



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN  
INGENIERÍA

FACULTADO DE INGENIERÍA

“CONTROL SERVO VISUAL DE ROBOTS  
PLANARES”

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA

INGENIERÍA ELÉCTRICA - CAMPO CONTROL

P R E S E N T A :

DAVID HUERTA GARCÍA

TUTOR:

DR. MARCO ANTONIO ARTEAGA PÉREZ



2009

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Tang Xu Yu

Secretario: Dr. Alvarez Icaza Longoría Luis Agustín

Vocal: Dr. Arteaga Pérez Marco

1er. Suplente: Dr. Maya Ortiz Paul Rolando

2o. Suplente: Dr. Benítez Pérez Héctor

Lugar o lugares donde se realizó la tesis:

FACULTAD DE INGENIERÍA

**TUTOR DE TESIS:**

---

Dr. Arteaga Pérez Marco

# Agradecimientos

A mi familia por su apoyo incondicional y su constante motivación a lo largo de esta etapa de mi vida, en especial a Diana Ortega Peralta por formar parte de mi.

A los profesores del posgrado por el conocimiento transmitido, en especial al Dr. Marco Antonio Arteaga Pérez que hizo posible la realización de esta tesis.

A todos los compañeros del posgrado, y en especial a los que mostraron su apoyo incondicional en la maestría Juan Carlos Olgún Rojas, así como también a mis amigos Jesús Arturo Monroy Anieva y Marcos Alfredo López González.

A la Facultad de Ingeniería de la UNAM por ayudarme y proporcionarme los medios para lograr una meta más en mi vida.

Al CONACyT por haberme apoyado económicamente en mis estudios de posgrado.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	4
1.2. Problemas abiertos . . . . .	5
1.3. Resultados de la tesis . . . . .	6
<b>2. Preliminares</b>	<b>9</b>
2.1. Modelado de la cámara . . . . .	9
<b>3. Control servo visual de robots planares</b>	<b>16</b>
3.1. Diseño del control . . . . .	17
3.2. Demostración . . . . .	23
3.2.1. Manipulación de la ley de control . . . . .	24
3.2.2. Si el estado es acotado entonces cualquier otra señal en el control es acotada . . . . .	29
3.2.3. El estado está acotado mediante $\ \mathbf{x}\  \leq \mathbf{x}_{\text{máx}}$ . . . . .	34
3.2.4. Los errores de seguimiento y de observación tienden a cero en tiempo finito . . . . .	38
<b>4. Resultados de simulación</b>	<b>41</b>
<b>5. Conclusiones</b>	<b>49</b>

<b>A. Robot planar utilizado</b>	<b>51</b>
A.1. Modelo dinámico . . . . .	52
A.2. Modelo cinemático directo . . . . .	55
<b>B. Propiedades y teorema utilizado</b>	<b>56</b>
B.1. Propiedades del modelo dinámico . . . . .	56
B.2. Teorema 4.18 del libro Khalil (2002), pág. 172 . . . . .	57

# Índice de Tablas

4.1. Parámetros de la velocidad deseada. . . . .	42
4.2. Parámetros del sistema de visión. . . . .	43
4.3. Periodos de muestreo. . . . .	43
4.4. Parámetros del controlador. . . . .	44
A.1. Parámetros del robot manipulador. . . . .	52

# Índice de figuras

2.1. Robot planar sobre su marco de referencia cartesiano. . . . .	9
2.2. Esquema para el modelado de la cámara. . . . .	10
2.3. Rotación $\theta$ del marco coordenado $\Sigma_C$ con respecto a $\Sigma_0$ . . . . .	11
2.4. Esquema para obtención de tamaño y localización de la imagen. . . . .	12
2.5. Esquema para conversión de metros a pixeles. . . . .	13
3.1. Esquema de control en coordenadas cartesianas. . . . .	17
3.2. Esquema de control en coordenadas de imagen. . . . .	17
3.3. Trayectoria deseada del efector final. . . . .	19
3.4. Esquema de control. . . . .	22
3.5. Esquema del sistema. . . . .	28
4.1. Diagrama a bloques de simulación. . . . .	41
4.2. Trayectoria del efector final. . . . .	45
4.3. Trayectoria real, deseada y observada en eje X. . . . .	46
4.4. Pares eje X. . . . .	46
4.5. Trayectoria real, deseada y observada en eje Y. . . . .	47
4.6. Pares eje Y. . . . .	47
A.1. Esquema del robot manipulador utilizado. . . . .	51

# Capítulo 1

## Introducción

La robótica es una disciplina con sus propios problemas, sus fundamentos y sus leyes. Tiene dos enfoques: teórico y práctico. En el aspecto teórico se aúnan las aportaciones de la automática, la informática y la inteligencia artificial. Por el lado práctico o tecnológico hay aspectos de construcción (mecánica, electrónica), y de gestión (control, programación). La robótica presenta por lo tanto un marcado carácter interdisciplinario.

La robótica es una disciplina en la que convergen varias ciencias afines pero diferentes, como la Mecánica, la Electrónica, la Automática, la Informática, etc. El término *robot* proviene de la palabra checa *robota* (Spong and Vidyasagar 1989), cuyo significado es *trabajo* y fue introducido por primera vez por el dramaturgo checo Karel Capek; desde entonces ha sido utilizada para llamar a infinidad de dispositivos mecánicos que realizan alguna tarea con cierto grado de autonomía basado en un control. Los robots son dispositivos compuestos de sensores que reciben datos para ser procesados en un dispositivo de cómputo. Los sensores del robot, al recibir la información de entrada ordenan al robot a efectuar una determinada acción. Puede ser que los propios robots dispongan de microprocesadores que reciben la entrada de los sensores y que estos microprocesadores ordenen al robot la ejecución de las acciones para las cuales está concebido.



De las diferentes áreas de la robótica, una de las de mayor importancia es la robótica industrial y dentro de la robótica industrial los robots manipuladores, que nacen de la unión de un mecanismo formado generalmente por elementos en serie, articulados entre sí, destinado al agarre y desplazamiento de objetos. Es multifuncional y puede ser gobernado directamente por un operador humano o mediante dispositivo lógico.

Esto permite la programación y control de los movimientos a efectuar por el robot y la memorización de las diversas secuencias de trabajo, por lo que le da al robot una gran flexibilidad y posibilita su adaptación a muy diversas tareas y medios de trabajo.

Un robot industrial es, por su propia naturaleza, un tipo de maquinaria que proporciona dos tipos de flexibilidad:

- Flexibilidad mecánica, proporcionada por estar constituido por un sistema mecánico articulado que puede variar la posición de su extremo libre en el espacio, adoptando además una orientación espacial deseada.
- Flexibilidad de programación, debida a que su configuración espacial está controlada por un computador, y por lo tanto puede ser cambiada fácilmente con solo cambiar el programa.

En cuanto al sistema de control, está compuesto por los actuadores, los sensores, el controlador, el planificador de trayectorias, y el sistema de supervisión y decisión. Los actuadores son los encargados de accionar cada una de las articulaciones con el fin de posicionar y orientar el efector final. Este puede ser de tipo eléctrico, neumático o hidráulico. Los sensores por su parte, son los encargados de medir las variables de interés para el control del robot. Los sensores pueden ser de dos clases: los que proveen el reconocimiento del estado mecánico del manipulador (por ejemplo: sensores de posición, velocidad, fuerza), y los que permiten una realimentación del entorno del manipulador (por ejemplo: cámaras, sensores de ultrasonidos, etc.). El controlador re-

cibe las consignas de referencia de las variables asociadas a la trayectoria del extremo operativo, generadas por el sistema de planificación de trayectorias. De acuerdo a la información entregada por los sensores, se generan las acciones de control adecuadas para cada actuador según el algoritmo de control empleado.

Al igual que sucede en el ser humano, la capacidad de visión dota al robot con un sofisticado mecanismo de percepción que permite a la máquina responder a su entorno de una forma inteligente y flexible. El uso de la visión y otros esquemas de percepción, están motivados por la constante necesidad de aumentar la flexibilidad y los campos de aplicación de los sistemas de robótica. La visión se considera como la más potente capacidad sensorial de un robot; la principal ventaja de los sensores visuales y por lo que son cada vez más frecuentes en las aplicaciones robóticas, es que permiten una descripción muy completa del entorno de forma no intrusiva.

La visión puede ser definida como el proceso de obtención, caracterización e interpretación de información de imágenes tomadas de un mundo tridimensional. Este proceso, también habitualmente llamado *visión por computadora*, puede a su vez ser subdividido en seis áreas principales: 1) captación, 2) preprocesamiento, 3) segmentación, 4) descripción, 5) reconocimiento, 6) interpretación. La captación es el proceso a través del cual se obtiene una imagen visual. El preprocesamiento incluye técnicas tales como la reducción de ruido y realce de detalles. La segmentación es el proceso que divide una imagen en objetos que sean de nuestro interés. Mediante los procesos de descripción se obtienen características convenientes para diferenciar un tipo de objeto de otro. El reconocimiento es el proceso que identifica estos objetos. Finalmente, la interpretación le asocia un significado a un conjunto de objetos reconocidos.

La expresión control visual se aplica a robots guiados visualmente, los cuales hacen uso de una o varias cámaras de video para obtener información del entorno en forma de imágenes, que es empleada para controlar el efector final del robot durante la realización

de una tarea.

## 1.1. Antecedentes

Los primeros intentos de incorporar sistemas de visión en robótica se remontan a tres décadas, siendo uno de los primeros trabajos el de Shirai and Inoue (1973), en donde se describe que se puede utilizar una retroalimentación visual para corregir la posición de un robot y así aumentar la precisión de tareas. En el trabajo de Hill and Park (1979) se plantea controlar la posición de un robot en lazo cerrado a partir de información visual, introduciéndose por vez primera el término *visual servoing* (control servo visual).

Una clasificación de las estructuras de los sistemas con retroalimentación visual se introduce en Weiss L. E. and Neuman (1987) y en Hutchinson S. and Corke (1996), a partir de la cual se pueden caracterizar todos los sistemas prácticos.

Un sistema dinámico “*mirar y mover*” es aquel donde la arquitectura de control es jerárquica, y se usa el sistema de visión para proveer las entradas de referencia al controlador de las articulaciones, el cual utiliza la retroalimentación de las variables articulares de posición y velocidad para controlar internamente el robot. Es decir, las operaciones son ejecutadas en forma secuencial, primero “*mirar*” y luego “*mover*”. En estos esquemas el lazo de control de posición domina la dinámica total del sistema.

En contraste con esto, los sistemas “*servo visuales directos*” eliminan completamente el controlador de las articulaciones del robot, reemplazándolo con un controlador servo visual que directamente calcula los valores de las coordenadas articulares, usando solamente la visión para controlar el mecanismo.

Una segunda clasificación de los sistemas distingue al control basado en posición (Basri R. and Shimshoni 1998), (Wilson W. J. and Bell 1996) del control basado en

imagen (Weiss L. E. and Neuman 1987), (Espiau B. and Rives 1992). En esquemas de control basados en posición, se extraen las características de la imagen las cuales se utilizan junto al modelo geométrico del objeto y el conocimiento del modelo de la cámara para estimar la posición y orientación del objeto de interés con respecto a la cámara. La acción de control se calcula para reducir los errores de posición y orientación estimados. En el control basado en imagen, los valores de las acciones de control se calculan directamente sobre la base de las características de la imagen. Este tipo de esquema puede reducir retardos de cálculo, eliminar la necesidad de interpretación de la imagen y eliminar errores debidos a las incertidumbres en los modelos de los sensores y de la calibración de la cámara.

Los sistemas de visión se pueden clasificar de acuerdo a la posición que ocupe el sensor de visión en: “*sistemas con cámara fija*”, o “*sistemas con cámara en mano*”.

Se han propuesto numerosos controladores servovisuales basados en distintas teorías, como Lyapunov (Kelly 1996), (Kelly R. and Reyes 2000), robustez (Maruyama and Fujita 1998), basados en las propiedades de pasividad del sistema del robot y la visión (Fujita M. and Spong 2002), también, la aplicación del concepto de campo de velocidad en control servo visual de robots reportado en Kelly R. and Campa (2004).

## 1.2. Problemas abiertos

El estado del arte en robótica y visión, presenta grandes retos científicos y tecnológicos, además ambos convergen en un punto indivisible. La robótica y la visión requieren actualmente de una aproximación científica formal con experimentación en tiempo real además de un enfoque teórico y experimental.

Durante los últimos años, la investigación y el estudio en relación a los sistemas de visión y los sistemas robotizados de una forma homogénea y completa ha adquirido

notable importancia. Se presentan en la actualidad numerosos desarrollos que no están todavía resueltos como: estrategias de control o diseño de controladores (Tarbouriech and Soueres 2000), (Cadenat V. and Devy 1999), relaciones no lineales entre los pares a aplicar al robot y las características de la imagen (Sun and Doeschner 1999), combinar sistemas sensoriales (control servo visual y retroalimentación de esfuerzos) (Baeten J. and Shutter 1999), cámara montada en el extremo del robot frente a cámara observando el extremo del robot o ambos sistemas cooperando (Flandin G. and Marchand 2000). Así como también teleoperación en lazo cerrado; sistemas en contacto: control fuerza-posición; Sistemas de inmersión: interfaz háptica, ambiente virtual con visión estereoscópica 3D.

### 1.3. Resultados de la tesis

#### Objetivo de la tesis

El objetivo es plantear el diseño de un controlador servo visual de seguimiento para robots planares utilizando campos de velocidad y basado en coordenadas de imagen, este controlara la posición del efector final del robot de una posición inicial a una posición final generando la trayectoria.

#### Sistema a trabajar

El sistema empleado en este trabajo está constituido por un brazo robótico de dos grados de libertad al cual se le da un comportamiento planar vertical, también se asume que se tiene una cámara que está fija de tal manera que el eje óptico se muestra perpendicular al plano de trabajo del robot y se conoce su posición con respecto al sistema coordinado del robot.

### **Suposiciones y bondades del control diseñado**

Se utilizan coordenadas de imagen con el fin de que para la ley de control no sean necesarios parámetros como el modelo dinámico del robot, modelo cinemático inverso o medición de velocidad. Solo es necesaria información sobre las coordenadas articulares  $\mathbf{q}$  la cual se requiere para el cálculo del Jacobiano geométrico; la única referencia que debe proporcionarse al sistema es el punto final  $\mathbf{y}_f$ .

### **Comparación con resultados previos reportados**

El control presentado en esta tesis es en esencia una adaptación del algoritmo presentado en Arteaga-Pérez M.A and Parra-Vega (2006), en el cual se presenta un control de seguimiento basado en coordenadas cartesianas el cual no necesita del conocimiento del modelo dinámico del robot y además utiliza un observador para estimar la velocidad cartesiana; a su vez también es una variante del trabajo presentado en Pérez R. R and Espinosa (2008), donde también se hace un control servo visual por campos de velocidad la diferencia es que en esta tesis se toman en cuenta términos de fricción, además de que se obtiene la convergencia más rápida y se agregan términos al campo de velocidad con el fin de un mejor seguimiento de la trayectoria.

### **Resultados**

Los resultados obtenidos en esta tesis son buenos ya que la ley de control permite garantizar la estabilidad de los puntos de la imagen que corresponden a la trayectoria, además, se prueba que los errores de seguimiento y de posición tienden a cero en un tiempo relativamente bueno.

**Aportaciones**

Se presenta un modo de correspondencia entre el espacio de la cámara y el de operación del robot, así como la adaptación del algoritmo de control en coordenadas cartesianas a coordenadas de imagen para la retroalimentación visual.

