EJERCICIOS DE
PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Rafael Iriarte
Hugo Borrás

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS APLICADAS

1985

FACULTAD DE INGENIERIA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

RAFAEL IRIARTE
HUGO BORRAS

EJERCICIOS DE PROBABILIDAD Y ESTADISTICA

DIVISION DE CIENCIAS BASICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS APLICADAS

I N D I C E

P R O L O G O

Con base en la experiencia que se ha obtenido a lo largo de varios semestres de impartir la materia de PROBABILIDAD Y ESTADISTICA, se ha detectado la necesidad de que los alumnos cuenten con un cuaderno de ejercicios con el objeto de que puedan practicar y afianzar los conceptos teóricos vistos durante la clase.

El presente cuaderno de ejercicios trata de satisfacer las necesidades antes mencionadas, además de complementar a los apuntes de la materia.

Este cuaderno se elaboró acorde al programa vigente de la asignatura, consta de ocho temas, teniendo en cada uno de ellos problemas resueltos y propuestos. Recomendamos que el alumno estudie los problemas resueltos y posteriormente intente resolver los propuestos ya que de esta manera podrá adquirir habilidad para resolver otros problemas.

La elaboración de este material ha sido el resultado de recopilar una serie de problemas realizados por varios profesores de la materia, en especial de los profesores:

RAFAEL IRIARTE V. BALDERRAMA

HUGO E. BORRAS GARCIA

1985

Agradecemos las críticas que, en forma constructiva, nos hagan tanto profesores como alumnos con el objeto de mejorar este cuaderno.

FACULTAD DE INGENIERIA

DIVISION DE CIENCIAS BASICAS

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS APLICADAS

TEMA I

INTRODUCCION A LA TEORIA DE LA PROBABILIDAD

1. En una planta industrial laboran 150 empleados, los cuales están clasificados de la siguiente forma:

   Noventa tienen experiencia en la elaboración del producto A.

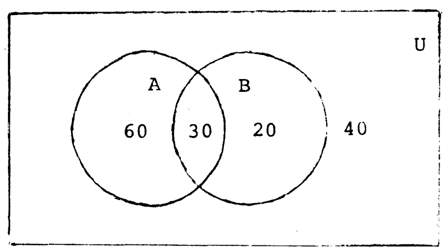
   Cincuenta tienen experiencia en la elaboración del producto B.

   Treinta tienen experiencia en la elaboración de ambos productos.

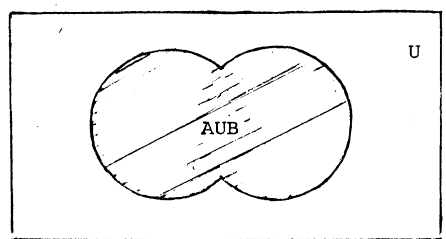
   ¿Cuál es el porcentaje de empleados que pueden elaborar uno, otro o ambos productos?

Solución:

Con ayuda del siguiente diagrama de Venn, el espacio muestral es:



y el porcentaje de empleados pedido es:



efectuando los cálculos

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

sustituyendo valores

$$P(A \cup B) = \frac{90}{150} + \frac{50}{150} - \frac{30}{150}$$

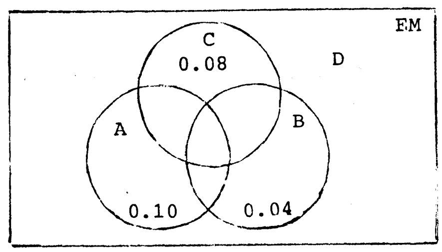
$$P(A \cup B) = 0.733$$

2. Por asentamientos del subsuelo, un conjunto de edificios recién construídos, pueden requerir durante el primer año alguna reparación, dependiendo del daño que sufran los inmuebles, éstos requerirán una reparación tipo A, tipo B, tipo C o alguna combinación de estos tipos. El ingeniero constructor estima que la probabilidad de que un edificio requiera una reparación tipo A es de 0.10, así mismo que requiera una reparación tipo B estima que es de 0.08, por último, la probabilidad de que se requiera una reparación tipo C es de 0.04.

Considerando independientes los tres tipos de reparaciones, ¿cuál es la probabilidad de que un edificio del conjunto requiera algún tipo de reparación?

Solución:

El espacio muestral del problema se puede definir con el siguiente diagrama de Venn:



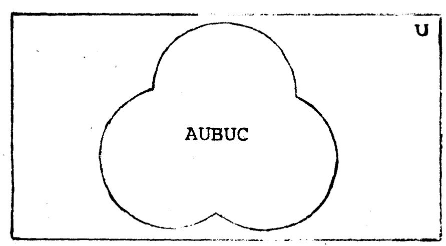
donde los eventos A, B y C, se definen como:

Un edificio del conjunto requiere reparación tipo A, B o C respectivamente.

y el evento D se define de la siguiente forma:

Los edificios no requieren reparación

La respuesta a la pregunta planteada es la probabilidad de la unión de los eventos A, B y C:



efectuando los cálculos:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) -$$
$$- P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

como los eventos A, B y C se consideran independientes, entonces:

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A)\ P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B)\ P(C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)\ P(B)\ P(C)$$

sustituyendo valores:

$$P(A \cup B \cup C) = 0.10 + 0.08 + 0.04 - (0.10)(0.08) -$$
$$- (0.10)(0.04) - (0.08)(0.04) +$$
$$+ (0.10)(0.08)(0.04)$$

efectuando operaciones

$$P(A \cup B \cup C) = 0.21$$

3. En el almacen de una fábrica se encuentra una caja conteniendo una gran cantidad de tornillos de tamaño A y de tamaño B, siendo los tornillos de tamaño A el doble que los de tamaño B. Si de la caja se extraen al azar tres tornillos.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que dos tornillos sean de tamaño B y el otro sea de tamaño A.

   b) Si en lugar de haber una gran cantidad de tornillos en la caja sólo existirán nueve, manteniendo la misma proporción de tamaños ¿Cuál sería la respuesta al inciso anterior?

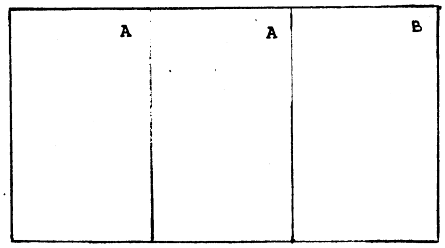
Solución:

Sea A el evento en el cual el tornillo es de tamaño A.

Sea B el evento en el cual el tornillo es de tamaño B.

Sea C el evento en el cual se extraen dos tornillos de tamaño B y uno de tamaño A.

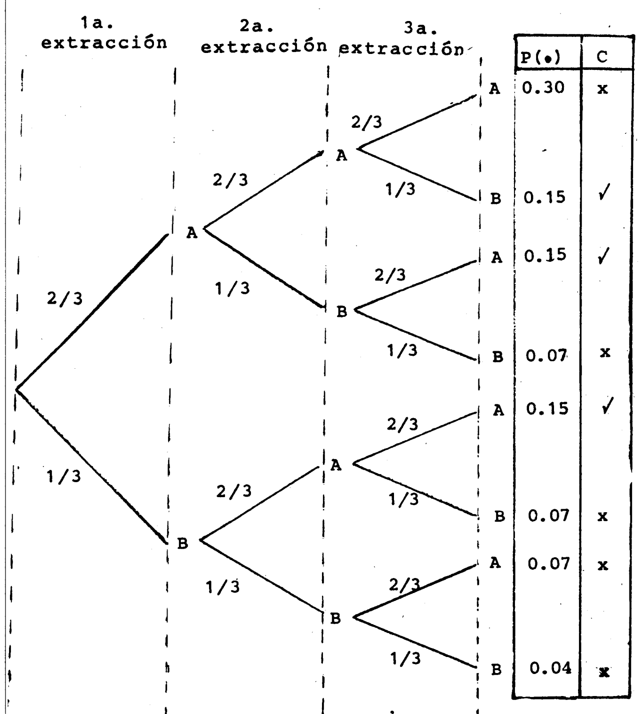
como A es el doble de B se puede representar el espacio muestral como



entonces, por la intepretación clásica de la probabilidad

$$P(A) = \frac{2}{3} \quad ; \quad P(B) = \frac{1}{3}$$

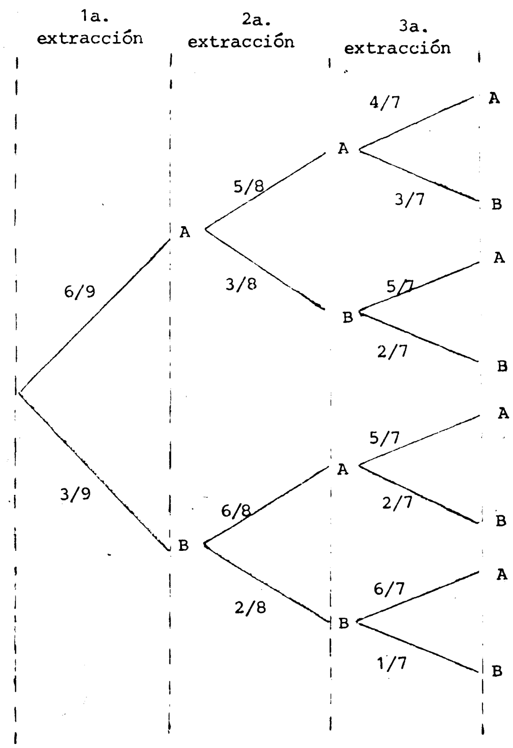
a) Con el siguiente diagrama de árbol se obtiene la probabilidad del evento C.



por lo tanto:

$$P(C) = 0.15 + 0.15 + 0.15 = 0.45$$

b) En este inciso las probabilidades de cada rama se modifican de la siguiente manera:



P(.)	C
0.24	x
0.18	✓
0.18	✓
0.07	x
0.18	✓
0.07	x
0.07	x
0.01	x

de igual manera:

$$P(C) = 0.18 + 0.18 + 0.18 = 0.54$$

4. Una compañía constructora participa en cinco concursos para la construcción de diferentes obras en beneficio de la comunidad. Si se considera que la probabilidad de que gane un concurso es de 0.25 y que cada concurso es independiente de los demás, encuentre la probabilidad de que la compañía gane por lo menos un concurso.

Solución:

Sea G_i el evento en el cual la compañía gana el concurso i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$).
Sea A1 el evento en el cual la compañía gana al menos un concurso.

La probabilidad de que gane al menos un concurso es:

$$P(A1) = P(G_1) + P(G_2) + P(G_3) + P(G_4) + P(G_5)$$

Calcular esta probabilidad resulta laborioso por lo que conviene trabajar mejor con el complemento:

$$P(A1) = 1 - P(A1')$$

donde A1' significa que la compañía no gane ningún concurso, siendo esta probabilidad igual a:

$$P(A1') = P(G'_1 \cap G'_2 \cap G'_3 \cap G'_4 \cap G'_5)$$

y como los concursos se consideran independientes, entonces:

$$P(A1') = P(G'_1)\ P(G'_2)\ P(G'_3)\ P(G'_4)\ P(G'_5)$$

sustituyendo valores

$$P(A1') = (0.75)\ (0.75)\ (0.75)\ (0.75)\ (0.75) = 0.24$$

por último

$$P(A1) = 1 - 0.24 = 0.76$$

5. En una población se realizó una encuesta con motivo de las elecciones, de ella se obtuvieron los siguientes datos:

El 30% son mujeres en edad de votar, el 25% son hombres en edad de votar y el resto de la población son menores de edad. De los hombres en edad de votar 75% participan en la votación y de las mujeres en edad de votar 60% NO participan.

a partir de los datos que arrojó la encuesta, calcular:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona (incluyendo menores de edad), haya participado en la votación?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que participó, sea hombre?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que una mujer en edad de votar haya participado?

Solución:

Sea H el evento en el cual se selecciona un hombre en edad de votar.

Sea M el evento en el cual se selecciona una mujer en edad de votar.

Sea V' el evento en el cual se selecciona un menor de edad.

Sea P el evento en el cual se selecciona una persona que participó en la votación.

según los resultados de la encuesta la población esta distribuida de la siguiente manera:

Tipo de persona	%
H	25
M	30
V'	45

además el porcentaje de personas que participaron en la votación es:

tipo de persona	% de participación
H	25 x 0.75 = 19
M	30 x 0.40 = 12
V'	45 x 0.00 = 0

por lo tanto la respuesta a los incisos son:

a)

$$P(P) = \frac{0.19 + 0.12}{0,25 + 0.30 + 0.45}$$

$$P(P) = 0.31$$

b)

$$P(H|P) = \frac{P(H \cap P)}{P(P)} = \frac{0.19}{0.31}$$

$$P(H|P) = 0.61$$

c)

$$P(P|M) = \frac{P(P \cap M)}{P(M)} = \frac{0.12}{0.30}$$

$$P(P|M) = 0.40$$

6. Con base en su experiencia un médico ha recabado la siguiente información relativa a las enfermedades de su pacientes:

5% creen estar enfermos y si lo están.
45% creen estar enfermos pero no lo están.
10% no creen estar enfermos pero si lo están.
40% no creen estar enfermos y no lo están.

calcular la probabilidad de que un paciente cualquiera que visita al doctor:

a) Este enfermo si cree estarlo.

b) Este enfermo si no cree estarlo.

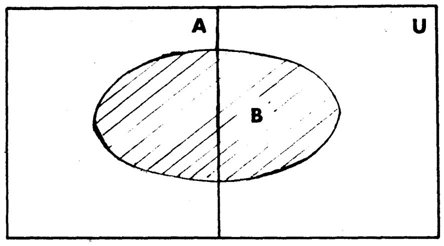
c) Crea estar enfermo y no lo esté

d) Crea estar enfermo y lo esté

Solución:

Sea A el evento en el cual el paciente cree estar enfermo.
Sea B el evento en el cual el paciente esta enfermo.

El espacio muestral es el siguiente:



y la respuesta a cada inciso es:

a) $P(B|A) = ?$

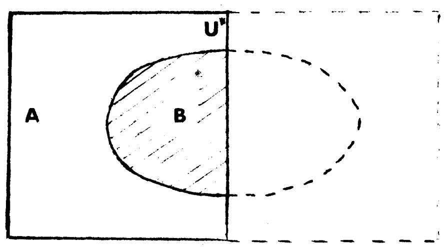
$$P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$

de la información proporcionada en el enunciado:

$$P(B\cap A) = 0.05$$

$$P(A) = 0.45 + 0.05 = 0.50$$

gráficamente el nuevo espacio muestral es:



sustituyendo valores

$$P(B|A) = \frac{0.05}{0.50}$$

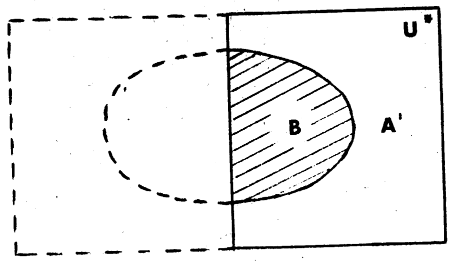
$$P(B|A) = 0.10$$

b) $P(B|A') = ?$

en forma análoga al inciso anterior

$$P(B\cap A') = \frac{P(B\cap A')}{P(A')}$$

el nuevo espacio muestral es:



donde:

$P(B \cap A') = 0.10$

$P(A') = 0.10 + 0.40 = 0.50$

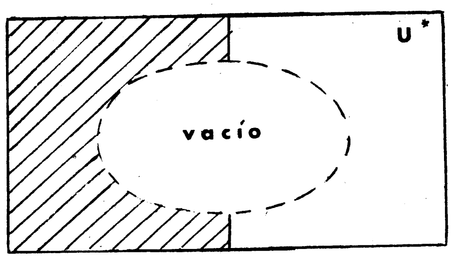
sustituyendo valores

$$P(B|A') = \frac{0.10}{0.50}$$

$$P(B|A') = 0.20$$

c) $P(A|B') = ?$

el nuevo espacio muestral es:



siendo

$$P(A|B') \ \frac{P(A \cap B')}{P(B')}$$

$P(A \cap B') = 0.45$

$P(B') = 0.45 + 0.40 = 0.85$

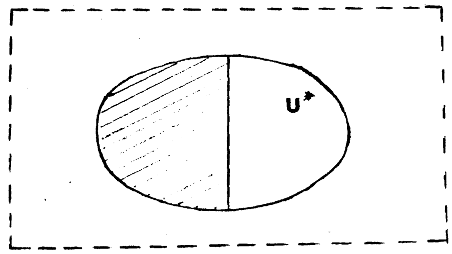
sustituyendo valores

$$P(A|B') = \frac{0.45}{0.85}$$

$$P(A|B') = 0.53$$

d) $P(A|B) = ?$

el nuevo espacio muestral es:



y

$$P(A|B) = \frac{P(A|B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = 0.05$$

$$P(B) = 0.05 + 0.10 = 0.15$$

sustituyendo valores

$$P(A|B) = \frac{0.05}{0.15}$$

$$P(A|B) = 0.33$$

cabe aclarar que este inciso es diferente al inciso a) aún cuando inicialmente se pueda pensar que es el mismo.

7. Durante la construcción de un puente se solicitaron dos camiones de cemento. Los camiones arribaron a la obra con ochenta sacos de cemento cada uno, contando el primero con cincuenta sacos de fraguado rápido y treinta de fraguado lento y el segundo camión con la mitad de fraguado rápido y la mitad de fraguado lento, si se selecciona un saco de cemento de cualquiera de los dos camiones, ¿cuál es la probabilidad de que el saco sea de fraguado rápido?

Solución:

Sea C1 el evento en el cual se selecciona el primer camión.
Sea C2 el evento en el cual se selecciona el segundo camión.
Sea FR el evento en el cual se selecciona un saco de fraguado rápido.
Sea FL el evento en el cual se selecciona un saco de fraguado lento.

La probabilidad de seleccionar cualquiera de los dos camiones es de 0.5:

$$P(C1) = 0.5$$

$$P(C2) = 0.5$$

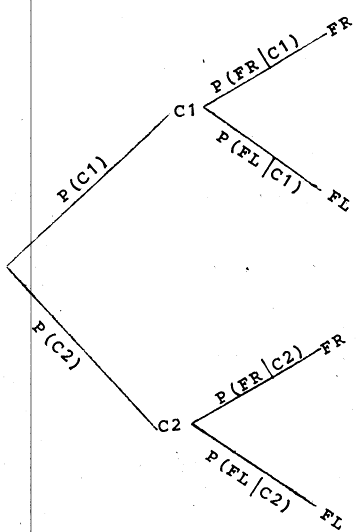
la probabilidad de que el saco sea de fraguado rápido dado que pertenece al primer camión es:

$$P(FR|C1) = \frac{50}{80} = 0.63$$

y si el saco pertenece al segundo camión entonces la probabilidad condicional es:

$$P(FR|C2) = \frac{40}{80} = 0.50$$

a partir del siguiente diagrama de árbol:



P(•)	FR
$P(C1)\ P(FR|C1)$	✓
$P(C1)\ P(FL|C1)$	x
$P(C2)\ P(FR|C2)$	✓
$P(C2)\ P(FL|C2)$	x

se obtiene que:

$$P(FR) = P(C1)\ P(FR|C1) + P(C2)\ P(FR|C2)$$

sustituyendo valores:

$$P(FR) = 0.50\ (0.63) + 0.5\ (0.5)$$

efectuando operaciones:

$$P(FR) = 0.56$$

8. Tres compañías áreas A, B y C efectúan vuelos diarios entre la Ciudad de México y la Ciudad de Monterrey, por experiencia se sabe que:

El 80% de los vuelos de la línea A llega tarde a su destino.
El 75% de los vuelos de la línea B llega tarde a su destino.
El 92% de los vuelos de la línea C llega tarde a su destino.

