FASCÍCULO 3

REDUCCIÓN DE SISTEMAS DE FUERZAS

Miguel M. Zurita Esquivel

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MECÁNICA

1986

127

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE INGENIERIA

FASCICULO 3

REDUCCION DE SISTEMAS DE FUERZAS

MIGUEL M. ZURITA ESQUIVEL

DIVISION DE CIENCIAS BASICAS
DEPARTAMENTO DE MECANICA

FI/DCB/86

CONTENIDO

PROLOGO

3. REDUCCION DE SISTEMAS DE FUERZAS

El presente fascículo se inscribe dentro de la serie de publicaciones que el Departamento de Mecánica, de la División de Ciencias Básicas de la Facultad de Ingeniería, ha decidido poner a disposición de los estudiantes de materias impartidas por dicho Departamento, con el propósito de satisfacer convenientemente la necesidad reiterada de obras de consulta, que comprendan los temas incluídos en los programas de estudio de las materias aludidas y que tengan, además, el enfoque y el nivel de especificidad pertinentes.

Esta publicación, como lo indica su título, está dedicada al importante aspecto de la Estática que contempla la posiblidad de expresar cualquier sistema de fuerzas, mediante uno equivalente de índole irreductible.

De esta manera, llega a establecerse un esquema referencial de carácter unitario, para que, posteriormente, se analicen los efectos mecánicos asociados a la acción de sistemas específicos de fuerzas. Asimismo, la situación de equilibrio se plantea con propiedad y claridad, en el contexto referencial citado, con lo cual se formaliza dicha situación para disponer así de un enfoque integrado, que permita abordar, después, la solución de problemas de equilibrio con respecto a sistemas mecánicos concretos.

El contenido de este fascículo se ha conformado con desarrollos teóricos, de orientación axiomática, los cuales subrayan los conceptos mecánicos con base en visualizaciones geométricas, acorde con una notable corriente académica en el campo de la enseñanza de la Mecánica Clásica.

Así, inicialmente se introduce el concepto de coordenadas vectoriales de los sistemas de fuerzas, lo que permite representarlos mediante una simbolización precisa.

A continuación se definen, acorde con el punto de vista del análisis de sistemas contemporáneo, los sistemas de fuerzas equivalentes. Inmediatamente después, se presenta el concepto de par de fuerzas y se describe la operación de traslación de una fuerza, mediante la implicación de un par de transporte.

En seguida, se lleva a cabo el desarrollo referente a la reducción de sistemas de fuerzas. Se trata de un tema central el cual se presenta con el detalle requerido, apoyando los planteamientos en argumentaciones geométricas.

De esta forma, se accede al punto dedicado a la configuración de los diferentes sistemas de fuerzas y sus posibles casos de reducción, el cual también es sustantivo, ya que muestra, en términos sistemáticos, las opciones factibles de reducción que exhiben sistemas de fuerzas específicos y relevantes desde el ángulo de las aplicaciones mecánicas.

Por otra parte, para cada uno de los puntos desarrollados se incluyen ejemplos ilustrativos, los cuales se generaron teniendo en cuenta su preciso cometido pedagógico.

Por último, se incluye un amplio conjunto de problemas para que sean resueltos por el lector. Estos problemas se elaboraron especialmente para esta publicación y además de sus características didácticas, tienen la peculiaridad de ser, de alguna manera, diferentes a los que tradicionalmente se insertan en los libros de consulta.

La bibliografía que aparece en la parte final, permite al lector acercarse a los temas expuestos con los enfoques de otros autores.

Se agradecen los comentarios o sugerencias que se aporten para mejorar el contenido de futuras impresiones de este trabajo, o para corregir las posibles deficiencias de la presente.

3.1 COORDENADAS VECTORIALES DE LOS SISTEMAS DE FUERZAS

Se entiende por sistema de fuerzas a un conjunto de fuerzas, como se indica en la figura 3.1.

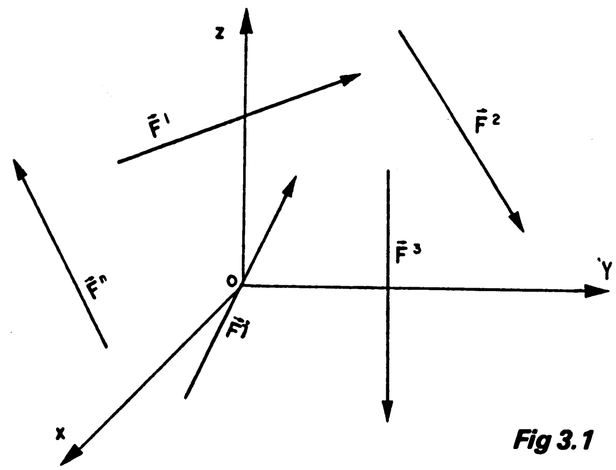


Fig 3.1

La resultante general del sistema se obtiene sumando los vectores equipolentes de cada una de las componentes del mismo; esto es:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}^i \qquad \text{--- 3.1}$$

La expresión anterior no permite conocer un punto de aplicación del soporte o línea de acción de tal vector, por lo que $\vec{R}$ es considerado como un vector libre.

El momento del sistema con respecto a cualquier punto del espacio se puede valuar considerando la suma de los momentos de las fuerzas con respecto al mismo; generalmente, el punto con respecto al cual el momento es mas sencillo de calcular, es el origen, ya que en estas condiciones el momento está dado por la expresión:

$$\vec{M}o = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}'_i \times \vec{F}i) \qquad \text{--- 3.2}$$

en la cual el vector $\vec{r}_i$ siempre será un vector de posición a cualquier punto de la línea de acción de cada componente y $\vec{F}^i$ representa los vectores equipolentes de las fuerzas involucradas en el sistema.

El vector $\vec{Mo}$ proporciona todas las características del momento; inclusive su posición, ya que dicho vector siempre se ubica en el denominado centro de momentos y en estas condiciones $\vec{Mo}$ siempre pasará por el origen.

Esta pareja de vectores $(\vec{R}, \vec{Mo})$ se conoce con el nombre de *coordenadas vectoriales del sistema de fuerzas.* En este caso se puede presentar la situación en que $\vec{R}$ y $\vec{Mo}$ no sean perpendiculares, o sea, que no se cumpla que $\vec{R} \cdot \vec{Mo} = 0$; igualmente es factible que la resultante general sea nula.

Ejemplo 3.1. Calcular las coordenadas vectoriales del sistema activo de fuerzas que se indica en la viga de la figura 3.2.

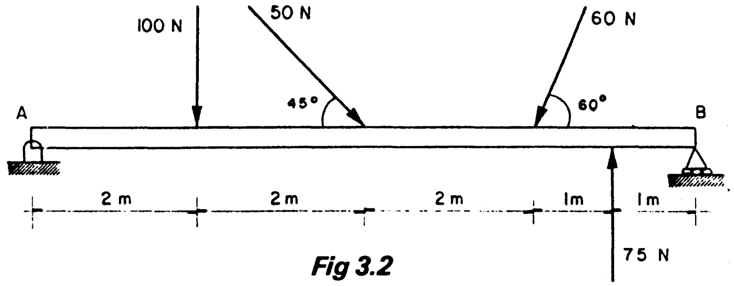
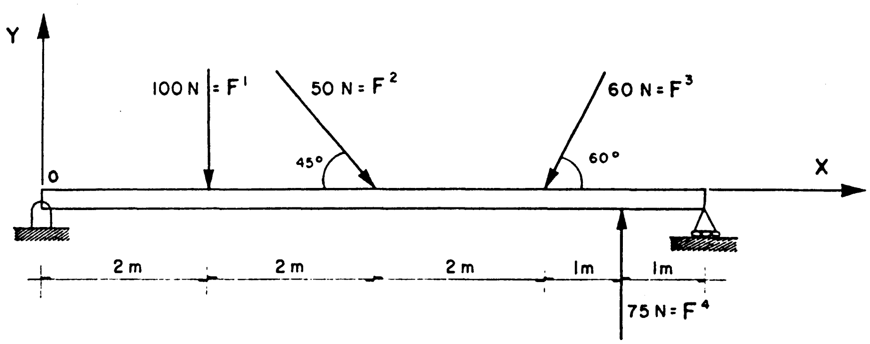


Fig 3.2

Solución. Identificando a las fuerzas y ubicando el origen del sistema de referencia en el punto A; con los ejes respectivos se tiene:



Ahora, se determinan los vectores equipolentes de las fuerzas:

$$\vec{F}^1 = -100j \ [N]$$

$$\vec{F}^2 = 50(\cos45°i - \cos45°j) = 35.35i - 35.35j \ [N]$$

$$\vec{F}^3 = 60(-\cos60°i - \cos30°j) = -30i - 51.96j \ [N]$$

$$\vec{F}^4 = 75j \ [N]$$

y realizando la suma de fuerzas (ecuación 3.1):

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{4} \vec{F}^i = \vec{F}^1 + \vec{F}^2 + \vec{F}^3 + \vec{F}^4$$

$$\underline{\vec{R} = 5.35i - 112.31j \; [N]}$$

Calculando los momentos de las fuerzas con respecto al origen:

$$\vec{M}o^1 = -200 \; k \; [N \cdot m]$$
$$\vec{M}o^2 = -50 \; \cos 45°(4) \; k = -141.42k \; [N \cdot m]$$
$$\vec{M}o^3 = -60 \; \cos 30°(6) \; k = -311.76k \; [N \cdot m]$$
$$\vec{M}o^4 = 525k \; [N \cdot m]$$

y realizando la suma de momentos (ecuación 3.2):

$$\vec{M}o = \sum_{i=1}^{4} \vec{r}_i \times \vec{F}^i = \vec{M}o^1 + \vec{M}o^2 + \vec{M}o^3 + \vec{M}o^4$$
$$\underline{\vec{M}o = -128.18 \; k \; [N \cdot m]}$$

donde las coordenadas vectoriales son:

$$S \equiv (\; 5.35i - 112.31j \; [N] \; ; \; -128.18k \; [N \cdot m] \;)$$

Ejemplo 3.2. Obtener las coordenadas vectoriales del sistema de fuerzas que se muestra en la figura 3.3.

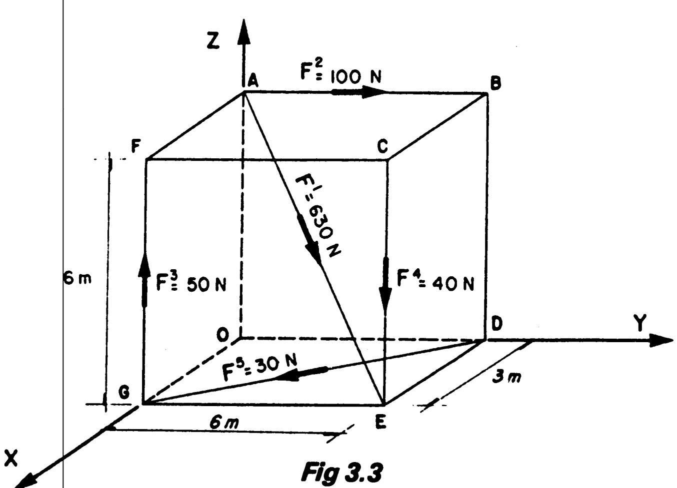


Fig 3.3

Solución. Primeramente se calculan los vectores equipolentes de las fuerzas:

$$\vec{F}^1 = 630 \left[\frac{(3-0)i + (6-0)j + (0-6)k}{\sqrt{9+36+36}}\right] = 210i+420j-420k \; [N]$$

$$\vec{F}^2 = 100j \; [N]$$

$$\vec{F}^3 = 50\,k \; [N]$$

$$\vec{F}^4 = -40k \; [N]$$

$$\vec{F}^5 = 30 \left[\frac{(3-0)i+(0-6)j}{\sqrt{9+36}}\right] = 13.416i - 26.832j \; [N]$$

Sumando las fuerzas:

$$\underline{\vec{R} = 223.41i + 493.16j - 410.00k \, [N]}$$

y los momentos con respecto al origen son:

$$\vec{Mo}^1 = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 6 \\ 210 & 420 & -420 \end{bmatrix} = -2520i+1260j \; [N \cdot m]$$

$$\vec{Mo}^2 = -600i \; [N \cdot m]$$

$$\vec{Mo}^3 = -150j \; [N \cdot m]$$

$$\vec{Mo}^4 = -240i + 120j \; [N \cdot m]$$

$$\vec{Mo}^5 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 0 \\ 13.416 & -26.832 & 0 \end{vmatrix} = -80.496k \; [N \cdot m]$$

y realizando la suma de momentos:

$$\underline{\vec{Mo} = -3360i + 1230j - 80.49k \; [N \cdot m]}$$

siendo las coordenadas vectoriales solicitadas:

$$S \equiv (223.41i+493.16j-410.00k \; [N] \; ; \; -3360i+1230j-80.49k \; [N \cdot m])$$

3.2 SISTEMAS EQUIVALENTES

Se denominan sistemas equivalentes, aquellos en los que sus coordenadas vectoriales son iguales, bajo el mismo marco de referencia.

Sean los sistemas I y II actuando en el cuerpo de la figura 3.4; como sus coordenadas vectoriales deben ser iguales se debe cumplir que:

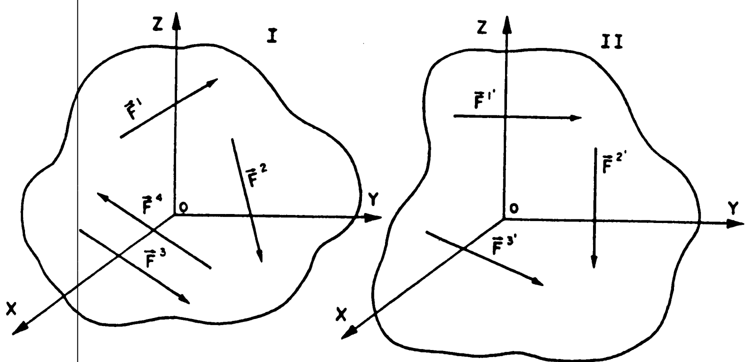


Fig 3.4

$$\vec{R}_I = \vec{R}_{II} \qquad - \quad - \quad - \quad 3.3$$

$$\vec{M}o_I = \vec{M}o_{II} \qquad - \quad - \quad - \quad 3.4$$

O sea que

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}^{i}{}_{I} = \sum_{j=1}^{m} \vec{F}^{j}{}_{II} \qquad - \quad - \quad - \quad 3.5$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \times \vec{F}^{i})_{I} = \sum_{j=1}^{m} (\vec{r}_j \times \vec{F}^{j})_{II} \qquad - \quad - \quad 3.6$$

Obsérvese que el número de elementos de cada sistema puede ser diferente, sin que esta situación determine la equivalencia o no equivalencia de los sistemas.

Resumiendo, para que dos sistemas de fuerzas sean equivalentes es necesario que se cumplan simultáneamente las dos ecuaciones, 3.5 y 3.6, planteadas.

Ejemplo 3.3. Demostrar que el sistema de fuerzas activo aplicado en la estructura de la figura 3.5 es equivalente a la fuerza $\vec{F} = -2000i - 6000j$ [N] que pasa por el punto P(22,0,0) [m].

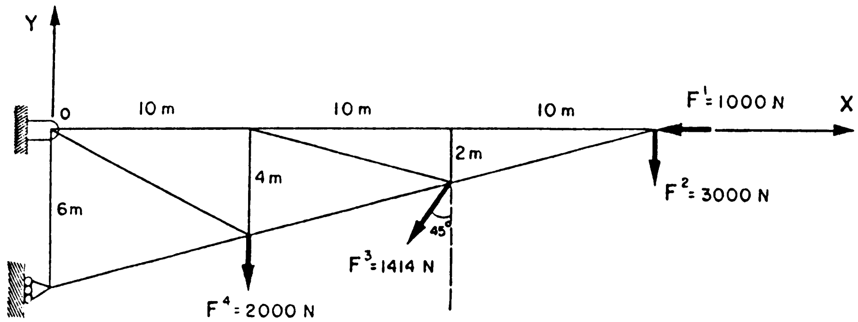


Fig 3.5

Solución. Denominando I al sistema de fuerzas que actúa en la estructura se tendrá:

$$\vec{F}^1 = -1000i \ [N]$$

$$\vec{F}^2 = -3000j \ [N]$$

$$\vec{F}^3 = -1000i - 1000j \ [N]$$

$$\vec{F}^4 = -2000j \ [N]$$

en estas condiciones:

$$\vec{R}_I = -2000i - 6000j \ [N]$$

que comparándola con la fuerza $\vec{F}$ dato del problema, se observa que son iguales, por lo que la primera condición de equivalencia se cumple.

En cuanto a momentos:

$$\vec{M}o^1 = \vec{0} \ [N \cdot m]$$

$$\vec{M}o^2 = -90\ 000k \ [N \cdot m]$$

$$\vec{M}o^3 = -20000k - 2000k = -22000k \ [N \cdot m]$$

$$\vec{M}o^4 = -20000k \ [N \cdot m]$$

y la suma es:

$$\vec{M}o_I = -132\ 000k\ [N \cdot m]$$

para la fuerza $\vec{F}$:

$$\vec{M}o^F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 22 & 0 & 0 \\ -2000 & -6000 & 0 \end{vmatrix} = -132000k\ [N \cdot m]$$

por lo que los momentos son iguales y entonces se puede concluir que los sistemas planteados son equivalentes.

Ejemplo 3.4. Considerando que los siguientes sistemas de fuerzas son equivalentes, determinar la fuerza $\vec{F}^6$ y el punto P_6, ubicado en el plano XY.