# Capítulo 2

## Preliminares

### 2.1. Modelado de la cámara

El sistema empleado en este trabajo está constituido por un manipulador planar en un marco de referencia cartesiano denotado por  $\Sigma_0 = \{x, y, z\}$ . Se supone que el efector final del robot se mueve en el plano  $x - y$  del marco de referencia  $\Sigma_0$ . Además una cámara que está fija de tal manera que el eje óptico se encuentra perpendicular al plano de trabajo del robot como se muestra en la Figura 2.1:

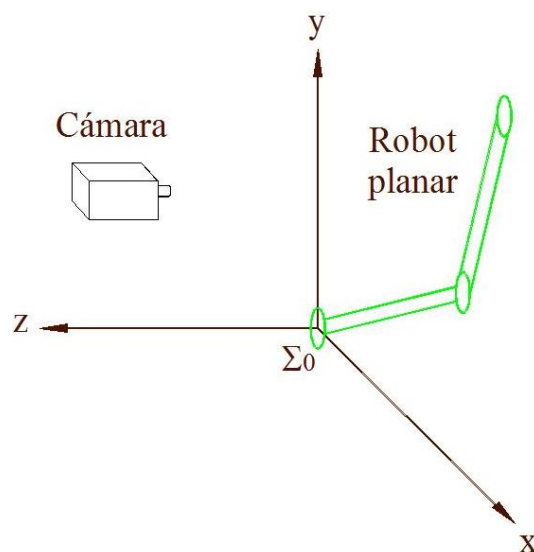


Figura 2.1: Robot planar sobre su marco de referencia cartesiano.



Para la obtención de la ecuación que relaciona los puntos de la escena observada con la cámara con los correspondientes en la imagen, se considera el sistema que se presenta en la Figura 2.2, que tiene el marco de referencia  $\Sigma_0$  fijo a la base del robot planar de dos grados de libertad, moviéndose en el plano  $(x, y)$ .

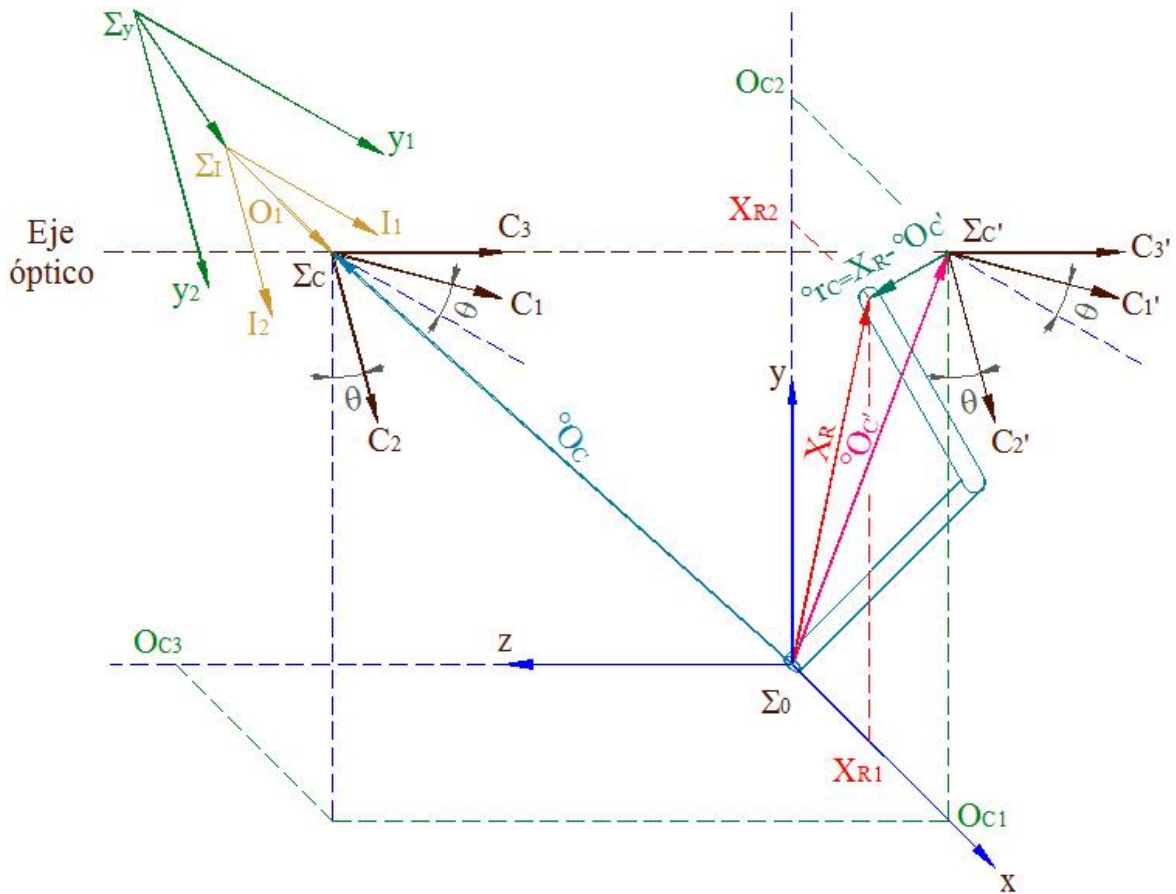


Figura 2.2: Esquema para el modelado de la cámara.

El vector  $\mathbf{x}_R = [x_{R1} \ x_{R2} \ x_{R3}]^T$  representa las coordenadas de un punto  $x$  con respecto al marco de referencia cartesiano  $\Sigma_0$ .

Debido a la lente de la cámara se tiene el marco de referencia  $\Sigma_C = \{C_1, C_2, C_3\}$ . El origen del marco de referencia de la cámara está sobre el eje óptico y en el centro de la lente. Los planos  $(C_1, C_2)$  y  $(x, y)$  definen un plano perpendicular para el eje óptico. Por lo tanto, el eje  $C_3$  se alinea con el eje óptico. Un punto  $x$  con respecto al marco de

referencia de la cámara se denota por  $\mathbf{x}_C = [x_{C1} \ x_{C2} \ x_{C3}]^T$ .

Con referencia a la ubicación relativa entre los marcos de referencia  $\Sigma_0$  y  $\Sigma_C$ , se asume que los ejes  $C_3$  y  $z$  son paralelos; además, los planos  $C_1 - C_2$  y  $x - y$  son también paralelos. El origen del marco de referencia de la cámara  $\Sigma_C$  con respecto al marco de referencia cartesiano  $\Sigma_0$  se denota por  ${}^0\mathbf{O}_C$  y está dado por:

$${}^0\mathbf{O}_C = [O_{C1} \ O_{C2} \ O_{C3}]^T \quad (2.1)$$

Por ello, el plano  $C_1 - C_2$  está localizado a una distancia  $O_{C3}$  del plano  $x - y$ . Ahora bien, si se traslada el centro de la cámara al mismo plano donde se mueve el robot, desaparecen las coordenadas  $z$  y  $O_{C3}$  y se obtiene:

$${}^0\mathbf{O}_{C'} = [O_{C1} \ O_{C2}]^T \quad (2.2)$$

También se asume que hay una rotación  $\theta$  del marco coordenado  $\Sigma_C$  con respecto a  $\Sigma_0$  alrededor del eje  $z$ , mostrado en la Figura 2.3:

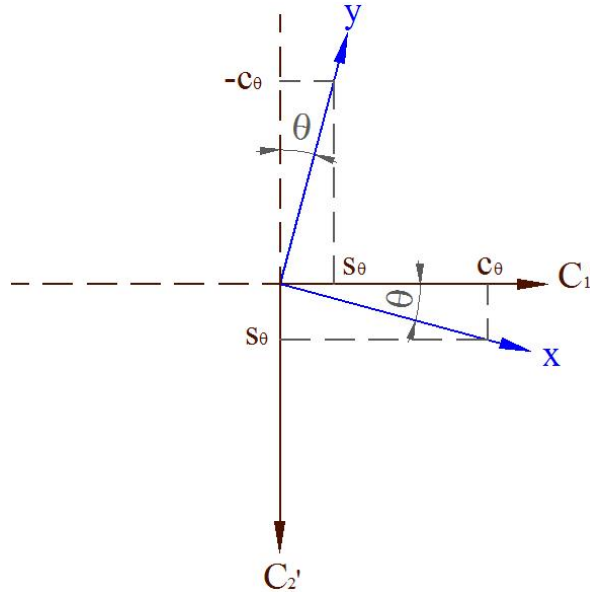


Figura 2.3: Rotación  $\theta$  del marco coordenado  $\Sigma_C$  con respecto a  $\Sigma_0$ .

Por convención, el sentido positivo para el ángulo  $\theta$  es dado por la regla de la mano derecha, por lo tanto, se obtiene una matriz de rotación dada por:

$$\mathbf{R}_\theta = {}^{C'} \mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} C_\theta & S_\theta \\ S_\theta & -C_\theta \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

la matriz  $\mathbf{R}_\theta$  será constante ya que el usuario situara el marco coordenado de la cámara rotado por un ángulo de valor  $\theta$  con respecto al marco coordenado del robot, una vez situados en una posición determinada ya no se moverán, por lo tanto, el ángulo  $\theta$  será constante.

La posición del efector final con respecto al marco de referencia de la cámara sin desplazar  $\Sigma_{C'}$  está dado, por la siguiente ecuación:

$${}^{C'} \mathbf{x}_R = {}^{C'} \mathbf{R}_0 {}^0 \mathbf{r}_C = \mathbf{R}_\theta {}^0 \mathbf{r}_C \quad (2.4)$$

La Figura 2.4 se utiliza para determinar el tamaño y la localización de la imagen:

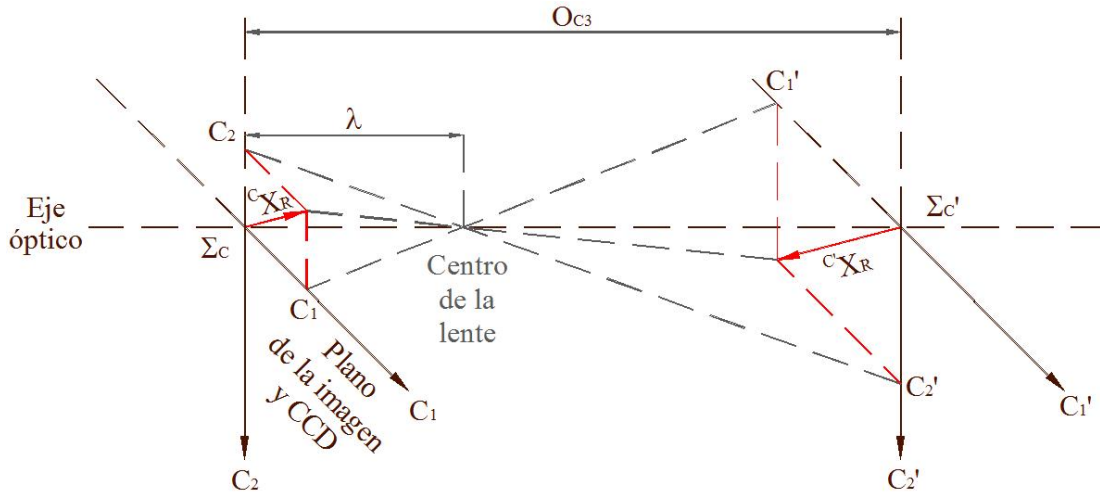


Figura 2.4: Esquema para obtención de tamaño y localización de la imagen.

Mediante la utilización de triángulos semejantes se obtiene lo siguiente:

$$\frac{C_1}{\lambda} = -\frac{C_1'}{O_{C3} - \lambda} \Rightarrow C_1 = -\frac{\lambda}{O_{C3} - \lambda} C_1' \quad (2.5)$$

$$-\frac{C_2}{\lambda} = \frac{C'_2}{O_{C3} - \lambda} \Rightarrow C_2 = -\frac{\lambda}{O_{C3} - \lambda} C'_2 \quad (2.6)$$

Por lo tanto se obtiene la posición del efector final con respecto al marco de referencia de la cámara  $\Sigma_C$  que está dada por la siguiente ecuación:

$${}^C \mathbf{x}_R = -\frac{\lambda}{O_{C3} - \lambda} \mathbf{R}_\theta {}^0 \mathbf{r}_C \quad (2.7)$$

siendo  $\lambda$  la distancia focal de la cámara.

La Figura 2.5, ayuda a visualizar de forma esquemática como se realiza la conversión de metros a pixeles para lo cual se requiere obtener el factor de escalamiento  $\alpha$ ; calculado a partir del tamaño de la superficie del arreglo CCD.

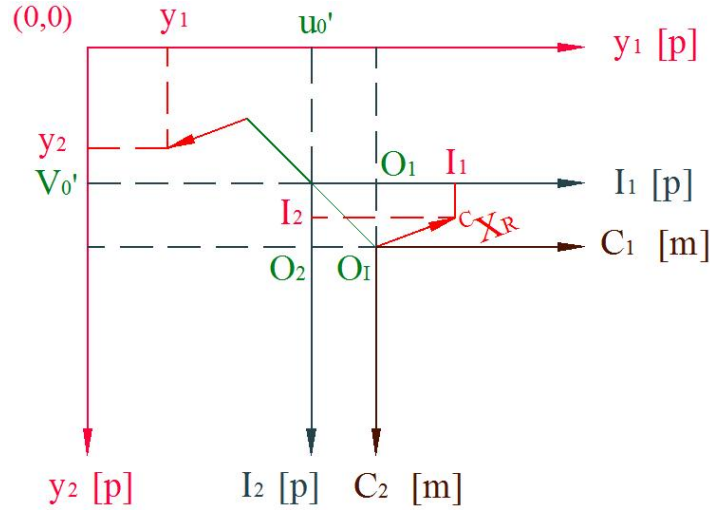


Figura 2.5: Esquema para conversión de metros a píxeles.

El plano de imagen (imagen frontal) es el arreglo discreto CCD de elementos foto-sensoriales. Esto es asociado con el marco de referencia de la imagen  $2D$ ,  $\Sigma_I = \{I_1, I_2\}$ , cuyo origen está en el centro geométrico del arreglo y cuyos ejes son paralelos a las direcciones de los elementos del sensor CCD. La posición de la intersección del eje óptico con respecto del marco de referencia  $\Sigma_I$ , es denotada por  $O_I$ . El vector  $O_I$  puede no ser cero debido a posibles desajustes internos entre la lente y el arreglo CCD. Además,  $\alpha$  es el factor de conversión de metros a píxeles.

$$I_1 = \alpha C_1 + O_1 \quad (2.8)$$

$$I_2 = \alpha C_2 + O_2 \quad (2.9)$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \alpha {}^C \mathbf{x}_R + \mathbf{O}_I \quad (2.10)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = -\mathbf{I} + \begin{bmatrix} u'_0 \\ v'_0 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

La imagen de la escena en el CCD es digitalizada y transferida a la memoria de la computadora y se mostrará en la pantalla de la computadora. El marco de referencia de la pantalla de la computadora está dado por  $\Sigma_y = \{y_1, y_2\}$ . El origen de  $\Sigma_y$  se sitúa en la esquina izquierda superior de la pantalla de la computadora. Los ejes  $y_1$  y  $y_2$  son paralelos a la pantalla.

El vector  $[u_0 \ v_0]^T$  es el corrimiento en la imagen del centro óptico de la cámara.

Entonces la posición del efector final en el marco de referencia de imagen  $\Sigma_y$  (coordenadas de imagen) está dado por:

$$\mathbf{y} = -\alpha {}^C \mathbf{x}_R - \mathbf{O}_I + \begin{bmatrix} u'_0 \\ v'_0 \end{bmatrix} = -\alpha {}^C \mathbf{x}_R + \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Al sustituir  ${}^C \mathbf{x}_R$  en la ecuación (2.12), queda:

$$\mathbf{y} = \frac{\alpha \lambda}{O_{C3} - \lambda} \mathbf{R}_\theta {}^0 \mathbf{r}_C + \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Al definir

$$\alpha_\lambda = \frac{\alpha\lambda}{O_{C3} - \lambda} \quad (2.14)$$

y sustituir todos los valores de la ecuación (2.13) se obtiene:

$$\mathbf{y} = \alpha_\lambda \begin{bmatrix} C_\theta & S_\theta \\ S_\theta & -C_\theta \end{bmatrix} (\mathbf{x}_R - {}^0\mathbf{O}_{C'}) + \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

que es la función que realiza el mapeo entre el espacio cartesiano y el de la imagen.