Si una persona selecciona al azar cualquiera de las tres líneas para viajar a Monterrey, y su vuelo llega retrasado, ¿cuál es la probabilidad de que haya seleccionado la línea B?

Solución:

Sea A el evento en el cual un avión de la línea A llega tarde
Sea B el evento en el cual un avión de la línea B llega tarde
Sea C el evento en el cual un avión de la linéa C llega tarde
Sea T el evento en el cual un avión llega tarde.

Del enunciado del problema se obtienen las siguientes probabilidades condicionales:

$$P(T|A) = 0.80$$

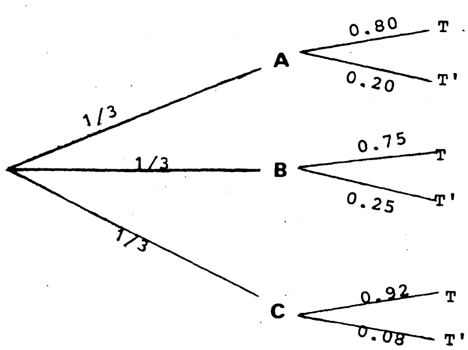
$$P(T|B) = 0.75$$

$$P(T|C) = 0.92$$

siendo la pregunta la probabilidad de:

$$P(B|T) = ?$$

con ayuda del siguiente espacio muestral:



P(•)	B	T
0.27	x	✓
0.07	x	x
0.25	✓	✓
0.08	✓	x
0.31	x	✓
0.03	x	x

la respuesta es:

$$P(B|T) = \frac{P(B\cap T)}{P(T)}$$

donde:

$$P(B\cap T) = 0.25$$

$$P(T) = 0.27 + 0.25 + 0.31$$

sustituyendo valores:

$$P(B|T) = \frac{0.25}{0.83}$$

$$P(B|T) = 0.30$$

El problema se puede resolver también aplicando directamente el teorema de Bayes.

$$P(B|T) = \frac{P(B)\ P(T|B)}{P(A)\ P(T|A) + P(B)\ P(T|B) + P(C)\ P(T|C)}$$

sustituyendo valores:

$$P(B|T) = \frac{0.33(0.75)}{0.33(0.92) + 0.33(0.75) + 0.33(0.80)}$$

efectuando operaciones:

$$P(B|T) = 0.30$$

9. Una fábrica cuenta con tres máquinas para fabricar bujías de automóviles, por experiencia se ha visto que la primera máquina produce el 5% de bujías defectuosas, la segunda produce el 3% de bujías con algún tipo de defecto y por último la tercera produce solamente el 2% de bujías defectuosas. Cada máquina empaca las bujías en cajas de cien unidades. Si en el almacén de la fábrica se encuentran acomodadas al azar 80 cajas siendo 20 de la primera máquina , 30 de la segunda y 30 de la tercera y se extraen al azar de una caja una bujía que resulta defectuosa ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producida por la máquina B?

Solución:

Sea A el evento en el cual la bujía fue fabricada por la primera máquina.

Sea B el evento en el cual la bujía fue fabricada por la segunda máquina.

Sea C el evento en el cual la bujía fue fabricada por la tercera máquina.

Sea D el evento en el cual la bujía esta defectuosa.

La probabilidad de seleccionar en el almacén una caja producida por la primera, segunda o la tercera máquina es respectivamente.

$$P(A) = \frac{20}{80} = 0.25$$

$$P(B) = \frac{30}{80} = 0.38$$

$$P(C) = \frac{30}{80} = 0.38$$

así mismo, las siguientes probabilidades condicionales se obtienen a partir del enunciado:

$$P(D|A) = 0.05$$

$$P(D|B) = 0.03$$

$$P(D|C) = 0.02$$

aplicando el teorema de Bayes la probabilidad que la bujía haya sido producida por la segunda máquina, dado que esta defectuosa es: s:

$$P(B\cap D) = \frac{P(B)\ P(D|B)}{P(A)\ P(D|A) + P(B)\ P(D|B) + P(C)\ P(D|C)}$$

sustituyendo valores:

$$P(B\cap D) = \frac{(0.38)\ (0.03)}{0.25(0.05) + 0.38(0.03) + 0.38(0.02)}$$

efectuando operaciones:

$$P(B|D) = 0.36$$

10. En un día lluvioso , la probabilidad de que un conductor de automóvil llegue tarde a su destino se estima que es de 0.85, mientras que en un día sin lluvia esta probabilidad es de solamente 0.30. Teniendo en cuenta que el 45% de los días del año son lluviosos ¿cuál es la probabilidad de que en un día cualquiera el conductor llegue tarde a su destino?

Solución:

Sea L el evento en el cual el día es lluvioso.

Sea T el evento en el cual el conductor llega tarde a su destino.

A partir de los datos del problema se obtienen las siguientes probabilidades:

$$P(L) = 0.45$$

$$P(T|L) = 0.85$$

$$P(T|L') = 0.30$$

siendo la probabilidad de que el conductor llegue tarde la siguiente:

$$P(T) = P(L)\ P(T|L) + P(L')\ P(T|L')$$

sustituyendo valores:

$$P(T) = 0.45(0.85) + 0.55(0.30)$$

efectuando operaciones:

$$P(T) = 0.55$$

este resultado se explica más claramente al construir un diagrama de árbol análogo al del problema siete.

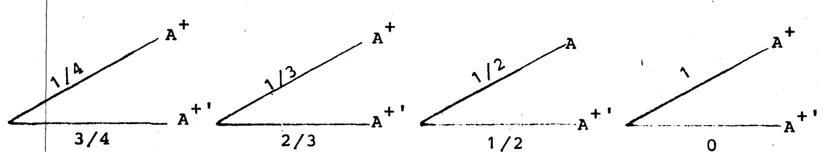
11. En un banco de sangre se tienen cuatro donadores de los cuales solamente uno de ellos cuenta con sangre tipo A^+. ¿Cuál es la probabilidad de que se tengan que seleccionar tres personas para obtener la muestra de sangre A^+?

Solución:

Sea A^+ el evento en el cual el donador tiene sangre tipo A^+

Sea P_i el evento en el cual la i-ésima persona tiene sangre tipo A^+.

Debido a que es necesario seleccionar a alguno de los cuatro donadores al azar, la probabilidad de seleccionar a la persona indicada la primera vez, es de 1/4 contra 3/4 de fallar, si es así, la probabilidad de tener éxito en el segundo intento es de 1/3 contra 2/3 de fallar, esto es debido a que se tienen ya nada más tres personas, procediendo en esta forma, la respuesta se obtiene a partir del siguiente espacio muestral:



por lo tanto:

$$P(P_3) = \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

efectuando operaciones:

$$P(P_3) = 0.25$$

12. Juan es un astronauta, capitán de la misión ALFA de un proyecto de la NASA. El éxito o fracaso de la misión depende del comportamiento de tres sistemas principales de la nave, el sistema propulsor, el sistema de enfriamiento y el sistema eléctrico. Juan decide tomar como verdaderas las siguientes hipótesis para aplicarlas durante el desarrollo de la misión:

- La misión fracasará si dos o más sistemas fallan.
- El sistema de enfriamiento puede fallar con una probabilidad de 0.1.
- Si al menos uno de los sistemas falla, sin importar cual de ellos, el sistema eléctrico fallará con una probabilidad condicional de 0.5. Si no falla otro sistema entonces el sistema eléctrico puede fallar con una probabilidad de 0.1.
- El sistema propulsor fallará con una probabilidad de 0.5 si el sistema de enfriamiento falla. De otra manera el sistema propulsor no fallará.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la misión tenga éxito aún fallando el sistema de propulsión?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que los tres sistemas fallen?

c) Dado que más de un sistema falló, determinar la probabilidad condicional de que:

- El sistema de enfriamiento no falle.
- Que el sistema propulsor falle.
- Que falle el sistema de enfriamiento y el eléctrico.

Solución:

Sea EN el evento en el cual el sistema de enfriamiento NO falla.

Sea P el evento en el cual el sistema de propulsor NO falla

Sea EL el evento en el cual el sistema eléctrico NO falla

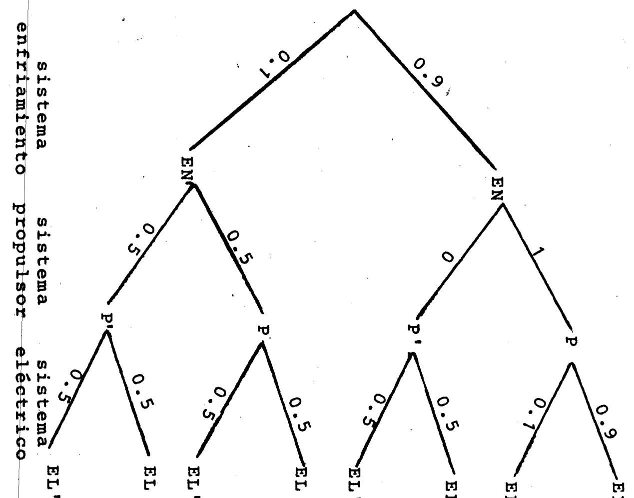
Sea A el evento en el cual la misión tiene éxito.

Sea B el evento en el cual los tres sistemas fallan.

Sea C el evento en el cual más de un sistema falla.

Sea D el evento en el cual falla el sistema de enfriamiento y el eléctrico.

El siguiente diagrama de árbol representa el espacio muestral del problema.



EVENTOS	P(•)	A	B	C	D
EN, P, EL	0.81	✓	x	x	x
EN, P, EL'	0.09	✓	x	x	x
EN, P', EL	0.00	✓	x	x	x
EN, P', EL'	0.00	x	x		x
EN', P, EL	0.03	✓	x	x	x
EN', P, EL'	0.03	x	x	✓	✓
EN', P', EL	0.03	x	x	✓	x
EN', P', EL'	0.03	x	✓	✓	✓

para construirlo se deben colocar los tres sistemas de tal manera que la probabilidad en cada rama sean congruentes con el enunciado del problema. A partir del diagrama de árbol anterior, es sencillo obtener la respuesta a cada pregunta:

a) $P(A|P') = ?$

$$P(A|P') = \frac{P(A \cap P')}{P(P')}$$

$$P(A|P') = \frac{0}{0.025 + 0.025}$$

$$P(A|P') = 0$$

b) $P(B) = ?$

$$P(B) = 0.1\ (0.5)\ (0.5)$$

$$P(B) = 0.025$$

c) - $P(EN|C) = ?$

$$P(FN|C) = \frac{P(EN \cap C)}{P(C)}$$

$$= \frac{0}{0.03 + 0.03 + 0.03}$$

$$= 0$$

- $P(P'|C) = ?$

$$P(P'|C) = \frac{P(P' \cap C)}{P(C)}$$

$$= \frac{0.03 + 0.03}{0.03 + 0.03 + 0.03}$$

$$= 0.67$$

- $P(D|C) = ?$

$$P(D|C) = \frac{P(D \cap C)}{P(C)}$$

$$= \frac{0.03 + 0.03}{0.03 + 0.03 + 0.03}$$

$$= 0.67$$

13. Juan perdió a su perro, en el bosque A con una probabilidad de 0.6 ó en el bosque B con una probabilidad de 0.4. Si el perro aún esta vivo en el enésimo día de búsqueda, la probabilidad de que muera ese día es de N/(N + 3).

Si el perro esta en A y Juan busca todo el día en A la probabilidad condicional de que lo encuentre es de 0.15. Así mismo si el perro esta en B y Juan busca todo el día en B la probabilidad condicional de que lo encuentre es de 0.25.

a) ¿En cuál bosque tiene Juan mayor probabilidad de encontrar a su perro durante el primer día de búsqueda?

b) Dado que Juan buscó en B el primer día pero no encontró a su perro, cuál es la probabilidad de que esté en B.

Solución:

Sea A el evento en el cual el perro está en el bosque A.

Sea B el evento en el cual el perro está en el bosque B.

Sea BA el evento en el cual Juan busca a su perro en el bosque A.

Sea BB el evento en el cual Juan busca a su perro en el bosque B.

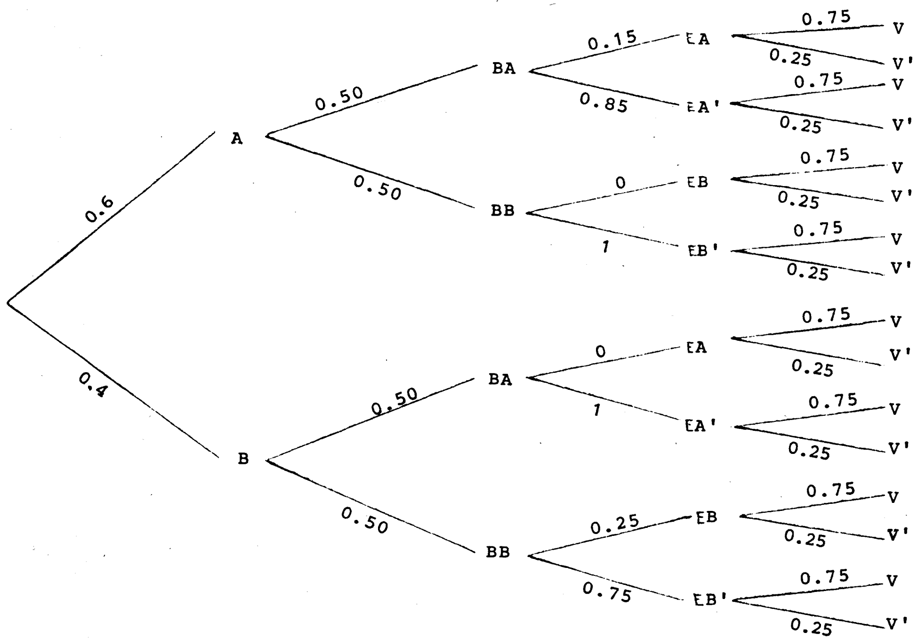
Sea EA el evento en el cual Juan encuentra a su perro en el bosque A.

Sea EB el evento en el cual Juan encuentra a su perro en el bosque B.

Sea V el evento en el cual el perro está vivo.

Sea BBN el evento en el cual Juan buscó en el bosque B pero no encontró a su perro.

Planteando el siguiente diagrama de árbol:



donde está ?

donde lo busca ?

lo encuentra ?

Cómo lo encuen<u>tra</u> ? (N = 1)

EVENTOS	P(•)	EA	EB	B	BBN
A, BA, EA, V	0.03	✓	x	x	x
A, BA, EA, V'	0.01		x	x	x
A, BA, EA', V	0.19	x	x	x	x
A, BA, EA', V'	0.06	x	x	x	x
A, BB, EB, V	0.00	x	✓	x	x
A, BB, EB, V'	0.00	x	✓	x	x
A, BB, EB', V'	0.23	x	x	x	✓
A, BB, EB', V'	0.08	x	x	x	✓
B, BA, EA, V	0.00	✓	x	✓	x
B, BA, EA, V'	0.00	✓	x	✓	x
B, BA, EA', V	0.15	x	x	✓	x
B, VA, EA, V'	0.05	x	x	✓	x
B, BB, EB, V	0.04	x	✓	✓	x
B, BB, EB, V'	0.01	x	✓	✓	x
B, BB, EB', V	0.11	x	x	✓	✓
B, BB, EB', V'	0.04	x	x	✓	✓

se obtienen las siguientes respuestas:

a) La probabilidad de encontrar al perro en el bosque A durante el primer día de búsqueda es:

$$P(EA) = 0.03 + 0.01$$

$$P(EA) = 0.04$$

y la probabilidad de encontrarlo en el bosque B es:

$$P(EB) = 0.04 + 0.01$$

$$P(EB) = 0.05$$

comparando ambas probabilidades se concluye que Juan tiene mayor probabilidad de encontrar a su perro en el bosque B durante el primer día de búsqueda.

b) $P(B|BBN) = ?$

$$P(B|BBN) = \frac{P(B \cap BBN)}{P(BBN)}$$

$$= \frac{0.11 + 0.04}{0.23 + 0.08 + 0.11 + 0.04}$$

$$= 0.33$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. La probabilidad de que un estudiante que trabaja una jornada de 8 diarias, estudie para un examen es de 0.4 mientras que para un estudiante que no trabaja esta probabilidad es de 0.9. Teniendo en cuenta que el 45% de los alumnos trabajan ¿cuál es la probabilidad de que en el próximo examen un alumno seleccionado al azar haya estudiado para el examen?

2. En una población se hizo una encuesta con motivo de las elecciones, de ella se obtuvieron los siguientes datos:

   El 30% son mujeres en edad de votar, 25% son hombres en edad de votar y el resto de la población son menores de edad. De los hombres en edad de votar 75% participan en la votación y de las mujeres en edad de votar 60% NO participan.

   A partir de los resultados que arrojó la encuesta, calcular:

   a) La probabilidad de que una persona (incluyendo menores de edad), seleccionada al azar, haya participado en la votación.

   b) La probabilidad de que una persona que participó sea hombre.

   c) La probabilidad de que sea mujer y participe.

3. En un hospital la probabilidad de que un paciente tenga cierta enfermedad es de 0.05, para determinar si tiene o no la enfermedad se le aplica una prueba, si la tiene la probabilidad de que la prueba sea positiva es de 0.99; si no la tiene la probabilidad de que la prueba sea positiva es de 0.03. Al aplicar la prueba esta resultó positiva ¿cuál es la probabilidad de que el paciente tenga la enfermedad?

4. La probabilidad de que una construcción se termine a tiempo es de 17/20, la probabilidad de que los trabajadores de la obra organicen una huelga es de 1/4 la probabilidad de que la construcción se termine a tiempo partiendo del supuesto de que no hubo huelgas es de 14/15. Hallar la probabilidad de que:

   a) La construcción se termine a tiempo y que no haya huelgas.

   b) No haya huelgas, partiendo de hecho que la construcción se terminó a tiempo.

5. Se ha observado que los eventos "ESTUDIAR" y "APROBAR UN EXAMEN" no son independientes, se considera que la probabilidad de aprobar un examen dado que se estudia es de 0.85, mientras que la de aprobar un examen dado que no se estudia es de 0.05. Con esta información y considerando que la probabilidad de que un alumno estudie es de 0.75, calcular la probabilidad de que un estudiante escogido al azar haya estudiado dado que aprobó el examen.

6. Tres máquinas A, B y C producen la misma pieza en una fábrica El 6% de las piezas producidas por A están defectuosas, el 7% de las piezas producidas por B también están defectuosas, mientras que sólo el 3% de las piezas producidas por C tienen algún defecto. La máquina A produce cinco veces más que la máquina B mientras que la máquina C produce solamente la tercera parte de lo que produce la máquina A. Si se toma al azar una pieza del almacén de la fábrica y resulta que esta defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que la haya producido la máquina B?

