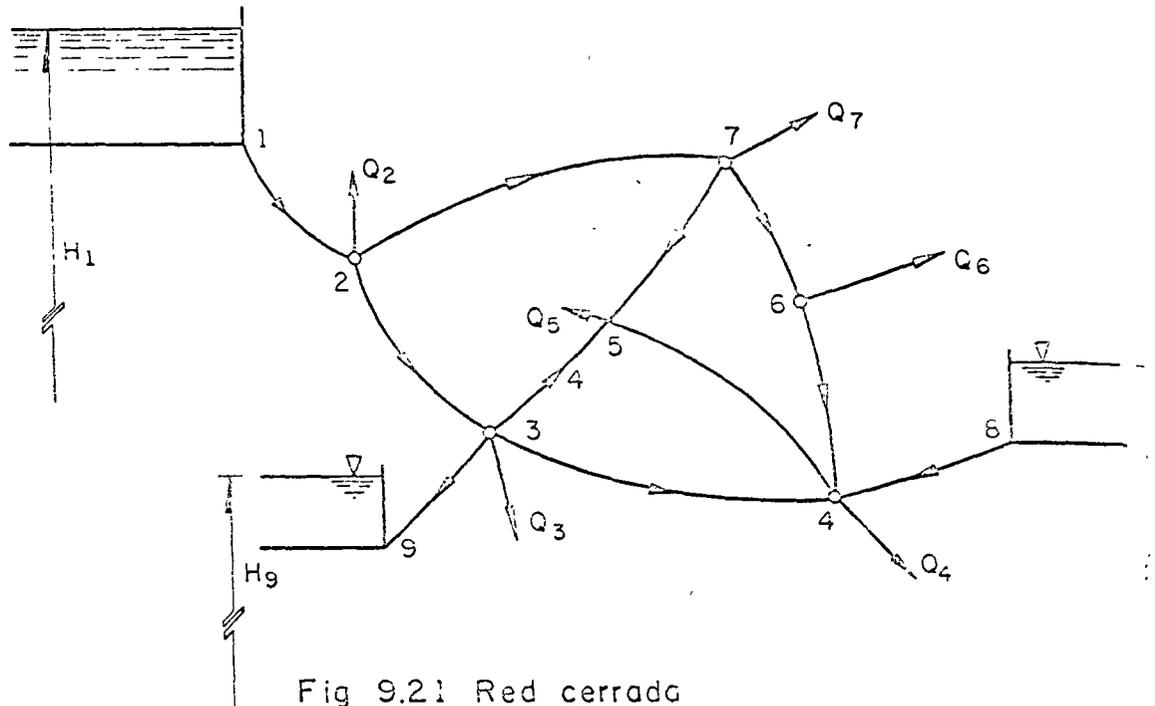


Fig 9.21 Red cerrado

El símbolo  $\sum_{j \in i}$  se lee: "para todos los nudos  $j$  conectados al  $i$  a través de un tubo". Por ejemplo, si el sentido de los gastos fuera el indicado en la fig 9.21, la ec 9.17 para el nudo 3 indicaría que

$$-Q_{35} - Q_{34} - Q_{39} + Q_{32} - Q_3 = 0$$

donde el gasto  $Q_3$  es conocido.

b) Ecuación de pérdida. La pérdida por fricción en cada tramo está dada por la fórmula de fricción correspondiente, en la que al sustituir a la velocidad

$$V_{ij} = \frac{4 Q_{ij}}{\pi D_{ij}^2}$$

resulta

$$h_{ij} = a_{ij} Q_{ij}^N \quad (9.18)$$

donde  $a_{ij}$  es una constante del tramo  $ij$ . Por ejemplo, si la fórmula de fricción usada en la de Darcy-Weisbach, se tiene

$$h_{ij} = \frac{8 f_{ij} L_{ij}}{\pi^2 g D_{ij}^5} Q_{ij}^2$$

Esto es,  $N = 2$ , y

$$a_{ij} = \frac{8 f_{ij} L_{ij}}{\pi^2 g D_{ij}^5} Q_{ij}^2$$

en cambio, si fuese la de Hazen-Williams,  $N = 1.851$  y

$$a_{ij} = \frac{L_{ij}}{(0.279 C_{Hij} D_{ij}^{2.63})^{1.851}}$$

La utilización de las ecs 9.17 y 9.18 para la solución de una red conduce a un sistema de ecuaciones que es posible resolver por un método de iteraciones, o con computadora, con base en la estimación de valores iniciales, los cuales se aproximan a la solución exacta mediante correcciones cíclicas.

Existen en los factores iniciales tres posibilidades a escoger:

1. Estimación de los valores de  $Q_{ij}$
2. Estimación de los valores  $h_{ij}$
3. Estimación simultánea de valores de  $Q_{ij}$  y  $h_{ij}$

Se presentarán aquí las dos primeras que son las más comunes. La última es poco frecuente, y para ella se utiliza el método de McIlroy, el cual se presenta en la ref 6.

Con el fin de hacer posible el cálculo, se limita la aplicación de los métodos de iteración a redes de abastecimiento de agua por grupos, a conductos de distribución principal de redes locales en forma de anillos cerrados o a zonas parciales de una red local reuniendo las demandas de cada usuario en grupos.

#### 9.5.2 Método de Cross para el balance de pérdidas

En una red cerrada cualquiera, se eligen circuitos elementales como los formados en la fig 9.21, por ejemplo, el circuito 2-7-5-3-2 mostrado en la fig 9.22, en los cuales se conocen los gastos  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  que entran o salen de cada nudo.

En cada nudo se satisface la ec 9.17. Además, la pérdida de carga entre dos nudos de la red (cualquiera que sea el recorrido que se elige para llegar de uno a otro) es la suma algebraica de las pérdidas en cada tramo (calculadas con la ec 9.18). Para ello, es necesario también establecer una convención de signos, por ejemplo: la pérdida en un determinado tramo tiene signo positivo si la dirección del gasto en el tramo coincide con la del recorrido, y negativo en caso contrario.

El recorrido completo en cada circuito elemental (partiendo y llegando al mismo nudo) implica que

$$\sum_{i=1}^k h_{i,j} = 0 \quad (9.19)$$

donde  $k$  es el número de tramos que forma el circuito elemental. Para el recorrido de cada circuito es necesario especificar que sea siempre con el mismo sentido, por ejemplo, el sentido horario.

La ec 9.19 es llamada ecuación de circuito y vale para todos los circuitos elementales de la red.

Para proceder a la solución, primero se estiman los gastos en los tramos, haciendo que se satisfaga la ecuación de nudo con los valores

estimados y los ya conocidos. Si  $\Delta Q$  es una corrección atribuible a todos los tramos de un mismo circuito elemental (fig 9.22), al recorrer este en el sentido horario, la ec 9.19 implica que

$$n_{72} + n_{57} + n_{53} + n_{32} = a_{72} (n_{72} + \Delta Q)^N + a_{57} (n_{57} + \Delta Q)^N - a_{53} (n_{53} - \Delta Q)^N - a_{32} (n_{32} - \Delta Q)^N = 0$$

Por un desarrollo en forma de binomio, donde se desprecian términos de orden superior, resulta

$$Q = - \frac{a_{72} Q_{72}^N + a_{57} Q_{57}^N - a_{53} Q_{53}^N - a_{32} Q_{32}^N}{N (a_{72} Q_{72}^{N-1} + a_{57} Q_{57}^{N-1} + a_{53} Q_{53}^{N-1} + a_{32} Q_{32}^{N-1})}$$

o bien, en el caso general  $k$

$$Q = - \frac{\sum_{i,j}^k (a_{ij} Q_{ij}^{N-1} Q_{ij})}{N \sum_{i,j}^k |a_{ij} Q_{ij}^{N-1}|} \quad (9.20)$$

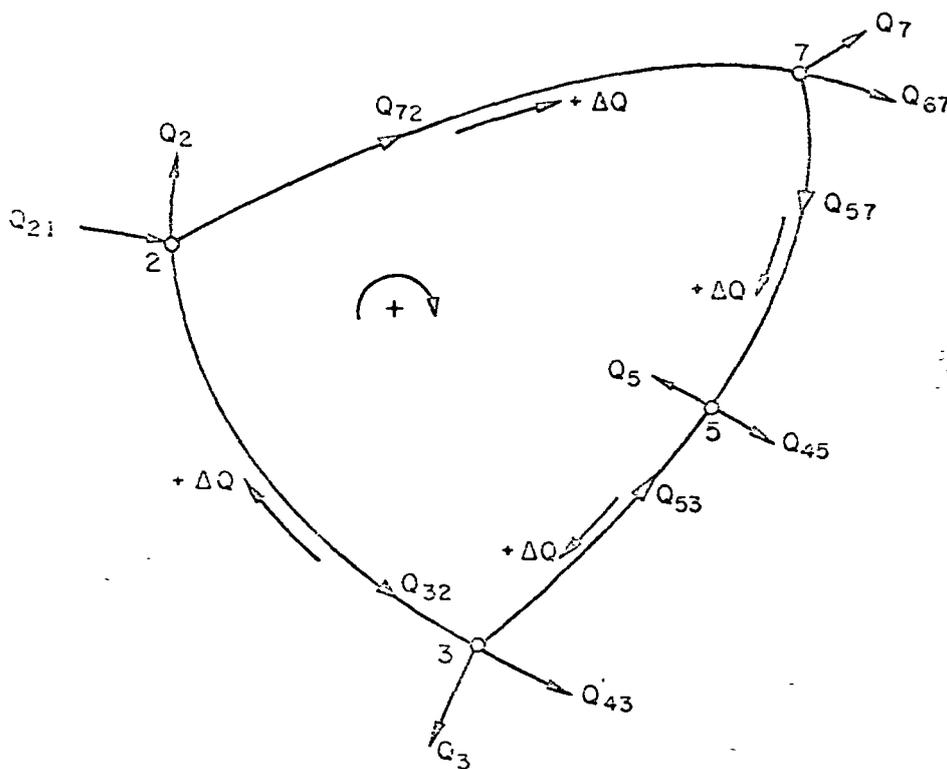


Fig 9.22 Circuito elemental

donde el gasto  $Q_{ij}$  y la corrección  $\Delta Q$  son positivos cuando su sentido coincide con el de recorrido del circuito en el sentido horario, o negativo en caso contrario. La iteración se realiza hasta que se satisfaga la ecuación de circuito.

La rapidez en la convergencia del método es muy diversa y depende tanto de la estimación de los valores iniciales, como del tipo y tamaño de la red, pero especialmente del número de tramos que se unen en cada nudo. Mientras que en redes pequeñas se alcanza una buena exactitud con tres o cuatro iteraciones, en redes grandes se suelen necesitar de treinta a cincuenta. La computadora hace económico el cálculo.

Se puede acelerar la convergencia del método, si el valor de la corrección  $\Delta Q$  en cada paso se multiplica por un factor  $\alpha$  (que varía entre 0.50 y 1.00) cuya magnitud depende del tipo de red y del grado de exactitud deseada.

El problema se presenta como sigue:

Conocidos

1. Longitud, diámetro y rugosidad de los tubos
2. Gastos que entran o salen de la red

Se desean

1. Los gastos de todos los tramos
2. Las cargas de presión en los nudos de la red

La secuela de pasos se explica a continuación, aunado con las columnas de una tabla auxiliar cuando el cálculo es en forma manual (prob 9.13. tabla 9.2).

1. División de la red en circuitos elementales (cols 1 y 2). Registro de los valores conocidos (cols 3 y 4) y cálculo de las constantes  $a$  (col 5)

2. Primera estimación del gasto en todos los tramos (col 6)

3. Multiplicación de los valores de  $a$  por los gastos correspondientes en el primer circuito (col 7)

4. Multiplicación de los productos  $A_1$  de la col 7 por los gastos correspondientes  $Q$  del primer circuito, obteniendo la pérdida  $h$ , cuyo signo corresponde al del gasto  $Q$  (col 8)

5. Suma algebraica de  $\sum h = \sum a_i \cdot Q_i^2$  en el primer circuito (col 8)

6. Suma absoluta de los valores de  $a_i \cdot Q_i$  en el primer circuito (col 7)

7. La corrección resulta de

$$\Delta Q = - \frac{\sum a_i Q_i^2}{\sum |a_i Q_i|}$$

y se anota con su signo en todos los tramos de un mismo circuito (col 9)

8. En tramos que pertenecen a dos circuitos, se deben agregar las correcciones que resulten del siguiente circuito, con signo contrario (col 9)

9. El cálculo en los siguientes circuitos se hace en la forma indicada en los pasos 3 a 8, hasta terminar la primera etapa de distribución en toda la red.

10. Se hace la suma de los gastos estimados más las correcciones, y se realiza una segunda etapa en la misma forma.

11. El cálculo finaliza cuando las correcciones  $\Delta Q$  alcancen el grado de corrección deseado.

Si se consideran como incógnitas los diámetros y los gastos de cada tramo, una vez calculados estos se pueden obtener las cargas de presión en cada nudo a partir de las fórmulas de pérdida. Para una red compuesta de  $k$  tramos y  $m$  nudos, el número de incógnitas es entonces

$$I = 2k$$

Para el cálculo de las  $I$  incógnitas, existen  $E$  ecuaciones disponibles. Las de nudo proporcionan  $m - 1$  ecuaciones, ya que la ecuación para el último nudo resulta de las anteriores. Las de circuito proporcionan  $l$  ecuaciones para  $l$  circuitos elementales.

Se considera que el número de circuitos es

$$l = k - m + 1$$

el número de ecuaciones es

$$E = (m - 1) + (k - m + 1) = k$$

De la comparación entre  $I$  y  $E$  resulta que se deben escoger  $m$  de las incógnitas para resolver el problema, esto es, los diámetros o los gastos.

### Problema 9.13

La red mostrada en la fig 9.23 tiene la geometría indicada y a ella llegan o salen los gastos también mostrados. Las constantes  $a$  se calculan a partir de la fórmula de Kutter con un coeficiente  $m = 0.20$  (tubos de acero) y para  $N = 2$

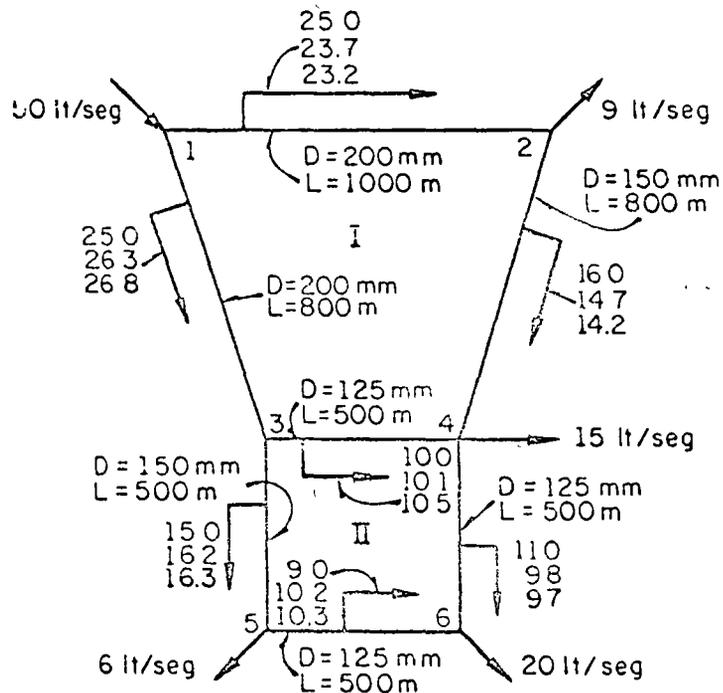


Fig 9.23 Red del problema 9.13.

Se presenta en la tabla 9.2. En la fig 9.23 se muestran los diferentes ajustes que experimentaron los gastos estimados, así como el sentido de los mismos.

TABLA 9.2 PROCESO DE CALCULO DEL PASE 9.13

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Circuito	Tramo	D mm	L m	$a \times 10^{-3}$ seg <sup>2</sup> /m <sup>5</sup>	$Q \times 10^{-3}$ m <sup>3</sup> /seg	$a Q $ seg/m <sup>2</sup>	$aQ^2 \times 10^3$ m	$\Delta Q \times 10^3$ m <sup>3</sup> /seg
I	1-2	200	1000	7.27	+25.0	182	+4545	-1.3
	2-4	150	800	28.20	+15.0	451	+7220	-1.3
	4-3	125	500	48.25	-10.0	483	-4825	-1.3+1.2
	3-1	200	800	5.81	-25.0	145	-3630	-1.3
						1261	+3310	
						$\Delta Q = - \frac{+ 3310}{2 \times 261} = - 1.3$		
II	4-6	125	500	48.25	+11.0	531	+5845	-1.2
	6-5	125	500	48.25	- 9.0	435	-3910	-1.2
	5-3	150	500	17.65	-15.0	265	-3970	-1.2
	3-4	125	500	48.25	+10.0+1.3	545	+6160	-1.2
						1776	+4125	
						$\Delta Q = - \frac{+ 4125}{2 \times 1776} = - 1.2$		

10	11	12	13	14	15	16	17	18	
$Q \times 10^3$ m <sup>3</sup> /seg	$a Q $ seg/m <sup>2</sup>	$aQ^2 \times 10^3$ m	$\Delta Q \times 10^3$ m <sup>3</sup> /seg	$Q \times 10^3$ m <sup>3</sup> /seg	$a Q $ seg/m <sup>2</sup>	$aQ^2$ m	$\Delta Q$ m <sup>3</sup> /seg	$Q$ m <sup>3</sup> /seg	
+23.7	172	+4080	-0.5	+23.2	169	+3910	-0.0	+0.0232	
+14.7	415	+6085	-0.5	+14.2	400	+5630	-0.0	+0.0142	
-10.1	486	-4920	-0.5+0.1	-10.5	508	-5325	-0.0+0.0	-0.0105	
-26.3	153	-4010	-0.5	-26.8	155	-4160	-0.0	-0.0263	
1228 +1235				1232 +105					
$\Delta Q = - \frac{+ 1235}{2 \times 1228} = - 0.5$				$\Delta Q = - \frac{+ 105}{2 \times 1232} = - 0.0$					
+ 9.6	474	+4645	-0.1	+ 9.7	469	+4550	-0.0	+0.0097	
-10.2	492	-5020	-0.1	-10.3	497	-5120	-0.0	-0.0103	
-16.2	286	-4630	-0.1	-16.3	288	-4685	-0.0	-0.0163	
-10.1+0.5	512	+5430	-0.1	+10.5+0.0	507	+5325	-0.0	+0.0105	
1764 + 420				1761 + 70					
$\Delta Q = - \frac{+ 420}{2 \times 1764} = - 0.1$				$\Delta Q = - \frac{+ 70}{2 \times 1761} = - 0.0$					

### 9.5.3 Método de Cornish para el balance de gastos (ref 6)

Se conocen las cargas de presión en los nudos a los cuales llegan gastos  $(+Q_{ij})$ , o salen gastos  $(-Q_{ij})$ . Se desean obtener dichos gastos y las pérdidas en los tramos o las cargas piezométricas en los mismos (fig 9.24).

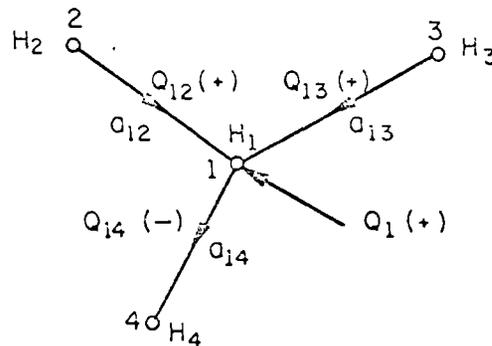


Fig 9.24 Designaciones para las condiciones de nudo en el método de Cornish

Las pérdidas en los tramos  $h_{ij}$  se estiman inicialmente y se corrigen por iteraciones a partir de los gastos que llegan o salen del nudo.

La condición de nudo implica que se satisfaga la ec 9.17.

Por otra parte, si  $h_{ij}$  representa la pérdida de carga en el tramo del nudo  $j$  al  $i$  y  $H_i$  la carga piezométrica en el nudo  $i$ , se tiene

$$Q_{ij} = \left( \frac{h_{ij}}{a_{ij}} \right)^{1/N} = C_{ij} (H_j - H_i)^{1/N} \quad (9.21)$$

donde

$$C_{ij} = \frac{1}{(a_{ij})^{1/N}} \quad (9.22)$$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones 9.17 es

$$\sum_{j \in i} \left( \frac{h_{ij}}{a_{ij}} \right)^{1/N} + Q_i = 0, \text{ para } i = 1, \dots, n \quad (9.23)$$

Si  $\Delta h_i$  es la corrección de la carga piezométrica en el nudo  $i$  en alguna etapa de la iteración, la ecuación correspondiente a ese nudo sería

$$\sum_{j \in i} \left( \frac{h_{ij} + \Delta h_i}{a_{ij}} \right)^{1/N} + Q_i - \sum_{j \in i} \left( \frac{h_{ij} + \Delta h_i}{r_{ij}/Q_{ij}^N} \right)^{1/N} + Q_i = \sum_{j \in i} Q_{ij} \left( 1 + \frac{\Delta h_i}{h_{ij}} \right)^{1/N} + Q_i = 0$$

donde el signo de cada término de la suma se elige de modo que sea positivo cuando el gasto es hacia el nudo y negativo en caso contrario.

Desarrollando el radical como un binomio y despreciando los términos de orden superior, se obtiene

$$\sum_{j \in i} Q_{ij} \left( 1 + \frac{1}{N} \frac{\Delta h_i}{h_{ij}} \right) + Q_i = 0$$

Por lo tanto, la corrección de la carga de presión en el nudo  $i$  es

$$\Delta h_i = -N \left[ \frac{Q_i + \sum_{j \in i} Q_{ij}}{\sum_{j \in i} \frac{Q_{ij}}{h_{ij}}} \right] \quad (9.24)$$

La iteración termina hasta que se satisface en cada nudo la ecuación de continuidad 9.17.

El problema se presenta como sigue:

Conocidos

1. Longitud, diámetro y rugosidad de los tubos
2. Cargas de presión en cada nudo

Se desean:

1. Los gastos que llegan o salen del nudo
2. Las pérdidas de carga en los tramos

La secuela de pasos se explica a continuación, juntamente con las columnas de una tabla auxiliar cuando el cálculo se realiza en forma manual (proc 9.14, tabla 9.3), para  $N = 2$ .

1. Designación de los nudos y asignación de las direcciones de los gastos (cols 1 a 5).
2. Determinación de los valores de  $a_{ij}$  (col 5)
3. Primera estimación de las pérdidas en los tramos, los cuales no se obtienen a través de los nudos vecinos (col 6). Se asigna signo positivo a la pérdida que corresponde a gastos que llegan al nudo y negativo en caso contrario.
4. Divisiones de las diferencias en las cargas de presión  $h_{ij}$  a través del valor de  $a_{ij}$  correspondiente. La raíz de los cocientes resulta del gasto correspondiente  $Q_{ij} = \sqrt{h_{ij}/a_{ij}}$ . El signo corresponde al de  $h_{ij}$  (col 7).
5. Suma algebraica de los gastos  $Q$  en cada nudo (col 7)
6. Cálculo del cociente  $Q_{ij}/n_{ij}$  (col 8)
7. Suma de los cocientes  $Q_{ij}/n_{ij}$  en un nudo (col 8)
8. Cálculo de la corrección (con  $N = 2$ )

$$r_i = -2 \left[ \frac{h_i + \sum_{j \in i} h_j}{\sum_{j \in i} (h_{ij}/n_{ij})} \right]$$

Este valor se suma algebraicamente a todas las diferencias de cargas de presión en un nudo (col 9).

9. A los tramos que pertenecen a varios nudos, además del  $\Delta H_0$  calculado en el nudo, se suman los correspondientes a los de los otros nudos con su signo original (col 10).

10. El cálculo del segundo nudo y de los siguientes se realiza en la misma forma como en los pasos del 5 al 10 y se continúa el cálculo con el primer nudo para la segunda corrección hasta lograr que los gastos no cambien y su suma algebraica valga cero.

## PROBLEMA 9.14

En la red mostrada en la fig 9.25 se especifican las cargas de presión en los nudos 1, 3 y 6. La carga de presión  $H_1$  queda determinada por el recipiente alimentador, mientras que las cargas  $H_3$  y  $H_6$  en los sitios de derivación, quedan determinados por las presiones de aprovisionamiento necesarias. Puesto que se conocen las dimensiones de los tramos y de las cargas de presión en los sitios de entrada y salida, el sistema se debe calcular por el método de compensación de gastos. Las constantes de fricción se calculan por la fórmula de Kutter para  $m = 0.20$  y  $N = 2$ .

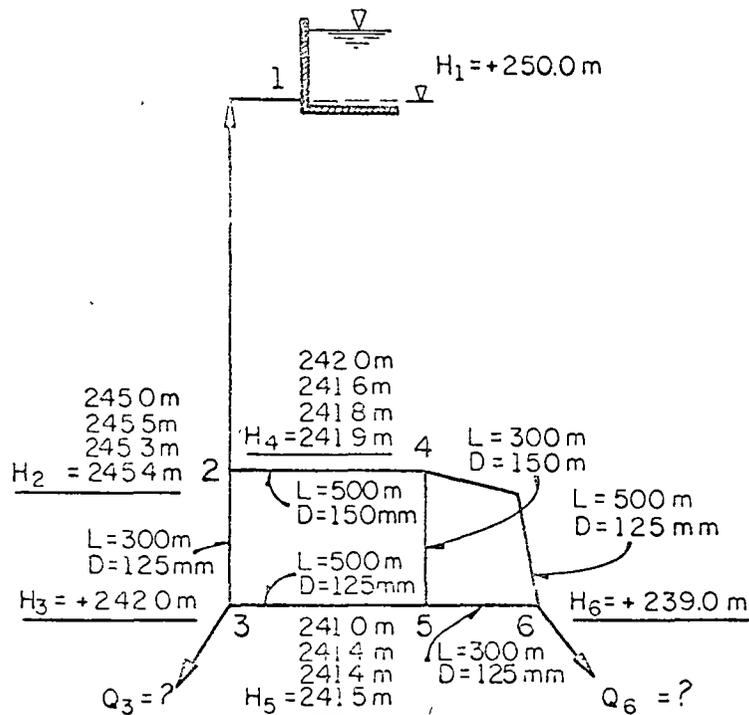


Fig 9.25 Red del problema 9.14

Solución:

Se presenta en la tabla 9.3. En la fig 9.25 se muestran los diferentes ajustes que experimentaron las cargas estimadas, así como el resultado final de los mismos.

TABLA 9.3 SOLUCION DEL PROB. 9.14

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nudo	Tramo	D	L	a 10 <sup>-3</sup>	h	Q 10 <sup>3</sup>	(Q 10 <sup>3</sup> )/h	Δh	h	Q 10 <sup>3</sup>	(Q 10 <sup>3</sup> )/h
Nr.	Nr.	mm	m	$\frac{\text{seg}^2}{\text{m}}$	m	$\frac{\text{m}^3}{\text{seg}}$	$\frac{\text{m}^2}{\text{seg}}$	m	m	$\frac{\text{m}^3}{\text{seg}}$	$\frac{\text{m}^2}{\text{seg}}$
2	1-2	200	1000	7.27	+5.0	+26.2	+ 5.24	-0.5	+4.5	+24.9	+5.53
	3-2	125	300	28.95	-3.0	-10.2	+ 3.40	-0.5	-3.5	-11.0	+3.12
	4-2	150	500	17.65	-3.0	-13.0	+ 4.33	-0.5-0.4	-3.9	-14.9	+3.82
						+ 3.0	+12.97			1.0	+12.47
						$\Delta H_2 = - \frac{2 (+ 3.0)}{12.97} = - 0.5$			$\Delta H_2 = - \frac{2 (-1.0)}{12.47} = + 0.2$		
4	2-4	150	500	17.65	+3+5	+ 14.1	+4.03	+0.4	+3.9-0.2	+14.5	+ 3.92
	5-4	150	300	10.59	-1.0	-9.7	+9.70	+0.4+0.4	-0.2	- 4.3	+21.52
	6-4	125	500	48.25	-3.0	-7.9	+2.63	+0.4	-2.6	- 7.3	+ 2.81
						-3.5	+15.35			+ 2.9	+28.23
						$\Delta H_4 = - \frac{2 (- 3.5)}{15.35} = + 0.4$			$\Delta H_4 = - \frac{2 (+ 2.9)}{28.23} = - 0.2$		
5	3-5	125	500	48.25	+1.0	+4.6	+ 4.60	-0.4	+0.6	+ 3.5	+ 5.83
	4-5	150	300	10.59	+1.0-0.4	+7.5	+12.50	-0.4	+0.2+0.2	+ 6.1	+15.25
	6-5	125	300	28.95	-2.0	-8.3	+ 4.15	-0.4	-2.4	- 9.1	+ 3.79
						+3.8	+21.25			+ 0.5	+24.67
						$\Delta H_5 = - \frac{2 (+ 3.8)}{21.25} = - 0.4$			$\Delta H_5 = - \frac{2 (+ 0.5)}{24.67} = - 0.0$		

	13	14	15	16	17	18	19	20	
Nudo	Tramo	Δh	h <sub>i</sub>	Q 10 <sup>3</sup>	(Q 10 <sup>3</sup> )/h <sub>i</sub>	Δh	h <sub>i</sub>	Q 10 <sup>3</sup>	(Q 10 <sup>3</sup> )/h <sub>i</sub>
Nr.	Nr.	m	m	$\frac{\text{m}^3}{\text{seg}}$	$\frac{\text{m}^2}{\text{seg}}$	m	m	$\frac{\text{m}^3}{\text{seg}}$	$\frac{\text{m}^2}{\text{seg}}$
2	1-2	+0.2	+4.7	+25.4	+ 5.40	-0.1	+4.6	+25.2	+ 5.48
	3-2	+0.2	-3.3	-10.7	+ 3.24	-0.1	-3.4	-10.8	+ 3.12
	4-2	+0.2+0.2	-3.5	-13.8	+ 3.94	-0.1+0.1	-3.7	-14.5	+ 3.92
				+ 0.9	+12.58			- 0.1	+12.55
				$\Delta H_2 = - \frac{2 (+ 0.9)}{12.58} = - 0.1$			$\Delta H_2 = - \frac{2 (- 0.1)}{12.55} = + 0.0$		
4	2-4	-0.2	+3.5+0.1	+14.3	+ 3.97	-0.1	+3.5	+14.1	+ 4.03
	5-4	-0.2+0.0	-0.4	- 6.1	+15.25	-0.1+0.1	-0.4	- 6.1	+15.25
	6-4	-0.2	-2.8	- 7.6	+ 2.71	-0.1	-2.9	- 7.8	+ 2.69
				+ 0.6	+21.93			+ 0.2	+21.57
				$\Delta H_4 = - \frac{2 (+ 0.6)}{21.93} = - 0.1$			$\Delta H_4 = - \frac{2 (+ 0.2)}{21.97} = - 0.0$		
5	3-5	0.0	+0.6	+3.5	+ 5.83	-0.1	+0.5	+ 3.2	+ 6.40
	4-5	0.0	+0.4+0.1	+6.9	+13.80	-0.1	+0.4	+ 6.1	+15.25
	6-5	0.0	-2.4	-9.1	+ 3.79	-0.1	+2.5	- 9.3	+ 3.72
				+1.3	+23.42			0.0	+25.27
				$\Delta H_5 = - \frac{2 (+ 1.3)}{23.42} = - 0.1$			$\Delta H_5 = - \frac{2 (0.0)}{25.37} = - 0.0$		

#### 9.5.4 Solución de redes con computadora digital

Se han planteado diferentes procedimientos de solución con computadora en el análisis de redes de agua potable. Las dificultades en la solución consisten principalmente en que los sistemas de ecuaciones resultantes no son lineales y en encontrar un procedimiento de convergencia acelerada en el cálculo de los valores finales de la red.

Se parte de una red cerrada tan general como la esquematizada en la fig 9.21, de la que se conoce su geometría (longitudes, diámetros, factores de fricción de todos los elementos), así como los gastos extraídos de la red y concentrados en los nudos. Se deben satisfacer condiciones de frontera, que pueden ser los niveles piezométricos especificados en ciertos nudos, y que corresponden a tanques de nivel constante.

El problema consiste en determinar las cargas piezométricas en cada nudo y queda solucionado si se resuelve el sistema de ecuaciones 9.17. La ec 9.21 se escribe en la forma

$$Q_{ij} = C_{ij} \left| H_j - H_i \right|^{1/N} \frac{(H_j - H_i)}{\left| H_j - H_i \right|}$$

o bien

$$Q_{ij} = C_{ij} \frac{(H_j - H_i)}{\left| H_j - H_i \right|^{1-1/N}} \quad (9.25)$$

que directamente proporciona el signo del gasto de acuerdo con la convención establecida: positivo si llega al nudo y negativo si sale de él.

El sistema 9.17 queda entonces en la forma

$$\sum_{j \in i} C_{ij} \frac{H_j - H_i}{\left| H_j - H_i \right|^{1-1/N}} + Q_i = 0 ; \text{ para } i = 1, \dots, n \quad (9.26)$$

formado por  $n$  ecuaciones con las  $n$  incógnitas  $H_1, \dots, H_n$ ;  $j$  puede tomar valores de 1 a  $m$ , siendo  $m$  el número total de nudos (variable) unidos al  $i$  por medio de un tubo, incluyendo los de cargas piezométricas constantes. El símbolo  $j \in i$  se lee: para todos los tubos  $j$  que llegan al nudo  $i$ .

El sistema no es lineal y para su solución es común utilizar el método de iteración de Newton-Raphson, el cual se explica a través de los siguientes pasos:

1. El sistema de ecuaciones por resolver es del tipo

$$f_1(H_1, \dots, H_n) = 0$$

$$f_2(H_1, \dots, H_n) = 0$$

$$\vdots \quad \ddots \quad \vdots$$

$$f_n(H_1, \dots, H_n) = 0$$

Se suponen valores iniciales  $H_i$  de las incógnitas, formando así el vector

$$\bar{H}_1 = (H_{11}, H_{12}, \dots, H_{1n})$$

el cual es necesario corregir mediante el vector de correcciones  $\bar{\Delta}_1$ .

2. Se calculan con los valores de  $\bar{H}_1$  los de las funciones  $f_j$

$$f_j(\bar{H}_1)$$

y el jacobiano de las funciones  $f_i$  definido en la forma

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial H_{11}} & \frac{\partial f_1}{\partial H_{12}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial H_{1n}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial H_{11}} & \frac{\partial f_2}{\partial H_{12}} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial H_{1n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial H_{11}} & \frac{\partial f_n}{\partial H_{12}} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial H_{1n}} \end{bmatrix}$$

3. Con el vector de correcciones de los valores  $H_{1i}$  inicialmente su  
puestos

$$\overline{\Delta H}_1 = (\Delta H_{11}, \Delta H_{12}, \dots, \Delta H_{1n})$$

y con el jacobiano, se forma el sistema lineal

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial H_{11}} & \frac{\partial f_1}{\partial H_{12}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial H_{1n}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial H_{11}} & \dots & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial H_{1n}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta H_{11} \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta H_{1n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{1n} \end{bmatrix}$$

cuya solución permite obtener los valores de las incógnitas para una segun  
da etapa de iteración

$$\overline{H}_{21} = \overline{H}_{11} + \overline{\Delta H}_{11}$$

4. Se repite el procedimiento

$$\overline{H}_{k1} = \overline{H}_{k-1} + \overline{\Delta H}_{k-1} \quad (9.28)$$

hasta que los valores de  $f_{ij}$  sean cero o menores que la aproximación desea  
da.

Sin embargo, el método clásico de Newton-Raphson conduce en muchos casos a una lenta convergencia y en ocasiones divergencia, lo que consume tiempo de máquina.

F. González y A. Capella (ref 91), después de ensayar diferen  
tes métodos en el análisis de la red interna de la ciudad de México, han  
propuesto una modificación al método clásico de Newton-Raphson que reúne las  
ventajas deseadas y para el cual se dispone de un programa de computadora di  
gital en el Instituto de Ingeniería, UNAM. El método consiste en una modifi  
cación en la forma de la ec 9.28 y se explica a continuación.

En cualquier etapa de la iteración, el vector  $\bar{H}_i$  define un punto en un espacio  $n$  - dimensional. Además, los valores de la serie de funciones  $f_j(\bar{H}_i)$  obtenidas a partir de  $\bar{H}_i$  corresponden a los errores en la solución que implica la aceptación de  $\bar{H}_i$  como valores finales de las incógnitas. La suma de los errores cuadráticos determina la función

$$F = \sum_{j=1}^n f_j^2(\bar{H}_i) \quad (9.29)$$

lo cual sería cero si  $\bar{H}_i$  fuese la solución correcta del sistema 9.25, desde a que esto implica que todas las funciones  $f_j$  valgan cero. Se puede demostrar que en una determinada etapa de la iteración el vector  $\Delta \bar{H}_i$  señala una dirección sobre la cual la función  $F$  decrece. Sin embargo, la mejor convergencia - se logra, si en lugar de aceptar la magnitud total de la corrección  $\Delta \bar{H}_i$  como en la ec 9.28), se acepta una magnitud proporcional a esta. Esto es, que

$$\bar{H}_i = \bar{H}_{i-1} + \alpha_0 \Delta \bar{H}_i \quad (9.30)$$

donde  $\alpha_0$  se escoge de tal manera que la función  $F$  sea mínima en la dirección dada y que puede adoptar valores comprendidos en el intervalo  $0 \leq \alpha_0 \leq L$ , donde  $L$  puede ser incluso, mayor que 1.

Para encontrar  $\alpha_0$  que hace mínima a  $F$  sobre dicha dirección, se utilizó el método de búsqueda directa en una dirección de Fibonacci, que reduce al mínimo el tiempo de cálculo (ref 91).

El hecho de que la función  $F$  decrezca hasta un mínimo en la dirección del vector  $\Delta \bar{H}_i$  implica que dicha función sea unimodal dentro del intervalo  $0 \leq \alpha_0 \leq L$ , esto es, hay un número,  $0 \leq \alpha_0 \leq L$  tal que  $F$  decrece estrictamente para  $\alpha \leq \alpha_0$  y crece estrictamente para  $\alpha \geq \alpha_0$ .

Por inducción se puede demostrar que la cantidad  $NF$  (comprendida en el intervalo  $L$ ) para la cual se produce el mínimo de  $F$  es

$$NF_n = NF_{n-1} + NF_{n-2} \quad ; \quad n \geq 2 \quad (9.31)$$

donde  $NF_0 = NF_1 = 1$

Los números  $NF_n$  son los números de Fibonacci cuya secuencia se puede generar de la ec 9.31 en la forma

n	=	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$NF_n$	=	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	...

de tal manera que  $NF_{20} > 10000$ . La ec 9.31 también se escribe

$$\frac{NF_n}{NF_{n-1}} = 1 + \frac{NF_{n-2}}{NF_{n-1}}$$

Se puede demostrar que  $NF_n/NF_{n-1}$  se aproxima al valor  $(\sqrt{5} + 1)/2 = 1.62$  cuando n es grande y por lo tanto  $NF_{n-2}/NF_{n-1}$  se aproxima al valor 0.62. Esto se puede ver a partir de la secuencia de números antes generada para  $n = 10$ . Por lo tanto, los dos primeros valores  $a_1$  y  $a_2$  se deben elegir a una distancia 0.62 L de ambos extremos del intervalo.

La técnica de búsqueda de  $a_0$  se puede sintetizar en los siguientes pasos.

1. Debido a que no se conoce el intervalo L en que varía  $a_0$ , se hace una búsqueda gruesa con los valores  $a = 0, 1, 3, 4, 5, \dots$ , etc, calculando simultáneamente el valor de la función F (ec 9.29) para determinar el intervalo  $L_1$  en que se encuentra el mínimo. Por ejemplo, en la fig 9.26a se observa que dicho mínimo se encuentra para  $1 < a < 2$  y la magnitud del intervalo  $L_1 = 2 - 1 = 1$ .

2. Se repite el mismo procedimiento del paso anterior, ahora para

$\alpha_1 = 1 + 0.38 L_1$  y  $\alpha_2 = 1 + 0.62 L_1$  (en este caso  $\alpha = 1$ ) y se calculan los valores de  $F_1$  y  $F_2$  correspondientes. Si  $F_1 < F_2$  (como en la fig 9.26b) el nuevo intervalo  $L_2$  es

$$L_2 = 0.62 L_1 = 0.62 \times 1 = 0.62$$

medido desde  $\alpha = 1$ , hasta  $\alpha = 1 + 0.62 \times L_1 = 1 + 0.62 \times 1 = 1.62$ .

Si por el contrario,  $F_1 > F_2$ , el nuevo intervalo es también  $L_2 = 0.62 L_1 = 0.62$ , pero medido ahora desde  $\alpha = 1 + 0.38 L_1 = 1 + 0.38 \times 1 = 1.38$ , hasta  $\alpha = 1 + L_1 = 1 + 1 = 2$ .

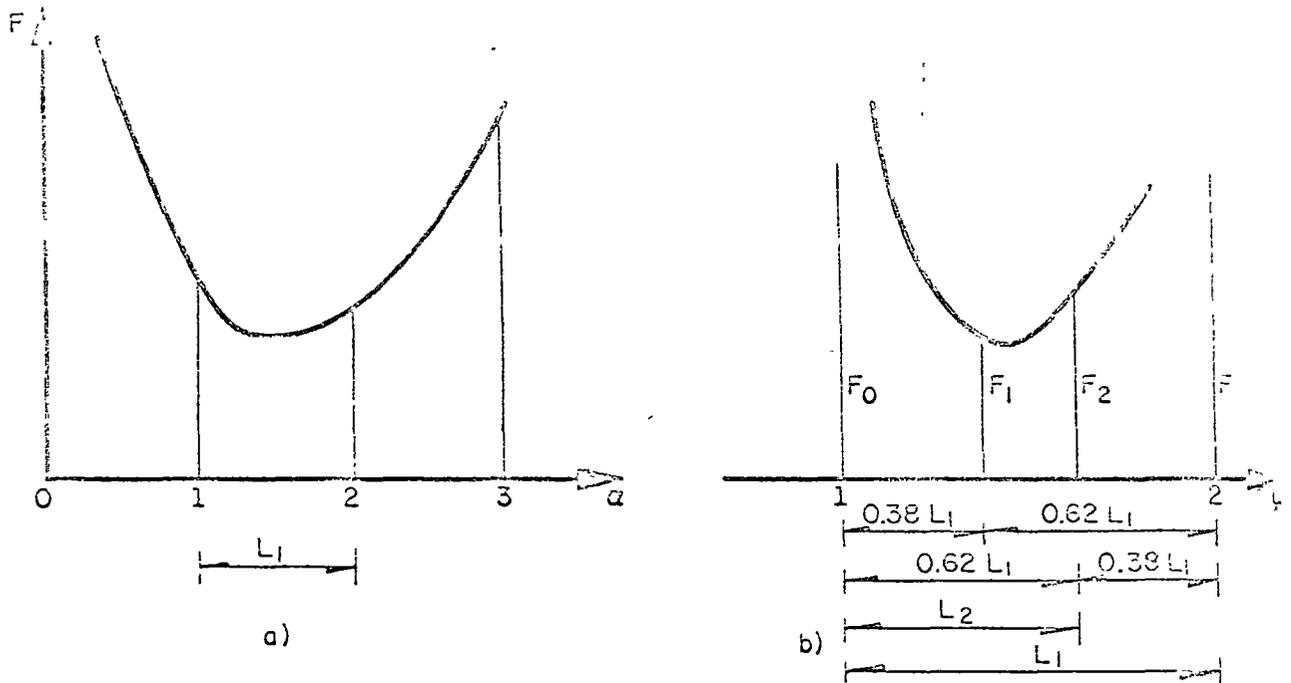


Fig 9.26 Mínimo de la función  $F$

3. Suponiendo que hubiese resultado el primer caso ( $F_1 < F_2$ ), se repite el mismo procedimiento para

$$\alpha_1 = 1 + 0.38 L_2 = 1 + 0.38 \times 0.62 = 1.2356$$

$$\alpha_2 = 1 + 0.62 L_2 = 1 + 0.62 \times 0.62 = 1.3844$$

y se calculan los correspondientes  $F_1$  y  $F_2$ . Suponiendo ahora que  $F_1 > F_2$ , el nuevo intervalo es  $L_3 = 0.62 L_2 = 0.62 \times 0.62 = 0.3844$  pero medido a partir de

$$\alpha = \alpha_1 = 1.2355 \text{ hasta } \alpha = 1.62$$

4. El procedimiento se repite tantas veces como sea necesario hasta encontrar  $\alpha_0$  que da el mínimo de  $F$  con la aproximación deseada.

En la fig 9.27 se presenta el diagrama de bloques del programa en computadora digital.

### 9.6. Diámetro económico

En la mayoría de los sistemas de tubos es necesario conocer de antemano toda su geometría para proceder a su análisis. La selección del diámetro es la que admite más variantes en la solución debido a que puede hacerse con base en un mayor número de criterios. Sin embargo, el más importante es quizá el de la economía, tanto en el monto de la inversión inicial en el sistema, como en el de conservación y operación.

El diámetro mas económico de cada uno de los tramos componentes del sistema será aquel para el cual la suma de los costos de la instalación; conservación y servicios es mínima. Los costos de la instalación incluyen los propios en el diseño, conservación e instalación para la obtención del sistema. Los costos de conservación y servicio incluyen los correspondientes al personal y materiales necesarios para mantener en servicio al sistema, así como los costos de la energía necesaria para el mismo como en el caso de una planta de bombeo. Los tubos de gran diámetro ocasionan una pérdida de fricción mas pequeña pero son mas costosos y con los de menor diámetro sucede lo contrario.

El diámetro mas económico será aquel de mínimo costo total, como se muestra en la fig 9.28

En una instalación hidroeléctrica cuya tubería tiene varios tramos de diámetro y longitud distintas, el diámetro mas económico en cada tramo se puede calcular en forma aproximada por las fórmulas de Sundschu

## DIAGRAMA DE BLOQUES

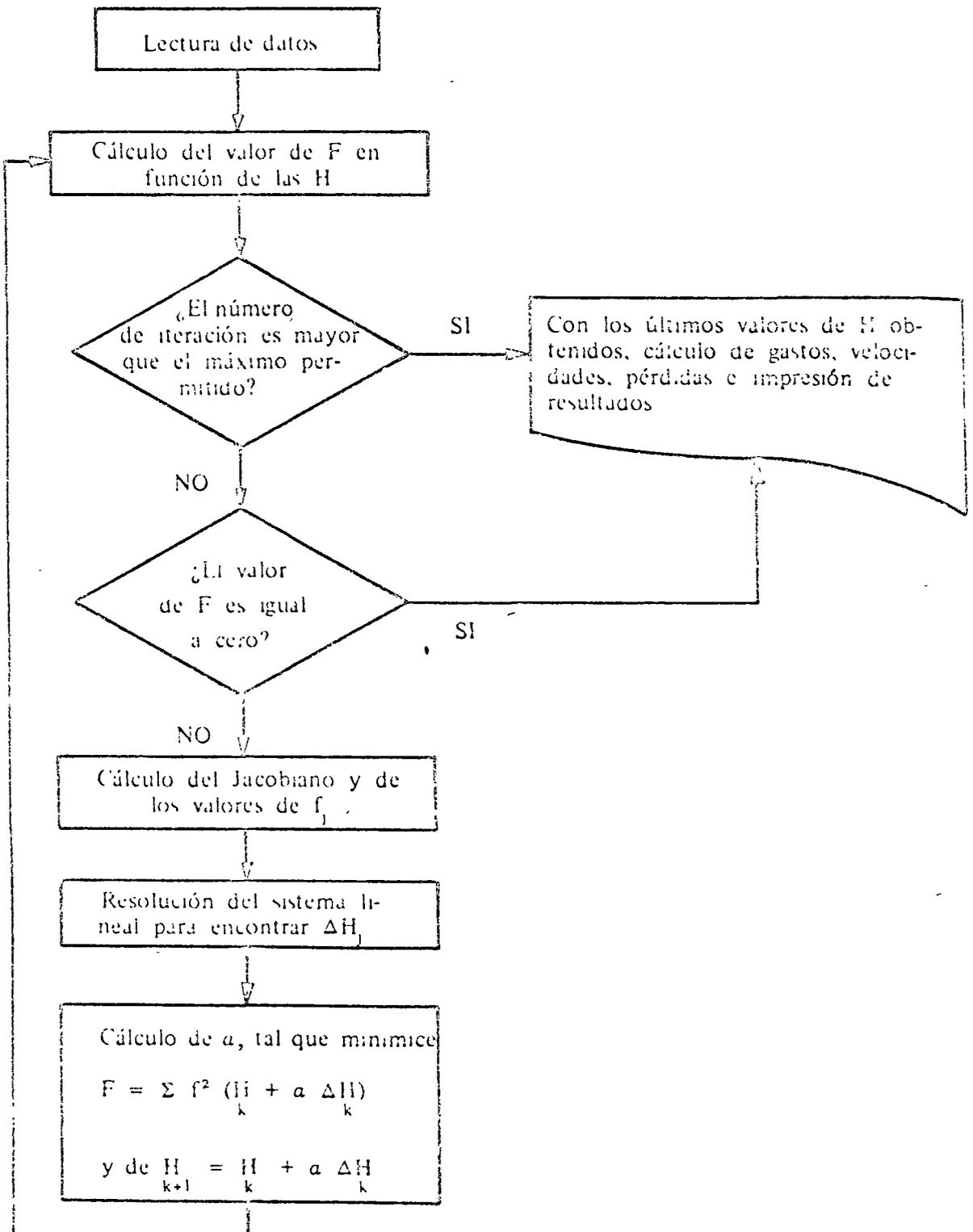


Fig 9 27

(ref 51)

$$D = \sqrt[7]{0.052 Q_s^{17}} \quad \text{para } H_m < 100 \text{ m}$$

$$D = \sqrt[7]{4.052 Q_s^2} \quad \text{para } H_m \geq 100 \text{ m}$$

donde

$D$  diámetro más económico, en m

$H_m$  carga que depende de la bruta o total  $H$  y que vale ( $H_m = H + 15$  a  $20$ ) cuando  $H \leq 100$  m, y ( $H_m = 1.1H + 20$ ) cuando  $H > 100$  m, todas las cargas en m

$Q_s$  gasto máximo alimentado a las turbinas, en  $\text{m}^3/\text{seg}$

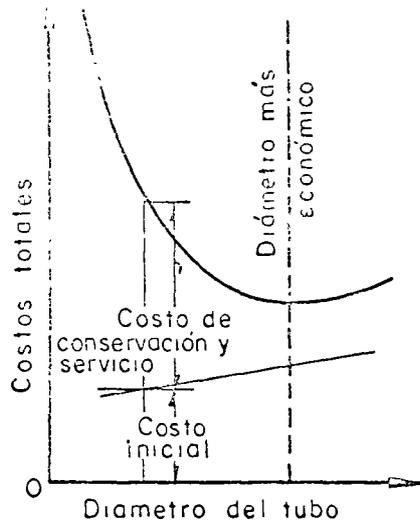


Fig 9.28 Diámetro más económico

En el caso de una instalación de bombeo, se puede usar la fórmula de Bresse cuando la operación es continua

$$D = K \sqrt[3]{Q}$$

donde  $K$  es una constante que vale aproximadamente 1.20.