## Capítulo 3

# Control servo visual de robots planares

En esta sección se implementa un control visual bajo la filosofía de campos de velocidad para el seguimiento de trayectorias aleatorias determinadas por el operador en la imagen obtenida de la cámara. El objetivo es introducir una metodología por medio de la cual un operador pueda determinar una trayectoria que es totalmente aleatoria y que la ley de control garantice que el robot (o el efector final) realice el seguimiento de esta.

Al realizar el control en coordenadas cartesianas se deben utilizar métodos para el análisis de características, o sensores, que determinan la pose relativa del blanco (punto final de la trayectoria que seguira el efector final) para guiar al robot; se extraen las características de la imagen y se usan junto con un modelo geométrico del blanco para determinar la posición del blanco respecto a la cámara. En la Figura 3.1 se presenta un esquema de control sin cinemática inversa dado en coordenadas cartesianas.

El control en coordenadas cartesianas necesita información a priori (calibración); además, es necesario un conocimiento del modelo del objeto y además es inapropiado para ambientes no estructurados (no preparados, con desconocimientos paramétricos, etc).

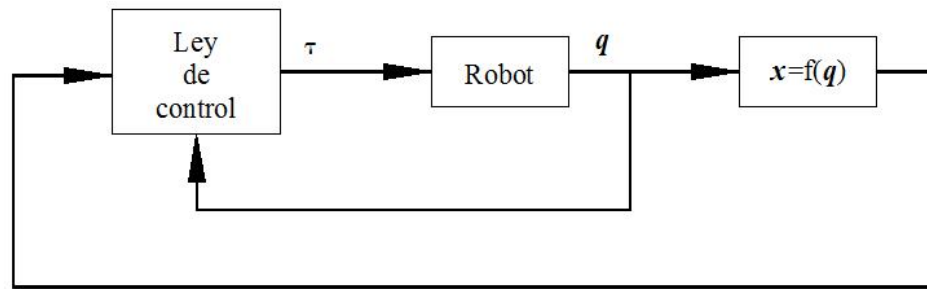


Figura 3.1: Esquema de control en coordenadas cartesianas.

Se hizo una adaptación para obtener un esquema de control dado en coordenadas de imagen el cual utiliza la localización de características en el plano de imagen directamente para la retroalimentación lo cual se muestra en la Figura 3.2.

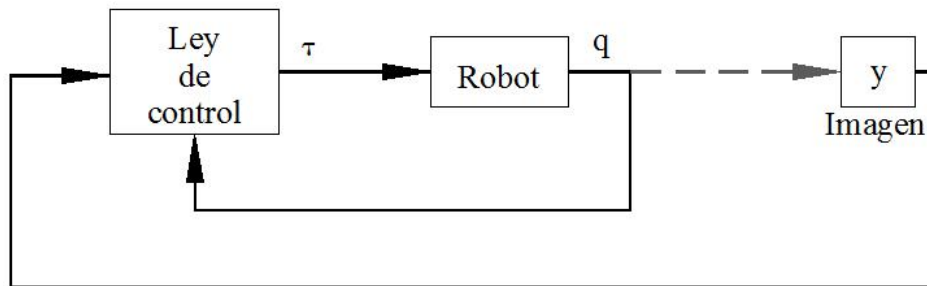


Figura 3.2: Esquema de control en coordenadas de imagen.

Para poder realizar el control en coordenadas de imagen solo es necesaria una buena estimación o aproximación del modelo del objeto. Además de que se obtienen beneficios como: menor tiempo de cómputo, eliminación de errores del modelo geométrico, robustez respecto a los errores de calibración de la cámara y del robot y ante los errores de medición de la imagen.

### 3.1. Diseño del control

En esta sección se presenta la ley de control implementada para lograr el objetivo de seguimiento de trayectoria del robot. Para este controlador servo visual de seguimiento;



se debe tener en cuenta la posición del efector final del robot con respecto al marco de referencia cartesiano  $\Sigma_0$ :

$$\mathbf{x}_R = \mathbf{f}(\mathbf{q}) \quad (3.1)$$

$\mathbf{x}_R$  se obtiene como función de las coordenadas articulares ( $\mathbf{q}$ ) al aplicar la cinemática directa (Apéndice A.2); además, también se requiere de la posición del efector final en el marco de referencia de imagen  $\Sigma_y$  dado, por:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \frac{\alpha\lambda}{O_{C3} - \lambda} \mathbf{R}_\theta \left\{ \mathbf{x}_R - \begin{bmatrix} O_{C1} \\ O_{C2} \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \\ &\triangleq \alpha_\lambda \mathbf{R}_\theta \left\{ \mathbf{x}_R - \begin{bmatrix} O_{C1} \\ O_{C2} \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde  $\mathbf{y}$  es la función que realiza el mapeo entre el espacio cartesiano y el de la imagen,  $\alpha$  es el factor de conversión de metros a pixeles,  $\lambda$  la distancia focal de la cámara,  $[u_0 \ v_0]^T$  es el corrimiento en la imagen del centro óptico de la cámara,  ${}^0\mathbf{O}_C = [O_{C1} \ O_{C2} \ O_{C3}]^T$  la posición del marco de referencia de la cámara con respecto al sistema coordenado del robot y  $\mathbf{R}_\theta$  es una matriz de rotación que determina la orientación y está dada por:

$$\mathbf{R}_\theta = \begin{bmatrix} C_\theta & S_\theta \\ S_\theta & -C_\theta \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

en la cual se cumple:

$$\mathbf{R}_\theta^{-1} = \mathbf{R}_\theta^T = \begin{bmatrix} C_\theta & S_\theta \\ S_\theta & -C_\theta \end{bmatrix} = \mathbf{R}_\theta \quad (3.4)$$

y además es constante ya que es una rotación con un ángulo de valor  $\theta$  del marco coordenado de la cámara con respecto al marco coordenado del robot como se muestra en la Figura 2.3 del Capítulo 2.

Al derivar la ecuación (3.2), se obtiene:

$$\dot{\mathbf{y}} = \alpha_\lambda \mathbf{R}_\theta \dot{\mathbf{x}}_R = \alpha_\lambda \mathbf{R}_\theta \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \alpha_\lambda \mathbf{R}_\theta \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (3.5)$$

donde  $\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$  es el Jacobiano geométrico del robot.

Se quiere diseñar una ley de control en la que no se necesite del conocimiento de  $\alpha_\lambda$  y de  $\theta$ . Se supone que el robot se encuentra en una posición inicial:

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{y}(0) \quad (3.6)$$

y se quiere llegar a la posición final  $\mathbf{y}_f$ .

El campo de velocidad es una función que determina la velocidad deseada en el espacio de la imagen calculando el vector tangente a cada punto del espacio de la imagen. El campo de velocidad deseado seleccionado para este trabajo está dado por la función  $\dot{\mathbf{y}}_d$ :

$$\dot{\mathbf{y}}_d = \mathbf{v}(y) = -\frac{k_0}{\|\tilde{\mathbf{y}}\| + \varepsilon} \tilde{\mathbf{y}} - k_1(\mathbf{y}_d - \mathbf{y}_f) \quad (3.7)$$

donde  $k_0$ ,  $k_1$  y  $\varepsilon$  son constantes reales positivas,  $\mathbf{y}_f$  es el punto final al que se quiere llegar,  $\tilde{\mathbf{y}}$  es el error de posición dado por la ecuación (3.8) y  $\mathbf{y}_d$  es la trayectoria deseada que se muestra en la ecuación (3.9).

En la Figura 3.3 se muestra la trayectoria deseada:

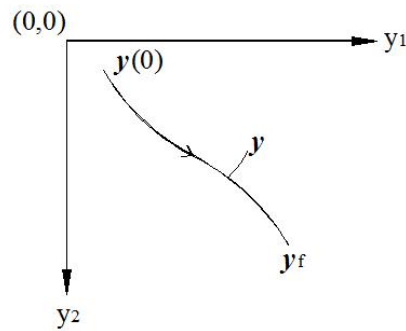


Figura 3.3: Trayectoria deseada del efector final.

El error de posición está dado por

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_f \quad (3.8)$$

donde  $\mathbf{y}$  es la trayectoria real del efector final del robot y es la que se desea controlar.

La trayectoria deseada  $\mathbf{y}_d$  se obtiene integrando la ecuación (3.7) de la siguiente forma:

$$\mathbf{y}_d = \int_0^t \dot{\mathbf{y}}_d dt \quad \text{con} \quad \mathbf{y}_d(0) = \mathbf{y}(0) \quad (3.9)$$

Si se supone que las mediciones de velocidad no están disponibles entonces una estimación de  $\mathbf{y}$  estará dada por  $\hat{\mathbf{y}}$ , y el error de observación será:

$$\mathbf{z} \triangleq \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} \quad (3.10)$$

Similar a la definición  $\dot{\mathbf{q}}_0$  en Arteaga-Pérez and Kelly (2004) se hace:

$$\dot{\mathbf{y}}_0 \triangleq \dot{\hat{\mathbf{y}}} - \Lambda_z \mathbf{z} \quad (3.11)$$

donde  $\Lambda_z \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  es una matriz diagonal positiva definida.

A continuación se propone el observador lineal:

$$\dot{\hat{\mathbf{y}}} \triangleq \dot{\hat{\mathbf{y}}}_0 + \Lambda_z \mathbf{z} + k_d \mathbf{z}; \quad \dot{\hat{\mathbf{y}}}(0) = 0 \quad (3.12)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{y}}}_0 \triangleq \dot{\mathbf{y}}_d - \Lambda_y (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_d) + \mathbf{s}_d + k_d \Lambda_z \int_0^t \mathbf{z} dt \quad (3.13)$$

donde  $\Lambda_y \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  es una matriz diagonal positiva definida,  $k_d$  es una constante positiva y  $\mathbf{s}_d \in \mathbb{R}^2$  ayuda a mejorar la respuesta en estado transitorio y viene dado por la ecuación (3.18).

El error de seguimiento en coordenadas de imagen estará dado por:

$$\Delta \mathbf{y} \triangleq \mathbf{y} - \mathbf{y}_d \quad (3.14)$$

Para diseñar el controlador de seguimiento, se define:

$$\dot{\mathbf{y}}_r \triangleq \dot{\mathbf{y}}_d - \Lambda_y(\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_d) + \mathbf{s}_d - \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma} \quad (3.15)$$

donde  $\mathbf{K}_\gamma \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  es una matriz diagonal definida positiva y  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^2$  dada en la ecuación (3.19), con:

$$\mathbf{s} \triangleq \dot{\hat{\mathbf{y}}} - \dot{\mathbf{y}}_d + \Lambda_y(\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_d) \triangleq \dot{\hat{\mathbf{y}}} + \Lambda_y \bar{\mathbf{y}} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{s}_1 \triangleq \mathbf{s} - \mathbf{s}_d \quad (3.17)$$

$$\mathbf{s}_d \triangleq \mathbf{s}(0)e^{-kt} \quad (3.18)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \int_0^t \{\mathbf{K}_\beta \mathbf{s}_1(t) + \text{sign}(\mathbf{s}_1(t))\} dt \quad (3.19)$$

donde  $\mathbf{K}_\beta \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  es una matriz diagonal positiva definida.

Alternativamente, para (3.19) se puede utilizar:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{K}_\beta \mathbf{s}_1 + \text{sign}(\mathbf{s}_1) \quad (3.20)$$

$$\text{sign}(\mathbf{s}_1) \triangleq [\text{sign}(s_{11}) \dots \text{sign}(s_{1n})]^T \quad (3.21)$$

Finalmente, se define:

$$\mathbf{s}_0 \triangleq \dot{\mathbf{y}}_0 - \dot{\mathbf{y}}_r \quad (3.22)$$

donde  $\dot{\mathbf{y}}_0$  y  $\dot{\mathbf{y}}_r$  estan dados por las ecuaciones (3.11) y (3.15) respectivamente, y  $\mathbf{s}_0$  es el término de retroalimentación.

Si se conoce  $\alpha_\lambda$  y  $\mathbf{R}_\theta$  la ley de control será:

$$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{K}_p \frac{1}{\alpha_\lambda} \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{R}_\theta \mathbf{s}_0 \quad (3.23)$$

Pero como no se conoce  $\alpha_\lambda$  y  $\mathbf{R}_\theta$  entonces la ley de control es:

$$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{K}_p \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{R}_{\theta'} \mathbf{s}_0 \quad (3.24)$$

con

$$\mathbf{R}_{\theta'} = \begin{bmatrix} C_{\theta'} & S_{\theta'} \\ S_{\theta'} & -C_{\theta'} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_\theta \quad (3.25)$$

donde  $\theta'$  es un estimado del valor  $\theta$  (ángulo de rotación del marco coordenado de la cámara con respecto al marco coordenado del robot) y  $\mathbf{K}_p \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  es una matriz diagonal positiva definida.

Así, el esquema de control será:

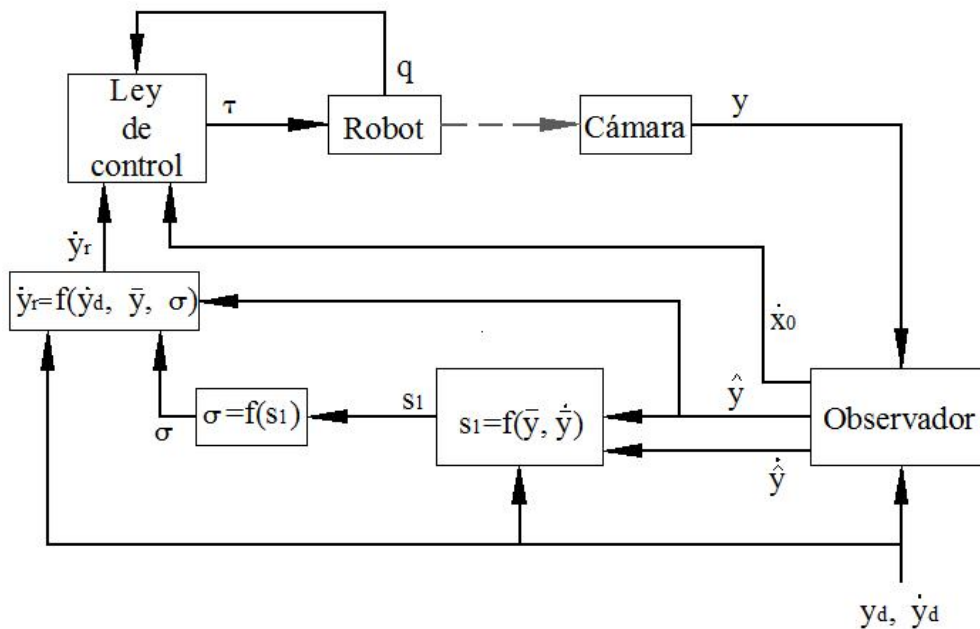


Figura 3.4: Esquema de control.

## 3.2. Demostración

### Proposición

A continuación se propone que al tener una trayectoria deseada  $\mathbf{y}_d$  continua y acotada, seleccionando apropiadamente las ganancias  $\mathbf{K}_p$ ,  $\mathbf{K}_\beta$ ,  $\mathbf{K}_\gamma$ ,  $k_d$ ,  $k$ ,  $\Lambda_y$  y  $\Lambda_z$ ; la ley de control mostrada en (3.24) garantiza que todas las señales involucradas permanecen acotadas y que los errores de seguimiento  $\Delta\mathbf{y}$ ,  $\Delta\dot{\mathbf{y}}$  y de observación  $\mathbf{z}$ ,  $\dot{\mathbf{z}}$  tienden a cero en tiempo finito.