7. Con referencia en el problema número trece de los ejemplos resueltos responder a los siguientes incisos:

a) Si Juan lanza una moneda para determinar en cuál bosque debe buscar durante el primer día y resulta que encuentra a su perro, ¿cuál es la probabilidad de que haya buscado en el bosque A?

b) Juan decidió buscar en el bosque A durante los primeros dos días. Partiendo del hecho que no encontró a su perro durante el primer día, determine la probabilidad de que encuentre a su perro vivo durante el segundo día de búsqueda.

c) Finalmente, Juan encontró a su perro durante el cuarto día de búsqueda. Buscó en A los primeros tres días y en B durante el cuarto día. ¿Cuál es la probabilidad de que haya encontrado a su perro vivo?

d) Finalmente, Juan encontró a su perro durante el cuarto día de búsqueda. Se sabe solamente que buscó en A dos días y en B los días restantes, sin especificar en que orden buscó. ¿Cuál es la probabilidad de que haya encontrado a su perro vivo?

TEMA II

VARIABLES ALEATORIAS

1. Con el objeto de realizar tres importantes obras se cuenta con dos compañías constructoras. La probabilidad de que una compañía realice la construcción de cualquiera de las tres obras es de 0.6 .

   a) Definir una variable aleatoria que represente el número de obras que puede realizar una compañía.

   b) Calcular la probabilidad de que una compañía realice dos de las tres obras.

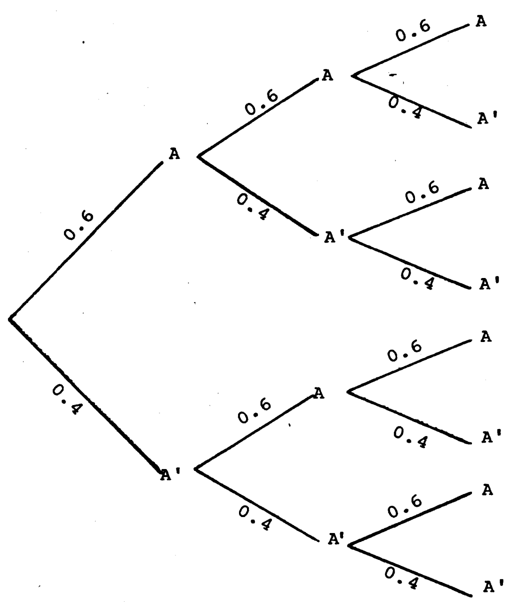
   c) Construir la función de probabilidad de la variable aleatoria.

Solución:

Sea A el evento en el cual una compañía realiza una obra.

Se asume que el complemento del evento A implica que la obra la realiza la otra compañía constructora.

a) En forma análoga a los problemas presentados en el tema anterior, el siguiente diagrama de árbol explica el problema:

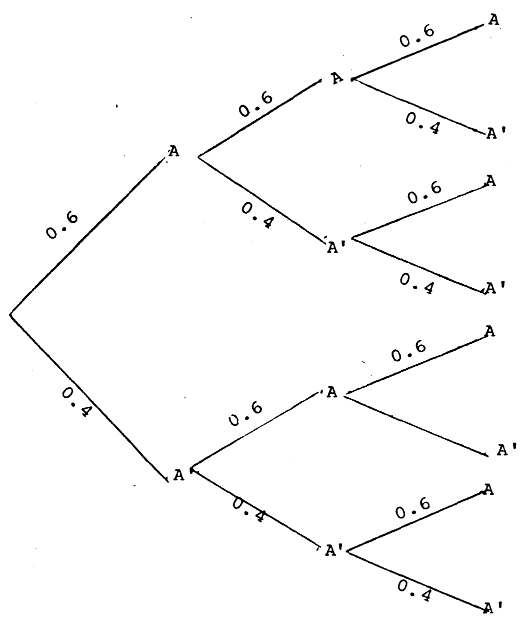


P(•)
0.22
0.14
0.14
0.10
0.14
0.10
0.10
0.06

El número de obras que puede realizar la compañía A se puede representar con la variable aleatoria x la cual puede tomar los siguientes valores:

$$\{ 0, 1, 2, 3 \}.$$

Sustituyendo el valor que corresponda en el espacio muestral se obtiene que:



P(•)	x
0.22	3
0.14	2
0.14	2
0.10	1
0.14	2
0.10	1
0.10	1
0.06	0

b) La probabilidad de que una compañía realice dos de las tres obras es lo mismo que la probabilidad de que la variable aleatoria x tome el valor de dos, por lo tanto:

$$P(x = 2) = 0.14 + 0.14 + 0.14 = 0.42$$

c) La función de probabilidad de la variable aleatoria x es:

$$P(x < 0) = 0$$

$$P(x = 0) = 0.06$$

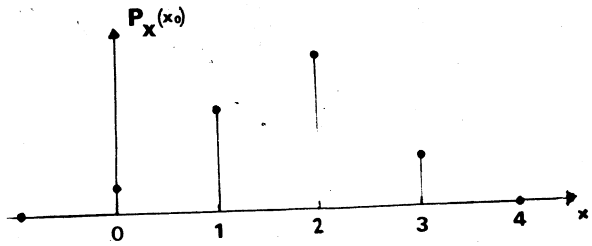
$$P(x = 1) = 0.10 + 0.10 + 0.10 = 0.30$$

$$P(x = 2) = 0.14 + 0.14 + 0.14 = 0.42$$

$$P(x = 3) = 0.22$$

$$P(x > 3) = 0$$

Graficando estas probabilidades, se obtiene:



entendiéndose por $P_x(x_o)$ la probabilidad de que la variable aleatoria x tome el valor x_o.

2. Obtener la esperanza y la variancia de la variable aleatoria (v. a.) x utilizada en el problema anterior.

Solución:

La esperanza de una v. a. discreta es:

$$E\{x\} = \sum_{x \in E.M.} x \, P_x(x_o)$$

desarrollando la sumatoria:

$$E\{x\} = \sum_{x=0}^{3} x \, P_x(x_o) = (0)\,P_x(0) + (1)\,P_x(1) + 2\,P_x(2) + 3\,P_x(3)$$

sustituyendo valores:

$$E\{x\} = 0(0.06) + 1(0.30) + 2(0.42) + 3(0.22)$$

efectuando operaciones:

$$E\{x\} = 1.80$$

y la variancia es:

$$\sigma_x^2 = E\,\{x^2\} - (E\{x\})^2$$

siendo

$$E\{x^2\} = \sum_{x \in E.M.} x^2 \, P_x(x_o)$$

efectuando operaciones

$$E\{x^2\} = 0^2(0.06) + 1^2(0.30) + 2^2(0.42) + 3^2(0.22)$$

por lo tanto

$$E\{x^2\} = 3.96$$

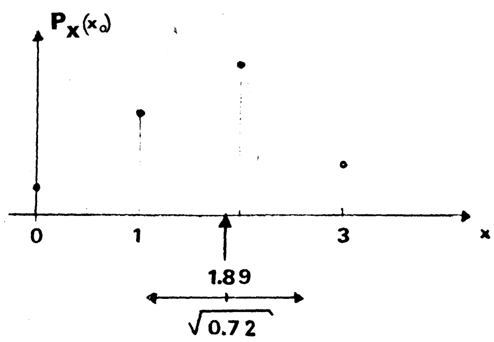
y entonces la variancia es:

$$\sigma_x^2 = 3.96 - 1.80^2$$

finalmente

$$\sigma_x^2 = 0.72$$

graficamente estos parâmetros se representan como sigue:



3. La duración, en horas, de los focos producidos por una fábrica se considera una v. a. que tiene la siguiente función de probabilidad:

$$f_T(t) = \begin{cases} K\,t & 0 \leq t \leq 4 \\ 0 & \text{cualquier otro valor} \end{cases}$$

Calcular:

a) El valor de la constante K

b) La media y la desviación estándar de la v. a. t.

Solución:

a) Como $f_T(t)$ es una función de probabilidad entonces se de be cumplir que:

$$\int_0^4 f_T(t)\ dt = 1$$

sustituyendo la función $f_T(t)$

$$\int_0^4 K\ t\ dt = 1$$

integrando

$$\int_0^4 K\ t\ dt = K\ \frac{t^2}{2}\ \Big|_0^4 = 8\ K = 1$$

por lo tanto:

$$K = \frac{1}{8}$$

b) La media es:

$$\mu_t = E\{t\} = \int_{-\infty}^{\infty} t\ f_t(t_0)\ dt$$

sustituyendo

$$\mu_t = \int_0^4 t\ (\frac{1}{8}\ t)\ dt$$

$$\mu_t = \frac{1}{8}\ \frac{t^3}{3}\ \Big|_0^4 =$$

$$\mu_t = 2.67$$

y la desviación estándar es:

$$\sigma_t = \sqrt{E\{(t - \mu_t)^2\}}$$

siendo

$$E\{(t - \mu_t)^2\} = \int_0^4 (t - \mu_t)^2\ (\frac{1}{8})\ t\ dt$$

efectuando operaciones

$$E\{(t - \mu_t)^2\} = \frac{1}{8} \int_0^4 t^3\, dt - \frac{2}{8}\ \frac{8}{3} \int_0^4 t^2\ dt + \frac{64}{9}\ \frac{1}{8} \int_0^4 t\ dt$$

$$= \frac{1}{8}\frac{t^4}{4} - \frac{2}{3}\frac{t^3}{3} + \frac{8}{9}\frac{t^2}{2}\Big|_0^4$$

$$= 8 - 14.22 + 7.11$$

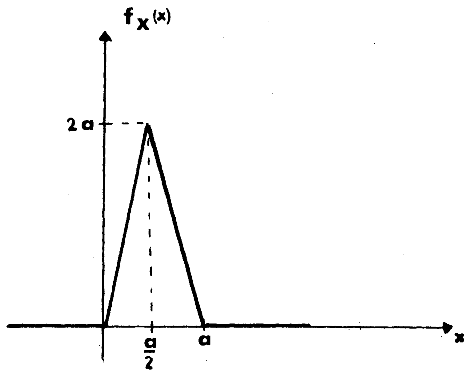
$$= 0.89$$

por lo tanto la desviación estándar es:

$$\sigma_t = \sqrt{0.89}$$

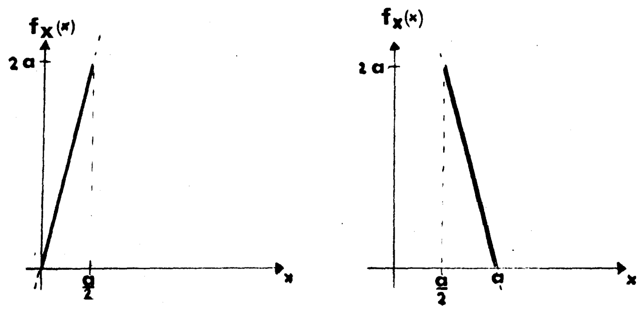
$$\sigma_t = 0.94$$

4. Diseñar una función densidad de probabilidad de acuerdo con la siguiente gráfica:



Solución:

Separando la función en dos partes:



se puede calcular la expresión de las dos rectas de la siguiente manera:

$$y = m\,x + b \qquad\qquad y = m\,x + b$$

$$m = \frac{2a}{\frac{a}{2}} = 4 \qquad\qquad m = -\frac{2a}{\frac{a}{2}} = -4$$

$$b = 0 \qquad\qquad b = 4$$

sustituyendo

$$y = 4\,x \qquad\qquad y = -4\,x + 4$$

para determinar el valor de a se procede de la siguiente forma:

$$\int_0^{a/2} 4\,x\,dx = 0.5$$

integrando

$$2\,x^2 \Big|_0^{a/2} = 2\,\frac{a^2}{4} = 0.5$$

$$a = 1$$

por lo tanto la función de probabilidad es:

$$f_x(x) = \begin{cases} 4\,x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 4(1 - x) & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

5. Obtener el primer momento respecto al origen y el segundo momento respecto a la media de la siguiente función densidad de probabilidad:

$$f_x(x) = \begin{cases} a\,e^{-a\,x} & x \geq 0 \\ & a = \text{cte} > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Solución:

El primer momento respecto al origen es:

$$m_1 = E\{x\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\,f_x(x)\,dx$$

sustituyendo

$$m_1 = \int_0^{\infty} x\ a\ e^{-a\ x}\ dx$$

$$= a \int_0^{\infty} x\ e^{-a\ x}\ dx$$

integrando por partes

$$\int u.dv = uv - \int v\ du$$

$$u = x \quad ; \quad du = dx$$

$$dv = e^{-a\ x} \quad ; \quad v = -\frac{1}{a} e^{-a\ x}$$

$$m_1 = a \int_0^{\infty} x\ e^{-a\ x}\ dx = a \left[-\frac{x}{a} e^{-a\ x} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-a\ x} dx \right]$$

$$m_1 = a \left[0 - \frac{1}{a^2} e^{-\ a\ x} \Big|_0^{\infty} \right]$$

$$E\{x\} = \frac{1}{a}$$

El segundo momento respecto a la media es:

$$m_2 = E\{(x - \mu_x)^2\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2\ f_x(x)\ dx$$

sustituyendo

$$m_2 = \int_0^{\infty} (x - \frac{1}{a})^2\ a\ e^{-a\ x}\ dx$$

$$= a \int_0^{\infty} x^2\ e^{-a\ x}\ dx - 2 \int_0^{\infty} x\ e^{-a\ x}\ dx + \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-a\ x}\ dx$$

realizando las integrales

$$= \frac{2}{a^2} - \frac{2}{a^2} + \frac{1}{a^2}$$

$$E\{(x - \mu_x)^2\} = \frac{1}{a^2}$$

6. Dada la siguiente función de probabilidad:

$$P_K(k) = \begin{cases} \frac{a^k}{k!} e^{-a} & k = 0,1,2,3,. \quad a = \text{cte} > 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

a) Verificar que:

$$\sum_{\forall k} P_K(k) = 1$$

b) Obtener su función generatriz de momentos.

c) Calcular la media y la variancia de la v.a.k.

Solución:

a)

$$\sum_{\forall k} P_K(k) = 1$$

sustituyendo

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} e^{-a} = e^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$$

$$= e^{-a} e^{a}$$

$$= 1$$

b)

$$m_k(t) = E\{e^{tk}\}$$

$$= \sum_{\forall k} e^{tk} P_K(k)$$

sustituyendo

$$m_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} \frac{a^k}{k!} e^{-a}$$

$$= e^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a e^t)^k}{k!}$$

$$= e^{-a} e^{a e^t}$$

$$\mu_k(t) = e^{(e^t - 1) a}$$

b) Utilizando la función generatriz de momentos la media es:

$$\mu_k = \frac{d}{dt} m_k(t) \Big|_{t = 0}$$

$$m_k'(t) = a\, e^t\, e^{(e^t-1)\, a}$$

$$m_k'(t = 0) = a$$

por lo tanto

$$\mu_k = a$$

la variancia se obtiene como sigue:

$$\sigma_k^2 = E\{k^2\} - (E\{k\})^2$$

donde

$$E\{k^2\} = m_k''(t = 0)$$

y

$$E\{k\} = a$$

derivando nuevamente para obtener $m_k''(t)$

$$m_k''(t) = a^2 e^{2t}\, e^{(e^t-1)a} + a\, e^t\, e^{(e^t-1)a}$$

$$m_k''(t = 0) = a^2 + a$$

sustituyendo para obtener la variancia

$$\sigma_k^2 = a^2 + a - a^2$$

$$\sigma_k^2 = a$$

7. Dada la siguiente función densidad de probabilidad

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases}$$

obtener

a) La función generatriz de momentos

b) La media

Solución:

a) La función generatriz de momentos es:

$$m_x(t) = E\{e^{tx}\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \; f_x(x) \; dx$$

sustituyendo

$$m_x(t) = \int_a^b e^{tx} \left(\frac{1}{b-a}\right) dx$$

$$= \left(\frac{1}{b-a}\right) \frac{1}{t} e^{tx} \Big|_a^b$$

$$= \frac{1}{t(b-a)} (e^{tb} - e^{ta})$$

b) La media es:

$$\mu_x = m_x' \; (t = 0)$$

derivando la función generatriz de momentos

$$m_x'(t) = \frac{e^{ta} \; (1 - at) + e^{tb} \; (tb - 1)}{t^2 (b - a)}$$

como al sustituir $t = 0$ en $m_x'(t)$ se llega a una indeterminación, se debe obtener el límite cuando t tiende a cero

$$m_x'(t = 0) = \lim_{t \to 0} \frac{e^{ta} \; (1 - at) + e^{tb} \; (tb - 1)}{t^2 (b - a)}$$

aplicando la regla de L'Hôpital se obtiene que:

$$m_x'(t = 0) = \lim_{t \to 0} \frac{b^2 t \; e^{tb} - a^2 t \; e^{ta}}{2t(b-a)}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{e^{tb}(b^2 + tb^3) - e^{ta}(a^2 - ta^3)}{2(b - a)}$$

$$= \frac{b^2 - a^3}{2(b-a)}$$

$$m_x'(t = 0) = \frac{a + b}{2}$$

por lo tanto

$$\mu_x = \frac{a + b}{2}$$

8. El número de KWH que se consumen semanalmente en una fábrica se ha registrado durante las últimas 25 semanas, la siguiente tabla muestra los resultados:

Semana	KWH
1	9
2	5
3	8
4	10
5	11
6	12
7	5
8	7

Semana	KWH
9	6
10	7
11	6
12	8
13	9
14	8
15	9
16	10

Semana	KWH
17	7
18	4
19	8
20	11
21	9
22	7
23	6
24	8
25	10

Obtener:

a) La función de probabilidad de la v.a. consumo de KWH.

b) Estimar la demanda de energía eléctrica para la próxima semana.

Solución:

a) Según la información recabada los valores que puede tomar la v.a. que representa el consumo de KWH de la fábrica durante una semana son:

$$x = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

la estimación de probabilidad para cada valor que puede tomar la v.a.x es:

x	$P_x(x)$
4	1/25
5	2/25
6	3/25
7	4/25
8	5/25
9	4/25
10	3/25
11	2/25
12	1/25

la tabla anterior es la función de probabilidad de la v.a.x.

b) El valor esperado del consumo de la energía eléctrica para la próxima semana es:

$$E\{x\} = \sum_{\forall x} x \, P_x(x)$$

sustituyendo

$$E\{x\} = 4(\frac{1}{25}) + 5(\frac{2}{25}) + 6(\frac{3}{25}) + \ldots + 12(\frac{1}{25})$$

efectuando operaciones

$$E\{x\} = 8 \text{ KWH}$$

9. El dueño de una camioneta de transporte colectivo que parte de una población A y pasa por la población B para llegar a su destino en la ciudad C, ha determinado que el número de pasajeros que recibe en cada población tiene la siguiente función de probabilidad:

Para la población A

x	$P_X(x)$
1	0.1
2	0.3
3	0.4
4	0.2

Para la población B

y	$P_Y(y)$
4	0.2
5	0.4
6	0.3
7	0.1

Determinar:

a) La función de probabilidad del número total de personas que subieron al vehículo.

b) La media, la variancia y el coeficiente de variación de la función de probabilidad.

c) La función de distribución acumulada.

d) La probabilidad de que suban cuando mucho 8 personas.