SISTEMA I	$\vec{F}^1 = 5i+9j+20k\ [N]$	$P_1(1,2,3)\ [m]$
	$\vec{F}^2 = 5i+11j+10k\ [N]$	$P_2(1,1,1)\ [m]$
	$\vec{F}^3 = 6i-4j-2k\ [N]$	$P_3(2,4,6)\ [m]$
	$\vec{F}^4 = -6i+4j+2k\ [N]$	$P_4(-3,5,0)\ [m]$
SISTEMA II	$\vec{F}^5 = 3i-2j+8k\ [N]$	$P_5(0,9,16)\ [m]$
	$\vec{F}^6$	P_6
	$\vec{F}^7 = -3i\ [N]$	$P_7(5,6,0)\ [m]$
	$\vec{F}^8 = +3i\ [N]$	$P_8(7,6,1)\ [m]$

Solución. Calculando las coordenadas vectoriales del Sistema I:

$$\vec{R} = \vec{F}^1 + \vec{F}^2 + \vec{F}^3 + \vec{F}^4 = 10i + 20j + 30k\ [N]$$

$$\vec{M}o^1 = (i+2j+3k) \times (5i+9j+20k) = 13i-5j-k\ [N \cdot m]$$

$$\vec{M}o^2 = (i+j+k) \times (5i+11j+10k) = -i-5j+6k\ [N \cdot m]$$

$$\vec{M}o^3 = (2i+4j+6k) \times (6i-4j-2k) = 16i+40j-32k\ [N \cdot m]$$

$$\vec{M}o^4 = (-3i+5j) \times (-6i+4j+2k) = 10i+6j+18k\ [N \cdot m]$$

Así, $\vec{M}o^I = 38i + 36j - 9k\ [N \cdot m]$

Dado que los sistemas son equivalentes, se debe cumplir que:

$$\vec{R}_I = \vec{R}_{II} \quad ; \quad \vec{Mo}^I = \vec{Mo}^{II}$$

Por la primera igualdad:

$$10i + 20j + 30k = 3i - 2j + 8k + \vec{F}^6 - 3i + 3i$$

Por lo que:

$$\underline{\vec{F}^6 = 7i + 22j + 22k \; [N]}$$

Para la expresión de momentos, primeramente se calculan los del sistema II:

$$\vec{Mo}^5 = (9j + 16k) \times (3i-2j+8k) = 104i + 48j - 27k \; [N \cdot m]$$

$$\vec{Mo}^7 = (5i + 6j) \times (-3i) = 18k \; [N \cdot m]$$

$$\vec{Mo}^8 = (7i + 6j + k) \times (3i) = 3j - 18k \; [N \cdot m]$$

En virtud de que los momentos de ambos sistemas deben ser iguales:

$$104i + 51j - 27k + \vec{Mo}^6 = 38i + 36j - 9k$$

entonces:

$$\vec{Mo}^6 = -66i - 15j + 18k$$

y como $\vec{Mo}^6 = \vec{r}_{P_6} \times \vec{F}_6$, se tendrá:

$$\vec{M}o^6 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ X & Y & 0 \\ 7 & 22 & 22 \end{vmatrix} = (22Y)i - (22X)j + (22X-7Y)k$$

Igualando términos:

$$22Y = -66$$

$$-22X = -15$$

$$22X-7Y = 18$$

Y resolviendo el sistema de ecuaciones: Y = -3, x = 0.682

así, el punto buscado es:

$$\underline{P_6 \; (0.682, -3, 0) \; [m]}$$

3.3 PAR DE FUERZAS

<u>*Se conoce como par de fuerzas a dos fuerzas no colineales, de igual magnitud, misma dirección y sentidos contrarios*</u> (figura 3.6).

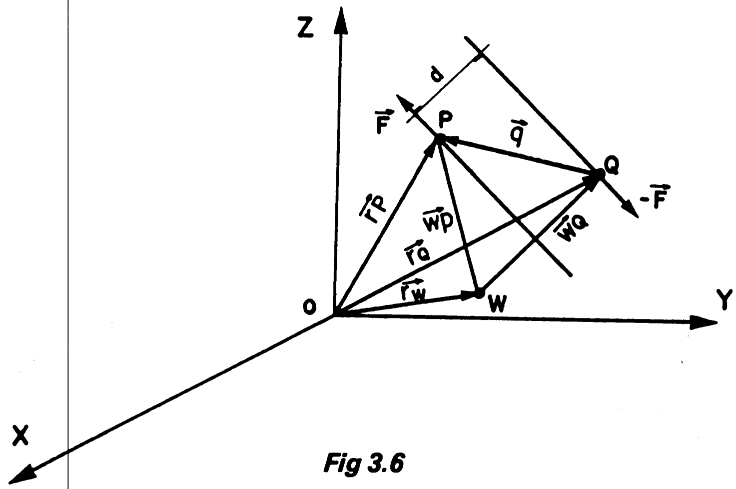


Fig 3.6

Conforme a la figura, se obtendrán las coordenadas vectoriales del par de fuerzas mostrado:

$$\vec{R} = \vec{F} + (-\vec{F}) = \vec{0}$$
$$\vec{M}o = \vec{r}_P \times \vec{F} + \vec{r}_Q \times (-\vec{F}) = \vec{r}_P \times \vec{F} - \vec{r}_Q \times \vec{F}$$
$$\vec{M}o = (\vec{r}_P - \vec{r}_Q) \times \vec{F} = \vec{q} \times \vec{F} = \vec{m}$$

y se valuará el momento del par de fuerzas con respecto a los puntos Q y W.

Q y W.

$$\vec{M}_W = \vec{WP} \times \vec{F} + \vec{WQ} \times (-\vec{F}) = \vec{WP} \times \vec{F} - \vec{WQ} \times \vec{F} = \vec{m}$$
$$\vec{M}_W = (\vec{WP} - \vec{WQ}) \times \vec{F} = \vec{q} \times \vec{F} = \vec{m}$$
$$\vec{M}_Q = \vec{q} \times \vec{F} + 0 = \vec{q} \times \vec{F} = \vec{m}$$

Por todo lo anterior se puede afirmar, en relación a un par de fuerzas, lo siguiente:

1.- Exclusivamente produce momento.
2.- Su momento es el mismo con respecto a cualquier punto en el espacio.
3.- Su momento se obtiene calculando el momento de una de las fuerzas con respecto a cualquier punto de la línea de acción de la otra fuerza.

4.- Su momento es un vector libre ($\vec{m}$), con las siguientes características:

a) Magnitud = $|\vec{F}| \cdot d$, donde d se denomina brazo del par.
b) Dirección = Perpendicular al plano del par.
c) Sentido = Regla de la mano derecha.
d) Punto de aplicación = Cualquiera.

Las propiedades de un par de fuerzas se ilustran en la figura 3.7.

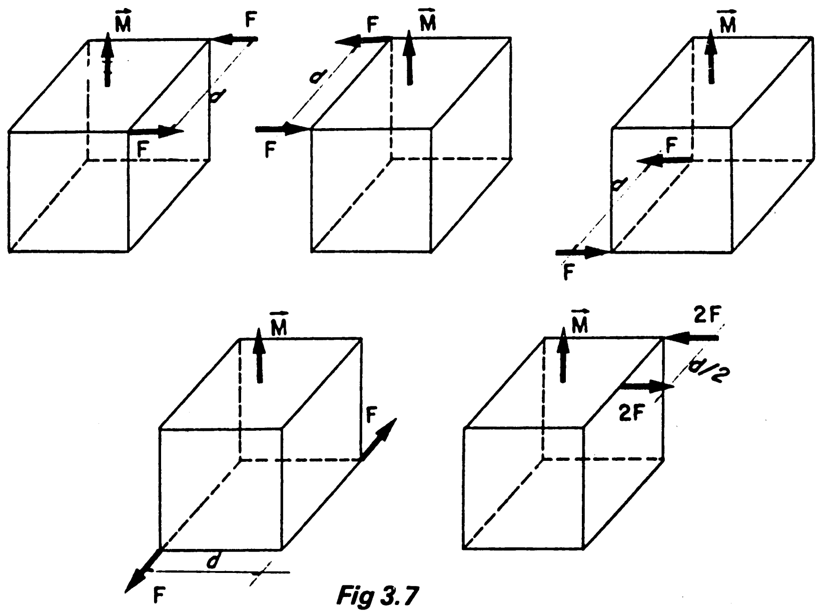


Fig 3.7

Concluyéndose que éstas no varían si se cumple que;

— El par se traslada en su plano o en planos paralelos al que él determina.

— El par se hace girar en su propio plano.

— Se hacen variar F o d, pero la magnitud del momento del par permanece constante.

Ejemplo 3.5. Calcular el momento total producido por los pares de fuerzas que se observan en la figura 3.8.

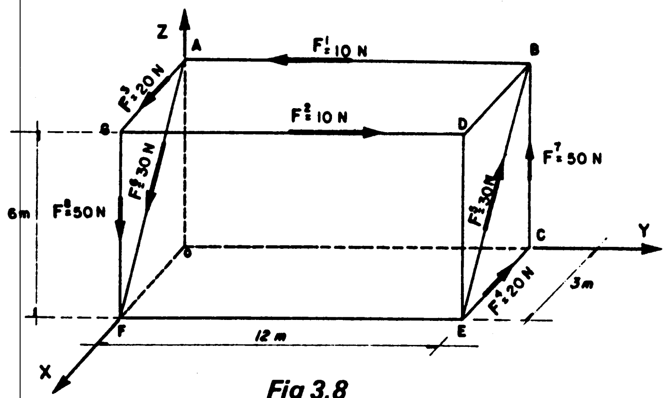


Fig 3.8

Solución. De la observación de la figura el momento del par formado por $\vec{F}^1$ y $\vec{F}^2$ puede obtenerse en forma directa;

$\vec{m}_1 = 30k$ [N · m]

no así los demás momentos que tienen que determinarse realizando el producto vectorial;

$$\vec{m}_2 = \vec{EG} \times \vec{F}^3, \quad \vec{EG} = -12j + 6k \ [m], \quad \vec{F}^3 = 20i \ [N]$$

$$\vec{m}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -12 & 6 \\ 20 & 0 & 0 \end{vmatrix} = +120j + 240k \ [N \cdot m]$$

$$\vec{m}_3 = \vec{FE} \times \vec{F}, \quad \vec{FE} = 12j, \quad \vec{F}^5 = 30 \frac{-3i+6k}{\sqrt{36+9}} = -13.41i+26.83k \ [N]$$

$$\vec{m}_3 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 12 & 0 \\ -13.41 & 0 & 26.83 \end{vmatrix} = 321.96i + 160.92k \ [N \cdot m]$$

$$\vec{m}_4 = \vec{FC} \times \vec{F}^7, \quad \vec{FC} = -3i+12j, \quad \vec{F}^7 = 50k \ [N]$$

$$\vec{m}_4 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{vmatrix} = 600i + 150j \ [N \cdot m]$$

y realizando la suma, ya que son vectores libres:

$$\vec{m}_{TOTAL} = 921.96i + 270j + 430.92k \quad [N \cdot m]$$

Ejemplo 3.6. Para levantar una compuerta, en un sistema de riego, el canalero aplica dos fuerzas de 100 N de magnitud, cada una, al volante de la misma, como se indica en la figura 3.9.

Determinar el momento producido por estas dos fuerzas.

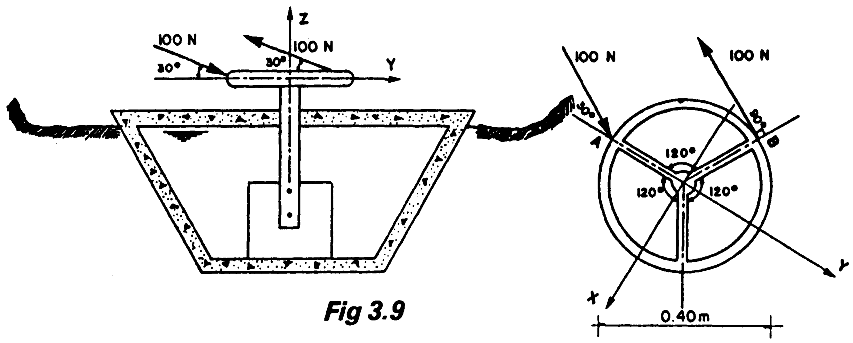


Fig 3.9

Solución. Considérese el origen en el centro del volante; así las coordenadas de los puntos A y B son:

A (0,-.20,0) [m]   B (-0.10,0.173,0) [m]

Ahora calcúlense los vectores equipolentes:

$$\vec{F}^1 = 100\ [(\cos 30° \cos 60°)i + (\cos 30° \cos 30°)j - \cos 60° k]$$

$$\vec{F}^1 = 43.3i + 75j - 50K\ [N]$$

$$\vec{F}^2 = 100\ [-(\cos 30° \cos 60°)i - (\cos 30° \cos 30°)j + \cos 60° k]$$

$$\vec{F}^2 = -43.3i - 75j + 50K\ [N]$$

y el momento del par quedará dado por:

$$\vec{m} = \vec{BA} \times \vec{F}' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ +0.10 & -0.373 & 0 \\ 43.3 & 75 & -50 \end{vmatrix} = \underline{18.65i + 5j + 23.65k\,[N \cdot m]}$$

3.4 TRASLACION DE UNA FUERZA

En ocasiones es conveniente trasladar una fuerza de un punto a otro, lo cual tratará de plantearse, sin perder de vista que las coordenadas vectoriales no pueden alterarse.

Sea la fuerza $\vec{F}$, ubicada en el plano π de la figura 3.10 y que debe ser trasladada al punto O que se indica, también ubicado en el plano citado;

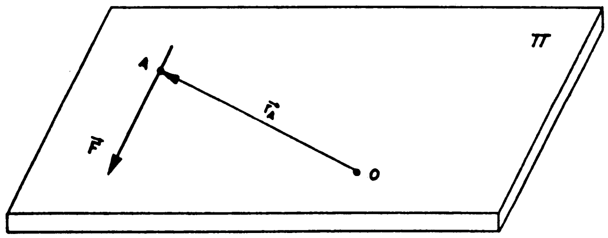


Fig 3.10

siendo las coordenadas vectoriales:

$$\vec{R} = \vec{F}, \quad \vec{M}o = \vec{r}_A \times \vec{F}$$

Agréguese un sistema de fuerzas en equilibrio. Cabe aclarar que el sistema que se adiciona está formado por dos fuerzas en equilibrio de la misma magnitud y paralelas a la fuerza que debe trasladarse, y que pasan por el punto de traslado O;

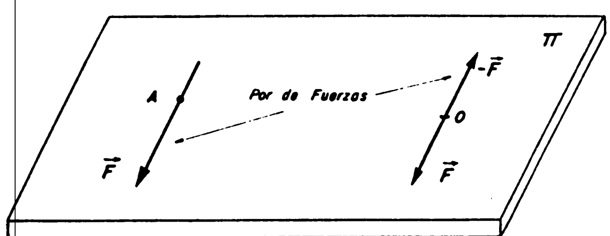


Fig 3.11

nótese que las coordenadas vectoriales no se alteran.

Si se observa con detalle, se ha formado un par de fuerzas, el cual recibe el nombre de *par de transporte*, cuyo momento es igual al momento de la fuerza $\vec{F}$ original con respecto al punto O.

$$\vec{m}_{transp} = \vec{OA} \times \vec{F} = \vec{m}_T$$

En base a lo anterior la fuerza $\vec{F}$ se encuentra ya en O, pero se ha agregado un par de transporte.

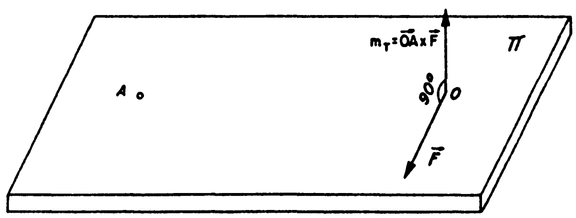


Fig 3.12

Resumiendo, para trasladar una fuerza de un punto a otro, es necesario considerar:

- Que se incluya un par de transporte.
- Que el momento del par de transporte es igual al momento de la fuerza que se desea trasladar con respecto al punto de traslado.
- Que finalmente resulta una fuerza y un momento que son perpendiculares entre sí.

Un corolario muy importante de la traslación de una fuerza es que: *al obtener las coordenadas vectoriales de un sistema, se le puede considerar como trasladado al origen, o sea, se le está sustituyendo por un sistema equivalente que pasa por dicho punto.*

Cabe aclarar que esta situación es de suma importancia para los casos de reducción de los sistemas de fuerzas, y que la sumatoria de los vectores fuerza, en estas condiciones, representa la aplicación del Postulado de Stevinus, ya que todas las fuerzas se obligan a concurrir en el origen.

Ejemplo 3.7. Trasladar la fuerza mostrada en la figura 3.13 al punto A.

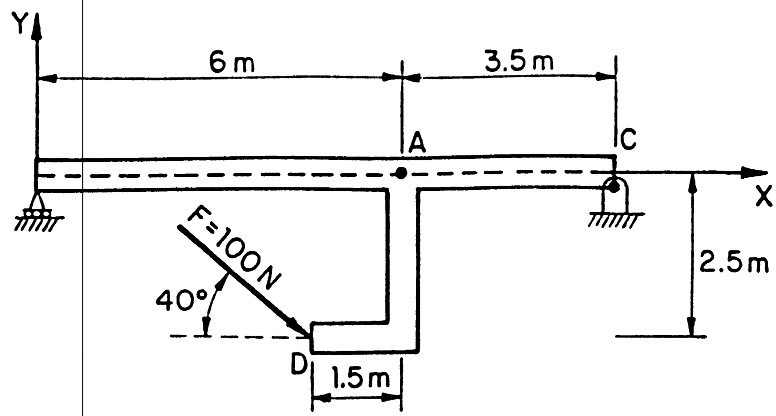


Fig 3.13

Solución. Para ello, se determina el vector equipolente de la fuerza,

$$\vec{F} = 100\ (\cos 40°i - \cos 50°j) = 76.60i - 64.28j\ [N]$$

y se calcula su momento con respecto al punto A, que representa el momento del par de transporte.

$$\vec{M}_A^F = \vec{m}_T = \vec{AD} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1.5 & -2.5 & 0 \\ 76.60 & -64.28 & 0 \end{vmatrix} = (96.42+191.5)k$$

$$\vec{m}_T = 287.92k\ [N \cdot m]$$

Ahora, ya se tiene la fuerza aplicada en A, pero con un momento $\vec{m}_T$.