Para demostrar que la proposición anterior es cierta, se formulan cuatro pasos principales:

- **Manipulación de la ley de control.** En esta sección se manipula la ley de control para llegar a la ecuación (3.49) para después definir  $\bar{\mathbf{K}}_p$  y garantizar que  $\bar{\mathbf{K}}_p > 0$ .
- **Si el estado es acotado entonces cualquier otra señal en el control es acotada.** En esta sección se define el vector de estados  $\mathbf{x}$  y se demuestra que si está acotado mediante  $\|\mathbf{x}\| \leq \mathbf{x}_{\text{máx}}$  entonces cualquier otra señal involucrada en la ley de control permanece acotada.
- **El estado está acotado mediante  $\|\mathbf{x}\| \leq \mathbf{x}_{\text{máx}}$ .** En esta sección se demuestra que seleccionando apropiadamente las ganancias  $\mathbf{K}_p$ ,  $\mathbf{K}_\beta$ ,  $\mathbf{K}_\gamma$ ,  $k_d$ ,  $k$ ,  $\Lambda_y$  y  $\Lambda_z$ ; la ley de control mostrada en (3.24) garantiza que el vector de estados  $\mathbf{x}$  está acotado mediante  $\|\mathbf{x}\| \leq \mathbf{x}_{\text{máx}}$ .
- **Los errores de seguimiento y de observación tienden a cero en tiempo finito.** Por último en esta sección se demuestra que efectivamente los errores de seguimiento  $\Delta\mathbf{y}$ ,  $\Delta\dot{\mathbf{y}}$  y de observación  $\mathbf{z}$ ,  $\dot{\mathbf{z}}$  tienden a cero en tiempo finito.

### 3.2.1. Manipulación de la ley de control

Para esto, se calcula la dinámica del error de observación; y el observador esta dado por (3.12) y (3.13):

$$\dot{\hat{\mathbf{y}}} \triangleq \dot{\mathbf{y}}_d - \Lambda_y(\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_d) + \mathbf{s}_d + k_d \Lambda_z \int_0^t \mathbf{z} dt + \Lambda_z \mathbf{z} + k_d \mathbf{z} \quad (3.26)$$

Sin embargo de (3.11), se puede definir:

$$\mathbf{r} = \dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{y}}_0 = \dot{\mathbf{y}} - \dot{\hat{\mathbf{y}}} + \Lambda_z \mathbf{z} = \dot{\mathbf{z}} + \Lambda_z \mathbf{z} \quad (3.27)$$

de (3.26) y (3.27) se obtiene:

$$\dot{\mathbf{y}} - \dot{\hat{\mathbf{y}}} + \Lambda_z \mathbf{z} + k_d(\mathbf{z} + \Lambda_z \int_0^t \mathbf{z} dt) = \dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{y}}_d + \Lambda_y(\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_d) - \mathbf{s}_d \quad (3.28)$$

reescrito de otra forma se tiene:

$$\mathbf{r} + k_d \int_0^t \mathbf{r} dt = \Delta \dot{\mathbf{y}} + \Lambda_y \bar{\mathbf{y}} - \mathbf{s}_d \quad (3.29)$$

También se puede utilizar:

$$\dot{\mathbf{r}} + k_d \mathbf{r} = \Delta \dot{\mathbf{y}} + \Lambda_y \dot{\hat{\mathbf{y}}} + k \mathbf{s}_d \quad (3.30)$$

De la ecuación (3.5) al despejar  $\dot{\mathbf{q}}$ , se obtiene:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{\alpha_\lambda} \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{R}_\theta \dot{\mathbf{y}} \quad (3.31)$$

y se puede definir lo siguiente:

$$\dot{\mathbf{q}}_r = \frac{1}{\alpha_\lambda} \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{R}_\theta \dot{\mathbf{y}}_r \quad (3.32)$$

$$\mathbf{s}_r = \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_r \quad (3.33)$$

$$\mathbf{s}_y = \dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{y}}_r \quad (3.34)$$

$$\mathbf{s}_r = \frac{1}{\alpha_\lambda} \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{R}_\theta \mathbf{s}_y \quad (3.35)$$

$$\mathbf{s}_y = \alpha_\lambda \mathbf{R}_\theta \mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{s}_r \quad (3.36)$$

La dinámica del robot (mostrada en el Apéndice A.1) está dada por:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_p \quad (3.37)$$

de tal manera que:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) &= \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_p \\ &+ \mathbf{H}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \\ &- \mathbf{H}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}_r - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}_r - \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}}_r - \mathbf{g}(\mathbf{q}) \end{aligned}$$

Lo anterior se puede reescribir como:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{s}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{s}_r + \mathbf{D} \mathbf{s}_r = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{y}_a \quad (3.38)$$

con

$$\mathbf{y}_a = \mathbf{H}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\tau}_p \quad (3.39)$$

Por otro lado se tienen las ecuaciones (3.22); (3.27) y (3.34):

$$\mathbf{s}_0 = \dot{\mathbf{y}}_0 - \dot{\mathbf{y}}_r = \dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{y}}_r - (\dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{y}}_0) = \mathbf{s}_y - \mathbf{r} \quad (3.40)$$

Esto significa que de (3.24), se tiene:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= -\mathbf{K}_p \mathbf{J}^\top(\mathbf{q}) \mathbf{R}_{\theta'} \mathbf{s}_0 \\ &= -\mathbf{K}_p \mathbf{J}^\top(\mathbf{q}) \mathbf{R}_{\theta'} \mathbf{R}_\theta \mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{R}_\theta \mathbf{s}_0 \end{aligned} \quad (3.41)$$



Para el análisis se tiene:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{\tilde{\theta}} &= \mathbf{R}_{\theta'} \mathbf{R}_{\theta} & (3.42) \\
 &= \begin{bmatrix} C_{\theta'} & S_{\theta'} \\ S_{\theta'} & -C_{\theta'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{\theta} & S_{\theta} \\ S_{\theta} & -C_{\theta} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} C_{\theta'}C_{\theta} + S_{\theta'}S_{\theta} & C_{\theta'}S_{\theta} - S_{\theta'}C_{\theta} \\ S_{\theta'}C_{\theta} - C_{\theta'}S_{\theta} & S_{\theta'}S_{\theta} + C_{\theta'}C_{\theta} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Además, se sabe que:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

Por lo tanto de (3.42) se tiene:

$$\mathbf{R}_{\tilde{\theta}} = \begin{bmatrix} C_{\tilde{\theta}} & S_{\tilde{\theta}} \\ -S_{\tilde{\theta}} & C_{\tilde{\theta}} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

con

$$\tilde{\theta} = \theta - \theta' \quad (3.44)$$

Al tomar en cuenta que:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}^T \mathbf{R}_{\tilde{\theta}} \mathbf{a} &= \mathbf{a}^T \begin{bmatrix} C_{\tilde{\theta}} & 0 \\ 0 & C_{\tilde{\theta}} \end{bmatrix} \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \begin{bmatrix} 0 & S_{\tilde{\theta}} \\ -S_{\tilde{\theta}} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{a} & (3.45) \\
 &= \mathbf{a}^T \begin{bmatrix} C_{\tilde{\theta}} & 0 \\ 0 & C_{\tilde{\theta}} \end{bmatrix} \mathbf{a}
 \end{aligned}$$

$\begin{bmatrix} C_{\tilde{\theta}} & 0 \\ 0 & C_{\tilde{\theta}} \end{bmatrix}$ .- Es una matriz diagonal; cualquier matriz diagonal es simétrica. Una matriz simétrica cumple con  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ .

$\begin{bmatrix} 0 & S_{\tilde{\theta}} \\ -S_{\tilde{\theta}} & 0 \end{bmatrix}$ .- Es una matriz antisimétrica, ya que  $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$ . Una propiedad de las matrices antisimétricas es  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  Lo cual significa que:

$$\mathbf{a}^T \mathbf{R}_{\tilde{\theta}} \mathbf{a} > 0 \iff C_{\tilde{\theta}} = \cos(\theta - \theta') > 0 \quad (3.46)$$

ó

$$\mathbf{a}^T \mathbf{R}_{\tilde{\theta}} \mathbf{a} > 0 \quad \text{si} \quad -\frac{\pi}{2} < \theta - \theta' < \frac{\pi}{2} \quad (3.47)$$

ó

$$\mathbf{a}^T \mathbf{R}_{\tilde{\theta}} \mathbf{a} > 0 \quad \text{si} \quad \left| \tilde{\theta} \right| < \frac{\pi}{2} \quad (3.48)$$

Por lo tanto, la ecuación (3.41) se puede escribir como:

$$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{K}_p \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{R}_{\tilde{\theta}} \mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{R}_{\theta} \mathbf{s}_0 \quad (3.49)$$

Ahora se define:

$$\bar{\mathbf{K}}_p = \alpha_\lambda \mathbf{K}_p \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{R}_{\tilde{\theta}} \mathbf{J}(\mathbf{q}) \quad (3.50)$$

despejando  $\mathbf{K}_p$  de (3.50) y sustituyendo el resultado en (3.49) se tiene:

$$\boldsymbol{\tau} = -\frac{1}{\alpha_\lambda} \bar{\mathbf{K}}_p \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{R}_{\theta} \mathbf{s}_0 \quad (3.51)$$

Sustituyendo la ecuación (3.40) en (3.51) se tiene:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= -\frac{1}{\alpha_\lambda} \bar{\mathbf{K}}_p \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{R}_{\theta} (\mathbf{s}_y - \mathbf{r}) \\ &= -\bar{\mathbf{K}}_p \left( \frac{1}{\alpha_\lambda} \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{R}_{\theta} \mathbf{s}_y \right) + \frac{1}{\alpha_\lambda} \bar{\mathbf{K}}_p \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{R}_{\theta} \mathbf{r} \\ &= -\bar{\mathbf{K}}_p \left( \frac{1}{\alpha_\lambda} \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{R}_{\theta} \mathbf{s}_y \right) + \frac{1}{\alpha_\lambda} [\alpha_\lambda \mathbf{K}_p \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{R}_{\tilde{\theta}} \mathbf{J}(\mathbf{q})] \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{R}_{\theta} \mathbf{r} \\ &= -\bar{\mathbf{K}}_p \left( \frac{1}{\alpha_\lambda} \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{R}_{\theta} \mathbf{s}_y \right) + \mathbf{K}_p \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{R}_{\tilde{\theta}} \mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{R}_{\theta} \mathbf{r} \\ &= -\bar{\mathbf{K}}_p \left( \frac{1}{\alpha_\lambda} \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{R}_{\theta} \mathbf{s}_y \right) + \mathbf{K}_p \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{R}_{\theta'} \mathbf{r} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Luego, de la ecuación (3.35) se despeja  $\mathbf{s}_y$  y se sustituye el resultado en (3.52) y se obtiene:

$$\boldsymbol{\tau} = -\bar{\mathbf{K}}_p \mathbf{s}_r + \mathbf{K}_p \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{R}_{\theta'} \mathbf{r} \quad (3.53)$$

al sustituir la ecuación (3.53) en (3.38) se tiene la dinámica del error dada por:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{s}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{s}_r + \mathbf{K}_{DP} \mathbf{s}_r = \mathbf{K}_p \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{R}_{\theta'} \mathbf{r} - \mathbf{y}_a \quad (3.54)$$

con  $\mathbf{K}_{DP} = \mathbf{D} + \bar{\mathbf{K}}_p$ .

Para el observador que se tiene en (3.30):

$$\dot{\mathbf{r}} + k_d \mathbf{r} = \Delta \ddot{\mathbf{y}} + \boldsymbol{\Lambda}_y \dot{\mathbf{y}} + k \mathbf{s}_d \quad (3.55)$$

Se necesita que  $\bar{\mathbf{K}}_p > 0$ , es decir, de la ecuación (3.50):

$$\bar{\mathbf{K}}_p = \alpha_\lambda \mathbf{K}_p \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{R}_{\bar{\theta}} \mathbf{J}(\mathbf{q}) > 0.$$

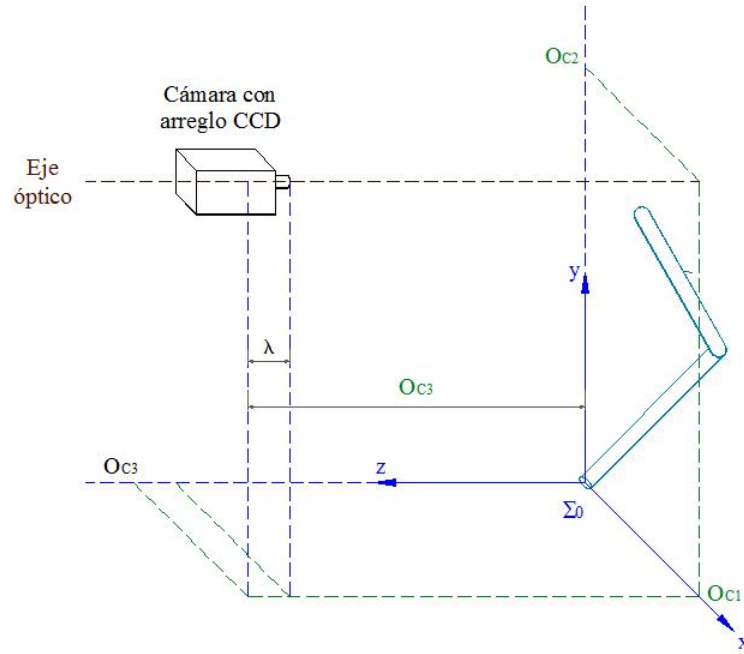


Figura 3.5: Esquema del sistema.

Primero se prueba que  $\alpha_\lambda > 0$ . De la ecuación (3.2):

$$\alpha_\lambda = \frac{\alpha \lambda}{O_{C3} - \lambda} \quad (3.56)$$

Pero  $\alpha$ ,  $\lambda$  y  $O_{C3} > 0$ . También  $O_{C3} > \lambda \implies \alpha_\lambda > 0$ .

Como  $\mathbf{K}_p > 0$ , solo queda por analizar de la ecuación (3.50):

$$\mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{R}_{\tilde{\theta}} \mathbf{J}(\mathbf{q}) \quad (3.57)$$

que equivale a  $\mathbf{R}_{\tilde{\theta}} > 0$ , si se supone que  $\text{Rango}(\mathbf{J}(\mathbf{q})) = 2$ , es decir, que el Jacobiano es de rango completo para que pueda ser invertible. De aquí se tiene que:

$$\mathbf{b}^T \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{R}_{\tilde{\theta}} \mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{b} = [\mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{b}]^T \mathbf{R}_{\tilde{\theta}} [\mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{b}] > 0 \quad (3.58)$$

Si  $\mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{b} \neq 0$ . Pero  $\mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{b} \neq 0$  si  $\mathbf{b} \neq 0$ . Esto significa que  $\mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{R}_{\tilde{\theta}} \mathbf{J}(\mathbf{q}) > 0$ .

Así que simplemente se necesita que:

$$\mathbf{K}_p \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{R}_{\tilde{\theta}} \mathbf{J}(\mathbf{q}) = \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{R}_{\tilde{\theta}} \mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{K}_p \quad (3.59)$$

La forma más fácil de lograr esto es con  $\mathbf{K}_p = k_p \mathbf{I}$ ,  $k_p > 0$ .

### 3.2.2. Si el estado es acotado entonces cualquier otra señal en el control es acotada

Para el sistema (3.54)-(3.55), se define su vector de estados como:

$$\mathbf{x} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{s}_r \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

A continuación se supone que el estado está acotado mediante:

$$\|\mathbf{x}\| \leq \mathbf{x}_{\text{máx}} \quad (3.61)$$

se debe demostrar que si se cumple lo anterior entonces cualquier otra señal involucrada permanece acotada.