Solución:

Sea Z una v.a. que represента el número total de personas que subieron al vehículo, esta v.a. puede tomar los siguientes valores

$$z = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

siendo la probabilidad de que $z = 5$ la siguiente:

$$\begin{aligned} P(z = 5) &= P(x = 1)\ P(y = 4) \\ &= 0.1\ (0.2) \\ &= 0.02 \end{aligned}$$

en la misma forma, la probabilidad de que $z = 6$ es:

$$\begin{aligned} P(z = 6) &= P(x = 2)\ P(y = 4) + P(x = 1)\ P(y = 5) \\ &= 0.3\ (0.2) + 0.1\ (0.4) \\ &= 0.1 \end{aligned}$$

con ayuda de la siguiente tabla:

$x = 1$, $y = 4$: $z = 5$	$x = 1$, $y = 5$: $z = 6$	$x = 1$, $y = 6$: $z = 7$	$x = 1$, $y = 7$: $z = 8$
$x = 2$, $y = 4$: $z = 6$	$x = 2$, $y = 5$: $z = 7$	$x = 2$, $y = 6$: $z = 8$	$x = 2$, $y = 7$: $z = 9$
$x = 3$, $y = 4$: $z = 7$	$x = 3$, $y = 5$: $z = 8$	$x = 3$, $y = 6$: $z = 9$	$x = 3$, $y = 7$: $z = 10$
$x = 4$, $y = 4$: $z = 8$	$x = 4$, $y = 5$: $z = 9$	$x = 4$, $y = 6$: $z = 10$	$x = 4$, $y = 7$: $z = 11$

las probabilidades para los valores restantes de z son:

$$\begin{aligned} P(z = 7) &= P(x = 3)\ P(y = 4) + P(x = 2)\ P(y = 5) + P(x = 1)\ P(y = 6) \\ &= 0.4(0.2) + 0.3(0.4) + 0.1(0.3) \\ &= 0.23 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(z = 8) &= P(x = 4)\ P(y = 4) + P(x = 3)\ P(y = 5) + P(x = 2)\ P(y = 6) + \\ &\quad + P(x = 1)\ P(y = 7) \\ &= 0.2(0.2) + 0.4(0.4) + 0.3(0.3) + 0.1(0.1) \\ &= 0.30 \end{aligned}$$

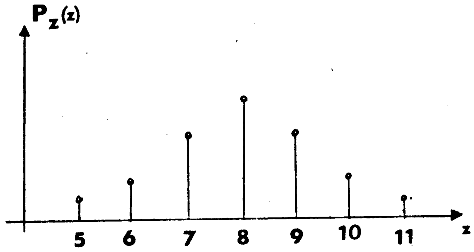
$$\begin{aligned} P(z = 9) &= P(x = 4)\ P(y = 5) + P(x = 3)\ P(y = 6) + P(x = 2)\ P(y = 7) \\ &= 0.2(0.4) + 0.4(0.3) + 0.3(0.1) \\ &= 0.23 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(z = 10) &= P(x = 4)\ P(y = 6) + P(x = 3)\ P(y = 7) \\ &= 0.2(0.3) + 0.4(0.1) \\ &= 0.10 \end{aligned}$$

$$P(z = 11) = P(x = 4)\ P(y = 7)$$
$$= 0.2\ (0.1)$$
$$= 0.02$$

Por lo tanto, la función de probabilidad de la v.a.z es:

z	$P_z(z)$
5	0.02
6	0.10
7	0.23
8	0.30
9	0.23
10	0.10
11	0.02



b) La media es:

$$\mu_z = \sum_{\forall z} z\ P_z(z)$$

sustituyendo valores

$$\mu_z = 5(0.02) + 6(0.10) + 7(0.23) + 8(0.30) + 9(0.23) + 10(0.10) + 11(0.02)$$

$$\mu_z = 8$$

la variancia es:

$$\sigma_z^2 = E\{(z - \mu_z)^2\}$$

$$= \sum_{\forall z} (z - \mu_z)^2\ P_z(z)$$

sustituyendo valores:

$$\sigma_z{}^2 = (5 - 8)^2\ 0.02 + (6 - 8)^2\ 0.10 + (7 - 8)^2\ 0.23 + (8 - 8)^2\ 0.30 +$$
$$+ (9 - 8)^2\ 0.23 + (10 - 8)^2\ 0.10 + (11 - 8)^2\ 0.02$$

$$\sigma_z{}^2 = 1.62$$

el coeficiente de variación es:

$$\text{cfte variación} = \frac{\mu_z}{\sigma_z}$$

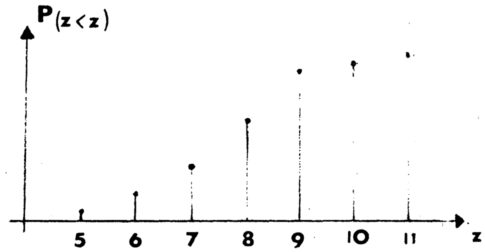
sustituyendo

$$\text{cfte variación} = \frac{8}{\sqrt{1.62}}$$

$$= 6.29$$

c) La función de **distribución** acumulada es:

z	P(Z < z)
5	0.02
6	0.12
7	0.35
8	0.65
9	0.88
10	0.98
11	1.00



d) A partir de la función de distribución acumulada, la probabilidad de que $z \leq 8$ es:

$$P(z \leq 8) = 0.65$$

10. A partir de la siguiente función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} 2(1 - x) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{cualquier otro valor} \end{cases}$$

Calcular:

a) $E\{3x + 1\}$

b) $E\{x^2 - 2E\{x\}\}$

Solución:

a) Por las propiedades del operador esperanza

$$E\{3x + 1\} = 3E\{x\} + E\{1\} = 3E\{x\} + 1$$

donde:

$$E\{x\} = \int_{-\infty}^{0} (x)(0)\, dx + \int_{0}^{1} (x)(2)(1 - x)\, dx + \int_{1}^{\infty} x\,(0)\, dx =$$

$$= 2 \int_0^1 (x - x^2)\ dx = 2\ (x^2/2 - x^3/3) \Big|_0^1 = 1 - 2/3 = 1/3$$

sustituyendo

$$E\{3\ x + 1\} = 3(1/3) + 1 = 4$$

b) Aplicando nuevamente las propiedades del operador esperanza.

$$E\{x^2 - 2\ E\{x\}\} = E\{x^2 - (2)(1/3)\} = E\{x^2 - 2/3\} =$$

$$= E\{x^2\} - E\{2/3\} = E\{x^2\} - 2/3$$

donde

$$E\{x^2\} = \int_0^1 (x^2)(2)(1 - x)\ dx = 2 \int_0^1 (x^2 - x^3)\ dx =$$

$$= 2\ \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) \Big|_0^1 = 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 2\left(\frac{4 - 3}{12}\right) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

sustituyendo

$$E\{x^2 - 2\ E\{x\}\} = \frac{1}{6} - \frac{2}{3} = \frac{1 - 4}{6} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

11. Una compañía fabricante de cinescopios para televisiones ha determinado que la función densidad de probabilidad de la duración en horas de los cinescopios es:

$$f_X\ (x) = \begin{cases} \dfrac{1800}{x^3} & x \geq 1800 \\ 0 & x < 1800 \end{cases}$$

Calcular la probabilidad de que tres cinescopios fabricados por esta compañía esten funcionando correctamente después de 2400 horas de uso.

Solución:

La probabilidad de que un cinescopio este funcionando después de 2400 horas de uso es:

$$P(x > 2400) = \int_{2400}^{\infty} \frac{1800}{x^3}\ dx$$

$$= -\left.\frac{1800}{x^2}\right|_{2400}^{\infty}$$

$$= 0 - \left[-\frac{1800}{2400}\right]$$

$$= 0.75$$

la probabilidad de que los tres cinescopios esten funcionando después de 2400 horas es:

$$P\begin{pmatrix}\text{3 cinescopios}\\ \text{funcionando después}\\ \text{de 2400 horas}\end{pmatrix} = 0.75(0.75)(0.75)$$

$$= 0.42$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Un inversionista ha determinado de acuerdo con su experiencia que si invierte su dinero en oro y ocurre una devaluación en el transcurso de un año ganaría el doble de lo que invierte. Sin embargo, si no ocurre la devaluación, con el aumento normal en el precio del oro, ganaría solamente la mitad de lo que invierte. En caso de decidir no invertir en oro piensa depositar su dinero en el banco en donde ganaría lo mismo que invierte.

Asumiendo que la probabilidad de que ocurra una devaluación en el próximo año es de 1/3 y que la probabilidad de que el inversionista compre oro es de 1/4, calcular:

a) La probabilidad de que el próximo año invierta en oro y ocurra una devaluación.

b) Si la v.a.x representa la ganancia que obtiene el inversionista, construir su función de probabilidad.

c) Encuentre el valor esperado de la ganancia.

2. Calcular la media y la variancia de las siguientes funciones:

a)
$$P_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x = 2,\ 3,\ 6 \\ 0 & x \neq 2,\ 3,\ 6 \end{cases}$$

b)
$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\ x^{1/2}} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

3. A partir de la siguiente función densidad de probabilidad

$$f_X(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

obtener

a) $P(0.7 \leq x \leq 1.3)$

b) $E\{2\ x + 1\}$

c) $E\{x^2 + 3\ E\{x^2\}\}$

d) La función de probabilidad acumulada.

4. Obtener la función generatriz de momentos y utilizarla para calcular la media y la variancia de las siguientes funciones de probabilidad.

a)
$$P_X(x) = \begin{cases} \dfrac{a^x}{(a+1)^{x+1}} & x = 0, 1, 2, \ldots \quad a = cte > 0 \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

b)
$$P_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} P^x (1-P)^{n-x} & x = 0, 1, 2, \ldots, n \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

TEMA III

MODELOS PROBABILISTICOS COMUNES

1. Un fabricante de ciertas piezas para automóvil garantiza que una caja de sus piezas contiene como máximo dos defectuosas. Si la caja tiene veinte piezas y la experiencia ha mostrado que su proceso de manufactura produce el dos por ciento de piezas defectuosas ¿cuál es la probabilidad de que una caja de piezas satisfaga la garantía?

Solución:

Utilizando la distribución de probabilidad binomial con parámetros

$$n = 2C$$

$$p = 0.02$$

una caja cualquiera cumplirá con la garantía si tiene 0, 1 ó 2 piezas defectuosas, esto es:

$$P(x \leq 2) = \sum_{x=0}^{2} \binom{20}{x} (0.02)^{x} (0.98)^{20-x}$$

efectuando operaciones:

$$P(x \leq 2) = \binom{20}{0}(0.02)^0 (0.98)^{20} + \binom{20}{1}(0.02)^1 (0.98)^{19} + \binom{20}{2}(0.02)^2 (0.98)^{18}$$

$$= 0.67 + 0.27 + 0.05$$

$$= 0.99$$

por lo tanto la garantía del fabricante se cumplirá en el 99% de los casos.

2. Dos jugadores de tenis de igual maestría juegan un partido, ¿qué es más probable, ganar dos de cuatro juegos o tres de seis?

Solución:

La probabilidad de que gane cualquier jugador es

$$p = 0.5$$

la probabilidad de que un jugador gane 2 de 4 juegos es, utilizando la distribución binomial:

$$P(x = 2) = \binom{4}{2} (0.5)^2 (0.5)^2$$

efectuando operaciones:

$$P(x = 2) = 0.38$$

en forma análoga, la probabilidad de ganar 3 de 6 juegos es:

$$P(x = 3) = \binom{6}{3} (0.5)^3 \ (0.5)^3$$

$$= 0.31$$

por lo tanto es más probable ganar 2 de 4 juegos.

3. Un examen de opción múltiple consta de diez preguntas, en cada una de ellas aparecen cuatro posibles respuestas de las cuales sólo una es la correcta. Considerando que el estudiante que responde el examen no sabe cual es la respuesta de ninguna de las diez preguntas, calcular la probabilidad de que:

a) Responda incorrectamente todas las preguntas.

b) Apruebe el examen, sabiendo que para ello se necesita responder correctamente por lo menos ocho de las diez preguntas.

Solución:

El problema se resuelve con una distribución binomial de parámetros

$$n = 10$$

$$p = \frac{1}{4}$$

a) En este inciso se necesita tener cero éxitos, esto es:

$$P(x = 0) = \binom{20}{0} (0.25)^0 (0.75)^{10}$$

$$= 0.06$$

b) Para aprobar el examen se necesita contar con 8, 9 ó 10 éxitos:

$$P(x \geq 8) = \sum_{x=8}^{10} \binom{10}{x} (0.25)^x (0.75)^{10-x}$$

efectuando operaciones:

$$P(x \geq 8) = \binom{10}{8}(0.25)^8(0.75)^2 + \binom{10}{9}(0.25)^9(0.75) + \binom{10}{10}(0.25)^{10}(0.75)^0$$

$$= 0.0004$$

4. ¿Cuál es la probabilidad de que en una compañía con 500 empleados haya exactamente 3 de ellos que cumplan años el mismo día?

Solución:

Utilizando una distribución binomial con parámetros

$$n = 500$$

$$p = \frac{1}{365}$$

la probabilidad de que la v.a.x tome el valor de 3 es:

$$P(x = 3) = \binom{500}{3}\left(\frac{1}{365}\right)^3 \left(\frac{364}{365}\right)^{499}$$

efectuando operaciones:

$$P(x = 3) = 0.11$$

5. Un competidor de tiro al blanco se dispone a tirar y lo hará hasta que dé en el blanco, dada la calidad del competidor se estima que la probabilidad de que acierte en cada tiro independiente es de 0.85.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que acierte en el tercer tiro?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que necesite más de 4 tiros para acertar?

c) ¿Cuántos tiros se espera que necesite para acertar?

Solución:

Utilizando la distribución de probabilidad geométrica:

$$P_X(x) = p(1 - p)^{x-1} \qquad x = 1, 2, 3,\ldots$$

con

$$p = 0.85$$

a) La probabilidad de que acierte en el tercer tiro implica que tuvo dos fracasos antes del éxito, esto es:

$$P(x \leq 3) = (0.15)\ (0.15)\ (0.85)$$
$$= 0.02$$

b)

$$P(x > 4) = 1 - P(x \leq 4)$$

donde:

$$P(x \leq 4) = \sum_{x=1}^{4} 0.85(0.15)^{x-1}$$

desarrollando

$$P(x \leq 4) = 0.85 \left[1 + 0.15 + 0.15^2 + 0.15^3\right]$$
$$= 0.999$$

por lo tanto:

$$P(x > 4) = 0.001$$

c) El valor esperado es:

$$E\{x\} = \sum_{x=1}^{\infty} x(0.85)\ (0.15)^{x-1}$$

$$= \frac{0.85}{0.15} \sum_{x=1}^{\infty} x(0.15)^{x}$$

$$= 5.67(0.15 + 2(0.15)^2 + 3(0.15)^3 + \ldots)$$

$$= 1.17$$

6. A una agencia de viajes llegan diariamente 16 clientes en promedio de los cuales 40% solamente desea información y los demás se inscriben en alguno de los recorridos. Si la agencia de viajes funciona de las 10:00 a las 18:00 horas, calcule la probabilidad de que:

a) Transcurra una hora sin que llegue ningún cliente.

b) En 2 horas no se haya inscrito ningún cliente.

c) La tercera inscripción sea del quinto cliente.

d) El tiempo promedio entre llegadas de clientes.

Solución:

a) Utilizando la distribución de Poisson con parámetro λ igual a 16 clientes cada ocho horas.

$$\lambda = \frac{16}{8} \frac{\text{clientes}}{\text{horas}}$$

$$\lambda = 2 \frac{\text{clientes}}{\text{hora}}$$

$$P_X(x) = \frac{2^x}{x!} e^{-2} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

la probabilidad de que $x = 0$ es:

$$P(x = 0) = \frac{2^0}{0!} e^{-2}$$

$$= 0.14$$

b) En este inciso el parámetro λ se debe multiplicar por 0.6 debido a que sólo el 60% de los clientes que llegan a la agencia de viajes se inscriben en algún recorrido.

$$\lambda = 0.6(2) = 1.2$$

la probabilidad de que no haya ninguna inscripción en dos horas es:

$$p(x = 0) = \frac{1.2(2))}{0!} e^{-1.2(2)}$$

$$= 0.09$$

c) Utilizando la distribución binomial negativa

$$P_X(x) = \binom{x - 1}{n - 1} p^n (1 - p)^{x-n} \qquad x = n, n + 1, n + 2, \ldots$$

la probabilidad de $x = 5$, siendo $n = 3$ y $p = 0.6$, es:

$$P(x = 5) = \binom{5 - 1}{3 - 1} (0.6)^3 \ (0.4)^2$$

$$= 0.21$$

d) Como la distribución exponencial mide el tiempo entre llegadas, entonces el valor esperado de esta distribución es:

$$\mu_x = \frac{1}{\lambda}$$

$$= 0.5 \text{ horas/cliente}$$

7. Si el 0.005% de la población de un país muere anualmente debido a cierto tipo de accidente, y una compañía de seguros tiene entre sus clientes a 10,000 personas que están aseguradas contra este tipo de accidente, encontrar la probabilidad de que la compañía tenga que pagar más de dos pólizas en un año dado.

Solución:

Sea x la v.a. que representa el número de asegurados que mueren en un año, esta variable tiene distribución de Poisson con parámetro λ igual a:

$$\lambda = 0.00005 \ (10000) = 0.5 \quad \text{asegurados/año}$$

la probabilidad de que $x > 2$ es:

$$P(x > 2) = \sum_{x=3}^{\infty} \frac{0.5^x}{x!} e^{-0.5}$$

utilizando el complemento

$$P(x > 2) = 1 - \sum_{x=0}^{2} \frac{0.5^x}{x!} e^{-0.5}$$

efectuando operaciones

$$P(x > 2) = 1 - e^{-0.5} \left[1 + 0.5 + \frac{0.5^2}{2}\right]$$

$$= 0.01$$

8. Se ha observado que las fallas mecánicas ocurridas en una planta son a razón de una cada dos horas. Calcular la probabilidad de que el día de mañana:

a) Ocurran más de 2 fallas.

b) No ocurra ninguna falla durante la jornada de 8 horas de trabajo.

c) Transcurra una hora sin que se presente ninguna falla.