Si la operación es intermitente, se puede usar la fórmula de Varouard (ref 79)

$$D = \sqrt[3]{C \beta^{1/3}}$$

donde

$C$  constante que varía entre 2.13 y 2.55

$D$  diámetro económico, en m

$Q$  gasto, en  $m^3/\text{seg}$

$$\beta = \frac{\text{número de horas de servicio real en el año}}{\text{número de horas en un año (8760)}}$$

Un criterio más sencillo consiste en especificar la velocidad más económica en el tubo, de acuerdo con los datos de Richter (ref 54) y que se indican en la tabla 9.4

TABLA 9.4 VELOCIDAD MEDIA MAS ECONOMICA EN TUBERIAS, EN m/seg

Tuberías de succión en bombas centrífugas de acuerdo con la carga de succión, longitud, temperatura del agua ( $< 70^\circ\text{C}$ )	0.5 a 1
Tuberías de descarga en bombas	1.5 a 2
Redes de distribución para agua potable e industrial	
Tuberías principales	1 a 2
Tuberías laterales	0.5 a 0.7
Tuberías muy largas	1.5 a 3
Tuberías en instalaciones hidroeléctricas con turbinas	
Con inclinación y diámetro pequeño	2 a 3
Con inclinación y diámetro grande	3.5 a 5
Con horizontales y gran longitud	1 a 3

Problema 9.15

Sea una tubería formada por  $n$  tramos rectos de igual longitud  $l$  y diferentes diámetros. Se supone que el costo de un tramo es  $kD^2 Yl$ , esto es, dependiente del espesor, el cual debe crecer en función de la resistencia, con la carga de presión  $Y$  que debe soportar ( $k$  constante). Se desea encontrar la ley que cambia el diámetro  $D$  del tubo con la carga de presión  $Y$ , si el costo de la tubería debe ser el más pequeño posible. La pérdida de presión en la conducción debe permanecer constante.

Solución:

El costo de  $n$  tramos de igual longitud es

$$K = k l \sum_{i=1}^n D_i^2 Y_i$$

La pérdida de carga en un tramo es de la forma

$$h_{fi} = f \frac{l}{D_i} \frac{V_i^2}{2g} = \frac{8f}{\pi^2 g} \frac{l Q^2}{D_i^5} = \frac{C}{D_i^5}$$

donde  $Q$  es el gasto y  $C$  una constante. La pérdida total de carga por fricción para los  $n$  tramos es

$$H = \sum_{i=1}^n h_{fi} = C \sum_{i=1}^n \frac{1}{D_i^5}$$

Puesto que  $H$  debe permanecer constante, para el caso extremo  $K = \min$ , con

$$\frac{H}{C} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{D_i^5} = 0, \text{ siendo } H/C \text{ constante.}$$

Utilizando una constante de proporcionalidad  $\alpha$

$$\frac{\partial}{\partial D_i} \left[ K + \alpha \left( \frac{H}{C} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{D_i^5} \right) \right] = 0$$

$$2 k l Y_i D_i + 5 \alpha D_i^{-6} = 0$$

$$Y D^7 = \text{const}$$

#### Problema 9.18

La regla de Adams obtenida de la experiencia indica que el diámetro económico de una tubería en una instalación hidroeléctrica o de concreto debe ser tal que los  $2/5$  del costo inicial del tubo por unidad de longitud y por año sea igual al costo de la pérdida de potencia resultante debida a la fricción en el tubo. Fundamentar teóricamente dicha regla.

Solución:

Dado el grado de seguridad del tubo contra ruptura, se debe proporcionar el espesor del mismo de acuerdo con su diámetro.

Para conductos largos, el costo  $K_1$  del tubo por unidad de longitud es proporcional principalmente del peso del mismo, esto es,  $K_1 \sim C_1 D^2$  donde el coeficiente  $C_1$  incluye también otros costos de menor importancia, los cuales dependen de  $D^2$ .

La pérdida de potencia ( $P = \gamma Q h_f$ ) debida a la fricción en el tubo es proporcional al gasto y a la pérdida de fricción. En primer lugar es proporcional a  $V D^2$  y en segundo lugar a  $V^2/D$ , por lo cual la potencia pérdida por fricción es proporcional a  $V^3 D$ . Puesto que  $V$  es proporcional a  $1/D^2$  el costo de dicha pérdida  $K_2$  por unidad de longitud del tubo es igual a  $C_2/D^5$ .

El costo total

$$K = C_1 D^2 + \frac{C_2}{D^5}$$

debe ser mínimo, para lo cual se procede con el criterio de la primera derivada

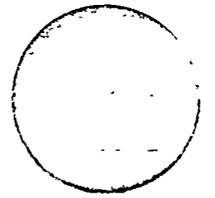
$$2 C_1 D - 5 \frac{C_2}{D^6} = 0 = \frac{2 K_1 - 5 K_2}{D}$$

$$K_2 = \frac{2}{5} K_1$$





centro de educación continua  
facultad de ingeniería, unam



DISEÑO HIDRAULICO DE SISTEMAS DE TUBOS

PROGRAMA PARA CALCULO DE GOLPE  
DE ARIETE

M. I. RAMON DOMINGUEZ MORA

$$g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{f}{2D} V |V| = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

En donde

$g$  = aceleración de la gravedad

$H$  = carga piezométrica en una sección

$V$  = velocidad media en una sección

$f$  = coeficiente de fricción de Darcy

$D$  = diámetro del tubo

$a$  = celeridad de la onda de presión

$x$  = abscisa de una sección transversal del tubo

$t$  = tiempo

Mediante una transformación <sup>1 y 3</sup>, las ecuaciones anteriores se pueden convertir en una pareja de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{g}{a} \frac{dH}{dt} + \frac{dV}{dt} + \frac{fV|V|}{2D} = 0 \quad (3)$$

válida en la dirección dada por

$$\frac{dx}{dt} = V + a \quad (4)$$

$$-\frac{g}{a} \frac{dH}{dt} + \frac{dV}{dt} + \frac{fV|V|}{2D} = 0 \quad (5)$$

válida en la dirección dada por

$$\frac{dx}{dt} = v - a \quad (6)$$

La integración de las ecuaciones anteriores recibe el nombre de método de las características y es el empleado en el programa.

Estas ecuaciones se pueden convertir a ecuaciones de incrementos finitos y haciendo referencia a la figura 1 se podrían escribir.

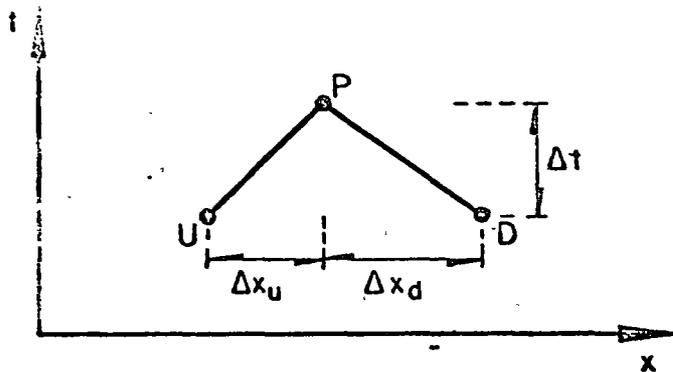


Fig 1

$$v_p - v_u + \frac{g}{a} (H_p - H_u) + \frac{f}{2D} v_u |v_u| \Delta t = 0 \quad (7)$$

$$v_p - v_d - \frac{g}{a} (H_p - H_d) + \frac{f}{2D} v_d |v_d| \Delta t = 0 \quad (8)$$

En donde los subíndices p indican valores correspondientes al punto P y los u y d correspondientes a los puntos U y D.

Para un punto P fijo y un valor  $\Delta t$  dado, los puntos U y D deben ser tales que

$$\Delta x_u = \Delta t (V + a) \quad (9)$$

$$\Delta x_d = \Delta t (V - a) \quad (10)$$

Las ecuaciones anteriores permiten calcular los valores de  $V_p$  y  $H_p$  si se conocen todos los demás valores en ellas.

De esta manera se pueden calcular las cargas y velocidades en una sección de un tubo para un tiempo dado si son conocidas las correspondientes a un tiempo  $\Delta t$  anterior. Esto es válido para las secciones intermedias de un tubo, para los extremos habrá que tomar en cuenta una sola de esas ecuaciones y otra u otras adicionales que representen la condición de frontera correspondiente, fig. 2.

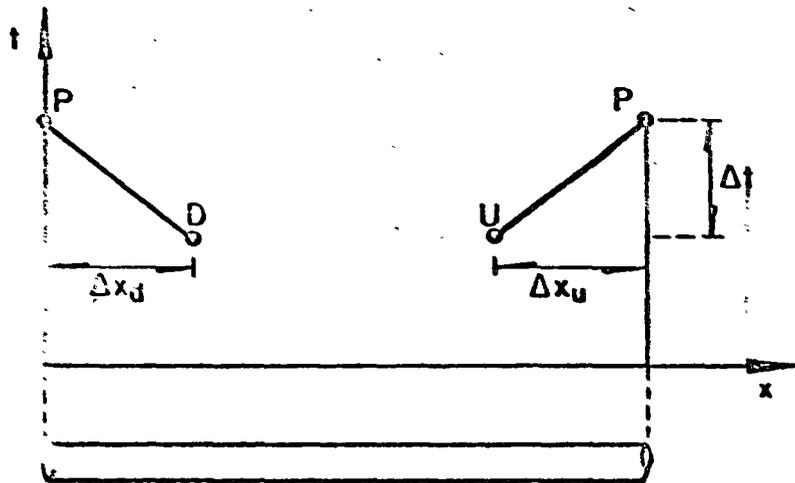


Fig 2

En la descripción de las subrutinas que se hicieron para las condiciones de frontera consideradas se explicará con detalle el planteamiento para esos casos particulares.

A continuación se explica el proceso de cálculo de cargas y velocidades en una tubería haciendo referencia a la figura 3.

Se escogen las secciones de la tubería en la que se va a hacer el cálculo (1 a n en la figura), además de las secciones inicial y final I y F.

Originalmente serán conocidas las cargas y velocidades en todas las secciones para  $T = 0$ .

Para calcular carga y velocidad en un punto tal como P del tiempo  $T = \Delta t$ , se calculan las cargas y velocidades en los puntos V y D del tiempo anterior, mediante interpolación entre los valores conocidos de las secciones más cercanas.

Con las ecuaciones (7) y (8) se calculan carga y velocidad en el punto P.

Las cargas y velocidades en I y F se calcularán según la condición constante a que se tenga.

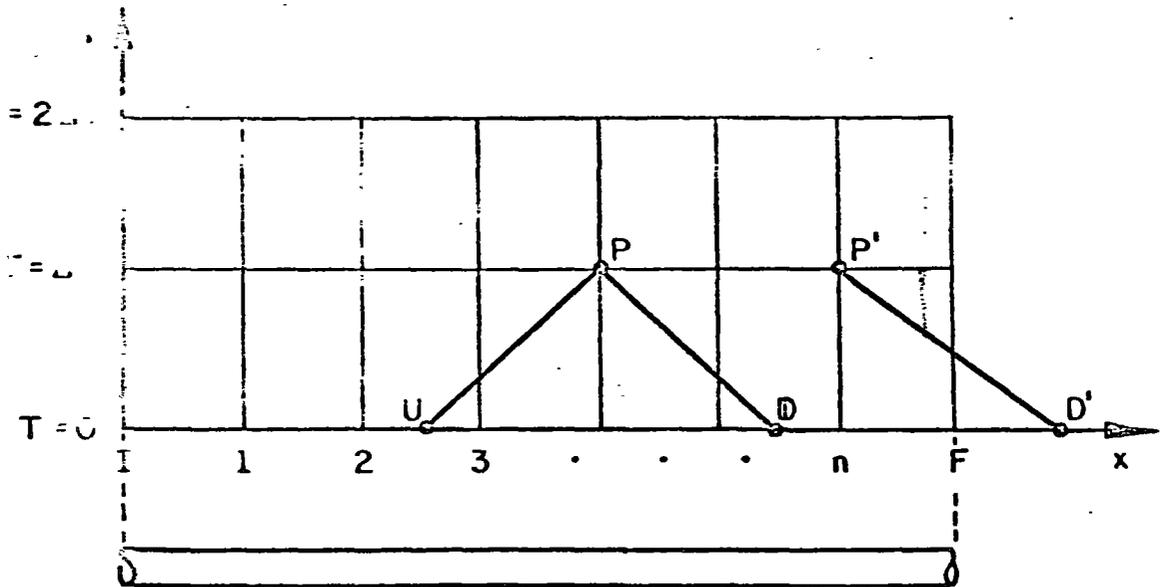


Fig 3

Puede ocurrir que de un punto como  $P^i$ , se tenga un punto como  $D^i$  fuera de los límites del tubo, en ese caso los valores de carga y velocidad en  $P$  se calculan por interpolación. Esta situación podría ocurrir en las primeras o en las últimas secciones de la tubería. En este caso se dice que el dominio de dependencia del punto  $P^i$  se sale de los límites del tubo en el instante anterior.

Calculados todos los valores para el tiempo  $T = \Delta t$ , se calculan a partir de ellos los del tiempo  $T = 2 \Delta t$ , y así sucesivamente hasta el valor de  $T$  deseado.

El número de secciones  $n$ , se calcula en el programa de tal manera que las interpolaciones lineales sean lo más pequeñas posibles dado el intervalo  $\Delta t$  y de forma que las secciones sean las menos posibles.

$$n = \left[ \frac{L}{\Delta t} - 1 \right]$$

El símbolo significa que  $n$  es el entero inferior al número de la derecha.

### III. ORGANIZACION GENERAL DEL PROGRAMA

El programa consiste en un programa principal en el que se realizan algunas lecturas de datos generales, se organiza el cálculo y se hacen las impresiones, y una serie de subrutinas. Una subrutina para el cálculo de cargas y velocidades en secciones intermedias de los tubos, subrutina PUNINT, una subrutina para la lectura de datos correspondientes a cada condición de frontera, subrutina LEC1, LEC2, LEC3, etc., en este caso se han escrito solo tres para otras tantas condiciones, y una subrutina para el cálculo de cargas y velocidades en los extremos de los tubos, subrutinas FRONT1, FRONT2 y FRONT 3, etc.

Para mayor facilidad en el manejo y modificaciones futuras del programa, se ha conservado el mismo nombre de las variables en el programa principal

y en las subrutinas.

El programa está pensado para hacer el cálculo en una red de tubos como en la figura 4, formada por una serie de tramos unidos en nudos.

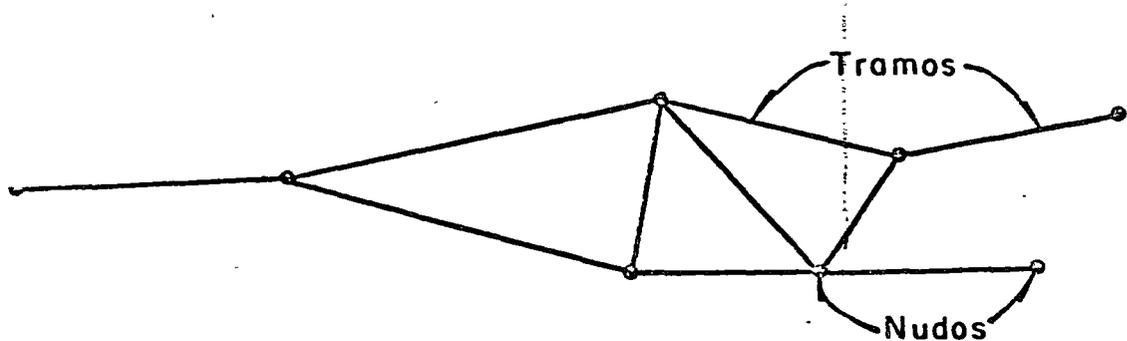


Fig 4

En un anexo se presenta un diagrama general de bloques de la organización del programa principal, así como una lista de variables y un diagrama de bloques detallado del programa principal, donde se usan los nombres de las variables definidos en la lista.

#### IV. SUBROUTINAS

##### 1.- Subrutina PUNINT

Esta subrutina hace el cálculo de los valores de carga y velocidad en secciones intermedias de los tramos. El método empleado es el descrito en el capítulo II. Se presenta un diagrama de bloques que con la lista de variables y el listado de programa anexos se explica por sí solo.

##### 2.- Subrutinas para el cálculo en las fronteras

Se consideraron tres posibles condiciones de frontera para las cuales se escribieron otras tantas subrutinas de lectura de datos y de cálculo de valores en los extremos de los tramos. Las tres condiciones de frontera consideradas fueron:

- a) Un nudo del que parte un sólo tubo y con carga constante
- b) Un nudo al que llega un sólo tubo y donde se produce un cierre de válvula como se explicará
- c) Un nudo al que llegan o de donde salen cualquier número de tubos (hasta 15 por las dimensiones dadas a las variables) y en el que no se consideran pérdidas de energía.

Cuando se habla de que un tubo sale o llega a un nudo se quiere indicar que hay que escoger una dirección que se considerará positiva para cada tramo. De esta manera tiene sentido hablar de una sección inicial y de una sección final en cada tramo. En los casos de las condiciones de frontera a) y b) los nudos deberán ser los de la sección inicial y final respectivamente.

#### A.- Subrutinas de lectura

##### a) Subrutina LEC 1

Corresponde a la primera condición de frontera y en ella se lee simplemente la carga constante en el nudo respectivo y el número del tramo que sale de él.

##### b) Subrutina LEC 2

Corresponde a la segunda condición de frontera y en ella se lee el número del tramo en cuyo extremo se produce el cierre, el tiempo de cierre y las relaciones de cierre para cada instante, desde el primer instante  $\Delta t$  hasta el tiempo de cierre  $T_c$  a cada  $\Delta t$ .

Llamando  $\tau$  a esa relación de cierre (relación del área hidráulica en un instante al área original), se puede escribir la relación <sup>1</sup>.

$$\frac{V}{V_0} = \tau \sqrt{\frac{H}{H_0}}$$

En donde  $V_0$  y  $H_0$  son la velocidad y la carga originales y  $V$  y  $H$  la velocidad y la carga en el instante que corresponde al cierre  $\tau$ , se puede escribir:

$$V^2 = \frac{\tau^2 V_0^2}{H_0} H$$

y en la subrutina se hace la substitución

$$\tau = \frac{\tau^2 V_0^2}{H_0}$$

para obtener

$$V^2 = \tau H$$

#### c) Subrutina LEC3

Corresponde a la tercera condición de frontera descrita en ella se lee el número de tramos que concurren al nudo y para cada tramo, el número que se le asignó al tramo y una clave que indica si el nudo está en la sección inicial o final del tramo.

#### B.- Subrutinas de cálculo

##### a) Subrutina FRONTI

Esta subrutina calcula la velocidad en la sección inicial de un tubo, donde la carga es constante. El cálculo se hace simplemente despejando la velocidad de la ecuación 8, ya que todos los demás términos son conocidos.

b) Subrutina FRONT 2

Calcula la carga y la velocidad en el extremo final de un tubo donde se conoce la relación de cierre, modificada como se hace en la subrutina LEC2. El cálculo se hace a partir de la ecuación 7 y la ecuación  $V^2 = \tau H$  que representan un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, al resolverlo se obtiene

$$V = \frac{-C_4 + \sqrt{C_4^2 - 4C_5}}{2}$$

$$H = V^2 / C_1$$

En donde

$$C_1 = \tau = \frac{\tau^2 V_0^2}{H_0}$$

$$C_2 = -V_u - C_3 H_u + \frac{f}{2D} V_u |V_u| \Delta t$$

$$C_3 = \frac{g}{a}$$

$$C_4 = C_1 / C_3$$

y cuando  $\tau = C_1 = 0$

$$V = 0$$

y  $H = -C_2 / C_3$

c) Subrutina FRONT3

Calcula la carga en un nudo al cual concurren varios tramos, así como la velocidad en la sección inmediata al nudo para cada uno de los tramos.

En cada uno de los tramos ( j ) puede plantearse la ecuación 7 o la 8.

$$V_j = \pm \frac{g}{a_j} H - \frac{f_j}{2D_j} V_s |V_s| \Delta t \mp \frac{g}{a_i} H_s + V_s$$

en donde el subíndice  $j$  indica la sección y el subíndice  $S$  será U o D según que la dirección positiva ("hacia aguas abajo") en el tramo esté definido hacia el nudo o a partir de él.

La ecuación anterior es del tipo

$$V_j = C_j H + B_j$$

En donde  $C_j$  y  $B_j$  pueden ser calculados en términos de valores conocidos.

Con una ecuación de estas para cada uno de los  $n$  tramos que concurren al nudo se dispone de  $n$  ecuaciones con  $n + 1$  incógnitas ( $V_1, V_2, \dots, V_n, H$ ). La  $(n + 1)$  ésima ecuación que permite resolver el sistema es el principio de continuidad

$$\sum S_j V_j A_j = 0$$

en donde

$A_j$  es el área de cada tramo

$V_j$  es la velocidad en la sección extrema del tramo con el signo que le corresponda según la convención adoptada en el tramo

$S_j$  vale  $+1$  ó  $-1$  para que el término sea positivo si el agua entra al nudo y negativo si sale de él

Con las ecuaciones anteriores se puede despejar el valor

$$H = \frac{-\sum S_j A_j B_j}{\sum S_j A_j C_j}$$

y con este, los valores de  $V_j$

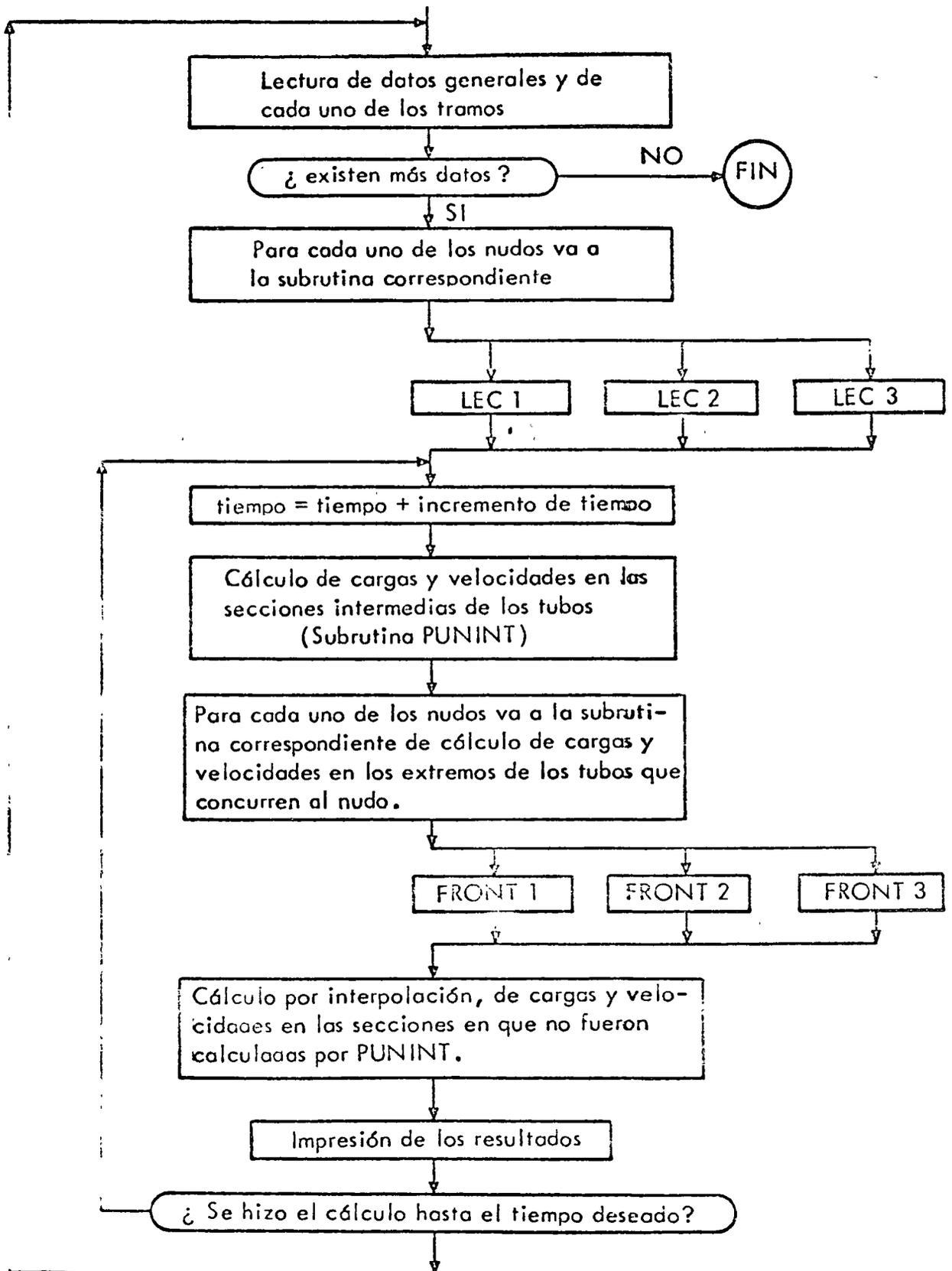
$$V_j = C_j H + B_j$$

En el anexo se presenta un diagrama de bloques de la subrutina que realiza este cálculo que se explica por sí solo con la lista de variables anexa.

#### V. REFERENCIAS

- 1 Streeter, Victor L. y Wylie, E. Benjamin  
Hydraulic Transients, Mc. Graw Hill, New York 1967
- 2 Parmakian, John  
Waterhammer Analysis, Dover, New York 1963
- 3 CFE - IIIE.  
Manual de diseño de obras civiles. Tomo II. México 1959

DIAGRAMA GENERAL DE BLOQUES DEL PROGRAMA PRINCIPAL



## INSTRUCTIVO PARA USO DEL PROGRAMA

Se deben conocer las condiciones de escurrimiento iniciales, es decir, gastos en cada tubo y cargas en los nudos, o sea en los extremos de los tubos.

En cada tubo se escogerá una dirección positiva como se indica en la figura 5.

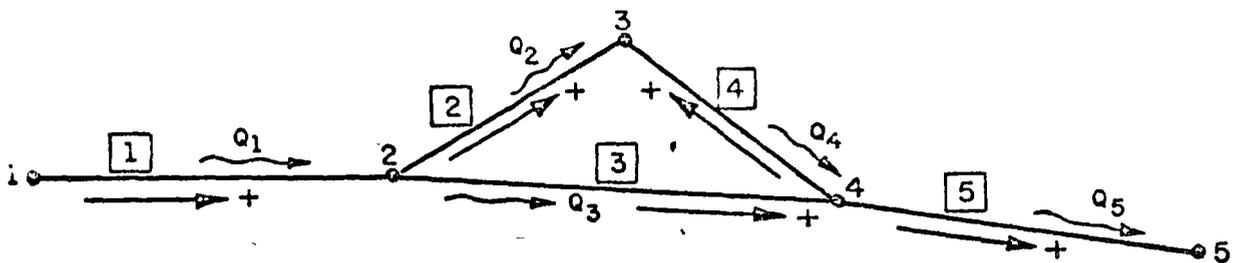


Fig 5

Los gastos y velocidades serán positivas en la dirección escogida como positiva y viceversa. Se considera como secciones inicial y final de un tubo las que corresponden a la convención sobre dirección positiva que se haga.

Los tramos se numerarán en forma progresiva de 1 al número de tubos, NT, en cualquier orden. Los nudos se numerarán en forma progresiva de 1 al número de nudos, NUDOS, en cualquier orden.

Las condiciones de frontera previstas en los nudos son:

a) Un nudo con carga constante del que sale un solo tubo. En este caso hay que escoger como dirección positiva la que parte del nudo.

b) Un nudo donde se produce un cierre de válvulas al que llega un solo tubo. Aquí hay que escoger como dirección positiva la que llega al nudo. El cierre se da con los cocientes del área hidráulica en cada instante al área hidráulica inicial.

c) Un nudo al que concurre un número cualquiera de tubos, donde se desprecian las pérdidas locales de carga. Las direcciones escogidas como positivas pueden ser cualesquiera.

El cálculo se hará en incrementos finitos de tiempo de un tamaño DELTE, que se proporciona como dato. Es recomendable que el tamaño del intervalo sea tal que en cualquier tramo haya por lo menos unas cinco secciones intermedias; por esto se escogerá el tramo con la relación longitud a celeridad más chica y en vista de la forma en que en el programa se calcula el número de secciones, el intervalo se escogerá.

$$\text{DELTE} \leq \frac{1}{\text{NUSEC}(J) + 1} \text{XLON}(J) / A(J)$$

Donde  $\text{XLON}(J) / A(J)$  será la relación de longitud a celeridad más pequeña y  $\text{NUSEC}(J)$  el número de secciones mínimo deseado, si este es cinco.

$$\text{DELTE} \leq \frac{1}{6} \text{XLON}(J) / A(J)$$

Cuando se trate de redes de tubos es conveniente comprobar que el valor de DELTE no es demasiado grande para introducir errores graves de interpolación, y se recomienda analizar la sensibilidad de los resultados escogiendo un valor de DELTE más chico para un segundo cálculo, hasta comprobar que los resultados no varíen.

Los datos se perforarán en tarjetas del siguiente modo:

1a. Tarjeta. Se perfora un título cualquiera en formato (12 A 6), este título aparecerá impreso encabezando los resultados.

2a. Tarjeta. Número de tramos, NT, número de nudos, NUDOS, intervalo de tiempo, DELTE, tiempo máximo en el que se quiere el cálculo, TMAX

En formato (2110, 2F10.0)

3a. Tarjeta y siguientes. En una tarjeta para cada tramo, un total de NT, se perforan

- . Número del tramo J
- . Longitud del tramo XLON (J)
- . Diámetro del tubo DIAM (J)
- . Celeridad A(J)
- . Coeficiente de Darcy EFE (J)
- . Gasto en las condiciones iniciales QI (J)
- . Carga en el extremo inicial HIA (J)
- . Carga en el extremo final HFA(J)

Con el formato (18, 7F 8.0)

Después se preparan grupos de tarjetas, uno para cada nudo del siguiente modo:

1o. Una tarjeta que contenga el número del nudo K y la clave de la condición de frontera que hay en él, NTIPO (K). Con formato (2110).

La clave NTIPO (K) valdrá:

1, si se trata del extremo aguas arriba de un tubo donde hay carga constante

2, si se trata del extremo aguas abajo de un tubo donde se produce un cierre

y 3, si se trata de un nudo donde concurren varios tubos

2o. Si NTIPO (K) vale 1, la siguiente tarjeta contendrá la

carga constante en el nudo,  $HC(K)$ , y el número del tramo que sale de este nudo,  $NUTRA(K, 1)$ . Con formato (F10.0, 15).

Si  $NTIPO(K)$  vale 2, se leerá una tarjeta con el número del tramo que llega al nudo,  $NUTRA(K, 1)$ , y el tiempo en el que se realiza el cierre,  $TCIER(K)$ , con formato (I10, F10.0). Las siguientes tarjetas tendrán las relaciones de cierre,  $TAO(K, L)$ , para cada intervalo  $DELTE$ , desde el primero hasta que se cubra el tiempo de cierre  $TCIER(K)$ , con formato (16F5.2). Se emplearán tantas tarjetas como sea necesario según este formato.

Si  $NTIPO(K)$  vale 3, se leerá una tarjeta con el número de tramos que llegan al nudo,  $NTRAM(K)$ , con formato (I10). En seguida, tantas tarjetas como tramos,  $NTRAM(K)$ , cada una con el número de un tramo,  $NUTRA(K, L)$  y la clave  $KLA(K, L)$ , en formato (2I5).  $KLA(K, L)$  valdrá 2 si el nudo  $K$ , está en el extremo inicial del tramo y 1 si está en el final.

Después de las tarjetas con los datos de los nudos, se proporcionan datos para la impresión de resultados.

Una tarjeta con formato (3I5), que contiene:

- El número de tramos por lo menos 1, de los que se desea conocer las cargas y las velocidades en las secciones inicial y final - NIMTR1.
- El número de tramos en los que se desea conocer los valores de cargas y velocidades en secciones intermedias - NIMTR2

. Un número que indica cada cuantos intervalos de tiempo se desea la impresión NUIIMP

Una o más tarjetas con los números de los tramos en que se desea impresión de valores en los extremos, IMPTR1 (KK), hasta un total de NIMTR1, con formato (1415)

Si NIMTR2 es distinto de cero, una o más tarjetas con los números de los tramos en los que se desean los valores de secciones intermedias, IMPTR2 (KK), hasta un total de NIMTR2, con formato (1415). Si NIMTR2 vale cero, se eliminan estas tarjetas.

Si se desea meter otro juego de datos para otro problema, se colocan las tarjetas correspondientes a continuación siguiendo el instructivo nuevamente, en caso contrario se termina con dos tarjetas en blanco.

EJEMPLO 4.- Se calcula la variación de las cargas en la tubería de la figura 9 para un cierre instantáneo en el nudo 7.

DATOS:

Longitudes:  $XL\emptyset N (1) = 610 \text{ m}$

$$XL\emptyset N (2) = 915 \text{ m}$$

$$XL\emptyset N (3) = 610 \text{ m}$$

$$XL\emptyset N (4) = 549 \text{ m}$$

$$XL\emptyset N (5) = 497 \text{ m}$$

$$XL\emptyset N (6) = 488 \text{ m}$$

$$XL\emptyset N (7) = 671 \text{ m}$$

$$XL\emptyset N (8) = 457 \text{ m}$$

$$XL\emptyset N (9) = 610 \text{ m}$$

Diámetros:  $DIAM (1) = 0.915 \text{ m}$

$$DIAM (2) = 0.762 \text{ m}$$

$$DIAM (3) = 0.610 \text{ m}$$

$$DIAM (4) = 0.457 \text{ m}$$

$$DIAM (5) = 0.457 \text{ m}$$

$$DIAM (6) = 0.457 \text{ m}$$

$$DIAM (7) = 0.763 \text{ m}$$

$$DIAM (8) = 0.610 \text{ m}$$

$$DIAM (9) = 0.915 \text{ m}$$

Coefficientes de Darcy:

$$EFE (1) = 0.03$$

$$EFE (2) = 0.028$$

$$EFE (3) = 0.024$$

17

$$EFE (4) = 0.020$$

$$EFE (5) = 0.020$$

$$EFE (6) = 0.025$$

$$EFE (7) = 0.040$$

$$EFE (8) = 0.030$$

$$EFE (9) = 0.024$$

Velocidades de la onda:

$$A (1) = 1006 \text{ m/seg}$$

$$A (2) = 1144 \text{ m/seg}$$

$$A (3) = 1220 \text{ m/seg}$$

$$A (4) = 915 \text{ m/seg}$$

$$A (5) = 1144 \text{ m/seg}$$

$$A (6) = 976 \text{ m/seg}$$

$$A (7) = 958 \text{ m/seg}$$

$$A (8) = 915 \text{ m/seg}$$

$$A (9) = 1006 \text{ m/seg}$$

Gastos en los tubos:

$$QI (1) = 0.85 \text{ m}^3/\text{seg}$$

$$QI (2) = 0.407 \text{ m}^3/\text{seg}$$

$$QI (3) = 0.445 \text{ m}^3/\text{seg}$$

$$QI (4) = 0.18 \text{ m}^3/\text{seg}$$

$$QI (5) = 0.226 \text{ m}^3/\text{seg}$$

$$QI (6) = 0.115 \text{ m}^3/\text{seg}$$

$$QI (7) = 0.510 \text{ m}^3/\text{seg}$$

$$QI ( 8 ) = 0.342 \text{ m}^3/\text{seg}$$

$$QI ( 9 ) = 0.85 \text{ m}^3/\text{seg}$$

Cargas al principio del tramo:

$$HIA ( 1 ) = 191 \text{ m}$$

$$HIA ( 2 ) = 189 \text{ m}$$

$$HIA ( 3 ) = 189.29 \text{ m}$$

$$HIA ( 4 ) = 184.93 \text{ m}$$

$$HIA ( 5 ) = 187.93 \text{ m}$$

$$HIA ( 6 ) = 186.46 \text{ m}$$

$$HIA ( 7 ) = 186.46 \text{ m}$$

$$HIA ( 8 ) = 185.80 \text{ m}$$

$$HIA ( 9 ) = 184.22 \text{ m}$$

Cargas al final del tramo:

$$HFA ( 1 ) = 189.29 \text{ m}$$

$$HFA ( 2 ) = 187.93 \text{ m}$$

$$HFA ( 3 ) = 186.46 \text{ m}$$

$$HFA ( 4 ) = 186.46 \text{ m}$$

$$HFA ( 5 ) = 185.80 \text{ m}$$

$$HFA ( 6 ) = 185.80 \text{ m}$$

$$HFA ( 7 ) = 184.22 \text{ m}$$

$$HFA ( 8 ) = 184.22 \text{ m}$$

$$HFA ( 9 ) = 182.95 \text{ m}$$

Se presenta la codificación de los datos, una muestra de los resultados proporcionados por la computadora y en la figura 10 se grafica la variación de la carga en el nudo 2.

U. N. A. M.  
INSTITUTO DE INGENIERIA  
FORMA PARA CODIFICACION

PROGRAMA \_\_\_\_\_

CODIFICADO POR \_\_\_\_\_

REVISADO \_\_\_\_\_

FECHA \_\_\_\_\_

PAGINA \_\_\_\_\_ DE \_\_\_\_\_

1	5	7	10	13	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	72	75	80
	EJEMPLO			NUMERO			4											
			9		7	0.04		30.0										
	1		610.		0.915	1006.0		0.030		0.850		187.0		189.29				
	2		915.		0.762	1144.0		0.028		0.407		189.29		187.93				
	3		610.		0.610	1220.0		0.024		0.445		189.29		186.46				
	4		549.		0.457	915.0		0.020		0.180		187.93		186.46				
	5		497.		0.457	1144.0		0.020		0.226		187.93		185.80				
	6		488.		0.457	976.0		0.025		0.115		186.46		185.80				
	7		671.		0.763	958.0		0.040		0.5096		186.46		184.22				
	8		457.		0.610	915.0		0.030		0.342		185.80		184.22				
	9		610.		0.915	1006.0		0.024		0.850		184.22		182.95				
		1			1													
	191.			1														
		2			3													
		3																
	1		1															
	2		2															
	3		2															
		3			3													
		3																
	2		1															
	4		2															
	5		2															
		4			3													
		4																

U. N. A. M.  
INSTITUTO DE INGENIERIA  
FORMA PARA CODIFICACION

PROGRAMA \_\_\_\_\_

CODIFICADO POR \_\_\_\_\_

REVISADO POR \_\_\_\_\_

FECHA \_\_\_\_\_

PAGINA \_\_\_\_\_ DE \_\_\_\_\_

1	5	7	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	72	75	80
	3		1															
	4		1															
	6		2															
	7		2															
			5		3													
			3															
	5		1															
	6		1															
	8		2															
			6		3													
			3															
	7		1															
	8		1															
	9		2															
			7		2													
			9	0.04														
0.0																		
	5		1	5														
	1		3	5	7	9												
	9																	

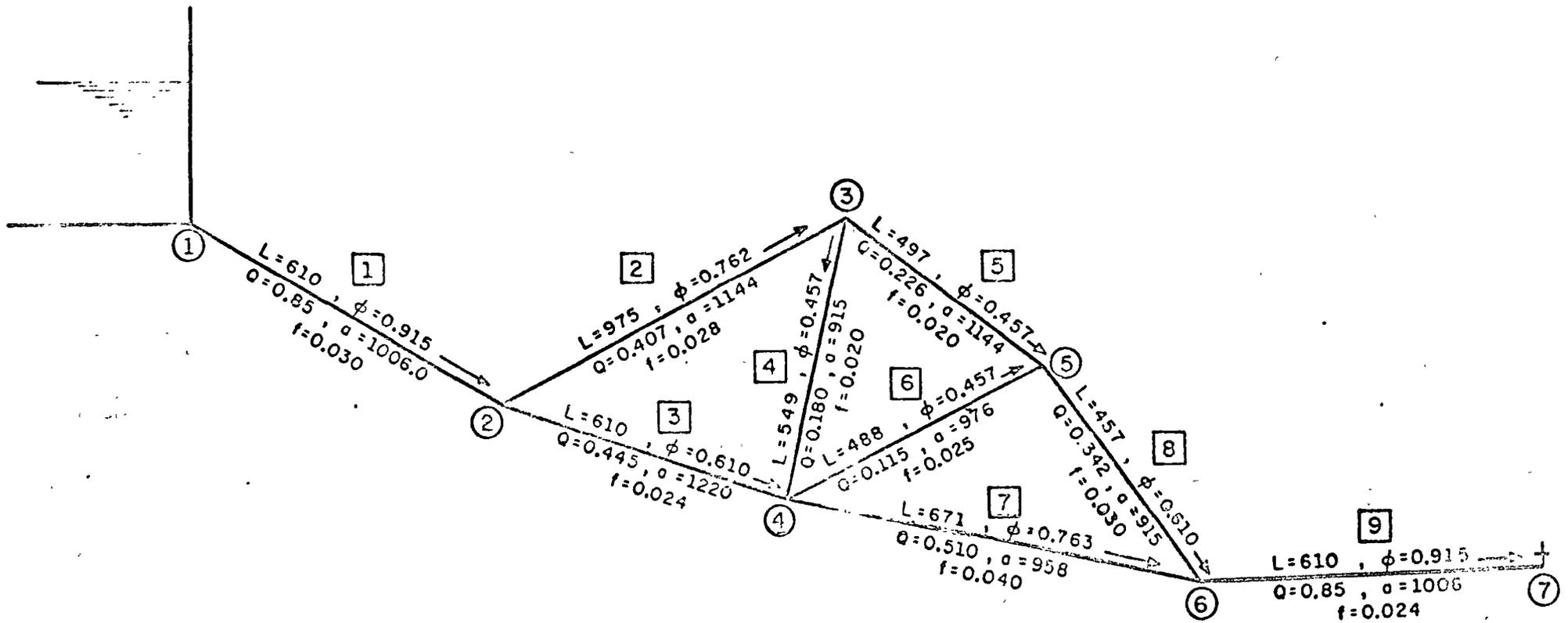


Fig 9 Ejemplo número 4

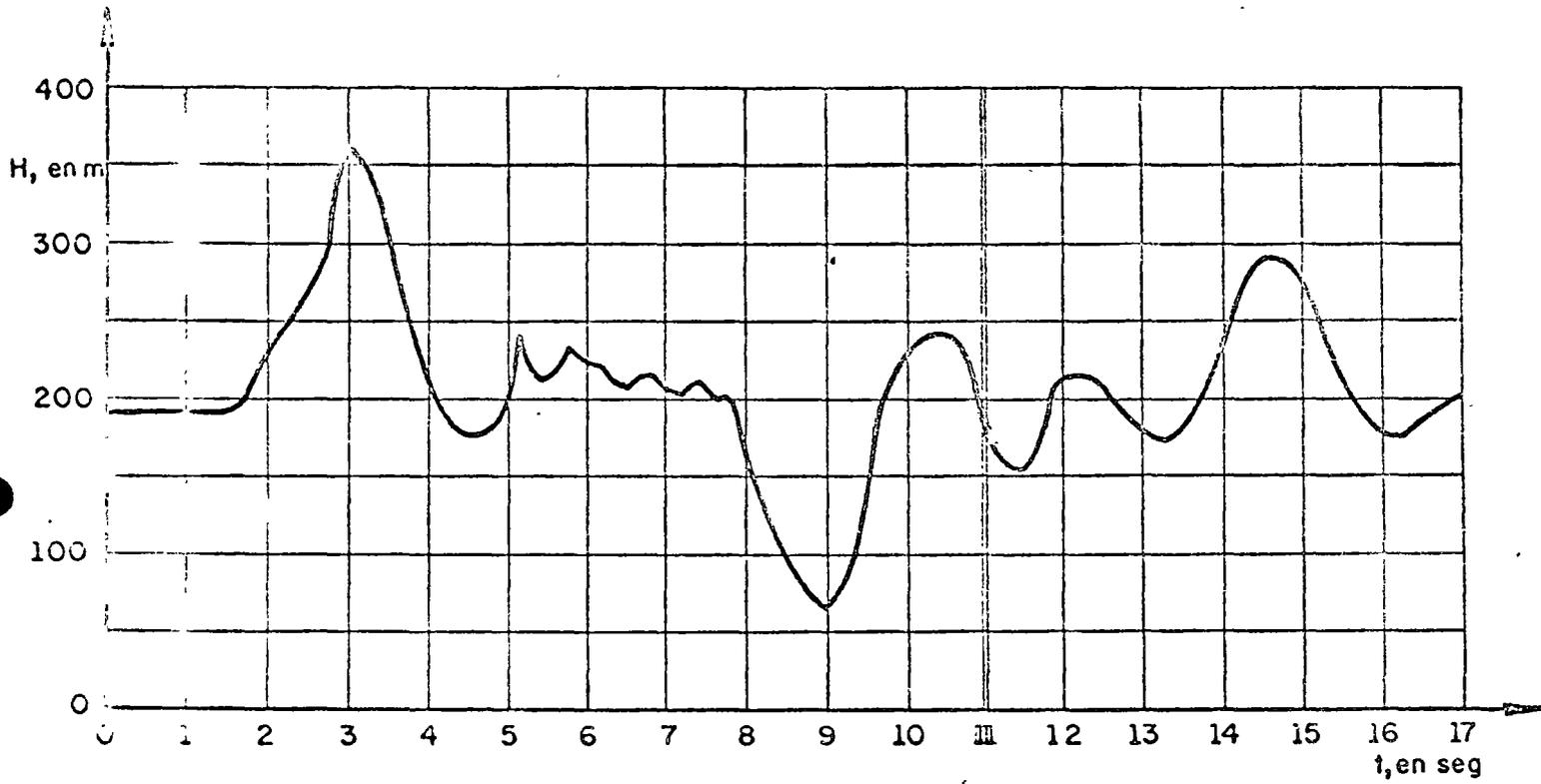


Fig 10 Cargas en el nudo número 2



CENTRO DE EDUCACION CONTINUA.

U. N. A. M.

PLANTAS HIDROELECTRICAS  
Y DE BOMBEO

ROBERTO RINCON GUTIERREZ

1973

# PLANTAS HIDROELECTRICAS Y DE BOMBEO.

## CURVAS CARACTERISTICAS DE LAS TURBOMAQUINAS.

### TURBOMAQUINAS GENERATRICES O BOMBAS.

SI INSPECCIONAMOS LA ECUACION DE EULER DE LAS TURBOMÁQUINAS APLICADA A LAS BOMBAS, VEREMOS QUE AUNQUE SU ORIGEN ES PURAMENTE TEÓRICA, CON ÉSTA SE PUEDE EXPLICAR EL COMPORTAMIENTO REAL DE LAS MÁQUINAS HIDRÁULICAS. LUEGO PODEMOS ESCRIBIR:

$$H_T = \frac{1}{g} V_2 \cos \alpha_2 u_2$$

EN QUE :

$H_T$  , CARGA TOTAL DESARROLLADA POR EL IMPULSOR DE LA BOMBA.

$g$  , ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD.

$V_2$  , VELOCIDAD ABSOLUTA DEL FLUJO EN LA DESCARGA DEL IMPULSOR.

$u_2$  , VELOCIDAD PERIFÉRICA DEL RODETE.

$\alpha_2$  , ÁNGULO COMPRENDIDO ENTRE  $V_2$  Y  $u_2$

EN LA FIGURA 1 SE MUESTRA UN IMPULSOR, EN QUE SE INDICAN LOS ELEMENTOS ANTES-MENCIONADOS, LAS PARTES QUE CONSTITUYEN A ÉSTE Y EN LOS CORTES LOS PARALELOGRAMOS DE VELOCIDADES .

