



FASCÍCULO 11

DINÁMICA DEL CUERPO RÍGIDO.
MÉTODO DE LAS FUERZAS
Y ACELERACIONES

Luis Ordoñez Reyna

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MECÁNICA



1986

Clave 151



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE INGENIERIA**

FASCICULO 11

**DINAMICA DEL
CUERPO RIGIDO.
METODO DE LAS FUERZAS
Y ACELERACIONES**

LUIS ORDOÑEZ REYNA

**DIVISION DE CIENCIAS BASICAS
DEPARTAMENTO DE MECANICA**

FI/DCB/86



CONTENIDO

11. DINAMICA DEL CUERPO RIGIDO. METODO DE LAS FUERZAS Y ACELERACIONES	1
11.1 INTRODUCCION	1
11.2 METODO DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO O DE LAS FUERZAS Y ACELERACIONES	5
11.2.1 <i>Resumen de las ecuaciones de movimiento correspondientes a un cuerpo rígido dotado de movimiento plano general</i>	15
11.2.2 <i>Momento de inercia de la masa de un cuerpo con respecto a un eje</i>	16
11.2.3 <i>El fenómeno del rodamiento desde el punto de vista dinámico</i>	32
11.2.4 <i>Teoremas de Ordóñez sobre la cinética del movimiento plano de un cuerpo rígido</i>	42
11.2.5 <i>Ecuaciones de movimiento para la rotación alrededor de un eje fijo</i>	56
11.2.6 <i>Ecuaciones de movimiento para la traslación plana de un cuerpo rígido</i>	58
11.2.7 <i>Cuerpos rígidos interconectados</i>	59
11.3 PROBLEMAS PROPUESTOS	71
BIBLIOGRAFIA	78



PROLOGO

Cada vez es más notable el avance que ha experimentado en las décadas recientes la tecnología derivada del estudio teórico-práctico de la Mecánica llevado a un nivel extraordinario debido a la posibilidad de utilizar sistemas de cómputo para efectuar las operaciones numéricas que de otra manera resultarían complicadas. Sin embargo es necesario reconocer que los conceptos relativos a la dinámica de los cuerpos rígidos son parte de los elementos en los que se ha basado principalmente dicho avance.

El presente fascículo pretende abarcar de una manera completa el análisis de la parte cinética del movimiento de los cuerpos rígidos dotados de movimiento plano general utilizando el enfoque denominado de fuerzas y aceleraciones, o de ecuaciones de movimiento, el cual está actualmente incluido en los programas vigentes de algunas materias básicas en la formación académica de los estudiantes de ingeniería.

La herramienta matemática utilizada para el desarrollo, tanto de la parte teórica como de los Ejemplos ilustrativos que se presentan es la de Álgebra Vectorial, con la cual se supone que está familiarizado el lector.

Algunas de las aportaciones que el autor ha hecho en el campo teórico de la dinámica se presenta por primera vez en este fascículo con el nombre de Teoremas de Ordóñez sobre cinética del movimiento plano de un cuerpo rígido. Sus aplicaciones prácticas se indican en el desarrollo de 4 de los 18 Ejemplos ilustrativos incluidos, proponiéndose a través del contexto 15 Problemas por resolver, de los cuales se incluyen sus respuestas a continuación del enunciado.

Al final del fascículo se presenta también la bibliografía de la que se han tomado algunas ideas para la proposición de los Ejemplos y Problemas.

El autor agradece cumplidamente el apoyo que de una manera continua y eficaz ha recibido de las autoridades universitarias, especialmente de la Facultad de Ingeniería para la elaboración de éste y otros fascículos que posteriormente serán editados y que permitirán a los profesores y alumnos de la Facultad disponer del material idóneo para el tratamiento moderno de los temas de la Mecánica Ingenieril.

Considerando que el material incluido puede presentar errores involuntarios y omisiones, el autor agradece anticipadamente la atención de los lectores que se los indiquen, y asimismo espera las sugerencias que del mismo le hagan llegar personalmente con el objeto de mejorar ediciones posteriores.



11. DINAMICA DEL CUERPO RIGIDO. METODO DE LAS FUERZAS Y ACELERACIONES

11.1 INTRODUCCION

El problema fundamental de la dinámica del cuerpo rígido dotado de movimiento plano general es el equivalente al que corresponde a la dinámica de la partícula. Su planteamiento en forma general puede establecerse como sigue:

Siendo conocidas: a) La posición original de un cuerpo rígido en el instante $t = 0$, b) las características de las fuerzas exteriores ejercidas sobre él durante el intervalo de tiempo bajo consideración, y c) las restricciones que le impone el medio que está en contacto continuo con el cuerpo en ese intervalo, el problema consiste en determinar la posición del cuerpo rígido al final del intervalo, o sea en el instante $t = t_f$.

Al respecto debe tomarse en cuenta que usando los conceptos cinemáticos correspondientes a la partícula y al segmento de recta resulta evidente que si se conoce la posición inicial de un cuerpo rígido dotado de movimiento plano general, su posición al final del intervalo de tiempo bajo consideración puede determinarse conociendo la posición final de un punto cualquiera del cuerpo, por ejemplo, el centro de masa, C , así como el ángulo total, θ , descrito por cualquier segmento de recta trazado en el plano de movimiento, durante el intervalo.

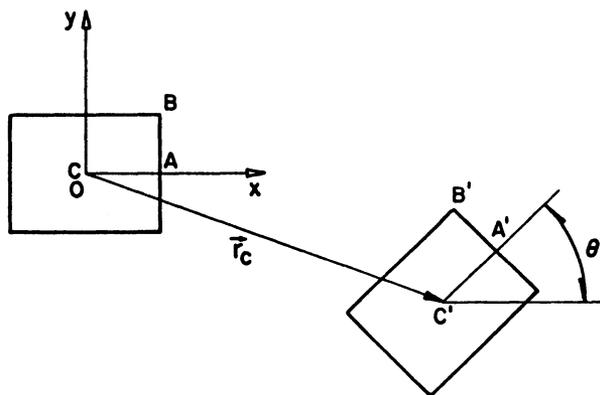


Fig 11.1

En efecto, en la figura 11.1 se indica la posición inicial de un cuerpo rígido de planta rectangular, representado por el plano de movimiento, donde se localizan los puntos A, B, C. Por sencillez, el origen fijo, O, se hace coincidir con el centro de masa, C, siendo el sistema de referencia el O,x,y, indicado.

En la misma figura se muestra la posición final del cuerpo, donde las posiciones de dichos puntos están representadas por A', B', y C', respectivamente.

Puede verse que esta posición final del cuerpo es posible determinarla a partir de la posición inicial si se conoce el vector \vec{r}_C , y el ángulo total, Θ , que describió cualquier segmento de recta trazado en el plano de movimiento, durante el intervalo de tiempo considerado.

Desde un punto de vista completamente teórico, para determinar el vector \vec{r}_C se requeriría resolver las expresiones

$$\vec{v}_C = \int \vec{a}_C dt + \vec{c}_1 \quad \dots \quad 11.1$$

y

$$\vec{r}_C = \int \vec{v}_C dt + \vec{c}_2 \quad \dots \quad 11.2$$

correspondientes a la cinemática de la partícula.

Análogamente, la obtención del ángulo Θ requeriría resolver las expresiones:

$$\vec{\omega} = \int \vec{\alpha} dt + \vec{c}_3 \quad \dots \quad 11.3$$

y

$$\vec{\theta} = \int \vec{\omega} dt + \vec{c}_4 \quad \dots \quad 11.4$$

correspondientes a la cinemática del segmento de recta.

Por lo que, en conclusión, sería necesario conocer las funciones vectoriales \vec{a}_C , y $\vec{\alpha}$, en el intervalo, siendo la primera la correspondiente a la aceleración del centro de masa, y la segunda la correspondiente a la aceleración angular del cuerpo rígido dotado de movimiento plano general.

Los conceptos anteriores corresponden al problema fundamental de la dinámica del cuerpo rígido dotado de movimiento plano general cuando la trayectoria de C es una curva plana cualquiera.

Sin embargo, únicamente se estudiarán los casos en que la trayectoria del centro de masa es una recta, una circunferencia, o bien, un punto fijo.

Para estos casos el problema se reduce en forma considerable, aunque se trate de un sistema de cuerpos rígidos unidos por medio de elementos flexibles, inextensibles y de peso despreciable, o bien, por medio de resortes elásticos lineales, con tal de que cada uno de dichos cuerpos al moverse adquiera un movimiento plano general o una de sus versiones particulares.

Bajo estas condiciones limitativas el problema fundamental ya no se acostumbra canalizar hacia la búsqueda de la posición final del cuerpo, sino más bien se enfoca hacia el cálculo de los parámetros dinámicos más importantes involucrados en el movimiento de los cuerpos del sistema como son: la aceleración del centro de masa, la aceleración angular del cuerpo, las fuerzas ejercidas en los elementos de unión, la velocidad adquirida, por el centro de masa al recorrer éste una distancia predeterminada, etc.

En este contexto se conocen clásicamente los tres diferentes enfoques teóricos que se indican a continuación:

- i) El método de las ecuaciones de movimiento, o de las fuerzas y aceleraciones.
- ii) El método del trabajo y energía.
- iii) El método del impulso y la cantidad de movimiento.

Cabe mencionar que en este fascículo se estudiará exclusivamente el primer método, ya que los dos últimos son planteados en otro documento.

En los artículos que se analizarán se tratarán los conceptos relativos a la *Dinámica del Cuerpo Rígido dotado de movimiento plano general* y con las características siguientes:

- i) El cuerpo es simétrico con respecto al plano de movimiento, coincidente con el plano de referencia x y, teniendo su origen, O , coincidente con el centro de masa, C . (véase la figura 11.2).

- ii) El sistema resultante general correspondiente al sistema de fuerzas exteriores aplicadas al cuerpo rígido se reduce a una fuerza \vec{R} alojada en el plano de movimiento cuyo soporte pasa por C , y a un par de fuerzas alojado también en dicho plano.

Es decir, la reducción canónica del sistema de fuerzas exteriores aplicadas al cuerpo da por resultado

$$\vec{R} = R_x \hat{i} + R_y \hat{j}$$

$$\vec{M}_O = \vec{M}_C = M_C \hat{k}$$

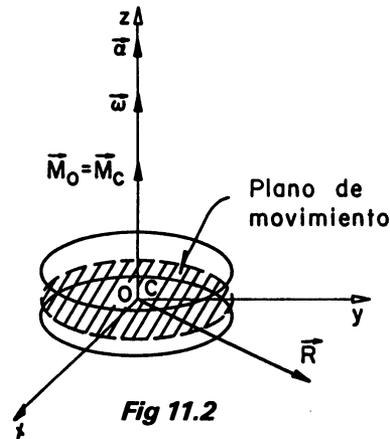


Fig 11.2

.... 11.5

.... 11.6

Siendo R_x y R_y los valores algebraicos de las componentes de la fuerza R según los ejes "x", y "y", respectivamente, y M_c el valor algebraico del momento del sistema de fuerzas exteriores con respecto al eje z que pasa por C.

iii) En el instante bajo consideración, la velocidad angular del cuerpo, ω , estaría representada en una figura tridimensional por un vector paralelo al eje z (figura 11.2) siendo su expresión:

$$\vec{\omega} = \omega \mathbf{k} \quad \dots 11.7$$

donde ω = valor algebraico de la velocidad angular de cualquier segmento de recta alojado en el plano de movimiento.

iv) Análogamente, en el mismo instante, la aceleración angular del cuerpo, α , estaría representada en una figura tridimensional por un vector paralelo al eje z (figura 11.2), siendo su expresión:

$$\vec{\alpha} = \alpha \mathbf{k} \quad \dots 11.8$$

donde α = valor algebraico de la aceleración angular de cualquier segmento de recta alojado en el plano de movimiento.

Con el objeto de simplificar la representación gráfica, se acostumbra indicar solamente el plano de movimiento del cuerpo mostrando en él la fuerza R pasando por C, mientras que las cantidades $\vec{M}_O = \vec{M}_C$, $\vec{\omega}$, y $\vec{\alpha}$ se representan por medio de arcos de circunferencia con el sentido arbitrariamente asignado en cada discusión teórica o práctica (figura 11.3).

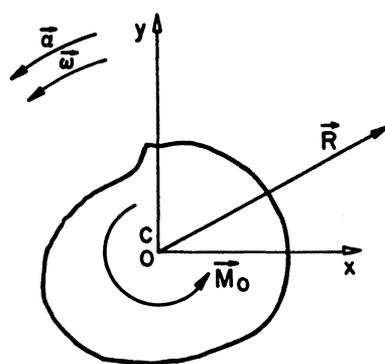


Fig 11.3

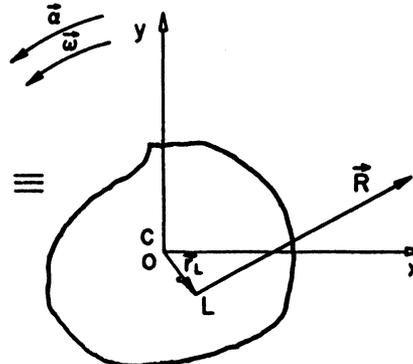


Fig 11.4

De acuerdo con los conceptos de Estática, el sistema resultante general correspondiente al sistema de fuerzas aplicadas al cuerpo rígido se reduce entonces a una fuerza única, \vec{R} , alojada en el plano de movimiento xy, pasando por un punto L situado a la mínima distancia del origen, de manera que la expresión que define el vector de posición, \vec{OL} , de dicho punto es

$$\vec{0}_L = \vec{r}_L = \frac{\vec{R} \times \vec{M}_0}{R^2} \quad \dots 11.9$$

En efecto, por definición:

$$\vec{M}_0 = \vec{r}_L \times \vec{R}$$

Luego: $\vec{R} \times \vec{M}_0 = \vec{R} \times (\vec{r}_L \times \vec{R}) = -(\vec{R} \cdot \vec{r}_L) \vec{R} + (R^2) \vec{r}_L$

y como $\vec{R} \cdot \vec{r}_L = 0$

para el punto L , tal que $\vec{R} \cdot \vec{r}_L = 0$

Véase la figura 11.4.

11.2 METODO DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO O DE LAS FUERZAS Y ACELERACIONES

Con este método se trata de obtener, esencialmente, los dos parámetros cinemáticos \vec{a}_C y $\vec{\omega}$, los cuales quedarán involucrados en las expresiones que se resumirán posteriormente. Una de ellas es la (11.10) y las otras se deducirán a continuación tomando como base la ecuación (11.11) que se obtuvieron a partir del análisis de los sistemas de partículas así como de la condición de identidad entre el sistema de las fuerzas exteriores aplicadas al cuerpo rígido y el sistema de fuerzas efectivas correspondiente a las partículas del cuerpo.

$$\vec{R} = M \vec{a}_C \quad \dots 11.10$$

$$\vec{M}_A = \vec{H}_A \quad \dots 11.11$$

Es necesario hacer notar que la ecuación 11.11 es válida, exclusivamente, para los tres casos siguientes, en lo que corresponde a la localización del punto arbitrario A.

- i) Si A es un punto fijo, tal como resulta ser el centro instantáneo de rotación en un movimiento plano general.
- ii) Si A coincide con el centro de masa C.
- iii) Si la velocidad de A es paralela a la velocidad del centro de masa.

Como se verá posteriormente en este mismo fascículo el término \vec{H}_A se puede expresar en función de $\vec{\omega}$, o de $\vec{\omega}$ y \vec{a}_C , de modo que las expresiones (11.10) y las basadas en (11.11) permitirán calcular conjuntamente \vec{a}_C y $\vec{\omega}$.

Sin embargo se debe aclarar que aunque puede escribirse una ecuación

del tipo (11.11) para cada uno de los tres puntos indicados anteriormente, esto no significa que dichas ecuaciones sean matemáticamente independientes*. La realidad es que sólo una de ellas lo es. Las demás son formas alternativas que podrán usarse dependiendo de las condiciones particulares del problema bajo consideración, para resolver éste más fácilmente, o bien para comprobar los resultados.

También se deducirán dos ecuaciones alternativas con las anteriormente mencionadas, las cuales se refieren ya sea a un punto con aceleración nula (como lo es el centro instantáneo de aceleración cero en un movimiento plano general), o a un punto Q cuya aceleración es un vector paralelo al vector \vec{QC} .

Estas dos ecuaciones no se obtendrán a partir de la ecuación (11.11), sino de la condición de identidad entre el sistema de fuerzas exteriores aplicadas al cuerpo rígido y el sistema de fuerzas efectivas correspondientes a las partículas del cuerpo.

Desde el punto de vista dinámico conviene aclarar que la ecuación (11.10) involucra el efecto que en el movimiento del cuerpo tiene el vector equipolente de la fuerza única que equivale al sistema de fuerzas exteriores aplicadas al cuerpo; es decir el efecto debido a la magnitud y dirección de dicha fuerza; mientras que la ecuación (11.11) al involucrar el momento de las fuerzas exteriores toma en cuenta el efecto de la posición relativa de la línea de acción de dicha fuerza única con relación al cuerpo.

Las ecuaciones que se deducirán involucran los tres conceptos siguientes:

- a) *El momento de las fuerzas exteriores con respecto a ejes que siendo perpendiculares al plano de movimiento pasan por alguno de los puntos particulares mencionados antes.*
- b) *Una cantidad denominada momento de inercia de la masa del cuerpo, con respecto a cada uno de dichos ejes, la cual indica en forma cuantitativa la medida de la resistencia que opone el cuerpo a dejarse acelerar angularmente alrededor de alguno de dichos ejes, bajo el efecto del momento de las fuerzas exteriores, y*
- c) *La aceleración angular del cuerpo.*

Considérese primero el caso en que A sea un punto fijo en un instante determinado; es decir, que sea coincidente con el centro instantáneo de rotación, i , tal que $\vec{V}_i = \vec{0}$. Sea P una partícula situada en el plano de movimiento, dm su masa, y \vec{V} su velocidad en dicho instante. (Figura 11.5).

* Véase la demostración en el ejemplo 11.4.

Sea \vec{r}_i el vector de posición de dicha partícula con respecto al centro instantáneo de rotación, i .

De acuerdo con la definición de *momentum angular*, resulta:

$$\begin{aligned} d\vec{H}_i &= \vec{r}_i \times \vec{v} \, dm = \\ &= \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \, dm \quad \dots 11.12 \end{aligned}$$

Desarrollando el doble producto vectorial;

$$d\vec{H}_i = [\rho_i^2 \vec{\omega} - (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) \vec{r}_i] \, dm \quad \dots 11.13$$

Como $\vec{\omega}$ es un vector perpendicular al plano de movimiento donde se localiza el vector \vec{r}_i , $\vec{r}_i \cdot \vec{\omega} = 0$, por lo que la ecuación anterior se reduce a:

$$d\vec{H}_i = \vec{\omega} \rho_i^2 \, dm \quad \dots 11.14$$

Integrando para obtener el momentum angular de todo el cuerpo rígido, resulta:

$$\vec{H}_i = \int \vec{\omega} \rho_i^2 \, dm \quad \dots 11.15$$

y puesto que $\vec{\omega}$ es la misma para todos los vectores \vec{r}_i en el instante bajo consideración, se obtiene:

$$\vec{H}_i = \vec{\omega} \int \rho_i^2 \, dm \quad \dots 11.16$$

La cantidad $\int \rho_i^2 \, dm$ representa el *momento de inercia* de la masa del cuerpo con respecto a un eje que pasa por i y es perpendicular al plano de movimiento.

Como puede verse, esta es una cantidad escalar cuyas dimensiones son $L^2 M T^0$, y cuya magnitud depende de la posición relativa de las partículas del cuerpo con relación al eje mencionado.

Se representará con el símbolo I_i , correspondiendo el subíndice al punto por donde pasa el eje; es decir, por convención:

$$I_i = \int \rho_i^2 \, dm \quad \dots 11.17$$

Sustituyendo (11.17) en (11.16) resulta:

$$\vec{H}_i = \vec{\omega} I_i \quad \dots 11.18$$

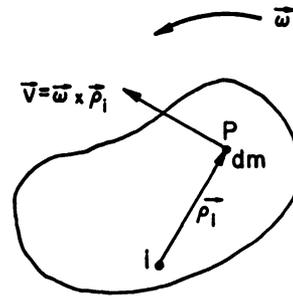


Fig 11.5

Así, al tomar en cuenta lo que establece la ecuación 11.11; se tiene que:

$$\vec{M}_i = \vec{H}_i = \vec{\omega} I_i \quad \dots 11.19$$

ya que $\vec{\omega}$ es un vector que no cambia de dirección.

Ahora, se analizará en forma análoga el caso en que el punto A coincide con el centro de masa C, del cuerpo.

Sea \vec{r}_c el vector de posición de una partícula P, de masa dm, con respecto a C, cuya velocidad es \vec{v} (Figura 11.6).