Para demostrar lo anterior primero, de (3.36), si  $\mathbf{s}_r$  está acotada,  $\mathbf{s}_y$  también. De (3.34) se sabe que  $\mathbf{s}_y = \dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{y}}_r$ ; de (3.15), se tiene:

$$-\dot{\mathbf{y}}_d + \Lambda_y(\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_d) - \mathbf{s}_d = -\dot{\mathbf{y}}_r - \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma} \quad (3.62)$$

y de (3.16)-(3.17), se tiene:

$$\mathbf{s}_1 = \dot{\hat{\mathbf{y}}} - \dot{\mathbf{y}}_d + \Lambda_y(\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_d) - \mathbf{s}_d = \dot{\hat{\mathbf{y}}} - \dot{\mathbf{y}}_r - \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma} \quad (3.63)$$

ó

$$\dot{\mathbf{y}}_r = \dot{\hat{\mathbf{y}}} - \mathbf{s}_1 - \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma} \quad (3.64)$$

De la ecuación (3.34), se tiene:

$$\mathbf{s}_y = \dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{y}}_r = \dot{\mathbf{y}} - \dot{\hat{\mathbf{y}}} + \mathbf{s}_1 + \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma} = \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{s}_1 + \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma} \quad (3.65)$$

Y se tiene de (3.27) que:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{r} - \Lambda_z \mathbf{z} \quad (3.66)$$

De esta manera, si  $\mathbf{r}$  está acotada entonces  $\mathbf{z}$  y  $\dot{\mathbf{z}}$  también son acotadas. Por lo anterior, se puede definir:

$$\mathbf{s}_i \triangleq \mathbf{s}_y - \dot{\mathbf{z}} \quad (3.67)$$

que está acotada. Entonces, (3.65) se convierte en:

$$\mathbf{s}_i \triangleq \mathbf{s}_1 + \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma} \quad (3.68)$$

donde si  $\|\mathbf{s}_1\| < \mathbf{s}_{ip \text{ máx}} = \text{máx} \|\dot{\mathbf{s}}_1\| < \infty$

$$\implies \|\mathbf{s}_1\| < \infty \quad \text{y} \quad \|\boldsymbol{\sigma}\| < \infty \quad \forall t \quad (3.69)$$

Para probar lo anterior se tiene que

$$\boldsymbol{\sigma} = \int_0^t \{\mathbf{K}_\beta \mathbf{s}_1(t) + \text{sign}(\mathbf{s}_1(t))\} dt; \quad \boldsymbol{\sigma}(0) = 0 \quad (3.70)$$

y se utiliza el Teorema 4.18 del libro Khalil (2002), pág. 172 que se muestra en el Apéndice B.2 y se define lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbb{D} &= \mathbb{R}^n \\ \alpha_1(\|\boldsymbol{\sigma}\|) &= \alpha_2(\|\boldsymbol{\sigma}\|) = \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\sigma}\|^2 \end{aligned} \quad (3.71)$$

y se propone la siguiente función de Lyapunov:

$$V_0 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\sigma}\|^2 \quad (3.72)$$

De esta forma se tiene:

$$\alpha_1(\|\boldsymbol{\sigma}\|) = \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\sigma}\|^2 \leq V_0 \leq \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\sigma}\|^2 = \alpha_2(\|\boldsymbol{\sigma}\|) \quad (3.73)$$

También se sabe que:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{K}_\beta \mathbf{s}_1 + \text{sign}(\mathbf{s}_1) \quad (3.74)$$

si se sustituye el valor de (3.19) en (3.68) se tiene:

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{s}_1 + \mathbf{K}_\gamma \int_0^t \{\mathbf{K}_\beta \mathbf{s}_1(t) + \text{sign}(\mathbf{s}_1(t))\} dt \quad (3.75)$$

con

$$\text{sign}(\mathbf{s}_1) = [\text{sign}(s_{11}) \quad \dots \quad \text{sign}(s_{1n})]^T \quad (3.76)$$

Al despejar  $\mathbf{s}_1$  de la ecuación (3.75) se obtiene:

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_i - \mathbf{K}_\gamma \int_0^t \{\mathbf{K}_\beta \mathbf{s}_1(t) + \text{sign}(\mathbf{s}_1(t))\} dt \quad (3.77)$$

ó

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_i - \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma} \quad (3.78)$$

Derivando la ecuación (3.72) y sustituyendo los valores correspondientes de las ecuaciones (3.74)-(3.78):

$$\begin{aligned} \dot{V}_0 &= \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{K}_\beta \mathbf{s}_1 + \boldsymbol{\sigma}^T \text{sign}(\mathbf{s}_1) \\ &= \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{K}_\beta \mathbf{s}_i - \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{K}_\beta \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^T \text{sign}(\mathbf{s}_1) \\ &\leq -\lambda_{\min}(\mathbf{K}_\beta \mathbf{K}_\gamma) \|\boldsymbol{\sigma}\|^2 + \|\boldsymbol{\sigma}\| (\lambda_{\max}(\mathbf{K}_\beta) \mathbf{s}_{ip \text{ máx}} + \sqrt{n}) \\ &= -\|\boldsymbol{\sigma}\| (\lambda_{\min}(\mathbf{K}_\beta \mathbf{K}_\gamma) \|\boldsymbol{\sigma}\| - [\lambda_{\max}(\mathbf{K}_\beta) \mathbf{s}_{ip \text{ máx}} + \sqrt{n}]) \\ &= -\frac{1}{2} \lambda_{\min}(\mathbf{K}_\beta \mathbf{K}_\gamma) \|\boldsymbol{\sigma}\|^2 - \|\boldsymbol{\sigma}\| \left( \frac{1}{2} \lambda_{\min}(\mathbf{K}_\beta \mathbf{K}_\gamma) \|\boldsymbol{\sigma}\| \right. \\ &\quad \left. - [\lambda_{\max}(\mathbf{K}_\beta) \mathbf{s}_{ip \text{ máx}} + \sqrt{n}] \right) \end{aligned} \quad (3.79)$$

Por lo tanto, si se define:

$$\|\boldsymbol{\sigma}\| \geq \mu \triangleq \frac{2 [\lambda_{\max}(\mathbf{K}_\beta) \mathbf{s}_{ip \text{ máx}} + \sqrt{n}]}{\lambda_{\min}(\mathbf{K}_\beta \mathbf{K}_\gamma)} \quad (3.80)$$

y se sustituye en (3.79) se tiene

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} \lambda_{\min}(\mathbf{K}_\beta \mathbf{K}_\gamma) \|\boldsymbol{\sigma}\|^2 = -\mathbf{W}_3 \quad (3.81)$$

con el resultado anterior, de (3.78) se tiene que  $\mathbf{s}_1$  está acotada. Adicionalmente de (3.20)  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  está acotada.

Por otro lado, se tiene de (3.34) y (3.14)-(3.15):

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_y &= \dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{y}}_r \\ &= \dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{y}}_d + \Lambda_y(\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_d) - \mathbf{s}_d + \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma} \\ &= \Delta \dot{\mathbf{y}} + \Lambda_y(\mathbf{y} - \mathbf{y}_d - (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})) - \mathbf{s}_d + \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma} \\ &= \Delta \dot{\mathbf{y}} + \Lambda_y \Delta \mathbf{y} - \Lambda_y \mathbf{z} - \mathbf{s}_d + \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma} \end{aligned} \quad (3.82)$$

ó

$$\Delta \dot{\mathbf{y}} + \Lambda_y \Delta \mathbf{y} = \mathbf{s}_y + \Lambda_y \mathbf{z} + \mathbf{s}_d - \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma} \quad (3.83)$$

por lo tanto,  $\Delta \dot{\mathbf{y}}$  y  $\Delta \mathbf{y}$  están acotadas. Desde que  $\dot{\mathbf{y}}_d$  en (3.7) está acotada,  $\dot{\mathbf{y}}$  debe estar acotada también.

Ahora, se analiza la ecuación (3.14)  $\Delta \mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_d$ , que está acotada; y se puede reescribir la ecuación (3.7) como:

$$\dot{\mathbf{y}}_d + k_1 \mathbf{y}_d = k_1 \mathbf{y}_f - \frac{k_0}{\|\tilde{\mathbf{y}}\| + \varepsilon} \tilde{\mathbf{y}} \quad (3.84)$$

de lo anterior se tiene que  $\dot{\mathbf{y}}_d$  y  $\mathbf{y}_d$  están acotadas y que  $\mathbf{y}$  debe estar acotada también.

De (3.31) se tiene que  $\dot{\mathbf{q}}$  está acotada. De (3.1)-(3.2) se tiene:

$$\mathbf{x}_R = \mathbf{f}(\mathbf{q}) = \frac{1}{\alpha_\lambda} \mathbf{R}_\theta \left\{ \mathbf{y} - \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} O_{C1} \\ O_{C2} \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

Naturalmente  $\mathbf{x}_R$  está acotada. Pero debido a que el robot no se encuentra en una singularidad,  $\mathbf{q}$  debe estar acotada también.

Además, se sabe que las variables:  $\mathbf{s}_r$ ,  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{z}$ ,  $\dot{\mathbf{z}}$ ,  $\Delta \mathbf{y}$ ,  $\Delta \dot{\mathbf{y}}$ ,  $\mathbf{y}_d$ ,  $\dot{\mathbf{y}}_d$ ,  $\mathbf{q}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\dot{\mathbf{y}}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\dot{\mathbf{y}}_r$ ,  $\tilde{\mathbf{y}}$ ,  $\dot{\tilde{\mathbf{y}}}$  están acotadas.

Esto se puede analizar rápidamente de la ecuación (3.84):

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{y}}_d &= -k_1 \dot{\mathbf{y}}_d - k_0 \frac{d}{dt} \left\{ \tilde{\mathbf{y}} \left[ (\tilde{\mathbf{y}}^T \tilde{\mathbf{y}})^{\frac{1}{2}} + \varepsilon \right]^{-1} \right\} \\ &= -k_1 \dot{\mathbf{y}}_d - k_0 \dot{\tilde{\mathbf{y}}} \left[ (\tilde{\mathbf{y}}^T \tilde{\mathbf{y}})^{\frac{1}{2}} + \varepsilon \right]^{-1} \\ &\quad + k_0 \tilde{\mathbf{y}} \left[ (\tilde{\mathbf{y}}^T \tilde{\mathbf{y}})^{\frac{1}{2}} + \varepsilon \right]^{-2} \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{y}}^T \tilde{\mathbf{y}})^{-\frac{1}{2}} 2 \tilde{\mathbf{y}}^T \dot{\tilde{\mathbf{y}}} \\ &= -k_1 \dot{\mathbf{y}}_d - k_0 \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{y}}\| + \varepsilon} \dot{\tilde{\mathbf{y}}} + k_0 \frac{\tilde{\mathbf{y}} (\tilde{\mathbf{y}}^T \tilde{\mathbf{y}})^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{y}}^T \dot{\tilde{\mathbf{y}}}}{\left[ (\tilde{\mathbf{y}}^T \tilde{\mathbf{y}})^{\frac{1}{2}} + \varepsilon \right]^2} \\ &= -k_1 \dot{\mathbf{y}}_d - k_0 \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{y}}\| + \varepsilon} \dot{\tilde{\mathbf{y}}} + k_0 \frac{\tilde{\mathbf{y}} \tilde{\mathbf{y}}^T \dot{\tilde{\mathbf{y}}}}{\|\tilde{\mathbf{y}}\| (\|\tilde{\mathbf{y}}\| + \varepsilon)^2} \end{aligned} \quad (3.86)$$



Escribiéndolo con las normas:

$$\begin{aligned}\|\ddot{\mathbf{y}}_d\| &\leq k_1 \|\dot{\mathbf{y}}_d\| + k_0 \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{y}}\| + \varepsilon} \|\dot{\tilde{\mathbf{y}}}\| + k_0 \frac{\|\tilde{\mathbf{y}}\| \|\dot{\tilde{\mathbf{y}}}\|}{\|\tilde{\mathbf{y}}\| (\|\tilde{\mathbf{y}}\| + \varepsilon)^2} \\ &= k_1 \|\dot{\mathbf{y}}_d\| + k_0 \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{y}}\| + \varepsilon} \|\dot{\tilde{\mathbf{y}}}\| + k_0 \frac{\|\tilde{\mathbf{y}}\| \|\dot{\tilde{\mathbf{y}}}\|}{(\|\tilde{\mathbf{y}}\| + \varepsilon)^2}\end{aligned}\quad (3.87)$$

Desde que  $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_f$  y  $\dot{\tilde{\mathbf{y}}} = \dot{\mathbf{y}}$  están acotadas, entonces  $\ddot{\mathbf{y}}_d$  está acotada.

Ahora, de (3.32), también  $\dot{\mathbf{q}}_r$  está acotada. De hecho se tiene:

$$\ddot{\mathbf{q}}_r = \frac{1}{\alpha_\lambda} \dot{\mathbf{J}}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{R}_\theta \dot{\mathbf{y}}_r + \frac{1}{\alpha_\lambda} \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{R}_\theta \ddot{\mathbf{y}}_r; \quad \dot{\mathbf{J}}^{-1}(\mathbf{q}) = \frac{d}{dt} \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}) \quad (3.88)$$

Como  $\dot{\mathbf{q}}$  está acotada  $\dot{\mathbf{J}}^{-1}(\mathbf{q})$  debe estar acotada. Por otro lado, de (3.15):

$$\ddot{\mathbf{y}}_r = \ddot{\mathbf{y}}_d - \Lambda_y(\dot{\hat{\mathbf{y}}} - \dot{\mathbf{y}}_d) - k \mathbf{s}_d - \mathbf{K}_\gamma \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (3.89)$$

Se acaba de ver que  $\ddot{\mathbf{y}}_r$  esta acotada, y desde que la ecuación (3.20) se ve que  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  está acotada, se puede llegar a la conclusión de que  $\ddot{\mathbf{y}}_r$  y  $\ddot{\mathbf{q}}_r$  están acotadas. Esto significa que  $\mathbf{y}_a$  en (3.39) está acotada. Pero de (3.54)  $\dot{\mathbf{s}}_r$  está acotada. De (3.53)  $\boldsymbol{\tau}$  está acotada y de (3.37)  $\ddot{\mathbf{q}}$  está acotada.

De la ecuación (3.5) se tiene:

$$\ddot{\mathbf{y}} = \alpha_\lambda \mathbf{R}_\theta \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \alpha_\lambda \mathbf{R}_\theta \mathbf{J}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} \quad (3.90)$$

de tal manera que  $\ddot{\mathbf{y}}$  está acotada. De (3.30)  $\dot{\mathbf{r}}$  está acotada. Finalmente, de (3.34)  $\dot{\mathbf{s}}_y = \dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{y}}_r$  está acotada y de (3.67)  $\mathbf{s}_i$  está acotada puesto que  $\ddot{\mathbf{z}}$  está acotada también.

### 3.2.3. El estado está acotado mediante $\|\mathbf{x}\| \leq \mathbf{x}_{\text{máx}}$

En segundo tercer se tiene que demostrar que si se seleccionan apropiadamente las ganancias  $\mathbf{K}_p$ ,  $\mathbf{K}_\beta$ ,  $\mathbf{K}_\gamma$ ,  $k_d$ ,  $k$ ,  $\Lambda_y$  y  $\Lambda_z$ ; la ley de control mostrada en (3.24) garantiza que :

$$\|\mathbf{x}\| \leq \mathbf{x}_{\text{máx}}$$

Para demostrar lo anterior se define una región  $\mathbb{D}$ :

$$\mathbb{D} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n} \mid \|\mathbf{x}\| \leq \mathbf{x}_{\text{máx}} \} \quad (3.91)$$

y se define:

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{s}_r^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{s}_r + \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \mathbf{r} = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} \quad (3.92)$$

por la Propiedad 1 del Apéndice B.1 se satisface lo siguiente:

$$\alpha_1(\|\mathbf{x}\|) = \lambda_1 \|\mathbf{x}\|^2 \leq V(x) \leq \lambda_2 \|\mathbf{x}\|^2 = \alpha_2(\|\mathbf{x}\|) \quad (3.93)$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \min_{\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \lambda_{\text{mín}}(\mathbf{M}(\mathbf{q})) \quad (3.94)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \max_{\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \lambda_{\text{máx}}(\mathbf{M}(\mathbf{q})) \quad (3.95)$$

Al multiplicar la ecuación (3.54) por  $\mathbf{s}_r^T$  y despejando  $\mathbf{s}_r^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{s}}_r$  se tiene lo siguiente:

$$\mathbf{s}_r^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{s}}_r = -\mathbf{s}_r^T \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{s}_r - \mathbf{s}_r^T \mathbf{K}_{\text{DP}} \mathbf{s}_r + \mathbf{s}_r^T \mathbf{K}_p \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{R}_{\theta'} \mathbf{r} - \mathbf{s}_r^T \mathbf{y}_a$$

de igual forma de la ecuación (3.55) se obtiene:

$$\mathbf{s}_r^T \dot{\mathbf{r}} = -k_d \mathbf{s}_r^T \mathbf{r} + \mathbf{s}_r^T (\Delta \dot{\mathbf{y}} + \Lambda_y \dot{\mathbf{y}} + k \mathbf{s}_d)$$

y por la Propiedad 2 del Apéndice B.1 se tiene que  $\frac{1}{2} \mathbf{s}_r^T \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) \mathbf{s}_r - \mathbf{s}_r^T \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{s}_r = 0$ .