DEL PARALELOGRAMO DE VELOCIDADES A LA SALIDA DEL IMPULSOR , SE TIENE LA FIGURA ( 1-B)

$$V_2 \cos \alpha_2 = u_2 - v_2 \cos (180^\circ - \beta_2)$$

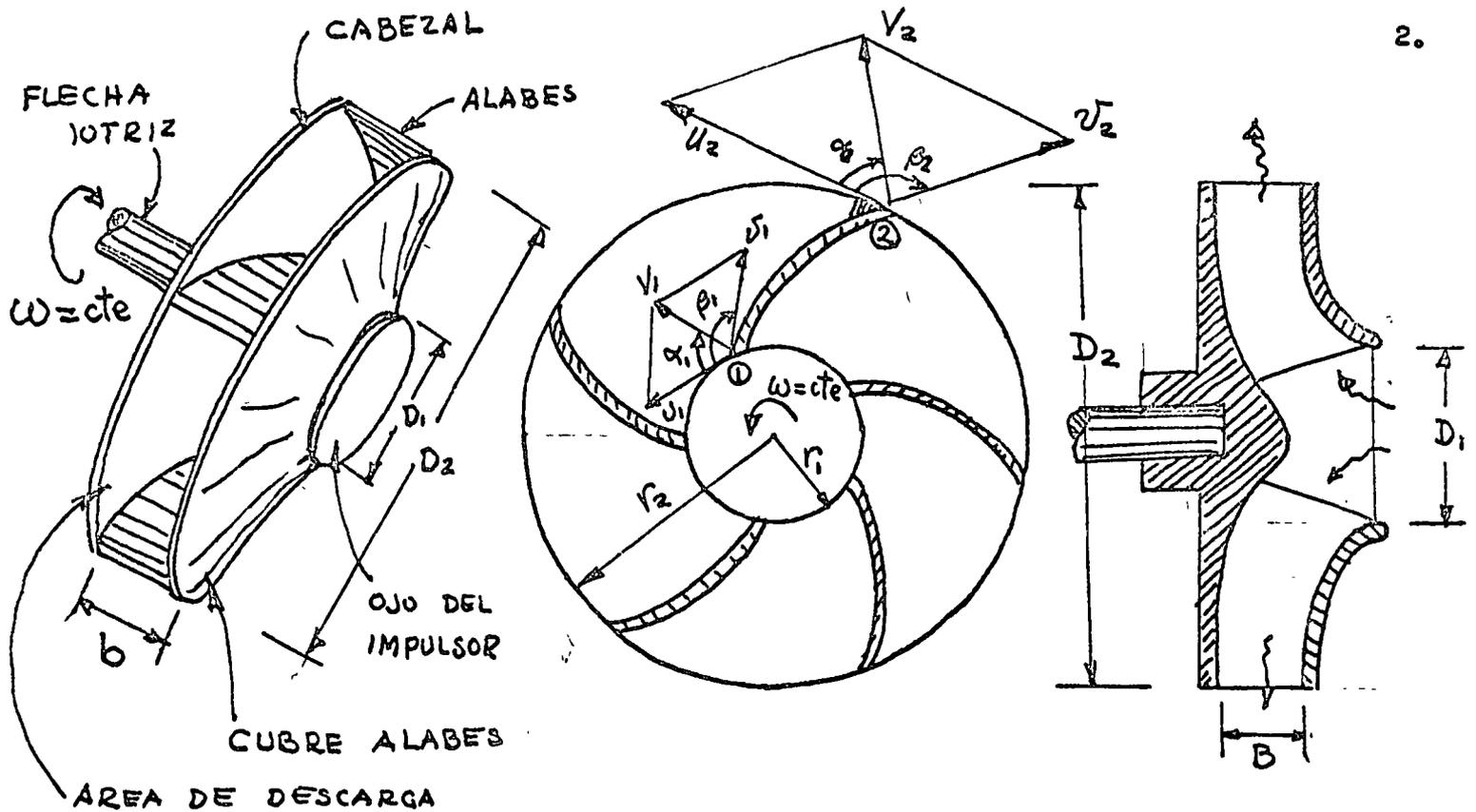


FIGURA 1.

Y POR CONTINUIDAD, VER FIGURA (1 - A).

$$Q = \pi D_2 B K v_2 \text{ SEN } (180^\circ - \beta_2)$$

DE DONDE:

$$v_2 = \frac{Q}{\pi D_2 B K \text{ SEN } (180^\circ - \beta_2)}$$

EN QUE :

$Q$  ; GASTO DE DESCARGA DEL IMPULSOR O DE LA BOMBA.

$B$  ; ANCHO DE LOS CONDUCTOS DEL IMPULSOR EN LA DESCARGA.

$K$  ; COEFICIENTE LIGERAMENTE MENOR QUE LA UNIDAD, QUE TOMA EN CONSIDERACIÓN EL ESPESOR DE LOS ÁLABES EN LA DESCARGA DEL IMPULSOR.

LUEGO HACIENDO SUBSTITUCIONES SUCEESIVAS DE ESTAS ÚLTIMAS DOS EXPRESIONES EN LA PRIMERA SE LLEGA A :

$$H_T = \frac{U_2^2}{g} - \frac{U_2 Q}{g \pi D_2 B K} \cot (180^\circ - \beta_2)$$

Y COMO  $U = \frac{\pi N D_2}{60}$  EN QUE N ES LA VELOCIDAD ANGULAR DE LA FLECHA MOTRIZ EN R.P.M.,

LA ECUACIÓN SE PUEDE REDUCIR A :

$$H_T = K_1 + K_2 Q \cot \beta_2$$

$$(N^2, D^2) \quad (N, D)$$

EN QUE  $K_1$  Y  $K_2$  SON DOS CONSTANTES QUE DEPENDEN DE LA GEOMETRÍA DEL IMPULSOR Y DE N.

SE PUEDE OBSERVAR DE INMEDIATO QUE PARA UN RODETE YA CONSTRUIDO, Y QUE GIRE A UNA  $N = \text{cte.}$  CORRESPONDIENTE A UN MOTOR ACTUAL, LA RELACIÓN  $H_T$ , Q DENOMINADA CURVA DE GASTO, TEÓRICAMENTE ES UNA LÍNEA RECTA .

LAS CURVAS DE GASTOS REALES DE LAS BOMBAS CENTRÍFUGAS, SON GENERALMENTE CURVAS DE TIPO PARABÓLICO, DEBIDO A LAS PÉRDIDAS TANTO HIDRÁULICAS, VOLUMÉTRICAS Y MECÁNICAS, QUE NO SE TOMARON EN CONSIDERACIÓN EN EL ANÁLISIS. PERO AÚN ASÍ, SE PUEDE VER DE INMEDIATO QUE EL TIPO DE CURVA DE GASTO QUE UN IMPULSOR DADO REPRODUCIRÁ, DEPENDE ESENCIALMENTE DEL ÁNGULO  $\beta_2$  DE SALIDA, YA QUE :

SI  $\beta_2 < 90^\circ$ ,  $\cot \beta_2$  ES POSITIVA, POR LO QUE LA CURVA DE GASTOS RESULTA ASCENDENTE Y EL TIPO DEL IMPULSOR ES COMO EL MOSTRADO EN LA FIGURA 2(A) . SI  $\beta_2 = 90^\circ$ ,  $\cot \beta_2 = 0$  Y  $H_T = \text{cte.}$  PARA TODO GASTO; EL IMPULSOR ES COMO EL MOSTRADO EN LA FIGURA 2 (B) Y FINALMENTE SI  $\beta_2 > 90^\circ$  ENTONCES LA  $\cot \beta_2$  ES NEGATIVA Y LA CURVA DE GASTOS RESULTA DESCENDENTE Y EL IMPULSOR SERÁ COMO EL DE LA FIGURA 2 (C). EN LA FIGURA 2 (D) SE MUESTRAN LAS CURVAS DE GASTOS TEÓRICAS Y LAS ACTUALES QUE REPRODUCEN LOS IMPULSORES SEGÚN SUS ÁNGULOS  $\beta_2$  DE SALIDA.

LUEGO SELECCIONANDO EL ÁNGULO  $\beta_2$  DE SALIDA DEL IMPULSOR EN EL DISEÑO DE ÉSTE, PODEMOS DISPONER DE DIFERENTES TIPOS DE BOMBAS QUE REPRODUCEN CURVAS DE GASTOS ADECUADAS PARA LAS DIFERENTES APLICACIONES EN LA INDUSTRIA .

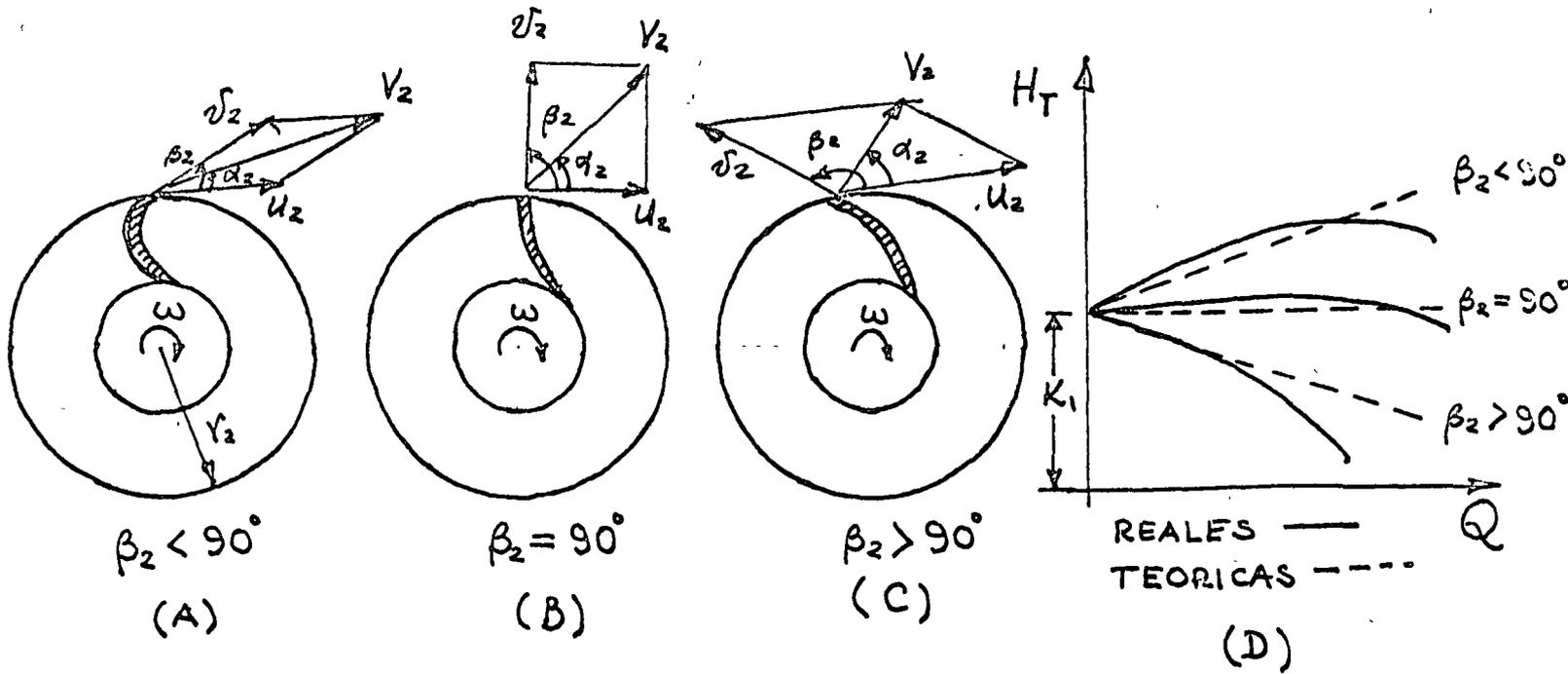


FIGURA 2.

AHORA BIÉN, SUPÓNGASE QUE SE HA SELECCIONADO UNA BOMBA CUYO IMPULSOR TIENE UN-  
 ÁNGULO DE SALIDA  $\beta_2 > 90^\circ$  Y SI MANTENEMOS CONSTANTE LA  $N = N_1$ , ENTONCES AL VARIAR  
 LA ABERTURA DE LA VÁLVULA DE CONTROL GENERAMOS LA CURVA DE GASTO DE LA FIGURA 2 (D)-  
 DANDO POR RESULTADO QUE LA BOMBA PUEDE TRABAJAR EN CUALQUIERA DE LOS PUNTOS DE ESA -  
 CURVA DE GASTOS. AHORA SUPÓNGASE ADEMÁS, QUE CAMBIAMOS LA VELOCIDAD ANGULAR DE  
 $N_1$  A  $N_2$  Y REPETIMOS EL PROCEDIMIENTO, ENTONCES GENERARÍAMOS OTRA CURVA DE GASTOS  
 YA QUE HAN CAMBIADO LOS COEFICIENTES  $K_1$  Y  $K_2$  DE LA ECUACIÓN ANTERIOR Y PROSIGUIEN-  
 DO EN LA MISMA FORMA, GENERARÍAMOS TANTAS CURVAS DE GASTOS COMO N ENSAYÁRAMOS PARA  
 $D = \text{cte.}$ , VER FIGURA 3.

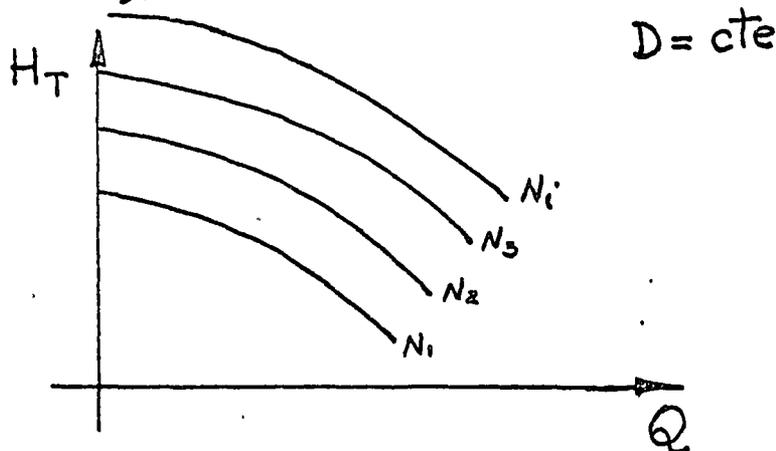


FIGURA 3.

EL PROBLEMA AHORA CONSISTE EN DETERMINAR EN QUÉ PUNTO DEL PLANO ( $H_T, Q$ ) SE DEBE OPERAR LA BOMBA PROPUESTA. ESTO LO PODEMOS SABER SI ENSAYAMOS LA BOMBA EN EL LABORATORIO, OBTENIÉNDOSE AHORA LAS CURVAS REALES DE DICHA BOMBA A VELOCIDADES ACTUALES DE LOS DIFERENTES MOTORES ELÉCTRICOS COMERCIALES. ESTAS VELOCIDADES QUE CORRESPONDEN A LAS VELOCIDADES SÍNCRONAS PARA CORRIENTE ALTERNA DE 50 Y 60 CICLOS SON LAS QUE SE INDICAN A CONTINUACIÓN.

MOTOR ELÉCTRICO DE INDUCCIÓN.		50 CICLOS.	60 CICLOS.
DE	2 - POLOS.	2980 R.P.M.	3550 R.P.M.
DE	4 - POLOS.	1430 "	1750 "
DE	6 - POLOS.	980 "	1150 "
DE	8 - POLOS .	730 "	850 "

MOTORES DE MAYOR NÚMERO DE POLOS SON DE FABRICACIÓN ESPECIAL Y GENERALMENTE SE HACEN SOBRE PEDIDO. LUEGO LAS CURVAS CARACTERÍSTICAS DE LAS BOMBAS CENTRÍFUGAS QUE NOS PRESENTA EL FABRICANTE ESTÁN REFERIDAS A ESTAS VELOCIDADES ANGULARES.

PARA OBTENER ESTAS CURVAS CARACTERÍSTICAS DE LAS BOMBAS EN EL LABORATORIO, SE DISPONE DE UNA INSTALACIÓN SEMEJANTE A LA INDICADA EN LA FIGURA 4.

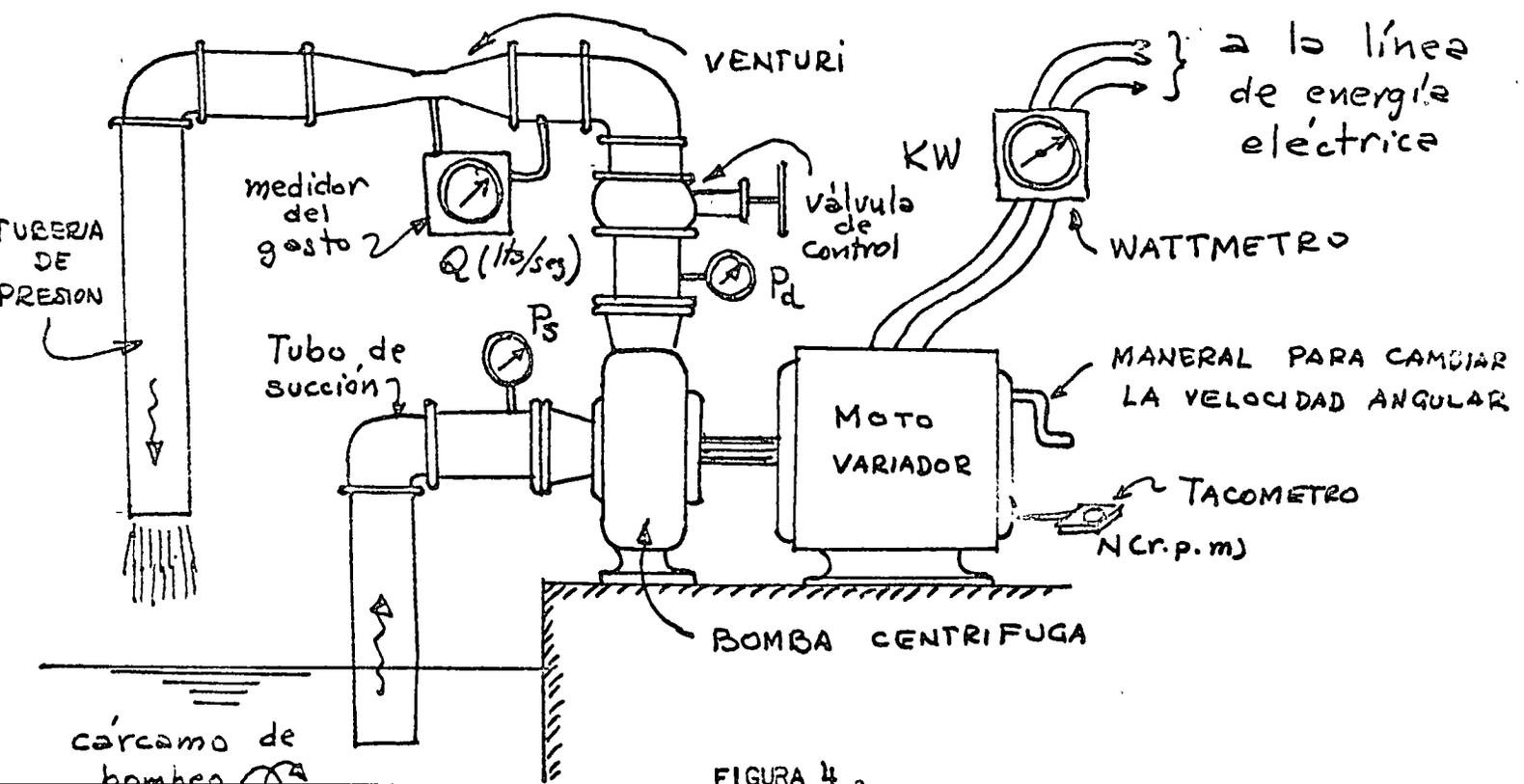


FIGURA 4.

EL PROCEDIMIENTO A SEGUIR ES EL SIGUIENTE:

1°.- SE FIJA UNA VELOCIDAD ANGULAR  $N_1$  CON AYUDA DE UN TACÓMETRO MOVIENDO EL-MANERAL DEL MOTOVARIADOR.

2°.- UNA VEZ CEBADA LA BOMBA, SE CIERRA TOTALMENTE LA VÁLVULA DE CONTROL Y SE LEE EN EL MANÓMETRO DE DESCARGA LA PRESIÓN MÁXIMA DESARROLLADA A LA QUE-SE AGREGA LA LECTURA DEL MANÓMETRO DE SUCCIÓN . ESTO NOS DARÁ EL PRIMER-PUNTO DE LA CURVA DE GASTOS  $H_{T1} = \frac{P_{MÁX.}}{\gamma} + \frac{P_{SUC.}}{\gamma}$  ,  $Q = 0$ .

3°.- SE DÁ UNA ABERTURA A LA VÁLVULA, CON LO CUAL SE ESTABLECE EL ESCURRIMIEN-TO EN EL SISTEMA DE TUBERÍAS Y SE LEEN LOS ELEMENTOS: PRESIÓN DE DESCAR-GA, PRESIÓN DE SUCCIÓN, GASTO EN EL VENTURI Y POTENCIA EN EL WÁTTMETRO . CON ESTO, SE OBTIENE EL SEGUNDO PUNTO DE LA CURVA  $(H_{T2} , Q_2)$  . SE REPI-TE EL PROCEDIMIENTO HASTA DEJAR TOTALMENTE ABIERTA LA VÁLVULA, CON LO -CUAL SE OBTIENEN TANTOS PUNTOS COMO ABERTURAS SE HAGAN .

4°.- SE CAMBIA LA VELOCIDAD ANGULAR DE  $N_1$  A  $N_2$  CON AYUDA DEL TACÓMETRO Y SE-REPITE TODO EL PROCEDIMIENTO ANTERIOR, CON LO CUAL SE OBTIENE LA SEGUNDA CURVA DE GASTOS. SE REPITE ÉSTO TANTAS VECES COMO CURVAS DE  $N_1$  EN R.P.M. SE QUIERAN OBTENER.

LA GRÁFICA RESULTANTE, ES COMO LA MOSTRADA EN LA FIGURA 5 EN LA QUE SE MUES-TRA ADEMÁS LA INFORMACIÓN COMPLETA QUE PROPORCIONA EL FABRICANTE DE UNA BOMBA , A -PARTIR DE LOS DATOS OBTENIDOS ANTERIORMENTE EN EL LABORATORIO Y QUE INDICAREMOS A -CONTINUACIÓN CÓMO SE PROCESAN ÉSTOS, PARA LLEGAR A DICHAS GRÁFICAS.

COMO PARA CADA ABERTURA DE VÁLVULA SE HAN LÍDO SIMULTÁNEAMENTE:  $P_D$  ,  $P_S$  ,  $Q$  Y  $P_F$  (KW), ENTONCES:

$$H_{T1} = \frac{P_{D1}}{\gamma} + \frac{P_{S1}}{\gamma} \quad (\text{CARGA TOTAL REFERIDA AL CENTRO DE LA FLE - CHA MOTRIZ DE LA BOMBA})$$

$Q$  ; GASTO MEDIDO DIRECTAMENTE CON EL APARATO DIFERENCIAL CONECTA-DO AL VENTURI.

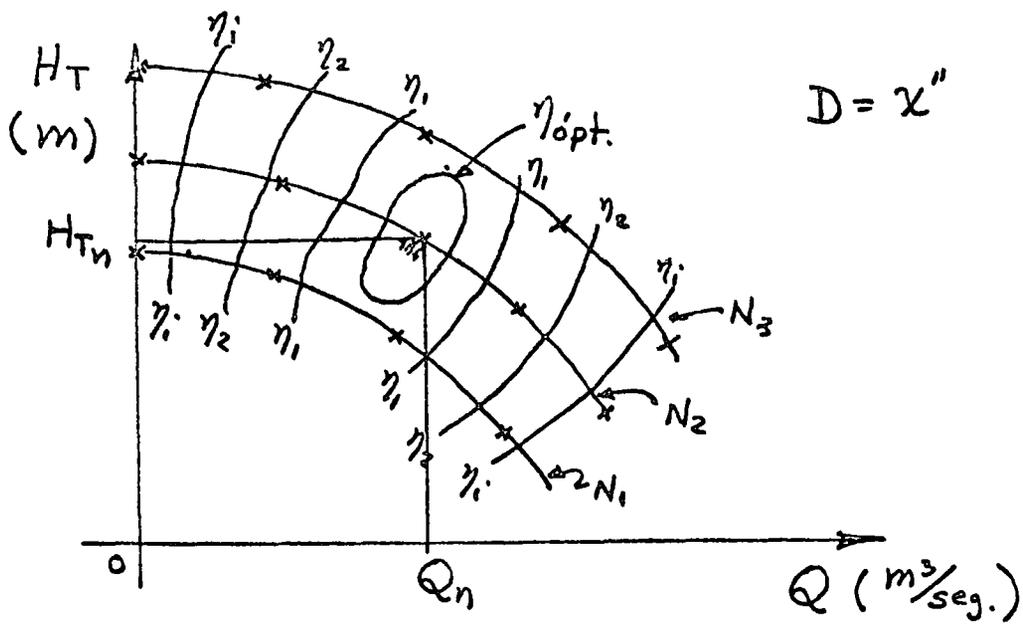


FIGURA 5.

ESTO DA EL PUNTO EN LA GRÁFICA QUE REPRESENTA  $(H_{T_n}, Q_n)$  PARA CADA ABERTURA DE LA VÁLVULA. COMO SE HA MEDIDO LA POTENCIA AL FRENO CONSUMIDA SE PUEDE CALCULAR LA EFICIENCIA.

$$\eta_i = \frac{H_{T_n} \cdot Q_n}{P_{F_i}}$$

EL VALOR DE LA EFICIENCIA SE ANOTA EN LA GRÁFICA EN EL PUNTO CORRESPONDIENTE. UNIENDO TODOS LOS PUNTOS DE IGUAL EFICIENCIA (INTERPLANDO A COTA REDONDA), SE OBTIENEN CURVAS DE IGUAL EFICIENCIA CON LO CUAL SE PUEDE SIMPLEMENTE POR INSPECCIÓN DETERMINAR LA ZONA DE MÁXIMA EFICIENCIA Y POR CONSIGUIENTE EL PUNTO DE OPERACIÓN AL QUE DAR COMPREDIDA EN LA ZONA UNA CURVA DE GASTO DE DETERMINADA  $N$ . A LA CARGA  $(H_{T_n})$ , AL GASTO  $(Q_n)$  Y A LA VELOCIDAD ANGULAR  $(N_n)$  ASÍ DETERMINADOS SE LES DENOMINA CARGA-NORMAL, GASTO NORMAL Y VELOCIDAD ANGULAR NORMAL DE OPERACIÓN RESPECTIVAMENTE. SI COMBINAMOS ESTOS TRES ELEMENTOS EN UN PARÁMETRO ADIMENSIONAL, SE OBTIENE LA VELOCIDAD ESPECÍFICA TIPO DE ESA BOMBA Y QUE SE EXPRESA CON :

$$N_s = \frac{N_n \sqrt{Q_n}}{H_{T_n}^{3/4}}$$

Y ES PARA LAS CONDICIONES QUE FUÉ DISEÑADA ESA BOMBA, PORQUE A ESA  $N_s$ , DESARROLLA SU MÁXIMA EFICIENCIA Y POR CONSIGUIENTE CONSUME LA MENOR CANTIDAD DE ENERGÍA POSIBLE.

FUERA DE ESA RANGO LA BOMBA OPERA, PERO SU EFICIENCIA SERÁ SIEMPRE INFERIOR - A LA DEL PUNTO NORMAL DE OPERACIÓN. ADEMÁS EL PARÁMETRO  $N_B$  ES IMPORTANTE EN LA SELECCIÓN DEL EQUIPO PARA UN SISTEMA DE BOMBEO, PORQUE LOS ELEMENTOS QUE CARACTERIZAN A ÉSTE, SON: LA CARGA TOTAL, EL GASTO Y LA VELOCIDAD ANGULAR DEL MOTOR QUE SE INSTALARÁ EN DICHO SISTEMA DE BOMBEO Y QUE POR TANTO CORRESPONDE A LOS ELEMENTOS QUE INTEGRAN LA EXPRESIÓN DE LA  $N_B$ .

AHORA BIÉN, COMO VIMOS DESDE UN PRINCIPIO LAS CONSTANTES  $K_1$  Y  $K_2$  DE LA ECUACIÓN DEPENDEN NO SOLO DE  $N$ , SINO TAMBIÉN DE  $D$ ; EL FABRICANTE PUEDE PRESENTAR EL PLANO CARACTERÍSTICO ANTES MENCIONADO, EN FUNCIÓN DE  $D$  CON  $N = \text{cte.}$  VER FIGURA 6; ES DECIR QUE DENTRO DE UNA MISMA CARCAZA DE UNA BOMBA DADA, PUEDEN OPERAR VARIOS IMPULSORES, SIEMPRE Y CUANDO EL IMPULSOR NO SOBREPASE DETERMINADAS DIMENSIONES QUE MATERIALMENTE HAGA BAJAR LA EFICIENCIA DE OPERACIÓN DE ÉSTA.

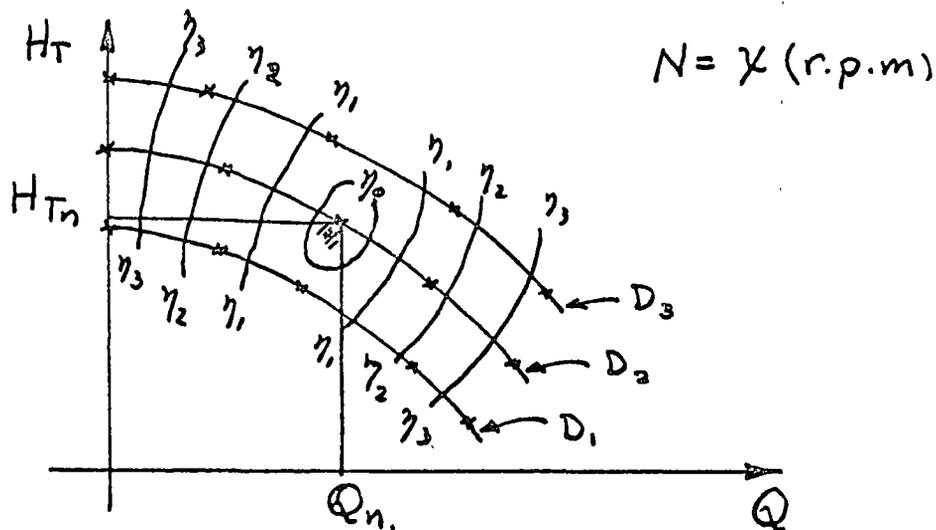


FIGURA 6.

DE AQUÍ SE INFIERE QUE UNA MISMA BOMBA TIENE UNA GRAN VERSATILIDAD PARA OPERAR EN DIFERENTES SISTEMAS DE BOMBEO CON SOLO CAMBIARLE SU  $N$  O SU  $D$  DEL IMPULSOR.

CUANDO SE SELECCIONAN LAS BOMBAS PARA UN SISTEMA DE BOMBEO QUE HA DE OPERAR EN PARALELO, SE DEBEN ESCOGER SIEMPRE AQUELLAS CUYAS CURVAS CARACTERÍSTICAS DE GASTOS SON ESTABLES; ES DECIR QUE EXISTE UN SOLO GASTO PARA CADA CARGA DE OPERACIÓN ;

POR LO QUE EL FABRICANTE SELECCIONA ÁNGULOS  $(180^\circ - \beta_2)$  COMPREDIDOS ENTRE LOS  $22^\circ 30'$  Y  $90^\circ$  DANDO COMO RESULTADO CURVAS DE GASTOS DESCENDENTES. CURVAS DE GASTOS COMO LAS DE LA FIGURA 7, DEBEN EVITARSE EN SISTEMAS QUE OPERAN EN PARALELO, PORQUE DEBIDO A LAS FLUCTUACIONES DE LA ENERGÍA ELÉCTRICA O LAS VARIACIONES DE OPERACIÓN DE ESTOS SISTEMAS FÁCILMENTE PUEDEN QUEDAR BLOQUEADAS O INTERRUMPIRSE - EL BOMBEO Y HASTA VARIAR EL GASTO DE BOMBEO EN RANGOS CONSIDERABLES; POR EJEMPLO DE  $Q_1$  A  $Q'_1$  EN LA FIGURA 7, PARA UNA MISMA  $H_T$ .

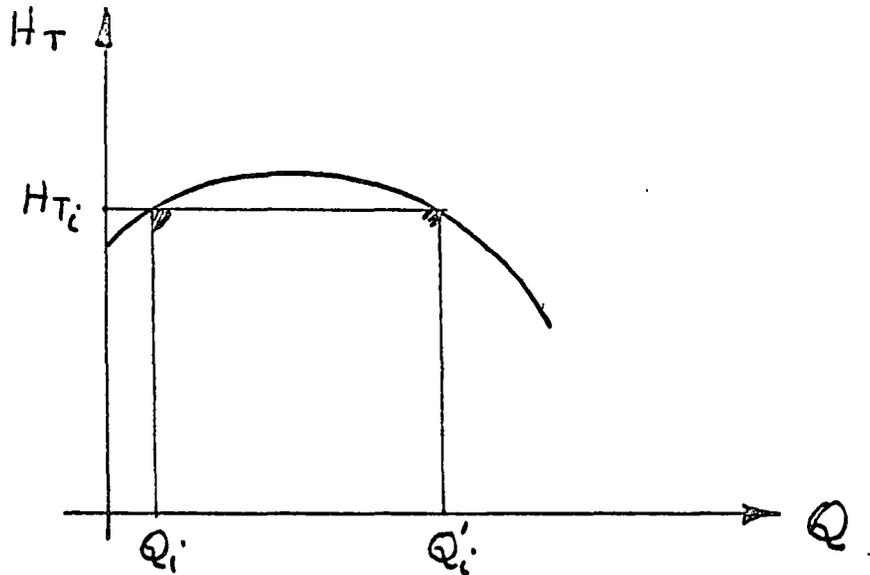
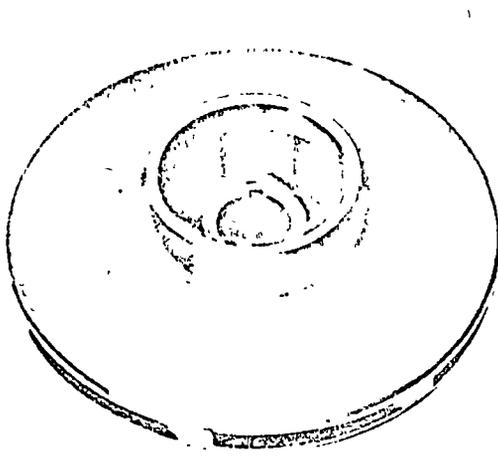


FIGURA 7.

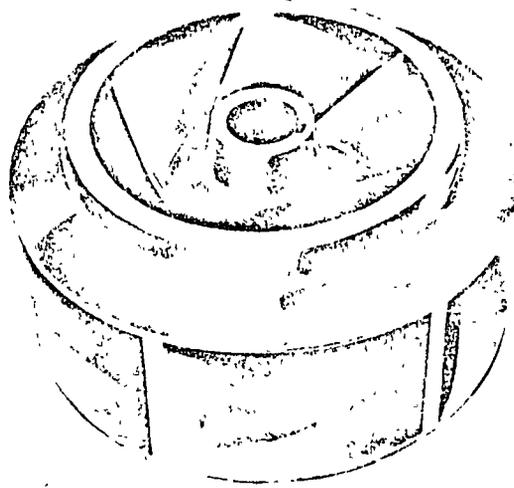
UNA DE LAS APLICACIONES FUNDAMENTALES DE LA VELOCIDAD ESPECÍFICA ES EL PODER PREDECIR EL COMPORTAMIENTO DE UNA BOMBA CUALQUIERA. ESTO SE DEBE A QUE DOS TURBOMÁQUINAS SIMILARES QUE TIENEN LA MISMA  $N_s$ , REPRODUCEN EL MISMO TIPO DE CURVAS CARACTERÍSTICAS. EN LA FIGURA 8 SE DÁ UNA GRAFICA QUE PERMITE DETERMINAR LA EFICIENCIA DE LAS DIFERENTES BOMBAS EN FUNCIÓN DE  $N$  Y DEL GASTO COMO PARÁMETRO, INDICÁNDOSE ADEMÁS EL RANGO EN QUE OPERAN LOS DIFERENTES RODETES Y EN LA MISMA SE INDICAN LOS TIPOS DE IMPULSORES DESDE EL DE FLUJO RADIAL HASTA EL DE FLUJO AXIAL TANTO DE SIMPLE COMO DOBLE SUCCIÓN.

EN LA FIGURA 8' SE DAN TRES GRAFICAS QUE PERMITEN CONSTRUIR LAS CURVAS DE GASTOS, DE EFICIENCIA Y DE POTENCIA EN FUNCIÓN DE  $N_s$  Y DEL GRADO DE ABERTURA

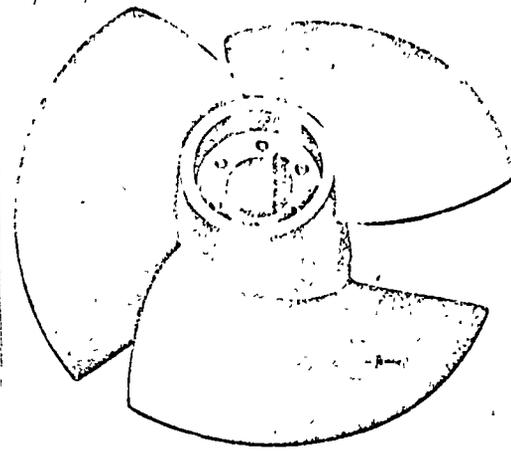
FIGURA 8.



FLUJO RADIAL



FLUJO MIXTO



FLUJO AXIAL

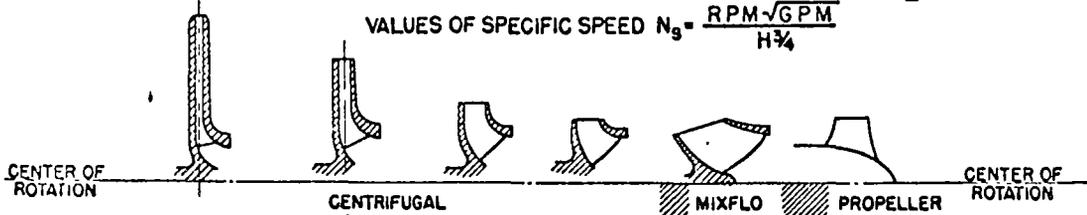
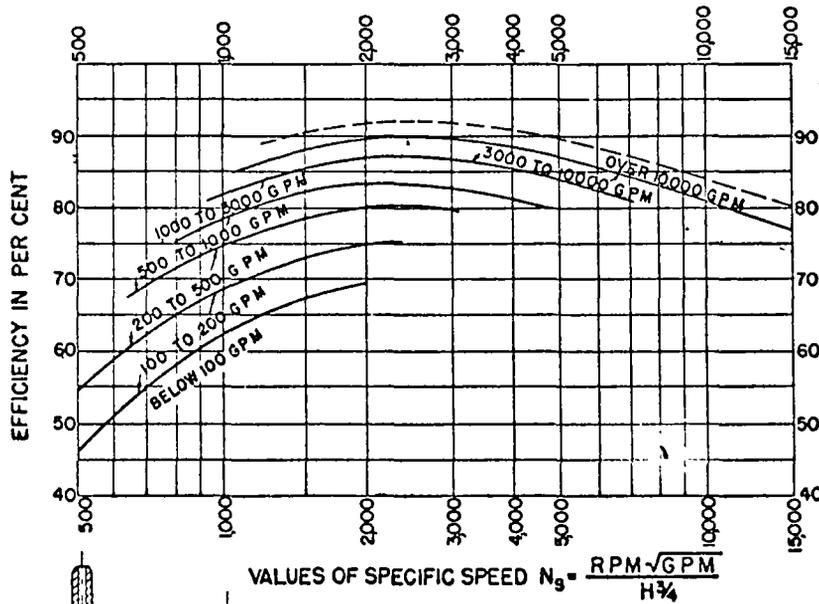
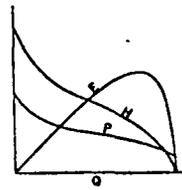
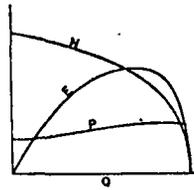
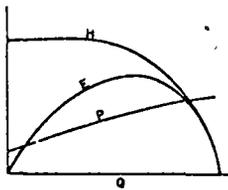
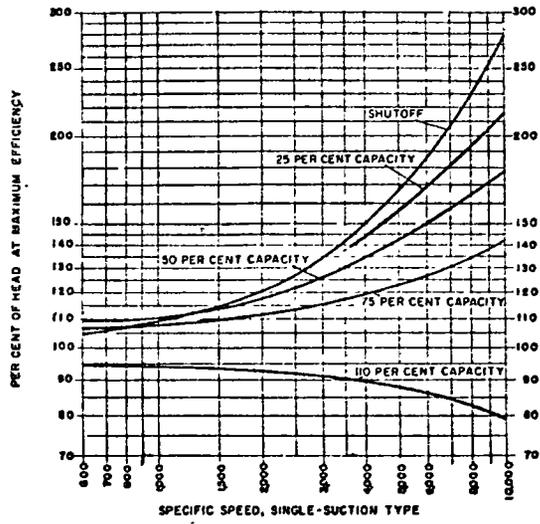
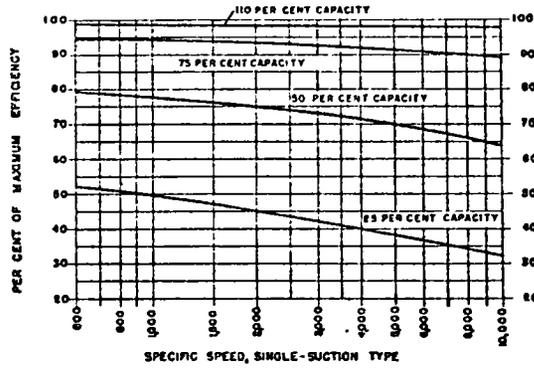


FIGURA 8<sup>o</sup>

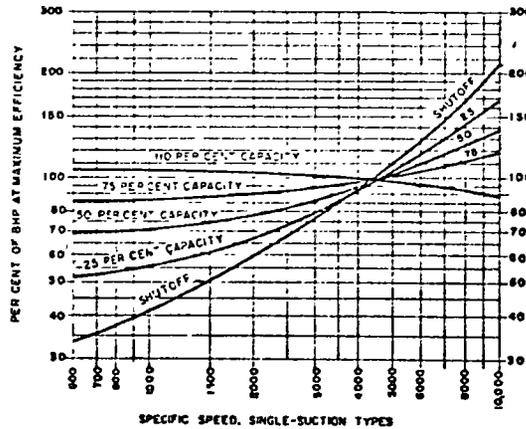
CURVAS DE GASTOS



CURVAS DE EFICIENCIAS



CURVAS DE POTENCIAS



DE LA VÁLVULA DE DESCARGA, PUDIÉNDOSE OBTENER LOS PUNTOS SIGUIENTES:

$Q = 0, 25\% Q_N, 50\% Q_N, 75\% Q_N$  Y  $110\% Q_N$ , LO CUAL PERMITE CONSTRUIR ESTAS CURVAS Y ESTUDIAR LOS SISTEMAS DE BOMBEO SIN NECESIDAD DE TENER QUE RECURRIR AL FABRICANTE PARA QUE NOS PROPORCIONE LAS CURVAS CARACTERÍSTICAS DE SUS BOMBAS.

CUANDO SE QUIERE APROVECHAR UN EQUIPO QUE HA SIDO ABANDONADO, ES FACTIBLE PODER DETERMINAR SUS CURVAS CARACTERÍSTICAS SI SE DISPONE DE LA INFORMACIÓN SIGUIENTE:

- 1.- NOTA DE COMPRA DE LA BOMBA.
- 2.- PLACA NOMINAL DE LA BOMBA O DEL MOTOR.
- 3.- HACIENDO MEDICIONES FÍSICAS DEL IMPULSOR Y DE LA CAROZA DE LA BOMBA Y LUEGO APLICANDO LAS CONSTANTES DE DISEÑO DE LA BOMBA.

LAS DOS PRIMERAS GENERALMENTE SON DIFÍCILES DE CONSEGUIR PARA UN EQUIPO VIEJO, POR LO QUE USUALMENTE HAY QUE RECURRIR A LA TERCERA.

LAS CONSTANTES DE LA BOMBA CENTRÍFUGA SE OBTIENEN EN LA FORMA SIGUIENTE: DEL PARALELOGRAMO DE VELOCIDADES A LA SALIDA DEL RODETE Y APLICANDO LA LEY DE LOS SENOS PARA GARANTIZAR QUE EL FLUJO SE PEGA A LOS ÁLABES Y EL PARALELOGRAMO MENCIONADO CIERRA DANDO MÁXIMA EFICIENCIA, SE TIENE: VER FIGURA 9. (GRÁFICA).

$$\frac{U_2}{\text{SEN}(\beta_2 - \alpha_2)} = \frac{V_2}{\text{SEN}(180^\circ - \beta_2)}$$

DESPEJANDO:  $V_2$  :

$$V_2 = \frac{\text{SEN}(180^\circ - \beta_2)}{\text{SEN}(\beta_2 - \alpha_2)} U_2$$

LLEVANDO ESTE VALOR A LA ECUACIÓN DE EULER :

$$H_T = \frac{\eta_B}{g} V_2 \cos \alpha_2 U_2$$

SE TIENE:

$$U_2 = \sqrt{\frac{\text{SEN}(\beta_1 - \alpha_1)}{2 \eta_B \text{SEN}(180^\circ - \beta_1) \cos \alpha}} \sqrt{2 g H_T}$$

LO QUE PERMITE RELACIONAR  $U_2$  CON  $H_T$  SI SE CONOCE:

$$\phi = \sqrt{\frac{\text{SEN}(\beta_1 - \alpha_1)}{2 \eta_B \text{SEN}(180^\circ - \beta_1) \text{COS} \alpha_1}} \quad \text{QUE ES COEFICIENTE PERIMETRAL QUE COMO SE VÉ ES FUNCIÓN DE LOS ÁNGULOS } \alpha_1 \text{ Y } \beta_1 \text{ , ESPECIALMENTE DE } \beta_1 \text{ Y}$$

COMO  $U_2 = \frac{\pi N D_2}{60}$  SE PUEDE IGUALAR A LA ANTERIOR :

$$\frac{\pi N D_2}{60} = \phi \sqrt{2g H_T}$$

$$H_T = \left( \frac{\pi N D_2}{60 \sqrt{2g} \phi} \right)^2$$

DESPEJANDO A  $U_2$  Y HACIENDO LA MISMA OPERACIÓN Y CONSIDERANDO ADEMÁS QUE:

$$V_{M2} = \frac{V_2}{\text{SEN} \alpha_2} \quad \text{SE TIENE :}$$

$$V_{M2} = \sqrt{\frac{\text{SEN}^2 \alpha_2 \text{SEN}(180^\circ - \beta_2)}{2 \eta_B \text{SEN}(\beta_2 - \alpha_2)}} \sqrt{2g H_T}$$

LO QUE PERMITE RELACIONAR LA VELOCIDAD MERIDIANA CON  $H_T$  A TRAVÉS DE :

$$K_{OR} = \sqrt{\frac{\text{SEN}^2 \alpha_2 \text{SEN}(180^\circ - \beta_2)}{2 \eta_B \text{SEN}(\beta_2 - \alpha_2)}} \quad \text{DENOMINADA CONSTANTE DE GASTO, Y QUE :}$$

$$Q = (\pi D_2 - 2e) \cdot V_M$$

$\phi$  Y  $K_{OR}$  SE PUEDEN DETERMINAR EN LAS GRÁFICAS DE LA FIGURA 9'.

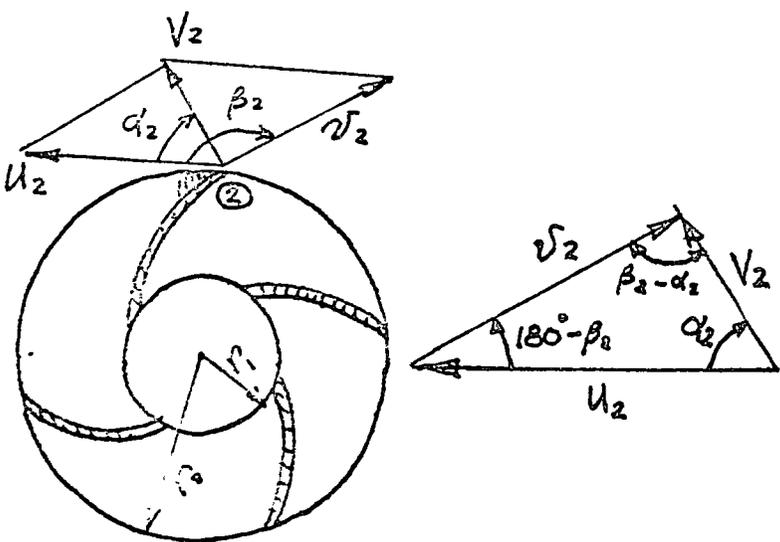


FIGURA 9.