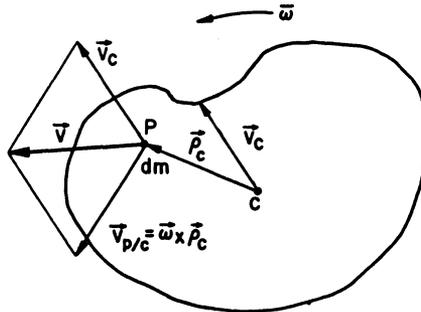


Fig 11.6

El momentum angular de la partícula P con respecto a C resulta:

$$d\vec{H}_c = \vec{r}_c \times \vec{v} dm \quad \dots 11.20$$

Como $\vec{v} = \vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{r}_c$ 11.21

al sustituir 11.21 en 11.20 resulta:

$$\begin{aligned} d\vec{H}_c &= \vec{r}_c \times (\vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{r}_c) dm \\ d\vec{H}_c &= \vec{r}_c \times \vec{v}_c dm + \vec{r}_c \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_c) dm \quad \dots 11.22 \end{aligned}$$

Así:

$$\vec{H}_c = \int \vec{r}_c \times \vec{v}_c dm + \int \vec{r}_c \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_c) dm \quad \dots 11.23$$

Como \vec{v}_c es la misma para todos los términos de la primera integral, la ecuación anterior puede expresarse como:

$$\vec{H}_c = \left[\int \vec{r}_c dm \right] \times \vec{v}_c + \int \vec{r}_c \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_c) dm \quad \dots 11.24$$

De acuerdo con la definición de centro de masa de un sistema de partículas resulta evidente que $\int \vec{r}_c \, dm = (\vec{c})_M = \vec{0}$ ya que los vectores \vec{r}_c tienen por origen precisamente dicho punto; por lo tanto la ecuación anterior se reduce a:

$$\vec{H}_c = \int \vec{r}_c \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_c) \, dm \quad \dots 11.25$$

Al desarrollar el doble producto vectorial de los términos del integrando, resulta:

$$\vec{r}_c \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_c) \, dm = [r_c^2 \vec{\omega} - (\vec{r}_c \cdot \vec{\omega}) \vec{r}_c] \, dm \quad \dots 11.26$$

y como $(\vec{r}_c \cdot \vec{\omega}) = 0$ ya que son vectores perpendiculares:

$$\vec{r}_c \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_c) \, dm = r_c^2 \vec{\omega} \, dm \quad \dots 11.27$$

Sustituyendo (11.27) en (11.25), se tiene:

$$\vec{H}_c = \int \vec{\omega} r_c^2 \, dm = \vec{\omega} \int r_c^2 \, dm \quad \dots 11.28$$

ya que $\vec{\omega}$ es la misma para todos los vectores \vec{r}_c en el instante considerado.

Sea

$$I_c = \int r_c^2 \, dm \quad \dots 11.29$$

el momento de inercia de la masa del cuerpo con respecto a un eje perpendicular al plano de movimiento que pasa por el centro de masa, C.

Sustituyendo (11.29) en (11.28), resulta:

$$\vec{H}_c = \vec{\omega} I_c \quad \dots 11.30$$

Por lo que, de acuerdo con la ecuación (11.11) resulta para éste caso:

$$\vec{M}_c = \vec{H}_c = \vec{\omega} I_c \quad \dots 11.31$$

Por último se analizará el caso en que el punto A sea un punto cuya velocidad sea paralela a la del centro de masa, C.

Llamemos L a dicho punto (figura 11.7).

De acuerdo con los conceptos de la cinemática del cuerpo rígido dotado de un movimiento plano general, en este caso el vector \vec{LC} resulta obligadamente perpendicular a \vec{V}_C ; es decir:

$$\vec{LC} \cdot \vec{V}_C = 0 \quad \dots 11.32$$

Siguiendo una secuela análoga a los dos casos anteriores se obtiene:

$$d\vec{H}_L = \vec{P}_L \times \vec{v} \, dm \quad \dots 11.33$$

De acuerdo con la figura 11.7:

$$\vec{P}_L = \vec{LC} + \vec{P}_C \quad \dots 11.34$$

y, por otro lado:

$$\vec{v} = \vec{V}_C + \vec{\omega} \times \vec{P}_C \quad \dots 11.35$$

Sustituyendo (11.34) y (11.35) en (11.33), resulta:

$$\begin{aligned} d\vec{H}_L &= (\vec{LC} + \vec{P}_C) \times (\vec{V}_C + \vec{\omega} \times \vec{P}_C) \, dm \\ d\vec{H}_L &= \vec{LC} \times \vec{V}_C \, dm + \vec{LC} \times (\vec{\omega} \times \vec{P}_C) \, dm + \vec{P}_C \times \vec{V}_C \, dm + \vec{P}_C \times (\vec{\omega} \times \vec{P}_C) \, dm \end{aligned} \quad \dots 11.36$$

Luego:

$$\vec{H}_L = \int \vec{LC} \times \vec{V}_C \, dm + \int \vec{LC} \times (\vec{\omega} \times \vec{P}_C) \, dm + \int \vec{P}_C \times \vec{V}_C \, dm + \int \vec{P}_C \times (\vec{\omega} \times \vec{P}_C) \, dm \quad \dots 11.37$$

Tomando en cuenta que \vec{LC} , y \vec{V}_C son los mismos para todos los términos de las integrales donde intervienen y que $\vec{\omega} \cdot \vec{P}_C = 0$, la ecuación anterior se puede escribir como:

$$\vec{H}_L = \vec{LC} \times \vec{V}_C \int dm + \vec{LC} \times [\vec{\omega} \times \int \vec{P}_C \, dm] + [\int \vec{P}_C \, dm] \times \vec{V}_C + \vec{\omega} \int \vec{P}_C^2 \, dm \quad \dots 11.38$$

Como la integral del último término de la ecuación anterior es I_C (ecuación 11.29), y $\int \vec{P}_C \, dm = \vec{0}$ y $\int dm = M$, la expresión se reduce a:

$$\vec{H}_L = (\vec{LC} \times \vec{V}_C) M + \vec{\omega} I_C \quad \dots 11.39$$

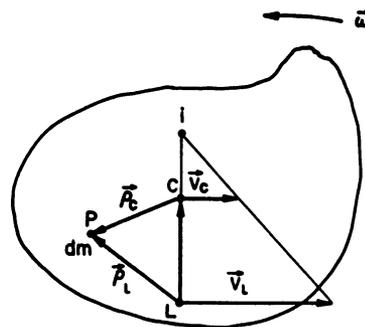


Fig 11.7

o bien, tomando en cuenta la ecuación (11.30), resulta:

$$\vec{H}_L = (\vec{L}_C \times \vec{v}_C) M + \vec{H}_C \quad \dots 11.40$$

Derivando la ecuación (11.39) con respecto al tiempo, resulta:

$$\vec{\dot{H}}_L = \left[\vec{L}_C \times \vec{a}_C + \frac{d}{dt} (\vec{L}_C) \times \vec{v}_C \right] M + \vec{\alpha} I_C \quad \dots 11.41$$

Según el teorema omega (Relación de Poisson):

$$\frac{d}{dt} (\vec{L}_C) = \vec{\omega} \times \vec{L}_C \quad \dots 11.42$$

Sustituyendo (11.42) en (11.41), se obtiene:

$$\vec{\dot{H}}_L = \left[\vec{L}_C \times \vec{a}_C + (\vec{\omega} \times \vec{L}_C) \times \vec{v}_C \right] M + \vec{\alpha} I_C \quad \dots 11.43$$

Desarrollando el doble producto vectorial indicado:

$$\vec{\dot{H}}_L = \left[\vec{L}_C \times \vec{a}_C + (\vec{\omega} \cdot \vec{v}_C) \vec{L}_C - (\vec{L}_C \cdot \vec{v}_C) \vec{\omega} \right] M + \vec{\alpha} I_C$$

y como $\vec{\omega} \cdot \vec{v}_C = 0$ y también $\vec{L}_C \cdot \vec{v}_C = 0$ en definitiva:

$$\vec{\dot{H}}_L = (\vec{L}_C \times \vec{a}_C) M + \vec{\alpha} I_C \quad \dots 11.44$$

Por lo tanto, al considerar lo que indica la ecuación (11.11), resulta:

$$\vec{M}_L = \vec{\dot{H}}_L = (\vec{L}_C \times \vec{a}_C) M + \vec{\alpha} I_C \quad \dots 11.45$$

Ahora se deducirán otras dos ecuaciones de movimiento alternativas de las expresiones (11.19), (11.31) y (11.45) usando como base la condición de identidad entre el sistema de fuerzas exteriores aplicadas al cuerpo rígido y el de las fuerzas efectivas de sus partículas.

Antes de ello conviene aclarar que a partir de la segunda ley de Newton sobre la partícula, cuya expresión es:

$$\vec{F} = m \vec{a} \quad \dots 11.46$$

* En el ejemplo 11.4 se demuestra que esta expresión es válida para cualquier punto, A, aún en el caso en que el cuerpo rígido tenga un movimiento general, siendo dicha expresión el caso particular, correspondiente al cuerpo rígido.

si la masa de la partícula diferencial es dm y tiene en el instante considerado una aceleración \vec{a} , la fuerza efectiva correspondiente resulta dada por la expresión

$$d\vec{F} = \vec{a} dm \quad \dots 11.47$$

En caso de que la aceleración tenga varias componentes, al multiplicar cada una de estas por dm se obtendrán las respectivas componentes de la fuerza efectiva.

Considérese ahora la figura 11.8 donde I representa el centro instantáneo de aceleración cero y P es una partícula situada en el plano de movimiento, siendo \vec{r}_I su vector de posición con respecto a I .

Las dos componentes intrínsecas de la aceleración de P son:

$$\vec{a}_{P_T} = \vec{\omega} \times \vec{r}_I \quad \dots 11.48$$

$$\text{y } \vec{a}_{P_N} = -\omega^2 \vec{r}_I \quad \dots 11.49$$

Multiplicando por dm estos vectores se obtienen las respectivas componentes de la fuerza efectiva de la partícula, las cuales se indican en la figura 11.8.

Usando la nomenclatura convencional de Estática, el momento de la fuerza efectiva de la partícula con respecto al eje que pasa por I resulta dado por:

$$d\vec{M}_I = [\vec{r}_I \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_I) + \vec{r}_I \times (-\omega^2 \vec{r}_I)] dm \quad \dots 11.50$$

Como el último término de la ecuación anterior es nulo, ya que es el producto vectorial de dos vectores paralelos, la ecuación se reduce a:

$$d\vec{M}_I = \vec{r}_I \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_I) dm \quad \dots 11.51$$

Desarrollando el doble producto vectorial, resulta:

$$d\vec{M}_I = [r_I^2 \vec{\omega} - (\vec{r}_I \cdot \vec{\omega}) \vec{r}_I] dm$$

pero $\vec{r}_I \cdot \vec{\omega} = 0$ por ser vectores perpendiculares,

$$\text{Luego: } d\vec{M}_I = r_I^2 \vec{\omega} dm \quad \dots 11.52$$

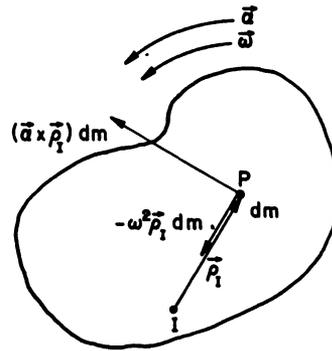


Fig 11.8

Al integrar para considerar todas las partículas del cuerpo, e igualar con el momento de las fuerzas exteriores resulta:

$$\vec{M}_I = \int r_I^2 \vec{\alpha} \quad \dots 11.53$$

y como $\vec{\alpha}$ es la misma para todos los vectores \vec{r}_I , se tiene:

$$\vec{M}_I = \vec{\alpha} \int r_I^2 dm \quad \dots 11.54$$

La cantidad $\int r_I^2 dm$ representa el momento de inercia de la masa del cuerpo con respecto a un eje perpendicular al plano de movimiento que pasa por I.

$$\text{Sea } I_I = \int r_I^2 dm \quad \dots 11.55$$

Sustituyendo (11.55) en (11.54), se obtiene en definitiva:

$$\vec{M}_I = \vec{\alpha} I_I \quad \dots 11.56$$

De manera análoga al caso anterior considérese ahora la figura 11.9 donde Q representa un punto del plano de movimiento, cuya aceleración, \vec{a}_Q , está localizada a lo largo del vector \vec{QC} .

De acuerdo con la cinemática del cuerpo rígido dotado de movimiento plano general, si P es una partícula de masa dm situada en el plano de movimiento del cuerpo y \vec{r}_Q es su vector de posición con respecto al punto Q, su aceleración resulta dada por:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_Q + \vec{\alpha} \times \vec{r}_Q - \omega^2 \vec{r}_Q \quad \dots 11.57$$

Al multiplicar cada una de estas tres componentes de la aceleración por dm , se obtienen las respectivas componentes de la fuerza efectiva de la partícula, las cuales se indican en la figura 11.9.

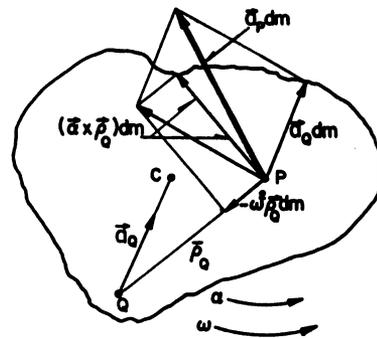


Fig 11.9

Considerando los momentos de estas componentes con respecto al eje perpendicular al plano de movimiento que pasa por Q, integrando e igualando con los momentos de las fuerzas exteriores, resulta:

$$\vec{M}_Q = \int \vec{r}_Q \times \vec{a}_Q dm + \int \vec{r}_Q \times (\vec{\alpha} \times \vec{r}_Q) dm + \int \vec{r}_Q \times (-\omega^2 \vec{r}_Q) \dots 11.58$$

Como el término $\vec{P}_q \times (-\omega^2 \vec{P}_q) = \vec{0}$ ya que es el producto vectorial de dos vectores paralelos, y \vec{a}_O es la misma para todos los términos de la integral del primer término del segundo miembro, la ecuación anterior se puede escribir como:

$$\vec{M}_q = \left[\int \vec{P}_q dm \right] \times \vec{a}_q + \int \vec{P}_q \times (\vec{\omega} \times \vec{P}_q) dm \quad \dots 11.59$$

Según la definición de centro de masa de un sistema de partículas

$$\int \vec{P}_q dm = \vec{QC} M \quad \dots 11.60$$

y al desarrollarse el doble producto vectorial de los términos del integrando $\vec{P}_q \times (\vec{\omega} \times \vec{P}_q) dm$, resulta

$$\vec{P}_q \times (\vec{\omega} \times \vec{P}_q) dm = [P_q^2 \vec{\omega} - (\vec{P}_q \cdot \vec{\omega}) \vec{P}_q] dm$$

Como $\vec{P}_q \cdot \vec{\omega} = 0$ por ser vectores perpendiculares, la expresión anterior se reduce a:

$$\vec{P}_q \times (\vec{\omega} \times \vec{P}_q) dm = P_q^2 \vec{\omega} dm \quad \dots 11.61$$

Sustituyendo (11.60) y (11.61) en (11.59), resulta:

$$\vec{M}_q = \vec{QC} M \times \vec{a}_q + \int P_q^2 \vec{\omega} dm \quad \dots 11.62$$

Puesto que $\vec{QC} M \times \vec{a}_q = \vec{0}$ ya que es el producto vectorial de dos vectores paralelos, y $\vec{\omega}$ es la misma para todos los términos de la integral, resulta:

$$\vec{M}_q = \vec{\omega} \int P_q^2 dm \quad \dots 11.63$$

$\int P_q^2 dm$ representa el momento de inercia de la masa del cuerpo con respecto a un eje perpendicular al plano de movimiento que pasa por Q.

$$\text{Sea } I_q = \int P_q^2 dm \quad \dots 11.64$$

Sustituyendo (11.64) en (11.63) se obtiene, finalmente

$$\vec{M}_q = \vec{\omega} I_q \quad \dots 11.65$$

11.2.1 RESUMEN DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO CORRESPONDIENTES A UN CUERPO RIGIDO DOTADO DE MOVIMIENTO PLANO GENERAL

A continuación se presenta el resumen de dichas ecuaciones las cuales se usarán para resolver los problemas dinámicos respectivos.

$$\begin{aligned} \vec{R} &= M \vec{a}_c & \dots & 11.10 \\ \vec{M}_i &= I_i \alpha_i & \dots & 11.19 \\ \vec{M}_c &= I_c \alpha & \dots & 11.31 \\ \vec{M}_L &= (\vec{r}_L \times \vec{a}_c) M + I_c \alpha & \dots & 11.45 \\ \vec{M}_I &= I_I \alpha & \dots & 11.56 \\ \vec{M}_Q &= I_Q \alpha & \dots & 11.65 \end{aligned}$$

En estas expresiones los subíndices i, C, L, I y Q representan puntos situados en el plano de movimiento del cuerpo, pasando por cuatro de ellos los ejes a los que se refieren los momentos de inercia respectivos.

Esos puntos son:

- i* = centro instantáneo de rotación ($\vec{V}_i = \vec{0}$)
- C* = centro de masa del cuerpo
- L* = punto tal que $\vec{V}_L \parallel \vec{V}_c$
- I* = centro instantáneo de aceleración cero ($\vec{a}_I = \vec{0}$)
- Q* = punto tal que \vec{a}_Q queda situado a lo largo de \vec{QC} .

En la aplicación práctica de esas ecuaciones se convendrá en considerar que el plano de movimiento del cuerpo rígido se localiza en el plano coordenado de referencia xy, por lo cual dichas ecuaciones equivalen a las siguientes expresiones escalares, (exceptuando la ecuación 11.70).

$$\begin{aligned} R_x &= M \bar{a}_x & \dots & 11.66 \\ R_y &= M \bar{a}_y & \dots & 11.67 \\ M_i &= I_i \alpha & \dots & 11.68 \\ M_c &= \bar{I} \alpha = I_c \alpha & \dots & 11.69 \\ \vec{M}_L &= (\vec{r}_L \times \vec{a}_c) M + \bar{I} \alpha & \dots & 11.70 \end{aligned}$$

* El primer teorema de Ordóñez, que se demuestra posteriormente, indica que el centro instantáneo de rotación, i, es un punto cuya aceleración, en cualquier instante presenta esta característica.

(Al aplicar esta ecuación, los vectores \vec{L}_C y \vec{a}_C deben expresarse en forma binómica cartesiana según cada caso particular).

$$M_I = I_I \alpha \quad \dots 11.71$$

$$M_Q = I_Q \alpha \quad \dots 11.72$$

Recuérdese que de la lista anterior, las ecuaciones 11.66 y 11.67, y solamente una de las que le siguen son independientes, de modo que, según las condiciones de cada problema bajo consideración se usará la que permita resolverlo con mayor facilidad, utilizando el resto de esas ecuaciones para comprobar los resultados, si así se desea.

Antes de proceder a aplicar esas ecuaciones en la solución de ejemplos de problemas ilustrativos se expondrán los conceptos básicos relacionados con el momento de inercia de la masa de cuerpos sólidos homogéneos que sean simétricos con respecto al plano de movimiento.

11.2.2 MOMENTO DE INERCIA DE LA MASA DE UN CUERPO CON RESPECTO A UN EJE

El concepto de momento de inercia de la masa de un cuerpo con respecto a uno de los ejes mencionados anteriormente presenta dos aspectos fundamentales; el primero se refiere a su significado físico, y el segundo a su definición matemática.

El significado físico es fácilmente comprensible si consideramos las ecuaciones (11.19), (11.31), (11.56) y (11.65), a partir de las cuales, al despejar el parámetro α que corresponde a la aceleración angular del cuerpo rígido se obtiene una expresión de la forma:

$$\alpha = \frac{\vec{M}_*}{I_*} \quad \dots 11.73$$

correspondiendo el subíndice * a alguno de los puntos especiales mencionados anteriormente, por los que pasa el eje respectivo.

Esta ecuación presenta la misma forma de la que se obtiene al despejar, de la expresión correspondiente a la segunda ley de Newton para el movimiento de una partícula, la aceleración \vec{a} ; es decir resulta análoga a:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{M} \quad \dots 11.74$$

Así, mientras esta ecuación indica en forma matemática que la masa de la partícula es la medida cuantitativa de su inercia; o sea de *la resistencia que la partícula ofrece a dejarse acelerar linealmente bajo la acción de la fuerza \vec{F}* , la ecuación 11.73 indica, análogamente, que el momento de inercia de la masa de un cuerpo rígido dotado de movimiento plano general con respecto a un eje que siendo, perpendicular al plano de movimiento pasa por alguno de los puntos i, C, I, ó Q, es *la medida cuantita-*

- tiva de la resistencia que el cuerpo ofrece a dejarse acelerar angularmente alrededor de dicho eje bajo el efecto del momento que producen las fuerzas exteriores con respecto a dicho eje.
- La definición matemática del momento de inercia de la masa de un cuerpo con respecto a cualquier eje, tal como el eje x de la fig. 11.10 está dada por la expresión

$$I_x = \int \rho_x^2 dm \quad \dots 11.75$$

donde ρ_x representa la distancia entre el elemento de masa dm , y el eje; es decir, dicha cantidad es la suma de los productos de la masa de cada una de las partículas del cuerpo por el cuadrado de la distancia a dicho eje.

Análogamente con respecto a los ejes "y", y "z", las expresiones correspondientes son:

$$I_y = \int \rho_y^2 dm \quad \dots 11.76$$

$$I_z = \int \rho_z^2 dm \quad \dots 11.77$$

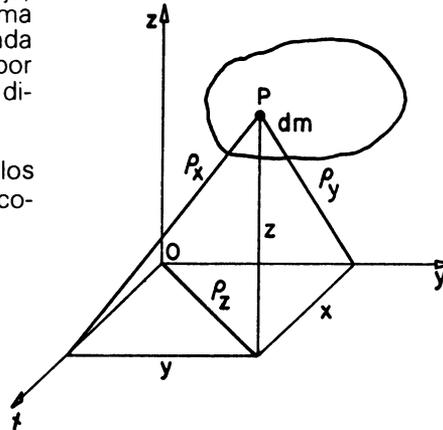


Fig 11.10

Usando la relación geométrica existente entre las coordenadas "x", "y", y "z" de la partícula P y las distancias ρ_x , ρ_y , ρ_z , las tres ecuaciones anteriores también se pueden expresar como sigue:

$$I_x = \int \rho_x^2 dm = \int (y^2 + z^2) dm \quad \dots 11.78$$

$$I_y = \int \rho_y^2 dm = \int (x^2 + z^2) dm \quad \dots 11.79$$

$$I_z = \int \rho_z^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm \quad \dots 11.80$$

Como puede deducirse fácilmente de las expresiones anteriores el momento de inercia de la masa de un cuerpo es una cantidad escalar cuyas dimensiones son:

$$D_I = L^2 MT^2 \quad \dots 11.81$$

Otra de las características propias del momento de inercia de la masa de un cuerpo es que resulta una cantidad positiva cuyo valor numérico depende principalmente, de la posición relativa de sus partículas con respecto al eje bajo consideración, ya que las partículas más alejadas de dicho eje contribuyen en forma más significativa que las más cercanas, debido a que en su cálculo interviene el cuadrado de la distancia entre cada partícula y el eje*.