Solución:

Sea x la v.a. que representa el número de fallas en la planta, esta variable tiene una distribución de Poisson con parámetro λ igual a:

$$\lambda = \frac{1}{2} \text{ accidentes/hora}$$

a) La probabilidad de que $x > 2$ es:

$$P(x > 2) = 1 - \sum_{x=0}^{2} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{x}}{x!} e^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 1 - e^{-\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right]$$

$$= 0.01$$

b) La probabilidad de que $x = 0$ es:

$$P(x = 0) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{c}}{0!} e^{-\frac{1}{2}(8)}$$

$$= 0.02$$

c) Considerando a la v.a. t como la variable que representa el tiempo transcurrido hasta que se presenta la primera falla la cual tiene distribución exponencial, con parámetro $\lambda = \frac{1}{2}$ entonces la probabilidad de que $t > 1$ es:

$$P(t > 1) = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t} dt$$

efectuando operaciones

$$P(t > 1) = e^{-\frac{1}{2} t} \Big|_{1}^{\infty}$$

$$= 0.61$$

9. Durante el año, el nivel de agua de una presa para generación de energía eléctrica, se puede considerar como una v.a. x con distribución normal de probabilidad con media igual a 60 metros y desviación estándar de 18 metros. Si la corona de la presa está a 85 metros, las compuertas del vertedor de demasias están a 80 metros y la toma de agua para alimentar las turbinas esta a 20 metros, calcular la probabilidad de que:

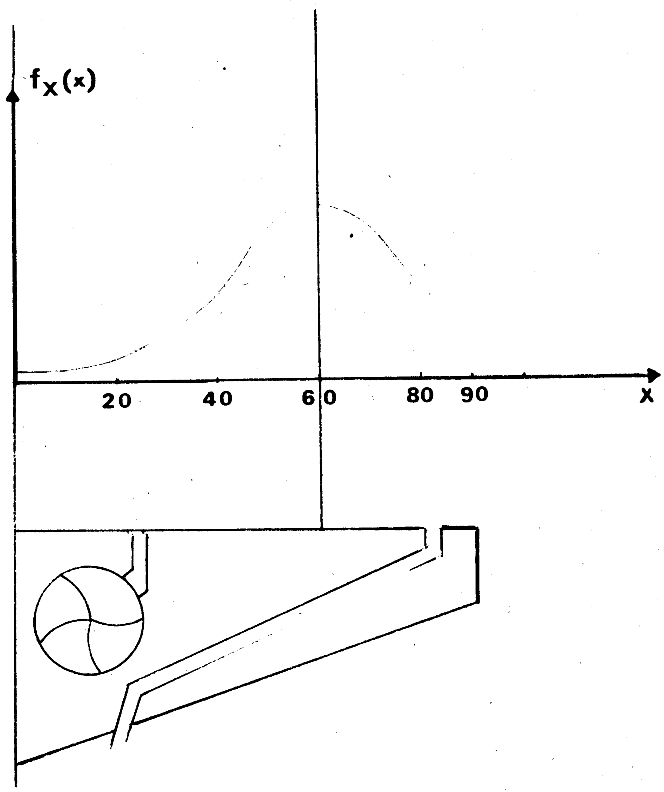
a) Haya derrames por su vertedor de demasias.

b) Exista peligro de destrucción de la presa, por sobrepasar el nivel de las aguas la corona de la presa.

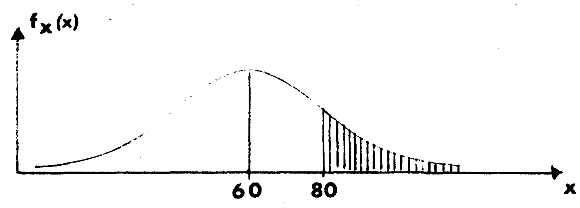
c) Deje de producir energía por no llegar agua a las turbinas.

Solución:

Con ayuda del siguiente dibujo



a) La probabilidad de que $x \geq 80$ metros es:



estandarizando

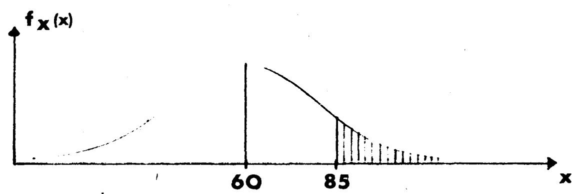
$$z = \frac{80 - 60}{18}$$

$$= 1.11$$

utilizando tablas de distribución normal estándar

$$P(x \geq 80) = P(z \geq 1.11) = 0.13$$

b) La probabilidad de que $x \geq 85$ metros es:



estandarizando

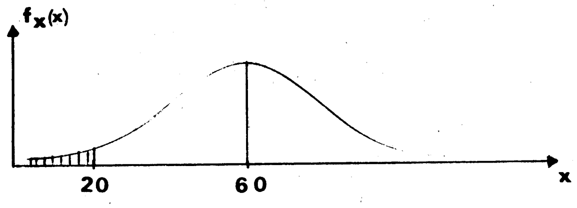
$$z = \frac{85 - 60}{18}$$

$$= 1.39$$

utilizando tablas:

$$P(x \geq 85) = P(z \geq 1.39) = 0.08$$

c) Por último la probabilidad de que $x \leq 20$ es:



estandarizando

$$z = \frac{20 - 60}{18}$$

$$= -2.22$$

leyendo en tablas:

$$P(x \leq 30) = P(z \leq -2.22) = 0.01$$

10. Un voceador desea saber cuântos periôdicos debe comprar para el dîa de mañana. Sabe que la demanda promedio es de 40 ejemplares diarios, decide compar 55, ¿cuâl es la probabilidad de que le sobren mâs de 15 ejemplares?

Soluciôn:

Utilizando la distribuciôn de Poisson con parâmetro

$$\lambda = 40$$

se tiene que para que le sobren por lo menos 15 ejemplares debe vender 40 o menos, entonces:

$$P(x \leq 40) = \sum_{x=0}^{40} \frac{40^x}{x!} e^{-40}$$

debido a que el producto Np es suficientemente grande conviene aproximar la distribuciôn de Poisson através de la normal con media y desviaciôn estândar iguales a:

$$\mu_x = \lambda = 40$$

$$\sigma_x = \sqrt{\lambda} = 6.32$$

entonces la probabilidad de que x sea menor de 40 es, estandarizando:

$$z = \frac{40 - 40}{6.32} = 0.00$$

por lo tanto

$$P(x \leq 40) = P(z \leq 0) = 0.50$$

11. En la fabricación de rodillos de acero para ajustarlos a un ensamble, se considera que el diámetro externo es un v.a. con distribución normal de media igual a 2.30 cm y desviación estándar igual a 0.06 cm. Las especificaciones límite son un diámetro igual a 2.31 ± 0.1 cm. Una pieza con un diámetro abajo de tales especificaciones se considera desperdicio, mientras que una pieza con un diámetro mayor de lo especificado deberá reprocesarse.

¿Cuál es el porcentaje de piezas que:

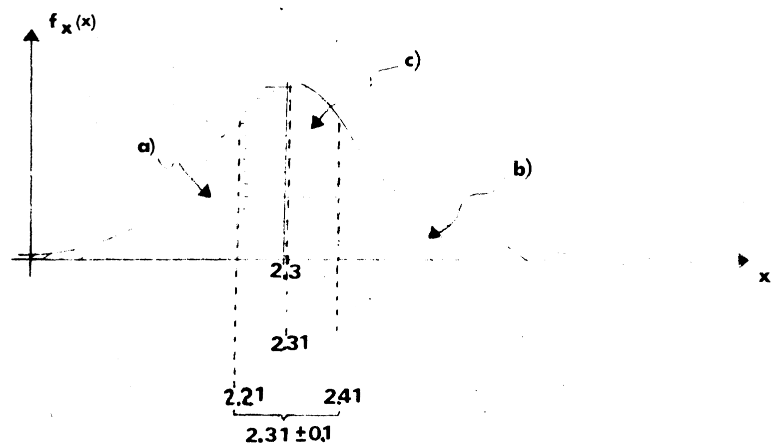
a) Están siendo desperdiciadas.

b) Necesitan reprocesarse.

c) Aceptables.

Solución:

Como el diámetro de los rodillos es una v.a. con distribución normal entonces se tiene que la respuesta a cada inciso es:



efectuando operaciones

a) $$P(x \leq 2.21) = ?$$

estandarizando

$$z = \frac{2.21 - 2.30}{0.06}$$

$$= -1.50$$

utilizando tablas de la distribución normal estândar

$P(x \leq 2.21) = P(z \leq -1.50) = 0.07$; 7% se desperdicia

b) $$P(x \geq 2.41) = ?$$

estandarizando

$$z = \frac{2.41 - 2.30}{0.06}$$

$$= 1.83$$

por tablas

$P(x \geq 2.41) = P(z \geq 1.83) = 0.03$; 3% se reprocesa

c) $$P(2.21 \leq x \leq 2.41) = ?$$

estandarizando

$$z = \frac{2.21 - 2.30}{0.06} = -1.50$$

$$z = \frac{2.41 - 2.30}{0.06} = 1.83$$

por tablas

$P(2.21 \leq x \leq 2.41) = P(-1.50 \leq z \leq 1.83) = 0.90$

90% se aceptan

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Un concesionario de automóviles vende en un mismo día, cinco vehículos idénticos para uso particular. Suponiendo que la probabilidad de que este tipo de vehículos estén funcionando dos años después es de 0.8; calcular la probabilidad de que a los dos años:

   a) Los tres vehículos estén en servicio.

   b) Máximo dos vehículos estén fuera de servicio.

   c) Tres estén fuera de servicio.

   d) Los cinco estén fuera de servicio.

2. Si la probabilidad de que una viga de concreto falle a la compresión es de 0.05, usando la función de probabilidad de Poisson, obtener la probabilidad de que de 50 vigas:

   a) Ninguna falle.

   b) Cuando más dos fallen

   c) Al menos tres fallen

   d) Cinco fallen.

3. El autobús de una línea urbana puede arribar a una parada con igual probabilidad durante un lapso de cinco minutos. Hallar la probabilidad de que un pasajero que llegue a la parada tenga que esperar el autobús menos de 3 minutos.

4. La probabilidad de que un tipo de automóvil tenga una descompostura es de 0.05.

   Hallar la probabilidad de que de 10 automóviles de este tipo

   a) Uno sufra una descompostura.

   b) A lo más tres se descompongan.

   c) Dos o más sufran una descompostura.

5. Si el 20% de los remaches producidos por una máquina son defectuosos, encontrar la probabilidad de que en cuatro remaches tomados al azar:

a) Uno esté defectuoso

b) Ninguno esté defectuoso

c) Más de dos estén defectuosos

7. Se admite que el número de defectos "x" en un tubo de rayos catódicos para televisión obedece a una ley de probabilidad de Poisson con parámetro $\lambda = 4$. Calcular la probabilidad de que:

a) No haya ningún defecto en el tubo de rayos catódicos.

b) Haya más de dos defectos en el tubo.

c) El número de defectos esté comprendido entre 3 y 7 inclusive.

8. Un profesor de la universidad ha observado que el 30% de sus alumnos llegan tarde a su clase, si cuenta el grupo con 60 alumnos ¿cuál es la probabilidad de que en la próxima clase lleguen más de 25 personas tarde al salón de clase?

9. Anote, sin hacer cálculos, el nombre de la distribución de probabilidad que utilizaría para obtener la solución a los siguientes problemas:

a) El promedio de accidentes de tránsito en una ciudad es a razón de 72 por día. ¿Cuál es la probabilidad de que el día de mañana ocurran más de 20 accidentes?

DISTRIBUCION ________________________

b) Un laberinto tiene un corredor recto y al final una bifurcación en la que se puede escoger entre ir a la derecha o a la izquierda, se llegará a la salida solamente si se selecciona el camino de la izquierda. Si al laberinto entran diez personas, una por una, ¿cual es la probabilidad de qué seis de ellas lleguen a la salida?

DISTRIBUCION ________________________

c) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno que presenta un examen, utilice más de dos horas para resolverlo?

DISTRIBUCION ______________________

10. La distancia "x" a la cual un competidor puede efectuar un tiro, en una competencia de lanzamiento de jabalina, se considera que es una variable aleatoria con distribución normal con parámetros $\mu_x = 50$ m y $\sigma_x^2 = 25$ m^2. Si el competidor en cuestión efectúa un tiro, calcular la probabilidad de que su lanzamiento:

a) Haya sido de más de 55 m.

b) Haya sido entre 50 y 60 m.

TEMA IV

VARIABLES ALEATORIAS CONJUNTAS

1. Sea la v. a. X el número de éxitos que se pueden obtener en los tres primeros ensayos de un experimento aleatorio que consta de cuatro ensayos independientes de Bernoulli, y sea la v. a. Y una variable que representa el número de éxitos que se pueden obtener en los dos últimos de estos cuatro ensayos. Considerando que la probabilidad de éxito en cada ensayo es de 0.25, determinar:

   a) La función de probabilidad conjunta de las variables aleatorias X y Y.

   b) Las funciones de probabilidad marginales.

   c) Las gráficas de las funciones de probabilidad obtenidas en los incisos anteriores.

Solución:

Todos los posibles resultados del experimento aleatorio y sus correspondientes probabilidades son:

Ensayos	P(•)
E E E E	$0.25^4 = 0.004$
E E E F	$0.25^3(0.75) = 0.012$
E E F E	$0.25^3(0.75) = 0.012$
E E F F	$0.25^2(0.75)^2 = 0.035$
E F E E	$0.25^3(0.75) = 0.012$
E F E F	$0.25^2(0.75)^2 = 0.035$
E F F E	$0.25^2(0.75)^2 = 0.035$
E F F F	$0.25\ (0.75)^3 = 0.105$
F E E E	$0.25^3(0.75) = 0.012$
F E E F	$0.25^2(0.75)^2 = 0.035$
F E F E	$0.25^2(0.75)^2 = 0.035$
F E F F	$0.25\ (0.75)^3 = 0.105$
F F E E	$0.25^2(0.75)^2 = 0.035$
F F E F	$0.25\ (0.75)^3 = 0.105$
F F F E	$0.25\ (0.75)^3 = 0.105$
F F F F	$0.75^4 = 0.316$

A partir del espacio muestral, los valores que pueden tomar las variables aleatorias X y Y son respectivamente:

Ensayos	X	Y
E E E E		2
E E E F		1
E E F E	2	1
E E F F	2	0
E F E E	2	2
E F E F	2	1
E F F E	1	1
E F F F	1	0
F E E E	2	2
F E E F	2	1
F E F E	1	1
F E F F	1	0
F F E E	1	2
F F E F	1	1
F F F E	0	1
F F F F	0	0

a) La función de probabilidad conjunta se forma a partir de la tabla anterior, obteniéndose:

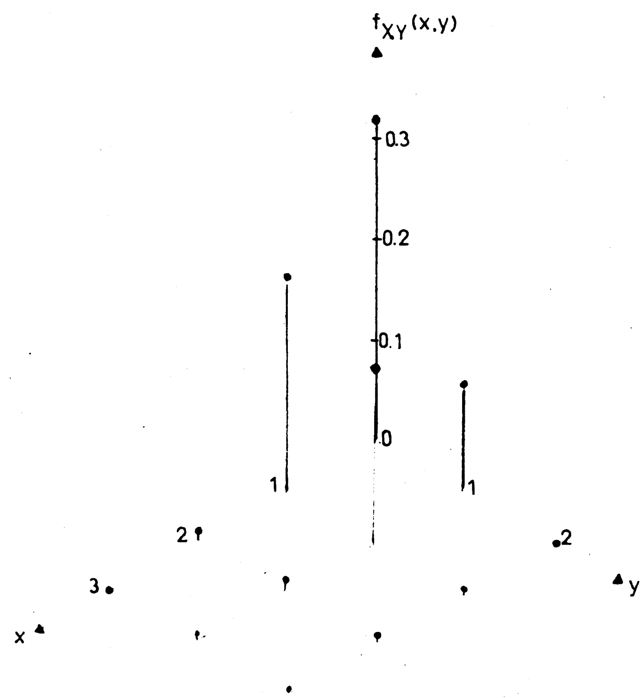
X \ Y	0	1	2
0	0.316	0.105	0.000
1	2(0.105) = 0.210	2(0.035) + 0.105 = 0.175	0.035
2	0.035	2(0.035) + 0.012 = 0.082	2(0.012) = 0.024
3	0.000	0.012	0.004

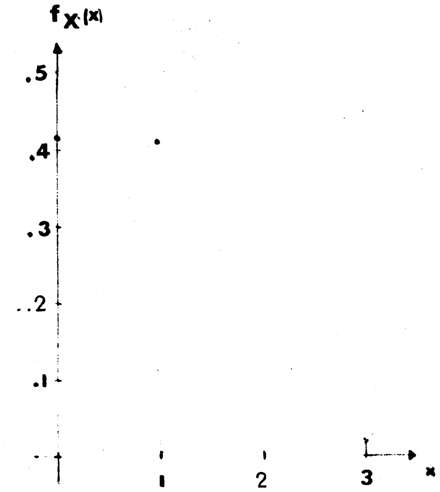
b) Las funciones marginales son:

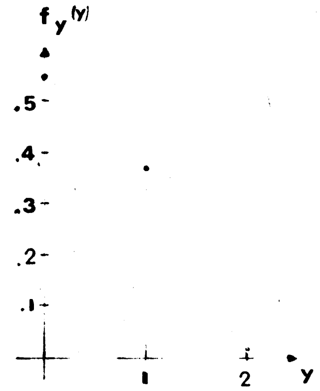
x	$f_x(x)$
0	0.316 + 0.105 + 0 = 0.421
1	0.210 + 0.175 + 0.035 = 0.420
2	0.035 + 0.082 + 0.024 = 0.141
3	0 + 0.012 + 0.004 = 0.016

y	$f_Y(y)$
0	0.316 + 0.210 + 0.035 + 0 = 0.561
1	0.105 + 0.175 + 0.082 + 0.012 = 0.374
2	0 + 0.035 + 0.024 + 0.004 = 0.073

c) Las gráficas de cada una de las funciones de probabilidad obtenidas anteriormente son:







2. En un automóvil de seis cilindros se colocan al azar cuatro bujías marca A y dos marca B, meses después el automóvil requiere cambio de bujías.

Sea x la variable aleatoria asociada a la primera bujía extraída la cual tomará el valor de uno si la bujía es marca A y dos si es marca B. Asimismo, sea Y la variable aleatoria asociada a la segunda bujía extraída la cual tomará valores en la misma forma que la variable aleatoria x.

Obtener:

a) La distribución de probabilidad conjunta de las variables aleatorias X e Y, $f_{X,Y}(x, y)$.

b) Las distribuciones marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$

c) La media y la variancia de cada una de las variables aleatorias.

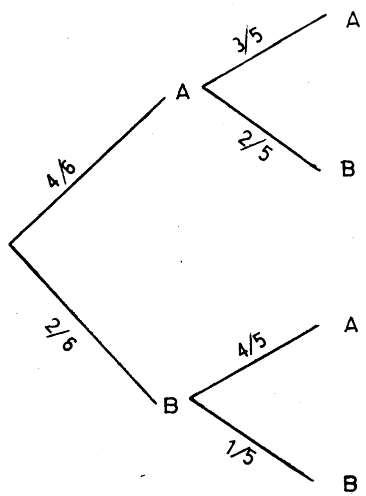
d) La distribución de probabilidad condicional de x dado que $y = 2$.

e) La distribución de probabilidad condicional de y dado que $x = 1$.

f) La covariancia y el coeficiente de correlación.