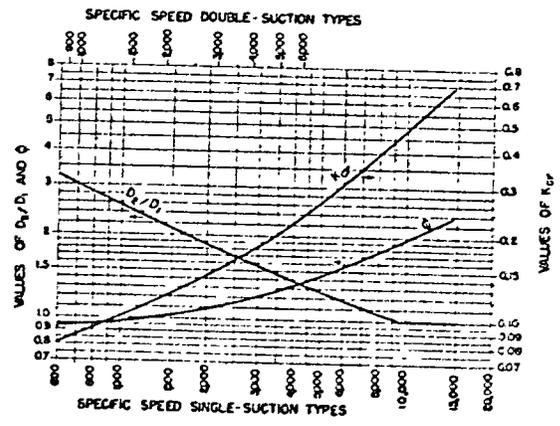


FIGURA 9'

Y EN QUE LAS LITERALES SE DENOMINAN DE ACUERDO A LA FIGURA 1.

LUEGO HACIENDO LA MEDICIÓN EN EL IMPULSOR DE UNA BOMBA SE PUEDE OBTENER SU  $Q_N \cdot H_{TN}$  CON LO CUAL ES FACTIBLE CONSTRUIR SU CURVA CARACTERÍSTICA EN BASE A SU  $N_S$ .  $N$  SE DETERMINA POR MEDIO DE LA FIGURA 10 QUE LIMITA LA VELOCIDAD PERIFÉRICA DEL OJO DEL IMPULSOR.

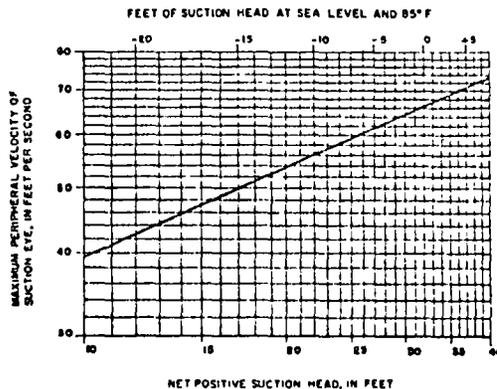


FIGURA 10.

FINALMENTE SE REVISA LA BOMBA POR ESFUERZOS DEL MATERIAL, DETERMINÁNDOSE LA PRESIÓN MÁXIMA QUE REGISTRE LA CARGAZA EN LA JUNTA DE INSPECCIÓN DEL LADO DE DECARGA EN QUE SE CONSIDERA COMO ESFUERZO DE TRABAJO A LA TENSION DE LOS PERNOS.

$$\sigma_T = 350 \text{ Kg/cm}^2$$

Y EL ÁREA MEDIDA ES LA RAÍZ DE LA CUERDA Y LA POTENCIA MÁXIMA QUE ES CAPAZ DE TRANSMITIR LA FLECHA MOTRIZ SE DETERMINA CON EL PAR MÁXIMO MEDIDO EN LA ZONA DEL COUPLE CON UN ESFUERZO MÁXIMO DE TRABAJO DE

$$\tau = 490 \text{ Kg/cm}^2$$

AÚN MÁS, SI QUEREMOS QUE NUESTRA BOMBA TRABAJE CON OTROS VALORES DIFERENTES DE  $Q$  Y  $H_T$ , PODEMOS MODIFICAR SU CURVA CARACTERÍSTICA VARIANDO  $N$  O  $D$  DENTRO DE UN RANGO DE 20%, HACIENDO EL RAZONAMIENTO SIGUIENTE: SEA EL PARALELOGRAMO DE VELOCIDADES A LA SALIDA AL IMPULSOR EL QUE DESIGNAREMOS CON  $u_0, v_0, V_0$  Y  $u, v, V$  LAS

VELOCIDADES INICIALES Y ACTUALES VER FIGURA 11 Y ADEMÁS  $\alpha_0 = \alpha$  Y  $\beta_0 = \beta$  PARA QUE SE CONSERVE LA MISMA EFICIENCIA.

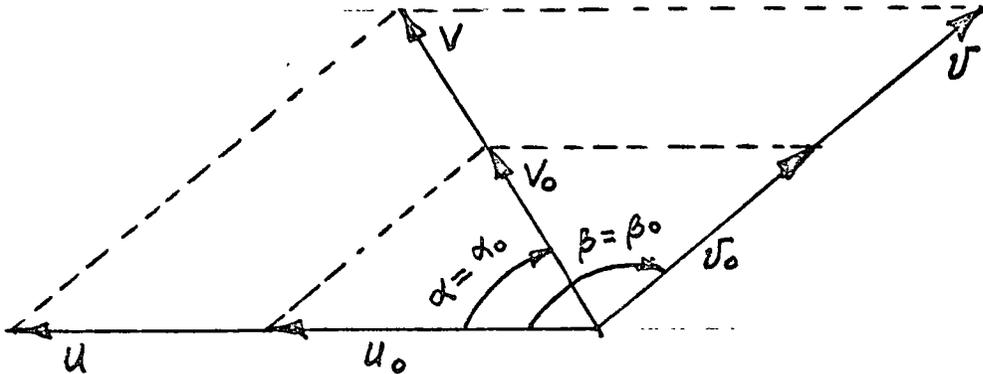


FIGURA 11.

SI  $U_0$  CAMBIA A  $U$ ,  $V_0$  CAMBIA A  $V$  EN LA MISMA PROPORCIÓN QUE  $U$ .

POR LO QUE EN LA ECUACIÓN DE EULER :

$$H_T = \frac{1}{g} V_2 \cos \alpha_2 U_2 \approx K U^2$$

$H_T$  CRECE CON EL CUADRADO DE  $U$ , LUEGO SE PUEDE ESCRIBIR:

$$H_T = K_1' U^2 = K_1 N^2$$

COMO  $V$  ES LA COMPONENTE DE GASTO Y  $V$  CRECE PROPORCIONAL A  $U$ , LUEGO EL GASTO CRECE EN LA MISMA PROPORCIÓN, POR LO QUE  $Q = K_2 N$  Y LA POTENCIA CON EL PRODUCTO DE LAS DOS, O SEA :  $P = K_3 N^3$

LUEGO SE PUEDEN ESCRIBIR LAS SIGUIENTES PROPORCIONES:

$$\frac{H_T}{H_{T_0}} = \left( \frac{N}{N_0} \right)^2 \quad \frac{Q}{Q_0} = \frac{N}{N_0} \quad \frac{P}{P_0} = \left( \frac{N}{N_0} \right)^3$$

RAZONANDO EN LA MISMA FORMA CON LOS DIÁMETROS A TRAVÉS DE :

$$U = \frac{\pi N D}{60}$$

SE LLEGA A LAS SIGUIENTES RELACIONES:

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{D}{D_0} \quad \frac{H}{H_0} = \left(\frac{D}{D_0}\right)^2 \quad \frac{P}{P_0} = \left(\frac{D}{D_0}\right)^3$$

EL FABRICANTE DE BOMBAS PROPORCIONA LAS CURVAS CARACTERÍSTICAS DE ÉSTAS PARA AGUA A 20°C. APROXIMADAMENTE. SI EL FLUIDO POR BOMBEARSE ES DE VISCOSIDAD SEMEJANTE AL DEL AGUA PERO DE DIFERENTE DENSIDAD, LAS CURVAS SIGUEN SIENDO LAS MISMAS EXCEPTO QUE HAY QUE CORREGIR LA POTENCIA CON :

$$P = \frac{\gamma_{LÍQ.} Q_N H_{TN}}{\gamma_N \times 76} \quad \text{H P.}$$

ES DECIR LA  $\gamma$  DEL LÍQUIDO.

SI CAMBIA SUBSTANCIALMENTE LA VISCOSIDAD, ENTONCES LA CURVA CARACTERÍSTICA ACTUAL DE LA BOMBA SE PUEDE OBTENER DE LA ORIGINAL HACIÉNDOSE USO DE LA GRÁFICA CORRECTIVA (EMPÍRICA) DE LA FIGURA 12 QUE SE EXPLICA POR SÍ SOLA, Y QUE SE PODRÁ VER EN LA SIGUIENTE PÁGINA.

#### OBTENCIÓN DE CURVAS CARACTERÍSTICAS DE BOMBAS OPERANDO EN PARALELO.

CUANDO LAS BRIDAS DE DESCARGA DE UN SISTEMA DE BOMBEO SE CONECTAN A UNA SOLA TUBERÍA DE PRESIÓN Y LAS BRIDAS DE SUCCIÓN CON SUS RAMAS DE SUCCIÓN INDEPENDIENTES VAN A UN CÁRCAMO DE BOMBEO, SE DICE QUE SE TIENE UN SISTEMA DE BOMBEO OPERANDO EN PARALELO.

PARA OBTENER LAS CURVAS CARACTERÍSTICAS DE LAS N BOMBAS OPERANDO EN PARALELO SE SIGUE EL PROCEDIMIENTO QUE SE MENCIONA A CONTINUACIÓN: SEAN N CURVAS CARACTERÍSTICAS DE LAS N BOMBAS FIGURA 13, EN QUE SE ILUSTRAN ÚNICAMENTE TRES.

COMO EN LA RAMA DE DESCARGA LA PRESIÓN QUE DESARROLLAN LAS BOMBAS OPERANDO-

# CORRECTION FACTORS

CAPACITY AND EFFICIENCY HEAD

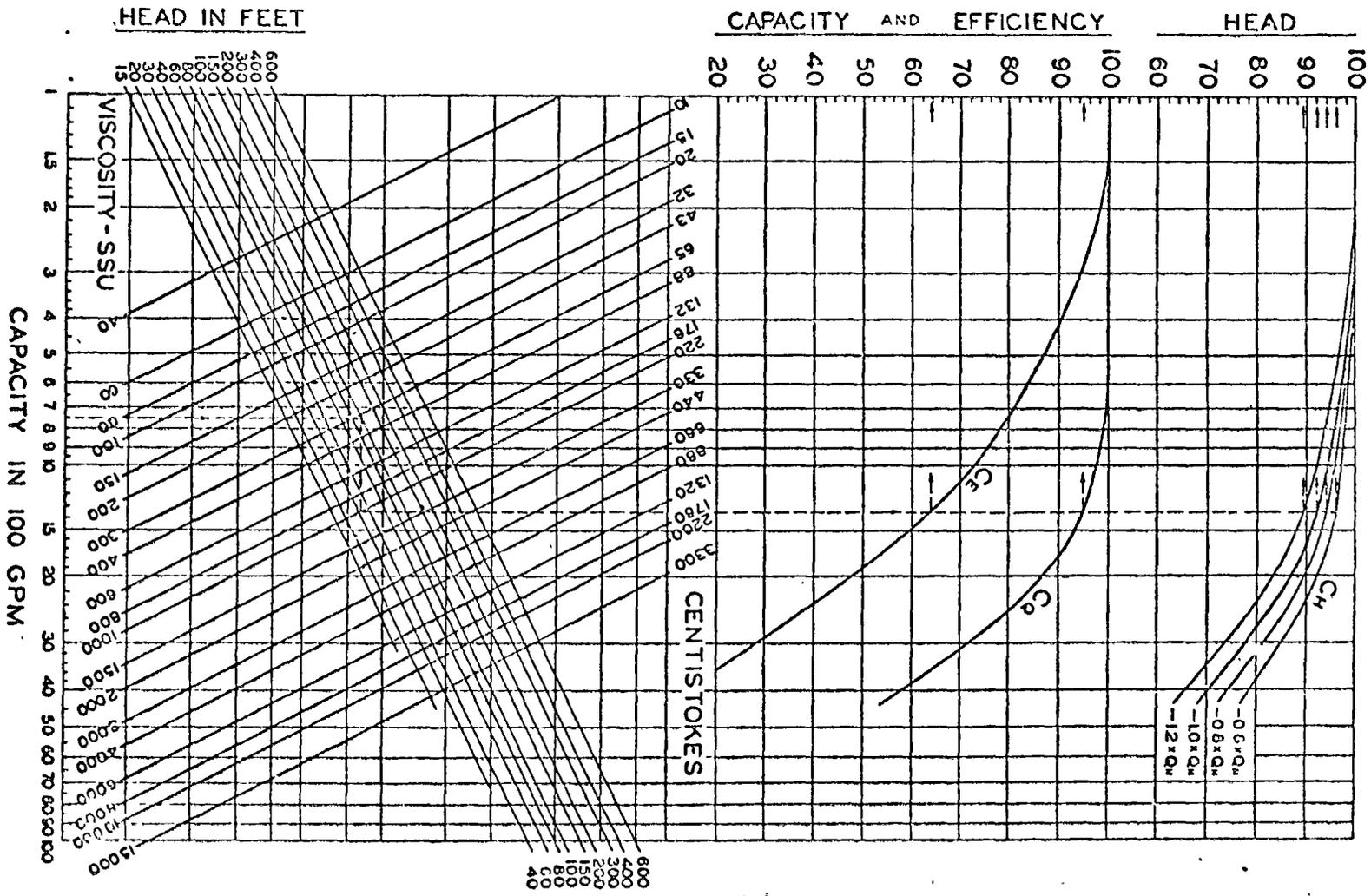


FIGURA 12

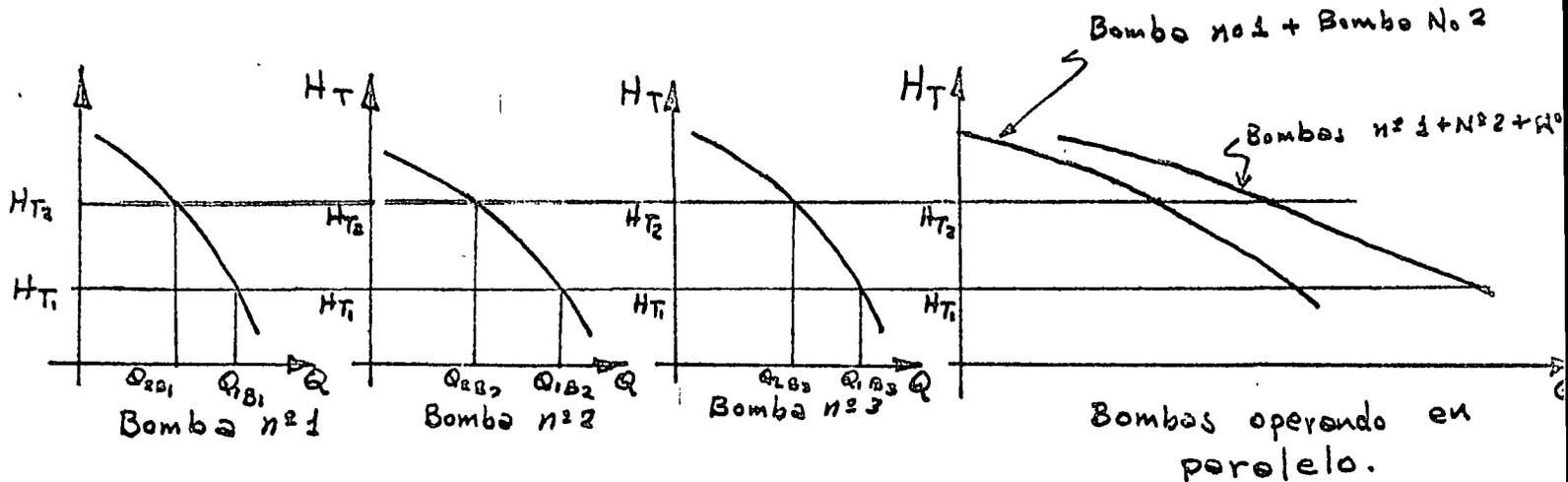


FIGURA 13.

A LA VEZ, DEBE SER LA MISMA PARA QUE NO HAYA RECIRCULACIÓN DE AGUA ENTRE ELLAS O BLOQUEO DE LAS MISMAS, SE ESCOGE UNA  $H_T$ , Y DE LAS CURVAS CARACTERÍSTICAS PARA ESA  $H_T$ , SE OBTIENEN LOS GASTOS QUE DA CADA UNA DE ELLAS  $Q_{1B_1}$ ,  $Q_{1B_2}$  ..... Y SE SUMAN DANDO ASÍ EL PUNTO  $H_T = (Q_{1B_1} + Q_{1B_2} + \dots)$ , PROSIGUIENDO EN LA MISMA FORMA SE PUEDEN OBTENER TANTOS PUNTOS COMO  $H_T$  SE ESCOJAN, HASTA LA PRESIÓN MÁXIMA DE INICIACIÓN DEL BOMBEO. EL RESULTADO ES UNA CURVA DE GASTOS MUY EXTENDIDA. ADEMÁS, RESULTAN TANTAS CURVAS DE GASTOS COMO BOMBAS OPERAN A LA VEZ MÁS CADA UNA DE LAS CURVAS CARACTERÍSTICAS DE CADA BOMBA OPERANDO POR SÍ SOLA.

### CAVITACION.

LA CAVITACION ES UN FENÓMENO ESENCIALMENTE MECÁNICO, QUE CONSISTE EN EL COLAPSO DE LAS BURBUJAS DE VAPOR QUE AL DESAPARECER PRODUCEN PRESIONES DE ALTA INTENSIDAD QUE PENETRAN EN LA POROSIDAD DEL MATERIAL Y LO DESPRENDE AL SOBREPASAR LA RESISTENCIA DEL MISMO. SE PUEDE CONCEBIR EL FENÓMENO POR MEDIO DE UNA ESTRANGULACIÓN COMO LA MOSTRADA EN LA FIGURA 14.

SI FORZAMOS UN GASTO CONSTANTE  $Q$ , POR CONTINUIDAD LAS VELOCIDADES EN (1) Y (2) SERÁN  $V_1 = \frac{Q}{A_1}$  Y  $V_2 = \frac{Q}{A_2}$ . SI APLICAMOS EL TEOREMA DE BERNOULLI ENTRE (1) Y (2) SE TIENE:

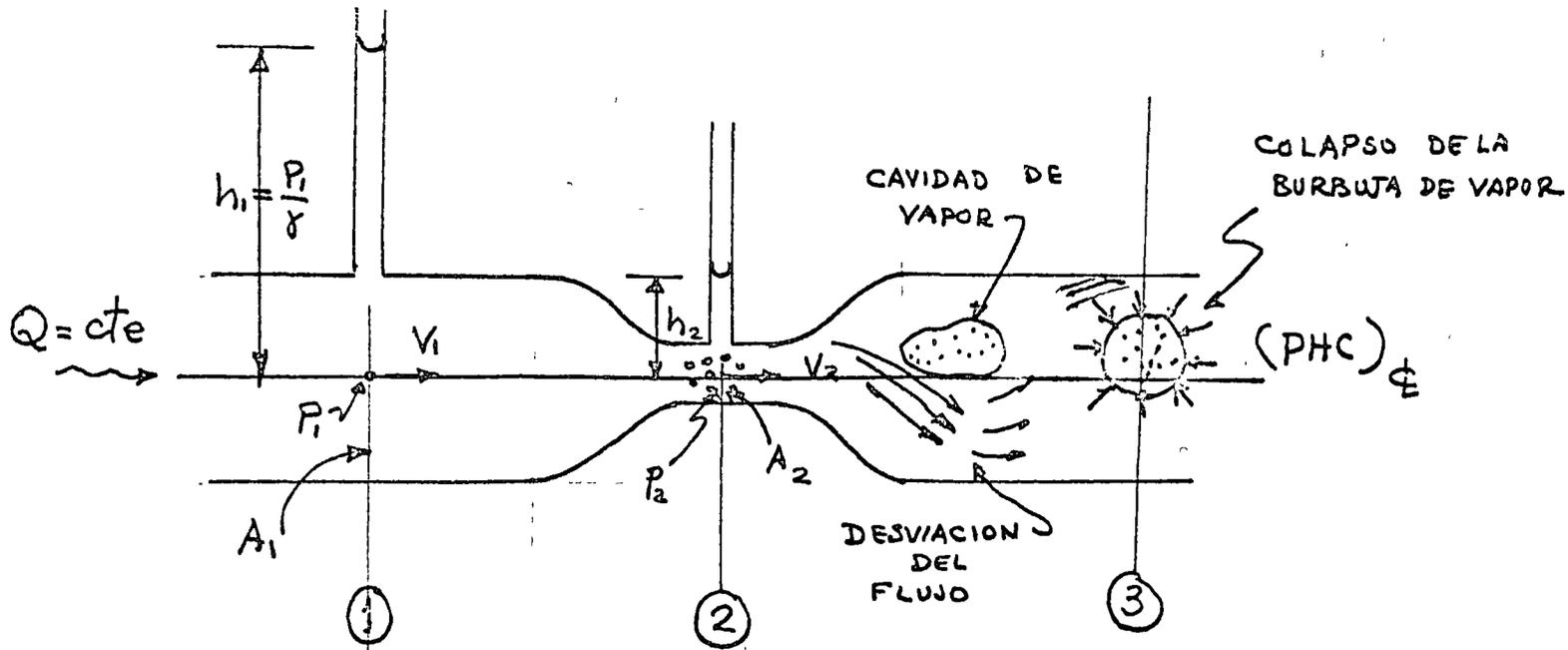


FIGURA 14.

$$\underbrace{\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma}}_{E_1} = \underbrace{\frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma}}_{E_2}$$

DESPRECIÁNDOSE LAS PÉRDIDAS POR SER RELATIVAMENTE PEQUEÑAS. COMO LA  $E_1$  SE MANTIENE CONSTANTE POR SER  $Q = cte$ , LUEGO  $E_2$  DEBE SER IGUAL A LA  $E_1$ , PERO COMO  $V_2$  CRECE CONSIDERABLEMENTE SI  $A_2$  DISMINUYE, ENTONCES  $P_2$  PUEDE BAJAR A TAL GRADO QUE :  $P_2 \leq P_v$ , A LA PRESIÓN DE VAPOR SATURADO A LA TEMPERATURA AMBIENTE Y EL AGUA HIERVE FORMANDO BURBUJAS DE VAPOR QUE AL SER ARRASTRADAS POR EL FLUJO FORMAN CAVIDADES DE VAPOR QUE DESVIAN EL FLUJO ERRÁTICAMENTE PRODUCIÉNDOSE SACUDIDAS O VIBRACIONES POR EL CAMBIO DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO. PERO AL LLEGAR A LA SECCIÓN (3) ESTAS CONDICIONES NO PUEDEN SUBSISTIR POR SER LAS CONDICIONES ORIGINALES DANDO ORIGEN AL COLAPSO DE LA BURBUJA DE VAPOR CON SUS CONSIGUIENTES EFECTOS Y DAÑOS AL MATERIAL.

PARA EVITAR ESTE EFECTO EN LA RAMA DE SUCCIÓN DE LA BOMBA SE PROCEDE COMO SE INDICA EN LA FIGURA 15.

SI ESTABLECEMOS EL TEOREMA DE BERNOULLI ENTRE LOS  $(PHC)_0$  Y  $(PHC)_1$  TOMANDO -

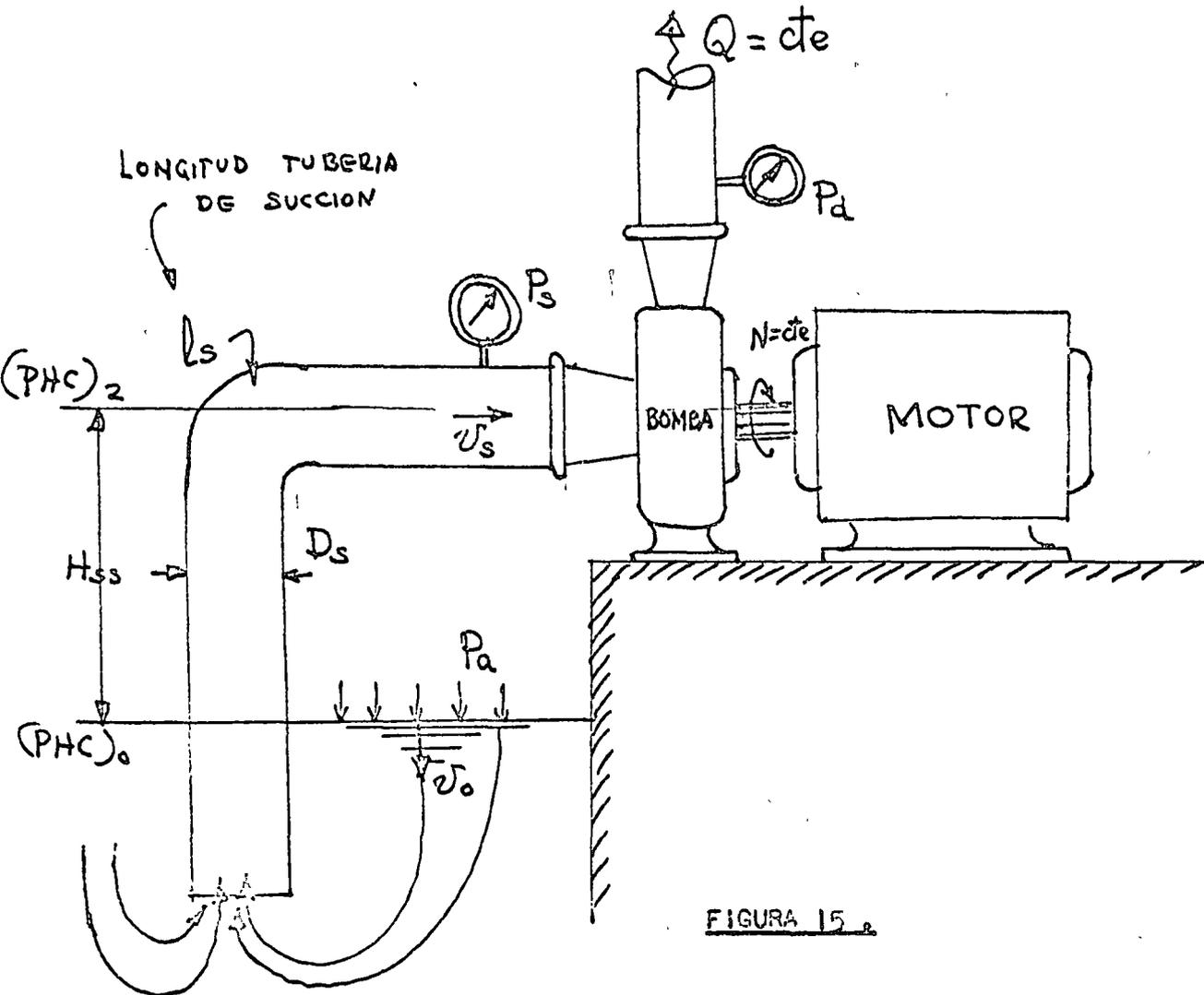


FIGURA 15.

COMO BASE EL PRIMERO, SE TIENE:

$$\frac{P_A}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2g} + Z_0 \cong H_{sB} + \frac{V_B^2}{2g} + \frac{P_B}{\gamma} + \sum h_{fs}$$

$V_0$  ES DESPRECIABLE Y  $Z_0 \cong 0$  LUEGO; DESPEJAMOS  $\frac{P_B}{\gamma}$  SE TIENE :

$$\frac{P_B}{\gamma} = \frac{P_A}{\gamma} - H_{sB} - \frac{V_B^2}{2g} - \sum h_{fs}$$

COMO NO QUEREMOS QUE SE EFECTUÉ LA CAVITACIÓN, HAGAMOS :

$$\frac{P_B}{\gamma} > \frac{P_v}{\gamma} \quad \text{o} \quad P_A ; \text{ PRESIÓN ATMOSFÉRICA .}$$

$$\frac{P_A}{\gamma} - H_{sB} - \frac{V_B^2}{2g} - \sum h_{fs} > \frac{P_v}{\gamma}$$

DE ESTA PODEMOS DESPEJAR  $\frac{V_B^2}{2g}$  , QUEDANDO :

$$\left( \frac{P_A}{\gamma} - \frac{P_V}{\gamma} \right) - H_{Sg} - \sum h_f > \frac{V_s^2}{2g}$$

AL PRIMER MIEMBRO DE LE DENOMINA CARGA DE SUCCIÓN POSITIVA NETA (CSPN) Y SE INDICA COMO  $H_{SV}$ , SU SIGNIFICADO SE VÉ DE INMEDIATO EN LA FIGURA 16; ES DECIR, ES LA ENERGÍA DISPONIBLE PARA INTRODUCIR EL LÍQUIDO EN LA BRIDA DE SUCCIÓN DE LA BOMBA SIN QUE CAVITE.

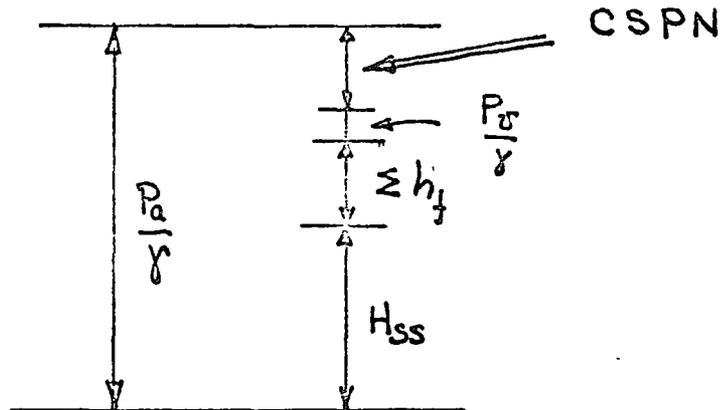


FIGURA 16.

$$0' \quad H_{SV} > \frac{V_s^2}{2g}$$

SI DIVIDIMOS LOS DOS MIEMBROS DE LA DESIGUALDAD ENTRE  $H_T$  QUEDA:

$$\frac{H_{SV}}{H_T} > \frac{V_s^2}{2g H_T}$$

SI INSPECCIONAMOS LA CURVA DE GASTO DE LA BOMBA PARA NETE, VEREMOS QUE EL SEGUNDO MIEMBRO ES UNA CONSTANTE QUE SE DENOMINA COEFICIENTE DE CAVITACIÓN DE THOMA (  $\sigma$  ) ; MIENTRAS QUE EL PRIMER MIEMBRO VARÍA, PUES SI AUMENTA  $H_{Sg}$  PUEDE LLEGAR UN MOMENTO EN QUE  $\frac{H_{SV}}{H_T} = \sigma$ . Y SE PRESENTA LA CAVITACIÓN INCIPIENTE, LUEGO SI ADOPTAMOS UN :  $\sigma_{TH} = N \sigma$  EN QUE  $N \approx 1.5$  (COEFICIENTE DE SEGURIDAD ) ENTONCES PODEMOS USAR LA IGUALDAD SIN TEMOR A LA CAVITACIÓN O SEA:

$$\frac{H_{SV}}{H_T} = \sigma_{TH}$$

DE DONDE:

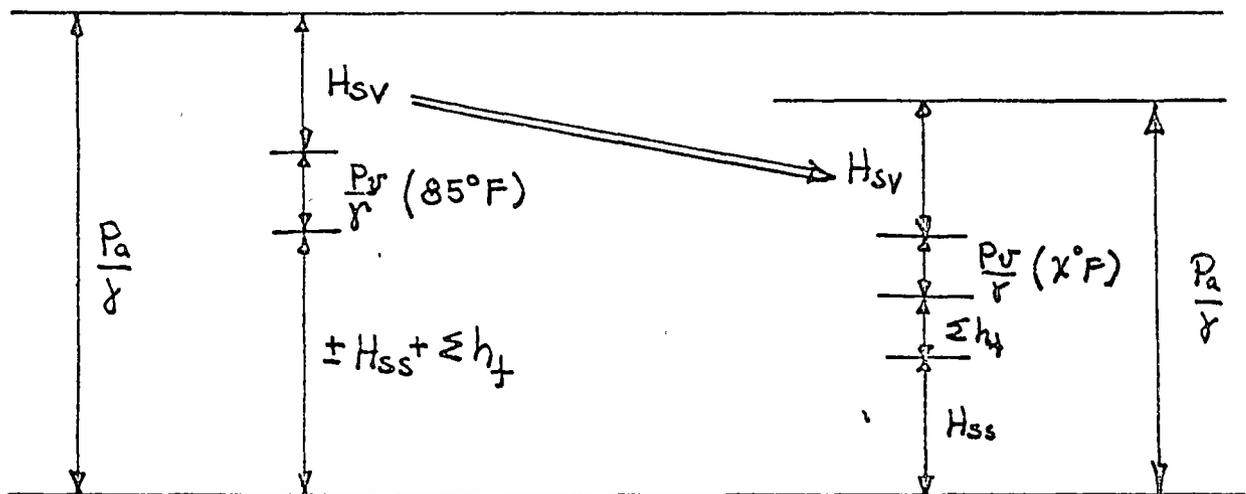
$$H_{sv} = \sigma_{TH} \cdot H_T$$

EL FABRICANTE DEBE PROPORCIONAR LA CURVA DE CSPN EN EL MISMO PLANO CARACTERÍSTICO PARA QUE UNO PUEDA INSTALAR CORRECTAMENTE LA BOMBA ; YA QUE

$$H_b \leq \frac{P_a}{\gamma} - \frac{P_v}{\gamma} - \sum h_f - H_{sv}$$

COMO GENERALMENTE EL FABRICANTE OMITIÓ ESTA INFORMACIÓN EN SUS CURVAS CARACTERÍSTICAS, ENTONCES PODEMOS RECURRIR A LA FIGURA 17 DEL INSTITUTO DE HIDRÁULICA DE LOS ESTADOS UNIDOS, EN QUE SE LIMITA LA NEMÁX. PARA UN  $H_T$  Y UNA ALTURA DE SUCCIÓN O CARGA DE SUCCIÓN DADAS SEGÚN SEA EL CASO. ESTAS GRÁFICAS ESTÁN DADAS PARA AGUA A  $85^\circ F$  ( $29^\circ C$ ) Y EL NIVEL DEL MAR; POR LO QUE AL UTILIZARSE SE DEBEN HACER LAS LÍNEAS DE SUCCIÓN COMPRENDIDAS A ALTURAS SOBRE EL NIVEL DEL MAR Y TEMPERATURA DEL LÍQUIDO DE BOMBEO DEL LUGAR DONDE SE HA DE HACER LA INSTALACIÓN. LA FIGURA 17 SE ENCONTRARÁ EN LA PÁGINA 23 .

LA CORRECCIÓN SE HACE IGUALANDO LAS  $H_{sv}$  Y DESPEJANDO LA  $(\pm H_s + \sum h_f)$  CARGA (+) O ALTURA (-) DE SUCCIÓN COMO SE ILUSTRÁ EN LA FIGURA 18.



$H_{sv}$ , AL NIVEL DE MAR

FIGURA 18.

A ALTURA SOBRE EL NIVEL DEL MAR DEL LUGAR

FIGURA 17.

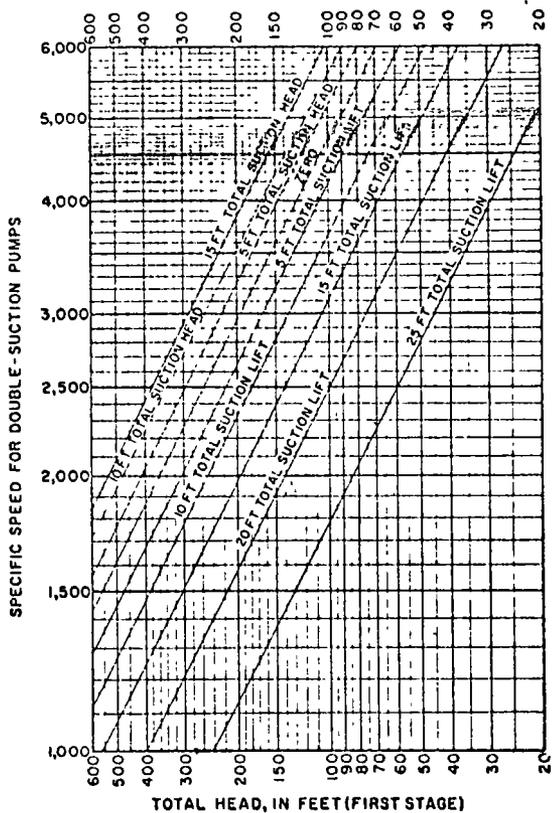


Fig. 17.43 Hydraulic Institute specific speed limit chart for double-suction, single-stage pumps with shaft through eye of impeller

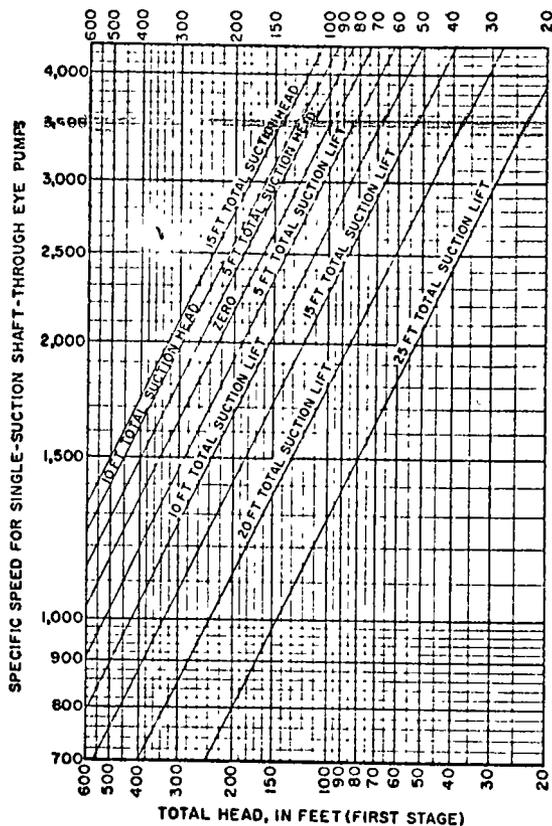


Fig. 17.44 Hydraulic Institute specific speed limit chart for single-suction, single-stage pumps with shaft through eye of impeller

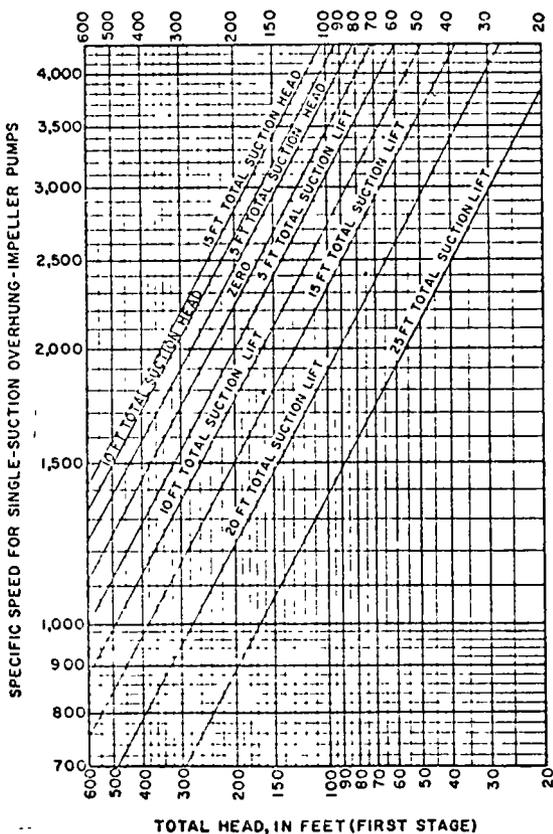


Fig. 17.45 Hydraulic Institute specific speed limit chart for single-suction, overhung-impeller pumps

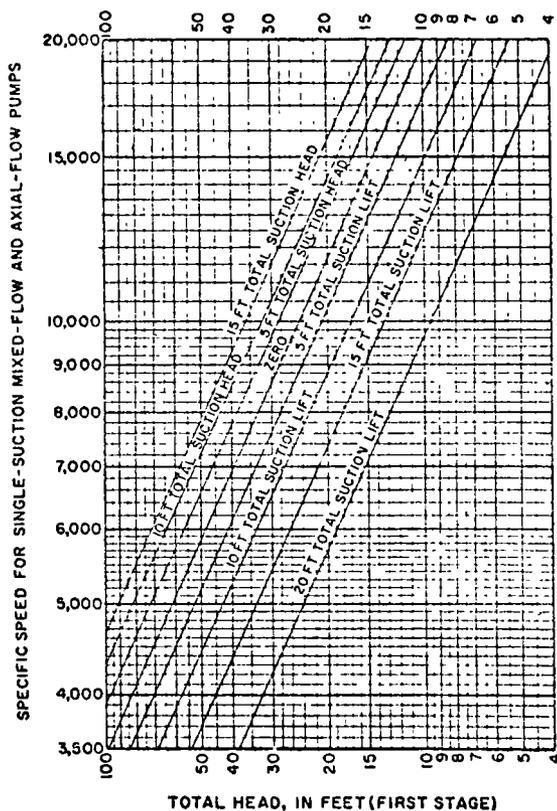


Fig. 17.46 Hydraulic Institute specific speed limit chart for single-suction, mixed- and axial-flow pumps

LA  $\pm H_s + \sum H_f$  ES CON LA QUE SE DEBE ENTRAR A LA GRÁFICA ANTES MENCIONADA Y DE AHÍ DESPEJAR LA  $N_s$  MÁX PERMISIBLE, POR CAVITACIÓN O LA  $H_T$  SEGÚN SEA EL CASO, COMO SE VERÁ EN LOS EJEMPLOS DE SELECCIÓN DE EQUIPO.

TURBOMAQUINAS MOTRICES O TURBINAS.

VOLVIENDO NUEVAMENTE A LA ECUACIÓN DE EULER, PERO AHORA PARA LA CARGA NETA QUE APROVECHA UNA TURBINA :

$$H_N = \frac{1}{g \eta_T} V_1 \cos \alpha_1 u_1$$

Y HACIENDO USO DE LAS EXPRESIONES SIGUIENTES:

$$V_1 \cos \alpha_1 = u_1 - v_1 \cos (180^\circ - \beta_1)$$

$$u_1 = \frac{\pi N D_1}{60} \quad v_1 = \frac{Q}{\pi D_1 K B \text{ SEN } (180^\circ - \beta_1)}$$

SE LLEGA A :

$$H_N = \frac{1}{g \eta_T} \frac{\pi^2 D_1^2}{3600} N^2 - \frac{Q}{60 K B} \cot (180^\circ - \beta_1) N$$

Y LA POTENCIA:

$$P_F = \frac{\rho Q H_N \eta_T}{76} = \frac{\rho Q \pi^2 D_1^2}{6 \times 273600} N^2 - \frac{\rho Q^2 \eta_T}{4760 K B} \cot (180^\circ - \beta_1) N$$

O:

$$P_F = K_1 N^2 - K_2 N$$

(Q)            (Q)

O SEA QUE LAS CURVAS CARACTERÍSTICAS DE LAS TURBINAS EN FUNCIÓN DE N, SON PARÁBOLAS QUE PASAN POR EL ORIGEN (VER FIGURA 19) Y QUE PARA UNA N MÁXIMA LA POTENCIA ES CERO, ESTA VELOCIDAD ANGULAR SE DENOMINA VELOCIDAD DE DESBOQUE DE LAS TURBINAS PASANDO LA POTENCIA POR UN MÁXIMO SEGÚN UNA N QUE COMO VEREMOS ES LA VELOCIDAD ANGULAR NORMAL DE OPERACIÓN .

COMO SE PUEDE APRECIAR DE LA FÓRMULA QUE DÁ LA POTENCIA, ÉSTA GENERA DIFERENTES CURVAS QUE DEPENDEN DE LAS CONSTANTES K<sub>1</sub> Y K<sub>2</sub> QUE A SU VEZ DEPENDEN DEL

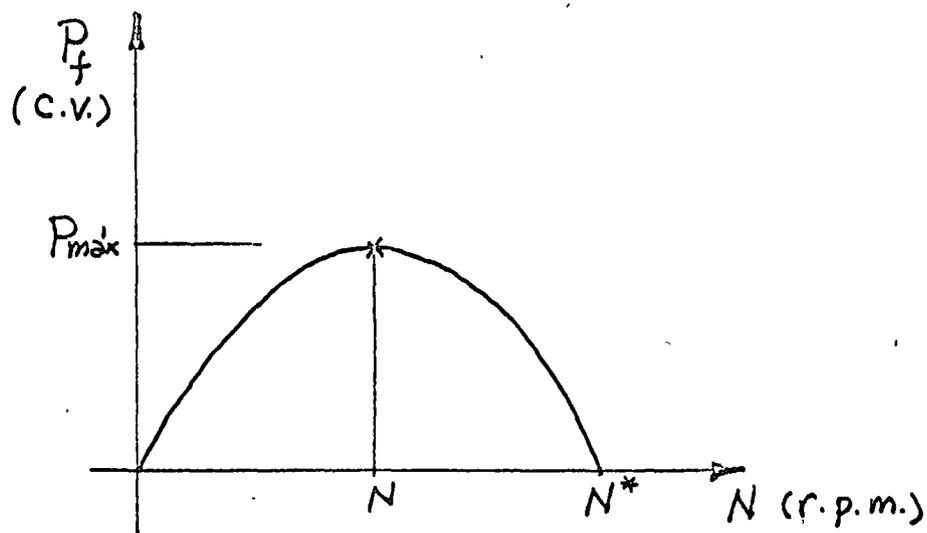


FIGURA 19.

GRADO DE ABERTURA DEL DISPOSITIVO DE ALIMENTACIÓN; ASÍ PUES, DANDO DIFERENTES ABERTURAS  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i$ , PODEMOS OBTENER UN PLANO CARACTERÍSTICO DE CURVAS DE POTENCIA COMO SE MUESTRA EN LA FIGURA 20.

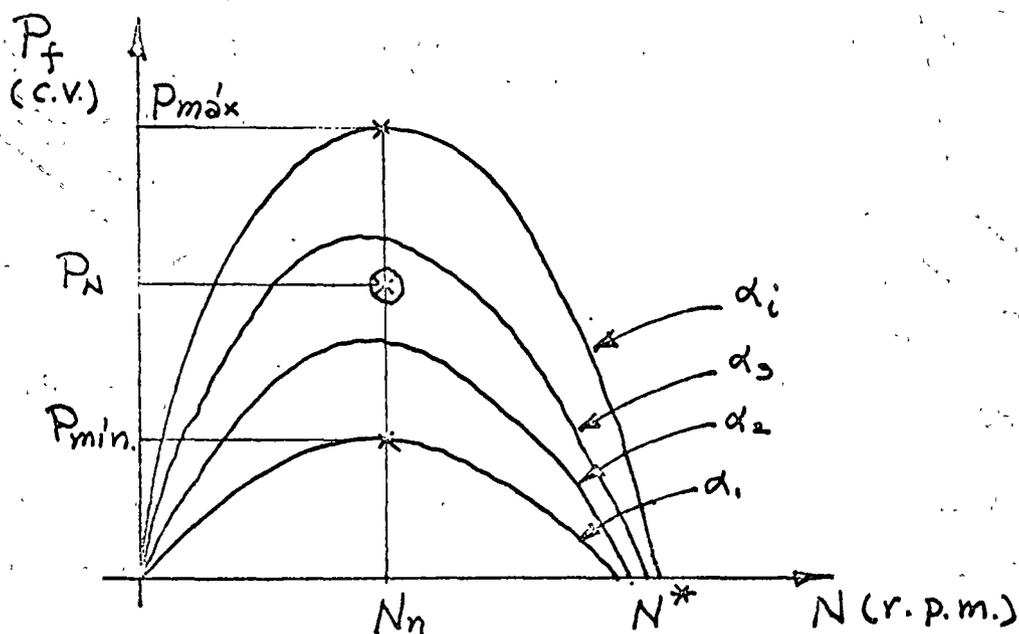
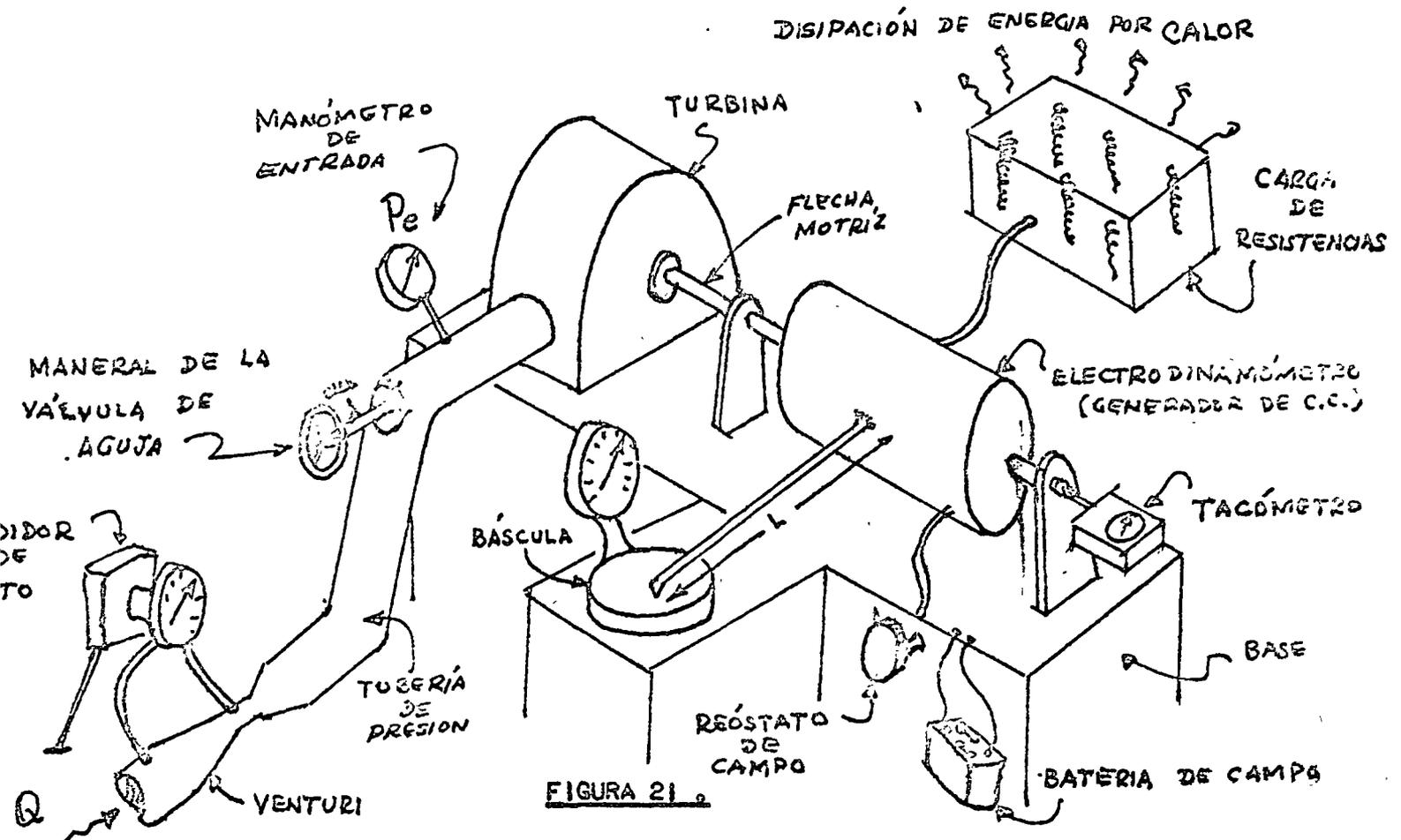


FIGURA 20.