Ejemplo 3.8. Sustituir el sistema de fuerzas que se indica en la figura 3.14, por otro equivalente que pase por el origen.

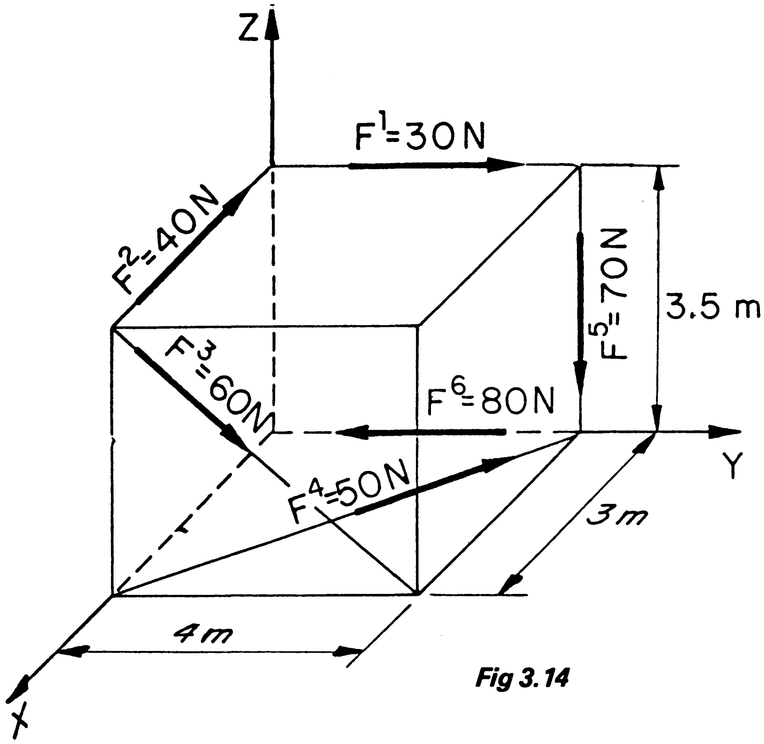


Fig 3.14

Solución. Para sustituir el sistema por uno equivalente que pase por el origen bastará con trasladar cada una de las fuerzas a dicho punto y para ello, será suficiente con calcular el momento de cada una de ellas con respecto al punto O.

Primeramente se determinan los vectores equipolentes:

$$\vec{F}^1 = 30j \ [N]$$

$$\vec{F}^2 = -40i \ [N]$$

$$\vec{F}^3 = 60 \left(\frac{4j - 3.5k}{\sqrt{16+12.25}} \right) = 45.15j - 39.51k \ [N]$$

$$\vec{F}^4 = 50 \left(\frac{-3i + 4j}{\sqrt{16+9}} \right) = -30i + 40j \ [N]$$

$$\vec{F}^5 = -70k \ [N]$$

$$\vec{F}^6 = -80j \ [N]$$

y a continuación los momentos con respecto al origen:

$$\vec{m}_1 = \vec{Mo}^1 = -105\,i \ [N \cdot m]$$

$$\vec{m}_2 = \vec{Mo}^2 = -140\,j \ [N \cdot m]$$

$$\vec{m}_3 = \vec{Mo}^3 = \vec{r}_D \times \vec{F}^3 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 3.5 \\ 0 & 45.15 & -39.51 \end{vmatrix} = -158.02i + 118.53j + 135.45k \ [N \cdot m]$$

$$\vec{m}_4 = \vec{Mo}^4 = \vec{r}_E \times \vec{F}^4 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 0 \\ -30 & 40 & 0 \end{vmatrix} = 120k \ [N \cdot m]$$

$$\vec{m}_5 = \vec{Mo}^5 = -280\,i \ [N \cdot m]$$

$$\vec{m}_6 = \vec{Mo}^6 = \vec{0}$$

Como resultado se obtiene tanto la suma de los vectores equipolentes como la de los momentos:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{6} \vec{F}^i = \underline{-70i + 35.15j - 109.51k \ [N]}$$

$$\vec{Mo} = \sum_{i=1}^{6} (\vec{r}_i \times \vec{F}^i) = \underline{-543.02i - 21.47j + 255.45k \ [N \cdot m]}$$

3.5 REDUCCION DE SISTEMAS DE FUERZAS

Implica definir explícitamente, el sistema más simple equivalente a uno dado.

Si se tiene un sistema de fuerzas (I) como el mostrado en la figura 3.15, se tratará de encontrar otro (II), con la menor cantidad de elementos posibles, a condición de que sea equivalente al sistema original, por lo cual necesariamente deberá cumplirse que las *coordenadas vectoriales de ambos sistemas sean iguales.*

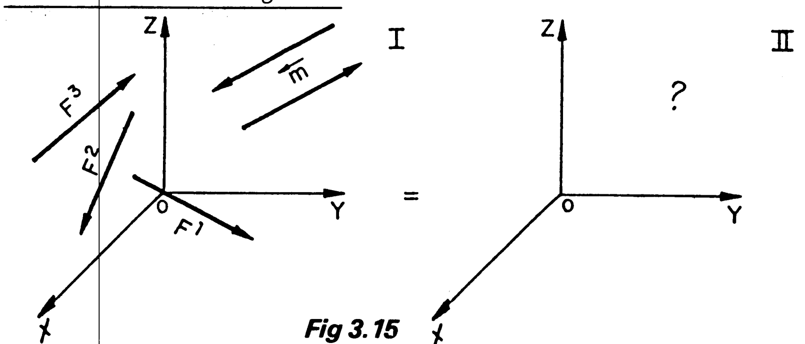


Fig 3.15

$$(\vec{R}, \vec{Mo})_I = (\vec{R}, \vec{Mo})_{II}$$

3.5.1. *Equilibrio.* Por lo anterior, de cualquier sistema que se desee reducir, lo primero que tendrá que obtenerse serán sus coordenadas vectoriales, para sustituirlo por un sistema equivalente que pase por el origen.

Sea que al calcular las coordenadas vectoriales de un sistema se tenga que:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}^i = \vec{0}$$

$$\vec{M}_o^R = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \times \vec{F}^i) = \vec{0}$$

Así, se puede afirmar que no es necesario colocar ningún elemento en el sistema II, figura 3.16.

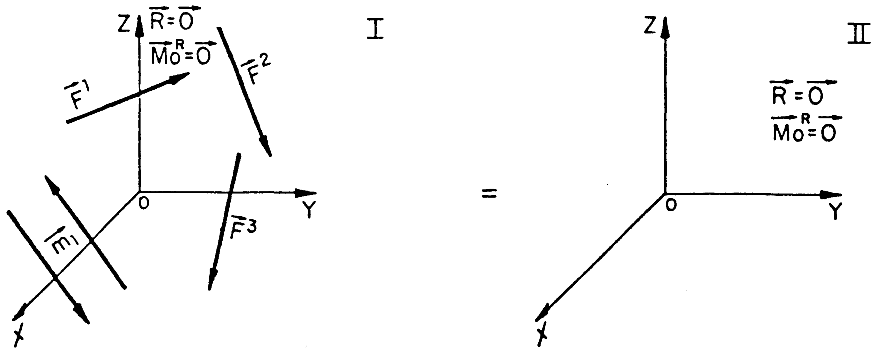


Fig 3.16

Este caso es conocidó como Equilibrio, y para el tema que se analiza bastará con indicar que el sistema se reduce al equilibrio, ya que dicha situación será analizada en forma detallada en otro fascículo.

3.5.2. *Par de Fuerzas.* Supóngase que las coordenadas vectoriales de un sistema de fuerzas resultaran:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}^i = \vec{0}$$

$$\vec{M}_o^R = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \times \vec{F}^i) \neq \vec{0}$$

lo anterior implica que dicho sistema está produciendo momento y como ya se analizó, el sistema irreductible capaz de producir exclusivamente tal acción es un par de fuerzas, por lo cual se puede concluir que el sistema de fuerzas, cuyas coordenadas vectoriales correspondan a las indicadas, se reduce a un par de fuerzas.

De acuerdo a la figura 3.17 que se indica, se observa que el momento del par de fuerzas debe ser igual a $\vec{M}o$ y que además no será necesario proporcionar ningún punto de aplicación de dicho par ya que su momento es el mismo con respecto a cualquier punto, y se considera como un vector libre.

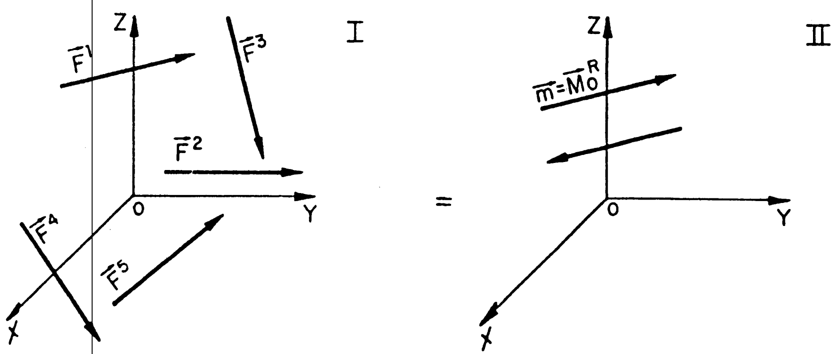


Fig 3.17

3.5.3. <u>*Una Fuerza.*</u> En esta ocasión se debe tratar este caso en dos partes ya que cada una de las soluciones que se presentan, tienen aspectos diferentes. Asimismo se aprovechará para plantear el Teorema General de Momentos.

a) <u>*Una fuerza que pasa por el origen.*</u> Sean las coordenadas vectoriales del sistema.

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}^i \neq \vec{0}$$

$$\vec{M}o^R = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \times \vec{F}^i) = \vec{0}$$

por lo que se coloca como mínimo sistema equivalente a una sola fuerza, pero que no produzca momento con respecto al origen y la única forma de que esto se presente es que la línea de acción de la fuerza contenga a dicho punto.

El vector equipolente de dicha fuerza resultante lo proporcionan las coordenadas vectoriales y no es necesario localizar ningún punto de aplicación de la misma ya que, como se acordó, pasará por el origen, figura 3.18.

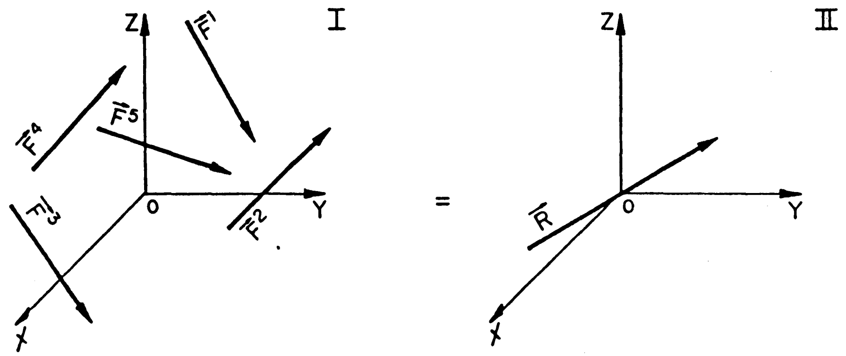


Fig 3.18

b) *Una fuerza que no pasa por el origen.* Cuando las coordenadas vectoriales de un sistema de fuerzas son:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}^{i} \neq \vec{0}$$

$$\vec{M}o^{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}^{i} \neq \vec{0}$$

se dice que se tiene un sistema reducido que pasa por el origen; formado por una fuerza y un par, cuyo momento se considera aplicado en el origen, figura 3.19.

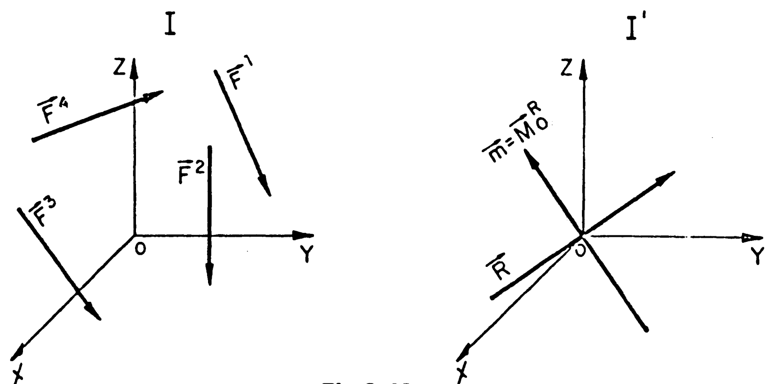


Fig 3.19

En estas condiciones existen dos posibilidades:

1. *Que el momento $\vec{M}_O^R$ y la fuerza $\vec{R}$ sean perpendiculares.*
2. *Que el momento $\vec{M}_O^R$ y la fuerza $\vec{R}$ no sean perpendiculares.*

Se analizará la primera posibilidad.

Considérese un plano π en el que se ubica a la fuerza $\vec{R}$ y se dibuja el momento $\vec{M}_O^R$ perpendicular a dicho plano; obsérvese que la línea de acción de ambos vectores contiene al punto O (figura 3.20).

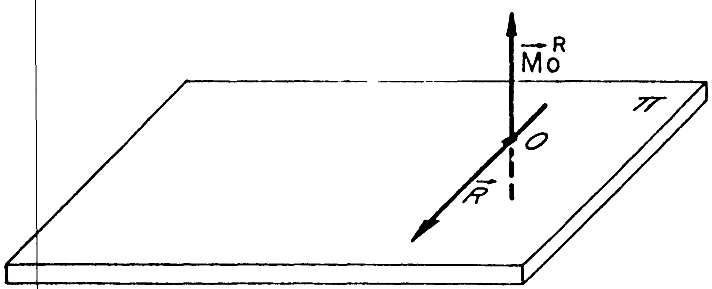


Fig 3.20

Se localiza un punto P en dicho plano y se coloca un sistema en equilibrio como se indica en la figura 3.21.

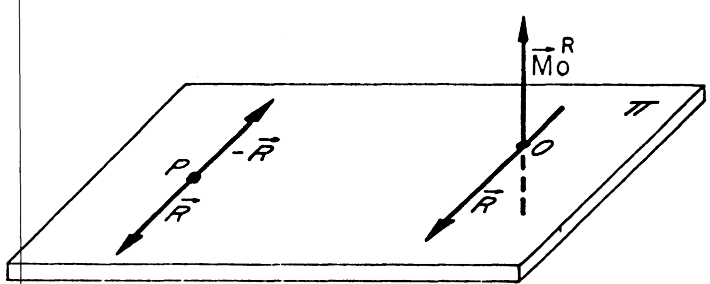


Fig 3.21

Evidentemente los sistemas son equivalentes y además se ha creado un par de transporte con la peculiaridad que su momento se puede hacer igual a $\vec{M}_O^R$, pero de sentido opuesto, lo anterior se logra ubicando adecuadamente el punto P, ya que de lo contrario no se tendrá que $\vec{m}_T = -\vec{M}_O^R$, figura 3.22.

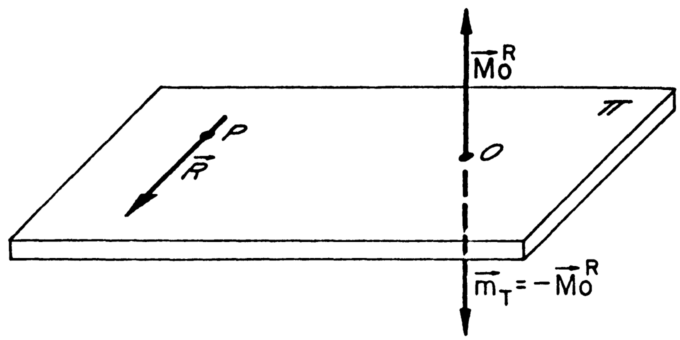


Fig 3.22

La suma de $\vec{M}_O^R$ y $\vec{m}_T$ se anula, quedando exclusivamente la fuerza $\vec{R}$ pero aplicada al punto P, figura 3.23.

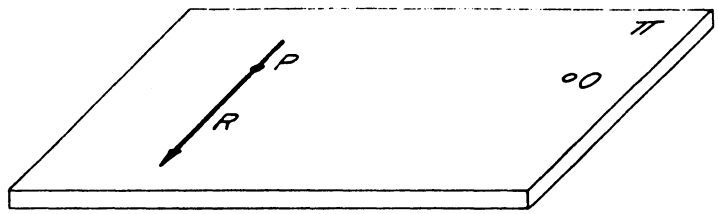


Fig 3.23

Resumiendo, cuando las coordenadas vectoriales de un sistema de fuerzas son diferentes de cero y $\vec{R}$ y $\vec{M}_O^R$ son perpendiculares, es posible reducir el sistema a una sola fuerza que no pase por el origen, cuyo vector es el mismo que $\vec{R}$, (figura 3.24).