Solución:

El espacio muestral del experimento aleatorio es:



Eventos	P(°)
A ∩ A	$\frac{12}{30} = 0.40$
A ∩ B	$\frac{8}{30} = 0.27$
B ∩ A	$\frac{8}{30} = 0.27$
B ∩ B	$\frac{2}{30} = 0.07$

Los valores que toman las variables aleatorias X e Y se obtienen a partir del espacio muestral:

Eventos	X	Y
A A	1	1
A B	1	2
B A	2	1
B B	2	2

a) La función de probabilidad conjunta es:

x \ y	1	2
1	0.40	0.27
2	0.27	0.07

b) Las funciones de probabilidad marginales son:

x	$P_X(x)$
1	0.40 + 0.27 = 0.67
2	0.27 + 0.07 = 0.34

y	$P_Y(y)$
1	0.40 + 0.27 = 0.67
2	0.27 + 0.07 = 0.34

c)

$$E\{x\} = \sum_{y=1}^{2} x\, P_X(x) \qquad E\{y\} = \sum_{x=1}^{2} y\, P_Y(y)$$

desarrollando

$$E\{x\} = 1(0.67) + 2(0.34) \; ; \qquad E\{y\} = 1(0.67) + 2(0.34)$$

$$E\{x\} = 1.33 \; ; \qquad E\{y\} = 1.33$$

$$\sigma_x^2 = E\{x\}^2 - (E\{x\})^2 \; ; \qquad \sigma_y^2 = E\{y\}^2 - (E\{y\})^2$$

$$E\{x^2\} = \sum_{x=1}^{2} x^2 P_X(x) \; ; \qquad E\{y^2\} \sum_{y=1}^{2} y^2\, P_Y(y)$$

$$E\{x^2\} = (1)^2(0.67) + (2)^2(0.34) \; ; \qquad E\{y^2\} = (1)^2 0.67 + (2)^2(0.34)$$

$$E\{x^2\} = 2.00 \; ; \qquad E\{y^2\} = 2.00$$

$$E\{x\} = 1.33 \; ; \qquad E\{y\} = 1.33$$

sustituyendo

$$\sigma_x^2 = 2.00 - (1.33)^2 \; ; \qquad \sigma_y^2 = 2.00 - (1.33)^2$$

$$\sigma_x^2 = 0.22 \; ; \qquad \sigma_y^2 = 0.22$$

d)

$$P_{X|Y}(x|y = 2) = \frac{P_{X\,Y}(x,\, y)}{P_Y(y = 2)}$$

x	$P_{X\|Y}(x\|y = 2)$
1	$\frac{0.27}{0.34} = 0.80$
2	$\frac{0.07}{0.34} = 0.20$

e)

$$P_{Y|X}(y|x = 1) = \frac{P_{X,Y}(x, y)}{P_X(x = 1)}$$

y	$P_{Y\|X}(y\|x = 1)$
1	$\frac{0.40}{0.67} = 0.60$
2	$\frac{0.27}{0.67} = 0.40$

f)

$$\sigma_{xy} = E\{xy\} - E\{x\}\, E\{y\}$$

$$E\{xy\} = \sum_{x=1}^{2} \sum_{y=1}^{2} x\, y\, P_{X,Y}(x, y)$$

$$= (1)(1)(0.40) + (1)(2)(0.27) + (2)(1)(0.27) + (2)(2)(0.07)$$

$$= 1.73$$

$$E\{x\} = 1.33$$

$$E\{y\} = 1.33$$

sustituyendo

$$\sigma_{x\,y} = 1.73 - 1.33(1.33)$$

$$\sigma_{x\,y} = -\,0.04$$

por último, el coeficiente de correlación es:

$$\rho_{x\,y} = \frac{\sigma_{x\,y}}{\sigma_x\, \sigma_y}$$

$$\sigma_{x\,y} = -\,0.04$$

$$\sigma_x = \sqrt{0.21}$$

$$\sigma_y = \sqrt{0.21}$$

sustituyendo

$$\rho_{x\ y} = \frac{-\ 0.04}{\sqrt{0.22}\ \sqrt{0.22}}$$

$$= -\ 0.20$$

3. Dada la siguiente función densidad de probabilidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,\ y) = \begin{cases} \dfrac{3y(1\ +\ 4\ x^2)}{14} & 0 \le x \le 1 \\ & 0 \le y \le 2 \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases}$$

a) Verificar que es una función densidad de probabilidad.

b) Obtener la probabilidad de que $x \geq 0.5$ y $y \leq 1.2$

c) Obtener las funciones marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$

d) Investigar si las variables aleatorias son independientes.

Solución:

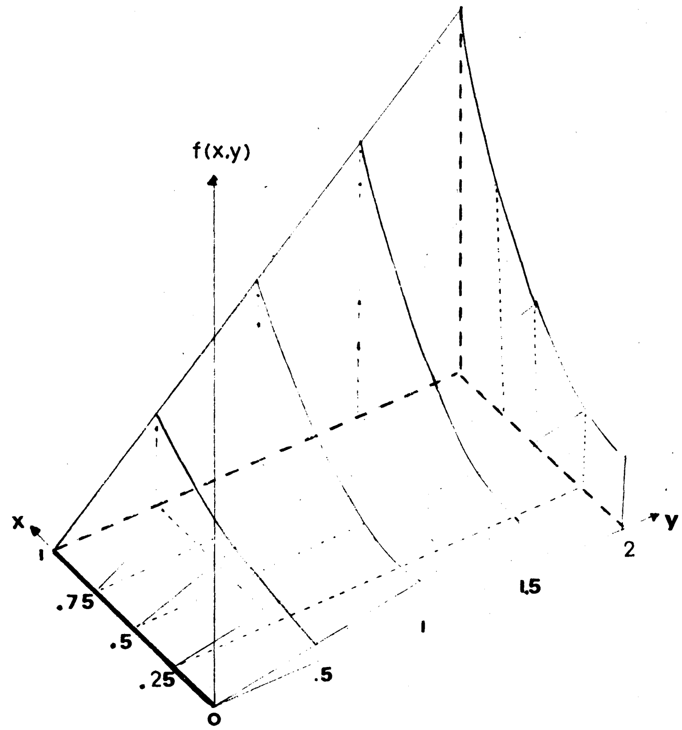
a) Para que la función sea función de probabilidad se deben cumplir las siguientes condiciones:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,\ y)\ dy\ dx = 1$$

y

$$f_{X,\ Y}(x,\ y) \geq 0 \qquad \forall\ x$$
$$\qquad\qquad\qquad \forall\ y$$

al graficar la función se observa que la segunda condición se cumple para todo valor de X y de y:



sustituyendo la función en la doble integral

$$\int_0^2 \int_0^1 \frac{3y(1 + 4x^2)}{14} \, dx \, dy = 1$$

integrando

$$\frac{3}{14}\int_0^2 \left(x\,y + \frac{4}{3} x^3 \, y \,\Big|_0^1 \right) dy$$

$$\frac{3}{14}\int_0^2 \frac{7}{3}\, y \, dy = \frac{7}{14}\frac{y^2}{2}\,\Big|_0^2 = \frac{7}{14}(2) = 1$$

b)

$$P(x \geq 0.5 \; , \; y \leq 1.2) = \frac{3}{14}\int_{0.5}^{1.0}\int_0^{1.2} y(1 + 4x^2) \, dy \, dx$$

$$= \frac{3}{14}\int_{0.5}^{1.0} \frac{y^2}{2}(1 + 4x^2)\,\Big|_0^{1.2} dx$$

$$= \frac{27}{175}\int_{0.5}^{1.0} (1 + 4\ x^2)\ dx$$

$$= \frac{27}{175}\ (x + \frac{4}{3}\ x^3)\ \Big|_{0.5}^{1.0}$$

$$= \frac{27}{175}\ (\frac{7}{3} - \frac{2}{3}) = 0.2571$$

c)

$$f_X(x) = \frac{3}{14}\int_0^2 (y + 4\ y\ x^2)\ dy = \frac{3}{14}\ (\frac{y^2}{2} + 2\ y^2\ x^2)\ \Big|_0^2$$

$$= \frac{3}{14}\ (2 + 8\ x^2)$$

$$f_Y(y) = \frac{3}{14}\int_0^1 (y + 4\ y\ x\ )\ dx = \frac{3}{14}\ (x\ y + \frac{4}{3}\ y\ x^3)\ \Big|_0^1$$

$$= \frac{3}{14}\ (y + \frac{4}{3}\ y) = \frac{1}{2}\ y$$

d) Si las variables aleatorias son independientes se debe cumlir que:

$$f_{X,Y}(x,\ y) = f_X(x)\ f_Y(y)$$

sustituyendo

$$\frac{3y(1 + 4\ x^2)}{14} = \frac{3}{14}\ (2 + 8\ x^2)\ (\frac{1}{2}\ y)$$

simplificando

$$\frac{3y(1 + 4\ x^2)}{14} = \frac{3y(1 + 4\ x^2)}{14}$$

por lo tanto, las variables aleatorias X e Y son independientes.

4. Dos variables aleatorias tienen la siguiente función densidad de probabilidad conjunta.

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} K(x + y) & 0 \leq x \leq 1 \\ & x \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{c. o. c.} \end{cases}$$

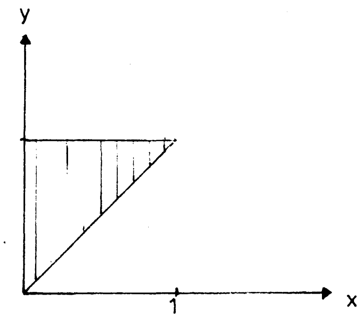
a) Calcular el valor de K

b) Calcular la probabilidad de que $x \leq 0.7$ e $y \geq 0.4$

c) Obtener la función de probabilidad de Y dado X $(f_{Y|X}(y|x))$

Solución:

a) El espacio muestral de las variables aleatorias es:



para que la función dada sea una función de probabilidad se debe cumplir que:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\ dy\ dx = 1$$

además

$$f_{X,Y}(x, y) \geq 0 \qquad \forall\ x$$
$$\forall\ y$$

sustituyendo

$$\int_{0}^{1}\int_{x}^{1} K(x + y)\ dy\ dx = 1$$

efectuando las integrales

$$K\int_{0}^{1} \left(x\ y + \frac{y^2}{2} \Big|_{x}^{1} \right) dx = 1$$

$$K \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + x - \frac{3}{2} x^2\right) dx = 1$$

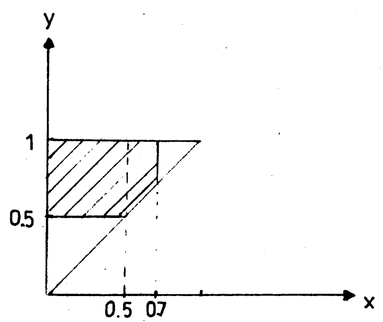
$$\frac{K}{2}(x + x^2 - x^3) \Big|_0^1 = 1$$

$$K = 2$$

se observa que la condición $f_{X,Y}(x, y) \geq 0$ también se cumple para cualquier valor de X e Y, por lo tanto, la función densidad de probabilidad conjunta es:

$$f_{X,\ Y}(x, y) = \begin{cases} 2(x + y) & 0 \leq x \leq 1 \\ & x \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{C. O. C.} \end{cases}$$

b)



$$P(x \leq 0.7\ ;\ y \geq 0.4) = \int_0^{0.5} \int_{0.5}^{1} 2(x + y)\ dy\ dx + \int_{0.5}^{0.7} \int_x^1 2(x + y)\ dy\ dx$$

efectuando las integrales

$$\int_0^{0.5} \int_{0.5}^{1} 2(x + y)\ dy\ dx = 2 \int_0^{1/2} \left(x\ y + \frac{y^2}{2}\right) \Big|_{1/2}^{1} dx$$

$$= \int_0^{1/2} (x + \tfrac{3}{4})\, dx$$

$$= \left. \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4} x \right|_0^{1/2}$$

$$= 0.5$$

de igual forma:

$$\int_{0.5}^{0.7} \int_x^1 2(x + y)\, dy\, dx = 2 \int_{0.5}^{0.7} \left(x\, y + \left. \frac{y^2}{2} \right|_x^1 \right) dx$$

$$= 2 \int_{0.5}^{0.7} (\tfrac{1}{2} + x - \tfrac{3}{2} x^2)\, dx$$

$$= \left. x + x^2 - x^3 \right|_{0.5}^{0.7}$$

$$= 0.847 - 0.625$$

$$= 0.222$$

por último, sumando las integrales

$$P(x \leq 0.7 \; ; \; y \geq 0.4) = 0.500 + 0.222 = 0.722$$

c)

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}$$

siendo la función marginal $f_X(x)$ igual a

$$f_X(x) = \int_x^1 2(x + y)\, dy$$

integrando, se obtiene

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + 2x - 3x^2) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{c. o. c.} \end{cases}$$

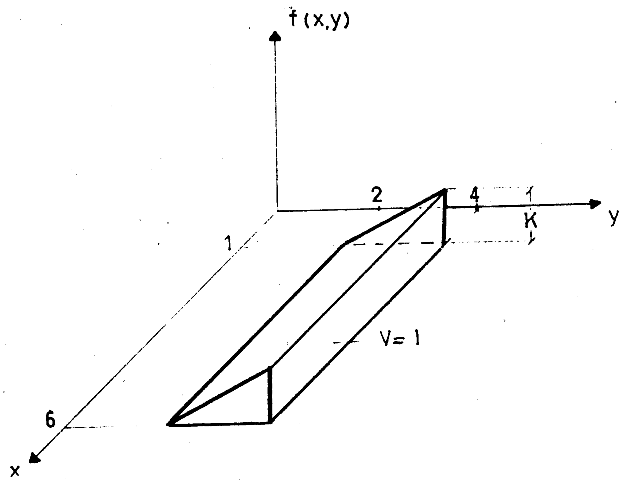
sustituyendo

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{2(x + y)}{\frac{1}{2}(1 + 2x - 3x^2)}$$

simplificando:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{4(x + y)}{1 + 2x - 3x^2}$$

5. Obtener la función densidad de probabilidad conjunta a partir de la siguiente gráfica:



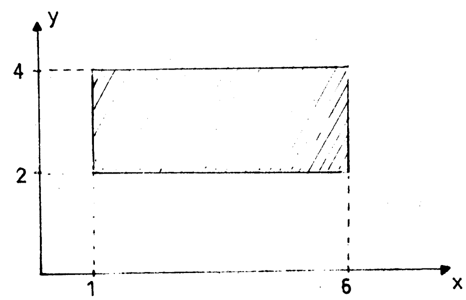
Solución:

Observando la gráfica, los valores que pueden tomar las variables aleatorias X e Y son respectivamente:

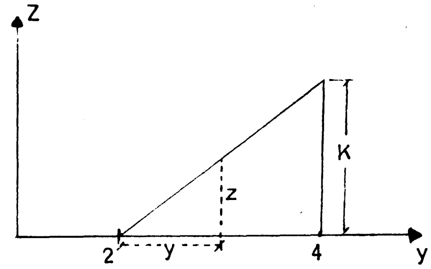
$$1 \leq x \leq 6$$

$$2 \leq y \leq 4$$

por lo tanto, el espacio muestral es:



efectuando un corte transversal de la figura en un punto X = x se obtiene en el plano (z = f(x, y), y) lo siguiente:



por triângulos semejantes:

$$\frac{4 - 2}{K} = \frac{(y - 2)}{Z}$$

despejando Z

$$Z = f(x, y) = \frac{(y - 2) K}{2}$$

por lo tanto, la función se puede escribir como sigue:

$$f(x, y) = \begin{cases} (\frac{1}{2} y - 1) K & 1 \leq x \leq 6 \\ & 2 \leq y \leq 4 \\ 0 & \text{c. o. c.} \end{cases}$$

para que la función sea densidad de probabilidad se debe cumplir que ésta sea positiva para todo valor de X e Y, lo cual se observa que si se cumple en la gráfica del enunciado del problema, además su volumen debe ser igual a la unidad, ésto quiere decir que:

$$\int_1^6 \int_2^4 (\frac{1}{2} y - 1) K \, dy \, dx = 1$$

de aquí se obtiene el valor de K, efectuando los cálculos:

$$K \int_1^6 \frac{y^2}{4} - y \Big|_2^4 dx = 1$$

$$K \int_1^6 dx = 1$$

$$K \left(x \Big|_1^6\right) = 1$$

$$5 K = 1$$

$$K = \frac{1}{5}$$

finalmente, la función densidad de probabilidad conjunta es:

$$f_{X,\, Y}(x,\, y) = \begin{cases} \frac{1}{5}(\frac{y}{2} - 1) & 1 \leq x \leq 6 \\ & 2 \leq y \leq 4 \\ 0 & \text{c. o. c.} \end{cases}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Obtener la covariancia y el coeficiente de correlación del ejercicio número uno de los problemas resueltos.

2. Verificar que el coeficiente de correlación del ejercicio número tres de los problemas resueltos es igual a cero.

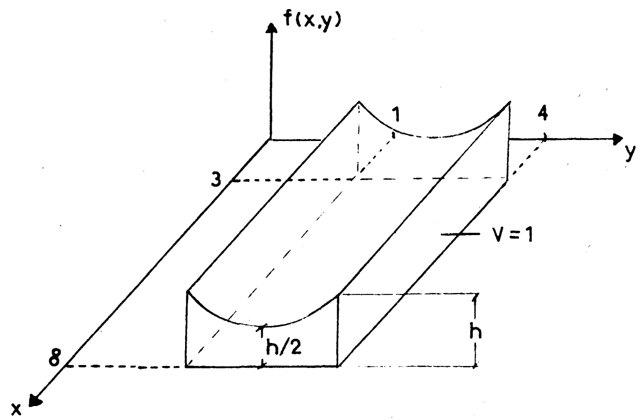
3. A partir del ejercicio número cinco de los problemas resueltos obtener:

   a) Las funciones marginales

   b) El coeficiente de correlación

   c) La función densidad de probabilidad de X dado Y $(f_{X|Y}(x|y))$

4. Obtener la función densidad de probabilidad conjunta a partir de la siguiente gráfica:



5. Obtener las funciones marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$ y las funciones condicionales $f_{X|Y}(x|y)$ y $f_{Y|X}(y|x)$ de la función densidad de probabilidad del problema anterior.

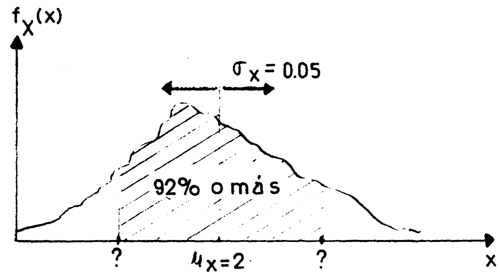
TEMA V

TEOREMAS SOBRE CASOS LIMITE

1. Dada una v.a. x con función densidad de probabilidad desconocida con media igual a 2 y desviación estándar igual a 0.05, obtener el intervalo más corto alrededor de la media que contenga cuando menos el 92% de los casos.

Solución:

Como no se conoce la función densidad de probabilidad de la v. a. X entonces es necesario utilizar la desigualdad de Tchebychev



$$P(\mu_x - k\,\sigma_x \leq x \leq \mu_x + k\,\sigma_x) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

como el intervalo pedido debe contener al menos 92% del área entonces:

$$1 - \frac{1}{k^2} \geq 1.92$$

despejando k

$$k \geq \sqrt{12.50}$$

$$\geq 3.54$$

tomando el valor límite $k = 3.54$ se obtiene que las cotas del intervalo son:

$$\mu_x - k\,\sigma_x = 2 - 3.54(0.05) = 1.82$$

$$\mu_x + k\,\sigma_x = 2 + 3.54(0.05) = 2.18$$

si se toma un valor de $k \geq 3.54$, por ejemplo $k = 4$, las cotas del intervalo serán:

$$\mu_x + k\,\sigma_x = 2 + 4(0.05) = 1.80$$

$$\mu_x - k\,\sigma_x = 2 - 4(0.05) = 2.20$$

se observa que para cualquier valor de k mayor de 3.54, el intervalo que resulta es más grande, por lo tanto, el intervalo más corto alrededor de la media que contiene cuando menos el 92% de los casos es:

$$\mu_x - 3.54\ \sigma_x \leq x \leq \mu_x + 3.54\ \sigma_x$$

$$1.82 \leq x \leq 2.18$$

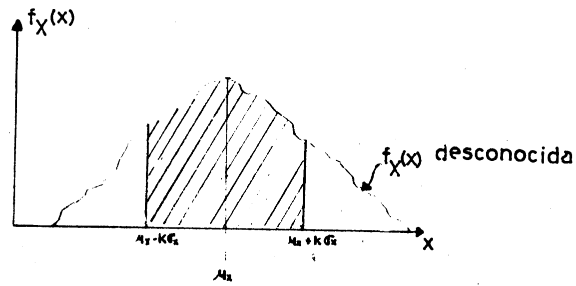
2. El tiempo promedio de recorrido entre dos estaciones de una ruta del metro es de 1.55 minutos con una desviación estándar de 0.8 minutos.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de recorrido entre dos estaciones se encuentre entre 1.55 $\pm$1minuto ?

   b) Suponiendo que la experiencia aleatoria tiene distribución normal, repetir el cálculo del inciso anterior.