LUEGO SE PUEDE VER QUE TODAS ESTAS PASAN POR UN MÁXIMO Y QUE DEPENDIENDO DE LA ABERTURA  $\alpha_i$ ; VAN CRECIENDO LAS POTENCIAS. SI PASAMOS UNA LÍNEA POR LA MÁXIMA AL CORTAR EL EJE HORIZONTAL DEFINIMOS LA  $N_n$  Y SELECCIONANDO UN RANGO DE EFICIENCIA SE PUEDE VER QUE CON SÓLO VARIAR  $\alpha_i$ , PUEDE UNO DAR LAS  $P_{min}$  Y  $P_{max}$

SIN VARIAR  $N$  Y QUE EXISTE UN VALOR INTERMEDIO PARA EL CUAL LA  $\eta$  ES ÓPTIMA QUE SE DENOMINA  $P_N$ , POTENCIA NORMAL DE OPERACIÓN.

ESTE PLANO CARACTERÍSTICO SE PUEDE OBTENER EN FORMA SEMEJANTE A LAS TURBINAS MÁQUINAS GENERATRICES HACIENDO USO DE LA INSTALACIÓN MOSTRADA EN LA FIGURA 21.



SE TIENE UNA TUBERÍA ACOPLADA DIRECTAMENTE A UN ELECTRODINAMÓMETRO CON FLECHA MOTRIZ DE EXTENSIÓN PARA MEDIR LA VELOCIDAD ANGULAR CON UN TACÓMETRO.

EL GENERADOR TIENE UN REÓSTATO PARA EXCITACIÓN SEPARADO POR MEDIO DE UNA BATERÍA Y ASÍ PRODUCIR DIFERENTES POTENCIAS QUE SE CONSUMEN EN UNA CAJA DE RESISTENCIA Y CUYA POTENCIA AL FRENAR SE MIDE POR MEDIO DE LA FUERZA QUE EJERCE LA PALANCA SOBRE LA BÁSCULA. LA POTENCIA HIDRÁULICA SE MIDE CON EL GASTO A TRAVÉS DE UN VENTURI Y LA PRESIÓN DE ENTRADA (CARGA NETA) POR MEDIO DEL MANÓMETRO.

EL PROCEDIMIENTO A SEGUIR ES EL SIGUIENTE:

1°.- SE DÁ UNA ABERTURA  $\alpha_1$ , DE LA VÁLVULA DE AGUJA CON LO CUAL SE FIJA UN GASTO.

2°.- SE MIDE EL GASTO Y LA PRESIÓN QUE TRATÁNDOSE DE UNA RUEDA PELTON NO-CAMBIA, PUES LA TUBERÍA DE ALIMENTACIÓN ES INDEPENDIENTE DE LA RUEDA; CON LO CUAL SE OBTIENE:

$$P_N = \gamma Q_1 H N_1$$

3°.- MOVIENDO EL REÓSTATO SE FIJA UNA  $N^I$  Y SE LEE SIMULTÁNEAMENTE  $F^I$ , - LUEGO SE CAMBIA DE POSICIÓN OTRA VEZ EL REÓSTATO Y SE FIJA OTRA  $N^{II}$  Y SE LEE SIMULTÁNEAMENTE  $F^{II}$ , ASÍ HASTA ALCANZAR LA VELOCIDAD DE DESBOQUE  $N^X$  PARA LA CUAL LA  $F^X$  DÁ LA MÍNIMA. ESTO PERMITE CALOULAR LAS POTENCIAS AL FRENO :

$$P^I = (F^I L) \frac{\pi N^I}{30}$$

4°.- TERMINADA ESTA SERIE, SE FIJA OTRA  $\alpha_2$  Y SE REPITEN LOS PUNTOS MENCIONADOS Y ASÍ SIGUIENDO SE PUEDEN HACER TANTAS SERIES COMO  $\alpha_i$  SE QUIERA, LO QUE PERMITE OBTENER LAS CURVAS CON LOS PUNTOS QUE SE INDICAN EN LA FIGURA 22, Y EN CADA PUNTO SE ANOTARÁ LA EFICIENCIA QUE SE OBTUVO CON :

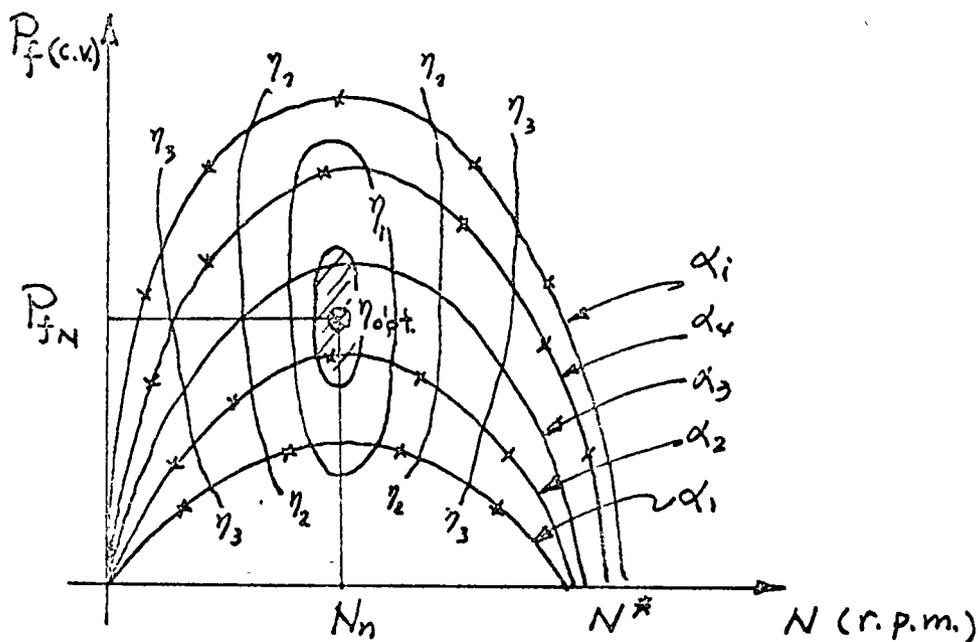


FIGURA 22.

$$\eta = \frac{P_F}{\gamma Q H_N}$$

LUEGO UNIENDO LOS PUNTOS DE IGUAL EFICIENCIA SE OBTIENE EL PLANO CARACTERÍSTICO EN QUE SE PUEDE APRECIAR LA ZONA DE ÓPTIMA EFICIENCIA QUE DETERMINA LA  $N_N$  Y  $P_{FN}$  PARA LA CUAL FUÉ CONSTRUIDA Y COMO PARASE PUNTO LA  $P_N = \gamma Q H_N$  SE TIENE LA  $H_N$ , ENTONCES ES FACTIBLE OBTENER :

$$N_s = \frac{N \sqrt{P_F}}{H_N^{5/4}}$$

QUE ES LA  $N_s$  TIPO DE LA TURBINA. LOS FABRICANTES EN BASE A HACER UN ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE TODAS LAS TURBINAS OBTUVIERON LA GRÁFICA DE SELECCIÓN DE LAS TURBINAS, FIGURA 23 EN QUE :

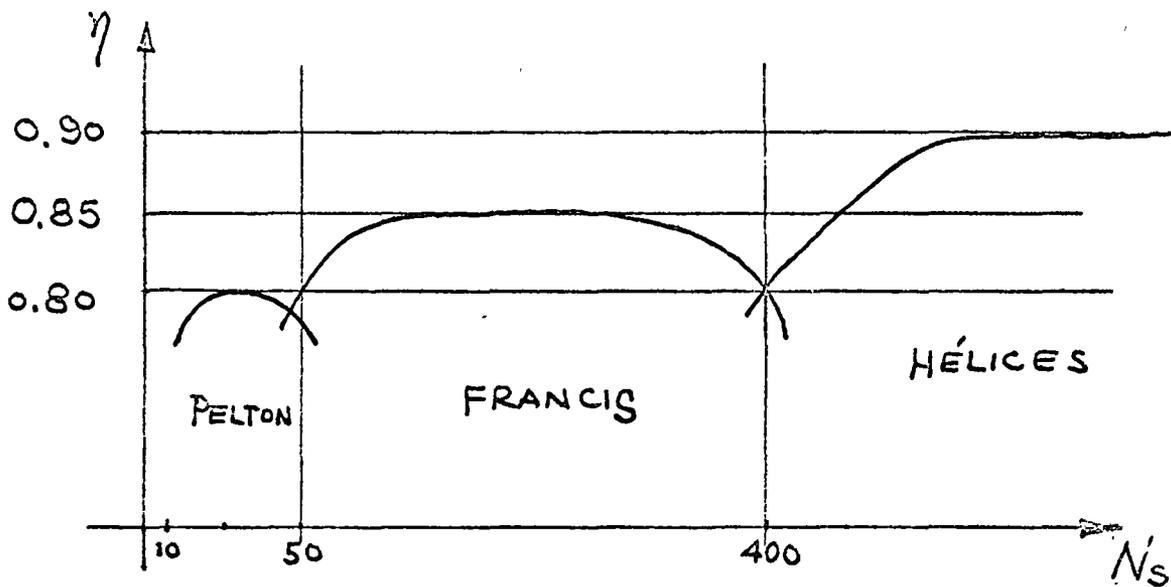


FIGURA 23.

TURBINA PELTON	$\eta \approx 0.80$	$\bullet$	$10 < N_s < 50$
TURBINA FRANCIS	$\eta \approx 0.85$	$\bullet$	$50 < N_s < 400$
TURBINA HÉLICE	$\eta \approx 0.9$	$\bullet$	$400 < N_s < 800$ o MÁS.

Y ADEMÁS:

TURBINA PELTON	$H_N > 400$ m	GASTOS PEQUEÑOS.
TURBINA FRANCIS	$50 < H_N < 400$ m	GASTOS MEDIANOS.
TURBINA HÉLICE	$H_N < 50$ m	GASTOS GRANDES.

ESTE PLANO CARACTERÍSTICO PERMITE DETERMINAR EN UNA CENTRAL HIDROELÉCTRICA CUALQUIERA, CUÁNDO SE DEBE PONER A FUNCIONAR O PARAR UNA UNIDAD PORQUE ÉSTA ESTÉ TRABAJANDO FUERA DE SU RANGO DE EFICIENCIA MÍNIMA ACEPTABLE PARA EVITAR EL DESPERDICIO DE AGUA.

### VELOCIDAD ESPECÍFICA Y EVOLUCIÓN DE RODETES.

COMO ES NATURAL, LOS ELEMENTOS HIDRÁULICOS DE LOS SISTEMAS HIDROELÉCTRICOS SON MUY VARIABLES, LO QUE HACE QUE SE TENGA  $N_g$  DESDE 10 HASTA 1000 O MÁS, LO QUE A SU VEZ TRAE COMO CONSECUENCIA QUE SE TENGA QUE DISEÑAR UN RODETE PARA CADA COMBINACIÓN DE CARGA, GASTO Y VELOCIDAD ANGULAR. PARA ESTE EFECTO, APLIQUEMOS NUEVAMENTE LA LEY DE LOS SENOS AL PARALELOGRAMO DE VELOCIDAD A LA ENTRADA DEL RODETE Y HAGAMOS USO DE LA ECUACIÓN DE EULER COMO EN EL CASO DE LAS BOMBAS, LLEGÁNDOSE A :

$$U_1 = \phi \sqrt{2g H_N}$$

EN QUE:

$$\phi = \sqrt{\frac{\eta \tau \text{SEN}(\beta_1 - \alpha_1)}{2 \text{SEN}(180^\circ - \beta_1) \text{COS} \alpha_1}}$$

LO CUAL PERMITE QUE SELECCIONANDO LOS ÁNGULOS  $\beta_1$  Y  $\alpha_1$  Y SOBRE TODO  $\beta_1$ , PORQUE  $\alpha_1$  VARÍA RELATIVAMENTE POCO DAR COEFICIENTES DE VELOCIDAD RELATIVA TAL QUE PARA  $H_N$  MUY GRANDES  $\phi$  SEA PEQUEÑO Y PARA  $H_N$  PEQUEÑA  $\phi$  GRANDE Y ASÍ PODEMOS CONTROLAR LA VELOCIDAD ANGULAR DE LA TURBINA PARA QUE SE PUEDA ACOPLAR A UN GENERADOR TAL QUE SU VELOCIDAD SÍNCRONA CUMPLA CON :

$$N = \frac{60 F}{P}$$

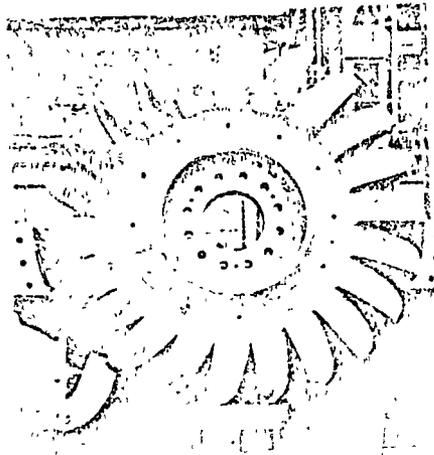
EN QUE :

F ; FRECUENCIA EN CICLOS / SEG.

P ; PARES DE POLOS DEL GENERADOR .

EN LA FIGURA 24 SE MUESTRAN LOS TIPOS DE RODETES FRANCIS, DESDE LOS MÁS LENTOS HASTA LOS MÁS RÁPIDOS, INDICÁNDOSE LOS ÁNGULOS DE LOS ÁLADES Y EL CONTROL

FIGURA 24.

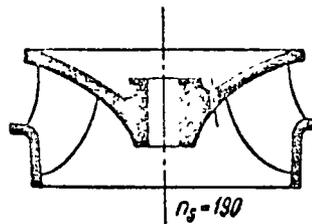
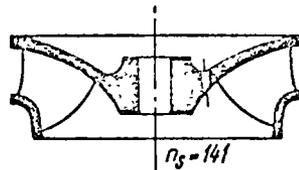
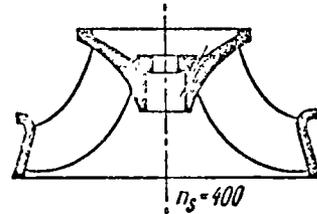
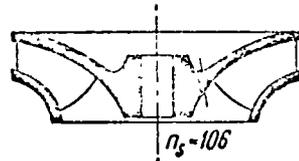
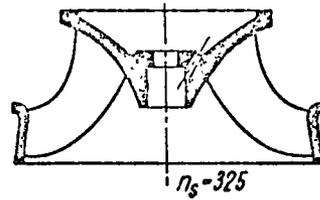
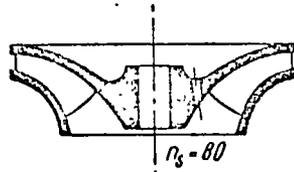
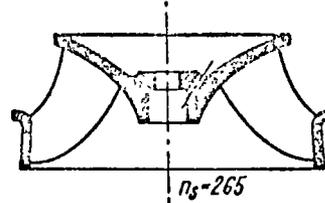
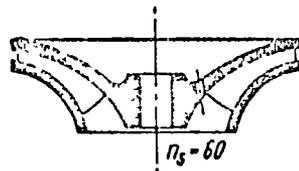


RUEDA PELTON

$N_s < 50$

TURBINAS

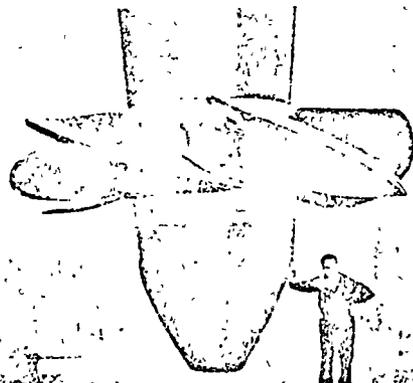
FRANCIS



TURBINA  
HELICE

$N_s >$

400



DEL GASTO POR MEDIO DE LAS ABERTURAS DE LOS CONDUCTOS.

LA RAPIDEZ NO SIGNIFICA QUE GIRE A UNA VELOCIDAD ANGULAR ALTA, SINO QUE BAJO LA MISMA CONDICIÓN DE CARGA ( $H_N$ ) IGUAL, LA MÉLICE GIRARÍA A MAYOR VELOCIDAD.

OBSÉRVESE EN LA FIGURA 24 COMO AL AUMENTAR EL GASTO  $Q$  SE VÁ HACIENDO MÁS Y MÁS GRANDE Y PARA EVITAR PÉRDIDAS DE ENERGÍA LOS ÁLABES SON MÁS CORTOS Y EN MENOR NÚMERO. ESTO ES LO QUE HACE FACILDE TENER UNA MÁQUINA PARA CADA APROVECHAMIENTO.

DE LA RELACIÓN ANTERIOR SE OBTIENE QUE :

$$D_1 = 84.5 \phi \frac{\sqrt{H_N}}{N}$$

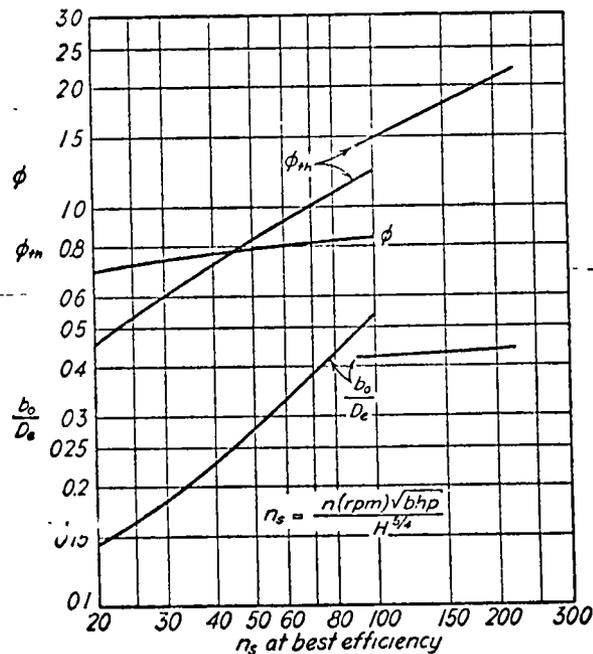
Y  $\phi$  ES FUNCIÓN DE  $N_s$  Y SE DAN EN LA TABLA I Y FIGURA 25 PARA LOS DIFERENTES TIPOS DE MÁQUINAS. LO QUE PERMITE CALCULAR EL DIÁMETRO DE ENTRADA DEL RODETE-MÓVIL.

TABLA I.

COEFICIENTE PARA LA RUEDA PELTON.

$N_s$	9	13.5	18	225	27	31.5
$\phi$	0.47	0.46	0.45	0.44	0.433	0.425

FIGURA 25.



CONTROL DE LA CAVITACION EN LAS TURBINAS DE REACCION

SEA LA INSTALACION MOSTRADA EN LA FIGURA 26, SI ESTABLECEMOS EL TEOREMA DE BERNOULLI ENTRE LAS SECCIONES (2) Y (3) SE TIENE:

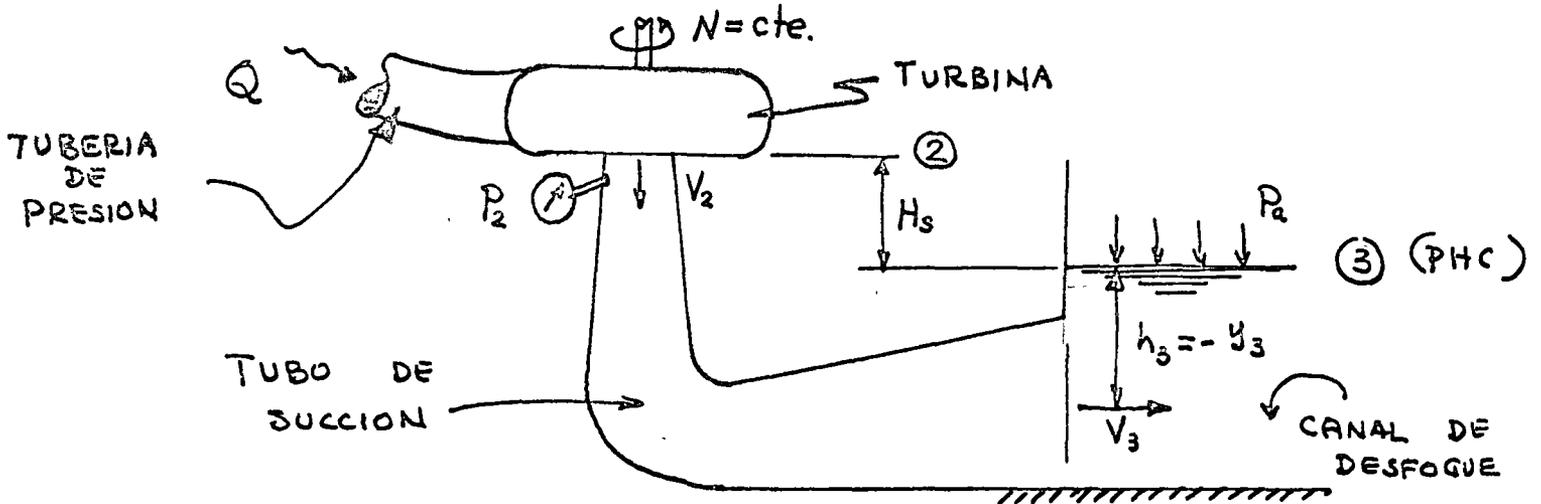


FIGURA 26<sub>a</sub>

$$\frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + H_s = \frac{P_A}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2g} + \sum H_{FTS}$$

DESPEJANDO  $\frac{P_2}{\gamma}$  QUEDA:

$$\frac{P_2}{\gamma} = \frac{P_A}{\gamma} - H_s - \frac{(V_2 - V_3)^2}{2g} + \sum H_{FTS}$$

OBLIGANDO QUE  $\frac{P_2}{\gamma} > \frac{P_v}{\gamma}$  SE TIENE:

$$\frac{P_A}{\gamma} - H_s - \frac{(V_2 - V_3)^2}{2g} + \sum H_{FTS} > \frac{P_v}{\gamma}$$

REACOMODANDO TÉRMINOS:

$$\frac{P_A}{\gamma} - \frac{P_v}{\gamma} - H_s > \frac{V_2^2 - V_3^2}{2g} - \sum H_{FTS}$$

PERO  $\frac{P_A}{\gamma} - \frac{P_v}{\gamma} = H_{3W}$  O SEA LA CARGA BAROMÉTRICA DE AGUA Y ADEMÁS SI U-

UTILIZAMOS EL CONCEPTO DE EFICIENCIA DEL TUBO DE SUCCIÓN  $\eta_{TS}$  SE TIENE:

$$\eta_{TS} = \frac{\text{ENERGÍA RECUPERADA POR EL TUBO DE SUCCIÓN}}{\text{ENERGÍA ENTREGADA AL TUBO DE SUCCIÓN}}$$

$$\eta_{TS} = \frac{\frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_3^2}{2g} - \sum H_f}{\frac{V_2^2}{2g}}$$

LUEGO LA EXPRESIÓN ANTERIOR SE PUEDE ESCRIBIR:

$$H_{BW} - H_B > \frac{V_2^2}{2g} \eta_{TS}$$

SI DIVIDIMOS LOS DOS MIEMBROS ENTRE LA CARGA NETA SE LLEGA A UNA EXPRESIÓN ADIMENSIONAL

$$\frac{H_{BW} - H_B}{H_N} > \frac{V_2^2}{2g H_N} \eta_{TS}$$

PERO EL SEGUNDO MIEMBRO ES CONSTANTE, YA QUE SI AUMENTA  $H_N$ ;  $V_2 = C_V \sqrt{2g H_N}$ ;  $V_2$  OREE EN LA MISMA FORMA Y COMO  $\eta_{TS} \approx \text{cte}$ ; ENTONCES EL SEGUNDO MIEMBRO NO VARÍA Y A ESTA CONSTANTE SE LE DENOMINA COEFICIENTE DE CAVITACIÓN DE THOMA. AHORA, SI AUMENTAMOS PROGRESIVAMENTE  $H_B$  PUEDE LLEGAR UN MOMENTO EN QUE LA DESIGUALDAD SE CONVIERTA EN UNA IGUALDAD Y EN ESE MOMENTO EMPIEZA LA CAVITACIÓN, ENTONCES:

$$\frac{V_2^2}{2g H_N} \eta_{TS} = \sigma_c$$

O SEA EL COEFICIENTE CRÍTICO DE THOMA. SI SE HA DETERMINADO EN EL LABORATORIO  $\sigma_c$  ENTONCES SE PUEDE USAR  $\sigma_{TH} = N \sigma_c$  UN COEFICIENTE DE THOMA DE TRABAJO QUE PERMITE CAMBIAR LA DESIGUALDAD POR UNA ECUACIÓN TAL QUE:

$$\frac{H_{BW} - H_B}{H_N} = \sigma_{TH}$$

DE DONDE ES FACTIBLE DETERMINAR  $H_B$  CON:  $\sigma_{TH}$  ES FUNCIÓN DE LA VELOCIDAD -

$$H_B = H_{BW} - \sigma_{TH} H_N$$

ESPECÍFICA DE LAS TURBINAS Y EN LA TABLA II SE DAN ESTOS VALORES PARA TURBINAS FRANCIS Y HÉLICES.

TABLA II.

FRANCIS.

HELICES.

$N_s$	50	100	200	300	400	$N_s$	450	600	250	900
$\sigma_{TH}$	0.033	0.060	0.122	0.21	0.33	$\sigma_{TH}$	0.43	0.65	0.95	1.50

EN LA TABLA III, SE DAN LOS VALORES DE  $N_{s\text{MAX}}$  PARA COMBINACIONES DE  $H_T$  Y  $H_S$ , PARA TURBINAS DE REACCIÓN QUE HAN FUNCIONADO CORRECTAMENTE SIN CONTENCIÓN.

TABLA III.

TURBINAS FRANCIS

Normal net head m $H$	Static draft head m $h_s$	Maximum permissible specific speed rpm $n_{s\text{max}}$
300	4.5	75
	3.0	85
	1.5	95
200	4.5	90
	3.0	105
	1.5	120
150	4.5	105
	3.0	120
	1.5	135
100	4.5	130
	3.0	150
	1.5	165
50	4.5	185
	3.0	210
	1.5	235
40	4.5	205
	3.0	235
	1.5	260
	0	285
30	4.5	240
	3.0	270
	1.5	300
	0	320
20	4.5	290
	3.0	330
	1.5	365
	0	400
15	4.5	335
	3.0	380
	1.5	420
	0	465

TURBINAS HELICES

Normal net head m $H$	Static draft head m $h_s$	Maximum permissible specific speed rpm $n_{s\text{max}}$
20	+1.5	440
	0	510
	-1.5	575
15	+1.5	565
	0	630
	-1.5	685
10	+1.5	720
	0	775
	-1.5	820
5	+1.5	790
	0	840
	-1.5	890

TURBINAS DE IMPULSO. (RUEDAS PELTON)

EL ANÁLISIS DE ÉSTAS CONSISTE EN LOS SIGUIENTES PASOS:

$$1^{\circ}.- D = 84.5 \phi \frac{\sqrt{H_N}}{N}$$

EN QUE  $\phi = f(N_B)$  TABLA I Y  $N_B = \frac{N \sqrt{P_F}}{H_N^{5/4}}$

$$2^{\circ}.- \text{DE : } Q = V_{CH} A_{CH} = C_V \sqrt{2g H_N} \frac{\pi D_{CH}^2}{4} \quad ; \text{ GASTO DEL CHORRO}$$

$$D_{CH} = 0.55 \frac{Q^{1/2}}{H_N^{1/4}}$$

3<sup>o</sup>.-  $M = \frac{D}{D_{CH}}$  DEBE SER MAYOR DE 10 PARA QUE SEA PRÁCTICAMENTE CONSTRUC TIVA LA RUEDA.

SI  $M < 10$  AUMENTÁNDOSE PROGRESIVAMENTE UN CHIFLÓN CON LO QUE  $D_{CHZ} = \frac{D_{CH}}{\sqrt{Z}}$  ; EN QUE Z ES EL NÚMERO DE CHIFLONES; HASTA QUE  $M > 10$ ; GENERALMENTE LAS RUEDAS HAN QUEDADO ENTRE 11 Y 14.

4<sup>o</sup>.- REVÍSEBE QUE LA  $N_{SMÁX}$  PERMISIBLE PARA LA  $H_N$  DEL SISTEMA NO SE SOBREPASE ; HACIÉNDOSE USO DE LA TABLA ADJUNTA.

$N_{SMÁX.}$	8	10	12	14	18	22	26	32
$H_N$	1100	1000	850	750	650	500	450	400

SI NO PASA ESTA REVISIÓN, AUMÉTEBE UNA UNIDAD PROGRESIVAMENTE HASTA QUE -

$$N_B = \frac{N \sqrt{P_U}}{H_N^{5/4}} < N_{SMÁX.}$$

LA CARGA NETA SE DETERMINA CON :

$$H_N = H_T - \sum H_F \quad H_F = f \frac{L}{D} \frac{V_{TP}^2}{2g}$$

EN QUE LOS FABRICANTES RECOMIENDENQUE LA VELOCIDAD PERMISIBLE DEL AGUA EN LA TUBE-

RÍA DE ALIMENTACIÓN AL CHIFLÓN SEA:

$$v_p = (0.075 - 0.10) \sqrt{2g H_N} < 12 \text{ m/seg.}$$

ITERANDO ESTAS DOS EXPRESIONES, SE OBTIENE SIMULTÁNEAMENTE LA  $H_N$  Y EL DIÁMETRO DE LA TUBERÍA DE PRESIÓN  $D_{TP}$  CON AYUDA DEL ABACO DE MOODY .

### RUEDAS DE REACCION.

TURBINAS FRANCIS. - HAREMOS USO DEL CRITERIO DE ZANABETTI QUE DÁ LA MÁS AMPLIA INFORMACIÓN AL RESPECTO, ASÍ :

1°.- VELOCIDAD PERMISIBLE A LA ENTRADA DE LA ESPIRAL

$$v_p = (0.18 \text{ a } 0.23) \sqrt{2g H_N} < 12 \text{ m/seg.}$$

Y QUE PERMITE DIMENSIONAR LA TUBERÍA DE PRESIÓN Y DETERMINAR A LA VEZ LA CARGA NETA  $H_N$  Y LA  $N_s$  MÁX. PERMISIBLE POR RESISTENCIA DE LOS MATERIALES SE DETERMINA CON :

$$N_{sMÁX} = \frac{6350}{H_N + 10} + 84$$

$$2°.- \quad \phi = 0.68 + \frac{N_s}{2500}$$

QUE DETERMINA EL DIÁMETRO DE ENTRADA CON

$$D_1 = 84.5 \phi \frac{\sqrt{H_N}}{N}$$

3°.- EL DIÁMETRO DE SALIDA O DESCARGA DEL RODETE ES :

$$D_2 = D_1 \left( 0.5 + \frac{N_s}{400} \right)$$

4°.- LAS DIMENSIONES RESTANTES SE DAN EN FUNCIÓN DE  $D_2$  Y DE ACUERDO A LA FIGURA 27 .

$$L^* = \left( 5.0 - \frac{N_s}{200} \right) D_2$$

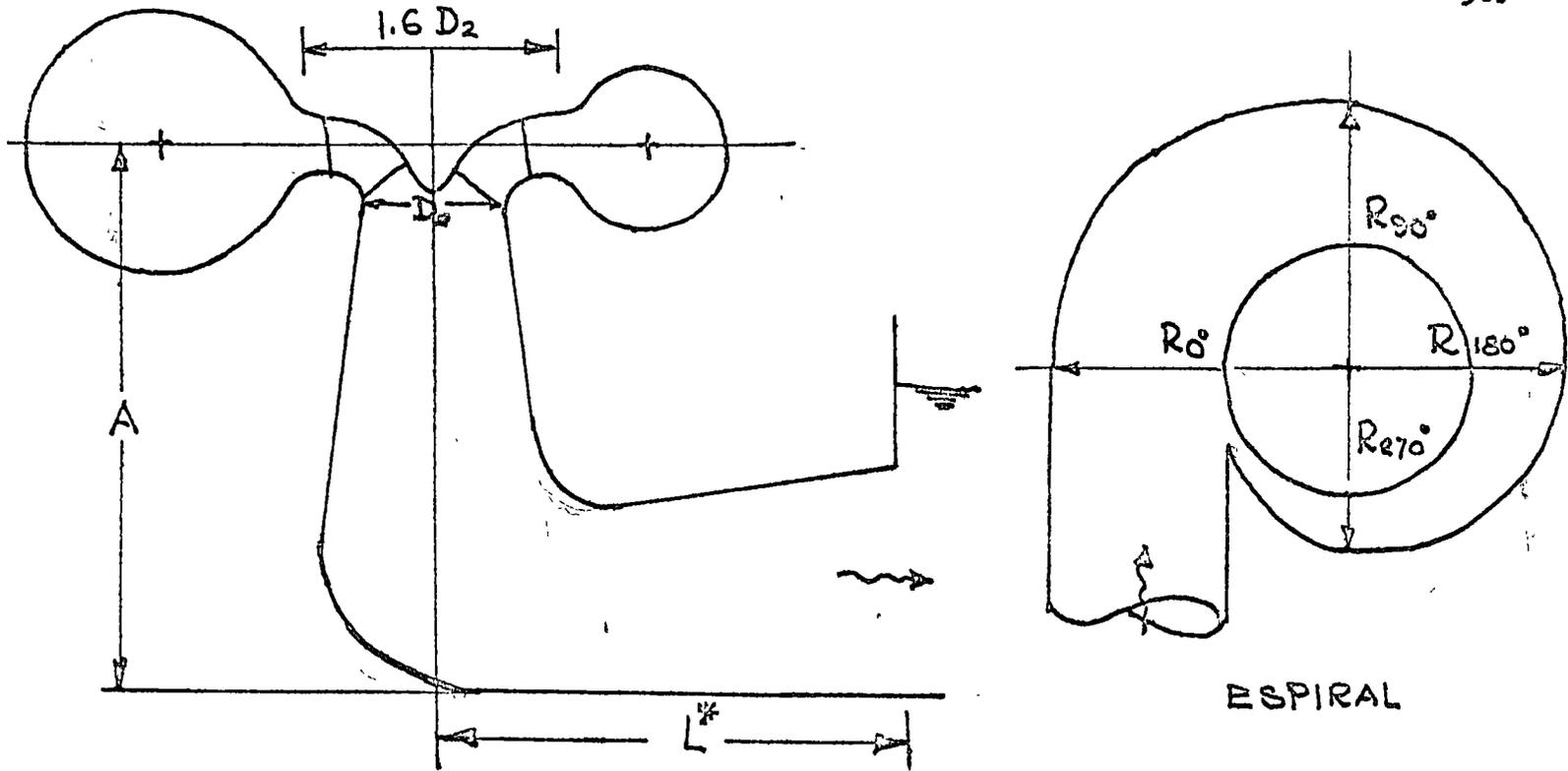


FIGURA 27.

$$A = \left( 3.4 - \frac{N_s}{400} \right) D_2$$

$$E = \left( 5.5 - \frac{N_s}{200} \right) D_2 \quad \text{SEPARACIÓN ENTRE UNIDADES } \phi \text{ A}$$

$\phi$  FLECHAS MOTRICES.

$$R_0 = 2.15 D$$

$$R_{90} = 2.00 D$$

$$R_{180} = 1.70 D$$

$$R_{270} = 1.30 D$$

$$D = D_1 \text{ o } D_2$$

EL MAYOR .

### TURBINAS HELICES Y KAPLAN.

1°.- VELOCIDAD PERMISIBLE A LA ENTRADA DE LA ESPIRAL

$$v_p = 0.20 \sqrt{2g H_N}$$

Y LA MISMA  $N_{SMAX}$  PERMISIBLE POR RESISTENCIA DE LOS MATERIALES SE DETERMINA CON :

$$N_{SMAX} = \frac{9560}{H_N + 10} + 756$$

2°.- EL DIÁMETRO DE LA HÉLICE SE PUEDE DETERMINAR CON LA FÓRMULA DE FINNE

CONE :

$$D = 4.57 \left( \frac{Q}{N} \right)^{1/3}$$

O CON LA FIGURA 25 DETERMINAMOS  $\phi = F(N_B)$

$$D = 84.5 \phi \frac{\sqrt{H_N}}{N} \quad \text{Y} \quad E = 3.5 D$$

3°.- LAS DIMENSIONES RESTANTES SE DAN EN LA FIGURA 28.

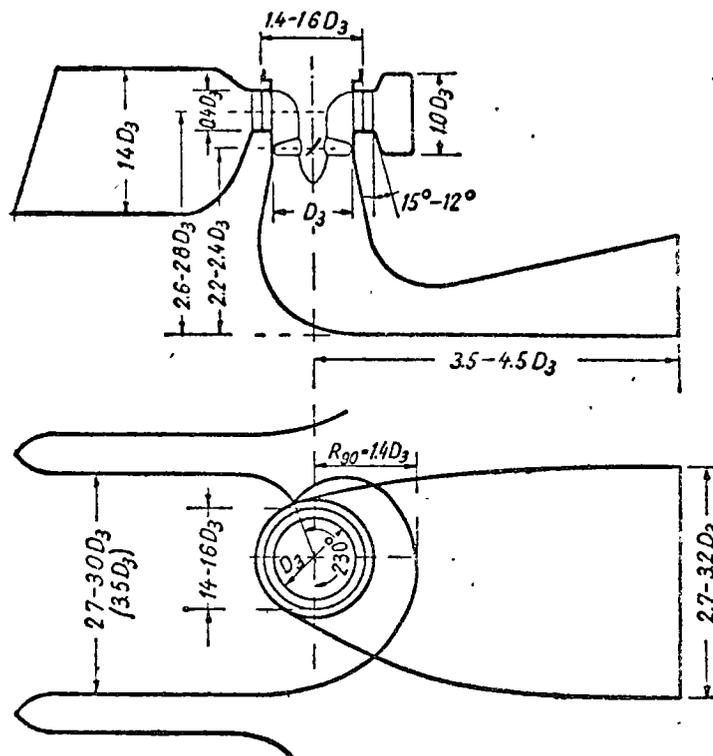


FIGURA 28.

CON LO CUAL ES POSIBLE HACER ANTEPROYECTOS RÁPIDOS DE CASA DE MÁQUINAS ALTERNATIVAS ECONÓMICAS.

## II.-SELECCION DE EQUIPO.

### TURBOMAQUINAS GENERATRICES.

EL CRITERIO DE SELECCION DE LA MAQUINARIA HIDRÁULICA ES SIEMPRE LA VELOCIDAD ESPECÍFICA, SIN EMBARGO, PUEDEN PRESENTARSE DOS CASOS FUNDAMENTALMENTE .

- A).- EL SISTEMA DE BOMBEO OPERA DIRECTO A LA TUBERÍA DE PRESIÓN SIN DEPÓSITO REGULADOR. EN ESTE CASO, ES NECESARIO SEGUIR LA LEY DE DEMANDAS , DE TAL FORMA QUE EL NÚMERO DE UNIDADES Y TAMAÑO DE ÉSTAS DEPENDE ESENCIALMENTE DE LA FORMA EN QUE SE CONSUMA O USE EL LÍQUIDO.
- B).- EL SISTEMA DE BOMBEO OPERA EN FORMA CONTINUA A TODA CAPACIDAD DURANTE UN LAPSO DETERMINADO DE BOMBEO CON DEPÓSITO REGULADOR PARA ABASTECER DURANTE LAS 24 HORAS. EN ESTE CASO, EL CRITERIO QUE SE DÁ A CONTINUACIÓN ARROJA EL SISTEMA MÁS ECONÓMICO .

LOS DATOS DEL SISTEMA DE BOMBEO PUEDEN SER :

$Q_T$  ,  $H_{S_0}$  ,  $H_{S_1}$  ,  $L_B$  ,  $L_D$  ,  $N$  , TIPO DE TUBERÍA, TIPO DE LÍQUIDO Y TEMPERATURA.

- 1º.- SE ESCOGE UNA  $V_D$  ENTRE 3.00 Y 6.00 M/SEG QUE DETERMINA  $D_{TP}$  (TUBERÍA DE PRESIÓN) Y LA  $\sum H_{FD}$  (PÉRDIDA EN LA DESCARGA).
- 2º.- SE ESTIMA QUE  $\sum H_{FB}$  CON LA QUE SE PUEDE DETERMINAR:

$$H_T = (H_{S_0} - H_{S_1}) + \underbrace{\sum H_{FD} + \sum H_{FB}}_{\text{CON ACCESORIOS}} \quad \text{VER FIGURA 29 .}$$

Y TAMBIÉN :

$$H_B = H_{S_1} + \sum H_{FB} \quad (\text{APROXIMADA})$$

- 3º.- ENTRANDO EN LAS GRÁFICAS DE LA FIGURA ; SEGÚN SEA EL TIPO DE -

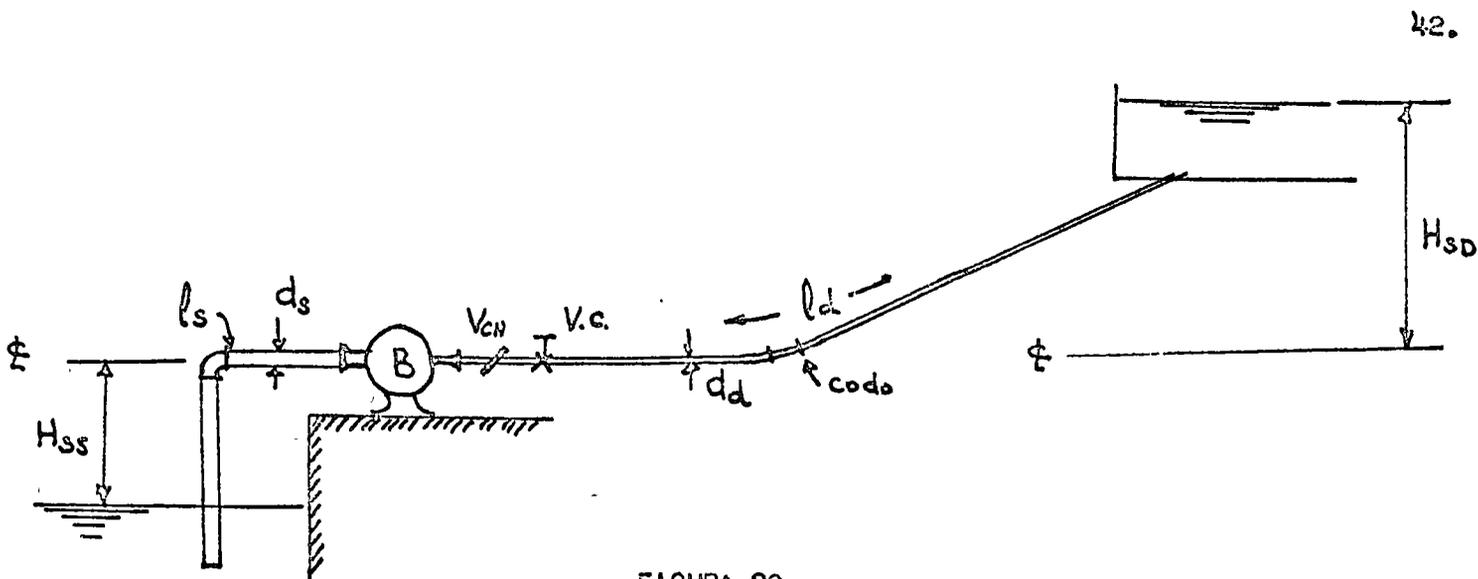


FIGURA 29.

LA BOMBA POR USARSE; CON  $H_T$  Y  $H_G$  CORREGIDA POR TEMPERATURA Y ALTITUD, SE OBTIENE NSMÁX PERMISIBLE POR OAVITACIÓN .

4°.- DE LA FÓRMULA DE LA VELOCIDAD ESPECÍFICA

$$Q_U = \left( \frac{N_S}{N} \right)^2 H_T^{3/2}$$

QUE ES EL GASTO QUE ES CAPAZ DE DAR UNA SOLA UNIDAD.

5°.- SE CALCULA EL NÚMERO DE UNIDADES:

$$N^\circ = \frac{Q_T}{Q_U}$$

6°.- SE AJUSTA A UN NÚMERO ENTERO DE UNIDADES HACIA ARRIBA CON LO QUE :

$$Q_{UR} = \frac{Q_T}{N^\circ \text{ ENTERO DE UNIDADES}}$$

7°.- SE REvisa LA PÉRDIDA EN LA RAMA DE SUCCIÓN Y SE AJUSTA DE 1° A 7° .

$$N_{BR} = \frac{N \sqrt{Q_U}}{H_T^{3/4}}$$

9°.- CON  $N_B$  SE CONSTRUYEN LAS CURVAS CARACTERÍSTICAS Y SE ESTUDIA EL FUNCIONAMIENTO DEL SISTEMA DE BOMBEO.

EJEMPLO: UN SISTEMA DE BOMBEO COMO EL MOSTRADO EN LA FIGURA , CUYA INSTALACIÓN SE REALIZARÁ EN LA CIUDAD DE MÉXICO, DEBE BOMBLEAR  $3.00 \text{ m}^3/\text{SEG}$  DE AGUA A -

20°C, SI LA VELOCIDAD ANGULAR DEL MOTOR ES  $N = 850$  R.P.M., SE PIDE:

A).- NÚMERO DE UNIDADES.

B).-  $N_D$  Y POTENCIA DE CONSUMO DEL SISTEMA .

C).- CURVAS CARACTERÍSTICAS DE LAS BOMBAS.

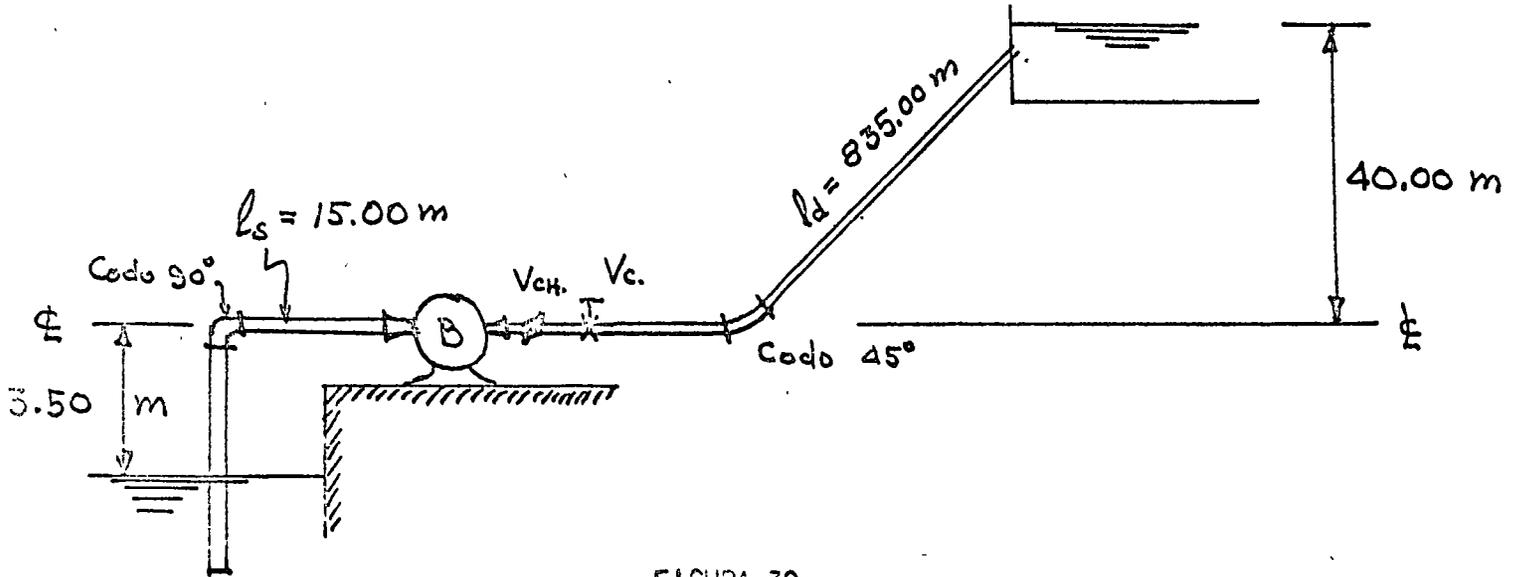


FIGURA 30.