Otro de los conceptos relacionados con el momento de inercia de la masa de un cuerpo es, el de *radio de giro* con respecto al eje bajo consideración.

Con relación a este concepto se presentan también dos aspectos; su definición matemática, y su significado físico.

La definición matemática es como sigue:

Si se designa por k_x al radio de giro de la masa del cuerpo con respecto al eje x, su expresión correspondiente es:

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{M}} \quad \dots \text{11.82}$$

donde I_x = momento de inercia de la masa del cuerpo con respecto al eje "x", y
 M = masa total del cuerpo.

La ecuación anterior equivale a la siguiente:

$$I_x = k_x^2 M \quad \dots \text{11.83}$$

En cuanto a su significado físico, éste puede deducirse de la ecuación anterior, de modo que puede interpretarse como *aquella distancia a la que, con respecto al eje considerado, puede suponerse concentrada la masa del cuerpo*, de tal manera que en estas condiciones ofrece la misma resistencia a dejarse acelerar angularmente bajo el efecto del momento de las fuerzas exteriores aplicadas, que la que ofrece bajo su forma real.

* Por esta razón también se le denomina segundo momento de la masa del cuerpo con respecto al eje bajo consideración.

- a) *Teorema de Steinner o de los ejes paralelos.* Este teorema sirve prácticamente para obtener el momento de inercia de la masa de un cuerpo con respecto a un eje cualquiera, z' , cuando se conoce el momento de inercia del cuerpo con respecto a un eje z paralelo al mencionado, y que pase por el centro de masa del cuerpo*.

Con respecto a lo que se indica en la figura 11.11, el teorema indica que:

$$I_{z'} = \bar{I}_z + M d^2 \quad \dots \text{ 11.84}$$

Siendo M = masa del cuerpo
y d = distancia entre los ejes paralelos

La demostración de este teorema se hará tomando como base la figura 11.11 en la cual se indica un cuerpo rígido referido a los sistemas cartesianos $x' y' z'$ y $C x y z$, siendo el origen de este último, supuestamente, el centro de masa del cuerpo.

Como en la definición matemática de momento de inercia de la masa de un cuerpo queda involucrado el cuadrado de la distancia entre cada partícula del cuerpo y el eje bajo consideración, se pueden utilizar para la demostración las proyecciones sobre el plano $x' y'$, de los vectores $\vec{O'C}$, \vec{CP} , y $\vec{O'P}$, las cuales se designan por $\vec{O'C'}$, $\vec{P'z'}$, y $\vec{P'z}$, respectivamente. Figura 11.11.

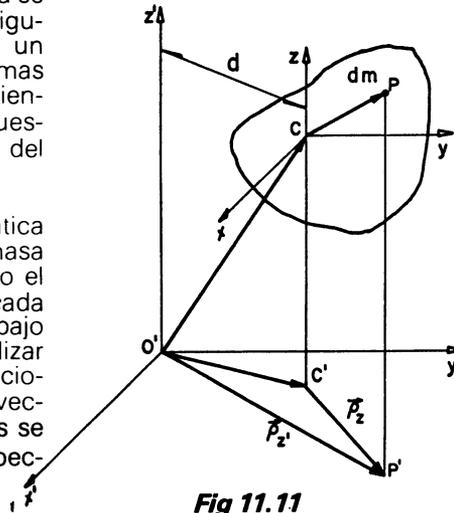


Fig 11.11

Por definición tenemos que:

$$\bar{I}_z = \int \rho_z^2 dm \quad \dots \text{ 11.85}$$

$$I_{z'} = \int \rho_{z'}^2 dm \quad \dots \text{ 11.86}$$

En la figura 11.11 se observa que:

$$\vec{P'z'} = \vec{O'C'} + \vec{P'z} \quad \dots \text{ 11.87}$$

Luego: $\rho_{z'}^2 = (\vec{P'z'}) \cdot (\vec{P'z'}) = (\vec{O'C'} + \vec{P'z}) \cdot (\vec{O'C'} + \vec{P'z})$

$$\rho_{z'}^2 = (\vec{O'C'})^2 + \rho_z^2 + 2 \vec{P'z} \cdot \vec{O'C'} \quad \dots \text{ 11.88}$$

* También se puede usar en orden inverso; es decir, a partir del conocimiento de $I_{z'}$, el teorema sirve para calcular \bar{I}_z .

Pero $(\vec{O'C'})^2 = d^2$ 11.89

siendo d la distancia entre los ejes paralelos z' y z .

Sustituyendo (11.89) en (11.88) se obtiene:

$$\rho_{z'}^2 = d^2 + \rho_z^2 + 2 \vec{\rho}_z \cdot \vec{O'C'} \quad \dots \quad 11.90$$

Sustituyendo (11.83) en (11.79) resulta:

$$I_{z'} = \int d^2 dm + \int \rho_z^2 dm + \int (2 \vec{\rho}_z \cdot \vec{O'C'}) dm \quad \dots \quad 11.91$$

Como las cantidades d^2 y $\vec{O'C'}$ son las mismas para todos los términos de las integrales que las contienen, la expresión anterior puede escribirse como:

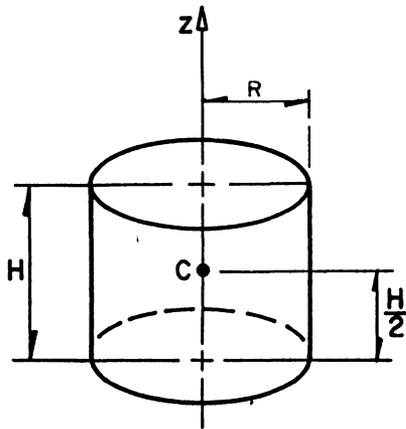
$$I_{z'} = d^2 \int dm + \int \rho_z^2 dm + 2 \left[\int \vec{\rho}_z dm \right] \cdot (\vec{O'C'}) \quad \dots \quad 11.92$$

Como $\int dm = M$; $\int \rho_z^2 dm = \bar{I}_z$ y de acuerdo con la definición de centro de masa ; $\int \vec{\rho}_z dm = \vec{O}$, resulta finalmente:

$$I_{z'} = M d^2 + \bar{I}_z \quad \text{L.O.Q.D.}$$

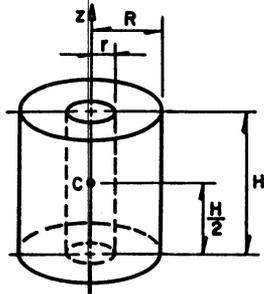
TABLA DE MOMENTOS DE INERCIA DE LA MASA DE ALGUNOS
SOLIDOS HOMOGENEOS DE FORMA GEOMETRICA SIMPLE

CILINDRO CIRCULAR
RECTO MACIZO



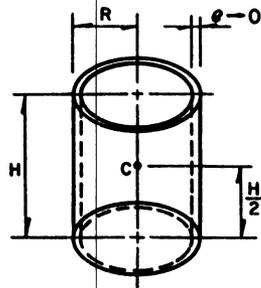
$$V = \pi R^2 H \quad ; \quad \bar{I}_z = \frac{M}{2} R^2$$

CILINDRO CIRCULAR RECTO HUECO



$$V = \pi H [R^2 - r^2], \quad \bar{I}_z = \frac{M}{2} (R^2 + r^2)$$

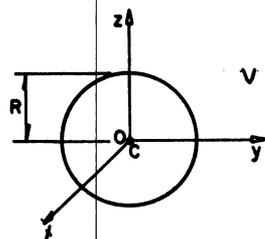
CILINDRO CIRCULAR RECTO DE PARED DELGADA



$$V = 2\pi R H e$$

$$\bar{I}_z = M R^2$$

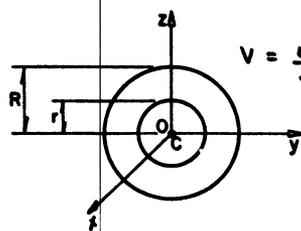
ESFERA MACIZA



$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \bar{I}_z = \frac{2}{5} M R^2$$

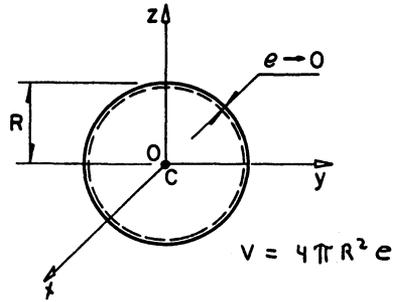
ESFERA-HUECA



$$V = \frac{4}{3} \pi (R^3 - r^3)$$

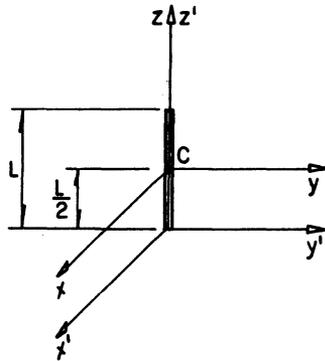
$$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \bar{I}_z = \frac{2}{5} M \frac{(R^5 - r^5)}{(R^3 - r^3)}$$

ESFERA DE PARED DELGADA



$$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \bar{I}_z = \frac{2}{3} MR^2$$

BARRA PRISMÁTICA DELGADA



$$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{ML^2}{12} ; \bar{I}_z = 0$$

$$I_{x'} = I_{y'} = \frac{ML^2}{3}$$

Cuando se trata de calcular, con respecto a un eje dado, el momento de inercia de un cuerpo sólido homogéneo formado por dos o más cuerpos de forma geométrica simple, conviene primero suponer descompuesto el sólido en elementos simples y obtener el momento de inercia como la suma de los momentos de inercia de los cuerpos simples, empleando para el cálculo de cada uno de estos los resultados que indica la tabla anterior y, si es necesario, el teorema de Steinner.

Los ejemplos que siguen ilustran la aplicación numérica de estos conceptos.

Ejemplo 11.1. En la figura 11.12, se indica una barra delgada homogénea, OA, de 2 m de longitud y 10 N de peso, que está rígidamente unida aun disco homogéneo, B, de 1 m de radio y 20 N de peso. Hallar el momento de inercia de la masa del sistema, con respecto a un eje perpendicular al plano de la figura y que pasa por O.

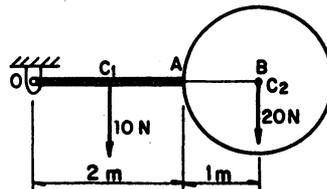


Fig 11.12

Solución.

Considérese descompuesto el sistema en dos cuerpos rígidos homogéneos de forma geométrica simple, la barra delgada OA, y el disco B.

Con fines de identificación se denominará a la barra como elemento 1, y al disco como elemento 2, siendo C_1 y C_2 sus centros de masa respectivos.

Así:

$$I_o = I_1 + I_2 \quad (1)$$

De acuerdo con la tabla anterior se puede calcular directamente I_1 , como sigue:

$$I_1 = \frac{M_1 L_1^2}{3} = \frac{1}{3} \left(\frac{10}{9.8} \right) (2)^2 = 1.36054 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2 \quad (2)$$

Para el cálculo de I_2 usamos el teorema de Steinner el cual indica que:

$$I_2 = \bar{I}_2 + M_2 d_2^2 \quad (3)$$

A partir de la tabla anterior, resulta:

$$I_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{20}{9.8} \right) (1)^2 + \left(\frac{20}{9.8} \right) (3)^2$$

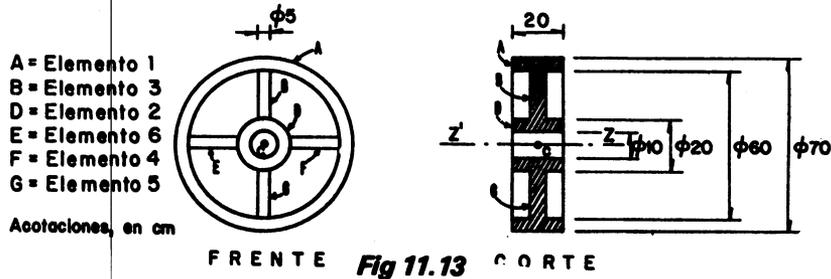
o sea:
$$I_2 = \frac{20}{9.8} (0.5 + 9) = 19.38776 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2 \quad (4)$$

Sustituyendo (2) y (4) en (1), se obtiene:

$$I_o = 20.7483 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

Ejemplo 11.2. Una rueda homogénea de madera, de cuatro rayos tiene las dimensiones indicadas en la figura 11.13, considerando los rayos de la rueda como barras delgadas de 2.5 cm de radio:

- a) Hallar el momento de inercia de la rueda con respecto al eje centroidal $z'z'$, si el peso específico de la madera es de 0.0008 N/cm^3
- b) Calcular el radio de giro correspondiente.



Solución.

a) Considérese la rueda formada por los seis elementos simples indicados en la figura anterior, los cuales se han numerado con fines de identificación, como sigue:

- Elemento 1 = "piña" de la rueda..
- Elemento 2 = cubo de la rueda.
- Elementos del 3 al 6 = rayos de la rueda.

Así, resulta:

$$\bar{I}_z = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + 4 I_3 \quad (1)$$

La masa de cada elemento es:

$$M_1 = \pi (35^2 - 30^2) 20 \left(\frac{0.0008}{9.8} \right) = 1.6669675 \text{ kg}$$
$$M_2 = \pi (10^2 - 5^2) 20 \left(\frac{0.0008}{9.8} \right) = 0.384685 \text{ kg}$$
$$M_3 = \pi (2.5)^2 20 \left(\frac{0.0008}{9.8} \right) = 0.032057 \text{ kg}$$

Para el cálculo de I_1 e I_2 se usan los resultados de la tabla, correspondientes a un cilindro circular recto hueco.

$$\bar{I}_1 = \frac{1.6669675}{2} (0.35^2 + 0.30^2) = 0.177115 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (2)$$

$$\bar{I}_2 = \frac{0.384685}{2} (0.10^2 + 0.05^2) = 0.002404 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (3)$$

Para los rayos se emplea el teorema de Steinner.

$$I_3 = \bar{I}_3 + M_3 d_3^2 = \frac{0.032057}{12} (0.20)^2 + 0.032057 (0.20)^2$$

o sea: $\therefore I_3 = 0.0013891 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (4)$

Sustituyendo (2), (3), y (4) en (1), resulta:

$$\bar{I}_z = 0.185076 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

b) Como la masa total de la rueda es:

$$M = M_1 + M_2 + 4 M_3 = 2.179883 \text{ kg}$$

el radio de giro centroidal correspondiente al eje z'z resulta de:

$$\bar{k}_z = \sqrt{\frac{\bar{I}_z}{M}} = \sqrt{\frac{0.185076}{2.179883}} = 0.291379 \text{ m}$$

Ejemplo 11.3. Tomando como base la condición de identidad entre el sistema de fuerzas exteriores aplicadas a un cuerpo rígido y el sistema de fuerzas efectivas correspondiente, demostrar la ecuación 11.31, la cual indica que:

$$\vec{M}_c = \vec{\alpha} I_c$$

Solución.

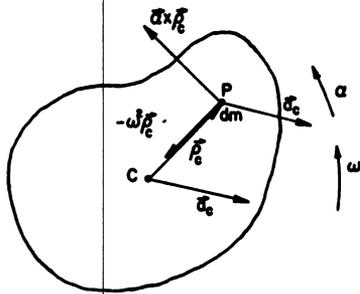


Diagrama cinemático

Fig 11.14

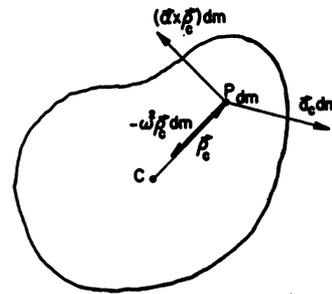


Diagrama dinámico

Fig 11.15

En la figura 11.14 se indica el plano de movimiento de un cuerpo rígido que, supuestamente, está dotado de un movimiento plano general. C es el centro de masa, P es una partícula de masa dm localizada en dicho plano, $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$ son la velocidad angular y la aceleración angular, respectivamente, del cuerpo en el instante considerado.

Sea $\vec{CP} = \vec{r}'_c$ el vector de posición de la partícula P con respecto al centro de masa C.

De acuerdo con los conceptos cinemáticos, al tomar como base el centro de masa, C, la aceleración de la partícula P está dada por la expresión:

$$\vec{a}_p = \vec{a}_c + \vec{\alpha} \times \vec{r}'_c - \omega^2 \vec{r}'_c \quad (1)$$

En la figura 11.14 se muestran cada uno de los vectores del segundo miembro de la ecuación anterior, los cuales corresponden a las componentes de la aceleración de la partícula.

En la figura 11.15 se indican las componentes diferenciales de la fuerza efectiva de la partícula, las cuales se obtienen al multiplicar por dm la componente de aceleración respectiva.

De acuerdo con la condición de identidad entre el sistema de fuerzas

exteriores aplicadas a un cuerpo rígido y al de las fuerzas efectivas correspondiente, al tomar momentos con respecto al centro de masa, C, se puede escribir:

$$\vec{M}_c = \int \vec{r}_c \times \vec{a}_c \, dm + \int \vec{r}_c \times (\vec{\alpha} \times \vec{r}_c) \, dm + \int \vec{r}_c \times (-\omega^2 \vec{r}_c) \, dm \quad (2)$$

Observando que la última integral resulta nula, ya que cada uno de los términos del integrando es el producto vectorial de vectores paralelos, y que la integral $\int \vec{r}_c \times (\vec{\alpha} \times \vec{r}_c) \, dm$ se reduce a $\int r_c^2 \vec{\alpha} \, dm$, ya que al desarrollar el doble producto vectorial el término $\vec{r}_c \cdot \vec{\alpha} = 0$, por ser éstos vectores perpendiculares, la expresión (2) se reduce a:

$$\vec{M}_c = \int \vec{r}_c \times \vec{a}_c \, dm + \int r_c^2 \vec{\alpha} \, dm \quad (3)$$

Puesto que el vector \vec{a}_c es común a todos los términos de la primera integral, y $\vec{\alpha}$ lo es también para todos los términos de la segunda integral, resulta:

$$\vec{M}_c = \left[\int \vec{r}_c \, dm \right] \times \vec{a}_c + \vec{\alpha} \int r_c^2 \, dm \quad (4)$$

Como según la definición de centro de masa $\int \vec{r}_c \, dm = \vec{0}$, y además $\int r_c^2 \, dm = I_c$, representando esta cantidad el momento de inercia de la masa del cuerpo con respecto a un eje perpendicular al plano de movimiento y que pasa por C, se obtiene finalmente:

$$\vec{M}_c = \vec{\alpha} I_c \quad \text{L. Q. Q. D.}$$

Ejemplo 11.4. Demostrar que para un cuerpo rígido dotado de un movimiento general, su momentum angular con respecto a un punto cualquiera, A, está dado por la expresión.

$$\vec{H}_A = \vec{H}_c + M (\vec{AC} \times \vec{V}_c) \quad (1)$$

siendo \vec{H}_c su momentum angular con respecto al centro de masa, y \vec{V}_c la velocidad lineal de dicho centro en el instante considerado.

La expresión (1) señala que las cantidades \vec{H}_A y \vec{H}_c no son independientes.

Solución.

Considérese la figura 11.16 en la que se indica un cuerpo rígido dotado, supuestamente de un movimiento general, referido a un sistema cartesiano en reposo, o x y z. C es el centro de masa del cuerpo, A es un punto cualquiera del mismo, y P es una partícula de masa dm.

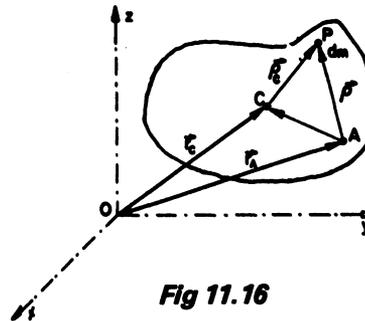


Fig 11.16

Sea \vec{r} el vector de posición de P con respecto a A, y \vec{r}_C el vector de posición de P con respecto a C.

Por definición de momentum angular tenemos que:

$$d\vec{H}_A = \vec{r} \times \vec{v} \, dm \quad (2)$$

En la figura 11 16 se observa que:

$$\vec{r} = \vec{AC} + \vec{r}_C \quad (3)$$

y, por otra parte, de acuerdo con la cinemática:

$$\vec{v} = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}_C \quad (4)$$

siendo $\vec{\omega}$ la velocidad angular del cuerpo rígido en el instante considerado.