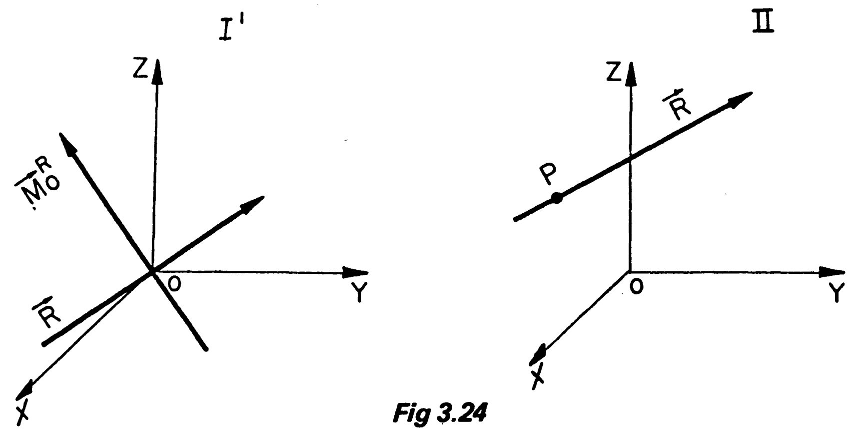


Fig 3.24

De acuerdo al esquema anterior, los sistemas I' y II necesariamente deben ser equivalentes y como se conoce $\vec{R}$, lo único que cabría aclarar es la localización del punto P Pues bien, dado que, los sistemas son equivalentes, se deben cumplir las ecuaciones correspondientes, es decir:

$$\vec{R}_{I'} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}^{i}_{I'} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}^{i}_{II} = \vec{R}_{II}$$

evidentemente la ecuación anterior se cumple.

Analizando ahora la expresión de momentos:

$$\vec{M}o^{R} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \times \vec{F}^{i}_{I'}) = \sum_{i=1}^{1} \vec{r}_i \times \vec{R}^{i}_{II} = \vec{M}o_{II}$$

Ya que se tiene una sola fuerza en el sistema II, su momento con respecto al origen necesariamente debe ser igual a $\vec{M}^{R}_{O}$, entonces:

$$\vec{r}_p \times \vec{R}_{II} = \vec{M}o^{R}$$

Se desconocen las coordenadas del punto P, pero se puede suponer un punto cualquiera en el espacio P(X,Y,Z) y como

$$\vec{r}_p \times \vec{R} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ X & Y & Z \\ Rx & Ry & Rz \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (YRz - ZRy)\,i \\ -(XRz - ZRx)\,j \\ +(XRy - YRx)\,k \end{array}$$

y dado que son vectores, es posible formar un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$(YRz - ZRy) = Mox^{R} \qquad - - - \qquad 3.7$$

$$-(XRz - ZRx) = Moy^{R} \qquad - - - \qquad 3.8$$

$$(XRy - YRx) = Moz^{R} \qquad - - - \qquad 3.9$$

cuya solución proporcionará las coordenadas del punto buscado.

Como Mox^{R}, Moy^{R} y Moz^{R} representan los momentos del sistema original con respecto a los ejes X, Y y Z respectivamente, se puede señalarlos como M_x, M_y y M_z, y si las ecuaciones anteriores no independientes se expresan en forma simétrica, es posible indicar:

$$\frac{YRz - MX}{Ry} = Z \qquad - - - \quad 3.10$$

$$\frac{My + XRz}{Rx} = Z \qquad - - - \quad 3.11$$

e igualando estas expresiones:

$$\frac{Y\ Rz - Mx}{Ry} = \frac{XRz + My}{Rx} = Z$$

$$Z = \frac{X + \frac{My}{Rz}}{\frac{Rx}{Rz}} = \frac{Y - \frac{Mx}{Rz}}{\frac{Ry}{Rz}} \qquad — —— \quad 3.12$$

ecuación que corresponde a la del llamado ''Eje Central'' que se define como: ''*El lugar geométrico de todos los puntos del espacio tridimensional con respecto a los cuales el momento del sistema es de módulo mínimo*''.

De cualquier manera, como puede proporcionarse cualquier punto de la línea de acción de la fuerza y en virtud de que las fuerzas se pueden considerar como vectores deslizantes, en lugar de escoger un punto cualquiera P(X,Y,Z), es posible seleccionar el punto en el cual la línea de acción de la fuerza intersecte a cualquiera de los planos coordenados, esto es, $P_1(X_1,Y_1,0)$ $P_2(X_2,0,Y_2)$ ó $P_3(0,Y_3,Z_3)$.

Conviene aclarar que deberá analizarse el vector fuerza ya que, dependiendo de la dirección de dicho vector, intersectará o no a los planos coordenados, por lo que es conveniente observar las siguientes posibilidades:

$\vec{R} = Xi + Yj + Zk$	$P_1(X_1,Y_1,0)$,	$P_2(X_2,0,Z_2)$,	$P_3(0,Y_3,Z_3)$
$\vec{R} = Xi + Yj$		$P_2(X_2,0,Z_2)$,	$P_3(0,Y_3,Z_3)$
$\vec{R} = Xi + Zk$	$P_1(X_1,Y_1,0)$		$P_3(0,Y_3,Z_3)$
$\vec{R} = Yj + Zk$	$P_1(X_1,Y_1,0)$	$P_2(X_2,0,Z_2)$	
$\vec{R} = Xi$			$P_3(0,Y_3,Z_3)$
$\vec{R} = Yj$		$P_2(X_2,0,Z_2)$	
$\vec{R} = Zk$			$P_3(X_3,Y_3,0)$

Concluyendo, para seleccionar el punto de aplicación de la resultante bastará con anular cualquiera de las coordenadas cuando la fuerza tenga componente en esa dirección.

c) *Teorema General de Momentos.* Este teorema establece que *el momento de una fuerza respecto a un punto es igual a la suma de los momentos, respecto a dicho punto, de sus componentes.*

Al hablar de componentes de una fuerza, se hace referencia a sistemas de fuerzas concurrentes; sin embargo el teorema es aplicable a cualquier sistema reductible a una sola fuerza.

Si se considera un sistema de fuerzas actuando en una partícula P, como se muestra en la figura 3.25.

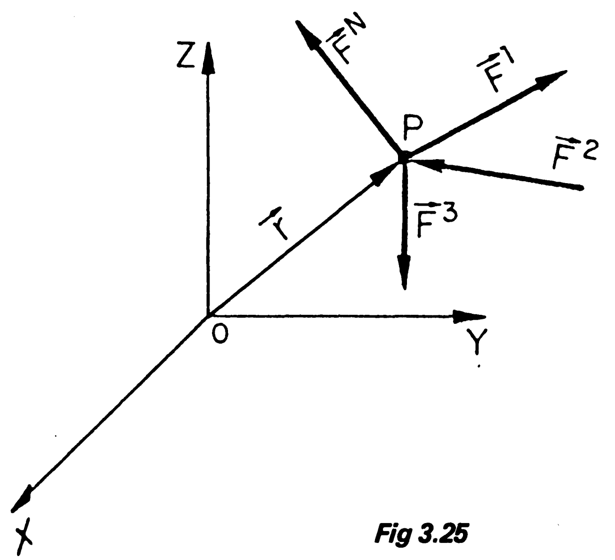


Fig 3.25

dicho sistema es posible sustituirlo por una sola fuerza, cuya línea de acción contiene a la partícula citada, mediante la aplicación del Postulado de Stevinus, sí y sólo si $\vec{R} \neq \vec{0}$, de tal forma que:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}^i$$

y si se llama $\vec{r}$ al vector de posición de P, el momento de dicha fuerza con respecto al origen del marco de referencia es:

$$\vec{M}_O^R = \vec{r} \times \vec{R}$$

Ahora bien, la suma de los momentos de cada una de las componentes del sistema, también con respecto al origen, resulta:

$$\Sigma\ \vec{M}_O^{i} = \vec{r} \times \vec{F}^1 + \vec{r} \times \vec{F}^2 + \vec{r} \times \vec{F}^3 + \ldots + \vec{r} \times \vec{F}^N$$

Mediante la propiedad distributiva del producto vectorial, se puede expresar:

$$\Sigma\ \vec{M}_O^{i} = \vec{r} \times (\vec{F}^1 + \vec{F}^2 + \vec{F}^3 + \ldots + \vec{F}^n)$$

y como por Stevinus,

$$\vec{R} = \vec{F}^1 + \vec{F}^2 + \vec{F}^3 + \ldots + \vec{F}^n$$

finalmente se tiene que:

$$\vec{M}_O^{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O^{i}$$

que demuestra el enunciado del teorema planteado.

Cabe aclarar que este Teorema es de particular relevancia ya que su aplicación es de suma importancia para temas como Centroides y Momentos de Inercia.

3.5.4. _Motor._ Cuando las coordenas vectoriales de un sistema de fuerzas son diferentes de cero y la resultante ($\vec{R}$) y el momento con respecto al origen ($\vec{M}_O^R$) no son perpendiculares entre sí, se dice que la reducción es un _motor, entendiéndose éste como una fuerza y un momento, ambos ubicados en la misma línea de acción_ (figura 3.26).

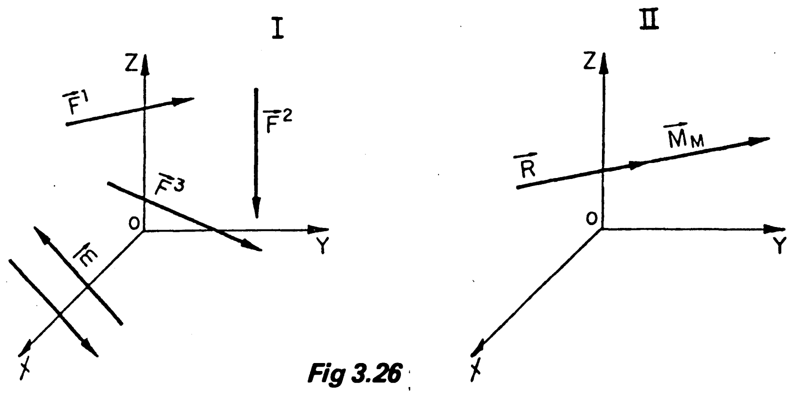


Fig 3.26

Supóngase que se obtiene una fuerza y un momento en el origen, dados por las coordenadas vectoriales del sistema, y que se hace pasar un plano π que contiene a la línea de acción de la fuerza (figura 3.27).

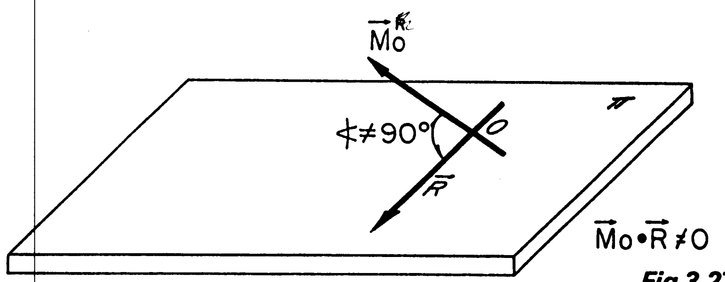


Fig 3.27

Ahora bien, el momento $\vec{M}_O^R$ será descompuesto en dos componentes ortogonales; una contenida en el citado plano π y la otra perpendicular al mismo (figura 3.28).

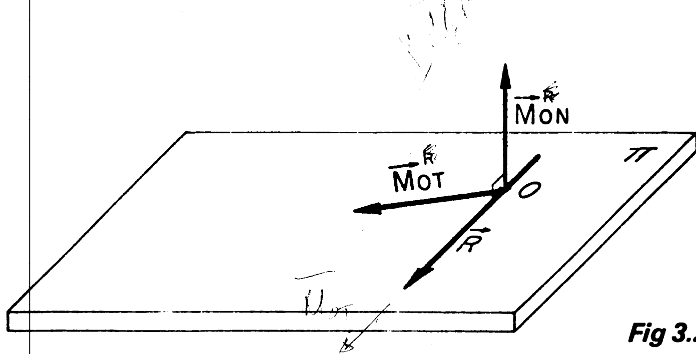


Fig 3.28

Obsérvese que $\vec{M}_{O_N}^R$ y $\vec{R}$ son ortogonales y que $\vec{M}_{O_T}^R$ y $\vec{R}$ son coplanos, en base a la primera aseveración se puede trasladar la fuerza $\vec{R}$ a un punto (A) del plano π lográndose, así, eliminar el momento $\vec{M}_{O_N}^R$ con la aparición del par de transporte (figura 3.29).

Ahora se tienen la resultante y un momento, ambos en el plano π, localizados en el punto A.

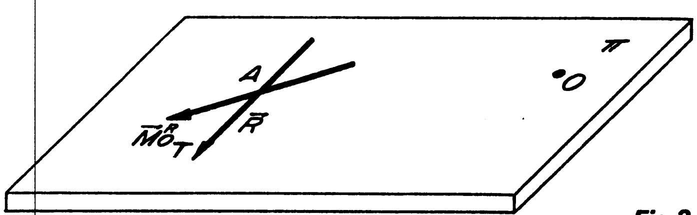


Fig 3.29

El momento $\vec{M}_{O1}^{R}$ es posible descomponerlo nuevamente en forma ortogonal, pero logrando que una de las componentes se encuentre en la línea de acción de $\vec{R}$, y la otra sea perpendicular a la misma (figura 3.30).

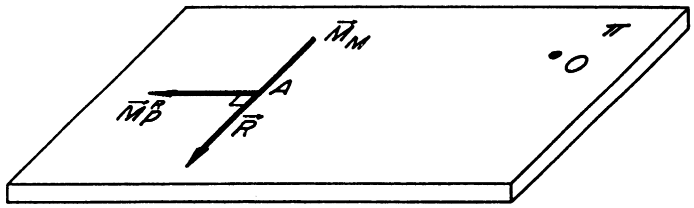


Fig. 3.30

Como $\vec{R}$ y $\vec{M}_P^R$ son ortogonales, si se traslada nuevamente la fuerza, pero ahora en un plano normal al π se logrará anular a $\vec{M}_P^R$, sin embargo no hay forma de eliminar a $\vec{M}_M$, puesto que cualquier nueva posición de $\vec{R}$, paralela a su posición actual, producirá un par con un momento, cuya representación será perpendicular a $\vec{M}_M$ y por lo tanto, se descarta la posibilidad de alguna cancelación. La combinación de $\vec{R}$ y $\vec{M}_M$ forma el <u>*motor*</u> ya mencionado y a la reducción efectuada se le conoce como <u>*"reducción canónica"*</u> (figura 3.31).

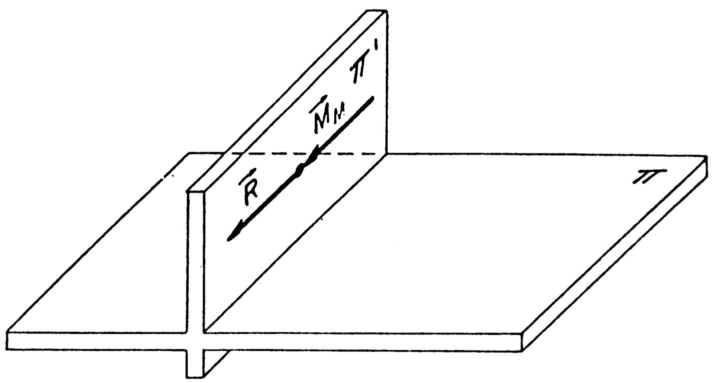


Fig 3.31

Para determinar el vector par del motor $\vec{M}_M$ bastará con descomponer ortogonalmente el momento original $\vec{M}_O$ en dirección de la resultante, lo cual se logra fácilmente con un producto escalar,

$$\vec{M}_M = (\vec{M}_O \cdot \vec{e}_R)\, \vec{e}_R$$

en donde $\vec{e}_R$ representa el valor unitario de la resultante.

Un punto de aplicación de la fuerza resultante del motor se obtendrá en forma similar al de una sola fuerza, con la salvedad de que será necesario sumar el momento del motor ($\vec{M}_M$)

$$\vec{r}p \times \vec{R} + \vec{M}_M = \vec{M}o$$

lo que dará lugar a que la ecuación del eje central sea:

$$\frac{X + \left(\frac{-M_y^R + M_{My}}{Rz}\right)}{\frac{-Rx}{Rz}} = \frac{Y + \left(\frac{-M_x^R + M_{Mx}}{Rz}\right)}{\frac{Ry}{Rz}} = Z \qquad 3.13$$

Ejemplo 3.9. Demostrar que el sistema de fuerzas que se muestra en la figura 3.32, se reduce al equilibrio.

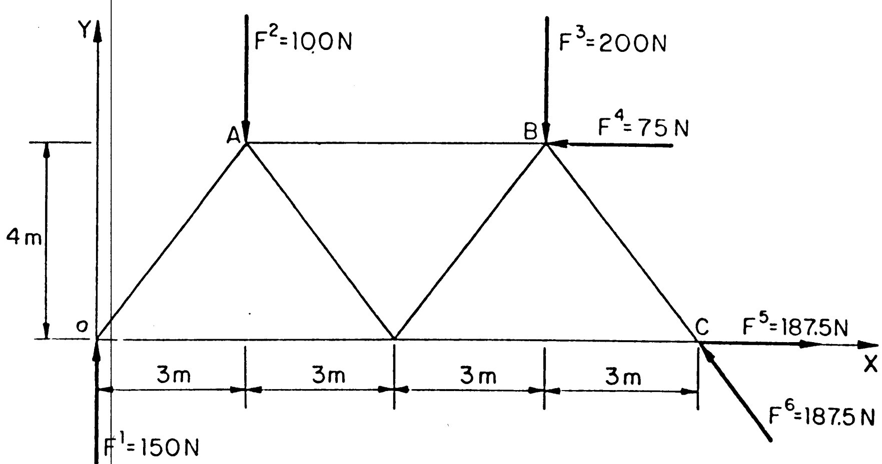


Fig 3.32

Solución.