1°.- EBOOJAMOS  $V_D = 3.00$  M/SEG; LUEGO

$$A_{TP} = \frac{Q}{V_D} = \frac{3.00}{3.00} = 1.00 \text{ m}^2, \quad D_D = \sqrt{\frac{4 A_{TP}}{\pi}} = 1.125 \text{ M}$$

AJUSTAMOS A DIÁMETRO ENTERO DE PULGADAS.

$$D_D = 4\frac{1}{2} = 1.12 \text{ M.} \quad A_{TP} = \frac{\pi (1.12)^2}{4} = 0.99 \text{ m}^2$$

$$V_D = \frac{3.00}{0.99} = 3.03 \text{ M/SEG}$$

CÁLCULO DE LA FÉRDIDA:

$$R_D = \frac{V_D D_D}{\nu} = \frac{3.03 \times 1.12}{1.2} \times 10^6 = 2.83 \times 10^6$$

$$\frac{E}{D} = 0.000033 \quad \text{LUEGO DEL ÁBACO DE MOODY}$$

$$F_D = 0.011 \quad \text{Y DEL MANUAL} \quad K_{V.CH} = 1.50$$

$$K_{V.C} = 0.20$$

$$K_B = 1.00$$

$$\frac{K_{C45^\circ} = 0.40}{\sum K_{1D} = 3.10}$$

LUEGO:

$$H_{FD} = \left( F_D \frac{L_D}{D_A} + \sum K_{1D} \right) \frac{V_D^2}{2g} = \left( 0.011 \frac{835}{1.12} + 3.10 \right) \frac{3.03^2}{19.6} = 11.31 \frac{3.03^2}{19.6} =$$

$$H_D = 5.30 \text{ m}$$

2º.- SI ESTIMAMOS LA PÉRDIDA TOTAL EN LA SUCCIÓN EN :

$$H_{FB} = 1.00 \text{ m.}, \text{ SE PUEDE DETERMINAR } H_T \text{ Y } H_B$$

$$H_T = (H_{SD} - H_{SB}) + \sum H_{FD} + \sum H_{FB}$$

$$H_T = (40 - 3.50) + 5.30 + 1.00 = 49.8 \text{ m} = 163.50 \text{ FT.}$$

$$H_B = H_{SB} + \sum H_{FB} = 3.50 + 1.00 = 4.50 \text{ m} = 14.75 \text{ FT.}$$

$$\text{CORRECCIÓN POR ALTITUD A.S.N.M.} = 2250 \text{ m} = 7390 \text{ FT.}$$

COMO LA PRESIÓN ATMOSFÉRICA DISMINUYE APROXIMADAMENTE 1" DE MERCURIO POR CADA 1000 FT .

$$\left( \frac{PA}{\gamma} \right)_{MEX.} = 10.33 - \frac{7.39 \times 2.54 \times 13.6}{100} = 10.33 - 2.55 = 7.78 \text{ m (AGUA)}$$

LUEGO LA CORRECCIÓN QUE HAY QUE SUMAR A  $H_B$  SERÁ :

$$\left( \frac{PA}{\gamma} \right)_{NIVEL \text{ DEL MAR}} - \left( \frac{PA}{\gamma} \right)_{MÉXICO} = 10.33 - 7.78 = 2.55 \text{ m.} = 8.36 \text{ FT}$$

$$(H_B)_{CORR.} = 14.75 + 8.36 = 23.11 \text{ FT}$$

3º.- HACIENDO USO DE LA GRÁFICA PARA BOMBAS DE DOBLE SUCCIÓN POR SER EL GAS TO MUY GRANDE, (FIGURA 17.)

$$H_T = 163.50 \text{ FT Y } H_B \text{ (LIFT)} = 23.11 \text{ FT OBTENEMOS:}$$

$$N_{BMÁX} = 1600$$

$$4^{\circ}.- Q_U = \left(\frac{N_S}{N}\right)^2 H_T^{3/2} = \left(\frac{1600}{850}\right)^2 (163.50)^{3/2} = 7350 \text{ G.P.M.}$$

COMO  $Q_T = 3000 \times 15.85 = 47600 \text{ G.P.M.}$

$$5^{\circ}.- N^{\circ} \text{ UNIDADES} = \frac{47600}{7350} = 6.4 \text{ LUEGO 7 UNIDADES}$$

$$6^{\circ}.- Q_{UR} = \frac{47600}{7} = 6800 \text{ G.P.M.} = 0.430 \text{ m}^3/\text{SEG}$$

7^{\circ}.- REVISIÓN DE LA PÉRDIDA EN LA RAMA DE SUCCIÓN. EL DIÁMETRO DE LA BRIDA DE SUCCIÓN LO PODEMOS OBTENER DE LA GRÁFICA DE LA FIGURA 9^{\circ} .

$$N_{S \text{ APROX}} = \frac{N \sqrt{Q_U}}{H_T^{3/4}} = \frac{850 \sqrt{6800}}{(163.50)^{3/4}} = 1530$$

$$\phi = 0.98 \quad \frac{D_2}{D_1} = 2.4$$

$$\text{LUEGO } D_2 = 84.5 \phi \sqrt{\frac{H_T}{N}} = 84.50 \times 0.98 \sqrt{\frac{163.5}{850}} = 0.685 \text{ m}$$

$$D_1 = \frac{0.685}{2.4} = 0.286 \text{ m} \approx 12''$$

TOMANDO UN DIÁMETRO DE TUBERÍA DE SUCCIÓN DE  $D_B = 12'' \sqrt{2} \approx 18''$  POR SER LA BOMBA DE DOBLE SUCCIÓN

$$A_{T_3} = \frac{\pi (0.458)^2}{4} = 0.164 \text{ m}^2$$

$$V_3 = \frac{Q}{A_{T_3}} = \frac{0.430}{0.164} = 2.62 \text{ m/SEG}$$

$$R_3 = \frac{2.62 \times 0.458}{1.2} \times 10^6 = 10^6$$

$$\frac{F}{D} = 0.00009$$

$$F_3 = 0.013 \text{ LUEGO :}$$

ADEMÁS DEL MANUAL DE HIDRÁULICOS

$$K_D = 1.00$$

$$K_{R.C} = 2.00$$

$$K_{CG} = 0.90$$

$$\leq K_B = 3.90$$

LUEGO:

$$\sum H_F = (3.90 + 0.013 \frac{15}{0.458}) \frac{2.62^2}{19.6} = 4.325 \frac{2.62^2}{19.6} = 1.50 \text{ m}$$

TENEMOS UN ERROR DE 0.50 M; LO CUAL EXIGIRÍA OTRA REVISIÓN, PERO POR LO PRONTO LO DEJAREMOS ASÍ.

8°.- LUEGO:

$$N_{Bs} = \frac{N \sqrt{Q_D}}{H_T^{3/4}} = 1530$$

9°.- OBTENCIÓN DE LAS CURVAS CARACTERÍSTICAS DE ESTAS BOMBAS HACIENDO USO DE LAS GRÁFICAS QUE FIGURAN EN LOS FIGURAS 8 Y 8'.

PARA  $N_B = 1530$   $Q_D = 6800$  G.P.M. DE LA FIGURA 3.

$$\eta_G = 0.85 \text{ LUEGO}$$

$$P_U = \frac{\gamma Q_D H_T}{\eta_D \times 76} = \frac{1000 \times 0.430 \times 15.8}{0.86 \times 76} = 323 \text{ H.P.}$$

LUEGO TENEMOS:

$$H_{TN} = 50 \text{ m} \quad Q_N = 450 \text{ LTC/SEC} \quad P_N = 323 \text{ H.P.}$$

PARA  $N_B = 1530$  DE LAS GRÁFICAS DE LA FIGURA 8' OBTENEMOS LOS VALORES DE LOS % DE  $H_N$ ,  $N_N$  Y  $P_N$  QUE SE DAN EN LA TABLA SIGUIENTE Y CALCULADOS LOS  $Q_1$ ,  $N_1$  Y  $P_1$ . QUE GRAFICADO SERÁ LA CURVA DE GASTO, DE EFICIENCIA Y DE POTENCIA CON LAS QUE SE PUEDE ESTUDIAR LA OPERACIÓN EN PARALELO DEL SISTEMA DE BOMBEO.

$\% Q$	$Q_N (1/s)$	$\% H_{TN}$	$H_T (M)$	$\% \eta_N$	$\eta$	$\% P_N$	$P (H.P.)$
0	0	1.15	57.5	0	0	0.5	164.0
25	107.5	1.15	57.5	0.47	40.5	0.61	200.0
50	215.0	1.14	57.0	0.76	65.3	0.74	243.0
75	322.5	1.10	55.0	0.94	81.0	0.83	327.0
100	430.0	1.00	50.0	1.00	86.0	1.00	328.0
110	473.0	0.94	47.0	0.93	84.0	1.04	342.0

### TURBOMAQUINAS MOTRICES.

COMO EN EL CASO DE LAS TURBOMAQUINAS GENERATRICES, AQUÍ TAMBIÉN SE TIENEN DOS POSIBILIDADES FUNDAMENTALMENTE.

A).- EL SISTEMA HIDROELÉCTRICO ES AISLADO Y POR CONSIGUIENTE LAS VARIACIONES DE LA POTENCIA DURANTE EL DÍA LA TIENE QUE TOMAR EL CONJUNTO DE MÁQUINAS INSTALADAS. PARA DETERMINAR EL NÚMERO DE UNIDADES SE TIENE QUE RECURRIR A UNA LEY DE DEMANDAS HORARIO Y DE ALLÍ FRACCIONAR LA POTENCIA PROCURANDO QUE EL NÚMERO DE UNIDADES SEA TAL QUE ÉSTAS RESULTEN DE LA MÍNIMA CAPACIDAD.

B).- EL SISTEMA ES INTERCONECTADO, ENTONCES LAS VARIACIONES DE POTENCIA HORARIA Y LOS "PICKS" DIARIOS SE REPARTEN ENTRE TODAS LAS CENTRALES, POR LO QUE EL SISTEMA MÁS ECONÓMICO RESULTA SER EL QUE DÉ EL MENOR NÚMERO DE UNIDADES. PARA DETERMINARLO SE SIGUEN LOS PASOS QUE SE INDICAN A CONTINUACIÓN.

LOS DATOS DE QUE SE DISPONE DE UN APROVECHAMIENTO HIDROELÉCTRICO SON:

$Q_T$ ,  $H_B$ , LONGITUD DE LA TUBERÍA DE PRESIÓN Y TIPO DE TUBERÍA, ALTURA SOBRE EL NIVEL DEL MAR, FRECUENCIA ASIGNADA A LA CENTRAL, EFICIENCIA DE LAS-

## TURBINAS.

LUEGO SE SIGUE:

1º.- CON LA  $V_p = 0 \sqrt{186 H_N} < 12$  M/SEG VELOCIDAD PERMISIBLE EN LAS TUBERÍAS DE PRESIÓN Y  $H_N = H_B - \sum H_f$  POR ITERACIONES Y CON AYUDA DEL ÁBACO - DE MOODY, SE DETERMINARÁN SIMULTÁNEAMENTE LA CARGA NETA Y EL DIÁMETRO DE LA TUBERÍA DE PRESIÓN.

2º.- SE CALCULA LA POTENCIA TOTAL DEL SISTEMA CON :

$$P_T = \frac{V Q \eta H_N N_T}{75} \quad \text{C.V.}$$

3º.- HACIENDO USO DE LAS EXPRESIONES QUE DAN LA  $N_{SMAX}$  EN FUNCIÓN DE LA CARGA POR RESISTENCIA DE LOS MATERIALES Y DE LA TABLA III, QUE DÁ VALORES MÁXIMOS DE  $N_B$  POR CAVITACIÓN, ESCOGIÉNDOSE EL MENOR DE ESTOS DOS Y SELECCIONÁNDOSE LA MÍNIMA VELOCIDAD ANGULAR COMPATIBLE CON LA VELOCIDAD SÍNCRONA DEL GENERADOR.

$$N = \frac{60 P}{P}$$

EN QUE P ES EL NÚMERO DE PARES DE POLOS DEL GENERADOR QUE VARÍA DESDE 1 HASTA 40.

SE PUEDE CALCULAR LA POTENCIA MÁXIMA QUE ES CAPAZ DE DAR UNA UNIDAD, CON LA FÓRMULA DE LA VELOCIDAD ESPECÍFICA, ASÍ :

$$P_A = \left( \frac{N_{SMAX}}{N_{MIN}} \right)^2 H_N^{5/2}$$

4º.- SE DETERMINA EL NÚMERO DE UNIDADES CON :

$$N^{\circ} \text{ UNIDADES} = \frac{P_T}{P_U} \dots \dots \dots \star$$

Y SE AJUSTA A NÚMERO ENTERO DE UNIDADES.

5º.- LA POTENCIA REAL POR UNIDAD SERÁ:

$$P_W = \frac{P_T}{N^{\circ} \text{ ENT. UNIDADES.}}$$

6°.- LA  $N_B$  REAL SERÁ :

$$N_B = \frac{N \sqrt{P}}{H_N^{5/4}}$$

7°.- CON  $N_B$  SE DETERMINAN LAS DIMENSIONES DE LAS UNIDADES Y DE LA CASA DE MÁQUINAS.

EJEMPLO NUMÉRICO:

SE DESEA REALIZAR EL APROVECHAMIENTO PARA ENERGÍA ELÉCTRICA DE UNA CORRIENTE NATURAL, QUE CONSTA DE LOS ELEMENTOS SIGUIENTES:

$$Q_T = 150 \text{ m}^3/\text{SEG} \quad \varphi = 1.2 \times 10^6 \text{ m}^2/\text{SEG} \text{ AGUA A } 20^\circ\text{C}.$$

$$H_B = 210 \text{ M.} \quad L_{TP} = 420 \text{ M. TUBERÍA DE ACERO SOLDADO.}$$

$$N_T = 0.8 \quad A.S.N.M. = 600 \text{ M.}$$

$$F = 60 \text{ CICLOS}$$

1°.- SUPONIENDO UN 10% DE PÉRDIDAS EN LA CONDUCCIÓN :

$$H_{N_1} = 210 - 21 = 189 \text{ M.}$$

$$V_{P_1} = 0.18 \sqrt{2g \times 189} = 11.00 \text{ M/SEG.}$$

$$A_{TP_1} = \frac{Q_T}{V_{P_1}} = \frac{150}{11.0} = 13.65 \text{ M}^2$$

$$D_{TP_1} = \sqrt{\frac{4 \times 13.65}{\pi}} = 4.15 \text{ M.}$$

$$R_1 = \frac{V_1 D_1}{\varphi} = \frac{11.0 \times 4.15}{1.2} \times 10^6 = 3.8 \times 10^7$$

$$\frac{G}{D_1} = \frac{0.003 \times 0.305}{415} = 0.0000022$$

DEL GRÁFICO DE MOODY  $F = 0.0085$  LUEGO :

$$K_F = 0.0085 \frac{420}{4.15} \frac{(11)^2}{19.6} = 5.3 \text{ M}$$

POR TANTO:  $H_{N2} = 210 - 5.3 = 204.7 \text{ m.}$

REPITIENDO LA ITERACIÓN :

$$V_{P2} = 0.18 \times 4.43 \sqrt{204.7} = 11.4 \text{ m.}$$

$$A_{TP2} = \frac{150}{11.4} = 13.20 \text{ m/seg.}$$

$$D_{TP2} = \sqrt{\frac{4 \times 13.2}{\pi}} = 4.10 \text{ m.}$$

$$R_2 = \frac{11.4 \times 4.10}{1.2} \times 10^6 = 3.9 \times 10^7$$

$$\frac{E}{D_2} = \frac{0.003 \times 0.305}{410} = 0.0000022$$

POR LO QUE :

$$F_2 = F_1 = 0.0085$$

Y LA CARGA NETA REAL ES :

$$H_N = 204.7 \text{ m.}$$

2º.- POTENCIA TOTAL DEL SISTEMA.

$$P_T = \frac{\eta_{QT} H_N N_T}{75} = \frac{1000 \times 150 \times 204.7 \times 0.8}{75}$$

$$P_T = 328000 \text{ C.V.}$$

3º.- POR LA CARGA NETA PODEMOS SUPONER QUE SE TRATA DE TURBINAS FRANCIS, -

POR LO QUE :

$$N_{BM\acute{A}X} \leq \frac{6350}{H_N + 10} + 84 \quad \text{RESISTENCIA DE MATERIALES}$$

$$N_{BM\acute{A}X} \leq \frac{6350}{204.7 + 10} + 84 = 113.6$$

$$N_{XM\acute{A}X} = 105$$

CAVITACIÓN DE LA TABLA III-

PARA  $H_8 = 3.50 \text{ m.}$

LUEGO:

$$N_{BM\acute{A}X} \leq 113.6$$

$$Y \quad N = \frac{60 F}{P} = \frac{3600}{40} = 90 \text{ R.P.M.}$$

POR TANTO:

$$P_U = \left( \frac{113.6}{90} \right)^2 (204.7)^{5/4} = 1.58 \times 600,000 = 950,000 \text{ C.V.}$$

O SEA QUE UNA SOLA UNIDAD PUEDE TOMAR TODA LA POTENCIA.

4º.- POR SEGURIDAD EN LA PRODUCCIÓN TOMAREMOS DOS UNIDADES CON LO QUE :

$$P_U = \frac{328,000}{2} = 164,000 \text{ C.V.}$$

AHORA AJUSTEMOS LA VELOCIDAD ANGULAR PUESTO QUE LA  $P_U$  ES DIFERENTE CON -

$$N_s = \frac{N \sqrt{P_U}}{H_N^{5/4}}$$

DE DONDE :

$$N = \frac{N_s H_N^{5/4}}{\sqrt{P_U}} = \frac{113 (204.7)^{5/4}}{\sqrt{164000}} = 216 \text{ R.P.M.}$$

PERO DEBE CUMPLIR CON :

$$N = \frac{60 F}{P} \quad \text{POR; } P \text{ ES ENTERO Y PAR, POR TANTO LA } N \text{ REAL ES :}$$

$$N = \frac{3600}{17} = 212 \approx 216$$

5º.- FINALMENTE LA  $N_s$  REAL ES :

$$N_s = \frac{N \sqrt{P_U}}{H_N^{5/4}} = \frac{212 \sqrt{164000}}{(204.7)^{5/4}} = 111$$

QUE ES LIGERAMENTE MENOR QUE LA ÓPTIMA O SEA 113.6

6º.- CON ESTA SE DIMENSIONARÁN LAS UNIDADES Y SE REVISA LA ALTURA MÁXIMA DE SUCCIÓN  $H_s$  ETC.



$$E_1 = Y_1 + Z_1 + \frac{v_1^2}{2g} \quad \text{ENERGÍA POR UNIDAD DE PESO QUE ENTRA AL TRAMO.}$$

$$E_2 = Y_2 + Z_2 + \frac{v_2^2}{2g} \quad \text{ENERGÍA POR UNIDAD DE PESO QUE SALE DEL TRAMO.}$$

EL PESO DEL LÍQUIDO QUE ENTRA Y SALE DEL TRAMO EN ESTUDIO, SE PUEDE DETERMINAR COMO SIGUE:

EL VOLUMEN DE AGUA QUE ENTRA EN (1) EN UN TIEMPO  $\Delta T$  SERÁ :

$$\Delta V = A v_1 \Delta T$$

Y EL PESO  $\Delta W_1 = \gamma A_1 v_1 \Delta T = \gamma Q \Delta T$  YA QUE :

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = Q$$

Y EL QUE SALE DE LA SECCIÓN (2) POR CONTINUIDAD SERÁ EL MISMO :

$$\Delta W_2 = \gamma A_2 v_2 \Delta T = \gamma Q \Delta T$$

LA ENERGÍA TOTAL QUE SE LE PUEDE APROVECHAR AL TRAMO EN ESTUDIO SERÁ :

$$\Delta E = \left( [(Z_1 + Y_1) - (Z_2 + Y_2)] + \left( \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g} \right) \right) Q \Delta T \gamma$$

PERO COMO EN LOS RÍOS  $v_1 \approx v_2$  Y ADEMÁS MUY PEQUEÑAS SE PUEDEN DESPRECIAR LAS CARGAS DE ENERGÍA CINÉTICA POR LO QUE :

$$\Delta E = H \gamma Q \Delta T$$

YA QUE  $H = (Z_1 + Y_1) - (Z_2 + Y_2)$  A PARTIR DEL (PHC)

LUEGO  $P = \frac{\Delta E}{\Delta T} = \gamma Q H$  QUE ES LA POTENCIA DEL AGUA EN MOVIMIENTO .

AHORA BIÉN, EN LA FÓRMULA QUE DEFINE LA POTENCIA, LA CARGA BRUTA  $H$ , ESTÁ -

PERFECTAMENTE BIÉN DETERMINADA, PORQUE AUNQUE VARIE EL GASTO DEL RÍO, LOS NIVELES DEL AGUA VARÍAN EN LA MISMA FORMA Y  $H$  SE MANTIENE APROXIMADAMENTE CONSTANTE. PERO SI INSPECCIONAMOS EL HIDROGRAMA DE UN RÍO CUALQUIERA, VEREMOS QUE EL GASTO VARÍA EN RANGOS MUY AMPLIOS, VER FIGURA 32, NO SOLO DURANTE UN AÑO, SINO QUE EN  $N$  AÑOS DE OBSERVACIÓN. SE PUEDEN PRESENTAR AÑOS ABUNDANTES Y AÑOS DE SEQUÍA; MUCHAS VECES PRONUNCIADOS A PERÍODOS DE 4 A 5 AÑOS CONSECUTIVOS. ESTO DE ACUERDO CON LA ZONA CLIMÁTICA DEL PAÍS, Y AL CICLO DE RETORNO HIDROLÓGICO DEL RÍO.

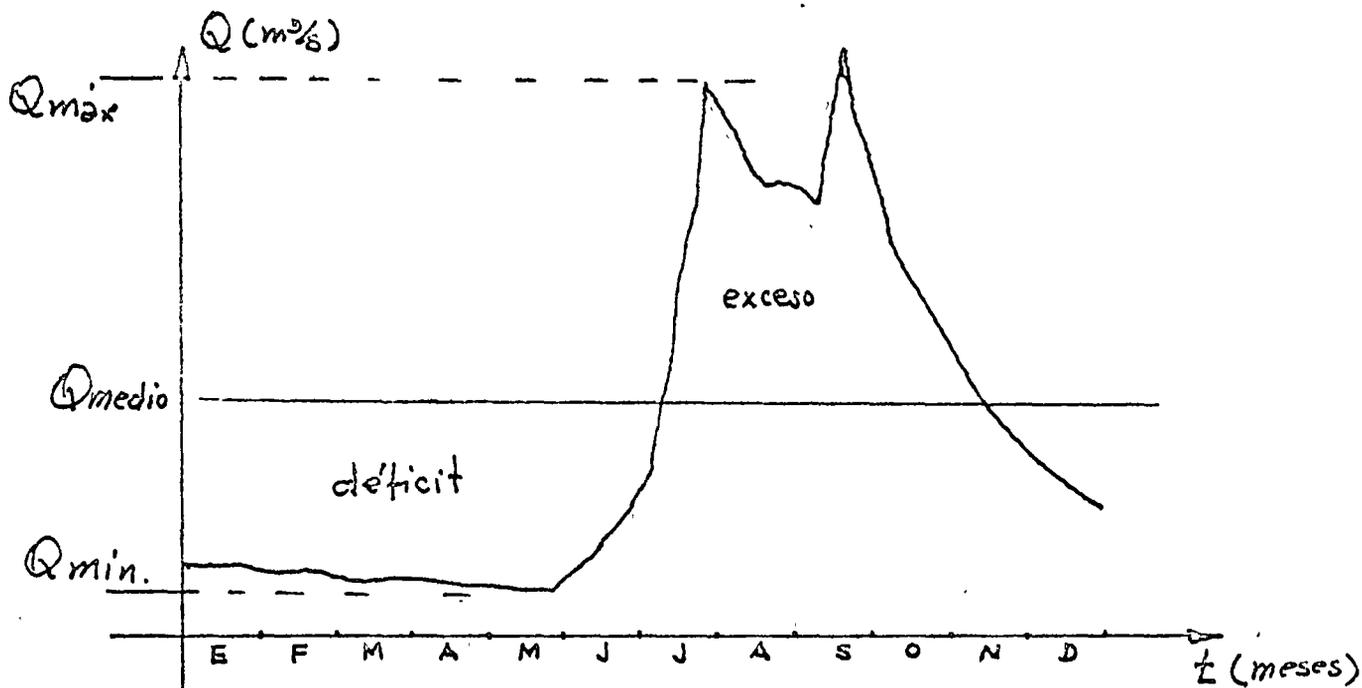


FIGURA 32.

DE ESTE HIDROGRAMA SE PUEDE APRECIAR UN  $Q_{\min}$ , UN PICO MÁXIMO QUE SE PRESENTA QUIZÁS EN UN MOMENTO O EN UNAS HORAS Y EL  $Q_M$  (GASTO MEDIO) OBTENIDO DE DIVIDIR EL ÁREA BAJO LA CURVA ENTRE LOS 12 MESES EXPRESADO EN SEGUNDOS.

NATURALMENTE AL HACER UN APROVECHAMIENTO DE UNA CORRIENTE NATURAL PARA GENERACIÓN DE ENERGÍA BASTARÍA UTILIZAR EL  $Q_{\min}$ . PARA QUE QUEDARA GARANTIZADA LA POTENCIA CONTÍNUA, SIN NECESIDAD DE HACER MÁS OBRAS QUE UNA DERIVACIÓN, PERO ÉSTA SERÍA UN DESPERDICIO ENORME DE LA POTENCIALIDAD DEL RÍO YA QUE EN LA ACTUALIDAD LAS NECESIDADES DE ENERGÍA SON INSACIABLES. DE INMEDIATO SE VÉ QUE EL  $Q_{\max}$

NO SE PUEDE APROVECHAR POR SU DURACIÓN TAN EFÍMERA. LUGO LA TENDENCIA ACTUAL - ES APROVECHAR AL MÁXIMO LA CAPACIDAD DEL RÍO TENDIENDO SIEMPRE HACIA EL GASTO MEDIO EN BASE A GUARDAR EL AGUA EN LAS ÉPOCAS DE ABUNDANCIA DE LLUVIAS PARA GASTARLA EN ÉPOCAS DE ESTIAJE, HACIENDO USO DE PRESAS DE ALMACENAMIENTO.

CAPACIDAD REQUERIDA DE ALMACENAMIENTO PARA GENERACION CONTINUA. POTENCIA CONTINUA Y CAPACIDAD INSTALADA .

PARA DETERMINAR LA POTENCIA CONTÍNUA O MÁXIMA POTENCIA QUE SE PUEDE GENERAR CON UNA CORRIENTE NATURAL, SE UTILIZA EL CONCEPTO DE CURVA MASA. ESTA SE CONSTRUYE A PARTIR DEL HIDROGRAMA NETO DEL RÍO; O SEA, AL QUE SE LE HAN DESCONTADO LAS PÉRDIDAS POR EVAPORACIÓN, INFILTRACIÓN, COMPENSACIÓN Y OTROS USOS; ACUMULANDO LOS VOLÚMENES AL FINAL DE CADA INTERVALO DE TIEMPO Y GRAFICÁNDOSLOS CONTRA EL TIEMPO COMO SE INDICA EN LA FIGURA 33 .

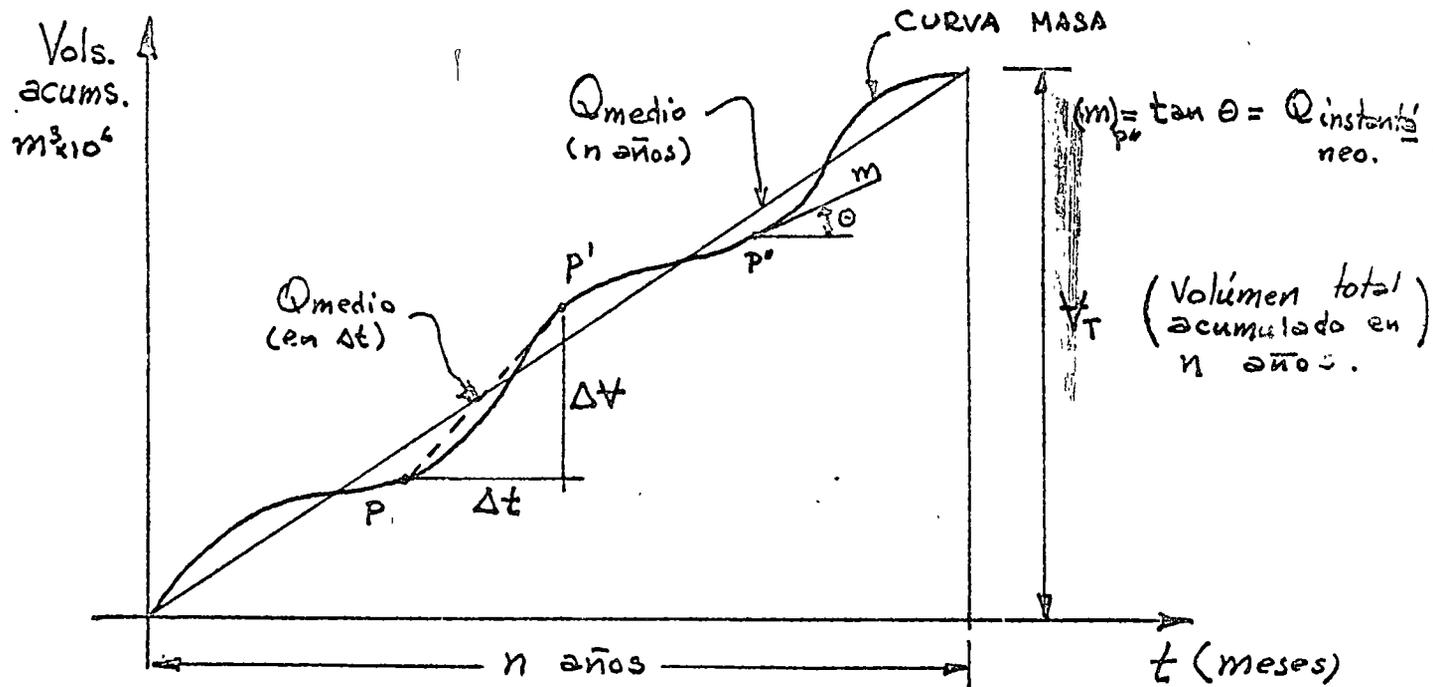


FIGURA 33.

ESTA CURVA TIENE LAS SIGUIENTES PROPIEDADES:

1º.- SIEMPRE ES ASCENDENTE O CUANDO MENOS HORIZONTAL, ÉPOCAS EN QUE EL -

RÍO NO APORTA, CORRESPONDIENTES A PERÍODOS DE SECAS DE ALGUNAS REGIONES DEL PAÍS.

2º.- SI UNIMOS EL ORIGEN CON EL FINAL DE LA CURVA DE LOG N AÑOS , LA PENDIENTE DE ESTA RECTA, ES EL GASTO MEDIO, PORQUE

$$Q_N = \frac{V_T}{N(\text{AÑOS})}$$

3º.- SI A PARTIR DE UN PUNTO CUALQUIERA TOMAMOS UN INTERVALO DE TIEMPO  $\Delta T$  PARA EL CUAL CORRESPONDE UN  $\Delta V$ , LA PENDIENTE DE LA RECTA ENTRE P Y P' ES EL GASTO MEDIO EN ESE INTERVALO DE TIEMPO, Y SI TOMAMOS EL LÍMITE CUANDO  $\Delta T \rightarrow 0$  ENTONCES, LA TANGENTE A LA CURVA MASA EN P ES EL GASTO INSTÁNTANEO DEL RÍO QUE CORRESPONDE A LA ORDENADA DEL HIDROGRAMA EN LA MISMA FECHA, LUEGO :

$$\lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta T} = Q_i$$

$$\Delta T \rightarrow 0$$

4º.- AL FINAL DE UN TIEMPO T DADA LA ORDENADA EN ESE PUNTO, DÁ EL VOLUMEN ACUMULADO POR EL RÍO EN ESE TIEMPO.

EN UN PRINCIPIO PARA DETERMINAR LA CAPACIDAD REQUERIDA DE ALMACENAMIENTO, LO HAREMOS COMO SI LA  $H_N$  NO VARIARA EN EL VASO Y LA POTENCIA GENERADA FUERA DEBIDO EXCLUSIVAMENTE A LA VARIACIÓN PURA DEL GASTO; Y ESTE GASTO PARA EL Q MEDIO. EN LA FIGURA 34 SE INDICA UNA PARTE DE LA CURVA MASA Y EL CRQUIS DE UN VASO DE ALMACENAMIENTO CON EL AGUA HASTA UN DETERMINADO NIVEL.

SUPÓNCASE QUE A PARTIR DEL TIEMPO  $T_0$  EN LA CURVA MASA EL NIVEL EN LA PRESA SEA  $N_0$ , AL FINAL DE T; EL RÍO HA APORTADO  $V_A$  Y LAS TURBINAS HAN CONSUMIDO  $V_{EXT}$ , LUEGO HAY UN EXCESO DE AGUA QUE SE ESTÁ ACUMULANDO EN EL VASO Y POR CONSIGUIENTE EL NIVEL DEL AGUA SUBE HASTA  $N_1$ , SEGUIRÁ SUBIENDO HASTA-

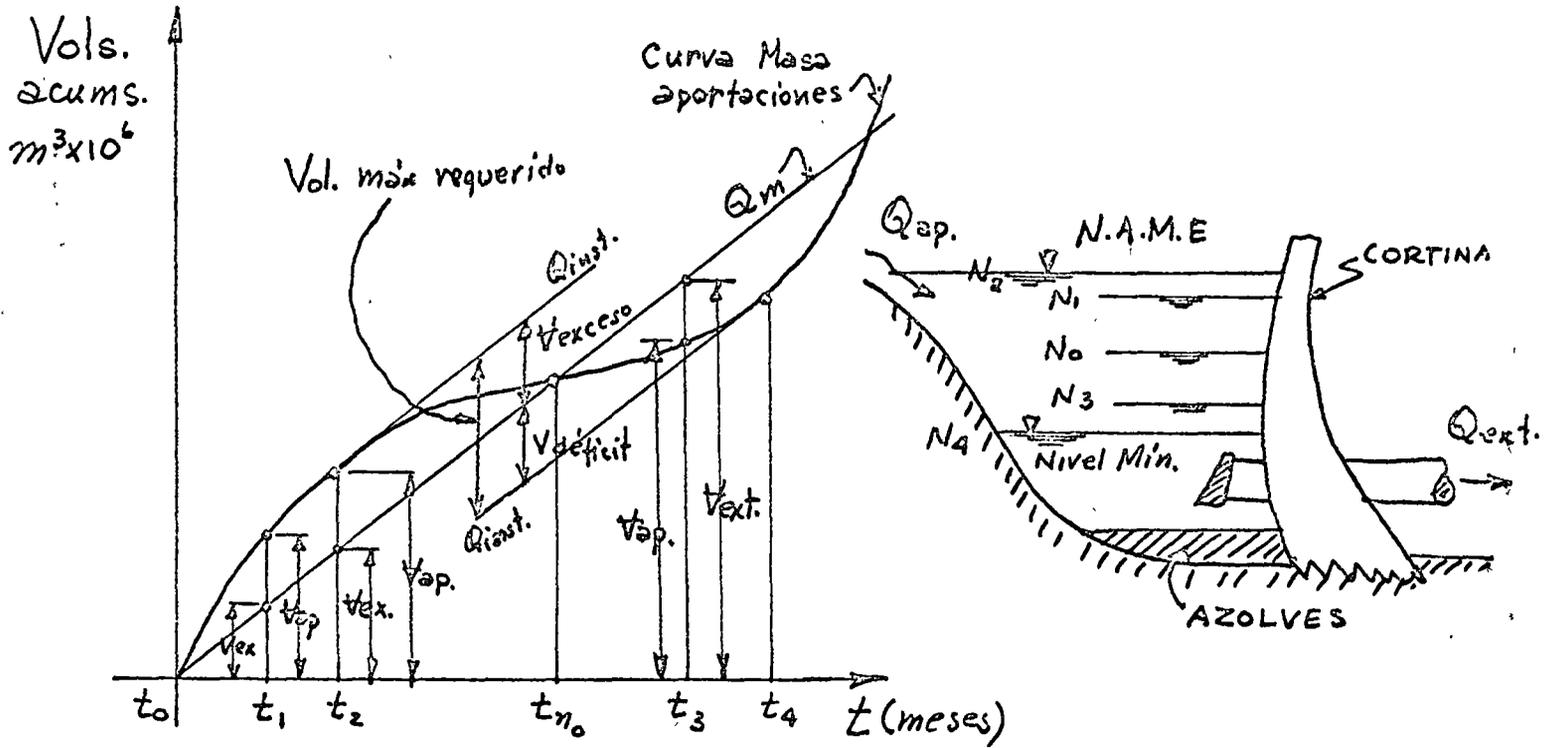


FIGURA 34

$t_2$  QUE CORRESPONDE AL TIEMPO  $t_2$ , DONDE PASANDO UNA TANGENTE A LA CURVA MASA QUE SEA PARALELA AL GASTO MEDIO, EN QUE EL GASTO APORTADO POR EL RÍO ES IGUAL AL GASTO DE EXTRACCIÓN Y QUE DEFINA EL NIVEL MÁXIMO EN LA PRESA. A PARTIR DE ESTE TIEMPO HASTA LLEGAR AL  $t_{No}$ , EL NIVEL DE LA PRESA DESCIENDE HASTA EL NIVEL ORIGINAL  $N_0$ , PORQUE EL GASTO APORTADO ES MENOR QUE EL DE EXTRACCIÓN.

SIGUIENDO EL ANÁLISIS EN LA MISMA FORMA AHORA A PARTIR DEL NODO  $t_{No}$  VEMOS QUE AL FINAL DEL TIEMPO  $t_3$  EL VOLUMEN APORTADO ES MENOR QUE EL VOLUMEN EXTRAÍDO, POR LO QUE EL DÉFICIT LO SUMINISTRA EL VASO Y EL NIVEL DEL AGUA DESCIENDE HASTA  $N_3$ , PERO AL LLEGAR AL  $t_4$  VEMOS QUE  $Q_{EXT.} = Q_{AP.}$  Y SE ALCANZA EL NIVEL MÍNIMO EN EL VASO; A PARTIR DE  $t_4$  VUELVE A SUBIR EL NIVEL DEL AGUA PORQUE  $Q_{AP.} > Q_{EXT.}$  Y ASÍ PODRÍA UNO SEGUIR EL ANÁLISIS PARA UNA CURVA MASA DE  $N$  AÑOS, HASTA DETERMINAR EL MÁXIMO DÉFICIT MÁS EL MÁXIMO EXCESO COMPRENDIDO ENTRE NODOS SUCESIVOS QUE NOS DARÍA LA CAPACIDAD MÁXIMA REQUERIDA.

$$V \text{ MÁX. REQ.} = V \text{ MÁX DEF} + V \text{ MÁX EXC.}$$

QUE LLEVADO A LA CURVA DE ELEVACIONES -CAPACIDADES DEL VASO NATURAL - (OBTENIDO DE UN ESTUDIO DE CONFIGURACIÓN TOPOGRÁFICA), DETERMINA EL NIVEL MÍNIMO EN EL VASO, VER FIGURA 35.

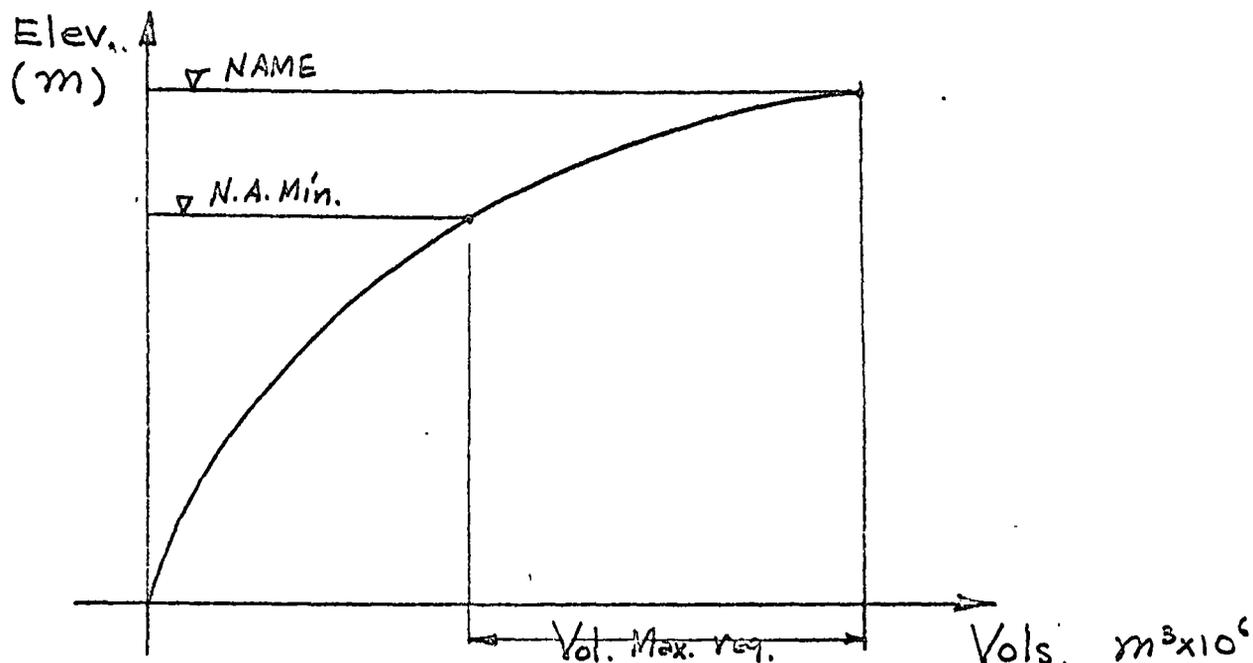


FIGURA 35.

TENIENDO A LA MANO LA ELEVACIÓN MÍNIMA DEL AGUA EN EL VASO, ANTES CALCULADA Y CON LA ELEVACIÓN DEL NIVEL MÁXIMO DEL ESPEJO DEL AGUA EN EL DESFO - QUE (DESCARGA DE LOS TUBOS DE SUCCIÓN DE LAS TURBINAS ) PODEMOS YA DETERMINAR LA CARGA BRUTA MÍNIMA ( $H_{CMIN}$ ). CON ÉSTA Y EL GASTO MÁXIMO DE PICK DE CONSUMO DE LAS TURBINAS (CAPACIDAD INSTALADA ) SE DETERMINA EL DIÁMETRO DE LA TUBERÍA DE PRESIÓN ; MUCHAS VECES ÉSTA, ÚNICAMENTE SE REVISA, PUES LOS YÚNELES DE DESVÍO SIRVEN PARA ESTE EFECTO Y RESULTAN ÉSTOS SOBRADOS. UNA VEZ QUE TENEMOS DEFINIDO EL SISTEMA HIDROELÉCTRICO PODEMOS REALIZAR EL FUNCIONAMIENTO DEL SISTEMA PARA DETERMINAR LA CAPACIDAD MÁXIMA CONTÍNUA DE GENERACIÓN QUE GENERALMENTE SE LE LLAMA CAPACIDAD CONTÍNUA Y A PARTIR DE ÉSTA SE ESPECIFICA EL PICK MÁXIMO , LO QUE DETERMINA LA CAPACIDAD INSTALADA Y QUE GENERALMENTE SE ACUERDA CON LAS AUTORIDADES, PUES DETERMINA EL COSTO DEL KILOWATT - HORA.

## CAPACIDAD CONTINUA.

SEA LA CURVA MASA DE LA FIGURA 36 EN QUE SE HA INDICADO LA CURVA MASA - DE APORTACIONES Y ADEMÁS TENEMOS A LA MANO LA CURVA DE ELEVACIONES - CAPACIDADES DEL VASO (FIGURA 35) Y FIJA LA ELEVACIÓN DEL NIVEL DEL AGUA EN EL DESFOQUE. UN VALOR EN PRIMERA APROXIMACIÓN DE LA POTENCIA CONTÍNUA LO PODEMOS DETERMINAR CON :

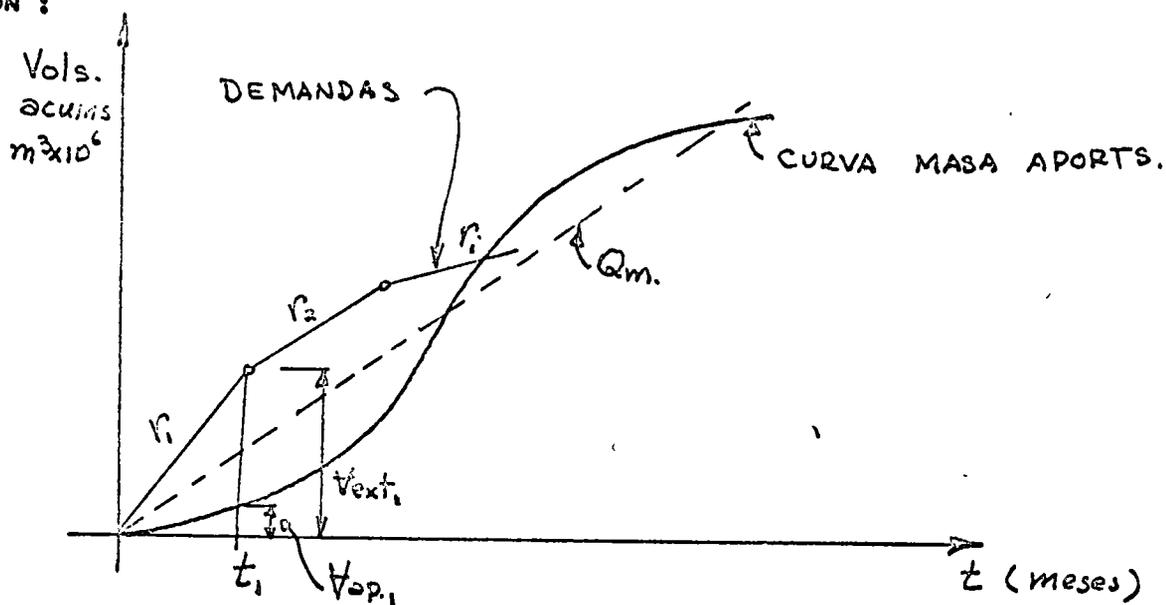


FIGURA 36.

$$P_{MED} = \int Q_m H_{NM} \eta_T = P_C$$

EN QUE :  $Q_m$  ; GASTO MEDIO

$H_{NM}$  ; CARGA NETA MEDIA QUE SE DETERMINA CON :

$$H_{NM} = H_{DM} - f \frac{LTP}{DTP} \frac{Q_m^2}{2g A_{TP}^2}$$

Y  $H_{DM} = \text{ELEV. MEDIA DEL VASO} - \text{ELEV. MÁX. CANAL DE DESFOQUE.}$

LUEGO PODEMOS ESCRIBIR:

$$P_C = \int Q_i H_{N_i} \eta_T$$

EN QUE :  $Q_1$  ; GASTO INSTANTÁNEO.

$H_{N1}$  ; CARGA NETA INSTANTÁNEA QUE SE DETERMINA CON :

$$H_{N1} = H_{B1} - \frac{L_{TP}}{D_{TP} \times 2g} \frac{Q_1^2}{A_{TP}} \quad 0$$

$$H_{N1} = H_{B1} - K Q_1^2$$

LUEGO  $P_0$  SE PUEDE ESCRIBIR ASÍ :

$$P_0 = \int Q_1 (H_{B1} - K Q_1^2) \eta_T$$

DE ÉSTA UNA VEZ FIJADO  $P_0$  SE PUEDE OBTENER LA SIGUIENTE:

$$\frac{P_0}{\int \eta_T} = Q_1 (H_{B1} - K Q_1^2) = 0$$

DE LA CUAL PODEMOS OBTENER LA CURVA MASA DE EXTRACCIONES, COMO SIGUE:

1º.- SE FIJA UN  $Q_1$  QUE EN LA FIGURA 36 ES LA PENDIENTE DE LA RECTA -

$R_1$  .

2º.- AL FINAL DEL TIEMPO  $T_1$  , SE HA EXTRAÍDO  $V^E$  , Y EL RÍO HA APORTADO  $V^A$  , LUEGO EL VASO HA TENIDO QUE SUMINISTRAR UN VOLUMEN

$V^{DEF} = V^E - V^A$  , QUE AL LLEVARLO A LA FIGURA 35 DETERMINA A PARTIR DE VASO LLENO LA ELEVACIÓN  $ELEV_{T_1}$  .

3º.- TOMANDO UNA ELEVACIÓN MEDIA  $E_{MEDIA} = \frac{E_{CANAL} - E_{T_1}}{2}$  SE DETERMINA LA -

$H_{B1} = E_{MEDIA} - ELEV_{CANAL}$  DESFOQUE. Y DE LA ECUACIÓN ANTERIOR DE 0 SE COMPRUEBA EL  $Q_1$  QUE DEBE SER IGUAL AL SUPUESTO.

4º.- REPITIENDO LA OPERACIÓN, SUPONIENDO CADA VEZ  $Q_1$  Y COMPROBÁNDOLO SE PUEDE CONSTRUIR LA CURVA MASA DE EXTRACCIÓN QUE DEBERÁ DE CORTAR CON UN RANGO DE SEGURIDAD A LA APORTACIONES COMO SE INDICA EN LA FIGURA 36 CON LAS  $R_2$  ,  $R_3$  , .....  $R_1$  .