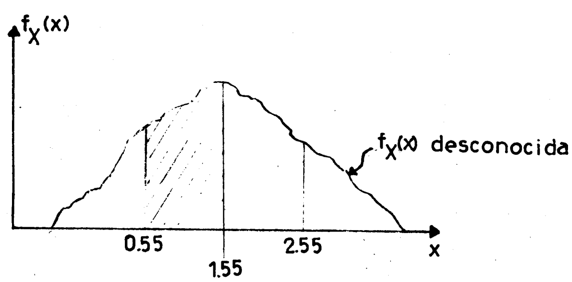
Sólución:

a) Como no se conoce la distribución de probabilidad es necesario estimar ésta mediante el teorema de la desigualdad de Tchebychev



$$P(\mu_x - k\ \sigma_x \leq x \leq \mu_x + k\ \sigma_x) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

sustituyendo los valores de μ_x y σ_x se obtiene:



$$P(1.55 - k(0.8) \leq x \leq (1.55 + k(0.8)) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

despejando el valor de k de cualquiera de los dos intervalos

$$\mu_x - k\,\sigma_x = 0.55 \qquad\qquad \mu_x + k\,\sigma_x = 2.55$$

$$k = \frac{1.55 - 0.55}{0.8} \qquad\qquad k = \frac{2.55 - 1.55}{0.8}$$

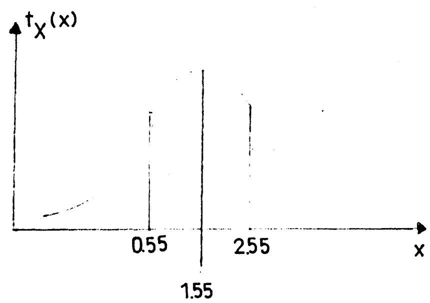
$$k = 1.25$$

sustituyendo

$$P(0.55 \leq x \leq 2.55) \geq 1 - \frac{1}{0.25^2}$$

$$\geq 0.36$$

b) Suponiendo distribución normal de probabilidad:



estandarizando

$$z = \frac{0.55 - 1.55}{0.8} = -1.25 \quad ; \quad z = \frac{2.55 - 1.55}{0.8} = 1.25$$

utilizando tablas de la distribución normal estándar

$$P(0.55 \leq x \leq 2.55) = P(-1.25 \leq z \leq 1.25) = 0.79$$

Comparando los resultados se observa que aún cuando son diferentes el teorema de la desigualdad de Tchebychev se satisface.

3. Calcular la probabilidad de obtener un máximo de tres éxitos en 100 ensayos independientes de Bernoulli.

a) Utilizando la distribución binomial

b) Aproximando con la distribución normal

Considerar $p = 0.05$.

Solución:

a) Utilizando la distribución binomial

$$P(x \leq 3) = \sum_{x=0}^{3} P_X(x)$$

$$= P_X(0) + P_X(1) + P_X(2) + P_X(3)$$

$$= \binom{100}{0} (0.05)^0 (0.95)^{100} + \binom{100}{1} (0.05)^1 (0.95)^{99} +$$

$$= \binom{100}{2} (0.05)^2 (0.95)^{98} + \binom{100}{3} (0.05)^3 (0.95)^{97}$$

efectuando operaciones:

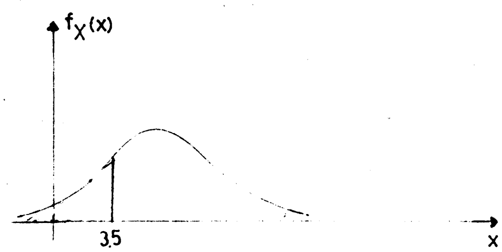
$$P(x \leq 3) = 0.006 + 0.031 + 0.081 + 0.139$$

$$= 0.257$$

b) Aproximando con la distribución normal.

Efectuando un ajuste por continuidad la probabilidad buscada es:

$$P(-\infty \leq x \leq 3.5)$$



estandarizando

$$z = \frac{3.5 - 100(0.05)}{\sqrt{100(0.05)(0.95)}} = -0.69$$

leyendo en tablas de la distribución normal estándar:

$$P(-\infty \leq x \leq -3.5) = P(-\infty \leq z \leq -0.69) = 0.245$$

4. La demanda de cierto producto en un almacén, se ha observado que tiene distribución de Poisson, con parámetro $\lambda = 15$ unidades diarias.

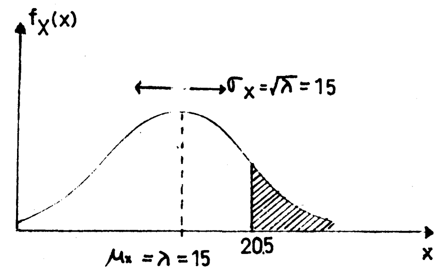
Si el encargado del almacén desea disponer de 20 unidades en un día ¿cuántas veces al mes se puede esperar que tenga faltantes?

Solución:

Para que haya faltantes, la demanda x tiene que ser mayor de 20 unidades por día, ésto es $P(x > 20)$, utilizando la distribución de Poisson.

$$P(x > 20) = \sum_{x=21}^{\infty} \frac{15^x}{x!} e^{-15} = 1 - \sum_{x=0}^{20} \frac{15^x}{x!} e^{-15}$$

aproximando con la distribución de probabilidad normal



$$\mu_x = \lambda = 15$$

estandarizando

$$z = \frac{20.5 - 15}{\sqrt{15}} = 1.42$$

leyendo en tablas de la distribución normal estándar, se obtiene:

$$P(x \geq 20.5) = P(z > 1.42) = 0.077$$

finalmente , si el mes tiene 30 días entonces el 7.7% de estos días se puede esperar que haya faltantes

$$30(0.077) = 2.31 \text{ días}$$

5. Refiriéndose al problema anterior, calcular la probabilidad de que $x > 20$ unidades diarias, sin utilizar la aproximación de la distribución normal.

Solución:

Utilizando directamente la distribución de Poisson

$$P(x > 20) = 1 - \sum_{x=0}^{20} \frac{15^x}{x!} e^{-15}$$

con ayuda del siguiente programa de computadora

```
10 SUM=0
20 FACT=1
30 LAMBDA=15
40 FOR X=0 TO 20
50 SUM=SUM + LAMBDA^X/FACT
60 FACT=FACT*(X+1)
70 NEXT X
80 SUM=EXP(-LAMBDA)*SUM
90 PRINT USING "#.###";SUM
99 END
```

se obtiene que el resultado de la sumatoria es:

$$\sum_{x=0}^{20} \frac{15^x}{x!} e^{-15} = 0.917$$

por lo tanto

$$P(x > 20) = 1 - 0.917$$

$$= 0.083$$

a partir de este resultado se observa que la aproximación dada por la distribución normal tiene un error de

$$e_r = \frac{0.083 - 0.077}{0.083} = 7.23\%$$

el cual se considera aceptable.

TEMA VI

ESTADISTICA DESCRIPTIVA

1. Durante la época de lluvias del año pasado se tomaron las siguientes lecturas en metros, referentes al nivel del agua en una presa

46.6	47.8	51.4	45.6	45.5
55.2	59.6	43.2	47.5	52.8
50.1	43.2	52.8	51.2	50.9
47.7	43.3	49.3	54.5	42.8
51.2	46.6	43.1	48.4	53.6
54.8	50.1	59.3	46.2	55.5
49.2	46.9	40.4	49.8	60.9
48.8	43.4	49.1	52.9	50.2
56.3	51.1	48.1	46.6	41.2
53.6	53.8	55.8	52.4	40.3
46.4	51.8	49.7	45.1	49.3
44.6	52.8	53.6	40.5	48.6
50.2	58.4	53.7	56.8	42.9
48.4	42.4	54.7	51.6	50.2

Con esta información:

a) Construir la tabla de frecuencias correspondiente.

b) Dibujar el histograma de frecuencias relativas y el polígono de frecuencias acumuladas.

c) Calcular la media, mediana y moda.

d) Calcular la desviación estándar

e) Calcular el coeficiente de asimetría de Pearson y el coeficiente de aplanamiento.

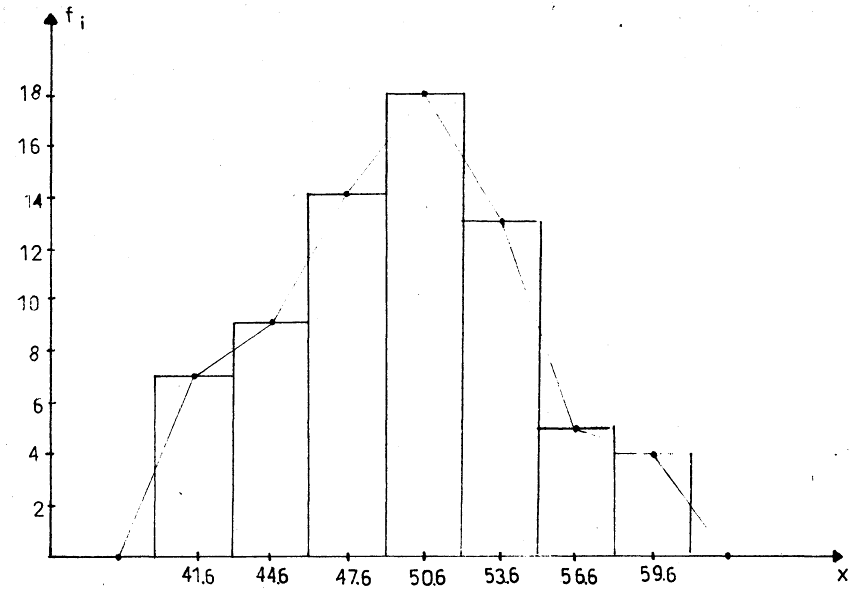
Solución:

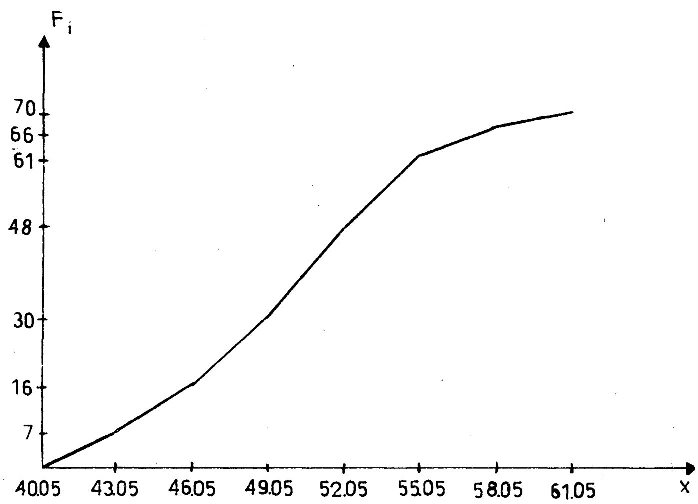
a) Las observaciones se agruparán en siete intervalos de clase; los valores máximo y mínimo en la tabla son 40.1 y 60.9, la diferencia es 20.8, por lo tanto, la amplitud de cada intervalo de clase es de 21/7 = 3.

Como límite del intervalo se tomará 40.05

Intervalos	Marca de Clase	f_i	F_i	f_i^*	F_i^*
40.05 - 43.05	41.6	7	7	0.10	0.10
43.05 - 46.05	44.6	9	16	0.13	0.23
46.05 - 49.05	47.6	14	30	0.20	0.43
49.05 - 52.05	50.6	18	48	0.26	0.69
52.05 - 55.05	53.6	13	61	0.18	0.87
55.05 - 58.05	56.6	5	66	0.07	0.94
58.05 - 61.05	59.6	4	70	0.06	1.00

b) En la siguiente figura se muestra el histograma y el polígono de frecuencias, acumuladas:





c) Media

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{7} t_i f_i = \frac{1}{70} \left[(41.6)(7) + (44.6)(9) + \ldots + (59.6)4 \right]$$

$$= 49.8286$$

mediana

Se considerará el valor dela mediana como la marca de clase del intervalo donde se encuentra el 50% de las observaciones.

$$\text{mediana} = 50.6$$

moda

Se considerará el valor de la moda como la marca de clase del intervalo de mayor frecuencia

$$\text{moda} = 50.6$$

d) La desviación estándar es:

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{7}(t_i - \bar{x})^2 f_i}$$

sustituyendo

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{70}\left[(41.6 - 49.8)^2\ 7 + (44.6 - 49.8)^2\ 9 + \ldots + (59.6 - 49.8)^2\ 4\right]}$$

efectuando operaciones

$$s_x = 4.8$$

e) Coeficiente de asimetría de Pearson

$$\text{C.A.P.} = \frac{\text{media} - \text{moda}}{s_x}$$

sustituyendo valores:

$$\text{C.A.P.} = \frac{49.8 - 50.6}{4.8} = -0.17$$

coeficiente de aplanamiento

$$\text{C.A.} = \frac{m_4}{m_2^2}$$

donde m_2^2 es el cuadrado del segundo momento respecto a la media, por lo tanto, es la variancia y m_4, cuarto momento, es:

$$m_4 = \frac{1}{70}\left[(41.6 - 49.8)^4\ 7 + (44.6 - 49.8)^4\ 9 + \ldots + (59.6 - 49.8)^4\ 4\right]$$

efectuando operaciones:

$$m_4 = 1268.26$$

sustituyendo

$$C.A. = \frac{1268.26}{22.80} = 55.63$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Una prueba de habilidad que consistió en medir el tiempo que una persona tardaba en armar un rompecabezas, fue aplicado a un grupo de 60, los resultados que se obtuvieron, dados en minutos fueron los siguientes:

7.3	11.5	6.1	15.5	10.1	14.2
9.5	16.7	13.7	13.7	13.3	16.3
6.6	14.6	10.2	17.2	12.5	14.8
14.4	17.6	13.2	15.5	9.8	17.9
9.8	16.8	10.2	14.8	9.6	15.7
11.6	18.6	8.7	15.6	8.5	17.3
9.8	14.4	15.9	13.9	10.6	15.6
12.2	16.2	11.7	15.4	9.4	14.4
14.4	12.2	17.8	14.6	14.7	12.5
12.6	13.2	14.1	11.6	7.7	13.0

Obtener:

a) La tabla de frecuencias.

b) El histograma y el polígono de frecuencias acumuladas.

c) Los parámetros de tendencia central: media, mediana y moda.

d) Los parámetros de dispersión: rango, variancia y desviación estándar.

e) El coeficiente de asimetría de Pearson y el coeficiente de aplanamiento.

TEMA VII

INFERENCIA ESTADISTICA

1. Una población esta compuesta por los siguientes números:

$$\{4, 5, 6, 7, 8\}$$

a) Calcular la media y la desviación estándar de la población.

b) Obtener todas las posibles muestras de tamaño dos que se puedan obtener con reemplazo.

c) La distribución de las medias muestrales.

d) Calcular la media y la desviación estándar de la distribución de medias muestrales.

e) Comparar los resultados de los incisos a y d.

Solución:

a)

$$\mu_x = \frac{4 + 5 + 6 + 7 + 8}{5} = 6$$

$$\sigma_x^2 = \frac{(4 - 6)^2 + (5 - 6)^2 + (6 - 6)^2 + (7 - 6)^2 + (8 - 6)^2}{5} = 2$$

$$\sigma_x = \sqrt{2}$$

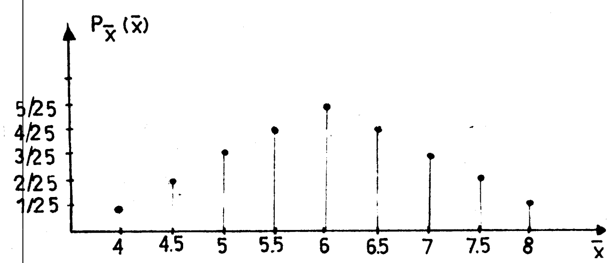
b) Todas las muestras posibles de tamaño dos con reemplazo son:

4,4	5,4	6,4	7,4	8,4
4,5	5,5	6,5	7,5	8,5
4,6	5,6	6,6	7,6	8,6
4,7	5,7	6,7	7,7	8,7
4,8	5,8	6,8	7,8	8,8

c) La media de cada muestra es:

4.0	4.5	5.0	5.5	6.0
4.5	5.0	5.5	6.0	6.5
5.0	5.5	6.0	6.5	7.0
5.5	6.0	6.5	7.0	7.5
6.0	6.5	7.0	7.5	8.0

por lo tanto, la distribución de medias muestrales es:



d)

$$\mu_{\bar{x}} = \frac{1}{25}\left[4 + 2(4.5) + 3(5.0) + \ldots + 2(7.5) + 8\right] = 6$$

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{1}{25}\left[(4-6)^2 + (4.5-6)^2\,2 + \ldots + (7.5-6)^2\,2 + (8-6)^2\right]$$

$$\sigma_{\bar{x}} = 1$$

e) Se observa que se verifican las siguientes relaciones

$$\mu_{\bar{x}} = \mu_x$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

2. El peso promedio de las personas adultas en una población es de 70 kg con una desviación estándar de 15 kg. Calcular la probabilidad de que nueve personas al azar que utilizan un elevador rebasen su límite de seguridad que es de 720 kg. Considere que el peso de las personas adultas tiene distribución normal.

Solución:

Los parámetros de la población son:

$$\mu_x = 70 \text{ Kg} \qquad \sigma_x = 15 \text{ Kg}$$

como la población tiene distribución normal entonces la distribución de las medias de las muestras tendrá también distribución normal con parámetros:

$$\mu_{\bar{x}} = \mu_x = 70 \text{ Kg}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \frac{15}{\sqrt{9}} = 5 \text{ Kg}$$

la probabilidad de que se rebase el límite de seguridad del elevador es igual a $P(\bar{x} \geq \frac{720}{9})$, como $\bar{x}$ es normal entonces, estandarizando:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_x}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x} - 70}{5}$$

siendo $\bar{x}$ igual al peso promedio de las nueve personas en el elevador

$$\bar{x} = \frac{720}{9} = 80$$

sustituyendo

$$Z = \frac{80 - 70}{5} = 2$$

$$\begin{aligned} P(x \geq 80) &= P(Z \geq 2) \\ &= 1 - P(Z < 2) \\ &= 1 - 0.9772 \\ &= 0.0228 \end{aligned}$$

3. Con el fin de estimar la duración media de las llantas para automóvil producidas por una fábrica, se seleccionaron al azar 36 llantas de la producción mensual de la fábrica, al probarlas en un laboratorio se obtuvo que su duración promedio era de 40,000 Km, con una desviación estándar de 4,000 Km.