1.- Se calculan los vectores equipolentes y los momentos de cada fuerza con respecto al origen.

$$\vec{F}^1 = 150j \ [N]$$
$$\vec{F}^2 = -100j \ [N]$$
$$\vec{F}^3 = -200j \ [N]$$
$$\vec{F}^4 = -75i \ [N]$$
$$\vec{F}^5 = +187.5i \ [N]$$

$$\vec{F}^6 = 187.5 \ \left(\frac{-3i + 4j}{\sqrt{25}}\right) = -112.5i + 150j \ [N]$$

$$\vec{M}_O^1 = \vec{0} \ [N \cdot m]$$

$$\vec{M}_O^2 = -300k \ [N \cdot m]$$

$$\vec{M}_O^3 = -1800k \ [N \cdot m]$$

$$\vec{M}_O^4 = 300k \ [N \cdot m]$$

$$\vec{M}_O^5 = \vec{0} \ [N \cdot m]$$

$$\vec{M}_O^6 = 1800k \ [N \cdot m]$$

2.- Ahora se obtienen las coordenadas vectoriales del sistema, para ello se realiza la suma de fuerzas y de momentos.

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{6} \vec{F}^i = 0i + 0j + 0k \ [N]$$
$$\vec{M}_O^R = \sum_{i=1}^{6} (\vec{r}_i \times \vec{F}^i) = 0i + 0j + 0k \ [N \cdot m]$$

3.- Por lo anterior se concluye que el sistema se reduce al equilibrio.

Ejemplo 3.10. Determinar el momento del par de fuerzas al que se reduce el sistema de fuerzas de la figura 3.33 (cuadrícula de 1 m por lado).

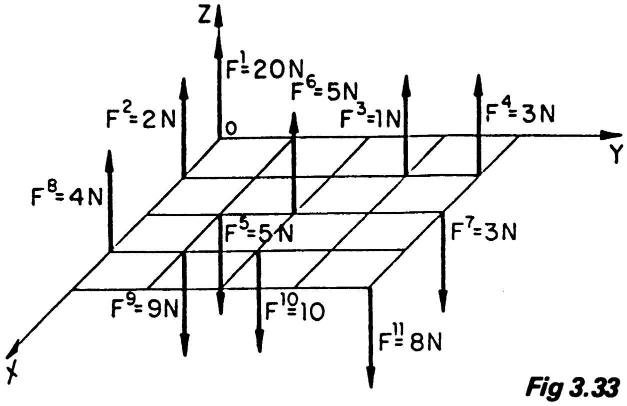


Fig 3.33

Solución

1.- Vectores equipolentes y momentos con respecto al origen:

$$\vec{F}^1 = 20k \ [N] \qquad \vec{M}_O^1 = \vec{0} \ [N \cdot m]$$
$$\vec{F}^2 = 2k \ [N] \qquad \vec{M}_O^2 = -2j \ [N \cdot m]$$
$$\vec{F}^3 = k \ [N] \qquad \vec{M}_O^3 = 3i - j \ [N \cdot m]$$
$$\vec{F}^4 = 3k \ [N] \qquad \vec{M}_O^4 = 12i - 3j \ [N \cdot m]$$
$$\vec{F}^5 = -5k \ [N] \qquad \vec{M}_O^5 = -5i + 10j \ [N \cdot m]$$
$$\vec{F}^6 = 5k \ [N] \qquad \vec{M}_O^6 = 10i - 10j \ [N \cdot m]$$
$$\vec{F}^7 = -3k \ [N] \qquad \vec{M}_O^7 = -12i + 6j \ [N \cdot m]$$
$$\vec{F}^8 = 4k \ [N] \qquad \vec{M}_O^8 = -12j \ [N \cdot m]$$
$$\vec{F}^9 = -9k \ [N] \qquad \vec{M}_O^9 = -9i + 27j \ [N \cdot m]$$
$$\vec{F}^{10} = -10k \ [N] \qquad \vec{M}_O^{10} = -20i + 30j \ [N \cdot m]$$
$$\vec{F}^{11} = -8k \ [N] \qquad \vec{M}_O^{11} = -32i + 32j \ [N \cdot m]$$

2.- Coordenadas Vectoriales:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{11} \vec{F}^i = 0i + 0j + 0k \ [N]$$

$$\vec{M}_O^R \ \sum_{i=1}^{11} (\vec{r}_i \times \vec{F}^i) = -53i + 77j + 0k \ [N \cdot m]$$

3.- Conclusiones. El sistema de fuerzas se reduce a un par, pues la resultante es nula y el momento del sistema es diferente a cero, así el momento del par de fuerzas al que se reduce el sistema está dado por el vector libre:

$$\vec{m} = -53i + 77j \ [N \cdot m]$$

Ejemplo 3.11. Verificar que el sistema de fuerzas que actúan en el punto O del tornapunta de la figura 3.34 se reduce a una sola fuerza que pasa por dicho punto. Obtener las características de dicha fuerza.

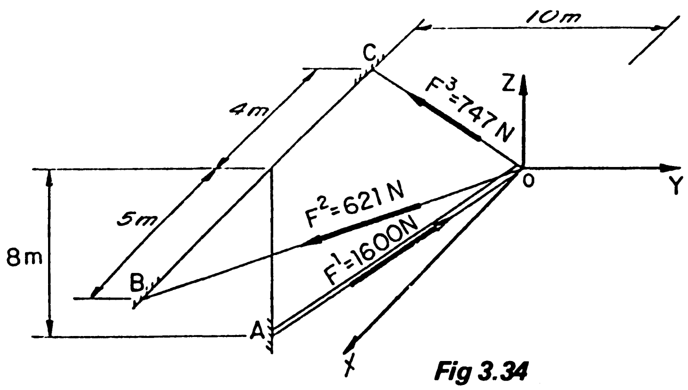


Fig 3.34

Solución.

1.- Primeramente se determinan los vectores equipolentes y los momentos con respecto al origen.

$$\vec{F}^1 = 1600 \left(\frac{10j+8k}{\sqrt{164}} \right) = 1249.39j+999.51K \ [N]$$

$$\vec{F}^2 = 621 \left(\frac{5i-10j}{\sqrt{125}} \right) = 277.72i - 555.44j \ [N]$$

$$\vec{F}^3 = 747 \left(\frac{-4i-10j}{\sqrt{116}} \right) = -277.43i - 693.57j \ [N]$$

Como es claro el momento de todas las fuerzas con respecto al origen es nulo.

$$\vec{M}O^1 = \vec{0} \ [N \cdot m] \qquad \vec{M}O^2 = \vec{0} \ [N \cdot m] \qquad \vec{M}O^3 = \vec{0} \ [N \cdot m]$$

2.- Así, las coordenadas vectoriales son:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{3} \vec{F}^i = 0.29i + 0.38j + 999.51k \ [N]$$

$$\vec{M}_O^R = \sum_{i=1}^{3} (\vec{r}_i \times \vec{F}^i) = 0i + 0j + 0k \ [N \cdot m]$$

3.- El sistema se reduce a una fuerza que pasa por el origen y dicha fuerza es: $\vec{R} = 0.29i + 0.38j + 999.51k$[N] O(0,0,0) [m].

Ejemplo 3.12. En la sección de la presa de la figura 3.35 actúa el sistema de fuerzas que se indica. Determinar la fuerza resultante y un punto de su línea de acción sobre la recta AB.

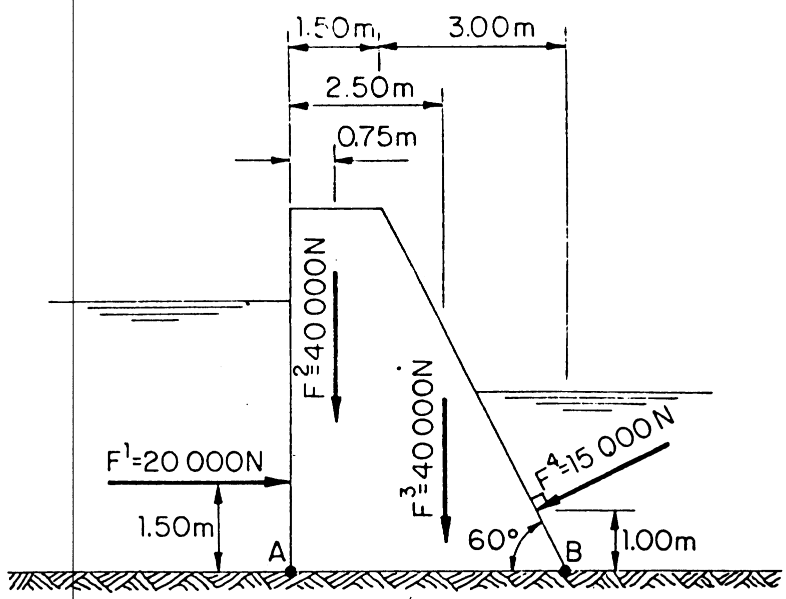


Fig 3.35

Solución.

1.- Si se ubica el sistema de ejes de manera tal que el origen coincida con el punto A, y el eje X con la recta AB, los vectores equipolentes son:

$$\vec{F}^1 = 20000i \; [N]$$
$$\vec{F}^2 = -40000j \; [N]$$
$$\vec{F}^3 = -40000j \; [N]$$
$$\vec{F}^4 = 15000(-\cos 30° i - \cos 60° j) = -12990i - 7500j \; [N]$$

y los momentos con respecto al origen:

$$\vec{M}o^1 = -30\,000\ k \; [N \cdot m]$$
$$\vec{M}o^2 = -30\,000\ k \; [N \cdot m]$$
$$\vec{M}o^3 = -100\,000\ k \; [N \cdot m]$$
$$\vec{M}o^4 = +12990\ k - 29419k = -16429\ k \; [N \cdot m]$$

2.- Coordenadas vectoriales:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{4} \vec{F}^i = 7010i - 87500j \; [N]$$

$$\vec{M}o^R = \sum_{i=1}^{4} \vec{r}_i \times \vec{F}^i = -176429\ k \; [N \cdot m]$$

3.- Perpendicularidad:

$$\vec{R} \cdot \vec{M}o^R = 0$$

Por lo que se tiene una fuerza que no pasa por el origen.

4.- Selección del punto de aplicación.

$$P\ (X, 0, Z)$$

5.- Cáculo de $\vec{r}_p \times \vec{R}$

$$\vec{r}_p \times \vec{R} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ X & 0 & Z \\ 7010 & -87500 & 0 \end{vmatrix} = 87500Zi + 7010Zj - 87500X\ k$$

6.- Igualando momentos $\vec{r}_p \times \vec{R} = \vec{M}_O{}^R$:

$$87500\,Z = 0 \qquad - - - - \quad a$$

$$7010Z = 0 \qquad - - - - \quad b$$

$$-87500X = -176429 \qquad - - - - \quad c$$

De las cuales se obtiene:

$$Z = 0 \qquad X = 2.016 \ \text{m}$$

7.- Conclusiones. El sistema se reduce a una sola fuerza $\vec{R} = 7010i - 87500j$ [N] que pasa por el punto P(2.016,0,0) [m].

Ejemplo 3.13. La estructura dada en la figura 3.36 representa un árbol con las masas B y C de compensación, sostenido por los cojinetes O y D Sobre el árbol ejercen su acción las cargas de 100 N y de 50 N, cuyas direcciones son perpendiculares al árbol. Despreciando el peso de éste, el de las masas y sin tomar en cuenta las fuerzas en los cojinetes, encontrar el motor resultante.

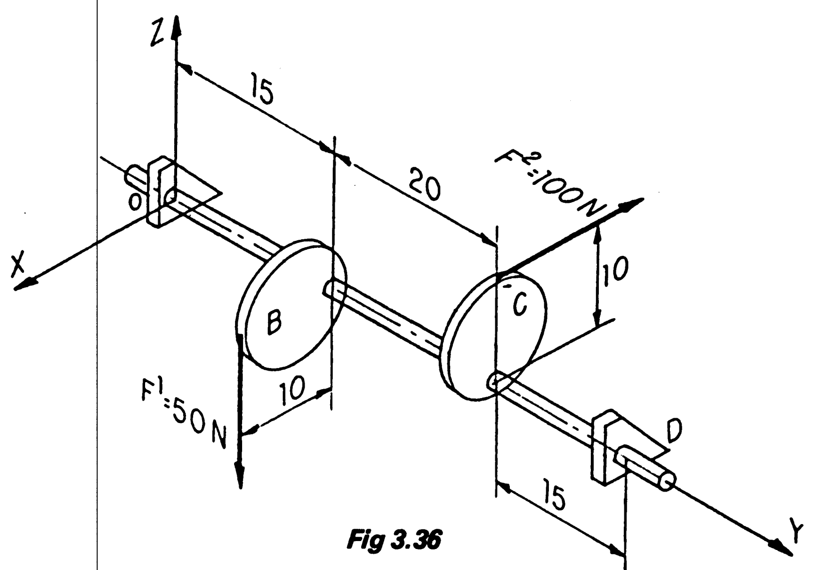


Fig 3.36

Solución.

1.- Cálculo de los vectores equipolentes y los momentos con respecto al origen:

$$\vec{F}^1 = -50\ k\ [N]$$

$$\vec{F}^2 = -100i\ [N]$$

$$\vec{M}o^1 = -750i + 500j\ [N \cdot cm]$$

$$\vec{M}o^2 = -1000j + 3500\ k\ [N \cdot cm]$$

2.- Coordenadas vectoriales:

$$\vec{R} = -100i - 50k\ [N]$$

$$\vec{M}o^R = -750i - 500j + 3500\ k\ [N \cdot cm]$$

3.- Perpendicularidad:

$$\vec{R} \cdot \vec{M}o^R = 75000 - 175\ 000 \neq 0$$

por lo que se puede reducir a un motor, dado que se trata de una fuerza y un par no coplanos.

4.- Cálculo del momento del motor:

$$\vec{M}_M = (\vec{M}o^R \cdot \vec{e}_R)\ \vec{e}_R$$

$$\vec{e}_R = \frac{-100i - 50k}{\sqrt{10000+2500}} = -0.8944i - 0.4472k$$

$$\vec{M}o^R \cdot \vec{e}_R = 670.82 - 1564.25 = -894.43$$

$$\vec{M}_M = -894.43\ (-.8944i - 0.4472k) = 799.98i + 399.99\ k\ [N \cdot cm]$$

5.- Selección del punto de aplicación:

$$P\ (\ 0,\ Y,\ Z\ )$$

6.- Suma e igualación de momentos:

$$\vec{r}_P \times \vec{R} + \vec{M}_M = \vec{M}o^R$$

$$\vec{r}_P \times \vec{R} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & Y & Z \\ -100 & 0 & -50 \end{vmatrix} = (-50Y)i - (100Z)j + (100Y)k$$

$-50y + 799.98 = -750$ . . . . . a

$-100Z + 0 = -500$ . . . . . b

$100y + 399.99 = 3500$ c

De la solución de las ecuaciones a y b se obtiene:

$Y = 31$ cm $\qquad Z = 5$ cm

7 - Conclusiones. El sistema se reduce a un motor formado por una fuerza $\vec{R} = -100i - 50k$ [N] y un momento $\vec{M}_M = 799.98i + 399.99k$ [N · cm] que pasa por el punto P(0,31,5) [cm].

3.6 CONFIGURACION DE LOS DIFERENTES SISTEMAS DE FUERZAS Y SUS POSIBLES CASOS DE REDUCCION

Con el objeto de facilitar la determinación de los distintos casos de reducción, conviene analizar los diferentes sistemas de fuerzas y obtener las posibilidades de reducción para cada uno de ellos.

3.6.1. *Sistema de fuerzas colineales. Es un sistema en el cual todas las fuerzas poseen la misma línea de acción o soporte,* por lo que es conveniente ubicar el origen del sistema en ésta y orientar uno de los ejes en dirección del soporte. En estas condiciones los casos de reducción factibles son:

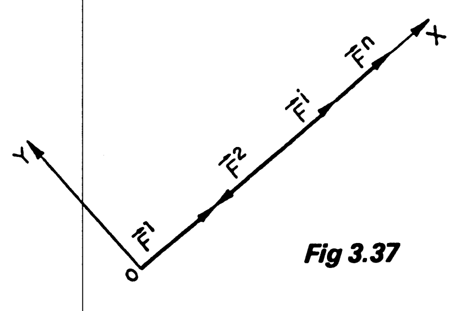
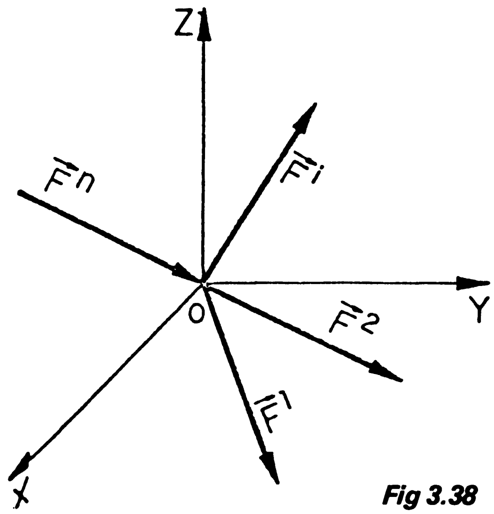


Fig 3.37

a) Equilibrio
b) Una fuerza
   i) Que pasa por el origen

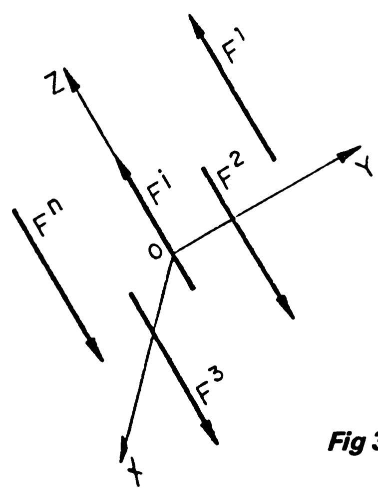
3.6.2. <u>*Sistema de fuerzas concurrentes.*</u> <u>*Se denomina así en virtud de que las líneas de acción de las diferentes fuerzas tienen un punto común,*</u> por lo cual es conveniente hacer coincidir el origen con dicho punto, presentándose entonces, para tal sistema, las siguientes posibilidades de reducción:



a) Equilibrio
b) Una fuerza
   i) Que pasa por el origen

Fig 3.38

3.63. <u>*Sistema de fuerzas paralelas.*</u> <u>*Son los sistemas en los cuales los soportes de las fuerzas son paralelos.*</u> Así, por facilidad, se ubica el origen sobre algunas de las fuerzas y se hace coincidir uno de los ejes **con la línea de acción de cualquiera de las fuerzas,** y los casos de reducción pueden ser:



a) Equilibrio
b) Par de fuerzas
c) Una fuerza
   i) Que pasa por el origen (caso extraordinario)
   ii) Que no pasa por el origen

Fig 3.39

Naturalmente la resultante $\vec{R}$ y el momento $\vec{M}_O$ siempre serán perpendiculares por lo que es imposible la existencia de un motor. Así mismo, la presencia de una fuerza que pase por el origen resulta un caso extraordinario ya que, como la selección del origen es arbitraria, es muy difícil que dicha selección sea tan atinada.