Si se deriva la ecuación (3.92) y además se sustituyen los valores anteriores se tiene:

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \frac{1}{2} \mathbf{s}_r^T \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) \mathbf{s}_r + \mathbf{s}_r^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{s}}_r + \mathbf{r}^T \dot{\mathbf{r}} \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{s}_r^T \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) \mathbf{s}_r - \mathbf{s}_r^T \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{s}_r - \mathbf{s}_r^T \mathbf{K}_{DP} \mathbf{s}_r \\
&\quad + \mathbf{s}_r^T \mathbf{K}_p \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{R}_{\theta'} \mathbf{r} - \mathbf{s}_r^T \mathbf{y}_a - k_d \mathbf{r}^T \mathbf{r} + \mathbf{r}^T (\Delta \ddot{\mathbf{y}} + \Lambda_y \dot{\mathbf{y}} + k \mathbf{s}_d) \\
&= - \begin{bmatrix} \mathbf{s}_r^T & \mathbf{r}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D} + \bar{\mathbf{K}}_p & 0 \\ 0 & k_d \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_r \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} + \mathbf{s}_r^T \mathbf{K}_p \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{R}_{\theta'} \mathbf{r} \\
&\quad - \mathbf{s}_r^T \mathbf{y}_a + \mathbf{r}^T (\Delta \ddot{\mathbf{y}} + \Lambda_y \dot{\mathbf{y}} + k \mathbf{s}_d)
\end{aligned} \tag{3.96}$$

Considerando que todas las variables son acotadas, se define:

$$c_1 = \max_{\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{R}_{\theta'}\| \tag{3.97}$$

$$c_2 = \max_{\forall \mathbf{x} \in \mathbb{D}} \|\mathbf{y}_a\| \tag{3.98}$$

$$c_3 = \max_{\forall \mathbf{x} \in \mathbb{D}} \|\Delta \ddot{\mathbf{y}} + \Lambda_y \dot{\mathbf{y}} + k \mathbf{s}_d\| \tag{3.99}$$

y de (3.96) se tiene:

$$\begin{aligned}
\dot{V} &\leq -\lambda_{\min}(\bar{\mathbf{K}}_p) \|\mathbf{s}_r\|^2 - k_d \|\mathbf{r}\|^2 \\
&\quad + \lambda_{\max}(\mathbf{K}_p) c_1 \|\mathbf{s}_r\| \|\mathbf{r}\| + \|\mathbf{x}\| c_2 + \|\mathbf{x}\| c_3
\end{aligned} \tag{3.100}$$

Al elegir las ganancias de tal modo que se cumpla:

$$\lambda_{\min}(\bar{\mathbf{K}}_p) \geq \delta + 1 + \frac{c_2 + c_3}{\mu} \tag{3.101}$$

$$k_d \geq \delta + \frac{\lambda_{\max}^2(\mathbf{K}_p) c_1^2}{4} + \frac{c_2 + c_3}{\mu} \tag{3.102}$$

con  $\delta, \mu > 0$ . Al sustituir (3.101)-(3.102) en la ecuación (3.100) y tomando en cuenta la igualdad  $\|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{s}_r\|^2 + \|\mathbf{r}\|^2$  se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\delta \|\mathbf{s}_r\|^2 - \delta \|\mathbf{r}\|^2 \\ & -(\|\mathbf{s}_r\|^2 - \lambda_{\max}(\mathbf{K}_p) c_1 \|\mathbf{s}_r\| \|\mathbf{r}\| + \frac{\lambda_{\max}^2(\mathbf{K}_p) c_1^2}{4} \|\mathbf{r}\|^2) \\ & -2 \frac{c_2 + c_3}{\mu} \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{x}\| (c_2 + c_3) \end{aligned} \quad (3.103)$$

De este modo:

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\delta \|\mathbf{x}\|^2 - (\|\mathbf{s}_r\| - \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{K}_p) c_1}{2} \|\mathbf{r}\|)^2 \\ & -(c_2 + c_3) (\frac{1}{\mu} \|\mathbf{x}\| - 1) \|\mathbf{x}\| \end{aligned} \quad (3.104)$$

Si

$$\frac{1}{\mu} \|\mathbf{x}\| - 1 \geq 0 \quad \text{ó} \quad \|\mathbf{x}\| \geq \mu \quad (3.105)$$

entonces:

$$\dot{V} \leq -\delta \|\mathbf{x}\|^2 \triangleq W_3(\mathbf{x}) \quad (3.106)$$

Finalmente, se tiene:

$$\lambda_1 \|\mathbf{x}\|^2 \leq V(x) \leq V(t_0) \leq \lambda_2 \|\mathbf{x}(t_0)\|^2 \quad (3.107)$$

$$\Rightarrow \|\mathbf{x}\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \|\mathbf{x}(t_0)\| \leq \mathbf{x}_{\max} \quad (3.108)$$

$$\Rightarrow \|\mathbf{x}(t_0)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \mathbf{x}_{\max} \quad (3.109)$$

y se cumple que:

$$\mu \leq \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \mathbf{x}_{\max} \quad (3.110)$$

así, se demuestra que  $\|\mathbf{x}\| \leq \mathbf{x}_{\max} \forall t$ .

### 3.2.4. Los errores de seguimiento y de observación tienden a cero en tiempo finito

Al analizar  $\mathbf{s}_1$ . De la ecuación (3.68), se tiene:

$$\dot{\mathbf{s}}_1 = -\mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\sigma} + \dot{\mathbf{s}}_i \quad (3.111)$$

ó  $\dot{\mathbf{s}}_1 = -\mathbf{K}_\gamma \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{\mathbf{s}}_i$  al sustituir el valor de  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  de la ecuación (3.20) se tiene:

$$\dot{\mathbf{s}}_1 = -\mathbf{K}_\gamma \mathbf{K}_\beta \mathbf{s}_1 - \mathbf{K}_\gamma \text{sign}(\mathbf{s}_1) + \dot{\mathbf{s}}_i \quad (3.112)$$

Si se propone una función de Lyapunov:

$$V_1 = \frac{1}{2} \mathbf{s}_1^T \mathbf{s}_1 = \frac{1}{2} \|\mathbf{s}_1\|^2 \quad (3.113)$$

su derivada está dada por la ecuación

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \mathbf{s}_1^T \dot{\mathbf{s}}_1 = -\mathbf{s}_1^T \mathbf{K}_\gamma \mathbf{K}_\beta \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_1^T \mathbf{K}_\gamma \text{sign}(\mathbf{s}_1) + \mathbf{s}_1^T \dot{\mathbf{s}}_i \\ &\leq -\lambda_{\min}(\mathbf{K}_\gamma \mathbf{K}_\beta) \|\mathbf{s}_1\|^2 - \mathbf{s}_1^T \mathbf{K}_\gamma \text{sign}(\mathbf{s}_1) + \|\mathbf{s}_1\| \mathbf{s}_{ip \text{ máx}} \\ &\leq -\lambda_{\min}(\mathbf{K}_\gamma) \|\mathbf{s}_1\| + \|\mathbf{s}_1\| \mathbf{s}_{ip \text{ máx}} \end{aligned} \quad (3.114)$$

con  $|\mathbf{s}_1| = |s_{11}| + \dots + |s_{1n}|$ . Pero además se tiene:

$$\|\mathbf{s}_1\| = \sqrt{|s_{11}|^2 + \dots + |s_{1n}|^2} \leq |s_{11}| + \dots + |s_{1n}| = |\mathbf{s}_1| \quad (3.115)$$

al sustituir la ecuación (3.101) en la ecuación (3.102) y tomar en cuenta que  $\|\mathbf{s}_1\| \leq |\mathbf{s}_1|$  se tiene:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{s}_1\| \frac{d}{dt} \|\mathbf{s}_1\| &\leq -\lambda_{\min}(\mathbf{K}_\gamma) \|\mathbf{s}_1\| + \|\mathbf{s}_1\| \mathbf{s}_{ip \text{ máx}} \\ &\leq -(\lambda_{\min}(\mathbf{K}_\gamma) - \mathbf{s}_{ip \text{ máx}}) \|\mathbf{s}_1\| \end{aligned} \quad (3.116)$$

con  $\|\mathbf{s}_1\| < \mathbf{s}_{ip \text{ máx}} = \text{máx} \|\dot{\mathbf{s}}_1\| < \infty$ . Lo siguiente es definir:

$$\theta \triangleq \lambda_{\min}(\mathbf{K}_\gamma) - \mathbf{s}_{ip \text{ máx}} \quad (3.117)$$

Si se toma en cuenta la ecuación (3.80):

$$\|\boldsymbol{\sigma}\| \geq \mu \triangleq \frac{2 [\lambda_{\text{máx}}(\mathbf{K}_\beta) \mathbf{s}_{ip \text{ máx}} + \sqrt{n}]}{\lambda_{\text{mín}}(\mathbf{K}_\beta \mathbf{K}_\gamma)}$$

se observa que al hacer  $\mathbf{K}_\gamma = k_\gamma \mathbf{I}$  y  $\mathbf{K}_\beta = k_\beta \mathbf{I}$  de tal forma que:

$$k_\gamma \|\boldsymbol{\sigma}\| \leq k_\gamma 2 \frac{k_\beta \mathbf{s}_{ip \text{ máx}} + \sqrt{n}}{k_\beta k_\gamma} = 2 \mathbf{s}_{ip \text{ máx}} + \frac{2 \sqrt{n}}{k_\beta} \quad (3.118)$$

lo anterior significa que se puede hacer  $k_\gamma$  lo suficientemente grande tal que  $\theta > 0$  para obtener:

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{s}_1\| \leq -\theta \quad (3.119)$$

además se sabe que se puede tener  $\|\mathbf{s}_1(t)\| \equiv 0$  en el tiempo

$$tr \leq \frac{\|\mathbf{s}_1(0)\|}{\theta} \quad (3.120)$$

Si  $\mathbf{s}_1 = 0$  de las ecuaciones (3.16)-(3.18) se tiene:

$$\mathbf{s} = \dot{\hat{\mathbf{y}}} - \dot{\mathbf{y}}_d + \boldsymbol{\Lambda}_y (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_d) = \dot{\hat{\mathbf{y}}} + \boldsymbol{\Lambda}_y \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{s}(0) e^{-kt} \quad (3.121)$$

$$\implies \dot{\hat{\mathbf{y}}}, \bar{\mathbf{y}} \rightarrow 0 \quad (3.122)$$

ó

$$\hat{\mathbf{y}} \rightarrow \mathbf{y}_d \quad \text{y} \quad \dot{\hat{\mathbf{y}}} \rightarrow \dot{\mathbf{y}}_d \quad (3.123)$$

Pero, si se hace  $\hat{\mathbf{y}} \equiv \mathbf{y}_d$  y  $\dot{\hat{\mathbf{y}}} \equiv \dot{\mathbf{y}}_d$  y se deriva la ecuación (3.10) entonces se tiene:

$$\Delta \dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{y}}_d = \dot{\mathbf{y}} - \dot{\hat{\mathbf{y}}} = \dot{\mathbf{z}} \quad (3.124)$$

$$\Delta \mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_d = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{z} \quad (3.125)$$

De la ecuación (3.29) y si además se hace  $\dot{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{y}} = 0$  para  $t$  suficientemente grande se tiene:

$$\mathbf{r} - k_d \int_0^t \mathbf{r} dt = \dot{\mathbf{z}} \quad (3.126)$$

ó

$$\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{\Lambda}_z \dot{\mathbf{z}} + k_d \dot{\mathbf{z}} + k_d \mathbf{\Lambda}_z \mathbf{z} = \ddot{\mathbf{z}} \quad (3.127)$$

$$\Rightarrow (\mathbf{\Lambda}_z + k_d \mathbf{I}) \dot{\mathbf{z}} + k_d \mathbf{\Lambda}_z \mathbf{z} = 0 \quad (3.128)$$

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{z}}, \mathbf{z} \rightarrow 0 \quad (3.129)$$

Además, de las ecuaciones (3.127)-(3.128) se tiene también:

$$\Delta \dot{\mathbf{y}}, \Delta \mathbf{y} \rightarrow 0 \quad (3.130)$$

Con lo que se concluye la demostración.

# Capítulo 4

## Resultados de simulación

Se realizó la simulación del sistema utilizando la herramienta de Simulink de MatLab, para realizar la simulación es necesario el conocimiento de las ecuaciones de la ley de control que se muestran en la sección 3.1, dentro de las ecuaciones mostradas en la sección 3.2 se encuentran el cálculo del modelo cinemático directo y Jacobiano geométrico (Apéndice A.2), el modelado de la cámara con sus respectivos parámetros (Capítulo 2), además, de el modelo dinámico del robot (Apéndice A.1).

La Figura 4.1 muestra un esquema de la simulación

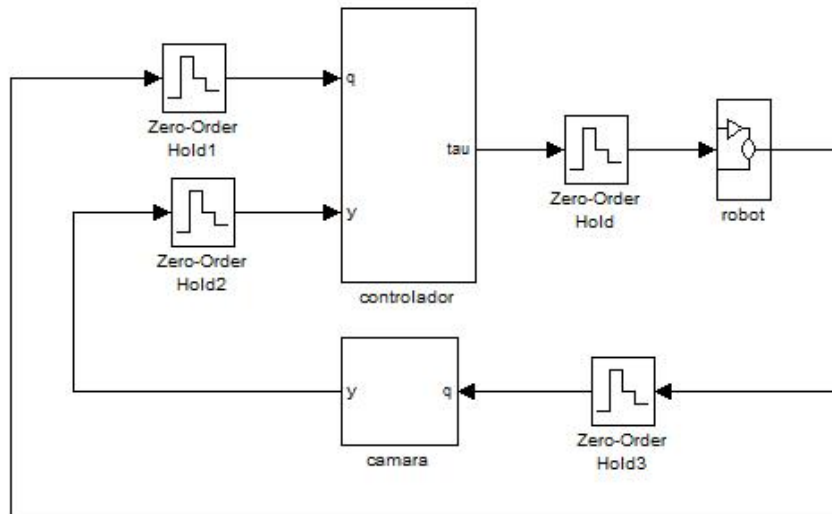


Figura 4.1: Diagrama a bloques de simulación.



a la salida del robot se tienen las coordenadas articulares  $\mathbf{q}$  que entra al modelo de la cámara (previamente discretizada por el periodo de muestreo de la cámara  $T_{ca}$ ), pasa al modelo cinemático directo para obtener  $\mathbf{x}_R$  y se obtiene la posición del efector final en el marco de referencia de imagen  $\mathbf{y}$  (coordenadas de imagen), las coordenadas articulares  $\mathbf{q}$  junto con las coordenadas de imagen  $\mathbf{y}$  son las entradas del controlador (previamente discretizadas por el periodo de muestreo del controlador  $T$ ) y la salida es la señal de control  $\boldsymbol{\tau}$  que también se discretiza por el periodo de muestreo del controlador  $T$  y es la entrada al robot. El método utilizado para discretizar fue ZOH( Zero Order Hold).