Sustituyendo (3) y (4) en (2), resulta:

$$d\vec{H}_A = (\vec{AC} + \vec{r}_C) \times (\vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}_C) \, dm$$

$$d\vec{H}_A = \vec{AC} \times \vec{v}_C \, dm + \vec{AC} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_C) \, dm + \vec{r}_C \times \vec{v}_C \, dm + \vec{r}_C \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_C) \, dm \quad (5)$$

Por lo que integrando para calcular el momentum angular de todo el cuerpo, se obtiene:

$$\vec{H}_A = \int \vec{AC} \times \vec{v}_C \, dm + \int \vec{AC} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_C) \, dm + \int \vec{r}_C \times \vec{v}_C \, dm + \int \vec{r}_C \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_C) \, dm \quad (6)$$

Considerando que las cantidades \vec{AC} , \vec{v}_C y $\vec{\omega}$ son comunes a todos los términos de las integrales que las contienen, la expresión (6) puede escribirse como:

$$\vec{H}_A = (\vec{AC} \times \vec{v}_C) \int dm + \vec{AC} \times [\vec{\omega} \times \int \vec{r}_C \, dm] + [\int \vec{r}_C \, dm] \times \vec{v}_C + \int \vec{r}_C \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_C) \, dm \quad (7)$$

Como $\int dm = M$ = masa total del cuerpo

$\int \vec{r}_C \, dm = \vec{0}$ por definición de centro de masa

y $\int \vec{r}_C \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_C) \, dm = \vec{H}_C$ momentum angular del cuerpo rígido con respecto a C.

la expresión (7) se reduce a:

$$\vec{H}_A = M (\vec{AC} \times \vec{v}_C) + \vec{H}_C \quad \text{L.Q.Q.D.}$$

Ejemplo 11.5. La barra AB de la figura 11.17 se suelta desde el reposo en la posición indicada. Si los planos de apoyo de los extremos A y B son lisos, hallar el módulo de la aceleración angular α y los módulos de las reacciones en dichos apoyos al iniciarse el movimiento plano general de la barra. La longitud de la barra es de 5 m y su peso es de 100 N.

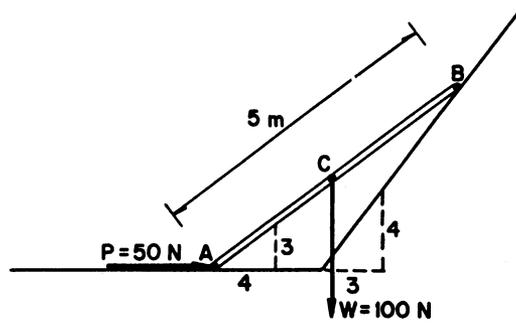


Fig 11.17

Solución.

En la figura 11.18 se indica el diagrama de cuerpo libre de la barra, correspondiente a la posición mencionada

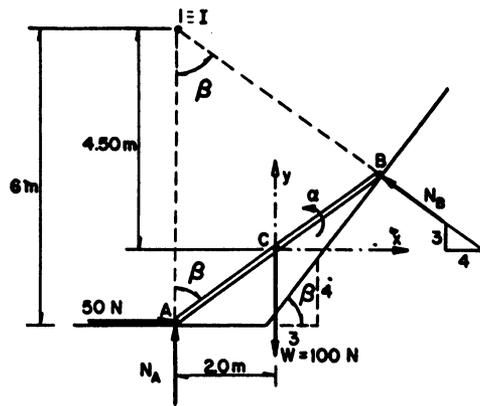


Fig 11.18

En el instante en que la barra inicia su movimiento plano general, el centro instantáneo de rotación, i , coincide con el centro instantáneo de aceleración cero, localizándose como se indica en la figura 11.18.

$$M_i = I_i \alpha$$

$$50(6) - 100(2) = \left[\frac{M}{12} + M(4.5^2 + 2.0^2) \right] \alpha = M \left(\frac{25}{12} + 20.25 + 4 \right) \alpha$$

$$\text{o sea: } 300 - 200 = \frac{100}{9.8} (26.3333) \alpha$$

Luego: $\alpha = \frac{100 \cdot (9.8)}{100 (26.2333)} = 0.37215 \text{ rad/s}^2$

Es decir $\vec{\alpha} = 0.37215 \text{ k}$

Para hallar las componentes a_x y a_y de la aceleración del centro de masa C se calcula la aceleración de dicho punto tomando como base a I, resultando:

$$\vec{a}_c = \vec{\alpha} \times \vec{I}_c = 0.37215 \text{ k} \times (2 \text{ i} - 4.5 \text{ j})$$

$$\vec{a}_c = \vec{\alpha} \times \vec{I}_c = 1.67468 \text{ i} + 0.7443 \text{ j}$$

Es decir: $a_x = 1.67468 \text{ m/s}^2$ y $a_y = 0.7443 \text{ m/s}^2$

Con $R_x = M a_x$
 $50 \cdot 0.8 N_B = 10.204082 (1.67468)$

Luego: $0.8 N_B = 50 - 17.0886 = 32.9114$

o sea: $N_B = 41.1393 \text{ N}$

Con $R_y = M a_y$
 $N_A - 100 + 0.6 (41.1393) = 10.204082 (0.7443)$

Luego: $N_A = 100 + 7.5949 - 24.6836$

o sea: $N_A = 82.9113 \text{ N}$

Se comprobarán los resultados utilizando la expresión 11.69 o sea:

$$M_c = \vec{I} \alpha$$

Sustituyendo los valores numéricos hallados anteriormente, el primer miembro resulta:

$$50(1.5) + 41.1393(0.6)z + 41.1393(0.8)1.5 - 82.9113(2) = 7.91172 \text{ N}$$

El segundo miembro resulta:

$$10.204082 \left(\frac{25}{12} \right) (0.37215) = 7.91135 \text{ N}\cdot\text{m}$$

lo que indica que las respuestas son correctas.

Ejemplo 11.6. La barra AB indicada en la figura 11.19 apoya sus extremos sobre planos rugosos. Si se suelta desde el reposo en la posición indicada, hallar el módulo de la aceleración angular de la barra para dicha posición, y las magnitudes de las normales en los extremos A y B. La barra tiene 5 m de longitud y pesa 98 N. El coeficiente de fricción en todas las superficies en contacto es 0.2.

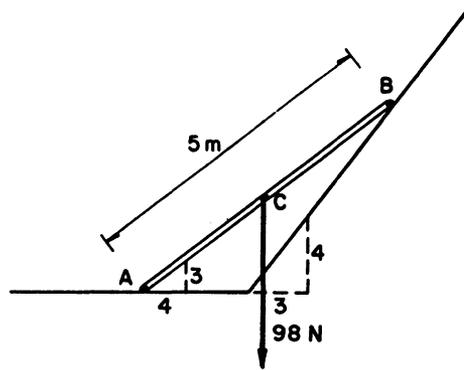


Fig 11.19

En la figura 11.20, se indica el diagrama de cuerpo libre de la barra correspondiente a la posición mencionada.

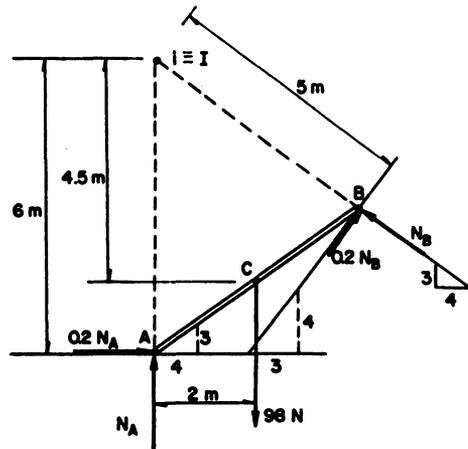


Fig 11.20

Con $M_i = I_i \alpha$

$$6(0.2 N_A) + 5(0.2 N_B) - 2(98) = \left[\frac{10}{12}(25) + 10(20.25 + 4) \right] \alpha$$

o sea: $1.2 N_A + N_B = 196 + 263.533 \alpha$, (1)

Ahora se calcula \vec{a}_C tomando como base al punto I:

$$\vec{a}_C = \vec{\alpha} \times \vec{r}_{IC} = \alpha \mathbf{k} \times (2\mathbf{i} - 4.5\mathbf{j}) = 4.5\alpha \mathbf{i} + 2\alpha \mathbf{j}$$

Por lo tanto: $a_x = 4.5 \alpha$ (2)

y $a_y = 2 \alpha$ (3)

Con $R_x = M a_x$: y con el valor de a_x dado en (2):

$$0.2 N_A + 0.12 N_B - 0.8 N_B = 10 (4.5 \alpha)$$

o sea: $0.2 N_A - 0.68 N_B = 45 \alpha$ (4)

Con $R_y = M a_y$, y tomando en cuenta el valor de a_y dado en (3):

$$N_A + 0.16 N_B + 0.6 N_B - 9B = 10 (2\alpha)$$

o sea; $N_A + 0.76 N_B = 9B + 20 \alpha$ (5)

En la ecuación (1):

$$N_B = 196 + 263.333 \alpha - 1.2 N_A$$
 (6)

Sustituyendo (6) en (4), resulta:

$$0.2 N_A - 133.28 - 179.06644 \alpha + 0.816 N_A = 45 \alpha$$

o sea: $1.016 N_A = 133.28 + 224.06644 \alpha$

Luego: $N_A = 131.181102 + 220.537835 \alpha$ (7)

Sustituyendo (7) en (6), resulta:

$$N_B = 196 + 263.333 \alpha - 157.917322 - 264.645402 \alpha$$

o sea: $N_B = 38.582678 - 1.312402 \alpha$ (8)

Sustituyendo (7) y (8) en (5), se obtiene:

$$131.181102 + 220.537835 \alpha + 29.322835 - 0.997426 \alpha = 9B + 20 \alpha$$

o sea: $62.503937 = 199.540409 \alpha$

Luego: $\alpha = -0.313239 \text{ rad/s}^2$ (9)

Es decir: $\vec{\alpha} = -0.313239 \mathbf{k}$

Sustituyendo (9) en (7), resulta:

$$N_A = 62.100051 \text{ N}$$

y sustituyendo (9) en (8), resulta:

$$N_B = 38.993773 \text{ N}$$

Los resultados se comprueban usando la ecuación $M_C = I_C \alpha$. Al sustituir los resultados anteriores en el primer miembro resulta:

$$62.100051(2) - 1.5(12.42001) - 2(6.239004) + 1.5(4.679253) - \\ - 1.5(31.195018) - 2(23.396264) = 6.525905 \text{ N}\cdot\text{m}$$

El segundo miembro resulta:

$$20.83333(0.313239) = 6.525812 \text{ N}\cdot\text{m}.$$

Por lo tanto los resultados están correctos.

11.2.3 EL FENOMENO DE RODAMIENTO DESDE EL PUNTO DE VISTA DINAMICO

El rodamiento perfecto de un sólido de revolución sobre una superficie plana, o curva, es un caso idealizado de movimiento plano que presenta aspectos interesantes desde el punto de vista dinámico.

A continuación se mencionan algunos de los aspectos importantes de este fenómeno, ya sea cuando el rodamiento se efectúa sobre una superficie plana horizontal, o bien sobre un plano inclinado, ilustrando posteriormente con algunos ejemplos los conceptos correspondientes.

- a) Rodamiento de un sólido de revolución sobre un plano horizontal.
 Considérese para el primer caso un cilindro recto homogéneo, de radio R , en reposo sobre un plano horizontal. Supóngase que el centro geométrico del cilindro "o", coincide con su centro de masa C; es decir, *el cilindro está balanceado*. (Figura 11.21).

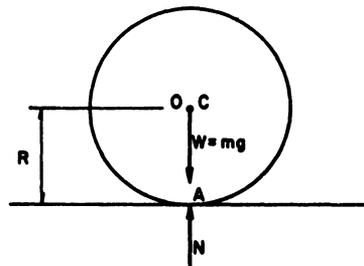


Fig 11.21

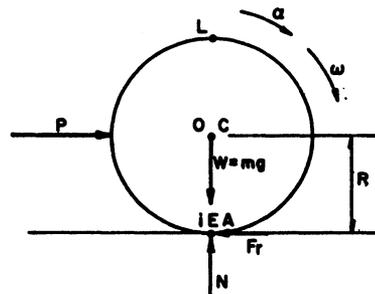


Fig 11.22

Las condiciones de equilibrio obligan a que la fuerza normal, N , resulte colineal, de igual magnitud y de sentido contrario al peso W del cilindro.

Para hacer rodar el cilindro, partiendo del reposo, considérese aplicada una fuerza horizontal, P , hacia la derecha, pasando por el centro de masa C . (Figura 11.22).

Como consecuencia de esta fuerza y de la forma exterior del cuerpo, éste rodará debido a la acción de la fuerza de fricción, F_f , que se genera en el punto A de contacto entre el cilindro y el plano horizontal de apoyo.

Como esta fuerza de fricción es la única que produce momento con respecto al eje normal al plano de movimiento que pasa por C , a ella se debe la aceleración angular $\vec{\alpha}$, lo cual puede demostrarse fácilmente al aplicar la ecuación 11.31; es decir:

$$\vec{M}_c = \vec{\alpha} I_c$$

Si en esta etapa de aceleración del cilindro se considera, idealmente, que éste rueda sin deslizar, el punto A coincide con el centro instantáneo de rotación, y en este caso se cumplen las condiciones cinemáticas siguientes:

$$\vec{v}_c = \omega R \hat{i} \quad 11.93$$

$$\vec{a}_c = \alpha R \hat{i} \quad 11.94$$

siendo ω y α la rapidez angular y el módulo de la aceleración angular del cilindro, en el instante considerado, respectivamente.

Además: $\vec{v}_i = \vec{0} \quad 11.95$

$$\vec{v}_l = z\omega R \hat{i} \quad 11.96$$

y $\vec{a}_i = \omega^2 R \hat{j} \quad 11.97$

Esto último significa que el centro instantáneo, i , es un punto cuya aceleración se localiza a lo largo de la recta ic que lo une con el centro de masa.

Conocidas en un instante dado las cantidades $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$ se puede localizar el centro instantáneo de aceleración, i .

En estas condiciones, para un problema numérico en el que se trate de calcular las fuerzas P y F_f se contaría con varias formas alternativas para comprobar los resultados usando para ello como centro de momentos los diversos puntos especiales que corresponden a las ecuaciones 11.31, 11.45, 11.56 y 11.65; es decir, los puntos C , L , I , y Q .

El ejemplo 11.7 ilustra la aplicación de estos conceptos.

Si en un instante dado se suspende la acción de la fuerza activa P, automáticamente desaparece la fuerza de fricción F_r , y el cilindro, idealmente, conservaría constante su velocidad angular ω , rodando hacia la derecha en forma continua.

(La razón de esto es que, como se verá posteriormente al tratar este fenómeno bajo el enfoque del trabajo y la energía, puesto que en el rodamiento perfecto la fricción no realiza ningún trabajo, el sistema resultaría conservativo y ya que no hay variación de la energía potencial gravitacional, la energía cinética se conservaría; es decir, las cantidades $\frac{M}{2} V_C^2$ y $\frac{I_C \omega^2}{2}$ resultarían constantes, y como $V_C = \omega R$, se deduce que $\omega = \text{cte}$, lo cual obliga a que $\alpha = 0$, por lo cual es necesario que $F_r = 0$).

Sin embargo, este movimiento continuo no se presenta en la realidad, sino que, por el contrario, al suspenderse la acción de la fuerza activa P el cilindro se detiene posteriormente debido a la generación de un momento friccionante que produce una aceleración angular en sentido contrario al de la velocidad angular.

Lo anterior conduce a afirmar que en la naturaleza no existe el rodamiento perfecto.

En el caso de un *cilindro no balanceado*, en el que existe una distancia \bar{r} entre el centro geométrico, O, y el centro de masa, C, al soltarlo desde el reposo en la posición indicada en la figura 11.23, se podrá considerar que, únicamente para esta posición inicial es válida la hipótesis de rodamiento perfecto, pues como se demostrará posteriormente bajo el enfoque del trabajo y la energía, para que el cilindro pueda rodar sin deslizar es necesario que $\bar{r} = 0$, es decir, que esté balanceado.

El ejemplo 11.8 se refiere al caso de un cilindro no balanceado que se suelta desde el reposo en la posición indicada en la figura 11.23.

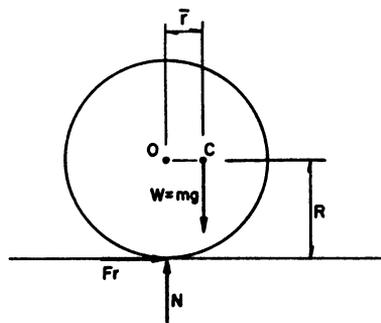


Fig 11.23

Ejemplo 11.7. El cilindro homogéneo macizo de la figura 11.24 pesa 49 N y tiene un radio de 1 m. Se hace rodar sin deslizar debido a la acción de la fuerza horizontal P indicada. Si para el instante considerado la rapidez del centro de masa es $V_C = 2 \text{ m/s}$ y el módulo de la aceleración de dicho punto es $a_C = 4 \text{ m/s}^2$, determinar la magnitud de la fuerza P y de la fricción entre el plano horizontal y el cilindro, comprobando los resultados de diversas maneras.

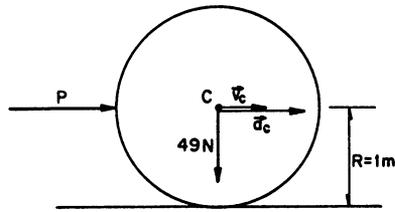


Fig 11.24

Solución.

En la figura 11.25 se indica el diagrama de cuerpo libre del cilindro.

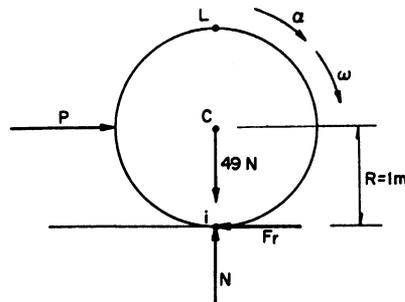


Fig 11.25

De acuerdo con los datos se tiene que:

$$\vec{\omega} = -2 \mathbf{k} \text{ [rad/s]}$$

$$\text{y } \vec{\alpha} = -4 \mathbf{k} \text{ [rad/s}^2\text{]}$$

$$\text{Con } \vec{M}_i = I_i \vec{\alpha}$$

$$\mathbf{j} \times P \mathbf{i} = \left[\frac{5}{2} + 5 \right] (-4 \mathbf{k})$$

o sea $-P \mathbf{k} = -30 \mathbf{k}$ luego ; $P = 30 \text{ N}$

Con $R_x = M a_x$, y tomando en cuenta el valor de P:

$$30i - F_r i = 5(4i)$$

Luego: $F_r = 10 \text{ N}$

Comprobaciones:

1) Con $\vec{M}_c = \vec{\omega} I_c$

$$-j \times (-F_r i) = 2.5(-4k)$$

$$-F_r = -10 \quad \therefore F_r = 10 \text{ N}$$

2) Con $\vec{M}_L = M(\vec{L} \times \vec{a}_c) + \vec{\omega} I_c$

$$-j \times P i - 2j \times (-F_r i) = 5[-j \times 4i] + (-4k) 2.5$$

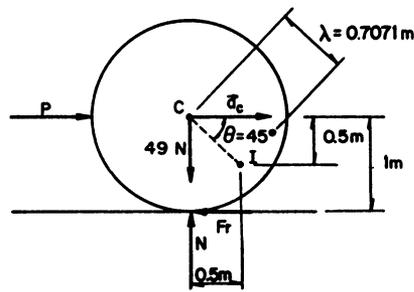
$$P k - 2F_r k = 20k - 10k = 10k$$

o sea: $P - 2F_r = 10$

Sustituyendo los resultados obtenidos anteriormente resulta:

$$30 - 20 = 10$$

3) Localizando el punto I como se indica en la figura 11.26.



$$\tan \theta = \frac{\alpha}{\omega^2} = \frac{4}{4} = 1$$

Luego: $\theta = 45^\circ$

$$\lambda = CI = \frac{a_c}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}} = \frac{4}{\sqrt{16 + 16}}$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7071 \text{ m}$$

Fig 11.26

Con $\vec{M}_I = \vec{\omega} I_I$

$$0.5j \times P i - 0.5j \times (-F_r i) = [2.5 + 5(0.5)](-4k)$$

$$(-0.5P - 0.5F_r)k = -20k$$

o sea: $0.5(P + F_r) = 20$

$$P + F_r = 40 \text{ N}$$

Sustituyendo los resultados obtenidos anteriormente, resulta:

$$30 + 10 = 40$$

- 4) En este caso el punto i también es un punto cuya aceleración se localiza a lo largo de la recta iC , coincidiendo entonces con el punto denominado Q , comprobándose por lo tanto igualmente los resultados.

Ejemplo 11.8. En la figura 11.27 se indica un cilindro no balanceado que pesa 98 N y tiene un radio de 1 m. Si se suelta desde el reposo en la posición indicada y se supone que el cilindro rueda sin deslizar en ese instante, hallar:

- La aceleración angular del cilindro.
- La aceleración del centro de masa del cilindro.
- Las magnitudes de la fuerza normal y la fricción, ejercidas por el piso horizontal sobre el cilindro, en el punto de contacto.
- Comprobar los resultados usando como centros de momentos los puntos C y L .

Considérese que $k_O = 0.5$ m.

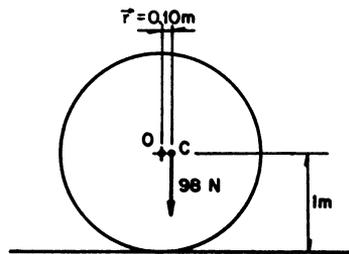


Fig 11.27

Solución.