SI EL CORTE DE LA CURVA DE EXTRACCIÓN CON LA DE APORTACIONES ES MUY AJA BAJO DE LA CIMA DE LA DE APORTACIONES SE AUMENTA LA  $P_0$  , SI POR EL CONTRARIO

NO LA CORTA Y SE VÁ PARA ARRIBA INDEFINIDAMENTE, SE DISMINUYE LA  $P_c$ . CON LO -  
 QUE ES FACTIBLE DETERMINAR LA CAPACIDAD CONTÍNUA Y A LA VEZ EL NIVEL MÍNIMO -  
 CON LO QUE SE PUEDE DETERMINAR LA  $H_N$  MEDIA Y EL  $Q$  MEDIO PARA LA SELECCIÓN DE-  
 LAS MÁQUINAS. FINALMENTE SE REVISA QUE EL RANGO DE VARIACIÓN DE LA CARGA NE-  
 TA SEA MENOR QUE EL PERMISIBLE PARA EL TIPO DE MÁQUINAS DE QUE SE TRATE.

### SISTEMA DE BOMBEO.

EN LOS SISTEMAS DE BOMBEO CON ALMACENAMIENTO EL PROBLEMA QUE SE PRESEN-  
 TA, ES DETERMINAR LA CAPACIDAD REQUERIDA DE ALMACENAMIENTO PARA UN TIEMPO DE-  
 BOMBEO DETERMINADO. ESTE PROBLEMA ES SIMILAR AL DE LOS SISTEMAS HIDROELÉCTRI-  
 COS, PERO COMO EL TIEMPO DE BOMBEO PUEDE VARIAR EN RANCOS AMPLIOS, ASÍ COMO -  
 LA ELECCIÓN DE LA VELOCIDAD EN LA TUBERÍA DE PRECIÓN, ENTONCES LA SOLUCIÓN FI-  
 NAL LA DETERMINA EL ASPECTO ECONÓMICO AL ANALIZARLO DESDE ESTE PUNTO DE VISTA  
 CADA UNA DE LAS ALTERNATIVAS.

### DETERMINACION DE LA CAPACIDAD REQUERIDA DE ALMACENAMIENTO.

SI ANALIZAMOS AL HISTOGRAMA DE DEMANDAS DE UNA LOCALIDAD DADA, VER -  
 FIGURA 37 CORRESPONDIENTE A UN DÍA NORMAL, OBSERVAREMOS QUE EXISTE UN  $Q_{\min}$  DU-  
 RANTE LA NOCHE HASTA LAS 7.00 HORAS APROXIMADAMENTE, A PARTIR DE ESTA HORA EL  
 CONSUMO DE AGUA AUMENTA HASTA UN MÁXIMO O PICK DURANTE LAS HORAS DE MÁXIMA AC-  
 TIVIDAD, Y LUEGO VIENE EL DESEMBO HASTA ENTRAR AL DÍA SIGUIENTE, VEMOS TAM-  
 BIÉN QUE EXISTE UN  $Q_M$ . (GASTO MEDIO DIARIO). A PARTIR DE ESTE HISTOGRAMA DE  
 DEMANDAS PODEMOS CONSTRUIR LA CURVA MASA, ACUMULANDO LOS GASTOS DURANTE LAS -  
 24 HORAS, VER FIGURA 38. SI QUIBIÉRAMOS BOMBLEAR DURANTE LAS 24 HORAS CON UN-  
 GASTO MEDIO CONSTANTE, ENTONCES SE REQUERIRÍA UNA CAPACIDAD DE ALMACENAMIENTO

$V_1 + V_2$ , AL PASAR PARALELAS AL GASTO MEDIO A LA CURVA MASA DEFINE -

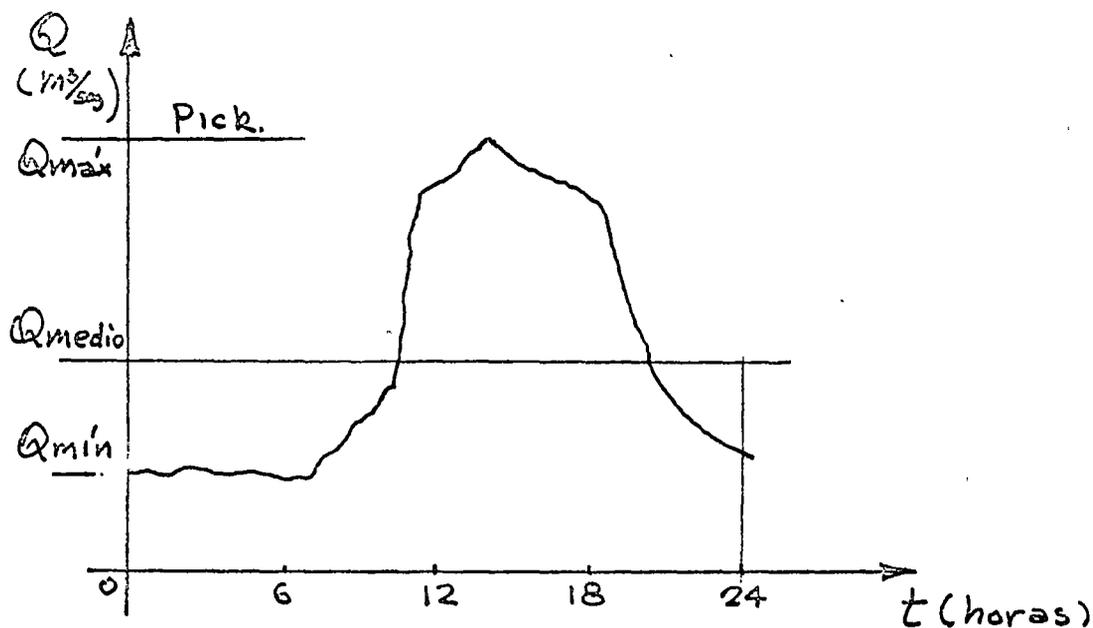


FIGURA 37.

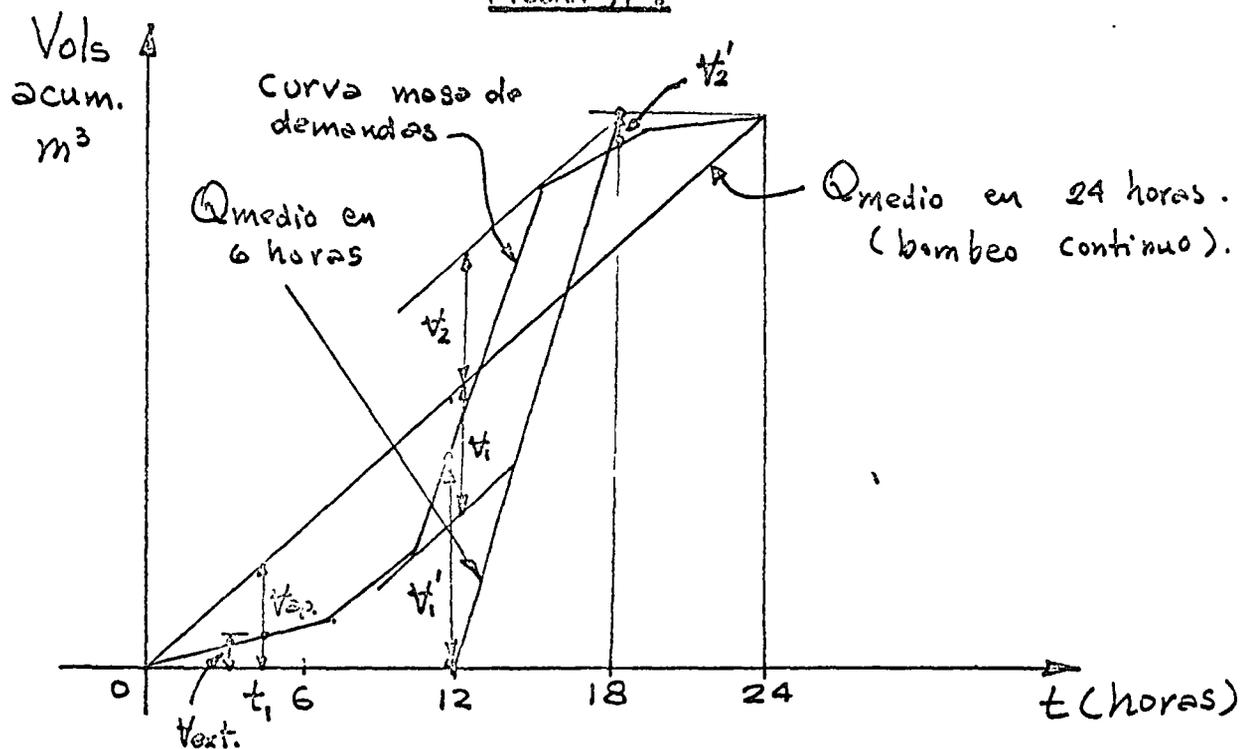


FIGURA 38.

LOS VOLÚMENES CORRESPONDIENTES ANTES Y DESPUÉS DEL NODO. EL ANÁLISIS QUE DEFINE ÉSTE RESULTADO ES SIMILAR AL DEL SISTEMA HIDROELÉCTRICO AL SUPONER VOLÚMENES ACUMULADOS POR EL SISTEMA DE BOMBAS AL FINAL DE UN TIEMPO  $T_1$  Y EL VOLUMEN EXTRAÍDO DEL DEPÓSITO EN EL MISMO TIEMPO (VER FIGURA 38), EL RESULTADO SON VOLÚMENES QUE HAY QUE GUARDAR  $V_1$ , Y VOLÚMENES  $V_2$ , QUE HAY QUE CARGAR DEL TANQUE PARA SATISFACER EL DÉFICIT. NATURALMENTE A MEDIDA QUE DIS-

MINUYE EL TIEMPO DE BOMBEO AUMENTA LA CAPACIDAD REQUERIDA DE ALMACENAMIENTO Y EL GASTO DEL SISTEMA DE BOMBEO ENCARECIENDO EL SISTEMA, VER EL  $V'_1 + V'_2$  PARA 6 HORAS DE BOMBEO Y A ESTO HAY QUE AGREGAR QUE EL DIÁMETRO DE LA TUBERÍA DE PRESIÓN AUMENTA EN LA MISMA RAZÓN Y LAS FLUCTUACIONES DE LA CARGA SON MAYORES, PROVOCANDO QUE EL SISTEMA DE BOMBAS YA NO FUNCIONE DURANTE TODO EL TIEMPO A MÁXIMA EFICIENCIA, EMPEORANDO TODAVÍA LA SITUACIÓN.

PERO COMO QUIERA QUE SEA, DE ACUERDO CON LA FIGURA 39, LA CARGA TOTAL

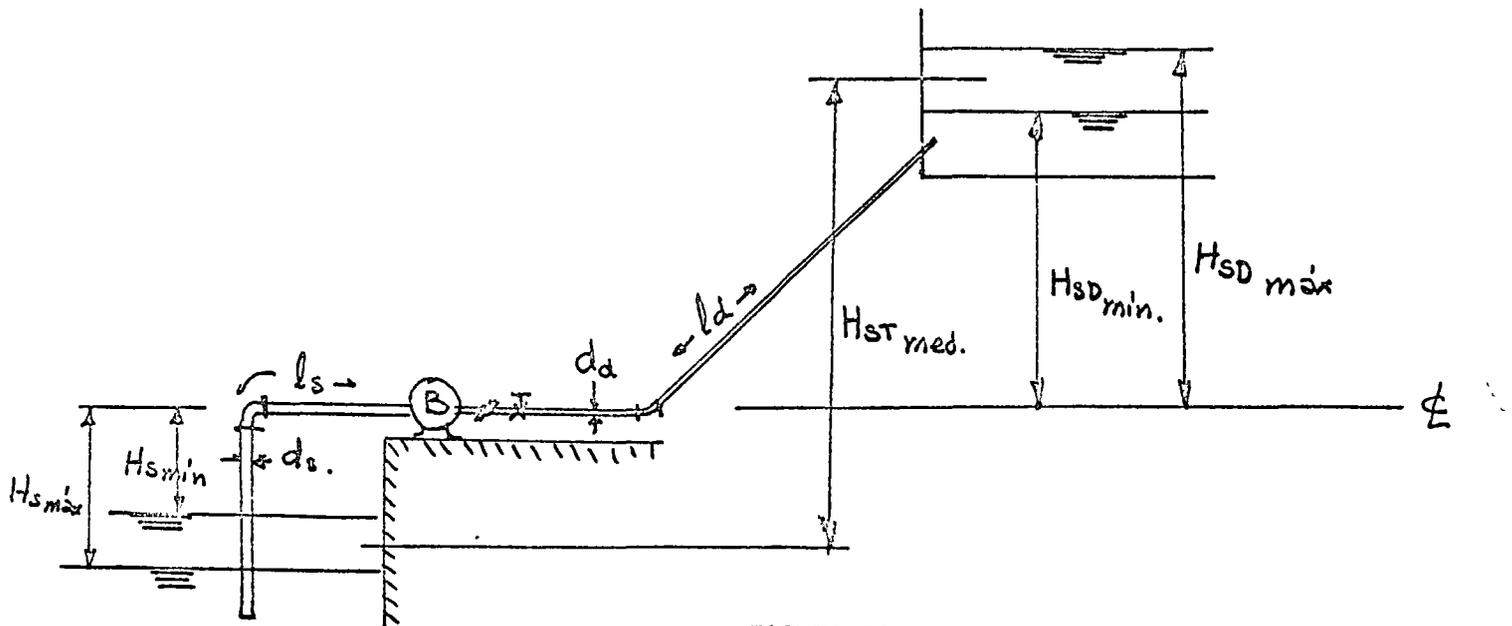


FIGURA 39.

DE DISEÑO DEL SISTEMA DE BOMBAS CON LOS NIVELES MEDIOS EN EL CÁRCAMO DE BOMBEO Y EN EL DEPÓSITO DE ALIMENTACIÓN.

$$H_T = H_{STM} + \left( f_s \frac{L_s}{D_s} + \sum K_{I_s} \right) \frac{V_s^2}{2g} + \left( f_D \frac{L_D}{D_D} + \sum K_{I_D} \right) \frac{V_D^2}{2g}$$

EN QUE :

$H_{STM}$  : CARGA ESTÁTICA TOTAL MEDIA.

DE AQUÍ SE DEDUCE QUE PARA QUE LA  $H_T$  NO SUPRA VARIACIONES MUY FUERTES ES NECESARIO QUE TANTO EL ÁREA DE LA BASE DEL CÁRCAMO DE BOMBEO COMO DEL TANQUE DE ALMACENAMIENTO SEAN AMPLIAS EN LUGAR DE REDUCIDAS Y ADEMÁS ESTO FA-

VORECE EL ASPECTO ECONÓMICO CONSTRUCTIVO DE LA OBRA CIVIL. SI UTILIZAMOS EL PRINCIPIO DE CONTINUIDAD :

$$Q = A_{TS} V_B = A_{TD} V_D$$

LA ANTERIOR SE TRANSFORMA EN LA ECUACIÓN DE LA CURVA DE CARGAS DEL SISTEMA DE BOMBEO :

$$H_T = H_{ST} + K Q^2$$

EN QUE :

$$K = \left( F_B \frac{L_B}{D_B} + \sum K_{I_B} \right) \frac{1}{2g A_B} + \left( F_D \frac{L_D}{D_D} + \sum K_{I_D} \right) \frac{1}{2g A_D}$$

SI SUPERPONEMOS ÉSTA CON LAS CURVAS DE GASTOS DEL SISTEMA DE BOMBAS OPERANDO EN PARALELO, PODEMOS VER COMO TRABAJARÍA EL SISTEMA DE BOMBEO A GASTOS PARCIALES, VER FIGURA 40.

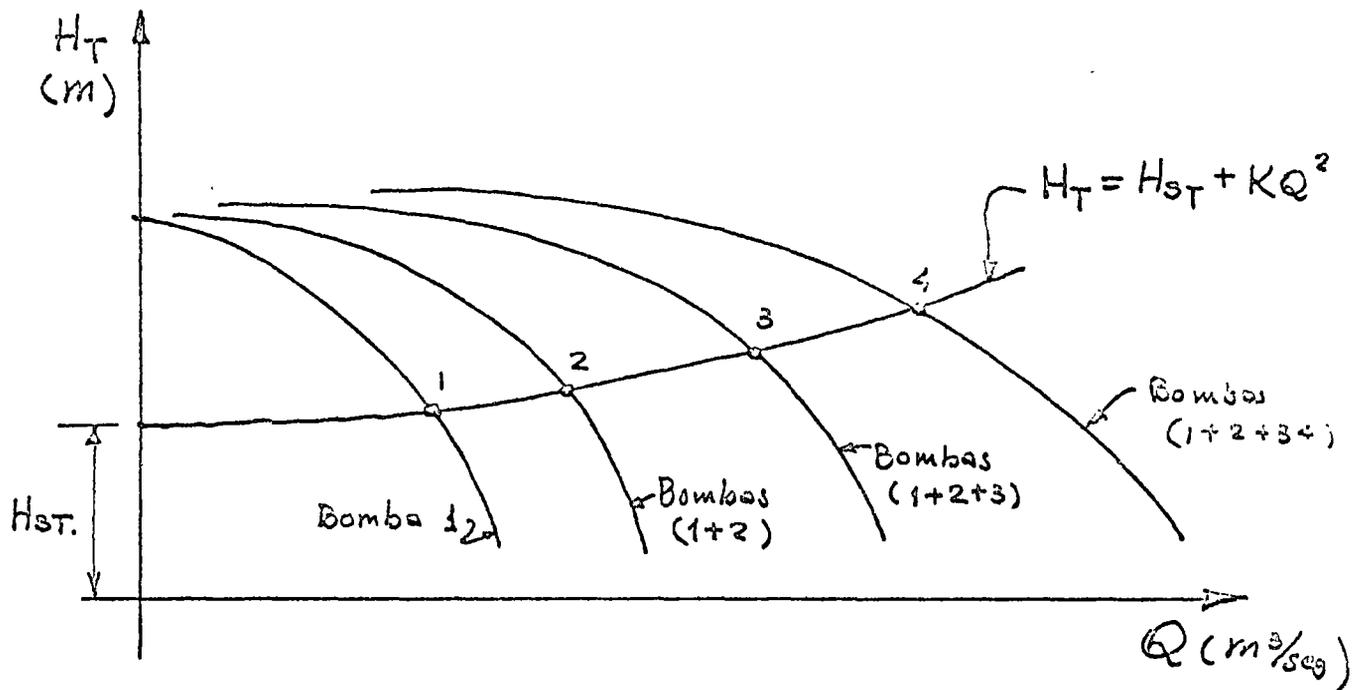


FIGURA 40.

LAS INTERSECCIONES NOS DARÁN LOS PUNTOS EN QUE QUEDA OPERANDO EL SISTEMA DE BOMBAS, CON LO QUE ES FACTIBLE ANALIZAR LAS CURVAS DE EFICIENCIA DE

DE LAS MISMAS AL QUEDAR OPERANDO COMO LA  $H_{T1}$  ,  $H_{T2}$  ..... INDICADAS. LUEGO VARIANDO EL TIEMPO DE BOMBEO, LA VELOCIDAD DEL AGUA EN LA TUBERÍA DE PRESIÓN- Y LAS ÁREAS DE LOS DEPÓSITOS, Y ADEMÁS HACIENDO USO DE LAS CURVAS DE EFICIENCIA DEL SISTEMA DE BOMBAS, SE PUEDE OBTENER UNA GAMA SUFICIENTE DE ALTERNATIVAS ECONÓMICAS QUE PERMITEN DETERMINAR EL MEJOR SISTEMA DE BOMBEO.

LINEAS DE CONDUCCION.

Ing. Mario González Petrikowsky

## INTRODUCCION.

Una ecuación exacta y de fácil manipulación, que represente el flujo de fluidos a presión dentro de un conducto dado, es de vital importancia tanto en el diseño como en la operación de sistemas de transmisión. Para que sea válida, tal ecuación debe reflejar exactamente el comportamiento real del fluido al desplazarse este por el conducto. Debe incorporar todas las propiedades del fluido y del conducto que afecten el comportamiento del flujo, y debe expresar estos en una manera que indique rigurosamente la manera en que el flujo o la caída de presión son afectados por tales parámetros.

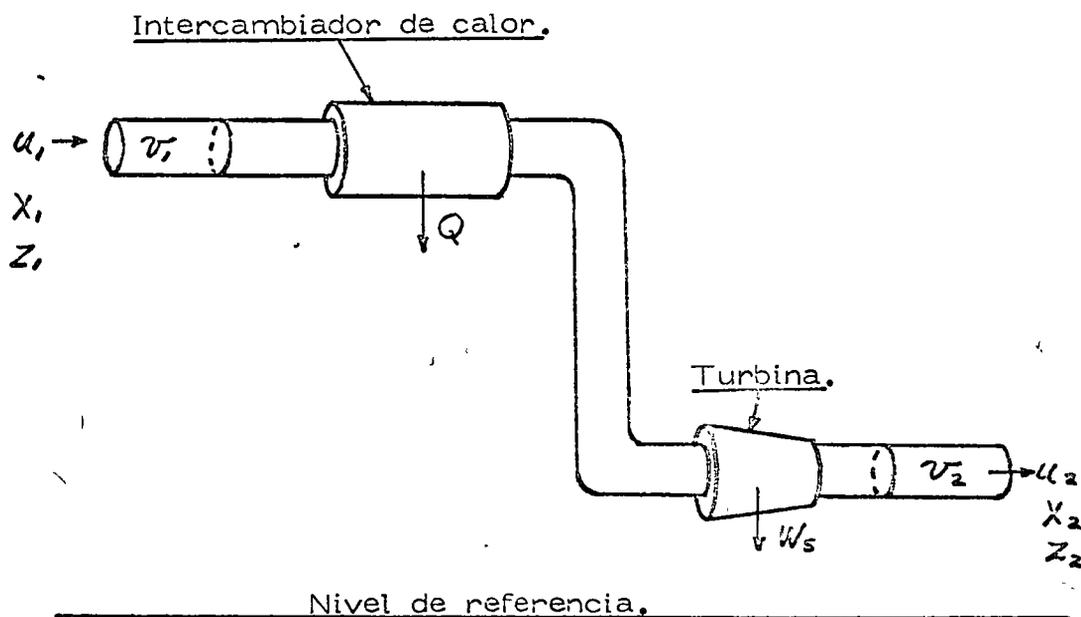
Para que sea útil, esta ecuación debe permitir la determinación relativamente fácil de cualquiera de los tres principales parámetros de diseño: gasto, diámetro y caída de presión, cada uno como una función de los otros dos y de las propiedades conocidas del fluido y de la tubería.

En nuestra discusión veremos la derivación de la ecuación general de flujo desde el punto de vista de un análisis termodinámico, introduciendo los factores necesarios para que el análisis teórico sea aplicable a los casos prácticos de diseño.

## CONCEPTOS BASICOS.

### Energía de un Fluido en Movimiento.

La energía total de un fluido en movimiento se puede dividir en un número dado de componentes. Analicemos un proceso en el cual existe un flujo en régimen permanente de fluido a través de un conducto como el que se muestra en la figura.



Refiriéndonos a una unidad de masa del fluido, consideremos los cambios que sufre en su trayecto del punto  $X_1$  al  $X_2$ , despreciando cambios ocasionados por campos de fuerza diferentes al gravitacional.

Recordando la expresión general de la primera ley de la Termodinámica:

CAMBIO EN ENERGIA DEL SISTEMA = CAMBIO EN ENERGIA DE LOS ALREDEDORES.

Se deduce que el elemento de fluido considerado puede sufrir cambios en su energía interna, cinética y potencial. Por lo tanto, la

energía total de la unidad de masa de fluido será:

$$U + \frac{g}{g_c} Z + \frac{1}{2} \frac{U^2}{g_c}$$

Si el fluido recorre una distancia finita de la sección 1 a la 2, tendremos el cambio finito de la energía total del elemento considerando, expresado por:

$$\Delta U + \frac{g}{g_c} \Delta Z + \frac{\Delta U^2}{2 g_c}$$

Por la primera ley, tendremos:

$$\Delta U + \frac{g}{g_c} \Delta Z + \frac{\Delta U^2}{2 g_c} = Q - W \quad (1)$$

Podría pensarse que el término  $W$  mostrado en la ecuación anterior corresponde al trabajo de flecha  $W_s$  mostrado en la figura. Sin embargo, se notará que el elemento de masa se encuentra sujeto a la influencia de las presiones ejercidas por los elementos contiguos durante su trayecto dentro del ducto. Estas presiones darán lugar a un trabajo realizado sobre el elemento al entrar al sistema mostrado y a un trabajo realizado por el elemento sobre los alrededores al abandonar el sistema. Consideremos las magnitudes de estos trabajos:

En el punto X1:

$$W_1 = P_1 A_1 \frac{v_1}{A_1} = P_1 v_1$$

En el punto X2:

$$W_2 = P_2 A_2 \frac{v_2}{A_2} = P_2 v_2$$

Por lo tanto, el trabajo total realizado por intercambios de energía del elemento con el medio ambiente, será:

$$W = W_s + P_2 v_2 - P_1 v_1$$

Substituyendo en la ecuación 1:

$$\Delta U + \frac{\Delta u^2}{2g_c} + \frac{g}{g_c} \Delta Z = Q - W_s - P_2 v_2 + P_1 v_1$$

Agrupando términos:

$$\Delta U + \Delta(Pv) + \frac{\Delta u^2}{2g_c} + \frac{g}{g_c} \Delta Z = Q - W_s \quad (2)$$

Recordando la definición de entalpía:

$$\Delta H = \Delta U + \Delta(Pv)$$

y substituyendo en la ecuación (2):

$$\Delta H + \frac{\Delta u^2}{2g_c} + \frac{g}{g_c} \Delta Z = Q - W_s \quad (3)$$

Hasta este punto, contamos con una expresión que nos permite establecer un balance de energía sobre un elemento de masa fluyendo en un sistema bajo régimen constante que intercambia energía en forma de calor y trabajo, con el medio ambiente. Es preciso notar, sin embargo que en ningún momento se tomó en cuenta el posible intercambio de energía entre el fluido y el conducto. En otras palabras, no se ha tomado en cuenta que la energía que el elemento posee en una sección dada, será disminuída al abandonar el elemento tal sección por las pérdidas causadas por fricción con las paredes del conducto. Por lo tanto es necesario modificar la relación básica (3) para tomar en cuenta los efectos de fricción.

Para un cambio infinitesimal de las variables consideradas, la ecuación (3) toma la forma:

$$dH + \frac{u du}{g_c} + \frac{g}{g_c} dz = dQ - dW_s \quad (4)$$

Podemos ahora introducir la siguiente ecuación:

$$dH = \delta Q + v dP + \delta F \quad (5)$$

en donde  $\delta F$  representa una medida del grado de irreversibilidad del proceso; representa la cantidad de trabajo mecánico convertido irreversiblemente a calor, y que denominaremos factor de resistencia.

Substituyendo la ecuación (5) en la (4):

$$\frac{u du}{g_c} + \frac{g}{g_c} dz + v dP + \delta W_s + \delta F = 0 \quad (6)$$

Integrando esta ecuación para el flujo entre las secciones 1 y 2:

$$\frac{\Delta u^2}{2g_c} + \frac{g}{g_c} \Delta z + \int_1^2 v dP + W_s + F = 0 \quad (7)$$

Antes que la ecuación (7) pueda ser aplicada a la solución de problemas de flujo particulares, debemos contar con medios para determinar los términos  $\int_1^2 v dP$  y  $F$ .

Considerando por el momento solo el caso de fluidos incompresibles, en cuyo caso  $v$  es independiente de presión:

$$\int_1^2 v dP = (P_2 - P_1) v$$

por lo que:

$$\frac{\Delta u^2}{2g_c} + \frac{g}{g_c} \Delta z + v \Delta P + W_s + F = 0 \quad (8)$$

#### Naturaleza del Factor de Fricción.

El parámetro  $F$  está fundamentalmente relacionado a las pérdidas de energía causadas por fricción. En la derivación de la ecuación general de flujo, todas las irreversibilidades y comportamientos reales

del proceso y del fluido (exceptuando la evaluación de la integral  $\int v^2 dp$ ) se han agrupado en este factor. Este es el procedimiento generalmente seguido por los investigadores, como se verá en el resumen histórico que se presenta a continuación.

Desde el tiempo de Darcy y Reynolds, en los 1840, una gran cantidad de investigación se ha dedicado a determinar la relación entre las pérdidas por fricción, características del medio ambiente, propiedades de los fluidos, y variables relacionadas con flujos. Tal como ha sucedido con muchos otros desarrollos tecnológicos, las correlaciones entre variables importantes se propusieron bastante antes que la teoría fundamental, relacionando los fenómenos observados, fué formulada.

En 1841 Weisbach utilizó la información experimental disponible para desarrollar una ecuación para el factor de resistencia:

$$F = f \left( \frac{L}{d} \right) \left( \frac{u^2}{2g} \right)$$

Esta ecuación, combinada con proposiciones de Darcy, conocida generalmente como la ecuación de Darcy-Weisbach, se representa como sigue:

$$dF = f \frac{\bar{u}^2}{2gd} dL$$

Fanning desarrolló independientemente su correlación de fricción, publicándola en 1893, antes de que fué demostrado definitivamente que el factor de resistencia está fundamentalmente relacionado a la pérdida de energía causada por fricción. La ecuación tiene la misma forma que la Darcy-Weisbach excepto que el coeficiente de la ecuación

de Fanning,  $f_F$ , está relacionado al de Darcy-Weisbach de la siguiente manera:

$$f_D = 4 f_F$$

Las ecuaciones mencionadas son utilizadas universalmente hoy en día, en cálculos de flujo de fluidos, como índices de las pérdidas causadas por fricción.

La constante de proporcionalidad  $f$ , llamada el coeficiente de fricción o el factor de fricción, aparece en ecuaciones de flujo, derivadas de la ecuación (8), en la forma de  $\frac{1}{\sqrt{f}}$ , siendo denominada esta relación el factor de transmisión. Ya que el gasto resulta directamente proporcional al factor de transmisión, este factor es un índice de la capacidad de conducción de una línea para unas condiciones dadas. La determinación de este importante parámetro, en función de los parámetros del sistema, tuvo que esperar, sin embargo a la larga serie de célebres investigadores que fueron estableciendo la naturaleza de la vinculación entre el parámetro  $f$  y las variables del sistema.

Reynolds, en 1883, demostró la existencia de dos distintos regímenes de flujo.

Bajo estas condiciones, parecía difícil desarrollar una sola expresión para el factor. La correlación  $f_F = \frac{16}{N_{Re}}$ , fué establecida para el régimen laminar, concentrándose la atención en el comportamiento del régimen turbulento.

En un estudio posterior Reynolds determinó que el gasto en el cual ocurre la transición de condiciones laminares a turbulentas era

función del área transversal de la corriente, de la velocidad lineal promedio del fluido, su densidad y su viscosidad. Para flujo en tuberías, el criterio de similitud está expresado por

$$\frac{d \bar{u} \rho}{\mu}$$

conocido ahora como el número de Reynolds.

Los estudios que siguieron, por investigadores como Blasius, Stanton, Pannel, Hopf, Fromm, Heltzel y Nikuradse, combinados con la teoría de la capa límite presentada por Prandtl, llevaron a establecer que el comportamiento del coeficiente de fricción en el régimen de flujo turbulento puede ser dividido en tres secciones: primero, comportamiento de tubería pulida, característico de turbulencia parcialmente establecida; segundo, comportamiento de transición; y tercero, comportamiento de tubería áspera, característico de turbulencia completamente desarrollada.

Para el caso de tubería pulida, el factor de transmisión depende sólo del número de Reynolds. Esto significa que la capa límite disminuye en espesor al aumentar el  $N_{Re}$ , permitiendo que una mayor porción del área transversal del conducto se encuentre en régimen turbulento, pero bajo esta condición el flujo no se encuentra afectado por la textura de las paredes del conducto.

El comportamiento de tubería áspera está caracterizado por el hecho de que la capa límite ya no es continua pues las protuberancias de la pared del conducto se extienden hasta penetrar el núcleo de flujo turbulento. Bajo estas condiciones el factor de transmisión depende sólo del área transversal del conducto, o de un parámetro que la represente. El parámetro generalmente usado es la proporción entre un

valor que representa la rugosidad de las paredes, y el diámetro del conducto.

Se deduce, por lo tanto, que el comportamiento de tubería áspera establece el valor límite del factor de transmisión al aumentar el flujo.

En 1944, Moody combinó las leyes derivadas por Prandtl para el comportamiento de tuberías pulidas y ásperas, la correlación de rugosidad-diámetro de Nikuradse, así como la región de transición determinada por Colebrook, para desarrollar la correlación que lleva su nombre y que se ha convertido en la norma para diseños de sistemas de flujo. Esta correlación, junto con la de Fanning, nos permiten hoy en día utilizar la ecuación (8) para resolver una enorme cantidad de problemas en diseño de líneas de conducción. Véase la figura No.2.

### APLICACIONES.

Recordando la ecuación de flujo, (8), derivada anteriormente:

$$\frac{\Delta u^2}{2g_c} + \frac{g}{g_c} \Delta Z + v \Delta P + W_s + F = 0$$

así como la correlación de Fanning:

$$F = 2 f_F \frac{4 u^2}{d}$$

y la relación de continuidad:

$$Q \rho = Q_b \rho_b$$

expresando además la velocidad promedio como:

$$u = \frac{4 Q_b v}{\pi d^2 v_b}$$

tendremos finalmente la siguiente expresión:

$$\frac{\Delta u^2}{2g_c} + \frac{g}{g_c} \Delta Z + v \Delta P + W_s + \frac{32}{\pi^2} f_F \frac{4}{d^5} \left( \frac{v}{v_b} \right)^2 Q_b^2 = 0 \quad (9)$$

Como un primer paso en el análisis del problema que estemos analizando, deberemos determinar las simplificaciones que sea pertinente o permisible hacer sobre la ecuación (9).

Con el fin de observar un tipo particular de problema, estableceremos una serie de condiciones idealizadas sobre el sistema que analizaremos. Esta serie de restricciones nos reducirá la ecuación (9) a la siguiente expresión:

$$v \Delta P + W_s + 3.24 f_F \frac{4}{d^5} Q^2 = 0 \quad (10)$$

Se deja como ejercicio la justificación de cada una de las simplificaciones que se han hecho.

Veamos ahora el tipo de problema que se quiere analizar. En su expresión más general podrá ser descrito como sigue:

Necesitamos bombear un fluido dado, bajo un gasto  $Q$ , a través de un conducto de longitud  $L$ , de diámetro  $D$  con un espesor de pared  $t$  y hecho del material  $X$ .

Esta expresión general nos lleva a establecer una lista de requerimientos de información que podemos desglosar de la siguiente manera:

- 1.- Propiedades del fluido.
  - a) Densidad.
  - b) Viscosidad.
- 2.- Propiedades de la línea de conducción.
  - a) Diámetro.
  - b) Longitud.
  - c) Rugosidad de las paredes internas.
  - d) Espesor.
  - e) Material.
- 3.- Características del diseño.
  - a) Conexiones, válvulas, curvatura, desniveles, etc.
  - b) Presión de operación.
  - c) Temperatura de operación.
  - d) Gasto.

Estos distintos parámetros nos dan una serie de combinaciones que pueden tener o no relevancia con el problema en particular que se estudie. Se recomienda que como paso preliminar se produzca una

matriz en la que los parámetros mencionados aparezcan horizontalmente como elementos generales de diseño y verticalmente como elementos del diseño en particular que se ataca. De esta forma podremos tener, a simple vista, las relaciones entre los distintos parámetros, que debemos satisfacer para nuestro problema. Véase la tabla 1.

Obviamente, los valores de estos parámetros serán tan diversos como se desee, por lo que daremos solamente algunos datos sobre propiedades de líneas de conducción.

La mayor parte de los sistemas de distribución actualmente en uso utilizan tubería de hierro colado o acero, utilizándose también materiales como el cobre, concreto, asbestos y, sobre todo en la industria de transportación de gas, plásticos. Se muestran a continuación los datos correspondientes a parámetros de construcción de tubería de acero.

Tabla 2.- Dimensiones de tubería de acero comunmente utilizada en sistemas de distribución.

<u>Diámetro.pg.</u>	<u>Cédula.No.</u>	<u>Espesor.pg.</u>	<u>Diámetro Externo.pg.</u>	<u>Diámetro Interno.pg.</u>
1/4	40	0.088	0.540	0.364
1/2	40	0.109	0.840	0.622
3/4	40	0.113	1.050	0.824
1	40	0.133	1.315	1.049
1 1/4	40	0.140	1.660	1.380
1 1/2	40	0.145	1.900	1.610
2	40	0.154	2.375	2.067
4	-	0.188	4.500	4.124
	40	0.237	4.500	4.026
6	-	0.188	6.625	6.249
	-	0.250	6.625	6.125
	40	0.280	6.625	6.065
8	-	0.219	8.625	8.187
	20	0.250	8.625	8.125
10	-	0.219	10.750	10.312
	20	0.250	10.750	10.250
12	20	0.250	12.750	12.250
16	10	0.250	16.0	15.500
20	10	0.250	20.0	19.500
24	10	0.250	24.0	23.500
	15	0.312	24.0	23.376

Tabla 1.- Relación entre Parámetros de Diseño y Datos del Problema que se Estudia.

		Datos Generales de Diseño.											Fuente de Información.		
		$\rho$	$\mu$	d	l	e	t	matl	con. valv	P	T	Q			
Datos del Problema Analizado.	$\rho$													Ecuaciones de estado, tabulaciones o dato.	
	$\mu$													Ecuaciones de estado, tabulaciones o dato.	
	d													Ecuación (9) o dato.	
	l													Ecuación (9) o dato.	
	e													Tabulaciones o dato.	
	t													Fórmula (11) o dato.	
	Material.													Dato de diseño.	
	Conexiones y Válvulas.														Dato de diseño.
	P														Dato de diseño.
	T														Dato de diseño.
	Q														Ecuación (9) o dato.

 Indica, verticalmente, los parámetros generalmente necesarios para determinar la variable que encabeza la columna.

La siguiente tabulación nos muestra algunos valores de rugosidad, cuyo valor debe ser conocido o estimado para la solución de los problemas de diseño. Estos valores deben ser aceptados como aproximaciones y sujetos a modificación de acuerdo a la experiencia obtenida de la manipulación de tuberías y materiales similares.

Tabla 3.- Valores Típicos de Rugosidad,  $e$ .

<u>Tipo de Tubería y Condición.</u>	<u>Valor Estimado de Rugosidad <math>\mu\text{g} \times 10^6</math></u>
Tubería de acero sin recubrimiento. Nueva.	500 - 750
Después de exposición a condiciones atmosféricas normales por:	
6 meses.	1,000 - 1,250
12 meses.	1,500
24 meses.	1,750
Tubería recubierta con plástico.	200 - 300
Tubería pulida con arena.	200 - 300
Tubería pulida con diablo.	300 - 500
Hierro galvanizado.	6,000
Hierro colado.	102,000
Concreto.	120,000 - 12,000

El material utilizado en la construcción de la tubería es de particular importancia ya que dentro de este parámetro se encuentran características tan importantes como son:

- a) Resistencia a efectos corrosivos del medio ambiente y el fluido transportado.
- b) Resistencia a ruptura y a la fractura.
- c) Facilidad de construcción.
- d) Facilidad de ensamble.
- e) Peso por unidad de longitud.
- f) Cambios de longitud debidos a efectos térmicos.
- g) Costo por unidad de longitud.

Aún cuando cada uno de estos factores puede ser decisivo en la selección de un material sobre otro, nos concentraremos por el momento en el aspecto de resistencia mecánica del material, mostrando a continuación algunos datos sobre esfuerzo máximo permisible, o punto de ruptura según se indique, para 5 materiales comunmente usados en líneas de conducción.

Tabla 4.- Datos de Resistencia Mecánica para Algunos Materiales Comunes en la Construcción de Tuberías.

Material.	Esfuerzo máximo o punto de ruptura, psi.
Acero.	25,000 - 60,000 <sup>1</sup>
Hierro colado gris.	18,000 <sup>2</sup>
Hierro dulce.	45,000 - 60,000 <sup>1</sup>
Cobre.	30,000 - 50,000 <sup>2</sup>
Termo-plásticos.	600 - 1,800 <sup>1</sup>

1 Esfuerzo máximo permisible.

2 Punto de ruptura.

Estos datos nos permitirán, para un material dado, expresar el espesor de pared del conducto en función del diámetro, el esfuerzo máximo permisible y la presión de operación; mediante la formula de Barlow:

$$t = Pd/2 (s - p) \quad (11)$$

El número de conexiones, válvulas, etc., que se incorporen al diseño del problema en particular que se analice, es tan diverso como proyectos haya. Sin embargo, cada uno de esos elementos de construcción y control representa una resistencia al flujo, ocasionando disminuciones adicionales de energía debido a fricción, y deben ser tomadas en cuenta de alguna manera. La forma más común consiste en considerar estas

resistencias en términos de tramos equivalentes de tubería recta. La tabla 5 da tales valores para una serie de elementos.

Tabla 5.- Resistencia al Flujo, Equivalente, Para Algunos Elementos de Construcción y Control.

<u>Elemento.</u>	<u>Resistencia Equivalente Promedio. Número de Diámetros de Tubería.</u>
Codo de 45°	15
Codo de 90°	30 - 40
Codo cuadrado de 90°	60
Entrada desde rama de Tee.	90
Entrada a rama de Tee.	90
Uniones y coples.	Generalmente despreciable.
Válvula de globo abierta.	60 - 300
Válvula de compuerta: abierta.	7
Abierta 3/4.	40
Abierta 1/2.	200
Abierta 1/4.	800

Contando con las herramientas que hemos desarrollado hasta el momento, veamos como podemos analizar más ampliamente el problema que en forma tan general enunciamos en la página 11.

Resulta claro que estamos bastante limitados en cuanto al número de incógnitas que es posible manejar en nuestro análisis. Supongamos que para propósitos de nuestro diseño se puede contar con suficiente información para atacar los siguientes dos tipos de problema:

- 1.- Conociendo la distancia  $l$  entre los puntos A y B, se necesita determinar el número de estaciones de bombeo necesarias para permitir un gasto  $Q$  de fluido  $m$ , a través de una tubería de diámetro  $d$ , espesor  $t$ , material  $x$  y presión de operación  $P$ .
- 2.- Conociendo la distancia  $l$  entre los puntos A y B, se necesita determinar el diámetro  $d$ , que permita el gasto  $Q$

de fluido  $m$ , de una tubería de material  $x$ , con una presión de operación  $P$ .

Para analizar la solución del primer tipo de problema, reagruparemos la ecuación (10), obteniendo:

$$-W_s = v \Delta P + 3.29 \int \frac{L}{D^5} Q^2$$

Es claro que la solución del lado derecho de la ecuación nos determinará el trabajo que debe ser aplicado, para lograr el desplazamiento de una unidad de masa del fluido contenido en la tubería. Por lo tanto, para un flujo  $G$  de masa por unidad de tiempo, el trabajo total estará dado por:

$$G(-W_s) = W_{ST} = G \left( v \Delta P + 3.29 \int \frac{L}{D^5} Q^2 \right) \quad (12)$$

Sin embargo, la pregunta básica de nuestro problema no puede ser contestado directamente de esta ecuación ya que la longitud considerada en ella es la total entre los puntos A y B. En este punto es necesario conocer las limitaciones de operación del sistema que se plantea; máxima presión de operación de la tubería seleccionada, así como mínima presión de descarga o de operación para impedir cavitación, para establecer un valor de la  $\Delta P$  disponible. Igualmente, entrará en el análisis la consideración de la capacidad de las plantas de bombeo disponibles o económicamente utilizables en el proyecto. Por lo tanto, la solución del primer problema, aún a nivel del estudio técnico necesario para la presentación de un anteproyecto, debe incorporar consideraciones de:

- a) Fuentes de energía disponibles.
- b) Tipos de tubería que sea factible utilizar.

- c) Presión de operación.
- d) Presión de entrega al final de la línea, o a la entrada de una de las estaciones de bombeo.
- e) Limitaciones impuestas por regulaciones de seguridad.

El segundo tipo de problema podrá ser resuelto en base a consideraciones similares a las utilizadas para el primer tipo. La simple solución de la ecuación (10) para obtener un valor del diámetro no nos permitirá saber si ese diámetro es comercialmente obtenible con un espesor que permita operar el sistema a las condiciones de diseño. Debe notarse que al no conocer  $f$  en función de  $d$ , necesitaremos de un proceso de ensaye y error para la determinación del valor de diámetro necesario.

Como una recomendación final, es pertinente recordar que uno de los problemas principales del proyectista es que el análisis de la solución a un problema se realiza por lo general cuando el tipo de solución ha sido ya decidido. Es común que se haga la pregunta; ¿cuál es el mejor diseño de estructura metálica para un paso sobre el río X?, cuando la primera pregunta que el proyectista debería hacerse sería; ¿cuál será la mejor manera de cruzar ese río?.

## SIMBOLOS.

$d$  = Diámetro del conducto.

$e$  = Rugosidad de las paredes del conducto.

$F$  = Factor de resistencia.

$f$  = Factor de proporcionalidad.

$f_D$  = Coeficiente de fricción Darcy-Weisbach.

$f_F$  = Coeficiente de fricción Fanning.

$G$  = Flujo de masa por unidad de tiempo.

$g$  = Aceleración gravitacional.

$g_c$  = Factor de proporcionalidad, constante gravitacional.

$L$  = Longitud de la sección de conducto.

$H$  = Entalpia.

$P$  = Presión normal a las caras del elemento de fluido.

$Q$  = Energía transferida en forma de calor. Gasto volumétrico.

$Q_0$  = Gasto volumétrico a condiciones de referencia.

$S$  = Esfuerzo máximo permisible.

$T$  = Temperatura de operación.

$t$  = Espesor de las paredes del conducto.

$U$  = Energía interna del elemento de fluido.

$u$  = Velocidad promedio de flujo.

$v$  = Volumen específico de la unidad de masa de fluido.

$v_0$  = Volumen específico a condiciones base.

$W$  = Energía total transferida en forma de trabajo.

$W_s$  = Trabajo de flecha.

$W_{sT}$  = Trabajo total de flecha.

$X$  = Referencia de localización horizontal.

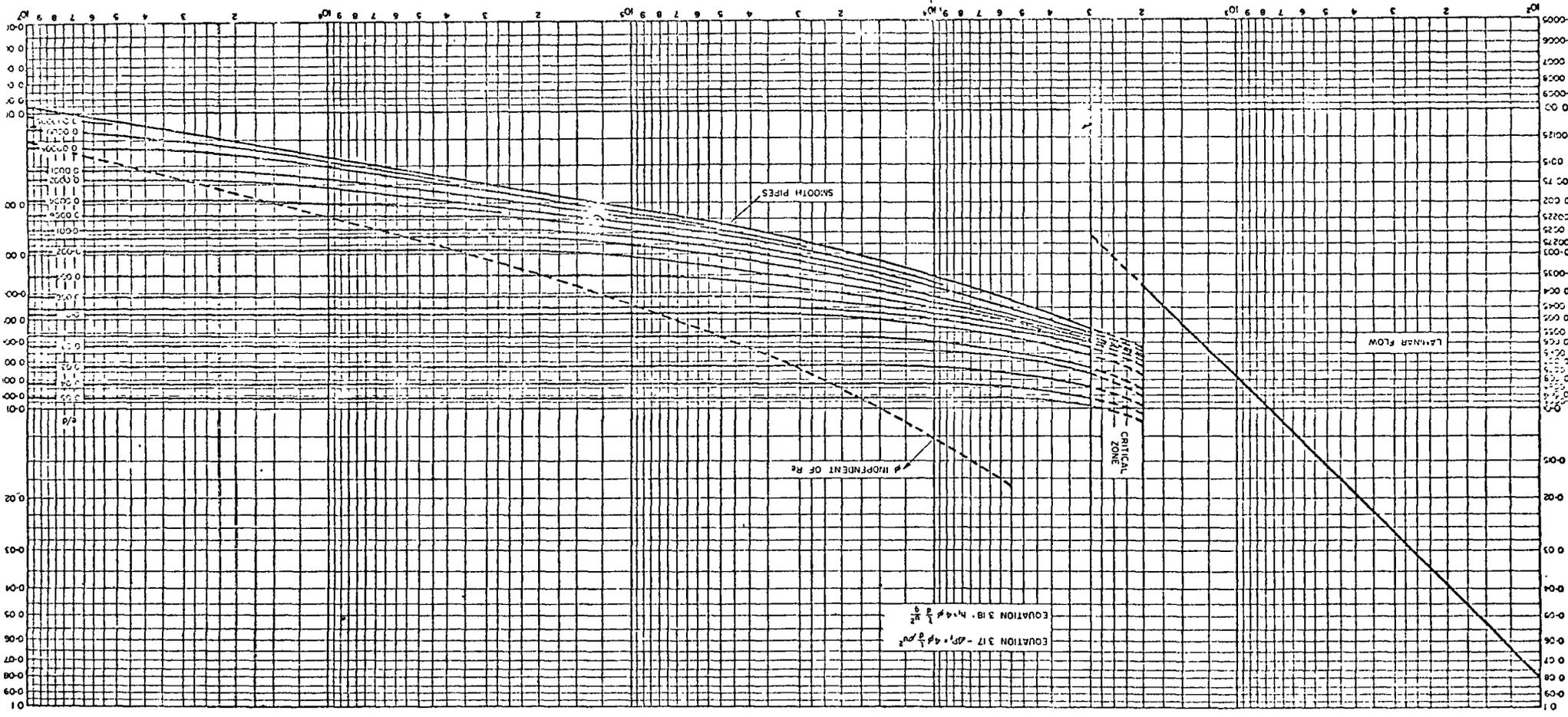
$Z$  = Referencia de localización vertical.