Para obtener los resultados de la simulación ahora solo se deben introducir los parámetros necesarios y realizar la ejecución, para los parámetros de la velocidad deseada (campo de velocidad) que está dada por la ecuación (3.7):

$$\dot{\mathbf{y}}_d = \mathbf{v}(\mathbf{y}) = -\frac{k_0}{\|\tilde{\mathbf{y}}\| + \varepsilon} \tilde{\mathbf{y}} - k_1(\mathbf{y}_d - \mathbf{y}_f)$$

las ganancias  $k_0$ ,  $k_1$  y  $\varepsilon$  fueron elegidos de forma arbitraria tomando en cuenta que se quiere obtener una trayectoria del efector final suave, de igual forma el punto inicial del robot  $\mathbf{y}_i$  y el punto final  $\mathbf{y}_f$  son dados por el usuario de forma arbitraria; así, los parámetros son los siguientes:

$k_0 = 0.1$	$\mathbf{y}_d = \begin{bmatrix} 339 \\ 431 \end{bmatrix}$	$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_f$
$k_1 = 2$	$\mathbf{y}_f = \begin{bmatrix} 400 \\ 230 \end{bmatrix}$	$\ \tilde{\mathbf{y}}\  = \sqrt{\tilde{\mathbf{y}}^T \tilde{\mathbf{y}}}$
$\varepsilon = 0.1$		

Tabla 4.1: Parámetros de la velocidad deseada.

de las ecuaciones (3.6) y (3.9) se observa que  $\mathbf{y}_d(0) = \mathbf{y}_i = \mathbf{y}(0)$ , es decir, la posición inicial del robot  $\mathbf{y}_i$  es igual a la trayectoria deseada  $\mathbf{y}_d$  en el tiempo cero.

Para obtener los valores de los parámetros relacionados con el sistema de visión se pueden utilizar la posición del efector final en el marco de referencia de imagen (coordenadas de imagen)  $\mathbf{y}$ , dada por la ecuación (3.2)

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \frac{\alpha\lambda}{O_{C3} - \lambda} \mathbf{R}_\theta \left\{ \mathbf{x}_R - \begin{bmatrix} O_{C1} \\ O_{C2} \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \\ &\triangleq \alpha_\lambda \mathbf{R}_\theta \left\{ \mathbf{x}_R - \begin{bmatrix} O_{C1} \\ O_{C2} \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

con la matriz de rotación:

$$\mathbf{R}_\theta = \begin{bmatrix} C_\theta & S_\theta \\ S_\theta & -C_\theta \end{bmatrix}$$

así, los valores de los parámetros relacionados con el sistema de visión son:

$\alpha = 72000 \text{ pixeles}/m$	$O_{C1} = 0.25 \text{ m}$	$u_0 = 250 \text{ pixeles}$
$\lambda = 0.008 \text{ m}$	$O_{C2} = 0 \text{ m}$	$v_0 = 230 \text{ pixeles}$
$\theta \approx 0$	$O_{C3} = 1.3 \text{ m}$	

Tabla 4.2: Parámetros del sistema de visión.

y siendo  $\mathbf{x}_R$  la cinemática directa.

Los valores del periodo de muestreo de la cámara  $T_{ca}$  y el periodo de muestreo del controlador  $T$  se dan en la Tabla 4.3:

$T_{ca} = \frac{1}{33} \text{ s}$	$T = 0.005 \text{ s}$
-----------------------------------	-----------------------

Tabla 4.3: Periodos de muestreo.

Los parámetros del controlador se obtienen mediante un proceso de sintonización y son los siguientes:

$\mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} 0.055 & 0 \\ 0 & 0.012 \end{bmatrix}$	$\mathbf{\Lambda}_y = \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$	$\mathbf{\Lambda}_z = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$
$\mathbf{K}_\beta = \begin{bmatrix} 0.46 & 0 \\ 0 & 0.46 \end{bmatrix}$	$\mathbf{K}_\gamma = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$	$k = 0.1$ $k_d = 200$

Tabla 4.4: Parámetros del controlador.

Es importante aclarar que para realizar experimentos reales solo son necesarias las ecuaciones que definen al controlador y la información sobre las coordenadas articulares  $\mathbf{q}$  la cual se requiere para el cálculo del Jacobiano geométrico.

La Figura 4.2 muestra la trayectoria del efector final generada por el control iniciando en el punto  $[339, -431]$  y finalizando en el punto  $[400, -230]$ :

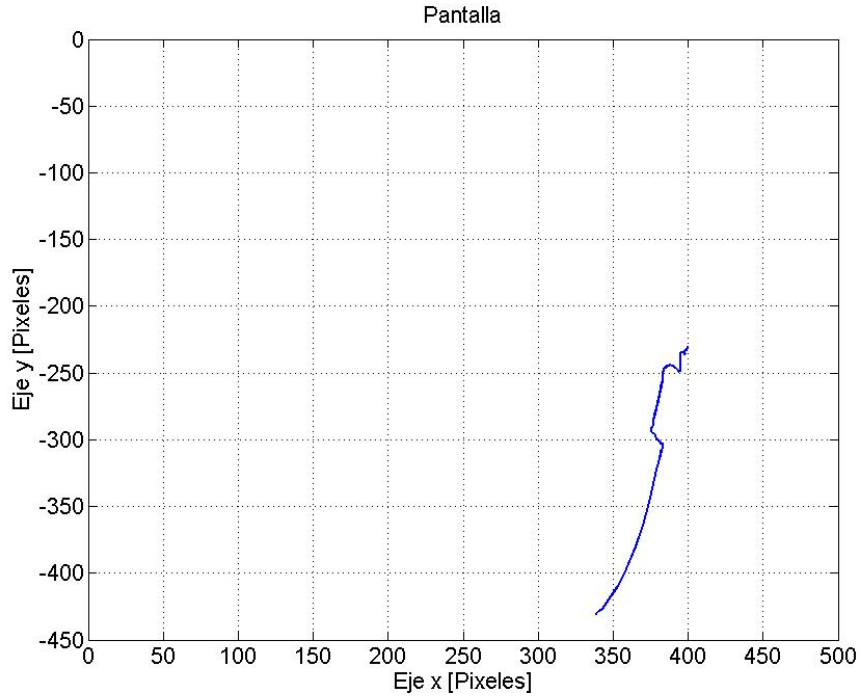


Figura 4.2: Trayectoria del efector final.

El proceso para obtener la trayectoria comienza cuando se inicializa la simulación, con la posición deseada y el punto final se puede calcular la velocidad deseada determinada por el campo vectorial definido por la ecuación (3.7); cuando se alcanza la coordenada deseada se actualiza con el siguiente punto deseado y así sucesivamente hasta lograr cubrir la trayectoria completa. La trayectoria, el seguimiento y convergencia pueden mejorarse si se hace una mejor sintonización de los parámetros del controlador, así como también las ganancias del campo de velocidad.

Las Figuras 4.3 y 4.5, muestran el seguimiento de la trayectoria deseada en color azul; así como la trayectoria real producida por el control en color rojo y la trayectoria obtenida por el observador en color verde, en función del tiempo para los ejes  $x$  y  $y$  respectivamente.

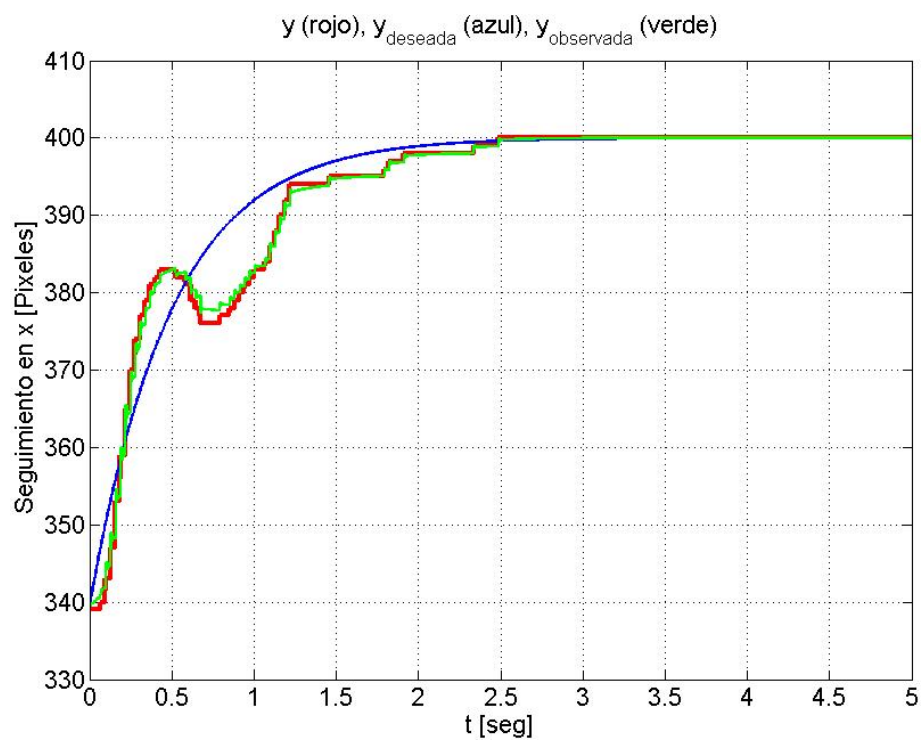


Figura 4.3: Trayectoria real, deseada y observada en eje X.

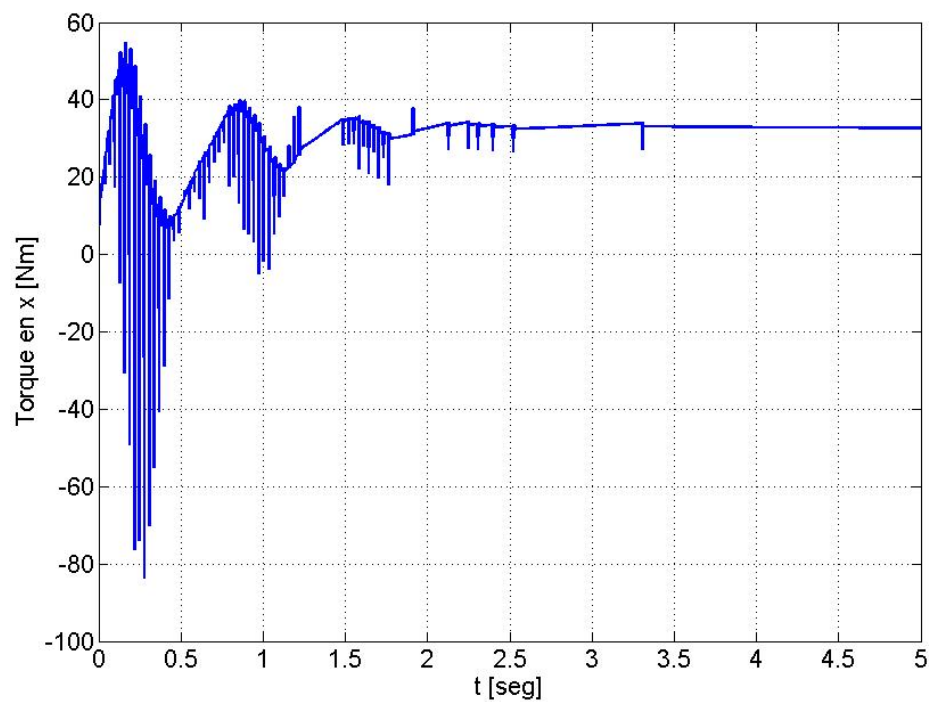


Figura 4.4: Pares eje X.

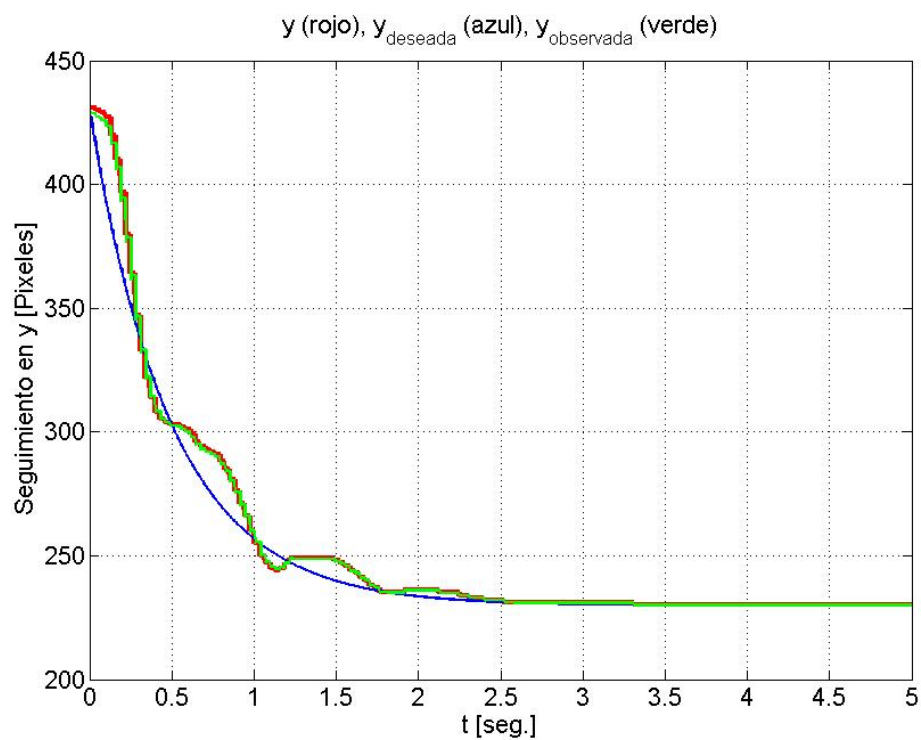


Figura 4.5: Trayectoria real, deseada y observada en eje Y.

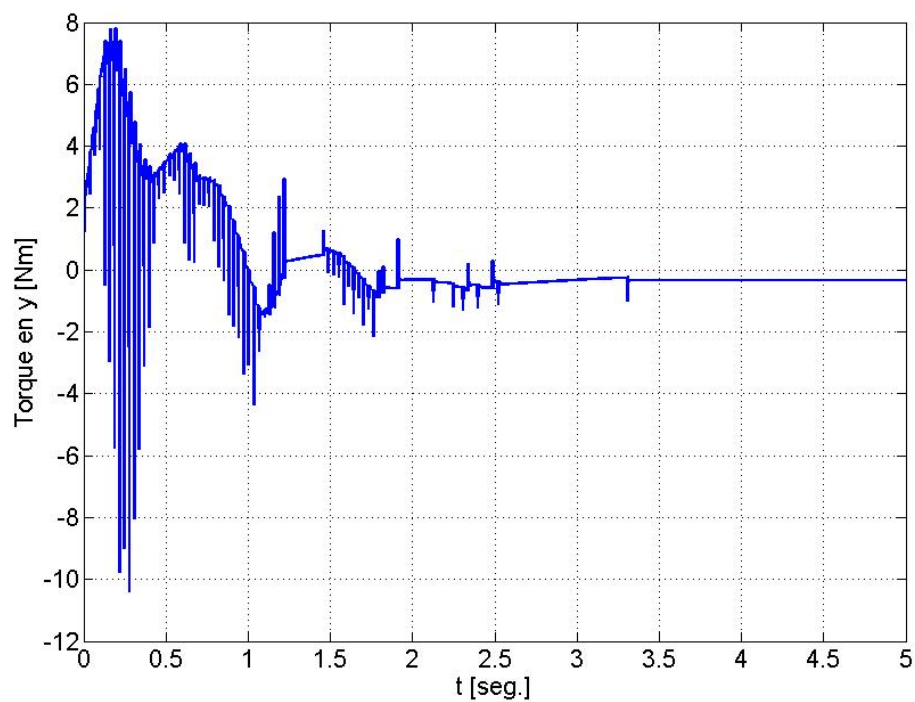


Figura 4.6: Pares eje Y.

Las Figuras 4.4 y 4.6, muestran los pares aplicados en cada articulación en función del tiempo para los ejes  $x$  y  $y$  respectivamente.

En las Figuras 4.2 y 4.4 se puede observar como el dispositivo mecánico alcanza cada uno de los puntos que forman parte de la secuencia que fue definida por el operador; como se puede observar en las gráficas el tiempo de respuesta del dispositivo mecánico es bueno al emplear aproximadamente 3.5 segundos en llegar al final de la trayectoria.

# Capítulo 5

## Conclusiones

El presente trabajo de tesis se introduce un control servo visual de robots planares (se asume que el robot solo se puede mover en el plano paralelo al marco de referencia de la cámara) utilizando campos de velocidad basado en coordenadas de imagen; el objetivo del control consiste en controlar la posición del efector final del robot de un punto inicial a un punto final, el control genera la trayectoria entre ambos puntos. La ley de control permite garantizar la estabilidad de los puntos de la imagen que corresponden a la trayectoria y se prueba que los errores de posición en la imagen y de observación de velocidad en la imagen tienden a cero.