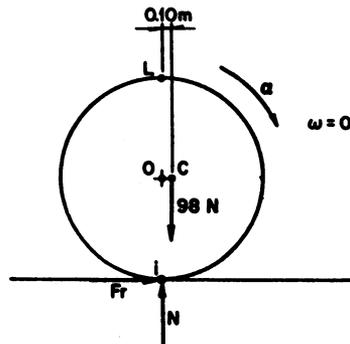


Fig 11.28

a) Como $\bar{r}_o = 0.5 \text{ m}$; $I_o = 10 (0.25) = 2.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

Luego: $I_c = I_o - M\bar{r}^2 = 2.5 - 10 (0.01) = 2.4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

y por tanto $I_i = I_c + M(\bar{x}_c)^2 = 2.4 + 10 [1 + 0.01]$

$$I_i = 12.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Con $M_i = I_i \alpha$

$$98 (0.10) = 12.5 \alpha ; \quad \alpha = \frac{9.8}{12.5} = 0.784 \text{ rad/s}^2$$

$$\bar{\alpha} = -0.784 \text{ k [rad/s}^2\text{]}$$

b) La aceleración del centro geométrico, O, resulta:

$$\bar{a}_o = 0.784 \text{ i}$$

Como $\bar{a}_c = \bar{a}_o + \bar{\alpha} \times \bar{oc} - \omega^2 \bar{oc}$

al sustituir los datos, se obtiene:

$$\bar{a}_c = 0.784 \text{ i} + (-0.784 \text{ k}) \times (0.10 \text{ i})$$

$$\bar{a}_c = 0.784 \text{ i} - 0.0784 \text{ j}$$

Así: $a_x = 0.784 \text{ m/s}^2$ y $a_y = -0.0784 \text{ m/s}^2$

c) Con $R_x = M a_x$

$$F_r = 10 (0.784) = 7.84 \text{ N}$$

Con $R_y = M a_y$

$$N - 98 = 10 (-0.0784), \text{ luego } N = 98 - 0.784$$

$$N = 97.216 \text{ N}$$

d) Con $M_c = \bar{I}_c \alpha$

$$0.1 \text{ N} - F_r = 2.4 \alpha$$

Sustituyendo los resultados obtenidos para N y F_r , el primer miembro resulta:

$$0.1 (97.216) - 7.84 = 1.8816 \text{ N} \cdot \text{m}$$

El segundo miembro resulta:

$$2.4 (0.784) = 1.8816 \quad \text{N} \cdot \text{m}$$

por lo tanto se comprueban los resultados

Con $\vec{M}_L = M (\vec{r}_C \times \vec{a}_C) + I_C \vec{\alpha}$
 $(0.1\hat{i} - \hat{j}) \times (-9.8\hat{j}) + (-2\hat{j}) \times F_r \hat{i} = 10 [(0.10\hat{i} - \hat{j}) \times (0.784\hat{i} - 0.0784\hat{j})] + 2.4\vec{\alpha}$

o sea: $-9.8\hat{k} + 2F_r \hat{k} = 10 (-0.00784 + 0.784) \hat{k} + 2.4\vec{\alpha}$

Sustituyendo en el primer miembro el resultado obtenido para F_r , resulta:

$$(-9.8 + 15.68) \hat{k} = 5.88 \hat{k}$$

Sustituyendo en el segundo miembro el resultado obtenido para $\vec{\alpha}$, resulta:

$$10 (0.77616) \hat{k} + 2.4 (-0.784 \hat{k}) = 5.88 \hat{k}$$

Comprobándose así también los resultados.

- b) Rodamiento de un sólido de revolución sobre un plano inclinado.
 Considérese ahora el caso de un sólido de revolución balanceado ($\vec{r} = 0$) que se suelta desde el reposo sobre un plano que está inclinado según un ángulo θ con respecto a la horizontal. Figura 11.29.

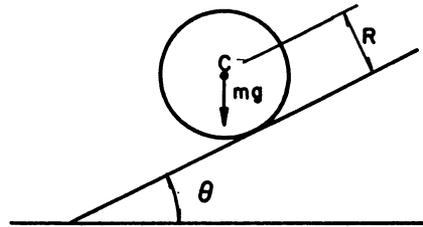


Fig 11.29

A continuación se demostrará que dicho sólido rueda sin deslizar hacia abajo del plano si, y solamente si, el coeficiente de fricción real existente entre el plano de apoyo y la periferia del sólido es mayor o igual a un valor determinado que se denominará μ_{\min} , el cual depende del ángulo θ , y de las cantidades R y \bar{k} , siendo R el radio del sólido de revolución, y \bar{k} el radio de giro del mismo con respecto a un eje perpendicular al plano de movimiento y que pasa por el centro de masa C .

En la figura 11.30 se indica el diagrama de cuerpo libre del sólido de revolución suponiendo que éste rueda sin deslizar hacia abajo del plano.

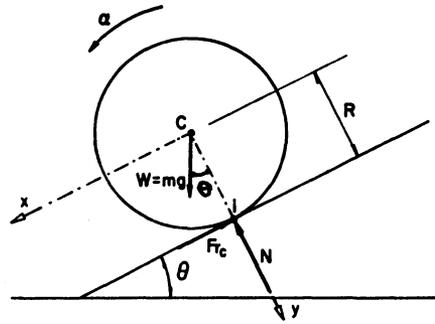


Fig 11.30

Sea a el módulo de la aceleración del centro de masa, F_{r_c} la fricción crítica por rodamiento perfecto, y μ_{\min} el coeficiente de fricción mencionado antes.

Considérense los ejes x y y indicados en la figura 11.30

Con $R_y = 0$

$$N = W \cos \theta \quad (1)$$

Con $M_c = I_c \alpha$

$$R F_{r_c} = \bar{K}^2 M \alpha \quad (2)$$

Si existe rodamiento perfecto:

$$a = R \alpha \quad (3)$$

Con $R_x = Ma$, y tomando en cuenta el valor de a obtenido en (3):

$$W \sin \theta - F_{r_c} = M R \alpha \quad (4)$$

De esta expresión resulta que

$$F_{r_c} = W \sin \theta - M R \alpha \quad (5)$$

En la ecuación (2):

$$F_{r_c} = M \frac{\bar{K}^2}{R} \alpha \quad (6)$$

Igualando (5) con (6), resulta:

$$W \operatorname{sen} \theta - MR\alpha = M \frac{\bar{K}^2}{R} \alpha$$

O sea

$$M \frac{\alpha}{R} (R^2 + \bar{K}^2) = Mg \operatorname{sen} \theta$$

De donde resulta que:

$$\alpha = \frac{Rg \operatorname{sen} \theta}{R^2 + \bar{K}^2} \quad (7)$$

Sustituyendo (7) en (6), se obtiene:

$$F_{rc} = \frac{W \bar{K}^2}{R^2 + \bar{K}^2} \operatorname{sen} \theta \quad (8)$$

Como

$$\mu_{\min} = \frac{F_{rc}}{N} \quad (9)$$

Al sustituir en (9), (8) y (1), resulta:

$$\mu_{\min} = \frac{\bar{K}^2}{R^2 + \bar{K}^2} \tan \theta \quad \dots \text{ 11.98}$$

En la tabla siguiente se indican los valores de μ_{\min} correspondiente a diversos sólidos de revolución.

Tipo de sólido de revolución homogéneo balanceado	μ_{\min}
Cilindro macizo	$\frac{1}{3} \tan \theta$
Cilindro hueco de pared delgada	$\frac{1}{2} \tan \theta$
Esfera maciza	$\frac{2}{7} \tan \theta$
Esfera hueca de pared delgada	$\frac{2}{5} \tan \theta$

Resulta evidente entonces que si el coeficiente de fricción real, μ , es menor que el μ_{\min} dado por la ecuación (11.98), que es el requerido para asegurar el rodamiento perfecto, el sólido rodará pero deslizará simultáneamente, resultando entonces que:

$$\begin{aligned} a &= a_c \neq R \alpha && \dots 11.99 \\ \text{y} & \quad v_c \neq R \omega && \dots 11.100 \end{aligned}$$

Por otra parte, si el coeficiente de fricción real μ , es mayor e igual al μ_{\min} , el rodamiento perfecto del sólido queda asegurado.

Ejemplo 11.9. Para la rueda de cuatro rayos del ejemplo 11.2 hallar el μ_{\min} requerido para asegurar el rodamiento perfecto cuando se suelta desde el reposo sobre un plano que forma 20° con la horizontal.

Solución.

De acuerdo con los datos y resultados del ejemplo 11.2 se obtiene que:

$$\begin{aligned} R^2 &= 0.1225 \text{ m}^2 \\ \text{y} \quad \bar{K}^2 &= 0.084902 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Al sustituir estos valores en la ecuación 11.98 resulta:

$$\mu_{\min} = \frac{0.084902}{0.1225 + 0.084902} (0.364) = 0.149$$

11.2.4 TEOREMAS DE ORDOÑEZ SOBRE LA CINÉTICA DEL MOVIMIENTO PLANO DE UN CUERPO RÍGIDO

a) Primer teorema. "Cuando un cuerpo rígido está dotado de un movimiento plano general, en cualquier instante, el centro instantáneo de rotación tiene una aceleración colineal con la recta que lo une con el centro de masa del cuerpo"

La demostración de este teorema se basa en las dos condiciones siguientes:

1.- La ecuación 11.11, $\vec{M}_A = \vec{H}_A$ es válida para un punto A cuya velocidad es nula en el instante considerado; por lo tanto, en el caso del movimiento plano general de un cuerpo rígido dicha ecuación toma la forma:

$$\vec{M}_i = \vec{H}_i = \vec{\alpha} I_i \quad \dots 11.19$$

Siendo: \vec{M}_i = momento de las fuerzas exteriores que actúan sobre el cuerpo rígido con respecto a un eje perpendicular al plano de movimiento, y que pasa por el centro instantáneo de rotación (punto i).

$\vec{\alpha}$ = aceleración angular del cuerpo rígido en el instante considerado.

I_i = $\int r_i^2 dm$ = momento de inercia de la masa del cuerpo con respecto al eje mencionado

2.- Existe una condición de identidad entre el sistema de fuerzas exteriores aplicadas a un cuerpo rígido y el sistema de fuerzas efectivas correspondiente a las partículas del cuerpo.

Considérese la figura 11.31, en la cual se indica el plano de movimiento de un cuerpo rígido dotado de movimiento plano general. Sea i el centro instantáneo de rotación y P una partícula de masa dm situada en dicho plano, cuyo vector de posición con respecto a i es \vec{r}_i .

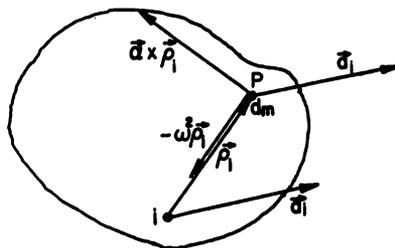


Fig 11.31

De acuerdo con la cinemática, la aceleración de P está dada por:

$$\vec{a}_p = \vec{a}_i + \vec{\alpha} \times \vec{r}_i - \omega^2 \vec{r}_i \quad \dots 11.101$$

mostrándose estas tres componentes de la aceleración de P en la figura 11.31.

En la figura 11.32, se indican las correspondientes componentes de la fuerza efectiva de la partícula.

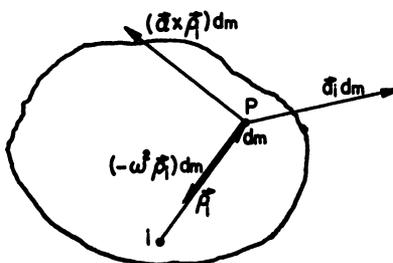


Fig 11.32

Considerando la condición 2 al tomar momentos con respecto a un eje perpendicular al plano de movimiento que pasa por i resulta:

$$\vec{M}_i = \int \vec{p}_i \times (\vec{a}_i) dm + \int \vec{p}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{p}_i) dm + \int \vec{p}_i \times (-\omega^2 \vec{p}_i) dm \quad \dots 11.102$$

Tomando en cuenta que $\vec{p}_i \times (-\omega^2 \vec{p}_i) = \vec{0}$, y que el doble producto vectorial $\vec{p}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{p}_i) = p_i^2 \vec{\omega}$, ya que $\vec{p}_i \cdot \vec{\omega} = 0$ la ecuación (11.102) se reduce a

$$\vec{M}_i = \int \vec{p}_i \times (\vec{a}_i) dm + \int p_i^2 \vec{\omega} dm \quad \dots 11.103$$

Como las cantidades \vec{a}_i y $\vec{\omega}$ son comunes a todos los términos de las integrales que las contienen, la ecuación 11.103 resulta:

$$\vec{M}_i = \left[\int \vec{p}_i dm \right] \times \vec{a}_i + \vec{\omega} \int p_i^2 dm \quad \dots 11.104$$

Según la definición de centro de masa:

$$\int \vec{p}_i dm = \vec{ic} M \quad \dots 11.105$$

y como

$$\int p_i^2 dm = I_i \quad \dots 11.106$$

Sustituyendo (11.105) y (11.106) en (11.104); se obtiene:

$$\vec{M}_i = \vec{ic} M \times \vec{a}_i + \vec{\omega} I_i \quad \dots 11.107$$

Comparando (11.19) con (11.107) resulta:

$$\vec{ic} M \times \vec{a}_i = \vec{0}$$

Luego:

$$\vec{a}_i \parallel \vec{ic} \quad \text{L. Q. Q. D.}$$

En los ejemplos (11.10) y (11.11) se comprueba este teorema de Ordóñez aplicado a los casos de rodamiento perfecto de un sólido de revolución, y de una barra delgada homogénea que adquiere un movimiento plano general después de soltarla desde el reposo.

- b) Segundo teorema. Este segundo teorema se refiere al movimiento general de un cuerpo rígido, pudiendo aplicarse en forma particular al caso de un M.P.G.
- "Si un cuerpo rígido tiene un movimiento general en el espacio y los puntos N y T son puntos cualesquiera (dentro o fuera de él), es válida la expresión:

$$\vec{M}_N = \vec{M}_T + \vec{NT} \times M \vec{a}_c \quad \dots\dots 11.108$$

o también, como:

$$M \vec{a}_c = \vec{R} \quad \dots\dots 11.10$$

$$\vec{M}_N = \vec{M}_T + \vec{NT} \times \vec{R} \quad \dots\dots 11.109$$

Siendo: \vec{M}_N = momento de las fuerzas exteriores que actúan sobre el cuerpo rígido, con respecto al punto N
 \vec{M}_T = momento de las fuerzas exteriores que actúan sobre el cuerpo rígido, con respecto al punto T
M = masa del cuerpo
 \vec{a}_c = aceleración del centro de masa del cuerpo en el instante considerado

Como se verá a continuación, la demostración de este teorema se basa en la condición de identidad entre el sistema de fuerzas exteriores aplicadas al cuerpo y el sistema de fuerzas efectivas de sus partículas.

En la figura 11.33 se indica un cuerpo rígido dotado de un movimiento general referido al sistema cartesiano fijo o,x,y,z.

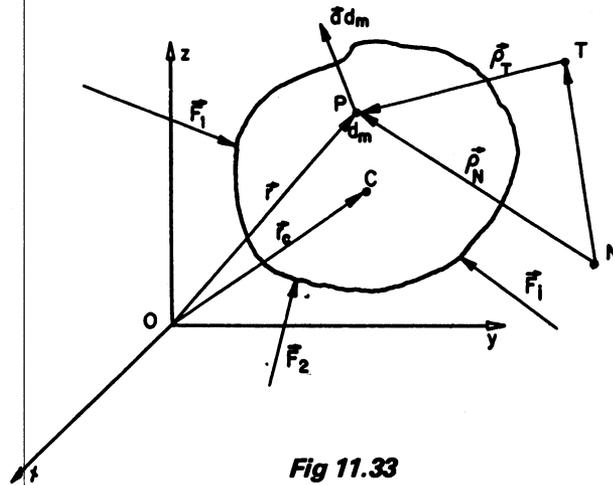


Fig 11.33

La partícula P del cuerpo tiene una masa dm , siendo \vec{r}_N y \vec{r}_T sus respectivos vectores de posición con respecto a los puntos N, y T, respectivamente.

En la figura 11.33 también se indica la fuerza efectiva $\vec{a} dm$ de la partícula P, y las fuerzas exteriores $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_i$.

Usando la condición de identidad, con respecto a N se obtiene:

$$\vec{M}_N = \int \vec{r}_N \times \vec{a} \, dm \quad \dots \quad 11.110$$

Pero $\vec{r}_N = \vec{r}_{NT} + \vec{r}_T$ 11.111

Sustituyendo (11.111) en (11.110), resulta:

$$\vec{M}_N = \int \vec{r}_{NT} \times \vec{a} \, dm + \int \vec{r}_T \times \vec{a} \, dm$$

Como \vec{r}_{NT} es común a todos los términos de la primera integral, y $\int \vec{r}_T \times \vec{a} \, dm = \vec{M}_T$, resulta:

$$\vec{M}_N = \vec{r}_{NT} \times \int \vec{a} \, dm + \vec{M}_T \quad \dots \quad 11.112$$

y según la definición de centro de masa, al derivar dos veces con respecto al tiempo la expresión:

$$\vec{r}_c \, M = \int \vec{r} \, dm, \text{ resulta}$$

$$M \vec{a}_c = \int \vec{a} \, dm \quad \dots \quad 11.113$$

Luego: $\vec{M}_N = \vec{M}_T + \vec{r}_{NT} \times M \vec{a}_c$ 11.114

Para el caso particular en que el cuerpo tenga un movimiento plano general, este teorema, para fines prácticos, conviene aplicarlo escogiendo el punto T de tal manera que el momento \vec{M}_T de las fuerzas exteriores quede en función de parámetros dinámicos.

Así se puede escoger como T cualquiera de los puntos especiales i, C, o I para los cuales la expresión M_T , resulta:

$$\begin{aligned} \vec{M}_i &= I_i \, \alpha \\ \vec{M}_c &= I_c \, \alpha \\ \text{y} \quad \vec{M}_I &= I_I \, \alpha \end{aligned}$$

En estas condiciones el segundo teorema de Ordóñez aplicado al movimiento plano general de un cuerpo rígido adquiere las tres formas siguientes:

$$\vec{M}_N = I_i \vec{\alpha} + \vec{N} \times M \vec{a}_c \quad \dots 11.115$$

$$\vec{M}_N = I_c \vec{\alpha} + \vec{N} \times M \vec{a}_c \quad \dots 11.116$$

$$\vec{M}_T = I_T \vec{\alpha} + \vec{N} \times M \vec{a}_c \quad \dots 11.117$$

En los ejemplos (11.12) y (11.13) se comprueba este teorema aplicado a diversos puntos N, y T.

Ejemplo 11.10. Un sólido de revolución de radio R rueda sin deslizar sobre un plano horizontal, como se indica en la figura 11.34. Si en el instante considerado $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$ son la velocidad angular y la aceleración angular del sólido, respectivamente, comprobar el primer teorema de Ordóñez.

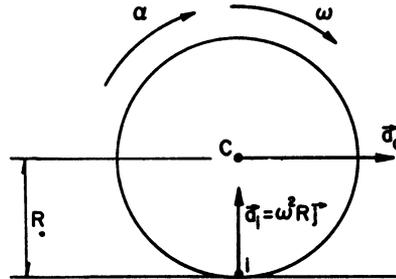


Fig 11.34

Solución.

De acuerdo con el enunciado:

$$\vec{a}_c = R \alpha \vec{i} \quad (1)$$

Siendo $\alpha = R \alpha$ (2)

y $\vec{\alpha} = -\alpha \vec{k}$ (3)

Para el centro instantáneo de rotación, i, su aceleración, tomando como base el centro geométrico C, resulta:

$$\vec{a}_i = \vec{a}_c + \vec{\alpha} \times \vec{ci} - \omega^2 \vec{ci} \quad (4)$$

o sea: $\vec{a}_i = R \alpha \vec{i} + (-\alpha \vec{k}) \times (-R \vec{j}) - \omega^2 (-R \vec{j})$

$$\vec{a}_i = R \alpha \vec{i} - R \alpha \vec{i} + \omega^2 R \vec{j}$$

Luego: $\vec{a}_i = \omega^2 R \vec{j}$.l.o.c

Ejemplo 11.11. Una barra delgada y homogénea AB, de longitud L y peso $W = Mg$ se suelta desde el reposo en la posición indicada en la figura 11.35, cuando su eje forma con la vertical un ángulo θ_0 . Si los extremos A y B de la barra se apoyan sobre planos lisos, vertical y horizontal, respectivamente:

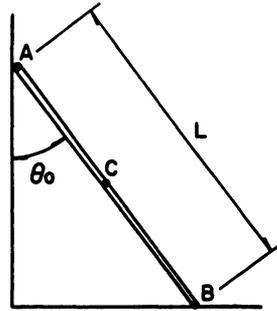


Fig 11.35

- Deducir las expresiones para α , $\gamma\omega^2$, en la etapa en que el extremo A se mantiene en contacto con el plano vertical.
- Comprobar el primer teorema de Ordóñez para cualquier posición de la barra en esta etapa.

Solución.

- En la figura 11.36 se indica el diagrama de cuerpo libre de la barra en cualquier posición de la etapa mencionada, cuando su eje forma un ángulo θ con la vertical.

