

# Micromecánica de un Acelerómetro

## 3.1 Sistemas para Medición de Vibraciones

En este capítulo se describen los elementos que permiten modelar un sistema para medición de vibraciones. En general, son cuatro los elementos que conforman a un sensor de este tipo: 1) uno o más elementos de inercia, o masa de prueba, para generar una fuerza debida a una aceleración o incluso una desaceleración; 2) elementos de rigidez, o una suspensión en forma de uno o varios resortes elásticos, para proveer a la masa un soporte mecánico y regresarla a su posición de equilibrio, una vez retirada la fuerza; 3) elementos de disipación, o amortiguamiento, para controlar el movimiento de la masa de prueba y poder obtener una respuesta en frecuencia favorable, usualmente es el volumen del aire o un ambiente controlado, dentro de la cavidad interna del dispositivo; y 4) un método para medir el desplazamiento de la masa, el cual convierte el desplazamiento mecánico a una salida eléctrica.

En este capítulo se tratarán a detalle solo los 3 primeros elementos antes mencionados y en el siguiente capítulo se estudiará a detalle el método de sensado.

Cada uno de estos elementos tiene características diferentes de excitación-respuesta; la excitación está en la forma de una fuerza o momento, y la respuesta correspondiente está en la forma de un desplazamiento, velocidad o aceleración. La naturaleza de estas relaciones puede ser lineal o no lineal. Además, deben considerarse las fuerzas y momentos aplicados externamente y las alteraciones provenientes de desplazamientos y/o velocidades iniciales. Las unidades asociadas con estos elementos y sus símbolos mas usados se muestran en la Tabla 3.1.

Movimiento	Nomenclatura	Unidades
Traslación	Masa, $m$	kg
	Rigidez, $k$	N/m
	Amortiguamiento, $c$	N*s/m
	Fuerza externa, $F$	N
Rotación	Momento de inercia de la masa, $I$	kg*m <sup>2</sup>
	Rigidez, $k_t$	N*m/rad
	Amortiguamiento, $c_t$	N*m*s/rad
	Momento externo, $M$	N*m

Tabla 3.1 Unidades de los elementos que constituye un sensor inercial y sus símbolos convencionales. [11]

### 3.1.1 Elemento de Inercia: Masa de Prueba

El movimiento de traslación de una masa se describe como el movimiento a lo largo de la trayectoria que sigue el centroide. La propiedad de inercia asociada depende solo de la masa

total del sistema y es independiente de la forma como se distribuye la masa en el sistema. Sin embargo, para un movimiento rotacional, la propiedad de inercia es una función de la distribución de la masa, momento de inercia de la masa, el cual se define con respecto a su centroide o a un punto fijo  $O$ . Cuando la masa oscila con respecto a un punto fijo  $O$ , su inercia rotatoria  $I_O$  es.

$$I_O = I_G + md^2 \quad 3.1$$

Donde  $m$  es la masa del elemento,  $I_G$  es el momento de inercia de la masa con respecto al centroide y  $d$  es la distancia desde el centro de gravedad hasta el punto  $O$ . Los momentos de inercia  $I_G$  e  $I_O$  de la Ec. 3.1 están definidos con respecto a los ejes normales al plano de la masa. Esta relación se deduce del *teorema de los ejes paralelos*.

A continuación se examina como las propiedades de inercia se relacionan con las fuerzas y como éstas afectan la energía cinética de un sistema. La Fig. 3.1 muestra una masa  $m$  que se traslada con una velocidad de magnitud  $v$  en el plano  $x$ - $y$ . Con base en el principio de la cantidad de movimiento lineal, el cual establece que en un marco de referencia inercial, la razón de cambio de la cantidad de movimiento lineal de un sistema es igual a la fuerza total que actúa en este sistema. Se define la fuerza como:

$$F = \frac{dp}{dt} \quad 3.2$$

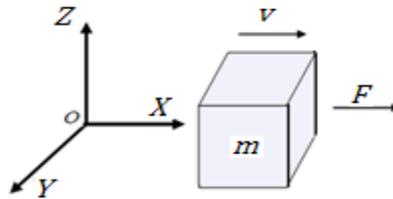


Fig. 3.1 Masa en traslación. [11]