3.6.4. *Sistema de fuerzas general:*

a) *En el plano.* Como su nombre lo indica *es un sistema que incluye todos los tipos de fuerzas coplanares, o dicho de otra manera es un sistema de fuerzas que no son ni concurrentes ni paralelas.* Ya que se ubica en un plano, no es posible la existencia de un motor dado que la resultante y el momento siempre son perpendiculares. Así, los casos de reducción que pueden presentarse son:

a) Equilibrio
b) Par de fuerzas
c) Una fuerza
   i) Que pasa por el origen (caso extraordinario)
   ii) Que no pasa por el origen

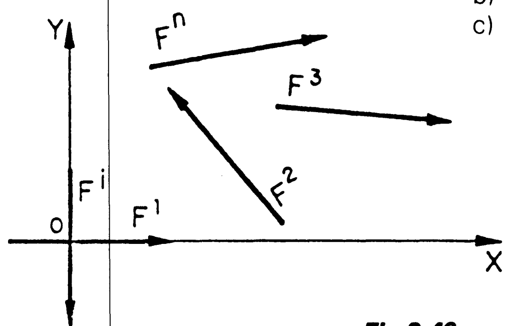


Fig 3.40

b) *En el espacio. Este es el único caso que acepta todos los tipos de reducción como posibles y el único factible de presentar un motor ya que la resultante y el momento pudieran no ser perpendiculares.*

a) Equilibrio
b) Par de fuerzas
c) Una fuerza
   i) Que pasa por el origen (caso extraordinario)
   ii) Que no pasa por el origen
d) Motor

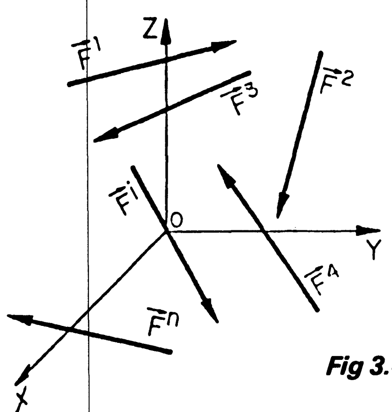


Fig 3.41

Ejemplo 3.14. Obtener la resultante del sistema de fuerzas que actúa en la placa de la figura 3.42.

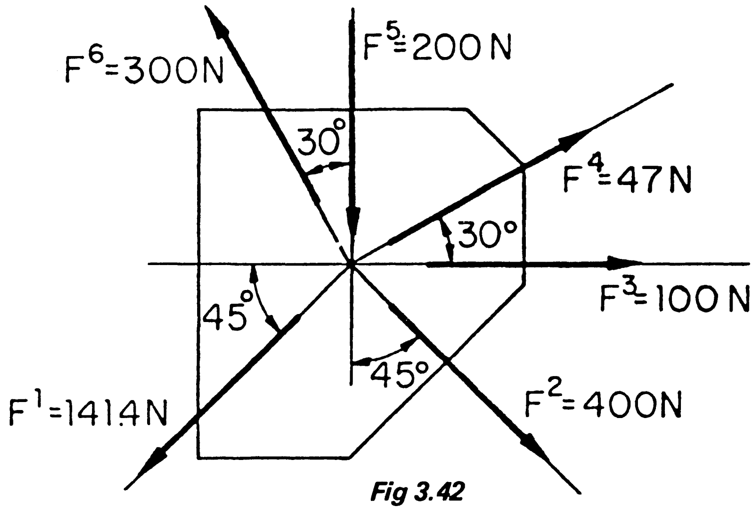


Fig 3.42

Solución. En vista de tenerse un sistema de fuerzas concurrentes en el plano, las únicas posibilidades de reducción son el equilibrio y una fuerza que pase por el origen. Para la solución, se ubicará el origen en el punto de concurrencia y el eje "X" se hará coincidir con la línea de acción de F^3.

1.- Vectores equipolentes:

1.- Vectores equipolentes:

$\vec{F}^1 = -100i - 100j$ [N]

$\vec{F}^2 = 282.8i - 282.8j$ [N]

$\vec{F}^3 = 100i$ [N]

$\vec{F}^4 = 40.7i + 23.5j$ [N]

$\vec{F}^5 = -200j$ [N]

$\vec{F}^6 = -150i + 259.8j$ [N]

2.- Coordenadas vectoriales:

$\vec{R} = 173.5i - 299.5j$ [N]

$\vec{M}_O^R = \vec{0}$

3.- Conclusiones. El sistema se reduce a una fuerza $\vec{R} = 173.5i - 299.5j$ [N] que pasa por el origen.

Ejemplo 3.15. Determinar las características de la resultante del sistema de fuerzas que se aplica a la armadura de la figura (3.43).

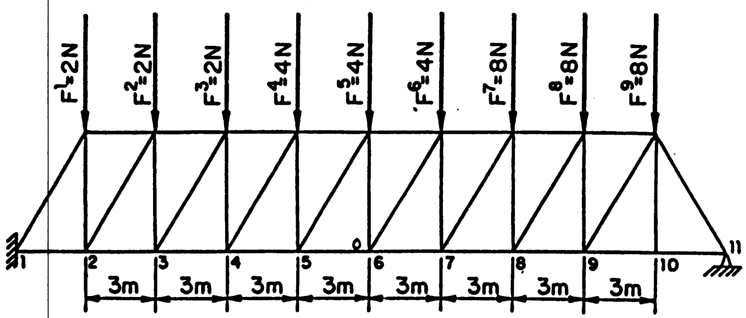


Fig 3.43

Solución. Ya que se tiene un sistema de fuerzas paralelas en el plano y como el sentido de todas las fuerzas constitutivas es hacia abajo, la resultante tiene que ser una sola fuerza. Se tratará de encontrar sus características, haciendo coincidir el origen con el punto 6 y tomando el eje "Y" coincidente con F^5.

1.- Vectores equipolentes y momentos.

$\vec{F}^1 = -2j$ [N]	$\vec{M}_O^1 = 24k$ [N · m]
$\vec{F}^2 = -2j$ [N]	$\vec{M}_O^2 = 18k$ [N · m]
$\vec{F}^3 = -2j$ [N]	$\vec{M}_O^3 = 12k$ [N · m]
$\vec{F}^4 = -4j$ [N]	$\vec{M}_O^4 = 12k$ [N · m]
$\vec{F}^5 = -4j$ [N]	$\vec{M}_O^5 = \vec{0}$ [N · m]
$\vec{F}^6 = -4j$ [N]	$\vec{M}_O^6 = -12k$ [N · m]
$\vec{F}^7 = -8j$ [N]	$\vec{M}_O^7 = -48k$ [N · m]
$\vec{F}^8 = -8j$ [N]	$\vec{M}_O^8 = -72k$ [N · m]
$\vec{F}^9 = -8j$ [N]	$\vec{M}_O^9 = -96k$ [N · m]

2.- Coordenadas vectoriales.

$\vec{R} = -42j$ [N] $\qquad$ $\vec{M}_O^R = -162k$ [N · m]

3.- Perpendicularidad:

$\vec{R} \cdot \vec{M}_O^R = 0$ por lo que se tiene una fuerza que no pasa por el origen.

4.- Selección del punto de aplicación
P (x,0,Z)

5.- Cálculo de $\vec{r}_p \times \vec{R}$:

$$\vec{r}_p \times \vec{R} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ X & 0 & Z \\ 0 & -42 & 0 \end{vmatrix} = 42Zi - 4Xk \; [\,N \cdot m\,]$$

6.- Igualación de momentos:

$$\vec{r}_p \times \vec{R} = \vec{M}o^R$$

$$42Zi - 42\,Xk = -162k$$

de donde $\quad Z = 0 \quad y \quad X = 3.857\ m$

7.- Conclusiones: El sistema se reduce a una fuerza $\vec{R} = -42j$ [N] que pasa por P(3.857,0,0) [m].

Ejemplo 3.16. Encontrar el sistema equivalente más simple, del sistema de fuerzas que actúa en la porción de armadura que se indica en la figura 3.44.

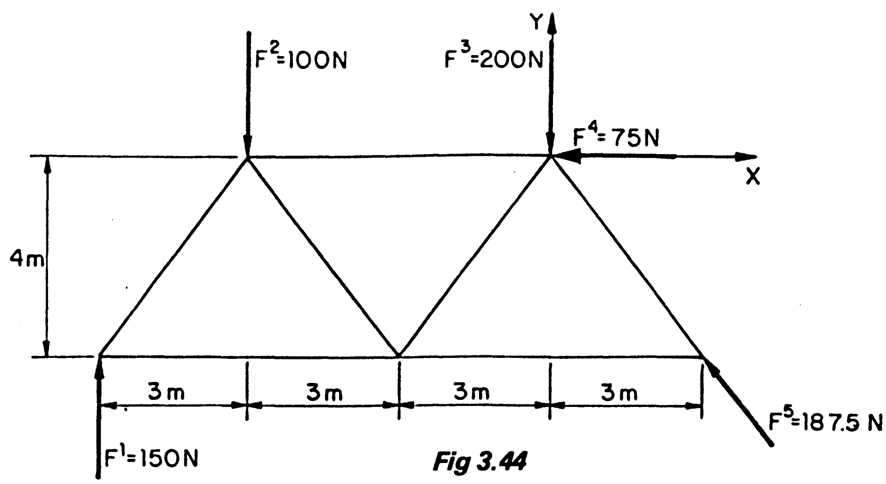


Fig 3.44

Solución. Ya que se presenta un sistema de fuerzas general en el plano, las posibilidades son de equilibrio, par de fuerzas y de una sola fuerza.

1.- Vectores equipolentes y momentos:

$\vec{F}^1 = 150j$ [N]	$\vec{M}_O^1 = -1350k$ [N • m]
$\vec{F}^2 = -100j$ [N]	$\vec{M}_O^2 = 600k$ [N • m]
$\vec{F}^3 = -200j$ [N]	$\vec{M}_O^3 = \vec{0}$ [N • m]
$\vec{F}^4 = -75i$ [N]	$\vec{M}_O^4 = \vec{0}$ [N • m]
$\vec{F}^5 = -112.5i + 150j$ [N]	$\vec{M}_O^5 = \vec{0}$ [N • m]

2.- Coordenadas vectoriales:

$\vec{R} = -187.5i$ [N] $\vec{M}_O^R = -750k$ [N • m]

3.- Perpendicularidad:
$\vec{R} \cdot \vec{M}_O^R = 0$ entonces se tendrá, como sistema equivalente, a una fuerza que no pasa por el origen.

4.- Selección del punto de aplicación:
P(0,Y,Z)

5.- Cálculo de $\vec{r}_p \times \vec{R}$:

$$\vec{r}_p \times \vec{R} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & Y & Z \\ -187.5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -187.5Zj + 187.5Yk \text{ [N • m]}$$

6.- Igualando $\vec{r}_p \times \vec{R} = \vec{M}_O$

$$-187.5Zj + 187.5Yk = -750k$$

$$Y = -4m, \; Z = 0$$

7.- Conclusiones. El sistema equivalente más simple es una fuerza $\vec{R} = -187.5i$ [N] que pasa por el punto P(0,-4,0) [m].

Ejemplo 3.17. Sobre una placa rectangular homogénea y rígida, actúan las fuerzas que se indican en el croquis. Obtener el sistema equivalente más simple (figura 3.45).

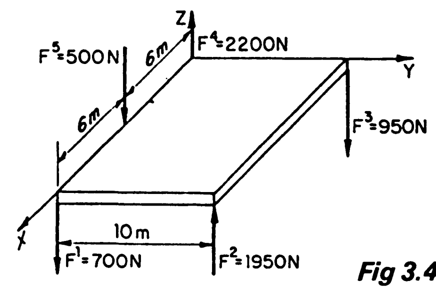


Fig 3.45

Solución. Como es un sistema de fuerzas paralelo en el espacio se puede tener equilibrio, par de fuerzas o una fuerza como casos de equivalencia más simple.

1.- Vectores equipolentes y momentos:

$\vec{F}^1 = -700k$ [N] $\qquad \vec{M}_O^1 = 8400j$ [N · m]

$\vec{F}^2 = 1950k$ [N] $\qquad \vec{M}_O^2 = 19500i - 23400j$ [N · m]

$\vec{F}^3 = -950k$ [N] $\qquad \vec{M}_O^3 = -9500i$ [N · m]

$\vec{F}^4$ 2200k [N] $\qquad \vec{M}_O^4 = \vec{0}$ [N · m]

$\vec{F}^5 = -500k$ [N] $\qquad \vec{M}_O^5 = 3000j$ [N · m]

2.- Coordenadas vectoriales:

$\vec{R} \cdot 2000k$ [N], $\vec{M}_O^R = 10000i - 12000j$ [N · m]

3.- Perpendicularidad:

$\vec{R} \cdot \vec{M}_O^R = 0$ por lo cual se tendrá una fuerza que no pasa por el origen.

4.- Selección del punto de aplicación:

P(X,Y,0)

5.- Cálculo de $\vec{r}_p \times \vec{R}$:

$$\vec{r}_p \times \vec{R} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ X & Y & 0 \\ 0 & 0 & 2000 \end{vmatrix} = 2000Yi - 2000Xj \quad [N \cdot m]$$

6.- Igualación de momentos:

$$\vec{r}_p \times \vec{R} = \vec{M}o^{R}$$

$2000Y = 10\ 000$ $\qquad$ $Y = 5$ m

$-2000X = -12\ 000$ $\qquad$ $X = 6$ m

7.- Conclusiones. El sistema solicitado está formado por una sola fuerza $\vec{R} = 2000k$ [N] que pasa por el punto P(6,5,0) [m].

Ejemplo 3.18. Un árbol horizontal que descansa sobre dos cojinetes A y B lleva perpendicularmente al eje una polea de radio $r_1 = 20$ cm y un cilindro de radio $r_2 = 15$ cm (figura 3.46).

El árbol se pone en rotación mediante una correa que pasa por la polea; al mismo tiempo se levanta una carga W de peso despreciable.

Determinar el sistema equivalente mas simple.

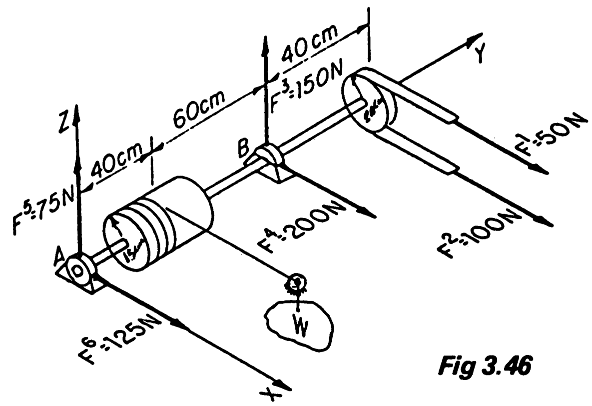


Fig 3.46

Solución. En este sistema se tienen todas las posibilidades de reducción dado que es un conjunto general de fuerzas en el espacio.

1.- Vectores equipolentes y momentos:

$\vec{F}^1 = 50i$ [N]	$\vec{M}o^1 = +1000j-7000k$ [N·cm]
$\vec{F}^2 = 100i$ [N]	$\vec{M}o^2 = -2000j-14000k$ [N·cm]
$\vec{F}^3 = 150k$ [N]	$\vec{M}o^3 = 15000i$ [N·cm]
$\vec{F}^4 = 200i$ [N]	$\vec{M}o^4 = -20000k$ [N·cm]
$\vec{F}^5 = 75k$ [N]	$\vec{M}o^5 = \vec{0}$ [N·cm]
$\vec{F}^6 = 125i$ [N]	$\vec{M}o^6 = \vec{0}$ [N·cm]

2.- Coordenadas vectoriales:

$$\vec{R} = 475i + 225k \; [N]$$
$$\vec{Mo}^R = 15\ 000i - 1000j - 41000k \; [N \cdot cm]$$

3.- Perpendicularidad:

$$\vec{R} \cdot \vec{Mo}^R = (475i+225k) \cdot (15000i-1000j-41000k)$$
$$= 7\ 125000+0-9225000 = 2100\ 0000$$

Por tal motivo el sistema se reduce a un motor.