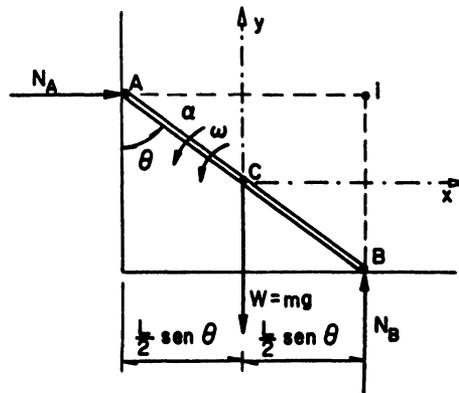


Fig 11.36

Con $M_i = I_i \alpha \quad \dots \dots 11.68$

$$Mg \frac{1}{2} \operatorname{sen} \theta = \left[\frac{Ml^2}{12} + \frac{Ml^2}{4} \right] \alpha = \frac{Ml^2}{3}$$

o sea: $\alpha = \frac{3}{2} \frac{g}{L} \operatorname{sen} \theta \quad (1)$

Luego:

$$\omega \frac{d\omega}{d\theta} = \frac{3}{2} \frac{g}{L} \operatorname{sen} \theta$$

o bien $\omega d\omega = \frac{3}{2} \frac{g}{L} \operatorname{sen} \theta d\theta \quad (2)$

Integrando esta ecuación en forma definida; resulta:

$$\int_0^\omega \omega d\omega = \frac{3}{2} \frac{g}{L} \int_{\theta_0}^{\theta} \operatorname{sen} \theta d\theta$$

$$\frac{\omega^2}{2} = -\frac{3}{2} \frac{g}{L} (\cos \theta - \cos \theta_0)$$

o bien: $\omega^2 = 3 \frac{g}{L} (\cos \theta_0 - \cos \theta) \quad (3)$

Como en esta etapa el extremo A se desplaza a lo largo de la pared vertical.

$$\vec{a}_A = 0i + a_A j \quad (4)$$

Tomando como base el punto C, la expresión de \vec{a}_A resulta:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_C + \vec{\alpha} \times \vec{CA} - \omega^2 \vec{CA} \quad (5)$$

Llamando a_x , y a_y a los valores algebraicos de las componentes axiales de la aceleración de C, la ecuación (5), resulta:

$$0i + a_A j = a_x i + a_y j + \alpha k \times \frac{l}{2} (-\operatorname{sen} \theta i + \cos \theta j) - \omega^2 \frac{l}{2} (-\operatorname{sen} \theta i + \cos \theta j)$$

Desarrollando los productos indicados, resulta:

$$0i + a_A j = (a_x - \frac{l}{2} \alpha \cos \theta + \frac{l}{2} \omega^2 \operatorname{sen} \theta) i + (a_y - \frac{l}{2} \alpha \operatorname{sen} \theta - \frac{l}{2} \omega^2 \cos \theta) j \quad (6)$$

Igualando los coeficientes del vector i, y despejando a_x , se obtiene:

$$a_x = \frac{l}{2} (\alpha \cos \theta - \omega^2 \operatorname{sen} \theta) \quad (7)$$

Sustituyendo (1) y (3) en (7), resulta:

$$a_x = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} \frac{g}{L} \operatorname{sen} \theta \cos \theta - 3 \frac{g}{L} (\cos \theta_0 - \cos \theta) \operatorname{sen} \theta \right]$$

Lo que simplificado da por resultado:

$$a_x = \frac{3}{4} g \operatorname{sen} \theta \left[3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0 \right] \quad (8)$$

Análogamente, para el extremo B, tomando como base a C, resulta:

$$a_B i + 0 j = a_x i + a_y j + \alpha k \times \frac{1}{2} (\operatorname{sen} \theta i - \cos \theta j) - \omega^2 \frac{1}{2} (\operatorname{sen} \theta i - \cos \theta j) \quad (9)$$

Al desarrollar los productos indicados, ordenar, e igualar los coeficientes de j resulta:

$$a_y = - \frac{1}{2} (\alpha \operatorname{sen} \theta + \omega^2 \cos \theta) \quad (10)$$

Sustituyendo (1) y (3) en (10), resulta:

$$a_y = - \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} \frac{g}{L} \operatorname{sen}^2 \theta - 3 \frac{g}{L} (\cos \theta_0 - \cos \theta) \cos \theta \right] \quad (11)$$

Lo que simplificado da por resultado:

$$a_y = - \frac{3}{4} g \left[\operatorname{sen}^2 \theta + 2 \cos \theta_0 \cos \theta - 2 \cos^2 \theta \right] \quad (12)$$

Como

$$\vec{a}_c = a_x i + a_y j \quad (13)$$

con las expresiones (8) y (12) sustituidas en (13) se obtendría \vec{a}_C en términos de θ .

Tomando como base a C, la aceleración del punto i tiene por expresión:

$$\vec{a}_i = \vec{a}_c + \vec{\alpha} \times \vec{ci} - \omega^2 \vec{ci} \quad (14)$$

Sustituyendo (1), (3), (8), y (12) en (14) resulta:

$$\begin{aligned} \vec{a}_i &= \frac{3}{4} g \operatorname{sen} \theta (3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0) i - \frac{3}{4} g (\operatorname{sen}^2 \theta + 2 \cos \theta_0 \cos \theta - 2 \cos^2 \theta) j \\ &\quad + \frac{3}{2} \frac{g}{L} \operatorname{sen} \theta k \times \frac{1}{2} (\operatorname{sen} \theta i + \cos \theta j) \\ &\quad - 3 \frac{g}{L} (\cos \theta_0 - \cos \theta) \frac{1}{2} [\operatorname{sen} \theta i + \cos \theta j] \quad (15) \end{aligned}$$

Desarrollando los productos indicados en la ecuación anterior, y simplificando, se tiene:

$$\vec{a}_i = 3g \cos \theta_0 (\operatorname{sen} \theta \hat{i} + \operatorname{cos} \theta \hat{j}) \quad (16)$$

Por lo que para una posición cualquiera en esta etapa la cantidad $3g \cos \theta_0$ resulta una constante K , luego:

$$\vec{a}_i = K (\operatorname{sen} \theta \hat{i} + \operatorname{cos} \theta \hat{j}) \quad (17)$$

Por otra parte, el vector \vec{c}_i tiene por expresión:

$$\vec{c}_i = \frac{1}{2} (\operatorname{sen} \theta \hat{i} + \operatorname{cos} \theta \hat{j}) \quad (18)$$

Por lo tanto:

$$\vec{a}_i \parallel \vec{c}_i \quad \text{L.R.C.}$$

Ejemplo 11.12. Comprobar el segundo teorema de Ordóñez para el caso del cilindro homogéneo macizo del ejemplo 11.7, usando como punto N el indicado en la figura 11.37, y como punto T , los puntos i , C , e I , en forma sucesiva.

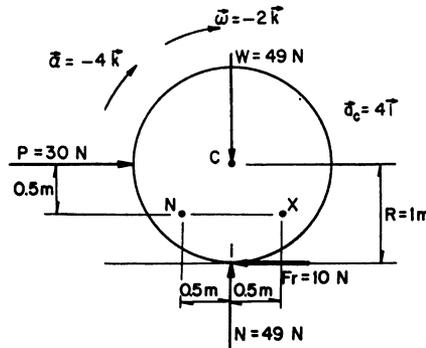


Fig 11.37

Solución.

En la figura 11.37 se indican los valores de todas las fuerzas que actúan sobre el cilindro, las cuales fueron calculadas detalladamente en el ejemplo 11.7.

Los valores de I_i , I_c , e I_I , resultan como sigue:

$$I_i = \frac{3}{2} M R^2 = \frac{3}{2} (5) (1)^2 = 7.5 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2 \quad (1)$$

$$I_c = \frac{M R^2}{2} = \frac{5}{2} (1)^2 = 2.5 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2 \quad (2)$$

$$I_I = \left[\frac{M R^2}{2} + M (0.5^2 + 0.5^2) \right] = 2.5 + 5(0.5) = 5 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2 \quad (3)$$

$$\text{Por otra parte, } M \vec{\alpha}_c = 5 (4 \hat{i}) = 20 \hat{i} \quad (4)$$

Sustituyendo los valores de las fuerzas P y Fr en el primer miembro de la ecuación

$$\vec{M}_N = I_i \vec{\alpha} + N \vec{i} \times M \vec{a}_c \quad \dots 11.115$$

resulta:

$$\vec{M}_N = [0.5(30) + 0.5(10)](-k) = -20k \quad (5)$$

Sustituyendo los valores de I_i , $\vec{\alpha}$, \vec{N}_i , y $M \vec{a}_c$ en el segundo miembro de la ecuación 11.115, resulta:

$$\begin{aligned} & 7.5(-4k) + (0.5\vec{i} - 0.5\vec{j}) \times 20\vec{i} \\ & = -30k + 10k = -20k \quad \text{L.A.C.} \end{aligned}$$

Usando ahora como punto T al centro de masa C, el segundo miembro de la ecuación:

$$\vec{M}_N = I_c \vec{\alpha} + \vec{N}_C \times M \vec{a}_c \quad \dots 11.116$$

Se obtiene:

$$\begin{aligned} & 2.5(-4k) + (0.5\vec{i} + 0.5\vec{j}) \times 20\vec{i} \\ & = -10k - 10k = -20k \quad \text{L.A.C.} \end{aligned}$$

Por último usando como punto T el centro instantáneo de aceleración, I, el segundo miembro de la ecuación

$$\vec{M}_N = I_I \vec{\alpha} + \vec{N}_I \times M \vec{a}_c \quad \dots 11.117$$

resulta:

$$5(-4k) + \vec{i} \times (20\vec{i}) = -20k \quad \text{L.A.C.}$$

Ejemplo 11.13. La barra delgada homogénea, AB, indicada en la figura 11.38 pesa 98 N y tiene una longitud de 5 m.

Los extremos A y B de la barra se apoyan sobre planos rugosos, vertical y horizontal, respectivamente, para los cuales el coeficiente de fricción es $\mu = 0.2$.

Si se suelta la barra desde el reposo en la posición indicada en la figura 11.38:

- Hallar la aceleración angular $\vec{\alpha}$ de la barra, la aceleración \vec{a}_c del centro de masa, y las fuerzas normales N_A y N_B que ejercen los planos de apoyo sobre los extremos de la barra, en ese instante.
- Comprobar el segundo teorema de Ordóñez usando como punto N el indicado en la figura 11.38, y como punto T, los puntos i ($\equiv I$), y C, en forma sucesiva.

- c) Indicar la posición de la resultante de todas las fuerzas exteriores que se ejercen sobre la barra en ese instante inicial de su movimiento plano general.

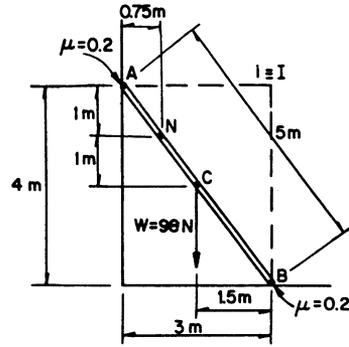


Fig 11.38

Solución.

- a) En la figura 11.39 se indica el diagrama de cuerpo libre correspondiente a la barra al soltarla desde el reposo.

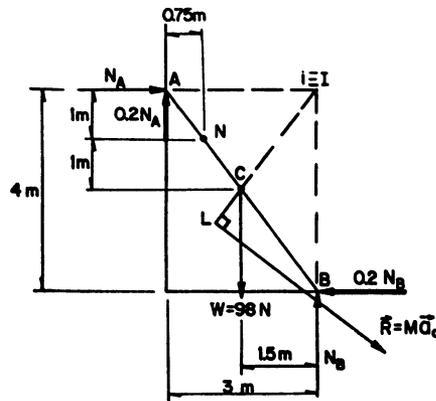


Fig 11.39

Con $M_i = I_i \alpha$ obtenemos:

$$98(1.5) - 3(0.2 N_A) - 4(0.2 N_B) = \frac{10}{3} (25) \alpha$$

o sea:

$$147 - 0.6 N_A - 0.8 N_B = 83.3333 \alpha \quad (1)$$

siendo entonces:

$$I_i = 83.3333 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (2)$$

Con $M_c = I_c \alpha$ resulta:

$$1.5 N_B - 2 N_A - 1.5 (0.2 N_A) - 2 (0.2 N_B) = \frac{10}{12} (25) \alpha$$

o sea:

$$1.1 N_B - 2.3 N_A = 20.8333 \alpha \quad (3)$$

siendo, entonces:

$$I_c = 20.8333 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2 \quad (4)$$

Despejando a N_B en (3) resulta:

$$N_B = 2.0909 N_A + 18.939391 \alpha \quad (5)$$

Sustituyendo (5) en (1), y despejando N_A , resulta:

$$N_A = 64.680207 - 43.33345 \alpha \quad (6)$$

Sustituyendo (6) en (5), obtenemos:

$$N_B = 135.739845 - 71.666527 \alpha \quad (7)$$

Tomando como base al punto I (que coincide con i para esta posición inicial de la barra), y recordando que $\omega = 0$, la aceleración de C, resulta:

$$\vec{a}_c = \vec{\alpha} \times \vec{Ic}$$

$$\begin{aligned} a_x i + a_y j &= \alpha k \times (-1.5 i - 2 j) \\ &= 2 \alpha j - 1.5 \alpha i \end{aligned}$$

Por lo que:

$$a_x = 2 \alpha \quad (8)$$

$$a_y = -1.5 \alpha \quad (9)$$

Con $R_x = M a_x$

$$N_A - 0.2 N_B = 10 (2 \alpha) = 20 \alpha \quad (10)$$

Sustituyendo (6) y (7) en (10), se obtiene:

$$64.680207 - 43.33345 \alpha - 27.047969 + 14.333305 \alpha = 20 \alpha$$

Luego:

$$\alpha = 0.768 \text{ rad/s}^2 \quad (11)$$

y por tanto $\vec{\alpha} = 0.768 \text{ k}$ (12)

Sustituyendo (11) en (8) y (9), resulta:

$$\vec{a}_c = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} = 1.536 \hat{i} - 1.152 \hat{j} \quad (13)$$

Por lo que $\vec{R} = M \vec{a}_c = 15.36 \hat{i} - 11.52 \hat{j}$ (14)

Sustituyendo (11) en (6) y (7), obtenemos:

$$N_A = 31.40 \text{ N} \quad (15)$$

$$\text{y } N_B = 80.20 \text{ N} \quad (16)$$

b) Utilizando los valores de N_A y N_B para calcular el primer miembro de la ecuación:

$$\vec{M}_N = I_i \vec{\alpha} + N \hat{i} \times M \vec{a}_c \quad \dots 11.115$$

resulta:

$$\begin{aligned} & [80.20 (2.25) - 0.2 (80.20) - 98 (0.75) - 31.40 (1) - 0.2 (31.4) 0.75] \text{ k} \\ & = 22.72 \text{ k} \quad (17) \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de I_i , $\vec{\alpha}$, y $M \vec{a}_c$ en el segundo miembro de la ecuación (11.115), resulta:

$$\begin{aligned} & 83.3333 (0.768 \text{ k}) + (2.25 \hat{i} + \hat{j}) \times (15.36 \hat{i} - 11.52 \hat{j}) \\ & = 64 \text{ k} - 25.92 \text{ k} - 15.36 \text{ k} = 22.72 \text{ k} \quad \text{L.A.E.} \end{aligned}$$

Análogamente, sustituyendo los valores de I_c , $\vec{\alpha}$, y $M \vec{a}_c$ en el segundo miembro de la ecuación:

$$\vec{M}_N = I_c \vec{\alpha} + N \hat{c} \times M \vec{a}_c \quad \dots 11.116$$

resulta:

$$\begin{aligned} & 20.8333 (0.768 \text{ k}) + (0.75 \hat{i} - \hat{j}) \times (15.36 \hat{i} - 11.52 \hat{j}) \\ & = 16 \text{ k} - 8.64 \text{ k} + 15.36 \text{ k} = 22.72 \text{ k} \quad \text{L.A.E.} \end{aligned}$$

c) Para localizar la línea de acción de la resultante $\vec{R} = M \vec{a}_c$ se tomará como punto base el centro instantáneo de rotación, i.

De este modo, el vector de posición del punto L situado sobre dicha línea a la mínima distancia de i está dado por:

$$\vec{i} \vec{L} = \frac{\vec{R} \times \vec{M}_i}{R^2} \quad \dots 11.9$$

$$\text{Como } \vec{R} = M\vec{a}_c = 15.36 \hat{i} - 11.52 \hat{j} \quad (18)$$

$$\text{y } \vec{M}_i = I_i \vec{\alpha} = 64 \hat{k} \quad (19)$$

$$\vec{R} \times \vec{M}_i = (15.36 \hat{i} - 11.52 \hat{j}) \times 64 \hat{k}$$

$$\vec{R} \times \vec{M}_i = -737.28 \hat{i} - 983.04 \hat{j} \quad (20)$$

Por otro lado:

$$R^2 = (15.36)^2 + (-11.52)^2 = 368.64 \quad (21)$$

Sustituyendo (20) y (21) en la ecuación (11.9) resulta:

$$\vec{\lambda}_L = -2 \hat{i} - 2.6667 \hat{j} \quad (22)$$

En la figura 11.39 se indica la posición de la resultante \vec{R} de las fuerzas exteriores ejercidas sobre la barra en el instante considerado.

Como puede verse en esa figura, dicha fuerza es perpendicular a la recta $\vec{\lambda}_L$, lo cual se comprueba analíticamente, ya que:

$$\vec{\lambda}_L \cdot \vec{R} = 0$$

11.2.5 ECUACIONES DE MOVIMIENTO PARA LA ROTACION ALREDEDOR DE UN EJE FIJO

Considérense ahora los casos particulares de movimiento plano correspondiente a un *cuerpo rígido simétrico con respecto al plano de movimiento*, sujeto a fuerzas exteriores cuyo sistema resultante general lo forman una fuerza, o un par de fuerzas situadas en el plano de movimiento, y dotado de un movimiento de rotación alrededor de un eje fijo perpendicular a dicho plano, pasando por el centro de rotación O.

Existen dos variantes de este caso, según que O coincida, o no, con el centro de masa, C.

En el primer caso, denominado *rotación baricéntrica*, mientras que el centro de masa se mantiene inmóvil, el cuerpo experimenta un movimiento angular caracterizado en un instante dado por una velocidad angular, $\vec{\omega}$, y una aceleración angular, $\vec{\alpha}$.

Para este caso, el sistema resultante general correspondiente al sistema de fuerzas exteriores aplicadas al cuerpo se reduce a un par de fuerzas, y entonces la ecuación (11.10) se transforma en

$$\vec{R} = \vec{0} \quad \dots 11.11B$$

la que equivale a las dos ecuaciones escalares siguientes:

$$R_x = 0 \quad \dots 11.119$$

y $R_y = 0 \quad \dots 11.120$

Asimismo, la ecuación (11.31) da lugar a la siguiente ecuación escalar equivalente:

$$M_c = \bar{I} \alpha \quad \dots 11.121$$

Para la *rotación no baricéntrica* en la cual el centro de rotación, O, no coincide con el centro de masa, C, la trayectoria de este punto es una circunferencia de radio \bar{r} , y centro en O. (Figura 11.40), y en estas condiciones, para la aplicación de la ecuación (11.10) conviene utilizar como referencia un sistema de coordenadas intrínsecas con origen en C.

El eje normal \vec{Cn} está definido por la recta \vec{CO} , siendo su sentido de C hacia O, coincidente con el sentido de la aceleración normal de C, y el eje tangencial \vec{Ct} es perpendicular al anterior, quedando su sentido dado por el de la aceleración angular $\vec{\alpha}$ en el instante considerado.

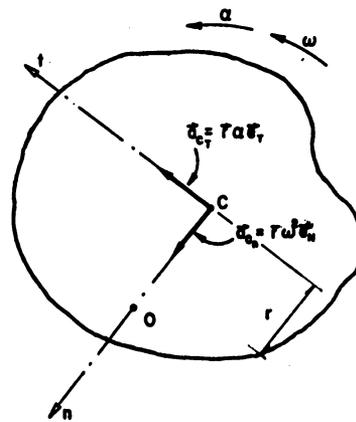


Fig 11.40

De esta manera las ecuaciones escalares que equivalen a la ecuación 11.10 son:

$$R_n = M \bar{r} \omega^2 \quad \dots 11.122$$

$$R_t = M \bar{r} \alpha \quad \dots 11.123$$

Adicionalmente, equivalente a la ecuación (11.19) que involucra momentos de las fuerzas exteriores con respecto a un punto fijo, se obtiene la ecuación escalar:

$$M_o = I_o \alpha \quad \dots 11.124$$

Para este caso el sistema de fuerzas exteriores aplicado al cuerpo se reduce a una sóla fuerza alojada en el plano de movimiento, que no pasa por O.

11.2.6 ECUACIONES DE MOVIMIENTO PARA LA TRASLACION PLANA DE UN CUERPO RIGIDO

Un cuerpo rígido dotado de un movimiento de traslación plana no debe experimentar desplazamientos angulares, por lo cual, durante todo el intervalo de tiempo bajo consideración *los parámetros $\vec{\omega}$, y $\vec{\alpha}$ son nulos.*

Cuando la trayectoria de C es rectilínea, la ecuación (11.10) tiene como ecuaciones escalares equivalentes las dos siguientes:

$$\begin{aligned} R_x &= M a_{c_x} && \dots \text{ 11.125} \\ \text{y} \quad R_y &= M a_{c_y} && \dots \text{ 11.126} \end{aligned}$$

Sin embargo, como en la mayoría de los problemas se acostumbra hacer coincidente el eje x con la trayectoria del centro de masa, C, en este caso la ecuación (11.126) se transforma en

$$R_y = 0 \quad \dots \text{ 11.127}$$

Si la traslación es curvilínea, la ecuación (11.10) también da lugar a dos ecuaciones escalares equivalentes, las cuales harán intervenir aquellas componentes de la aceleración de C que más convenga usar, de acuerdo con la forma de la trayectoria de este punto. En caso de que ésta sea una circunferencia, dichas ecuaciones serán:

$$R_n = M a_{c_n} = M \frac{v_c^2}{\rho} \quad \dots \text{ 11.128}$$

siendo ρ el radio de curvatura de la trayectoria de C.

$$\text{y} \quad R_t = M a_{c_t} = M \dot{v}_c = M \dot{s}_c \quad \dots \text{ 11.129}$$

Adicionalmente, la ecuación (11.31) se reduce a,

$$M_c = 0 \quad \dots \text{ 11.130}$$

lo cual significa que *la resultante de todas las fuerzas aplicadas exteriormente al cuerpo debe ser una sola fuerza que pase por el centro de masa, C.*

Esta condición básica que caracteriza al movimiento de traslación permite transformar artificialmente un problema dinámico en uno estático.