Donde  $F$  representa la fuerza total que actúa sobre el sistema y  $p$  la cantidad de movimiento lineal total del sistema, la cual está definida como:

$$p = mv \quad 3.3$$

Donde  $m$  es la masa del sistema y  $v$  su velocidad. Si la masa  $m$  es constante, la Ec. 3.2 toma la forma conocida como *La Segunda ley de Newton del Movimiento*:

$$F = \frac{d(mv)}{dt} = m \frac{dv}{dt} = ma \quad 3.4$$

De la Ec. 3.4 es evidente que para el caso de movimiento de traslación, *la propiedad de inercia m es la relación de la fuerza y la aceleración*. [11] La energía cinética de la masa  $m$  se expresa como:

$$T = \frac{1}{2} m (v * v) = \frac{1}{2} mv^2 \quad 3.5$$

Para un cuerpo rígido, que esta sometido a rotación en el plano con una velocidad angular  $\omega$ , el principio de la cantidad de movimiento angular expresa que la razón de cambio de cantidad de movimiento angular de un sistema con respecto al centroide o un punto fijo del sistema es igual al momento total con respecto a dicho punto y se establece como:

$$M = \frac{dH}{dt} \quad 3.6$$

Donde  $M$  es el momento neto sobre el punto fijo  $O$  y  $H$  es la cantidad de movimiento angular del sistema con respecto al punto  $O$ . La cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido que se desplaza en el plano, con respecto a un punto fijo  $O$ , es:

$$H_O = I_O \omega \quad 3.7$$

Por tanto:

$$M = \frac{d(I\omega)}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I\alpha \quad 3.8$$

Donde  $\alpha$  es la aceleración angular del sistema. De la Ec. 3.8 se deduce que en el movimiento rotacional, *la propiedad de inercia  $I$  es la relación del momento y la aceleración angular  $\alpha$* . Esta propiedad de inercia se conoce como inercia rotatoria. [11] La energía cinética del sistema es:

$$T = \frac{1}{2} I\omega^2 \quad 3.9$$

### 3.1.2 Elemento de Rigidez: Resorte Elástico

Estos elementos almacenan y liberan energía potencial en un sistema, además, son requeridos para brindar un desplazamiento en el eje de mayor sensibilidad y deben ser lo suficientemente rígidos en los demás ejes para eliminar cualquier sensibilidad de movimiento en dichos ejes. Considerando la Fig. 3.2, donde un resorte se mantiene fijo en el extremo  $O$ , y en el otro extremo esta sometido por una fuerza de magnitud  $F$ ; entonces, bajo la acción de esta fuerza, el elemento se estira desde una longitud inicial  $L_0$  hasta una longitud  $L_0 + x$ . Al sufrir esta deformación, la relación entre  $F$  y  $x$  puede ser lineal o no lineal.

Si  $F_S$  representa la fuerza interna que actúa dentro del elemento de rigidez, como se muestra en la Fig. 3.2, entonces  $F_S$  es igual y de sentido contrario a la fuerza  $F$ , es decir,

$$F_S = -F$$

A medida que el elemento de rigidez se deforma, la energía se almacena en el, y conforme regresa a su configuración inicial se libera la energía. La energía potencial  $V$  se define como el trabajo efectuado para llevar al elemento de rigidez desde la posición deformada hasta la posición sin deformación. Lo anterior se expresa como:

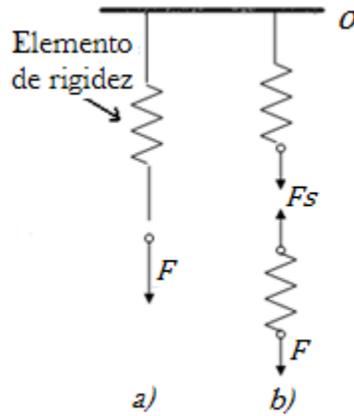


Fig. 3.2 a)Elemento de rigidez con una fuerza que actúa en el y b)Su diagrama de cuerpo libre. [11]

$$V(x) = \int_x^0 F_s dx = \int_x^0 -F dx = \int_0^x F dx \quad 3.10$$

Si se aplica una fuerza  $F$  a un resorte lineal, ya sea de traslación o rotación, como se muestra en la Fig. 3.2, esta fuerza produce una deflexión  $x$  tal que:

$$F(x) = kx \quad 3.11$$

Donde el coeficiente  $k$  se denomina *constante de resorte* y existe una relación lineal entre la fuerza y el desplazamiento. De acuerdo a las Ecs. 3.10 y 3.11, la energía potencial se expresa como:

$$V(x) = \int_0^x F(x) dx = \int_0^x kx dx = k \int_0^x x dx = \frac{1}{2}kx^2 \quad 3.12$$

Cuando se tienen 2 o más resortes en paralelo, como se muestra en la Fig. 3.3b, y la barra sobre la cual actúa la fuerza  $F$  permanece paralela a su posición original, los desplazamientos de ambos resortes son iguales, por tanto:

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x) = k_1x + k_2x = (k_1 + k_2)x = k_e x \quad 3.13$$

Donde  $k_e$  es la constante equivalente del resorte en paralelo dada por

$$k_e = k_1 + k_2 \quad 3.14$$

Cuando hay 2 o más resortes en serie, Fig. 3.3c, la fuerza sobre cada resorte es la misma y el desplazamiento total es:

$$x = x_1 + x_2 = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)F = \frac{F}{k_e} \quad 3.15$$

Donde la constante equivalente del resorte  $k_e$  es:

$$k_e = \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)^{-1} \quad 3.16$$

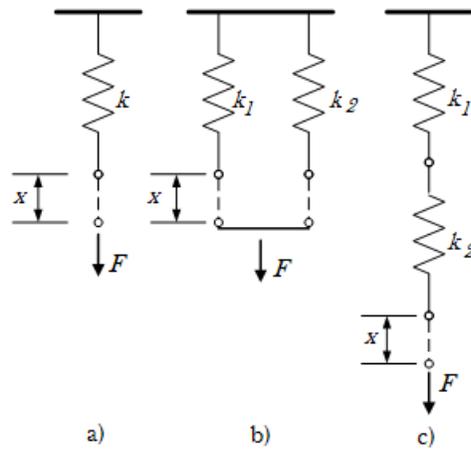


Fig. 3.3 Configuraciones de resortes: a)Resorte simple, b)Resortes en paralelo y c)Resortes en serie. [11]

Similarmente, para resortes de torsión, tenemos que para una combinación en paralelo la rotación  $\theta$  de cada resorte es la misma, por lo tanto:

$$\tau(\theta) = t_1(\theta) + t_2(\theta) = k_{t1}\theta + k_{t2}\theta = (k_{t1} + k_{t2})\theta = k_{te}\theta \quad 3.17$$

Donde  $k_{te}$  es la constante equivalente.

$$k_{te} = k_{t1} + k_{t2} \quad 3.18$$

Para resortes de torsión en serie, el par de torsión es el mismo, pero las rotaciones son desiguales, entonces:

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 = \frac{\tau}{k_{t1}} + \frac{\tau}{k_{t2}} = \left( \frac{1}{k_{t1}} + \frac{1}{k_{t2}} \right) \tau = \frac{\tau}{k_{te}} \quad 3.19$$

Donde la rigidez  $k_{te}$  equivalente es:

$$k_{te} = \left( \frac{1}{k_{t1}} + \frac{1}{k_{t2}} \right)^{-1} \quad 3.20$$

Para determinar la constante de resorte de numerosos elementos estructurales elásticos se pueden usar las relaciones conocidas entre fuerza y desplazamiento. Dicha constante esta asociada con la geometría y las propiedades de los materiales usados. [11]

### 3.1.3 Elemento de Disipación: Amortiguamiento

Por amortiguamiento se hace referencia a la disipación de energía en un sistema mecánico. Existen muchos mecanismos de disipación de energía, como por ejemplo, el calentamiento de un metal bajo deformación mecánica constante; la radiación de sonido cuando una placa estructural es golpeada.