Se presenta la correspondencia entre el espacio de la cámara y el de operación del robot, así como la adaptación del algoritmo de control en coordenadas cartesianas a coordenadas de imagen para la retroalimentación visual.

Se prueba que debido a la adaptación del algoritmo a coordenadas de imagen, el control servo visual presentado no requiere del modelo dinámico del robot ni del cálculo del modelo cinemático inverso, sólo necesita la información de las posiciones articulares; los desconocimientos paramétricos se obtienen mediante el algoritmo de control.

Las gráficas mostradas en la simulación muestran la trayectoria del efector final generada por el controlador (Figura 4.1) así como las gráficas del seguimiento y pares



en ambos ejes, en dichas gráficas se puede apreciar que la trayectoria si va del punto inicial al punto final dados por el usuario así como los errores de seguimiento y de observación tienden a cero en tiempo finito.

# Apéndice A

## Robot planar utilizado

En este apéndice se resumen algunos tópicos sobre el robot de 2 grados de libertad que se ha utilizado como *robot prototipo* para este trabajo. El robot considerado puede verse en la Figura A.1

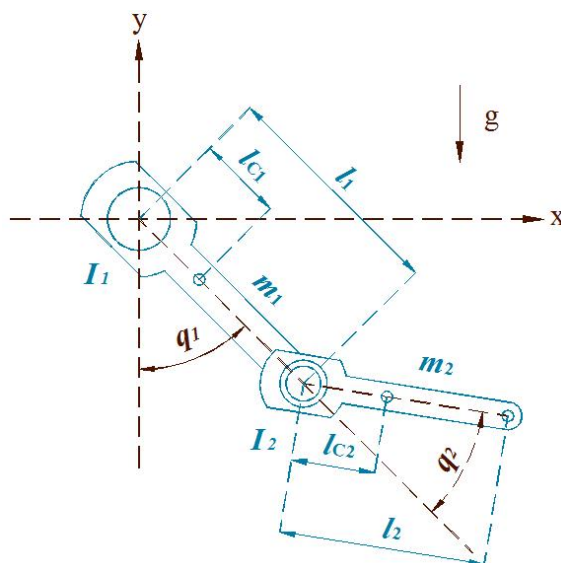


Figura A.1: Esquema del robot manipulador utilizado.

este consiste de 2 eslabones rígidos de longitudes  $l_1$  y  $l_2$ , y masas  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente; conectados a través de articulaciones rotacionales.

El significado de las diversas constantes así como el de sus valores numéricos están

resumidos en la Tabla A.1

Descripción	Notación	Valor	Unidades
Longitud eslabón 1	$l_1$	0.450	m
Longitud eslabón 2	$l_2$	0.450	m
Distancia al centro de masa (eslabón 1)	$l_{c1}$	0.091	m
Distancia al centro de masa (eslabón 2)	$l_{c2}$	0.048	m
Masa eslabón 1	$m_1$	23.902	kg
Masa eslabón 2	$m_2$	3.880	kg
Inercia eslabón 1 respecto al centro de masa	$I_1$	1.266	kg · m <sup>2</sup>
Inercia eslabón 2 respecto al centro de masa	$I_2$	0.093	kg · m <sup>2</sup>
Aceleración de la gravedad	$g$	9.81	m / s <sup>2</sup>
Coefficiente de fricción de Coulomb 1 para $\dot{q}_1 > 0$	$f_{c1}$	7.17	N · m
Coefficiente de fricción de Coulomb 1 para $\dot{q}_1 < 0$	$f_{c1}$	8.049	N · m
Coefficiente de fricción de Coulomb 2	$f_{c2}$	1.734	N · m
Coefficiente de fricción viscosa 1	$f_{v1}$	2.288	N · m · s
Coefficiente de fricción viscosa 2	$f_{v2}$	0.175	N · m · s

Tabla A.1: Parámetros del robot manipulador.

Específicamente, se abordan los siguientes temas:

- Modelo dinámico.
- Modelo cinemático directo.
- Propiedades del modelo dinámico.

## A.1. Modelo dinámico

La dinámica de un robot manipulador de  $n$  articulaciones con fricción puede describirse utilizando las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange, resultando lo siguiente:

$$H(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + D \dot{q} + g(q) = \tau - \tau_p \quad (\text{A.1})$$

donde  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  son los vectores de coordenadas articulares, velocidades articulares y aceleraciones articulares, respectivamente;  $\mathbf{H}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de inercias que debe ser simétrica positiva definida,  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz centrífuga o de Coriolis,  $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$  es denominado vector gravitacional,  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz diagonal semipositiva definida que representa los coeficientes de fricción viscosa para cada articulación,  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de pares actuando en las articulaciones y  $\boldsymbol{\tau}_p \in \mathbb{R}^n$  puede verse como una perturbación que representa efectos de dinámica no modelada como es la fricción seca.

El modelo dinámico del robot en forma matricial es:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2 + 2 l_1 l_{c2} \cos(q_2)) + I_1 + I_2 & m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos(q_2)) + I_2 \\ m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2 & m_2 l_{c2}^2 + I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2}) \\
 & + \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2 & -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} m_1 g l_{c1} \sin(q_1) + m_2 g l_1 \sin(q_1) + m_2 g l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \\ m_2 g l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} f_{c1} \text{sign}(\dot{q}_1) + f_{v1} \dot{q}_1 \\ f_{c2} \text{sign}(\dot{q}_2) + f_{v2} \dot{q}_2 \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Donde  $f_c$  es el coeficiente de fricción de Coulomb y  $f_v$  es el coeficiente de fricción viscosa.

Al sustituir los valores correspondientes se obtiene:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 2.351 + 2 [0.084] \cos(q_2) & 0.102 + 0.084 \cos(q_2) \\ 0.102 + 0.084 \cos(q_2) & 0.102 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} \\
 + & \begin{bmatrix} -0.084 \sin(q_2) \dot{q}_2 & -0.084 \sin(q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ 0.084 \sin(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} 38.465 \sin(q_1) + 1.825 \sin(q_1 + q_2) \\ 1.825 \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} f_{c1} \operatorname{sign}(\dot{q}_1) + f_{v1} \dot{q}_1 \\ f_{c2} \operatorname{sign}(\dot{q}_2) + f_{v2} \dot{q}_2 \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 f_{c1} \operatorname{sign}(\dot{q}_1) + f_{v1} \dot{q}_1 &= 7.170 \operatorname{sign}(\dot{q}_1) + 2.288 \dot{q}_1 & \text{si } \dot{q} > 0 \\
 &= 8.049 \operatorname{sign}(\dot{q}_1) + 2.288 \dot{q}_1 & \text{si } \dot{q} < 0 \\
 f_{c2} \operatorname{sign}(\dot{q}_2) + f_{v2} \dot{q}_2 &= 1.734 \operatorname{sign}(\dot{q}_2) + 0.175 \dot{q}_2
 \end{aligned}$$

Para mantener la notación utilizada para el modelo (A.1), se define:

$$\mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} \triangleq \begin{bmatrix} f_{v1} & 0 \\ 0 & f_{v1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.288 & 0 \\ 0 & 0.175 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \tag{A.4}$$

y

$$\mathbf{f}_c(\dot{\mathbf{q}}) \triangleq \begin{bmatrix} f_{c1} \operatorname{sign}(\dot{q}_1) \\ f_{c2} \operatorname{sign}(\dot{q}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.170 \operatorname{sign}(\dot{q}_1) \\ 1.734 \operatorname{sign}(\dot{q}_2) \end{bmatrix} \tag{A.5}$$

## A.2. Modelo cinemático directo

El problema de la determinación del modelo cinemático directo del robot consiste en expresar la posición y orientación (si procede) de un marco de referencia sólidamente colocado en la parte terminal del último eslabón del robot referida al marco referencial de base en términos de las coordenadas articulares del robot. Por supuesto, se aprecia claramente que ambas coordenadas cartesianas  $x_{R1}$  y  $x_{R2}$  dependen de las coordenadas articulares  $q_1$  y  $q_2$ . La relación entre ellas define al modelo cinemático directo propiamente dicho:

$$\mathbf{x}_R = \begin{bmatrix} x_{R1} \\ x_{R2} \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{q})$$

donde  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Para el caso del robot de 2 g.d.l. utilizado en este trabajo el modelo cinemático directo viene dado por:

$$\begin{aligned} x_{R1} &= l_1 \operatorname{sen}(q_1) + l_2 \operatorname{sen}(q_1 + q_2) \\ x_{R2} &= -l_1 \operatorname{cos}(q_1) - l_2 \operatorname{cos}(q_1 + q_2) \end{aligned}$$

A partir del modelo cinemático directo puede obtenerse también la siguiente relación de velocidades:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_{R1} \\ \dot{x}_{R2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} l_1 \operatorname{cos}(q_1) + l_2 \operatorname{cos}(q_1 + q_2) & l_2 \operatorname{cos}(q_1 + q_2) \\ l_1 \operatorname{sen}(q_1) + l_2 \operatorname{sen}(q_1 + q_2) & l_2 \operatorname{sen}(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \\ &= J(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde  $J(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  recibe el nombre de matriz jacobiana o simplemente Jacobiano del robot (Kelly and Santibáñez 2003).

# Apéndice B

## Propiedades y teorema utilizado

En este apéndice se mencionan algunas propiedades del modelo dinámico (B.1) así como el Teorema 4.18 del libro Khalil (2002), pág. 172 (B.2).

### B.1. Propiedades del modelo dinámico

El modelo dinámico para robots de  $n$  grados de libertad caracterizado por la ecuación:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}$$

posee ciertas propiedades las cuales se muestran a continuación.

**Propiedad 1** Cada matriz  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$  satisface  $\lambda_h \|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{x} \leq \lambda_H \|\mathbf{x}\|^2 \forall \mathbf{q}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , donde:

$$\lambda_h \triangleq \min_{\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \lambda_{\min}(\mathbf{H}(\mathbf{q})),$$

$$\lambda_H \triangleq \max_{\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \lambda_{\max}(\mathbf{H}(\mathbf{q})),$$

y

$$0 < \lambda_h \leq \lambda_H < \infty$$

**Propiedad 2** Usando los símbolos de Christoffel para calcular  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , se tiene que la matriz  $\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  es antisimétrica. En forma análoga la matriz  $\frac{1}{2} \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  es antisimétrica, por lo anterior resulta cierto que:

$$\mathbf{x}^T \left[ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \mathbf{x} = 0$$

**Propiedad 3** Dados dos vectores cualesquiera  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  se tiene:

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y} = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{y})\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$$

**Propiedad 4** Los términos de Coriolis y de fuerzas centrífugas verifican

$$\|\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{x})\| \leq k_c \|\mathbf{x}\| \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

donde  $0 < k_c < \infty$ .

## B.2. Teorema 4.18 del libro Khalil (2002), pág. 172

### Teorema sobre acotamiento final y uniforme

Sea un sistema dinámico no autónomo dado por la ecuación:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}, t)$$

sea, además,  $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$  un dominio que contiene al origen,  $V$  una función diferenciable con derivadas continuas y  $B_r$  una bola de radio  $r$  en torno al origen. Si:

- La función  $V$  cumple

$$\alpha_1 (\|\mathbf{x}\|) \leq V(\mathbf{x}, t) \leq \alpha_2 (\|\mathbf{x}\|)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \cdot f(\mathbf{x}, t) \leq -W_3(\mathbf{x}), \quad \forall \|\mathbf{x}\| \geq \mu > 0$$

$\forall t \geq 0$  y  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{D}$ , donde  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  pertenecen a la clase  $\kappa$  y es  $W_3$  continua y definida positiva.



- $B_r \subset \mathbb{D}$ .
- $\mu < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$ .
- El estado inicial  $\mathbf{x}(t_0)$  satisface  $\|\mathbf{x}(t_0)\| \leq \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$ .

Entonces, existe  $T \geq 0$  tal que la solución del sistema cumple:

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \alpha_2^{-1}(\alpha_1(\mu)), \quad \forall t \geq t_0 + T$$

# Bibliografía

- Arteaga-Pérez, M. A., and R. Kelly. (2004). “Robot control without velocity measurements: New theory and experimental results.” *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 20(2):297–308.
- Arteaga-Pérez M.A, A. Castillo-Sánchez, and V. Parra-Vega. (2006). “Cartesian control of robots without dynamic model and observer design.” *Automatica* 42:473–480.
- Baeten J., H. Bruyninckx, and J. De Shutter. (1999). “Combining eye-in-hand visual servoing and force control in robotic tasks using task frame.” *Proc. IEEE International Conference on Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems*, pp. 141–146.
- Basri R., E. Rivlin, and I. Shimshoni. (1998). “Visual homing: surfing on the epipoles.” *In 6th International Conference on Computer Vision (ICCV -98), Bombay*, pp. 863–869.
- Cadenat V., R. Swain-Oropeza, P. Soueres, and M. Devy. (1999). “A controller to perform a visually guided tracking task in a cluttered environment.” *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS), Korea*.
- Espiau B., Chaumette F., and P. Rives. (1992). “A new approach to visual servoing in robotics.” *IEEE Transactions Robotics and Automation* 8:313–326.

- Flandin G., F. Chaumette, and E. Marchand. (2000). “Eye-in-hand/eye-to-hand cooperation for visual servoing.” *IEEE International Conference on Robotics and Automation, San Francisco* 3:2741–2746.
- Fujita M., H. Kawai, and M. W. Spong. (2002). “Passivity-based dynamic visual feedback control for three dimensional target tracking: Stability and L2-gain performance analysis.” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 1(11).
- Hill, J., and W.T. Park. (1979). “Real time control of a robot with a mobile camera.” *Proc. 9th ISIR. Washington D.C.*, pp. 233–246.
- Hutchinson S., Hager G. D., and P. I. Corke. (1996). “A tutorial on visual servo control.” *IEEE Transactions Robotics and Automation* 12:651–670.
- Kelly, R. (1996). “Robust asymptotically stable visual servoing of planar robots.” *IEEE Transactions Robotics and Automation* 12(5):759–766.
- Kelly, Rafael, and Victor Santibáñez. (2003). *Control de movimiento de robots manipuladores*. Madrid, España: Prentice Hall.
- Kelly R., J. Moreno, and R. Campa. (2004). “Visual servoing of planar robots via velocity fields.” *IEEE 43rd Conference on Decision and Control, Atlantis, Paradise Island, Bahamas*.
- Kelly R., R. Carelli, O. Nasisi B. Kuchen, and F. Reyes. (2000). “Stable visual servoing of camera-in-hand robotic systems.” *IEEE Transactions Mechatronics* 5(1):39–48.
- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear systems (3rd ed.)*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall.
- Maruyama, A., and M. Fujita. (1998). “Robust control for planar manipulators with image feature parameter potential.” *Advanced Robotics* 12(1):67–80.

- Pérez R. R, M. A. Arteaga-Pérez, R. Kelly, and A. Espinosa. (2008). “On output regulation of direct visual servoing via velocity fields.” *International Journal of Control*.
- Shirai, Y., and H. Inoue. (1973). “Guiding a robot by visual feedback in assembling task.” *Pattern Recognition* 5:99–108.
- Spong, M., and M. Vidyasagar. (1989). *Robot Dynamics and Control*. Wiley, New York.
- Sun, L., and C. Doeschner. (1999). “Visual servo dynamics for robots based on an extended kohonennetwork.” *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*.
- Tarbouriech, S., and P. Soueres. (2000). “Advanced control strategy for the visual servoing scheme.” *6th International IFAC Symposium on Robot Control (SYROCO'2000), Vienna (Australia)*.
- Weiss L. E., Sanderson, and Neuman. (1987). “Dinamic sensor-based control of robots with visual feedback.” *IEEE Journal of Robotics and Automation* 3:404–417.
- Wilson W. J., C. C. Williams Hulls, and G. S. Bell. (1996). “Relative end-effector control using cartesian position based visual servoing.” *IEEE Transactions Robotics and Automation* 12(5):684–696.