En efecto, si se conoce la aceleración del centro de masa, \vec{a}_C , puede considerarse una fuerza ficticia $-M \vec{a}_C$ pasando por C, denominada *fuerza de inercia ó de D'Alembert*, la cual aplicada junto con las fuerzas

exteriores pondrá en equilibrio dinámico al cuerpo, ya que en este caso la ecuación (11.10) se transforma en

$$\vec{R} - M\vec{a}_c = \vec{0} \quad \dots 11.131$$

La solución de problemas relativos a la dinámica de un cuerpo rígido dotado de un movimiento de traslación plana usando este enfoque recibe el nombre de *Método de D'Alembert*.

El concepto involucrado en este método, consistente en añadir algún o algunos elementos ficticios que produzcan el equilibrio dinámico del cuerpo, se puede aplicar también a la solución de problemas dinámicos relacionados con un movimiento plano general, o un movimiento de rotación alrededor de un punto fijo.

A partir de la ecuación (11.116) que corresponde al uso práctico del segundo teorema de Ordóñez para el caso de una traslación plana (ya que los puntos *i* e *l* no existen), se puede deducir una ecuación que aplicada a los problemas sobre dicho movimiento permite:

- 1.- Comprobar los resultados obtenidos al hallar las incógnitas mediante la aplicación de las ecuaciones dinámicas correspondientes a este tipo de movimiento (por ejemplo, las ecuaciones 11.125, 11.126 y 11.130).
- 2.- Localizar el punto de aplicación de algunas de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo que se traslada. (El ejemplo 11.17 ilustra esta aplicación).
- 3.- Calcular en forma independiente las incógnitas escogiendo adecuadamente el punto *N* involucrado en el teorema, y verificar después si los resultados están correctos viendo que se cumplan las condiciones establecidas por las ecuaciones 11.125, 11.126 y 11.130 en el caso de una traslación rectilínea. (El ejemplo 11.18 ilustra esta aplicación).

Dicha ecuación se deduce de la 11.116 al considerar que en este movimiento $\vec{\alpha} = \vec{0}$, por lo cual se reduce a:

$$\vec{M}_N = \vec{Nc} \times M\vec{a}_c \quad \dots 11.132$$

11.2.7 CUERPOS RIGIDOS INTERCONECTADOS

Algunos problemas dinámicos se refieren a sistemas o conjuntos de cuerpos rígidos unidos por medio de elementos flexibles, inextensibles y de peso despreciable (como cables, cuerdas, etc.), interviniendo también otros elementos tales como poleas en los cuales se desprecia su masa y los fenómenos de fricción que pueden generar.

En la solución de dichos problemas conviene seguir un procedimiento sistemático que consiste en:

- 1.- Trazar el diagrama de cuerpo libre de cada uno de los cuerpos del sistema.
- 2.- Aplicar las ecuaciones escalares de movimiento que correspondan, de acuerdo al tipo de movimiento que experimenta el cuerpo en cuestión.
- 3.- Resolver todas las ecuaciones en forma simultánea.

En algunos casos no bastarán las ecuaciones dinámicas para resolver las incógnitas involucradas, y entonces deberán utilizarse las ecuaciones cinemáticas que resulten de considerar la forma en que están conectados los cuerpos del sistema por medio de los elementos mencionados.

Los ejemplos 11.15 y 11.16 ilustran este procedimiento.

Ejemplo 11.14. - El sistema del ejemplo 11.1 formado por una barra delgada y homogénea OA, de 2 m de longitud y 10 N de peso, articulada en O y rígidamente unida a un disco homogéneo B, de 1 m de radio y 20 N de peso se suelta desde el reposo en la posición indicada en la figura 11.41.

- a) Hallar la aceleración angular $\ddot{\alpha}$ del sistema correspondiente a esa posición inicial de su movimiento.
- b) Hallar las componentes cartesianas de la reacción que ejerce la articulación O sobre la barra OA.
- c) Localizar la resultante de las fuerzas exteriores ejercidas sobre el sistema en ese instante.

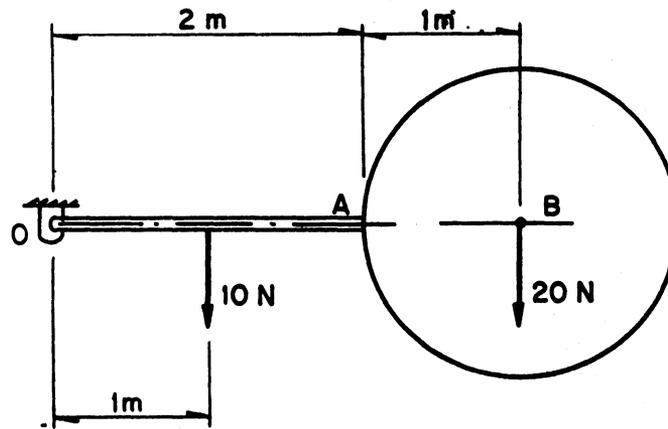


Fig 11.41

Solución.

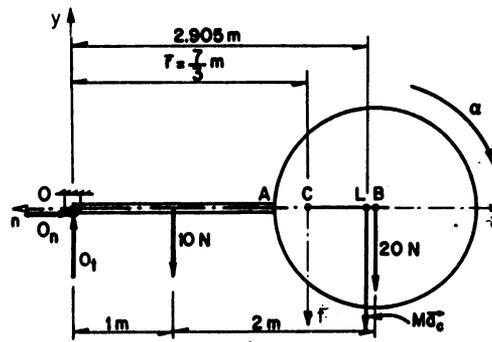


Fig 11.42

- a) En la figura 11.42 se indica el D.C.L. del sistema.
 Como se trata de una rotación baricéntrica alrededor de un eje fijo que pasa por O y es perpendicular al plano de movimiento se considerarán los ejes normal y tangencial que se indican en esa figura.
 Con el objeto de localizar la posición del centro de masa, C, del sistema, también se ubicará el sistema de ejes cartesianos x,y, con origen en O como se indica. Por simetría, el centro de masa se halla sobre el eje x, tomando momentos con respecto a dicho punto, y haciendo uso del concepto de centro de masa, se obtiene: .

$$\bar{r}(10+20) = 10(1) + 20(3) = 70$$

Luego:
$$\bar{r} = \frac{70}{30} = \frac{7}{3} = 2.3333 \text{ m}$$

Considerando ahora la ecuación (11.124); es decir.

$$M_0 = I_0 \alpha$$

y usando como valor de I_0 el resultado obtenido en el ejemplo 11.1; es decir $I_0 = 20.7483 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, se obtiene:

$$1(10) + 3(20) = 20.7483 \alpha$$

Luego:
$$\alpha = \frac{70}{20.7483} = 3.3738 \text{ rad/s}^2$$

- b) Usando ahora la ecuación 11.122, $R_n = M \omega^2 r$, y tomando en cuenta que para esta posición inicial $\omega = 0$, resulta:

$$-o_n = 0 \quad \therefore \quad o_n = 0$$

Por lo cual $O_x = 0$

Aplicando la ecuación (11.123) y considerando el valor de \bar{r} , y de α , obtenidos anteriormente, resulta

$$-O_x + 10 + 20 = \frac{30}{9.8} (2.3733) 3.3738$$

Luego: $O_x = O_y = 30 - 24.098 = 5.902 \text{ N}$

Así, la reacción pedida es:

$$\vec{R}_0 = 0\hat{i} + 5.902\hat{j} \quad [\text{N}]$$

c) Como $\vec{\alpha} = -3.3738\hat{k}$ (1)

y $\vec{a}_c = \vec{a}_{c_n} + \vec{a}_{c_t}$, resultando en este caso

$$\vec{a}_{c_n} = \vec{0} \quad \text{y} \quad \vec{a}_{c_t} = r\vec{\alpha} = \frac{7}{3}(-3.3738\hat{j})$$

o sea $\vec{a}_{c_t} = -7.8722\hat{j} \quad [\text{m/s}^2]$ (2)

El vector equipolente de la resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema tiene por expresión:

$$\vec{R} = M\vec{a}_c = \frac{30}{9.8}(-7.8722\hat{j}) = -24.098571\hat{j} \quad (3)$$

Por otra lado, el momento del sistema de fuerzas exteriores con respecto a O resulta:

$$\vec{M}_0 = \hat{i} \times (-10\hat{j}) + 3\hat{i} \times (-20\hat{j}) = -70\hat{k} \quad (4)$$

Sustituyendo (3) y (4) en la ecuación

$$\vec{OL} = \frac{\vec{R} \times \vec{M}_0}{R^2}$$

que permite localizar el punto L, sobre la línea de acción de la resultante, a la mínima distancia de O, se obtiene:

$$\vec{OL} = \frac{(-24.098571\hat{j}) \times (-70\hat{k})}{500.741124} = 2.905\hat{i} \quad [\text{m}]$$

En la figura 11.42 se indica la localización de la resultante de acuerdo con este resultado.

Ejemplo 11.15. El sistema de la figura 11.43 consiste de un bloque A que pesa 130 N, el cual se encuentra apoyado sobre un plano inclinado que forma con la horizontal un ángulo $\theta = \text{ang tan} \left(\frac{5}{12} \right)$ y se halla unido por medio de una cuerda flexible, inextensible y de peso despreciable a la periferia de un disco B que pesa 49 N, tiene 1.0 m de radio y un radio de giro con respecto a un eje centroidal perpendicular al plano de movimiento de $k = 0.6$ m. Este disco está fijo al sistema tierra por medio de las barras CD, y CE cuyos extremos están articulados y son de peso despreciable.

Si el sistema se suelta desde el reposo en la posición indicada en la figura 11.43 y el coeficiente de fricción entre el bloque y el plano inclinado es $\mu = 0.10$, hallar la tensión en la cuerda que une los dos cuerpos, la magnitud de la aceleración de cualquier punto del bloque A, y el módulo de la aceleración angular, α , del disco.

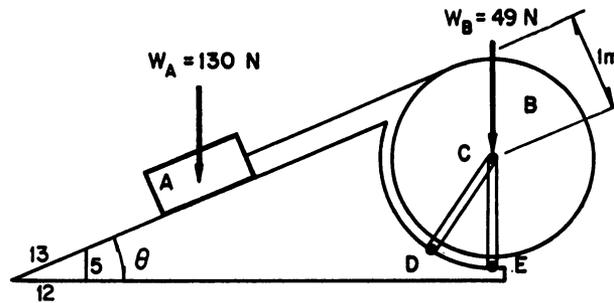


Fig 11.43

Solución.

En la figura 11.44 se indica el D.C.L. del bloque A, considerando como referencia los ejes x y y indicados:

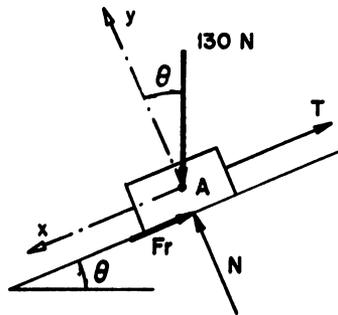


Fig 11.44

$$R_y = 0$$

$$N_p - 130 \left(\frac{12}{13} \right) = 0 \quad \therefore N_p = 120 \text{ N} \quad (1)$$

$$\text{Así } F_r = \mu N_p = 0.10 (120) = 12 \text{ N} \quad (2)$$

Llamando a al acelerante del bloque A y usando el valor de F_r obtenido en (2), con

$$R_x = M_A a$$

$$\text{resulta: } 130 \left(\frac{5}{13} \right) - T - 12 = \frac{130}{9.8} a$$

$$\text{o sea: } T = 38 - 13.265 a \quad (3)$$

En la figura 11.45 se indica el D.C.L. del disco B el cual experimenta una rotación baricéntrica

$M_c = I_c \alpha$, se obtiene:

$$T(1) = \frac{49}{9.8} (0.6)^2 \alpha$$

$$\text{o sea: } T = 1.8 \alpha \quad (4)$$

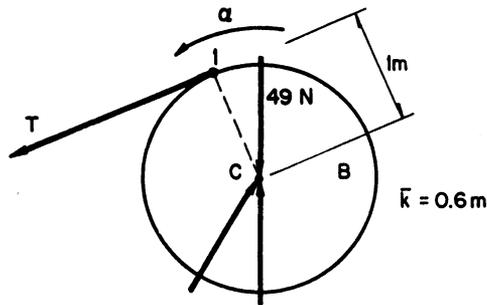


Fig 11.45

Puesto que el módulo de la aceleración tangencial del punto 1 de la periferia del disco es igual al de cualquier punto del bloque A, ya que la cuerda es inextensible:

$$a = R \alpha = \alpha \quad (5)$$

Sustituyendo (5) en (4) e igualando con (3), resulta:

$$1.8 a = 38 - 13.265 a \quad \therefore a = \frac{38}{15.065} = 2.522 \text{ m/s}^2 \quad (6)$$

Así, de acuerdo con (5)

$$\alpha = 2.522 \text{ rad/s}^2 \quad (7)$$

y sustituyendo (7) en (4), resulta:

$$T = 4.54 \text{ N} \quad (8)$$

Ejemplo 11.16. El sistema indicado en la figura 11.46 consiste de un cilindro sólido homogéneo, A, de 49 N de peso y 1 m de radio que está unido a un bloque B de 98 N de peso, por medio de una cuerda flexible, inextensible y de peso despreciable. Este bloque se apoya sobre un plano horizontal rugoso para el cual el coeficiente de fricción es $\mu = 0.10$. Si al soltar el sistema desde el reposo el cilindro A rueda sin deslizar, hallar la tensión en la cuerda que une los dos cuerpos, el módulo de aceleración lineal de cualquier punto del bloque B, el módulo de la aceleración lineal del centro de masa del cilindro, y el coeficiente de fricción mínimo que debe existir entre la periferia del disco A y el plano inclinado de apoyo que asegure el rodamiento perfecto de éste.

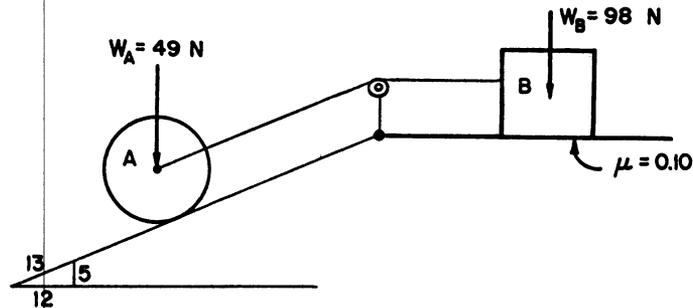


Fig 11.46

Solución.

En la figura 11.47, se indica el D.C.L. del bloque B. Tomando como referencia los ejes "x" y "y" indicados:

$$\text{Con } R_y = 0 ; N_b = 98 \text{ N} \quad (1)$$

$$\text{así } F_{r_b} = \mu N_b = 0.1 (98) = 9.8 \text{ N} \quad (2)$$

Con $R_x = M_B a_B$; y tomando en cuenta el valor de F_{r_b} hallado en (2) resulta:

$$T - 9.8 = 10 a_B \text{ luego}$$

$$T = 9.8 + 10 a_B \quad (3)$$

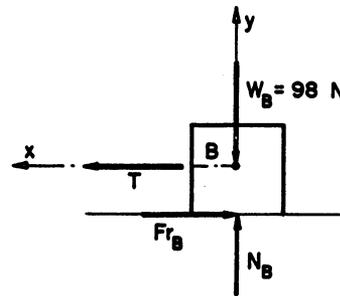


Fig 11.47

En la figura 11.48 se indica el D.C.L. del cilindro A.

Tomando como referencia los ejes "x" y "y" indicados:

$$\text{Con } R_y = 0 \quad ; \quad N_A = 49 \left(\frac{12}{13} \right)$$

$$\text{o sea } N_A = 45.2308 \quad \text{N} \quad (4)$$

Con $R_x = M_A a$, siendo a el módulo de la aceleración del centro de masa del cilindro, resulta:

$$49 \left(\frac{5}{13} \right) - F_{r_A} - T = 5a$$

$$\text{o sea: } 18.846154 = F_{r_A} + T + 5a \quad (5)$$

$$\text{Con } M_c = I_c \alpha$$

$$F_{r_A} = \frac{5}{2} (1)^2 \alpha \quad ; \quad \text{o sea } F_{r_A} = 2.5 \alpha \quad (6)$$

Relaciones cinemáticas:

1.- Por la forma como están unidos los cuerpos es evidente que:

$$a_B = a \quad (7)$$

2.- Como el cilindro rueda sin deslizar:

$$a = R \alpha = \alpha \quad (8)$$

Sustituyendo (8) en (6), resulta

$$F_{r_A} = 2.5 a \quad (9)$$

Sustituyendo (7) en (3), se obtiene:

$$T = 9.8 + 10 a \quad (10)$$

Sustituyendo (9) y (10) en (5), resulta:

$$18.846154 = 2.5 a + 9.8 + 10 a + 5 a$$

$$\text{o sea: } 17.5 a = 9.046154$$

$$\text{Luego } a = 0.516923 \quad \text{m/s}^2 \quad (11)$$

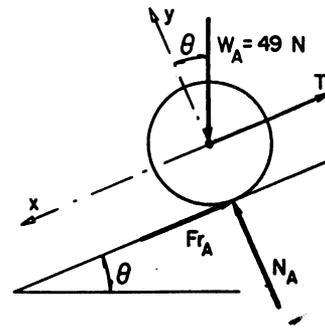


Fig 11.48

Sustituyendo (11) en (7), (9), y (10) en forma sucesiva se obtiene:

$$a_B = 0.516923 \quad \text{m/s}^2 \quad (12)$$

$$F_{r_A} = 1.2923 \quad \text{N} \quad (13)$$

$$\text{y } T = 14.96923 \quad \text{N} \quad (14)$$

Dividiendo (13) entre (4) se tiene:

$$\mu_{\min} = \frac{F_{r_A}}{N_A} = \frac{1.2923}{45.7308} = 0.028571$$

Ejemplo 11.17. El bloque indicado en la figura 11.49, tiene 3 m de longitud y 2 m de altura, pesa 98 N y se encuentra apoyado sobre un plano horizontal rugoso, para el cual el coeficiente de fricción es $\mu = 0.40$.

Si se le aplica la fuerza P indicada en la figura 11.49 y se suelta desde el reposo:

- Hallar el módulo de la aceleración de cualquier punto del bloque.
- Localizar el punto N, de aplicación de la reacción que ejerce el plano de apoyo sobre la base del bloque.

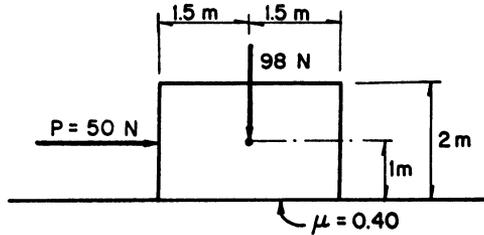


Fig 11.49

Solución.

En la figura 11.50 se indica el D.C.L. del bloque.

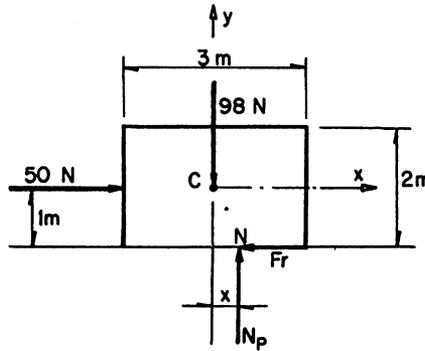


Fig 11.50

Considérese como referencia los ejes x, y, indicados en dicha figura.

$$\text{Con } R_y = 0 \quad ; \quad N_p = 98 \text{ N} \quad (1)$$

$$\text{Luego } F_r = \mu N_p = 0.4 (98) = 39.2 \text{ N} \quad (2)$$

Con $R_x = M \ddot{a}$, y tomando en cuenta el valor de F_r obtenido en (2), resulta:

$$50 - 39.2 = 10 \ddot{a}$$

$$\text{Luego } \ddot{a} = 1.08 \text{ m/s}^2 \quad (3)$$

$$\text{y entonces } \vec{\ddot{a}} = 1.08 \hat{i} \quad (4)$$

Llamando N al punto de aplicación de la normal, N_p , y la fricción F_r , con la ecuación 11.132, resulta:

$$\hat{j} \times (50 \hat{i}) + (-x \hat{i}) \times (-98 \hat{j}) = (-x \hat{i} + \hat{j}) \times 10 (1.08 \hat{i})$$

$$\text{o sea } -50 \hat{k} + 98 x \hat{k} = -10.8 \hat{k}$$

$$\text{Luego } 98 x = 39.2 \quad x = 0.4 \text{ m}$$

Ejemplo 11.18. En la figura 11.51 se indica una canastilla E que se traslada a lo largo de guías horizontales. La canastilla tiene articulada en A una barra AB de 2 m. de longitud y 9.8 N de peso. El extremo B de la barra está unido a la canastilla por medio de una cuerda BD que la mantiene en posición vertical al acelerarse el sistema hacia la derecha.