4.- Momento del motor:

$$\vec{M}_M = (\vec{Mo}^R \cdot \vec{e}_R)\ \vec{e}_R$$

$$\vec{e}_R = \frac{475i+225k}{\sqrt{225625+50625}} = \frac{475i+ 225k}{525.5949} = 0.9037i + 0.4281\ k$$

$$\vec{Mo}^R \cdot \vec{e}_R = 13555.55 - 17552.10 = -3996.55$$
$$\vec{M}_M = -3611.68i - 1710.92k \; [N \cdot cm]$$

5.- Selección del punto de aplicación:

P(0,Y,Z)

6.- Cálculo de $\vec{r}_p \times \vec{R}$:

$$\vec{r}_p \times \vec{R} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & Y & Z \\ 475 & 0 & 225 \end{vmatrix} = 225Yi + 475Zj - 475Yk$$

7.- Suma e igualación de momentos:

$$\vec{r}_p \times \vec{R} + \vec{M}_M = \vec{Mo}$$

$$(225Y-3611.68)i+475Zj+ (-475Y-1710.92)k=$$
$$15000i-1000j-41000k$$

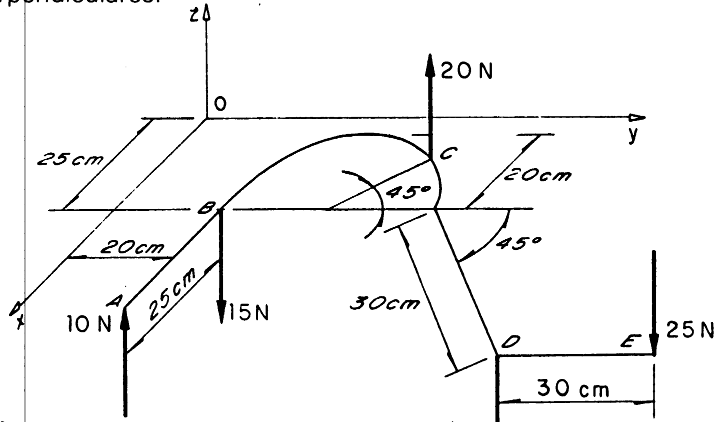
Así:

$$225Y - 3611.68 = 15000 \rightarrow \quad Y = 82.718\ cm$$
$$475Z = -1000 \rightarrow \quad Z = -2.105\ cm$$

8.- Conclusiones: El sistema se reduce a un motor formado por una fuerza $\vec{R}$ = 475i + 225k [N] y un momento $\vec{M}_M$ = -3611.68i-1710.92k [N · cm] cuyo punto de aplicación es P (0,82.718,2.105) [cm].

3.7 PROBLEMAS PROPUESTOS

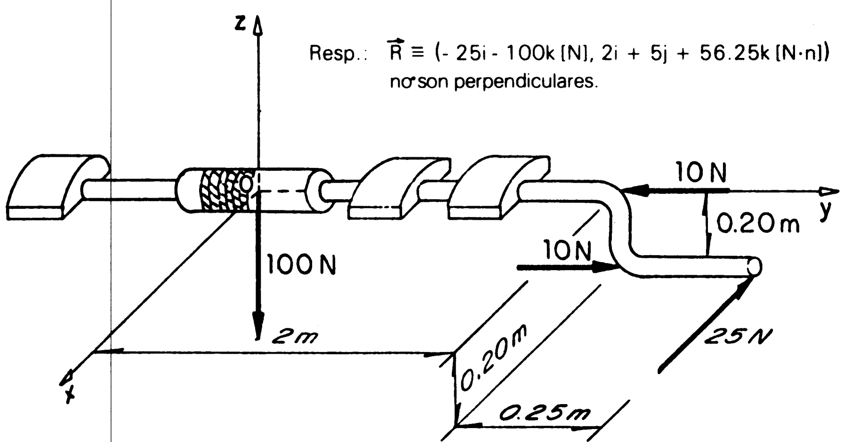
Problema 3.1. La varilla doblada ABCDE se ubica en el plano XY. Calcular las coordenadas vectoriales del sistema de cargas verticales aplicado a dicha varilla. Determinar si el momento $\vec{M}_O^R$ y la resultante $\vec{R}$ son perpendiculares.



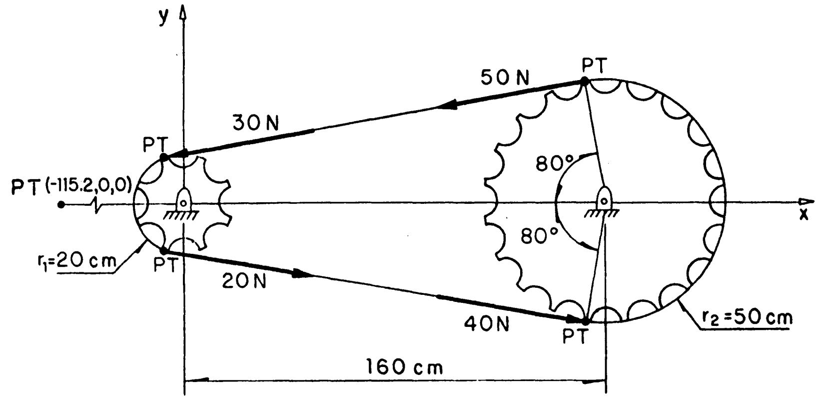
Resp. $\vec{R}$ ≡ (- 40k [N], - 4233.84i + 2199.6j [N·m])
si son perpendiculares.

Problema 3.2. Obtener las coordenadas vectoriales del sistema de fuerzas activo que actúa en el malacate de la figura y averiguar si las componentes de dichas coordenadas son perpendiculares.

Resp.: $\vec{R}$ ≡ (- 25i - 100k [N], 2i + 5j + 56.25k [N·n])
no son perpendiculares.

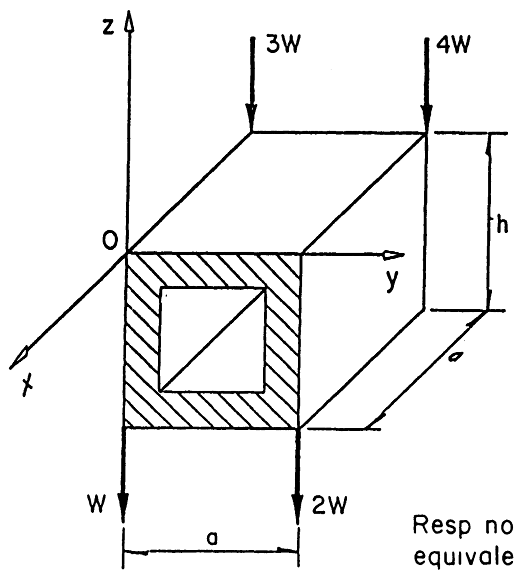


Problema 3.3. En el conjunto de las ruedas dentadas y la cadena actúan las cuatro fuerzas indicadas en la figura. Demostrar que dicho sistema es equivalente a la fuerza $\vec{F} = -19.68i-24.3j$ [N] aplicada en el punto (226.3,0,0) [cm].



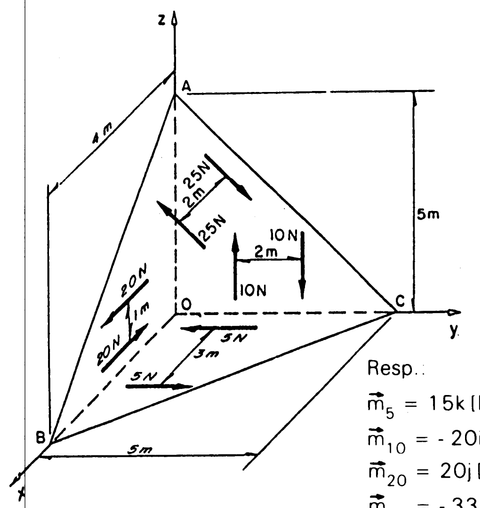
PT= Punto de tangencia de la cadena y los engranes
P, en cm

Problema 3.4. Averiguar si el sistema de fuerzas aplicado en la caja de la figura es equivalente a una fuerza $\vec{R} = -10Wk$ aplicada en el punto P(-0.3a, 0.6a, -0.5h).



Resp no son equivalentes

Problema 3.5. En las caras del tetraedro ABCO actúan los pares de fuerzas que se indican en la figura. Obtener el vector momento producido por cada uno de ellos.



Resp.:

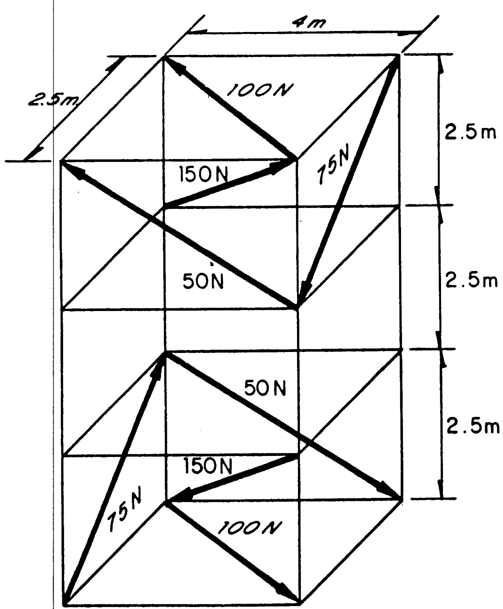
$\vec{m}_5 = 15k\,[N \cdot m]$

$\vec{m}_{10} = -20i\,[N \cdot m]$

$\vec{m}_{20} = 20j\,[N \cdot m]$

$\vec{m}_{25} = -33.11i - 26.49j - 26.49k\,[N \cdot m]$

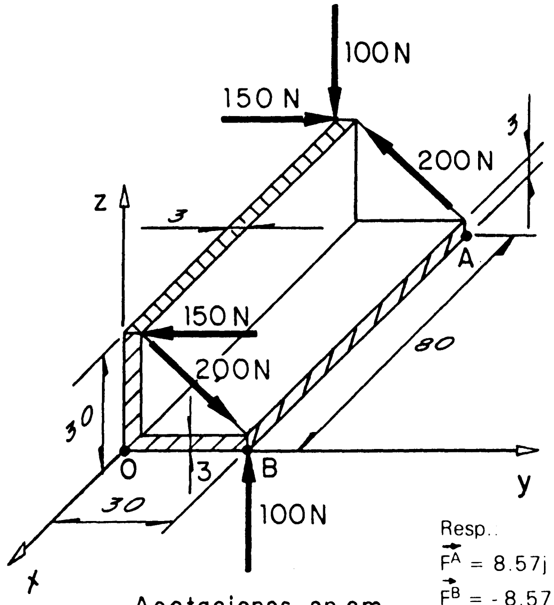
Problema 3.6. En la estructura de la figura, actúan los pares de fuerzas que se muestran. Hallar la magnitud del vector par total producido por los pares citados.



Resp.:

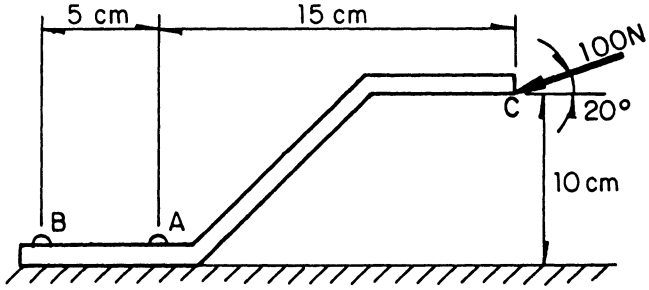
$\vec{m}_{TOT} = 73.725i + 152.637j - 145.288k\,[N \cdot m]$

Problema 3.7. Determinar las fuerzas, aplicadas en los puntos O y A, de manera tal que formen un par de fuerzas, cuyo momento sea igual al, que producen los pares que actúan en la sección L de la figura.



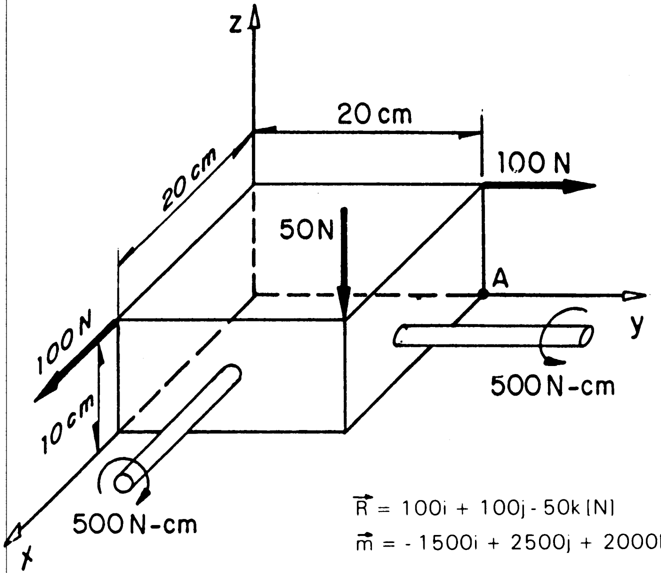
Resp.:
$\vec{F}^A = 8.57j + 41.42k$ [N]
$\vec{F}^B = -8.57j - 41.42k$ [N]

Problema 3.8. Se aplica una fuerza 100 N de magnitud a una placa de sección Z. Hallar el sistema-par equivalente en el punto B.



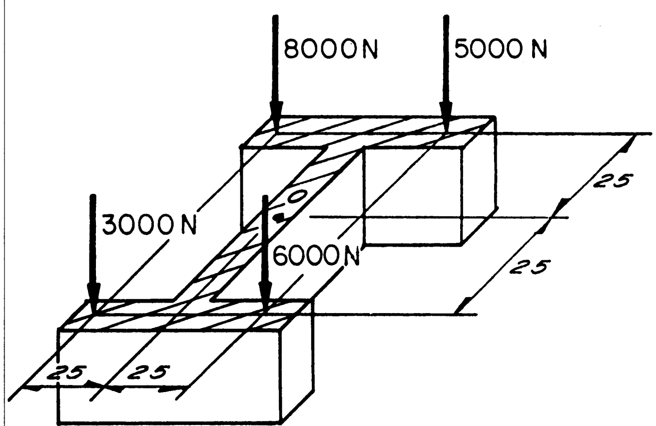
Resp.:
$\vec{F}^B = -93.97i - 34.2j$ [N]
$\vec{m} = 255.7k$ [N·cm]

Problema 3.9. Sustituir el sistema de fuerzas que actúa sobre el prisma de la figura, por un sistema equivalente, aplicado en A.



$\vec{R} = 100i + 100j - 50k$ [N]
$\vec{m} = -1500i + 2500j + 2000k$ [N·cm]

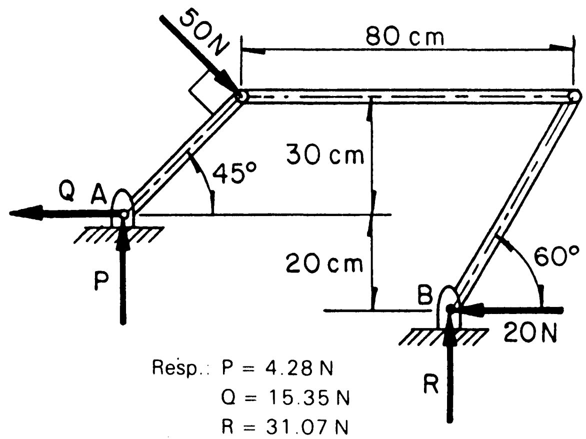
Problema 3.10. Se aplica un sistema de fuerzas, excéntricamente a la columna de la figura. Hallar el sistema equivalente aplicado en el punto O.



Acotaciones, en cm

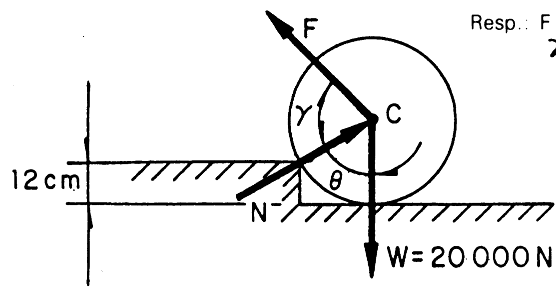
Resp.: $\vec{R} = -22\,000k$ [N]
$\vec{m} = -100\,000j$ [N·cm]

Problema 3.11. En el mecanismo de cuatro articulaciones de la figura, actúa el sistema de fuerzas mostrado. Determinar las magnitudes de las reacciones P, Q y R para que dicho sistema se reduzca al equilibrio.



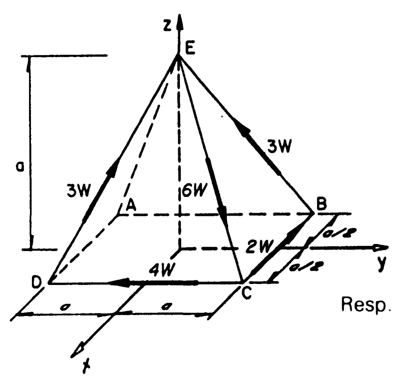
Resp.: P = 4.28 N
Q = 15.35 N
R = 31.07 N

Problema 3.12. La rueda de la figura tiene 48 cm de diámetro y pesa 20 000 N. Determinar la dirección y la magnitud mínima de la fuerza F, para que el sistema de fuerzas que se indica sea capaz de lograr que la rueda salte el obstáculo.



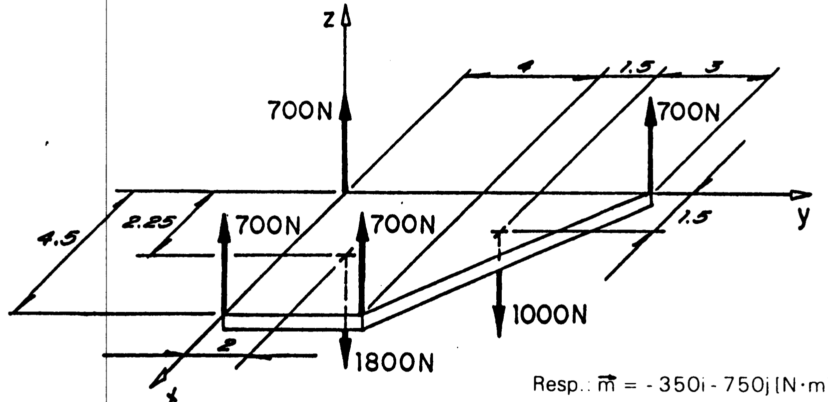
Resp.: F > 17 320.5 N
$\gamma = 90°$

Problema 3.13. Encontrar el sistema más simple equivalente al sistema de fuezas mostrado en la figura.