Estimar con un nivel de confianza del 90% la duración promedio de toda la producción de llantas. Considere a la población con distribución normal.

Solución:

Características del problema:

Tipo: Estimación por intervalos de confianza de la media de una población.

Distribución de la población: Normal

Tamaño de la población: Se considera infinito.

Tamaño dela muestra: Grande ($n \geq 30$)

Teniendo en cuenta las características del problema, el intervalo de confianza que se debe utilizar es:

$$\bar{x} - Z_c \frac{S_x}{\sqrt{n}} \leq \mu_x \leq \bar{x} + Z_c \frac{S_x}{\sqrt{n}}$$

sustituyendo valores:

$$40{,}000 - z_c \frac{4000}{\sqrt{36}} \leq \mu_x \leq 40{,}000 + z_c \frac{4000}{\sqrt{36}}$$

el valor crítico z_c al 90% se obtiene de las tablas de la distribución normal estándar, siendo este igual a 1.65, efectuando las operaciones se obtiene:

$$38{,}900 \leq \mu_x \leq 41{,}100$$

4. Un día al azar se toma una muestra de 10 varillas de la producción de una planta, al probarlas a la tensión hasta la ruptura se obtuvo una resistencia media de 4800 Kg/cm^2 con una desviación estándar de 200 Kg/cm^2. Estime la resistencia media de las varillas con un nivel de confianza del 95%.

Solución:

Características del problema:

Tipo: Estimación por intervalos de confianza de la media de una población.

Distribución de la población: Se supondrá normal

Tamaño de la población: Infinito.

Tamaño de la muestra: Pequeña ($n \leq 30$)

Teniendo en cuenta lo anterior, el intervalo de confianza para estimar la media de la población de varillas es:

$$\bar{x} - t_c \frac{s_x}{\sqrt{n-1}} \leq \mu_x \leq \bar{x} + t_c \frac{s_x}{\sqrt{n-1}}$$

sustituyendo valores:

$$4800 - t_c \frac{200}{\sqrt{9}} \leq \mu_x \leq 4800 + t_c \frac{200}{\sqrt{9}}$$

el valor crítico t_c al 95% se obtiene de las tablas de la distribución t de Student con $\nu = 9$ grados de libertad, siendo igual a 2.26, efectuando las operaciones:

$$4649.4 \leq \mu_x \leq 4950.6$$

5. Una cisterna que abastece de agua a una zona urbana recibe según las observaciones diarias del último mes un promedio de 100 m^3/día, con una desviación estándar de 12 m^3/día. Simultáneamente se observó que el consumo de agua tiene una media de 90 m^3/día, con una desviación estándar de 16 m^3/día. Estimar con un nivel de confianza del 80% la diferencia media que existe entre el abasto y el consumo. Considerar ambas poblaciones normales.

Solución:

Características del problema:

Tipo: Estimar por intervalos de confianza la diferencia de medias poblacionales.

Distribución de las poblaciones: normales

Tamaño de las poblaciones: Se consideran infinitas.

Tamaño de las muestras: Grandes ($n_a \geq 30$, $n_b \geq 30$)

Teniendo en cuenta estas características el intervalo de confianza adecuado es:

$$(\bar{x}_a - \bar{x}_b) - z_c\sqrt{\frac{s_a^2}{n_a} + \frac{s_b^2}{n_b}} \leq \mu_a - \mu_b \leq (\bar{x}_a - \bar{x}_b) + z_c\sqrt{\frac{s_a^2}{n_a} + \frac{s_b^2}{n_b}}$$

el valor crítico Z_c al 80% se obtiene de las tablas de la distribución normal estándar, siendo igual a 1.285, sustituyendo:

$$(100 - 90) - 1.285\sqrt{\frac{16^2}{30} + \frac{12^2}{30}} \leq \mu_a - \mu_b \leq (100 - 90) + 1.285\sqrt{\frac{16^2}{30} + \frac{12^2}{30}}$$

efectuando operaciones

$$5.31 \leq \mu_a - \mu_b \leq 14.69$$

6. Una fábrica de acumuladores afirma que su producto tiene una vida media útil de 5000 horas. Un ingeniero que desea comprar este tipo de acumuladores prueba 32 de ellos y observa que tienen una vida media útil de 4700 horas con una desviación estándar de 160 horas.

Puede pensar el ingeniero con un nivel de confianza del 90% que la afirmación del fabricante es correcta?

Solución:

Características del problema:

Tipo: Decisión estadística de la media de una población.

Nivel de significación: 10%

Tamaño de la muestra: Grande ($n \geq 30$)

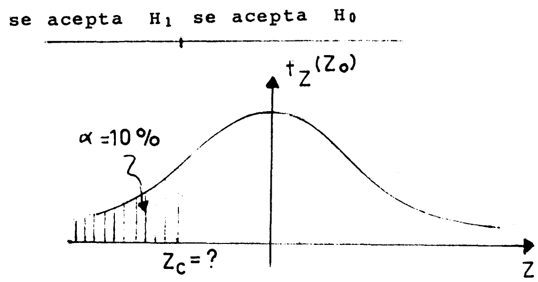
Planteamiento de la hipótesis:

$$H_0: \mu_x = 5000 \text{ horas}$$

$$H_1: \mu_x < 5000 \text{ horas}$$

prueba de la hipótesis:

Debido a las condiciones del problema se debe considerar el valor crítico Z_c, como la prueba es de una sola cola, entonces:



Z_c, se obtiene consultando las tablas de la distribución normal estándar $\alpha = 0.10$, el valor de Z_c es -1.285.

Regla de decisión:

Se acepta la hipótesis nula (H_0) si $Z_c \geq -1.285$, en caso contraio se rechaza y se acepta la hipótesis alterna (H_1).

Calculando el valor crítico Z_c, con los datos del problema:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_x}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x} - \mu_x}{\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}}$$

como la muestra es grande y la población se considera normal es válido sustituir la desviación estándar de la muestra ya que σ_x se desconoce, entonces:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_x}{\frac{S_x}{\sqrt{n}}} = \frac{4700 - 5000}{\frac{160}{\sqrt{32}}} = -10.6$$

Toma de decisión:

$$z_c = -10.6 < -1.285$$

por lo tanto:

Se rechaza la hipótesis nula (H_0) y se acepta la hipótesis alterna (H_1).

7. Durante el colado de una losa de concreto en un edificio, se tomaron seis cilindros de concreto los cuales al probarlos a la ruptura tuvieron una resistencia media de 240 Kg/cm^2 con una desviación estándar de 8 Kg/cm^2. En cambio al colar otra losa en la misma obra con un concreto al cual se le agregó un aditivo los resultados de una prueba idéntica a la anterior arrojaron media igual a 250 Kg/cm^2 con una desviación estándar de 9 Kg/cm^2. Suponiendo que la distribución de probabilidad de las poblaciones es normal con desviaciones estándar iguales, se puede afirmar con un nivel de confianza del 99% que el aditivo incrementa la resistencia del concreto?

Solución:

Características del problema:

Tipo: Decisión estadística con respecto a la diferencia de medias de dos poblaciones.

Nivel de significación: 1%

Tamaño de las muestras: Pequeñas ($n < 30$)

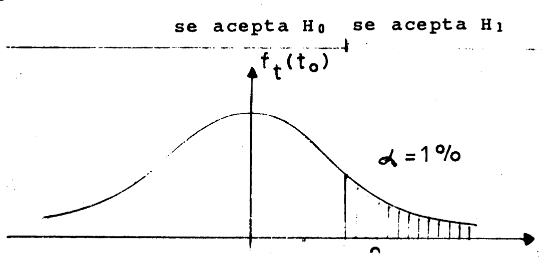
Planteamiento de la hipótesis

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1: \mu_1 > \mu_2$$

Prueba de la hipótesis:

Por las condiciones del problema se debe considerar el valor crítico t_c. Como el problema es de una sola cola, entonces:



t_c se obtiene consultando las tablas de la distribución t de Student con $\alpha = 0.01$ y con $\nu = 6 + 6 - 2 = 10$ grados de libertad, el valor de t_c es 2.76.

Regla de decisión:

Se acepta la hipótesis nula (H_0) si $t_c \leq 2.76$, en caso contrario se rechaza y se acepta la hipótesis alterna (H_1)

El valor crítico t_c se calcula con los datos del problema como sigue:

$$t_c = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}$$

sustituyendo valores:

$$t_c = \frac{10 - 0}{\sqrt{6(8)^2 + 6(9)^2}} \sqrt{\frac{6(6) - (6 + 6 - 2)}{6 + 6}}$$

efectuando operaciones:

$$t_c = 1.86$$

Toma de decisión:

$$t_c = 1.86 < 2.76$$

por lo tanto:

Se acepta la hipótesis nula (H_0) y se rechaza la hipótesis alterna (H_1).

Cabe hacer la aclaración que como se consideraron a las desviaciones estándar de ambas poblaciones iguales no fue necesario probar esta hipótesis.

8. El tiempo que tardan las cuadrillas de una constructora en tender un material es de 5 minutos con una desviación estándar de 1.5 minutos. Si se permite la rotación de los trabajadores, situación que antes no era posible, y se observa durante 15 días que la desviación estándar se incrementa a 2 minutos. Se puede afirmar con un nivel de confianza del 90% que la rotación de los trabajadores origina un incremento en la desviación estándar del rendimiento de las cuadrillas?

Solución:

Características del problema:

Tipo: Decisión estadística respecto a la desviación estándar de una población.

Nivel de significación: 10%

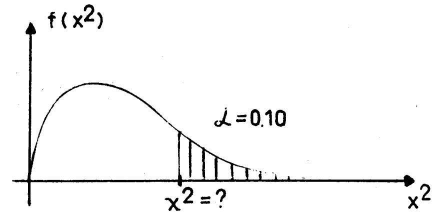
Planteamiento de la hipótesis:

$$H_0: \sigma_x = 1.5 \text{ minutos}$$

$$H_1: \sigma_x > 1.5 \text{ minutos}$$

Prueba de la hipótesis

Debido a que es un problema sobre desviación estándar, se debe utilizar el valor crítico χ^2. Como la prueba es de una sola cola



χ_2 se obtiene consultando las tablas de la distribución χ_2 para $\alpha = 0.10$ con $\nu = 15 - 1 = 14$ grados de libertad, el valor χ_2 es 21.06 .

Regla de decisión:

Se acepta la hipótesis nula (H_0) si $\chi_2 \leq 21.6$ en caso contrario se rechaza y se acepta la hipótesis alterna (H_1).

Calculando el valor de χ^2 con los datos del problema:

$$\chi^2 = \frac{n\ S_x^2}{\sigma_x^2} = \frac{15(2)^2}{(1.5)^2} = 26.66$$

Toma de decisión:

$$\chi^2 = 26.66 > 21.06$$

por lo tanto:

Se rechaza la hipótesis nula (H_0) y se acepta la hipótesis alterna (H_1)

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Una empresa desea estimar el tiempo promedio que requiere un empleado para llegar a su trabajo. Se tomó una muestra aleatoria de 36 empleados y se encontró que la media fue de $\bar{x} = 40$ minutos. Suponiendo una desviación estándar $\sigma = 12$ minutos, obtener un intevalo de cofianza para estimar la media de la población con un nivel de confianza del 95%.

2. Una ciudad se abastece de energía eléctrica por medio de dos plantas termoeléctricas. En los últimos 40 días se observó que la termoeléctrica A generó en promedio 100,000 Kw/h con una desviación estándar de 8,000 Kw/h, por su parte la termoeléctrica B generó en promedio 150,000 Kw/h, con una desviación estándar de 10,000 Kw/h. Estimar con un nivel de confianza del 90%, la energía media que recibe la ciudad.

3. Con el fin de verificar que el contenido de los frascos de colonia que produce una compañía es de 100 c.c. se tomó una muestra de 144 frascos y se encontró que el contenido medio en cada frasco fue de 99 c.c. con una desviación estándar de 4 c.c. ¿Existe una diferencia significativa entre el valor observado de 99 c.c. y el deseado de 100 c.c.? Utilice un nivel de significación $\alpha = 0.05$.

4. La altura media de 50 estudiantes de un colegio que tomaron parte en pruebas atléticas fue de 1.82 metros, con una desviación estándar de 0.25 metros, mientras que 50 estudiantes que no mostraron interés en las competencias atléticas tuvieron una altura media de 1.75 metros con una desviación estándar de 0.28 metros. Probar la hipótesis de que los estudiantes que participan en pruebas atléticas son más altos que los otros, con un nivel de significación $\alpha = 0.10$.

5. El suministro de agua potable a una ciudad tiene una variancia de 1 m^3/s. En los últimos 36 días se realizó un aforo y reportó que la variancia es de 0.81 m^3/s. ¿Se puede afirmar con un nivel de confianza del 95% que la variancia del suministro de agua no ha disminuido?

TEMA VIII

REGRESION Y CORRELACION

1. Los siguientes datos fueron obtenidos de un experimento para encontrar la variación de la resistencia a la compresión del concreto a los 28 días de fraguado con respecto a la relación agua/cemento con que fue fabricado.

Resistencia a la compresión [Kg/cm²]	Relación agua/cemento
450	0.38
400	0.43
350	0.48
300	0.55
250	0.62
200	0.70
150	0.80

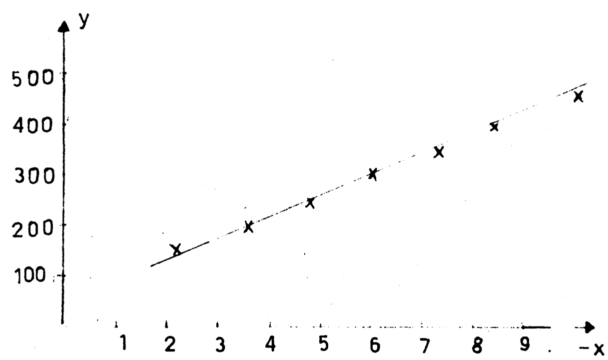
Obtener la recta de regresión de la resistencia a la compresión del concreto contra el logaritmo natural de la relación agua/cemento.

Solución:

Sea X la variable asociada al logaritmo natural de la relación agua/cemento y sea Y la variable asociada a la resistencia a la compresión del concreto, entonces la tabla queda:

x	y
-0.97	450
-0.84	400
-0.73	350
-0.60	300
-0.48	250
-0.36	200
-0.22	150

la recta de regresión que se busca es:



utilizando el método de los mínimos cuadrados $y = ax + b$

$$n = 7$$

$$\Sigma x = -4.20 \qquad \Sigma x^2 = 2.95$$

$$\Sigma y = 2100 \qquad \Sigma y^2 = 700{,}000$$

$$\Sigma xy = -1433$$

sustituyendo en las siguientes expresiones:

$$a = \frac{n\ \Sigma xy - \Sigma x \Sigma y}{n\ \Sigma x^2 - \Sigma x}$$

$$b = \frac{\Sigma y\ \Sigma x^2 - \Sigma xy\ \Sigma x}{n\ \Sigma x^2 - \Sigma x}$$

se obtiene:

$$a = \frac{7(-1433) - (-4.2)\ (2100)}{7(2.95) - (-4.2)^2} = -402.33$$

$$b = \frac{2100(2.95) - (-1433)\ (-4.20)}{7(2.95) - (-4.2)^2} = 58.6$$

por lo tanto la recta de regresión es:

$$y = -402.33\ x + 58.6$$

2. Durante los últimos seis años, la demanda de pasajeros que viajan en transporte aéreo ha sido como se ilustra en la siguiente tabla:

año	pasajeros (millones)
1972	2
1973	2.8
1974	4.1
1975	5.2
1976	6.0
1977	6.9

Investigar si es lineal la demanda histórica del pasaje aéreo.

Solución:

Para contestar esta pregunta, es necesario calcular el coeficiente de correlación

$$r = \frac{n \, \Sigma \, x \, y - \Sigma \, x \, \Sigma \, y}{\sqrt{\left[n \, \Sigma \, x^2 - (\Sigma \, x)^2\right] \left[n \, \Sigma \, y^2 - (\Sigma \, y)^2\right]}}$$

siendo:

$$n = 6$$

$\Sigma \, x = 27$ $\qquad\qquad$ $\Sigma \, x^2 = 139.2$

$\Sigma \, y = 22$ $\qquad\qquad$ $\Sigma \, y^2 \quad 91$

$$\Sigma \, x \, y = 112.1$$

sustituyendo valores:

$$r = \frac{6(112.1) - 27(22)}{\sqrt{\left[6(139.2) - (27)^2\right] \left[6(91) - (22)^2\right]}}$$

efectuando operaciones:

$$r = 0.95$$

con base en el valor obtenido se puede pensar que la demanda histórica del pasaje aéreo si es lineal, debido a que el resultado es cercano a la unidad.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Con el fin de contar con información suficiente para el cálculo de la cimentación de una estructura, se realizó una prueba de consolidación del suelo donde se piensa construir, la siguiente tabla muestra las deformaciones obtenidas al aplicar una carga durante cuatro horas

Tiempo (min.)	Deformación (mm.)
0.08	0.168
0.16	0.190
0.25	0.200
0.50	0.218
1.00	0.238
2.00	0.257
4.00	0.276
8.00	0.308
15.00	0.326
30.00	0.358
60.00	0.405
120.00	0.458
240.00	0.531

Obtener la recta de regresión del logaritmo del tiempo de aplicación de la carga contra el logaritmo de la deformación provocada.

2. Investigar si están correlacionados linealmente el logaritmo del tiempo de aplicación de la carga y el logaritmo de la deformación, en el problema anterior.

3. En los últimos 10 años se han tomado registros de la precipitación media anual así como de la productividad en toneladas de una hectárea de tierra laborable, los resultados se muestran en la siguiente tabla:

Año	Productividad (Tn x ha)	Precipitación media anual (mm.)
1968	1.5	50
1969	4.0	250
1970	3.0	125
1971	7.0	300
1972	2.0	120
1973	2.0	100
1974	3.0	500
1975	2.5	150
1976	0.5	25
1977	3.5	175

Obtener el coeficiente de correlación entre la precipitación media anual y la producción.

4. Suponga que es factible que el peso de un recién nacido es función lineal de su edad, para las edades entre 1 y 6 meses. La siguiente tabla muestra los pesos de 10 niños y sus correspondientes edades.

Edad (meses)	Peso (Kg.)
3	7.0
5	8.3
2	7.0
1	5.0
4.5	8.0
5.5	10.0
6	11.0
3.5	7.5
4	8.3
2.5	6.0

aplicar el criterio de los mínimos cuadrados para obtener la recta de regresión del peso en función de la edad.

5. En un colegio se esta investigando en la relación que existe entre la altura, en metros y el peso, en kilogramos, de los estudiantes que asisten al plantel. Uno muestra aleatoria de once estudiantes arrojó los siguientes resultados:

Altura (m)	Peso (Kg)
1.78	79
1.91	90
1.63	71
1.70	82
1.80	81
1.78	83
1.73	73
1.93	93
1.73	76
1.75	77
1.78	74

a) Construir el diagrama de dispersión.

b) Encontrar la correlacion entre la altura y el peso de los estudiantes.

c) Encontrar la recta de regresión de la altura en función del peso de los estudiantes.

d) Si un estudiante seleccionado al azar tiene una altura de 1.79 metros, utilice la recta de regresión para estimar su peso.

Impreso en la
Coordinación de Servicios Generales
Unidad de Difusión
1989