Si la aceleración de cualquier punto del sistema tiene como vector equipolente $\ddot{a} = 5 \hat{i}$, hallar la tensión en el cable BD, y las componentes axiales de la fuerza que ejerce la articulación A sobre la barra AB (Sugerencia: usar primero la ecuación 11.132 aplicada a tres puntos adecuados para calcular las incógnitas comprobando los resultados mediante el uso de las ecuaciones 11.125, 11.126 y 11.130).

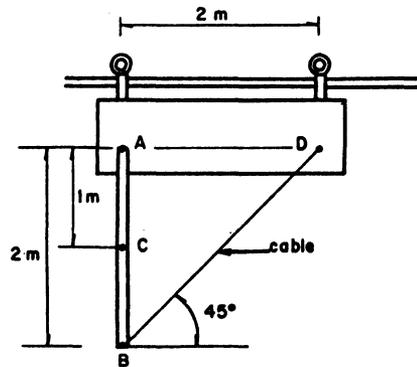


Fig 11.51

Solución.

En la figura 11.52 se indica el D.C.L. de la barra.

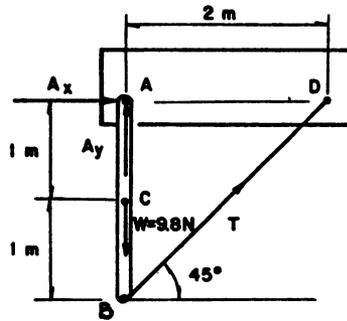


Fig 11.52

De acuerdo con los datos y tomando como referencia los ejes "x" y "y" indicados en dicha figura, la aceleración del centro de masa tiene por vector equipolente

$$\vec{a}_c = \frac{g}{2} \hat{i} + 0\hat{j} \quad (1)$$

Así, la resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre la barra es:

$$M\vec{a}_c = \frac{10}{9} \left(\frac{g}{2} \hat{i} \right) = 5\hat{i} \quad [\text{N}] \quad (2)$$

Dicha fuerza pasa por el centro de masa, C.

Situando el punto N que se menciona en la ecuación 11.132 en A, la expresión correspondiente resulta:

$$\vec{M}_A = \vec{AC} \times M\vec{a}_c \quad (3)$$

Aplicando los datos, se obtiene:

$$-2\hat{j} \times T (0.7071\hat{i} + 0.7071\hat{j}) = 5\hat{k}$$

o sea: $1.4142 T \hat{k} = 5 \hat{k}$, luego $T = 3.535562 \text{ N}$. (4)

Situando ahora N en B, la ecuación 11.132 resulta:

$$\vec{M}_B = \vec{BC} \times M\vec{a}_c \quad (5)$$

y con los datos:

$$2\hat{j} \times A_x \hat{i} = \hat{j} \times (5\hat{i})$$

$$-2A_x \hat{k} = -5 \hat{k}, \text{ luego } A_x = 2.5 \text{ N} \quad (6)$$

Por último, situando N en D, la ecuación 11.132 resulta:

$$\vec{M}_D = \vec{DC} \times M \vec{a}_c \quad (7)$$

y con los datos:

$$-2i \times A_y j - 2i \times (-10j) = (-2i - j) \times (5i)$$

o sea: $-2A_y k + 20k = 5k$

Luego $2A_y = 15$, o sea $A_y = 7.5 \text{ N}$ (8)

Así, las fuerzas requeridas son:

$$\vec{T} = 3.535548 (0.7071i + 0.7071j) = 2.5i + 2.5j$$

y $\vec{R}_A = 2.5i + 7.5j \text{ [N]}$ (10)

Comprobaciones.

Como ahora se conocen todas las fuerzas que se ejercen sobre la barra debe verificarse si se cumplen las condiciones que establecen las ecuaciones (11.125), (11.126), y (11.130), las cuales en este caso adoptan las formas siguientes:

$$R_x = M a_{cx} = 5 \quad (11)$$

$$R_y = M a_{cy} = 0 \quad (12)$$

y $M_c = 0 \quad (13)$

Verificación de la ecuación (11).

Al considerar las componentes horizontales de las fuerzas exteriores resulta:

$$R_x = A_x + T \cos 45^\circ = 2.5 + 2.5 = 5 \quad \text{L.e.q.c.}$$

Verificación de la ecuación (12).

Análogamente, sobre el eje vertical, resulta:

$$R_y = A_y - W + T \sin 45^\circ = 7.5 - 10 + 2.5 = 0 \quad \text{L.e.q.c.}$$

Verificación de la ecuación (13).

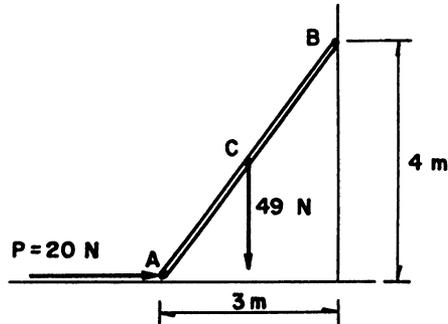
Calculando los momentos de las fuerzas exteriores con respecto al centro de masa, C, se tiene:

$$\vec{M}_c = \vec{CB} \times \vec{T} + \vec{CA} \times \vec{A}_x$$

o sea: $-j \times (2.5i + 2.5j) + j \times (2.5i) = 2.5k - 2.5k = \vec{0} \quad \text{L.e.q.c.}$

11.3 PROBLEMAS PROPUESTOS

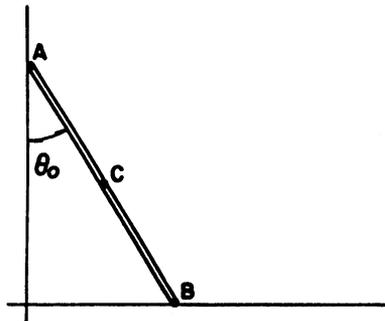
11.1 La barra delgada y homogénea AB pesa 49 N y tiene una longitud de 5 m. Sus extremos se apoyan sobre planos lisos, horizontal y vertical, encontrándose temporalmente en reposo. En el instante $t = 0$ sobre el extremo A se aplica una fuerza horizontal P de 20 N, como se indica. Hallar para ese instante la aceleración angular, $\ddot{\alpha}$, de la barra y las magnitudes de las normales N_A y N_B que ejercen los planos de apoyo sobre los extremos de la barra.



Resp.: $\ddot{\alpha} = 0.156 \text{ k [rad/s}^2\text{]}$
 $N_A = 50.17 \text{ N}; N_B = 18.44 \text{ N}$

11.2 La barra delgada y homogénea de la figura tiene una longitud de 5 m y pesa 19.6 N. Si se suelta desde el reposo cuando $\theta_0 = 30^\circ$, y las superficies de los planos de apoyo de sus extremos son lisas:

- Hallar el valor del ángulo β que corresponde al despegue inminente de su extremo A con respecto a la pared vertical.
- Para $\theta = 45^\circ$ hallar: la velocidad angular de la barra, la aceleración angular de la barra y la magnitud de las normales en los extremos A y B.

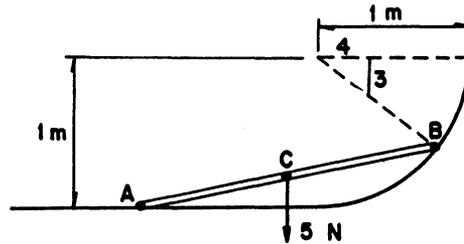


Sugerencia: Tomar como base los resultados del ejemplo 11.11 y calcular N_A en función de \vec{a}_x (Ec. 7); sustituyendo los valores de α y ω^2 dados por las ecs. (1) y (3), e igualar N_A con 0 para obtener el ángulo β .

Resp.: a) $\beta = \arccos \left[\frac{2}{3} \cos \theta_0 \right] = 54.736^\circ$
 b) $\vec{\omega} = 0.9671 \text{ k} \text{ [rad/s]}$
 $\vec{\alpha} = 2.081 \text{ k} \text{ [rad/s}^2\text{]}$
 $N_A = 4.05 \text{ N}$
 $N_B = 8.96 \text{ N}$

11.3 La barra delgada y homogénea AB se suelta desde el reposo en la posición indicada. Suponiendo que las superficies de apoyo de los extremos son lisas, que la barra pesa 5 N y tiene una longitud de 2 m, hallar:

- La aceleración angular de la barra para dicha posición.
- Las magnitudes de las reacciones en los extremos A y B para esa posición.

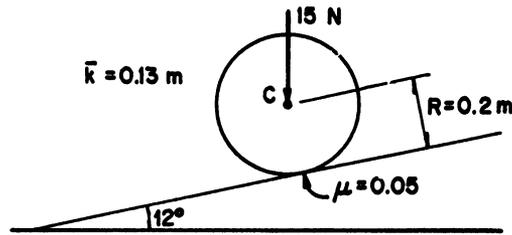


Resp.: a) $\vec{\alpha} = -2.353 \text{ k} \text{ [rad/s}^2\text{]}$
 b) $N_A = 2.318 \text{ N}$; $N_B = 2.510 \text{ N}$

11.4 El disco de la figura tiene un peso de 15 N, un radio $R = 0.20 \text{ m}$ y un radio de giro con respecto a un eje centroidal perpendicular al plano de movimiento de $k = 0.13 \text{ m}$. Si el coeficiente de fricción entre la rueda y el plano inclinado de apoyo es $\mu = 0.05$, y el ángulo formado entre la horizontal y dicho plano es $\theta = 12^\circ$

- Investigar el tipo de rodamiento que tendrá el disco al soltarlo desde el reposo.
- Hallar la aceleración angular, $\vec{\alpha}$, del disco, y el módulo de la aceleración a_c de su centro de masa.

- c) Determinar el espacio recorrido por el centro de masa del disco a los 10 segundos después de soltarlo desde el reposo.
- d) Calcular la velocidad angular del disco a los 10 segundos después de soltarlo desde el reposo.

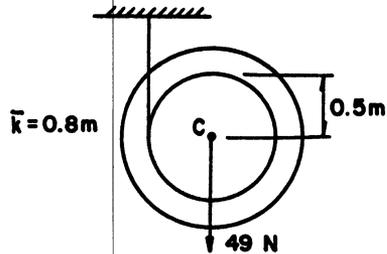


- a) Rueda y desliza pues $\mu_{\min} = 0.0631322$
- b) $\vec{\alpha} = 5.672 \text{ k} \text{ [rad/s}^2\text{]}$
 $a_c = 1.558 \text{ m/s}^2$
- c) $\vec{x}_{10} = 77.912 \text{ m}$
- d) $\vec{\omega}_{10} = 56.72 \text{ k} \text{ [rad/s]}$

11.5 El carrete A de la figura pesa 49 N, tiene un radio de giro de 0.80 m con respecto a un eje centroidal perpendicular al plano de movimiento y se suelta desde el reposo en la posición indicada.

Hallar:

- a) La aceleración angular del carrete.
- b) El módulo de la aceleración del centro de masa del carrete.
- c) El módulo de la tensión en la cuerda.
- d) La rapidez angular del carrete después de que su centro de masa ha descendido 3 m



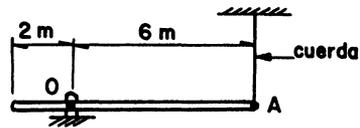
Resp.:

- a) $\vec{\alpha} = -5.5056 \text{ k} \text{ [rad/s}^2\text{]}$
- b) $a_c = 2.7528 \text{ m/s}^2$
- c) $T = 35.236 \text{ N}$
- d) $\omega = 8.128 \text{ rad/s}$
 $x = 3$

11.6 La barra delgada y homogénea tiene una masa de 5 kg. Si se corta la cuerda en A, determinar la reacción en la articulación O en las dos posiciones siguientes:

- Justamente después de haber cortado la cuerda.
- Cuando el eje de la barra adquiere la posición vertical después de girar 90° alrededor de la articulación O.

Sugerencia: Para el inciso b establecer primero la ecuación diferencial que rige el movimiento de rotación de la barra, e integrarla para obtener el valor de ω^2 en función del ángulo θ girado.



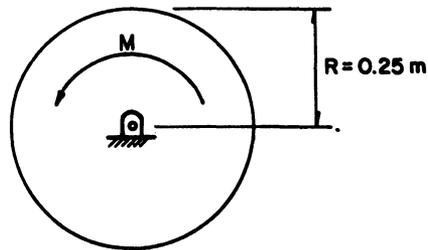
Resp.:

$$a) \vec{R}_O = 0\hat{i} + 28\hat{j} \quad [N]$$

$$b) \vec{R}_O = 0\hat{i} + 91\hat{j} \quad [N]$$

11.7 El disco de la figura está sujeto a la acción de un par M de magnitud constante, de $20 \text{ N}\cdot\text{m}$. La masa del disco es de 10 kg .

- Hallar la aceleración angular del disco.
- Calcular la rapidez angular del disco después de que ha completado cuatro revoluciones, partiendo del reposo.

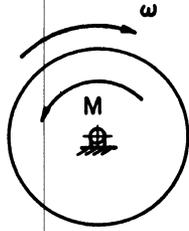


$$\text{Resp.}, \quad a) \quad \alpha = 64 \text{ k} \quad [\text{rad}/\text{s}^2]$$

$$b) \quad \omega = 56.72 \text{ rad/s}$$

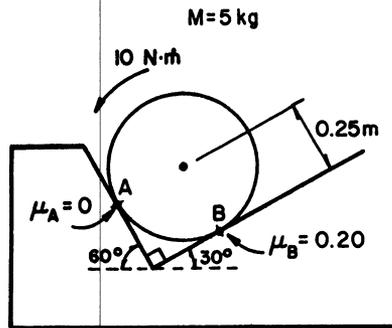
11.8 En la figura se indica un volante que gira a una rapidez constante de $180 \text{ rev}/\text{min}$. Para frenar el volante se usa un sistema de frenaje por fricción. Cuando se enfrena el volante experimenta un momento constante de $8 \text{ N}\cdot\text{m}$. El momento de inercia del volante con respecto al eje centroidal de rotación es de $8 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.

- a) ¿En cuánto tiempo se para el volante?
 b) ¿Cuántas revoluciones gira el volante antes de llegar al reposo?



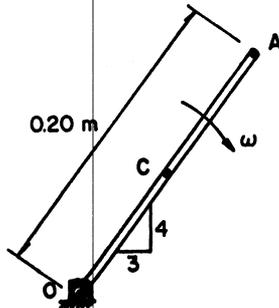
Resp.: a) $t = 16.85$ segundos
 b) $\Delta \theta = 28.27$ rev.

- 11.9 Un cilindro homogéneo macizo de 5 kg de masa se apoya sobre una artesa como se indica. Se aplica al cilindro un par de 10 N·m. en sentido contrario a las manecillas del reloj, en el plano de movimiento. Obtener la aceleración angular del cilindro.



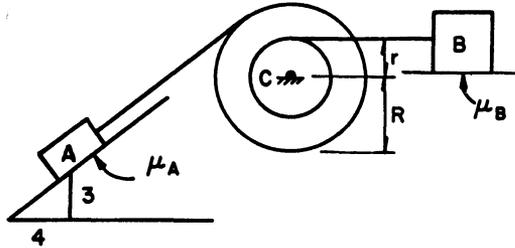
Resp.:
 $\vec{\alpha} = 50.42 \mathbf{k} \text{ [rad/s}^2\text{]}$

- 11.10 Si la barra delgada y homogénea de la figura está girando alrededor de un eje fijo perpendicular al plano de la figura y que pasa por la articulación O, calcular su aceleración angular para la posición indicada si la única fuerza activa es su propio peso.



Resp.: $\vec{\alpha} = -44.1 \mathbf{k} \text{ [rad/s}^2\text{]}$

- 11.11 En el sistema de cuerpos interconectados de la figura, el sistema giratorio C tiene un peso $W_C = 19.6 \text{ N}$, $r = 0.5 \text{ m}$; $R = 1.0 \text{ m}$, y $\bar{k} = 0.8 \text{ m}$. Los pesos de los bloques son: $W_A = 49 \text{ N}$, y $W_B = 19.6 \text{ N}$. Los coeficientes de fricción son: $\mu_A = 0.10$ y $\mu_B = 0.20$. Determinar los módulos de las tensiones T_A y T_B en las cuerdas, el módulo de aceleración a_A del bloque A, el módulo de aceleración a_B del bloque B, y el módulo de aceleración angular α del sistema giratorio C. Las cuerdas son flexibles inextensibles y de peso despreciable.



Resp.:

$$T_A = 8.135 \text{ N}$$

$$T_B = 7.389 \text{ N}$$

$$a_A = 3.469 \text{ m/s}^2$$

$$a_B = 1.735 \text{ m/s}^2$$

$$\alpha = 3.469 \text{ rad/s}^2$$

- 11.12 Resolver el problema anterior con los datos siguientes:

$$W_A = 200 \text{ N} ; W_B = 300 \text{ N}$$

$$W_C = 150 \text{ N} ; \mu_A = 0.25$$

$$\mu_B = 0.25 ; r = 0.6 \text{ m} ; R = 0.90 \text{ m}$$

$$\bar{k} = 0.6 \text{ m}$$

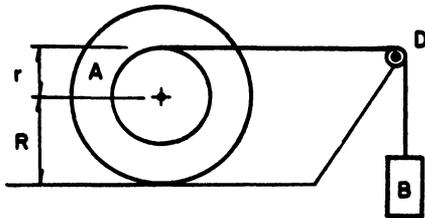
Resp.:

$$T_A = 65 \text{ N} ; T_B = 90 \text{ N}$$

$$a_A = 0.735 \text{ m/s}^2 ; a_B = 0.49 \text{ m/s}^2$$

$$\alpha = 0.81667 \text{ rad/s}^2$$

- 11.13 En el conjunto de la figura el sistema A rueda sin deslizar. Si $r = 0.5 \text{ m}$; $R = 1.0 \text{ m}$, $\bar{k} = 0.8 \text{ m}$, $W_A = 49 \text{ N}$, y $W_B = 19.6 \text{ N}$. Obtener la tensión T , en la cuerda, el módulo de aceleración a_C del centro de masa del sistema A, el módulo de aceleración a_B del cuerpo B y el coeficiente de fricción mínimo para asegurar el rodamiento perfecto del sistema A. El cable es flexible, inextensible y de peso despreciable, la clavija D es lisa.



Resp.:

$$T = 12.655 \text{ N}$$

$$a_C = 2.315 \text{ m/s}^2$$

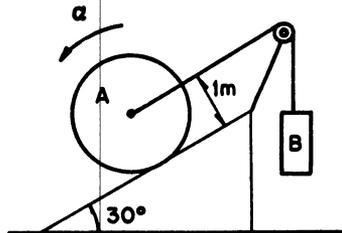
$$a_B = 3.472 \text{ m/s}^2$$

$$\mu_{\min} = 0.022$$

11.14 En el sistema de la figura $W_A = 98 \text{ N}$; $R = 1 \text{ m}$, $\bar{k} = 0.5 \text{ m}$, y $W_B = 9.8 \text{ N}$.
Si se suelta desde el reposo, hallar:

- El módulo de la tensión en la cuerda.
- El módulo de la aceleración angular de A.
- El módulo de la aceleración del centro de masa de A.
- El coeficiente de fricción mínimo requerido para asegurar el rodamiento perfecto de A.

La cuerda es flexible, inextensible y de peso despreciable.



Resp.: $T = 12.704 \text{ N}$

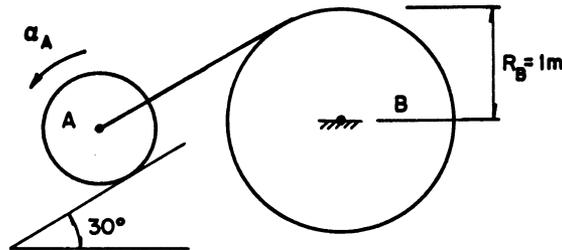
$\alpha = 2.904 \text{ rad/s}^2$

$a_c = 2.904 \text{ m/s}^2$

$\mu_{\min} = 0.0855$

11.15 En el sistema de la figura el disco A rueda sin deslizar hacia abajo del plano inclinado.

Si $W_A = 49 \text{ N}$, $R_A = 0.5 \text{ m}$, $\bar{k}_A = 0.5 \text{ m}$, $W_B = 49 \text{ N}$, $R_B = 1.0 \text{ m}$ y $\bar{k}_B = 0.6 \text{ m}$, calcular el módulo de la tensión en la cuerda, el módulo de la aceleración del centro de masa de A, el módulo de la aceleración angular de A, y el coeficiente de fricción mínimo requerido para asegurar el rodamiento perfecto de A.



Resp.: $T = 3.737 \text{ N}$

$a_c = 2.076 \text{ m/s}^2$

$\alpha_A = 4.1526 \text{ rad/s}^2$

$\mu_{\min} = 0.24464$

BIBLIOGRAFIA

1. Beer, Ferdinand P, y Russell Johnston, Jr. Mecánica Vectorial para Ingenieros, Dinámica. Mc. Graw Hill, Tercera Edición en Español, 1984.
2. Ordóñez Reyna Luis. Cinética y Problemas Sociales. Representaciones y Servicios de Ingeniería, S.A., 1977.
4. Ginsberg Jerry, H, y Genin Joseph. Dinámica. Editorial Interamericana. Primera Edición en Español, 1980.
5. Hibbeler Russell, C. Mecánica para Ingenieros: Dinámica. C.E.C.S.A, Tercera Edición en Español, 1982.
6. T. C. Huang. Mecánica para Ingenieros. Representaciones y Servicios de Ingeniería. Primera Edición en Español, 1976.

*Diseño e impresión
Unidad de Difusión,
Facultad de Ingeniería.
1986*