Resp.: El sistema se reduce a un par de fuerzas
$\vec{m} = -4aWi + 2aWj$

Problema 3.14. En la placa de la figura se aplica el sistema de fuerzas mostrado. Determinar las características del par de fuerzas al que se reduce tal sistema.

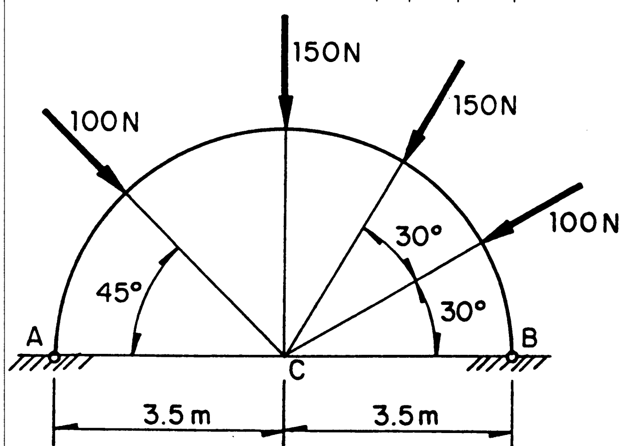


Resp.: $\vec{m} = -350i - 750j$ [N·m]

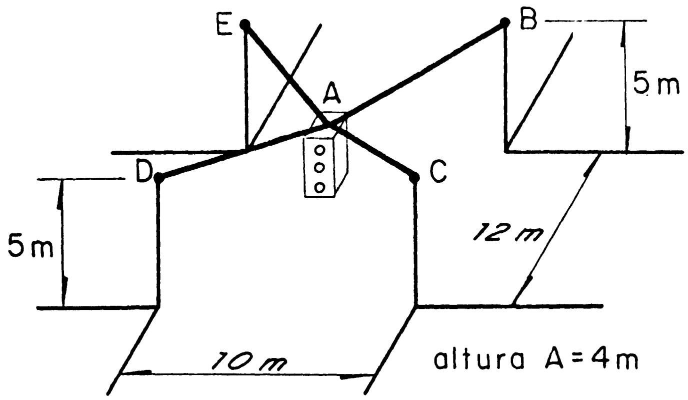
Acotaciones, en m

Problema 3.15. Sobre el arco de la figura actúa el conjunto de fuerzas que se indica. Calcular el sistema más simple equivalente al sistema activo indicado.

Resp.: El sistema se reduce a una sola fuerza $\vec{R} = -90.89i - 400.61j$ [N] que pasa por el punto C.

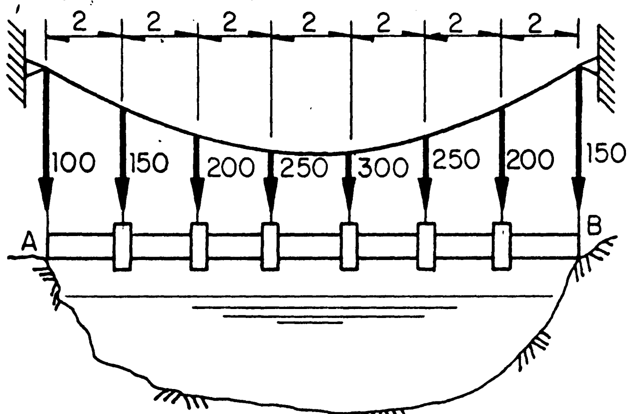


Problema 3.16. Un semáforo se encuentra sujeto a la acción de los cables AB, AC, AD y AE cuyas tensiones son de 50 N, 75 N, 50 N y 75 N respectivamente. Obtener la magnitud de la fuerza a la que se reduce el sistema de fuerzas aplicado sobre dicho semáforo, el cual se localiza en el centro del crucero y la altura de cada poste es la misma.



Resp.: $|\vec{R}| = 31.75$ N

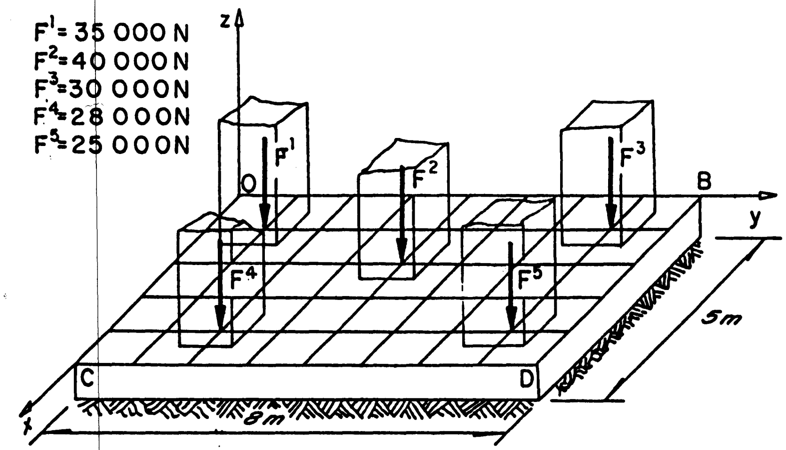
Problema 3.17. El cable que sostiene el puente colgante de la figura, se encuentra bajo la acción del sistema de fuerzas mostrado. Determinar la fuerza a la que se reduce el sistema mencionado y un punto de aplicación de la misma sobre la recta AB.



Acotaciones, en m
Fuerzas, en N

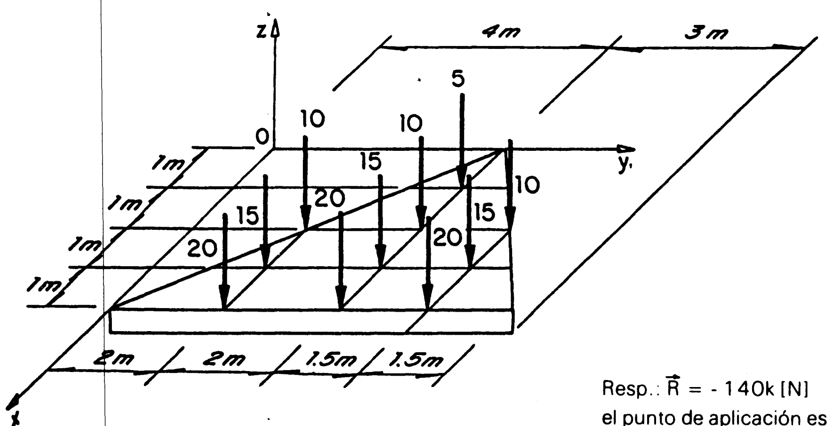
Resp.: $\vec{R} = -1600\mathbf{j}$ [N] y pasa 7.5 m a la derecha de A.

Problema 3.18. Un sistema de columnas descansa en la losa de cimentación, como se muestra en la figura, transmitiéndole las fuerzas cuyas magnitudes se indican. Calcular la resultante de dichas fuerzas. (Cuadrícula de 1 metro por lado).



Resp.: $\vec{R}$ = - 158000k [N]
y pasa por el punto
P(2.259,4.025,0) [m]

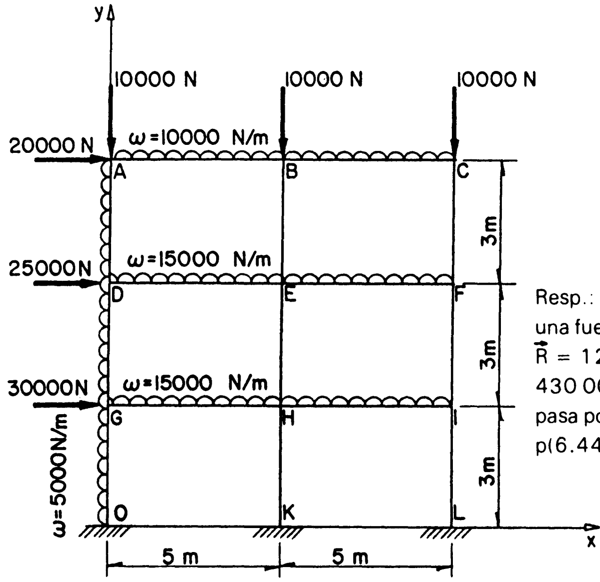
Problema 3.19. Sobre la placa triangular de la figura se distribuye la presión en forma similar a la representada. Determinar la resultante de esta distribución y ubicar el punto de aplicación (centro de presión) de la misma.



Fuerzas, en N

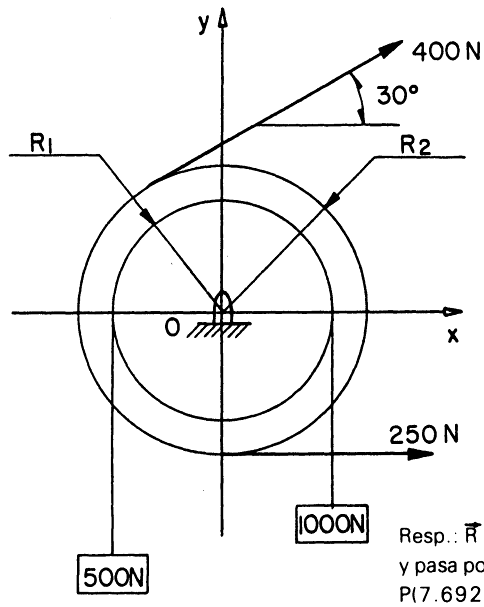
Resp.: $\vec{R}$ = - 140k [N]
el punto de aplicación es
P(3.142,3.839,0) [m]

Problema 3.20. En el marco de un edificio, actúan las fuerzas activas que se ilustran en la figura. Reducir el sistema de fuerzas, al sistema más simple que le sea equivalente.



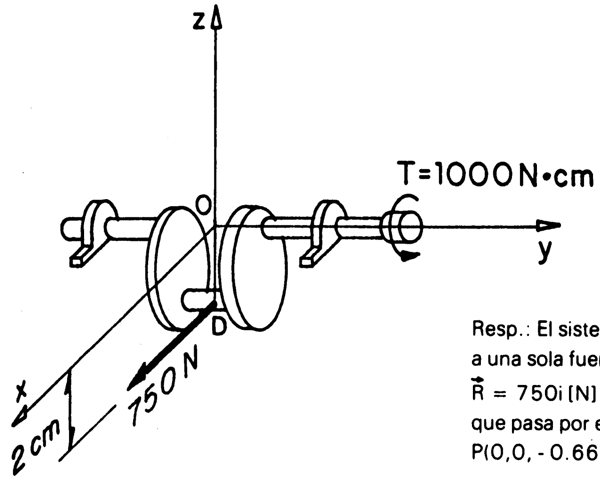
Resp.: Se reduce a una fuerza $\vec{R}$ = 120 000i - 430 000j [N] y pasa por el punto p(6.44,0,0) [m]

Problema 3.21. Las poleas de radio R_1 = 12.5 cm y R_2 = 25 cm, mostradas en la figura, están unidas de manera tal que actúan como un cuerpo rígido. Determinar la fuerza resultante del sistema de fuerzas que se aplica a las mismas. Proporcionar la ecuación del eje central.



Resp.: $\vec{R}$ = 596.4i - 1300j [N] y pasa por el punto P(7.692,0,0) [cm]

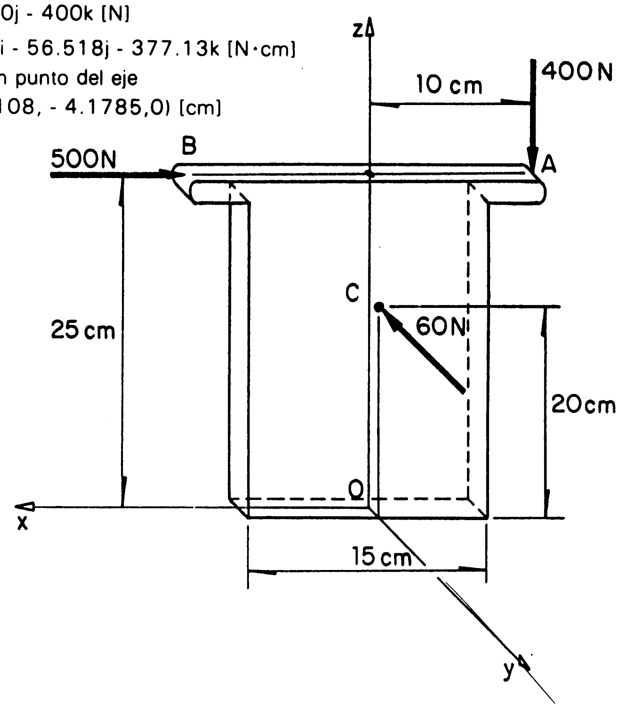
Problema 3.22. Obtener el sistema equivalente, más simple, al conjunto de fuerza-momento que se aplica al dispositivo de la figura.



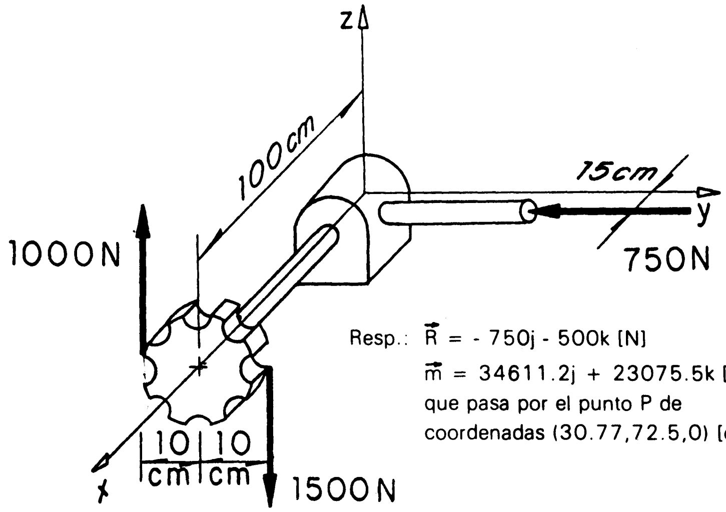
Resp.: El sistema se reduce a una sola fuerza
$\vec{R} = 750i$ [N]
que pasa por el punto
P(0,0, - 0.666) [cm]

Problema 3.23. Tres fuerzas se aplican a los puntos A, B y C de un poste corto de acero. Determinar las componentes del motor y la ecuación del eje central del sistema equivalente más simple.

Resp.: $\vec{R}$ = - 500i - 60j - 400k [N]
$\vec{m}$ = - 417.43i - 56.518j - 377.13k [N·cm]
que pasa por un punto del eje central P(- 41.108, - 4.1785,0) [cm]



Problema 3.24. El sistema de fuerzas mostrado en la figura se reduce a un motor. Obtenerlo.



Resp.: $\vec{R} = -750j - 500k$ [N]

$\vec{m} = 34611.2j + 23075.5k$ [N·cm]

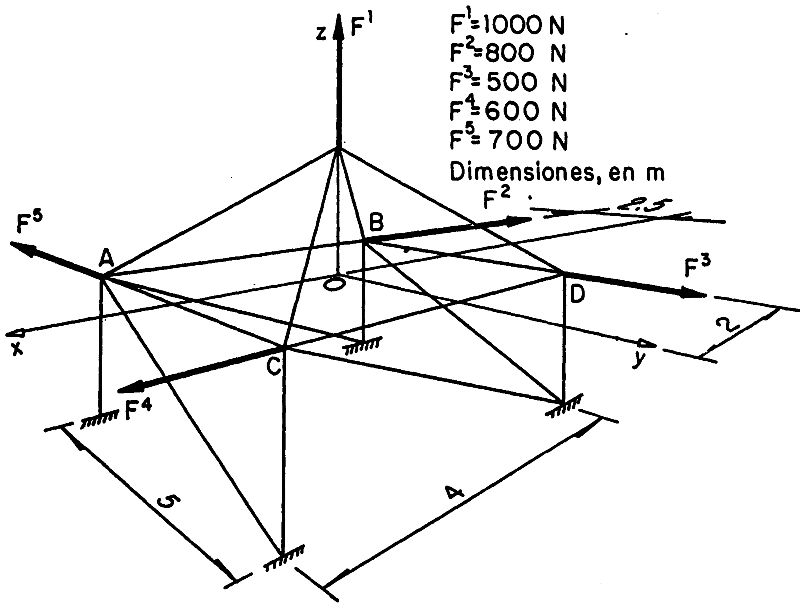
que pasa por el punto P de coordenadas (30.77,72.5,0) [cm]

Problema 3.25. Obtener el motor al que se reduce el sistema de fuerzas activo de la armadura de la figura.

Resp.: $\vec{R} = -200i - 200j + 1000k$ [N]

$\vec{m} = 1092.59i + 1092.59j - 5462.95k$ [N·m]

y pasa por P(1.0926, - 1.0926,0) [cm]



3.8 BIBLIOGRAFIA

1. Apuntes de Mecánica I. Facultad de Ingeniería, U.N.A.M. Tercera Edición. 1982.

2. Mecánica Vectorial para Ingenieros. Ferdinand P. Beer, E. Russell Johnston Jr. Estática. Tercera edición. 1984. Mc Graw Hill.

3. Mecánica para Ingenieros. Ferdinand L. Singer. Estática. 1979. Harla.

4. Ingeniería Mecánica. Irving H. Shames. Estática 1979. Herrero Hermanos. Prentice-Hall.

5. Estática. Jerry H. Ginsberg. 1980. Nueva Editorial Interamericana. John Wiley and Sons.

6. Mecánica para Ingenieros. R.C. Hibbeler. Estática. 1982. Editorial Continental. (C.E.C.S.A.).

7. Engineering Mechanics. T.C. Huang. Statics. 1967. Addison Wesley.

El diseño y la impresión se realizaron en la
Unidad de Difusión de la Facultad de Ingeniería