$\rho$  = Densidad.

$\rho_b$  = Densidad a condiciones base.

$\mu$  = Viscosidad.

Fig. 2 Pipe friction chart  $f$  vs.  $Re$   
 REYNOLDS NUMBER  $Re = \frac{V D}{\nu}$



DISEÑO HIDRAULICO DE SISTEMAS DE TUBOS

3.3 Diseño Económico de los Sistemas  
(L. N. Solórzano)

Es costumbre diseñar económicamente una línea de conducción fijando todas las variables que intervienen en el fenómeno menos una, y estudiar el comportamiento de ésta con respecto al costo. La función de una sola variable así obtenida es fácil de analizar, como se demuestra en las curvas de costo-diámetro, cuyas primeras derivadas, igualadas a cero, proporcionan los valores de los diámetros que minimizan los costos. Desafortunadamente este procedimiento no da siempre la solución óptima. Se pueden dar ejemplos (superficies con puntos silla) en los cuales se observa que al fijar ciertas variables, para un punto determinado, la función es mínima en una dirección pero máxima en otra.

En este capítulo se utiliza un procedimiento tomado del libro NATURAL GAS AND NATURAL GASOLINE, de R. L. Huntington, basado en el método de Programación Matemática conocido con el nombre de MULTIPLICADORES DE LAGRANGE (ver Apéndice). La ventaja de este procedimiento no sólo consiste en permitir encontrar la mejor solución, sino además en la facilidad de manejar simultáneamente todas las variables que intervienen en el sistema.

Por el número de variables que intervienen, el diseño de un gasoducto ofrece una buena oportunidad para enseñar la aplicación de este método de optimización. Existen dos alternativas de diseño: 1), Minimizar los costos de operación y mantenimiento anuales, cuando la vida del gasoducto es larga; 2), Minimizar la inversión inicial, cuando la duración del sistema es corta. En ambos casos la función objetivo viene dada por el costo en términos de las variables de diseño y la restricción por una ecuación de flujo.

ECUACION DE FLUJO.- La ecuación de Weymouth se puede escribir como

$$q = \frac{A}{\rho_0} \left[ \frac{gMd(P_1^2 - P_2^2)}{4f_l Z_m RT} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.8)$$

donde

- q = gasto de gas, a  $p_0$  y  $T_0$ , en  $\text{ft}^3/\text{seg}$ ;
- A = área de la sección transversal de flujo, en  $\text{ft}^2$ ;
- $\rho_0$  = densidad del gas, a  $p_0$  y  $T_0$ , en  $\text{lb}_m/\text{ft}^3$ ;
- g = aceleración de la gravedad, en  $\text{ft}/\text{seg}^2$ ;
- M = peso molecular, en lb;
- d = diámetro interior de la tubería, en ft;
- $P_1$  = presión de descarga (salida de la compresora), en psfa;
- $P_2$  = presión de succión (entrada a la compresora), en psfa;
- f = factor de fricción, adimensional;
- l = distancia entre estaciones de compresión, en ft;
- $Z_m$  = factor de desviación promedio, adimensional;
- R = constante de los gases, en  $\text{ft}^2/\text{°R}$ ;
- T = temperatura de flujo, en °R.

El factor de desviación es una función de  $p_1$  y  $p_2$ , y se puede determinar de dos maneras:

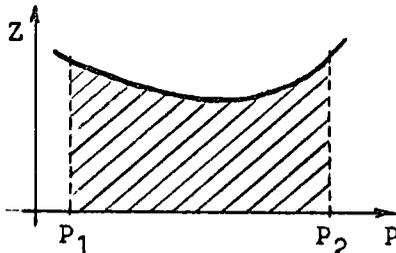
1), Por integración directa, cuando se conoce la función

$$Z = Z(p)$$

o sea

$$Z_m = \frac{\int_{p_1}^{p_2} Z(p) dp}{p_2 - p_1}$$

2), Por integración gráfica, cuando no se conoce la función, pero hay datos suficientes para trazar una curva como la que se indica en la figura.



$$Z_m = \frac{\text{area asciurada}}{p_2 - p_1}$$

El coeficiente de fricción en la ecuación de Weymouth, es el que aparece en la siguiente relación:

$$\frac{1}{f^2} = 3.2 \log \frac{Re}{\frac{1}{f^2}} + 1.2$$

Para números de Reynolds comprendidos entre  $5 \times 10^4$  y  $5 \times 10^7$ , con lo que se cubre prácticamente todo el rango en la transmisión de gas, se puede dibujar una recta de  $\log f$  Vs.  $\log Re$ , cuya ecuación es

$$\begin{aligned} f &= 0.03015 Re^{-0.1505} \\ &= 0.03015 \left( \frac{dv\rho}{\mu} \right)^{-0.1505} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Sustituyendo (4.9) en (4.8) y elevando al cuadrado, queda

$$q^2 = \frac{A^2 g M d (p_1^2 - p_2^2)}{4 \rho_o^2 Z_m R T} \frac{(dv\rho/\mu)^{0.1505}}{0.03015} \quad (4.10)$$

De la ecuación de continuidad:  $v\rho = (q/A)\rho_o$ . Sustituyendo en (4.10), se tiene

$$q^2 = \frac{A^2 g M d (p_1^2 - p_2^2)}{0.1206 \rho_o^2 Z_m R T} \frac{d^{0.1505} q^{0.1505} \rho_o^{0.1505}}{\mu^{0.1505} A^{0.1505}}$$

o bien

$$q^{1.8495} = \frac{A^{1.8495} g M d^{1.1505} (p_1^2 - p_2^2)}{0.1206 \rho_o^{1.8495} Z_m R T \mu^{0.1505}}$$

y finalmente

$$q = \frac{2.467}{\rho_0} \left[ \frac{d^{4.85} M (P_1^2 - P_2^2)}{1 Z_m R T \mu^{0.1505}} \right]^{0.541}$$

Es más conveniente expresar la ecuación anterior en unidades técnicas; esto es, el gasto en ft<sup>3</sup>/día, la longitud en millas y la presión en psia. Si además se introducen los valores numéricos de g y R, se tiene

$$Q = \frac{2.467 \times 144^{1.081} \times 24 \times 3600 \times 32.2^{0.541}}{12^{2.622} \times 5280^{0.541} \times 1546^{0.541}} \frac{1}{\rho_0} \left[ \frac{D^{4.85} M (P_1^2 - P_2^2)}{L Z_m T \mu^{0.1505}} \right]^{0.541}$$

$$= \frac{80.8}{\rho_0 \mu^{0.0814}} \left[ \frac{D^{4.85} M (P_1^2 - P_2^2)}{L Z_m T} \right]^{0.541} \quad E$$

donde E es un factor de eficiencia y el diámetro se ha expresado en pulgadas.

ECUACION DE COSTOS.- Se tomará el ejemplo que consiste en minimizar los costos de operación y mantenimiento anuales. Entre los costos fijos se incluyen: compresoras, tubería; entre los variables: mano de obra, mantenimiento y operación, fugas.

Compresoras.- Sea X el costo inicial de las compresoras, en \$/HP. Para bombear Q ft<sup>3</sup>/día de gas a una distancia de L millas, se requiere aZ<sub>2</sub> de potencia por volumen bombeado, donde Z<sub>2</sub> es el factor de desviación del gas a la presión de succión y a es la potencia al freno (BHP) requerida por cada millón de pies cúbicos al día, y depende solamente de la relación de compresión necesaria y de la naturaleza del gas. La inversión en compresoras es entonces

$$X \frac{Q a Z_2}{L \times 10^6} \quad (\$/milla)$$

El cargo fijo sobre las compresoras, α, incluye interés sobre el capital invertido, depreciación, impuestos y seguros, siendo entonces el costo fijo anual sobre las compresoras:

$$\frac{\alpha X A a Z_2}{L \times 10^6} \quad (\$/milla/año)$$

Tubería.- Sea Y el costo de la tubería, en \$/tonelada. Si se necesitan W toneladas de tubería por milla para la construcción de la línea, la inversión en tubería es YW (\$/milla). Para tubería de acero,

$$W = 28.2(D + t)t$$

donde

D = diámetro interior, en pulgadas;  
t = espesor, en pulgadas.

Una ecuación que relaciona el espesor con la presión máxima permisible, es la siguiente:

$$t = \frac{P_1 D}{2(S - P_1)}$$

Por lo tanto, la inversión en tubería es

$$Y_W = 28.2 Y \left[ D + \frac{P_1 D}{2(S - P_1)} \right] \left[ \frac{P_1 D}{2(S - P_1)} \right] \quad (\$/milla)$$

Si se considera H (\$/milla) por concepto de topografía, limpieza, ingeniería, supervisión, etc.; G (\$/milla) por descarga, arrastre, alineación, colocación y soldadura o acoplamiento; N (\$/milla/pulgada de diámetro) de pintura, etc., entonces el costo total de la tubería es

$$Y_W + H + G W + N D \quad (\$/milla)$$

Sea B la fracción de cargos fijos sobre la tubería instalada (que incluye depreciación, impuestos, seguros, intereses sobre el capital, salarios del personal de la línea y los demás costos de operación cargables al mantenimiento de la misma), entonces los costos fijos anuales por este concepto, son

$$B(Y+G) \times 28.2 \left[ D + \frac{P_1 D}{2(S - P_1)} \right] \left[ \frac{P_1 D}{2(S - P_1)} \right] + BND + BH \quad (\$/año/milla)$$

Máno de Obra, Supervisión, etc.- Estos conceptos suman aproximadamente la cantidad de \$1,750 (dólares) por mes, para una estación de 4000 HP. Suponiendo que existe una proporción directa para otras estaciones de tamaño parecido, entonces el costo resulta

$$\frac{1,750 \times 12}{4,000} \frac{QaZ_2}{L \times 10^6} = 5.25 \frac{QaZ_2}{L \times 10^6}$$

Operación y Mantenimiento.- Los valores promedio por este concepto, son:

Mantenimiento, \$0.50/HP/año.

Agua, \$0.20/HP/año.

Aceite, \$0.84/HP/año.

Combustible.- Se requiere alrededor de 10 ft<sup>3</sup> por HP hora, a un costo C<sub>f</sub> (\$/1000 ft<sup>3</sup>). El costo anual es entonces

$$\frac{10 \times 24 \times 360}{1,000} C_f \frac{QaZ_2}{L \times 10^6} = 86.4 C_f \frac{QaZ_2}{L \times 10^6} \quad (\$/año/milla)$$

Fugas de Gas.- El valor de cualquier fuga de gas incluye el costo de transporte hasta el punto donde se escapa. Como es más simple

sumar todas las pérdidas, independientemente del lugar donde ocurran, se tomará la cantidad de \$100 por año y por milla, por ser esta la cantidad que incluye todas las posibilidades con un buen factor de seguridad. Sin embargo, puesto que la fuga no es una función de las variables de diseño ( $L$ ,  $D$ ,  $P_1$  y  $P_2$ ), se puede tomar cualquier valor.

Sumando todos los costos, resulta la siguiente expresión para el costo anual:

$$C_a = (\alpha X + 86.4 C_f + 6.79) \frac{QaZ_2}{Lx10^6} + B(Y + G)(28.2 D^2) \left[ \frac{P_1}{2(S - P_1)} + \frac{P_1^2}{4(S - P_1)^2} \right] + BND + BH + 100 \quad (4.11)$$

Para simplificar esta última ecuación, sean

$$K = \alpha X + 86.4 C_f + 6.79 \quad (4.12)$$

y

$$K_1 = 28.2 B(Y + G) \quad (4.13)$$

Así,

$$C_a = \frac{KQaZ_2}{Lx10^6} + K_1 D^2 \left[ \frac{P_1}{2(S - P_1)} + \frac{P_1^2}{4(S - P_1)^2} \right] + BND + BH + 100 \quad (4.14)$$

La potencia al freno necesaria para comprimir un millón de pies cúbicos de gas natural por día, se puede expresar como

$$a = k \ln \frac{P_1}{P_2} + b \quad (4.15)$$

donde  $k$  y  $b$  son constantes que dependen del gas y de las características de las compresoras. Sustituyendo (4.15) en (4.14), queda

$$C_a = \frac{KQZ_2}{Lx10^6} (k \ln \frac{P_1}{P_2} + b) + K_1 D^2 \left[ \frac{P_1}{2(S - P_1)} + \frac{P_1^2}{4(S - P_1)^2} \right] + BND + BH + 100 \quad (4.16)$$

MINIMIZACION DEL COSTO ANUAL.- Los valores de  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $L$  y  $D$ , que hacen  $C_a$  mínimo, deben satisfacer la ecuación

$$VC_a = rVQ \quad (4.17)$$

donde  $r$  es el multiplicador de Lagrange.

La experiencia ha indicado que no es necesario considerar por separado las variables  $P_1$  y  $P_2$ , porque existe un coeficiente de

compresión óptimo,  $Cr = P_1/P_2$ . Así,

$$C_a = C_a(L, D, P_2)$$

$$Q = Q(L, D, P_2)$$

y la ecuación (4.17) se puede escribir como el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial C_a}{\partial L} = r \frac{\partial Q}{\partial L} \quad (4.18a)$$

$$\frac{\partial C_a}{\partial D} = r \frac{\partial Q}{\partial D} \quad (4.18b)$$

$$\frac{\partial C_a}{\partial P_2} = r \frac{\partial Q}{\partial P_2} \quad (4.18c)$$

De las ecuaciones (4.10a) y (4.14) y tomando en cuenta la definición del coeficiente de compresión, resultan las siguientes expresiones para los primeros y segundos miembros del sistema anterior:

$$\frac{\partial C_a}{\partial L} = - \frac{KQaZ_2}{L^2 \times 10^6} \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial C_a}{\partial D} = K_1 D \left[ \frac{P_1}{S - P_1} + \frac{P_1^2}{2(S - P_1)^2} \right] + BN \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial C_a}{\partial P_2} = \frac{KQZ_2}{L \times 10^6} \frac{da}{dP_2} + \frac{KQa}{L \times 10^6} \frac{dZ_2}{dP_2} \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = -0.541 \frac{Q}{L} \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial D} = 2.622 \frac{Q}{D} \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial P_2} = - \frac{1.082 P_2 Q}{P_1^2 - P_2^2} - 0.541 \frac{Q}{Z_m} \frac{dZ_m}{dP_2} \quad (4.24)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.19)-(4.24) en el sistema de ecuaciones (4.18), queda

$$- \frac{KQZ_2 a}{L^2 \times 10^6} + 0.541 \frac{Q}{L} r = 0 \quad (4.25a)$$

$$K_1 D \left[ \frac{P_1}{S - P_1} + \frac{P_1^2}{2(S - P_1)^2} \right] + BN - 2.622 \frac{Q}{D} r = 0 \quad (4.25b)$$

$$\frac{KQZ_2}{L \times 10^6} \frac{da}{dP_2} + \frac{KQa}{L \times 10^6} \frac{dZ_2}{dP_2} + r \left( \frac{1.082 P_2 Q}{P_1^2 - P_2^2} + 0.541 \frac{Q}{Z_2} \frac{dZ_m}{dP_2} \right) = 0 \quad (4.25c)$$

Resolviendo el sistema anterior, resulta, en particular para  $P_2$ :

$$\frac{d \ln a}{dP_2} + \frac{d \ln Z_2}{dP_2} + \frac{2P_2}{P_1^2 - P_2^2} + \frac{d \ln Z_m}{dP_2} = 0 \quad (4.26)$$

Puesto que  $Z_m$  y  $Z_2$  son por lo general muy cercanos a 1, sus logaritmos valen 0 prácticamente; por lo tanto se pueden despreciar, quedando la ecuación (4.26) como

$$\frac{d \ln a}{dP_2} = - \frac{2P_2}{P_1^2 - P_2^2} \quad (4.27)$$

La curva (Fig. 11-16) de  $a$  Vs.  $(P_1/P_2)$  puede ser aproximada por la siguiente ecuación:

$$a = 56.8 \ln(P_1/P_2) + 5.1$$

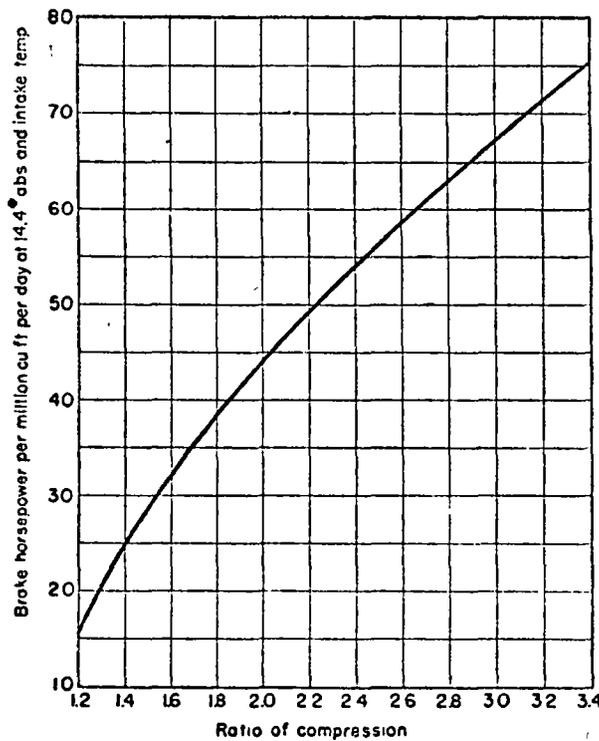


FIG 11-16. Brake horsepower required for compressing gas of  $N$  value 1.3. Clark right-angle compressor. (Clark Bros. Co., Inc.)

de donde

$$\frac{da}{dP_2} = - \frac{56.8}{P_2}$$

y luego

$$\frac{d \ln a}{dP_2} = - \frac{56.8}{P_2(56.8 \ln(P_1/P_2) + 5.1)}$$

que sustituida en (4.27) da

$$\ln C_r = \frac{C_r^2}{2} - 0.5898$$

cuya solución aproximada es  $C_r = 1.33$ .

En resumen, para un valor dado de  $P_1$ , se pueden encontrar, por medio de las ecuaciones desarrolladas, los valores de  $L$ ,  $D$  y  $P_2$ , que minimizan  $C_a$ . Como ilustración considérense los siguientes datos:

1) GAS FLUYENTE: Metano ( $Q = 250 \times 10^6 \text{ ft}^3/\text{día}$ )

$$M = 16$$

$$\rho_o = 0.0422 \text{ lb/ft}^3 \text{ a } 60^\circ\text{F y } 14.7 \text{ psia}$$

$$\mu = 7 \times 10^{-6} \text{ lb/ft-seg} = \text{cp} \times 672 \times 10^{-6}$$

$Z_m$  y  $Z$ , ver Fig. 11-17

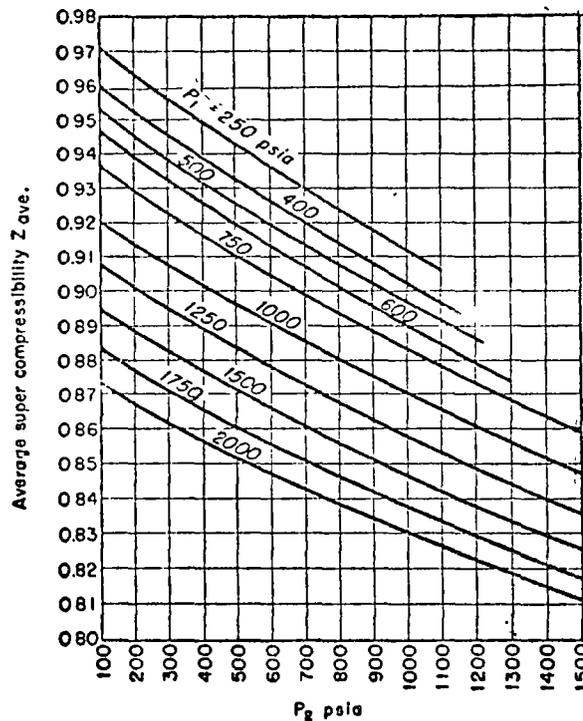


FIG. 11-17. Supercompressibility of methane.  $Z = \frac{PV}{RT}$  (Kralnes and Gaddy.)

2) CONDICIONES:  $T = 60^\circ\text{F} = 520^\circ\text{R}$

$$E = 1 \text{ (100\% eficiencia)}$$

$$C_r = 1.33$$

$$a = 18.5$$

$$S = 20,000 \text{ psi}$$

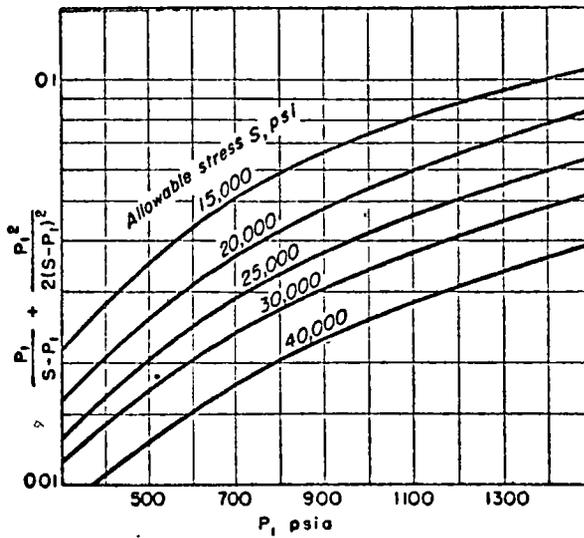


FIG. 11-18. Allowable stress vs pipe-line pressure.

- 3) DATOS ECONOMICOS:  $\alpha = 0.05$   
 $B = 0.12$   
 $C_f = \$0.10/1000 \text{ ft}^3$   
 $X = \$80/\text{HP}$   
 $Y = \$85/\text{tonelada}$   
 $H = \$3000/\text{milla}$   
 $G = \$12/\text{tonelada/milla}$   
 $N = \$270/\text{pulgada/milla}$

PROCEDIMIENTO DE CALCULO: Las presiones P<sub>1</sub> y P<sub>2</sub> están relacionadas a través del coeficiente de compresión C<sub>r</sub> = 1.33. Así, dado un valor de P<sub>1</sub>, inmediatamente se calcula el correspondiente de P<sub>2</sub>. El costo anual se calculará para distintos valores de P<sub>1</sub>, siguiendo el procedimiento señalado a continuación:

1) Sea P<sub>1</sub> = 1000 psia; entonces P<sub>2</sub> = 752 psia. De la figura 11-17 Z<sub>2</sub> = 0.897 y Z<sub>m</sub> = 0.883. De la figura 11-18,

$$\frac{P_1}{S - P_1} + \frac{P_1^2}{2(S - P_1)^2} = 0.054$$

2) Del sistema de ecuaciones (4.25), resulta la siguiente expresión para D:

$$D^{6.85} + \frac{N B}{K_1 \left[ \frac{P_1}{S - P_1} + \frac{P_1^2}{2(S - P_1)^2} \right]} D^{5.85} =$$

$$\left[ \frac{80.8}{\rho \cdot \mu} \frac{0.541}{T} \left( \frac{M}{T} \right)^{0.541} E \right]^{1.85} \frac{4.85 K Q^{2.85} Z_2 Z_m a}{(P_1^2 - P_2^2) K_1 \left[ \frac{P_1}{S - P_1} + \frac{P_1^2}{2(S - P_1)^2} \right]} \times 10^6$$

de donde D ≈ 19 pulgadas.

3) Del mismo sistema (4.25), la ecuación para L es:

$$L = \frac{\left[ \frac{80.8}{\rho \cdot \mu} \frac{0.541}{T} \left( \frac{M}{T} \right)^{0.541} \right]^{1.85} D^{4.85} (P_1^2 - P_2^2)}{Q^{1.85} Z_m}$$

= 52 millas

4) Con los valores obtenidos de P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>, D y L, se calcula el costo anual por medio de la ecuación (4.16).

A continuación se presentan los resultados para Q = 150 x 10<sup>6</sup> ft<sup>3</sup> por día y diferentes valores de P<sub>1</sub>.

P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	D	L	Ca
400	301	23.63	54.59	4,053.74
500	376	21.35	52.82	4,026.11
600	451	19.60	54.19	4,037.98
700	524	18.25	49.51	4,066.88
800	601	17.30	50.55	4,081.48

DISEÑO HIDRAULICO DE SISTEMAS DE TUBOS

APENDICE del capítulo 3.3  
(Diseño Económico de los Sistemas)

---

Los problemas de optimización consisten en maximizar o minimizar una función, sujeta a ciertas restricciones. Para resolverlos se han desarrollado algunos métodos que constituyen la rama de las Matemáticas conocida como PROGRAMACION MATEMATICA. Dentro de estos procedimientos se encuentra el de los MULTIPLICADORES DE LAGRANGE, cuya explicación resulta más sencilla utilizando la notación vectorial. Antes de desarrollar esta técnica de optimización, es conveniente recordar la definición aunque sea informal del concepto de gradiente.

Gradiente

Sea  $f$  una función escalar de las variables  $x, y, z$ ; esto es,  $f = f(x, y, z)$ . Del cálculo diferencial, se sabe que la diferencial total de una función, es

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (4.1)$$

O bien, recordando el producto escalar de dos vectores:

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k \right) \cdot (dx i + dy j + dz k)$$

El primer factor del segundo miembro de la ecuación anterior se denomina GRADIENTE de la función escalar  $f$  y se escribe  $\text{grad } f$  o  $\nabla f$ ; es decir,

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k \quad (4.2)$$

y el segundo factor representa el desplazamiento arbitrario elemental de un vector de posición  $P$ , o sea

$$dP = dx i + dy j + dz k \quad (4.3)$$

Así, la ecuación (4.1) se puede escribir como

$$df = \nabla f \cdot dP \quad (4.4)$$

Cuando la función  $f$  es constante, entonces  $df = 0$  y la expresión (4.4) se vuelve

$$\nabla f \cdot dP = 0$$

de donde, eliminando los casos triviales y considerando que  $dP$  está obligado a moverse en el plano tangente a la superficie  $f$  en el punto dado, resulta que  $\nabla f$  es un vector perpendicular a la superficie  $f$  en ese mismo punto.

Ejemplo 4.1 Hallar un vector perpendicular a la superficie  $x^2 - 3xyz + y^3 + 1 = 0$ , en el punto  $(1,1,1)$ .

Solución: Sea  $f = x^2 - 3xyz + y^3 + 1 = 0$ , entonces, aplicando (4.2), resulta

$$\nabla f = (2x - 3yz)i + (3y^2 - 3xz)j - 3xyk$$

de donde

$$\nabla f)_{1,1,1} = -i - 3k$$

#### Multiplicadores de Lagrange

Supóngase que  $f(x,y,z)$  representa la distribución de la temperatura dentro de un espacio  $V$ , y que se desea encontrar los valores óptimos que la función adquiere sobre una curva  $\mathcal{S}$  definida por la intersección de las superficies  $g_1(x,y,z) = 0$  y  $g_2(x,y,z) = 0$ . La solución del problema consiste simplemente en encontrar los valores de la terna  $(x,y,z)$ , que satisfagan la ecuación

$$\frac{df}{ds} = 0 \quad (4.5)$$

Para facilitar el cálculo de (4.5), la curva  $\mathcal{S}$  se puede expresar en forma paramétrica, mediante las ecuaciones

$$x = x(s)$$

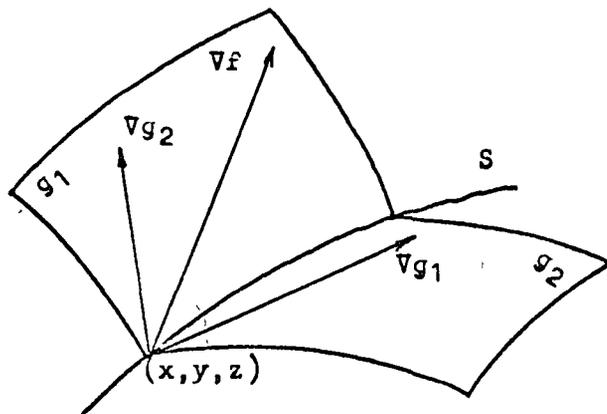
$$y = y(s)$$

$$z = z(s)$$

Así,

$$\begin{aligned} \frac{df}{ds} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{ds} \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k \right) \cdot \left( \frac{dx i + dy j + dz k}{ds} \right) \\ &= \nabla f \cdot \vec{u}_s \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde  $u_s$  es un vector unitario tangente a la curva  $S$  y  $ds$  es el valor absoluto del vector  $dP$ . Sustituyendo (4.6) en (4.5), resulta que  $\nabla f$  es perpendicular a la curva  $S$ . Por otro lado, puesto que  $S$  es la intersección de las superficies  $g_1$  y  $g_2$ , los vectores  $\nabla g_1$  y  $\nabla g_2$  son tam-



bien normales a  $S$  y concurrentes con  $\nabla f$ ; esto es, que los tres vectores son coplanares y por lo tanto cualquiera de ellos se puede escribir como una combinación lineal de los otros dos:

$$\nabla f = L_1 \nabla g_1 + L_2 \nabla g_2 \quad (4.7)$$

En la ecuación anterior,  $L_1$  y  $L_2$  son los multiplicadores de Lagrange.

Continuando con el caso particular de que las funciones involucradas son de tres variables, la ecuación (4.7) se puede expresar, desarrollando los gradientes

e igualando las componentes correspondientes de los vectores del primero y segundo miembros, por medio del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = L_1 \frac{\partial g_1}{\partial x} + L_2 \frac{\partial g_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = L_1 \frac{\partial g_1}{\partial y} + L_2 \frac{\partial g_2}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = L_1 \frac{\partial g_1}{\partial z} + L_2 \frac{\partial g_2}{\partial z}$$

que, junto con las restricciones, forma un sistema de cinco ecuaciones en las variables  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $L_1$  y  $L_2$ .

Ejemplo 4.2 Dividir un segmento de magnitud  $c$  en tres partes tales que su producto sea máximo.

Solución: Sean  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , las partes en que se divide  $c$ ; entonces la función por maximizar es  $f = xyz$  y la restricción es  $g = x + y + z - c = 0$ . Aplicando la ecuación (4.7), resulta

$$yz \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + xy \mathbf{k} = L_1(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

y el sistema de ecuaciones a resolver es

$$yz = L_1$$

$$xz = L_1$$

$$xy = L_1$$

$$x + y + z = c$$

de donde

$$x = y = z = c/3$$



## TRANSPORTE DE SOLIDOS EN TUBERIAS

Por: Carlos Cruickshank V.

### 1. OBJETIVO.

El transporte de sólidos por fluidos en tuberías tiene interés general por la variedad de aplicaciones prácticas que tiene. Las más comunes son el dragado, el transporte de materiales tan variados como mineral bruto, carbón, viruta, escoria, granos (con aire), pulpa de papel, basura, etc.

En estas notas se presenta la descripción del fenómeno en general y los criterios que existen para conocer y cuantificar el modo de transporte para de ahí obtener criterios de diseño.

### 2. REGIMENES DE FLUJO.

Los diferentes tipos de flujo se presentan en la fig. 1 donde aparece una curva típica de velocidad contra pérdida de carga (expresada en altura de columna del fluido) de una mezcla de fluido y sólidos. Es de importancia la distinción entre el transporte con depósito del material sólido y el transporte sin depósito, ambos separados por la condición de transición 3. En la parte superior (condiciones (1) y (2)) el transporte es sin depósito y a medida que aumenta la velocidad, la concentración de sólidos en la tubería se hace cada vez más uniforme; a esta forma de flujo se le acostumbra llamar homogéneo; cuando no existe depósito pero hay un notorio gradiente de concentraciones en la vertical, se dice que se tiene un flujo en suspensión heterogéneo. Abajo de la forma de transporte (3), el material sólido empieza a depositarse en el fondo y a formar dunas o simplemente una capa que se arrastra por la parte más baja de la tubería, reduce la sección y puede llegar a un eventual tapado de la tubería.

Aunque no hay una distinción definida entre el flujo homogéneo y el heterogéneo, se les ha dado un trato diferente en la literatura en lo que se refiere a la cuantificación de las características del flujo. La distinción es más clara e importante<sup>es</sup> entre el flujo heterogéneo sin depósito y aquél en el que sí lo hay. Esto se debe a que el depósito del material sólido reduce el área de la sección activa y además presenta una resistencia al flujo notable desde el momento en que aparece.

El objeto del estudio de este tipo de flujo para el diseño de un sistema de transporte de sólidos por tuberías es, por una parte, la determinación de las pérdidas de carga (energía) en la tubería, y por otra, la cantidad de sólidos que pueden transportarse. Otro aspecto importante sería la determinación de la abrasión de la tubería, dependiente tanto de los parámetros del flujo como del tipo de sedimento y de material del que está hecha la tubería; este último tema no será tratado en esta exposición por salirse fuera del alcance del curso.

En general la pérdida de carga aumenta con la concentración de material sólido transportado y varía según el régimen en el que el transporte se realiza. En la fig. 1 puede apreciarse que para una concentración dada existe un valor mínimo de la pérdida de carga que es cercano al valor correspondiente a la condición del inicio de transporte con depósito. A medida que la velocidad aumenta la ley de pérdida de carga se hace paralela a la del fluido sin sedimento.

### 3. FLUJO HOMOGÉNEO Y HETEROGÉNEO.

Como se indicó, no existe una separación clara entre estos tipos de flujo y de hecho se han encontrado relaciones empíricas que cubren todo el rango de transporte sin depósito. La mayor parte de estas relaciones tienden a determinar la diferencia que existe -

entre la pérdida de carga para el fluido con sedimento de la pérdida para el fluido solo. Si la mezcla fuera perfectamente homogénea, se le podría considerar como un nuevo fluido con peso específico  $\gamma_m$  igual a:

$$\gamma_m = \gamma + (\gamma_s - \gamma) C_v \quad (3.1)$$

donde:

- $\gamma$  peso específico del fluido
- $\gamma_s$  peso específico de los sólidos
- $C_v$  concentración de sólidos en volumen

En esas condiciones es posible demostrar que la diferencia de pérdidas de carga entre fluido con y sin sedimento, siempre que la viscosidad no esté afectada por el sólido, esta dada por (ref 1) :

$$(L_m - L) = (L + \text{sen } \theta) (S - 1) C_v \quad (3.2)$$

donde:

- $L_m$  - pérdida de carga por unidad de longitud de tubería para una mezcla homogénea de fluido y sedimento dada en altura de columna del fluido.
- $L$  - pérdida de carga para el fluido solo.
- $\theta$  - ángulo de inclinación de la tubería respecto a la horizontal; su valor es positivo es cuando la mezcla sube por la tubería.
- $S$  - densidad del material sólido relativo al fluido :

$$S = \frac{\rho_s}{\rho} = \frac{\gamma_s}{\gamma}$$

Cuando la viscosidad del fluido se ve afectada por la presencia del sedimento, lo cual ocurre cuando este es muy fino (menor de 0.15 mm), es necesario medir la viscosidad de la mezcla y corregir el número de Reynolds para obtener el coeficiente de fricción en la obtención de  $\dot{L}$ . Una forma equivalente de obtener la pérdida de carga unitaria en flujo homogéneo es a través de la fórmula de D' Arcy:

$$\dot{L}'_m = \frac{f_m}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (3.3)$$

donde:

$\dot{L}'_m$  - altura de carga por unidad de longitud de tubería expresada en altura de columna de la mezcla.

$f_m$  - coeficiente de fricción de D' Arcy obtenido del ábaco de Moody con la viscosidad de la mezcla homogénea.

$D$  - diámetro de la tubería

$V$  - velocidad media de la mezcla

$g$  - aceleración de la gravedad.

Cuando el flujo es heterogéneo no se cumplen las expresiones anteriores y la diferencia  $\dot{L}'_m - \dot{L}$  aumenta (ver fig. 1). Durand y su colaboradores<sup>(2), (3)</sup>, presentan una forma de estimar dicho aumento relacionado empíricamente dos parámetros adimensionales:

$$\frac{\dot{L}'_m - \dot{L}}{\dot{L} C_D} = 176 \left( \frac{g D}{V^2 \sqrt{C_D}} \right)^{3/2} \quad (3.4)$$

donde:

$C_D$  - coeficiente de arrastre de las partículas sólidas.

Esta ecuación es válida solo para partículas de cuarzo transportadas en agua clara, en el rango de arenas a guijarros. Esta relación aparece en la fig 2. Como puede verse en ella, los datos experimentales tienen una dispersión notable y para valores pequeños -

del parámetro  $V^2 \sqrt{C_D} / g D$ , se hacen prácticamente independientes del mismo.

Otros investigadores trataron de generalizar para cualquier fluido y cualquier sedimento, la relación obtenida por Durand para agua y arena; sin embargo los resultados obtenidos hasta ahora en esa dirección no son del todo concluyentes; sin embargo, la más acertada parece ser corregir la fórmula de Durand incluyendo la densidad en el primer parámetro en forma similar a como aparece en la ec. (3.2), con lo que se transforma en:

$$\frac{L_m - L}{C_V (s-1)} = 106 \left( \frac{g D}{V^2 \sqrt{C_D}} \right)^{3/2} \quad (3.5)$$

Newitt y otros<sup>(4)</sup> derivaron una fórmula con un criterio energético y la comprobaron con gran número de ensayos de transporte de sólidos de diversas densidades. Su expresión puede usarse en forma alternativa a la de Durand y es:

$$\frac{L_m - L}{C_V (s-1)} = 1100 \frac{g D \omega}{V^3} \quad (3.6)$$

donde:

$\omega$  = velocidad de caída de la partícula en el fluido.

En la ec. (3.6) aparece la velocidad de caída en forma explícita mientras que en la (3.5) está implícita en el coeficiente de arrastre.

El valor del coeficiente de arrastre para partículas esféricas o para granos irregulares se obtiene en función del número de Reynolds:

$$R_e = \frac{\omega d}{\nu} \quad (3.7)$$

donde:

$d$  = diámetro de la partícula

$\rho$  = coeficiente de viscosidad cinemática

Curvas para diferentes relaciones  $k = V/d^3$  ( $V$  = volumen de la partícula)

se muestran en la fig 3. Para obtener la velocidad de caída o el coeficiente de arrastre es necesario proceder por tanteos cuando se está en la parte descendente de la curva.

#### 4. VELOCIDAD LIMITE DE DEPOSITO.

Es de gran importancia poder determinar el momento en el que el transporte del sólido se empieza a ser por arrastre en el fondo de la tubería. La mayoría de los autores coinciden en afirmar que además, esta condición es cercana a la de pérdida de carga mínima para la misma concentración. Si la velocidad aumenta se pasa al régimen heterogéneo y la pérdida aumenta; si la velocidad disminuye, se forma un lecho de arena que deformado con dunas y rizos aumenta notablemente la fricción además de disminuir al área hidráulica de la tubería.

Una forma para determinar la condición límite, es la propuesta por Durand como se muestra en la fig 4. También puede utilizarse la relación de Wilson<sup>(5)</sup> para que no exista depósito.

$$\frac{W}{V_*} \leq 1 \tag{4.1}$$

donde:

$V_*$  = velocidad del esfuerzo constante

$$V_* = \sqrt{\frac{g D \dot{L}_m}{4}}$$

La condición límite anterior está obtenida como el paso del flujo heterogéneo al de arrastre con depósito; para pasar de éste último al flujo heterogéneo se puede necesitar mayor intensidad del flujo; por esta razón para evitar depósito del material, es conveniente dise

ñar el flujo con cierto margen de seguridad que puede darse aumentando la velocidad en un 10 a 20%.

El transporte de sólidos en tuberías con depósito de fondo es una condición que debe evitarse por lo ineficiente y por que puede llegarse a un bloqueo completo de la tubería por los sólidos.

## 5. TRANSPORTE DE MATERIAL NO UNIFORME.

Las relaciones dadas hasta aquí, se refieren a material relativamente uniforme. Cuando se transporta material graduado las condiciones del flujo pueden verse alteradas especialmente cuando existe material menor de 0.15 mm. Se ha observado que el efecto del material fino es el de facilitar el transporte del material más grueso; esto se explica por el aumento de la viscosidad del fluido que reduce la velocidad de caída de las partículas más gruesas. Como se indicó en el apartado 3, es siempre conveniente medir el aumento de la viscosidad - debido a la concentración de sedimento fino; para estimaciones preliminares puede emplearse la relación de Einstein<sup>(6)</sup>

$$\frac{\nu'}{\nu} = 1 + 2.5 C_{vf} \quad (5.1)$$

donde:

$\nu'$  - viscosidad cinemática modificada por la concentración volumétrica de material fino  $C_{vf}$

Si el material fino es de tipo coloidal el aumento en viscosidad puede ser mucho más importante que el indicado por la ec. (5.1), además de que el fluido tendrá características <sup>no</sup> Newtonianas. Este hecho es muy importante desde el punto de vista práctico ya que la inclusión de material coloidal puede ser conveniente en muchos casos.

Para dar una idea de la disminución en la velocidad de caída de las partículas en este tipo de fluidos, se dan en la fig 5. los resultados de experiencias de laboratorio con suspensiones de bentonita en agua para diferentes concentraciones<sup>(7)</sup>

Para utilizar los criterios de condiciones límite entre transporte con depósito y flujo heterogéneo, es recomendable utilizar como diámetro representativo del material el tamaño  $d_{90}$  de la curva granulométrica, o sea, aquél para el cual el 90% del material es más fino.

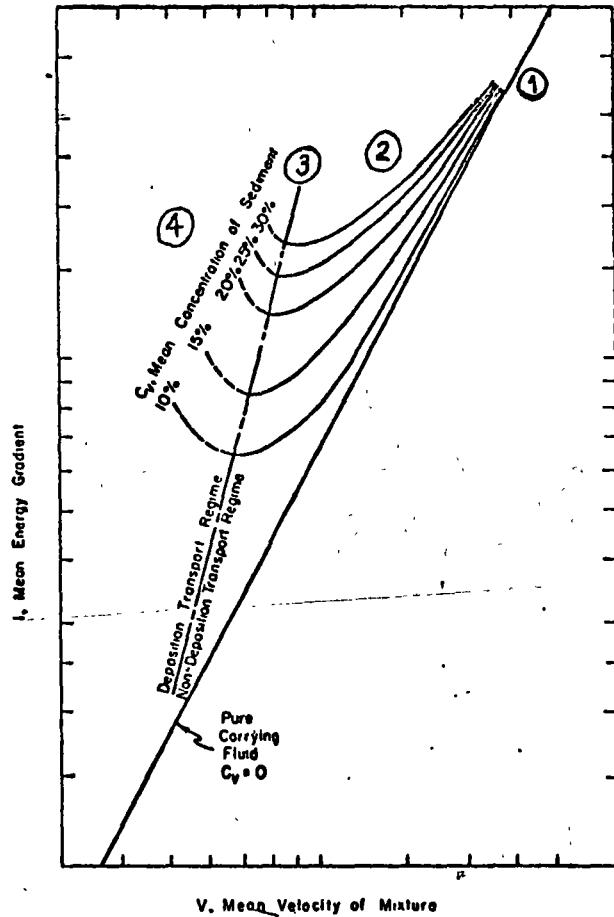
## 6. TUBERIAS INCLINADAS.

El efecto de la inclinación de la tubería sobre la pérdida de carga, es conocido solo en el caso de flujo homogéneo y es el indicado en la ec. (3.2). Aunque no ha sido comprobado experimentalmente, puede hacerse una corrección similar, para aplicar las fórmulas de Durand ec. 3.4, o de Newitt ec. 3.5 y estimar así el efecto de la inclinación de la tubería, o sea, emplear en ellas el parámetro  $(i_m - i) / (i + \text{sen } \Theta)$  en lugar de  $(i_m - i) / i$ . Para estimar la velocidad límite de depósito puede corregirse el parámetro de Durand como se indica en la referencia 7 multiplicandolo por  $(1 - \tan \Theta)$ ; esta corrección es válida para pequeñas inclinaciones de la tubería.

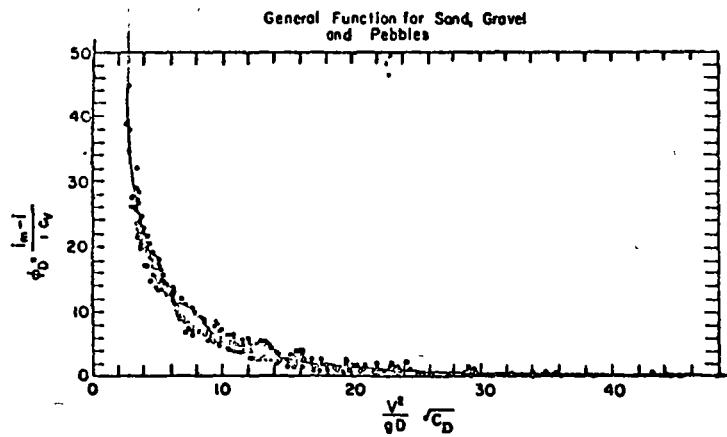
## 7. REFERENCIAS.

1. Task Committee for Preparation of the Sedimentation Manual "Transportation of Sediment in Pipes" Procs. ASCE, No. HY7, julio 1970.
2. R. Durand "Basic Relationship of the Transportation of Solids in Pipes" Memorias del Congreso de la International Association for Hydraulic Research, Minnesota, 1953.

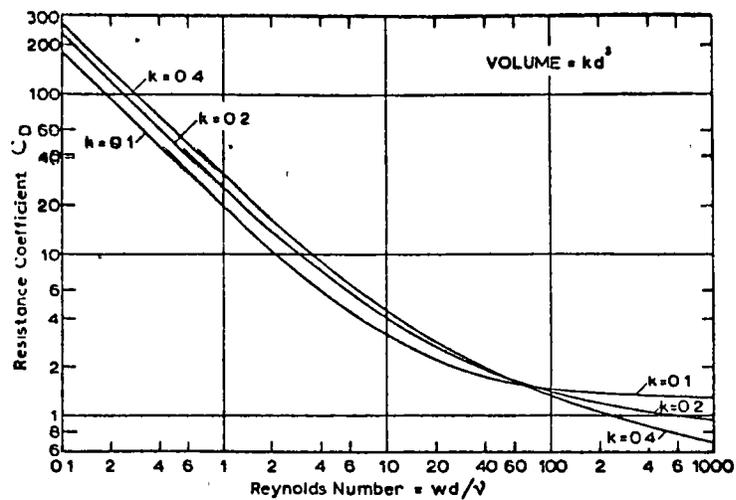
3. R. Durand y E. Condolios "Experimental Investigation on the Transport of Solids in Pipes" Le Journées d'Hydraulique" Societé Hydrotechnique de France, Grenoble, 1952.
4. D.M. Newitt y otros. "Hydraulic Conveying of Solids in Horizontal Pipes" Trans. Institution of Chemical Engs. Vol. 33, 1955.
5. W.E. Wilson - "Mechanics of Flow with non Colloidal Inert Solids" Trans. ASCE Vol. 107, 1942. p. 1576
6. A. Einstein " Annalen der Physik" Vol. 34 , 1911 p. 591



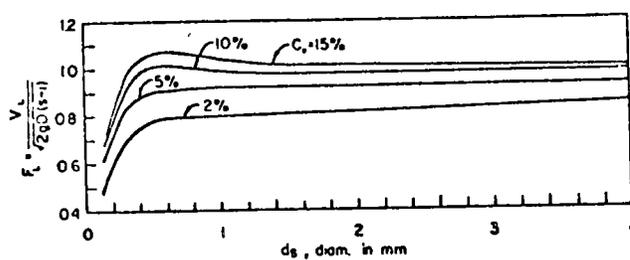
**FIGURA 1** - TYPICAL HEAD LOSS AND SEDIMENT CONCENTRATION CURVES FOR GIVEN FLUID, SEDIMENT AND PIPE SIZE



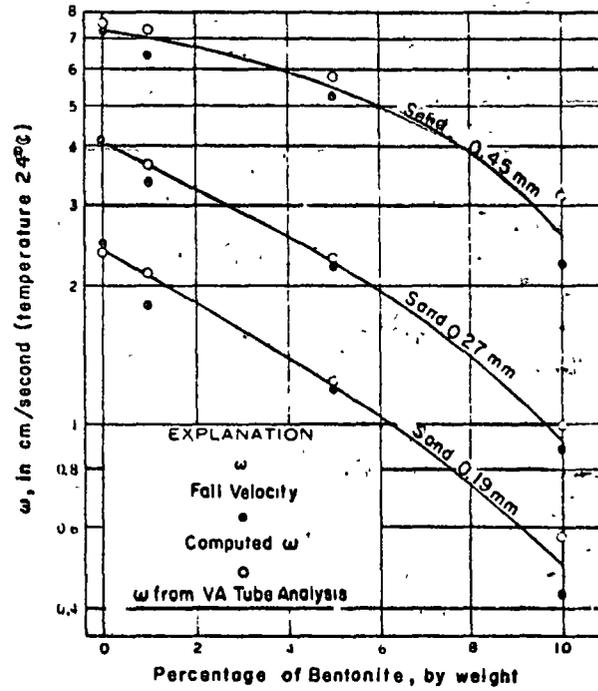
**FIGURA 2** - HEAD LOSSES IN PIPES WITH NONDEPOSIT FLOW REGIMES AFTER DURAND



**FIGURA 3** Resistance coefficient  $C_D = 8k(\rho_s - \rho)gd/\pi\rho w^2$  plotted against Reynolds number by various shapes of particles. (By permission of the Institution of Mechanical Engineers, London.)



**FIGURA 4** —LIMIT DEPOSIT VELOCITY FOR NONUNIFORM MATERIAL AFTER DURAND AND CONDOLIOS (



Variation of fall velocity with percent bentonite in water.

FIGURA 5