Como una primera aproximación, una fuerza de amortiguamiento,  $F_d$ , es proporcional a la velocidad del movimiento:

$$F_d = -c\dot{x}$$

Donde  $c$  es el coeficiente de la fuerza de amortiguamiento y el signo negativo indica que la fuerza es opuesta a la dirección del movimiento.

Para máquinas convencionales, si la velocidad de sus partes móviles no es muy alta, los efectos de amortiguamiento causados por el aire circundante pueden ser ignorados, debido a que la razón de energía disipada por amortiguamiento de aire es mucho mas pequeña que la energía suministrada al sistema. Sin embargo, en el microdominio es vital considerar los efectos del amortiguamiento por aire, debido a que éste se relaciona con el área de las partes móviles. [12]

Para algunos dispositivos micromecánicos la energía consumida vía amortiguamiento por aire debe minimizarse para que el movimiento de las partes mecánicas pueda maximizarse con una fuente de energía finita. Para otros casos el amortiguamiento por aire debe controlarse para que la energía del sistema se consuma de forma apropiada, logrando con esto que el sistema tenga un óptimo desempeño dinámico.

### 3.1.3.1 Flujo de un Fluido Viscoso

Aunque un fluido en reposo es incapaz de resistir que un esfuerzo cortante modifique su forma, fuerzas viscosas aparecen para oponerse al movimiento relativo entre las diferentes capas de un fluido. Por tanto, la viscosidad es una fricción interna entre las capas adyacentes moviéndose con diferentes velocidades.

Las fuerzas cortantes internas de un fluido viscoso son proporcionales al gradiente de velocidad. Si el flujo esta en la dirección  $x$  y su velocidad esta distribuida en la dirección  $y$ ; es decir, la velocidad del flujo en el eje  $x$ ,  $u$ , es una función de  $y$ , la fuerza cortante  $\tau_{yx}$  es:

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du(y)}{dy} \quad 3.21$$

Donde  $\mu$  es el coeficiente de viscosidad del fluido y tiene unidades de pascales por segundo,  $\text{Pa}\cdot\text{s}$ . Para un gas, si el flujo es estable, el coeficiente de viscosidad es constante. Para muchos líquidos puros su coeficiente de viscosidad también es constante y son llamados líquidos Newtonianos. Aunque ambos, líquidos y gases, tienen viscosidad, estos tienen diferentes propiedades para diferentes mecanismos.

En un líquido estable, la posición relativa de las moléculas adyacentes en la misma capa están estables, pero las posiciones relativas de las moléculas en capas adyacentes de un fluido laminar cambian debido al flujo. La Fig. 3.4 muestra el cambio de la posición relativa entre las moléculas  $A$  y  $B$  en capas adyacentes con diferentes velocidades de flujo, donde la molécula  $A$  tiene una velocidad más alta que la molécula  $B$ . Una aproximación entre  $A$  y  $B$



Donde  $\rho$  es la densidad,  $\tilde{v}$  es la velocidad promedio de las moléculas y  $\lambda$  es la distancia libre media de viaje de una molécula (mean free path). De acuerdo a la teoría cinética de los gases tenemos:

$$\tilde{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M_m}}, \quad \lambda = \frac{1}{\pi\sqrt{2}nd^2} \quad \text{y} \quad \rho = n \frac{M_m}{N_{av}}$$

Donde  $R$  es la constante Universal Molar,  $M_m$  es la masa molar,  $d$  el diámetro molecular efectivo del gas,  $T$  es la temperatura absoluta y  $N_{av}$  es la constante de Avogadro. Sustituyendo, tenemos:

$$\mu = \frac{2\sqrt{R}}{\pi nd^2} \sqrt{M_m T} \quad 3.23$$

La Ec. 3.23 muestra que  $\mu$  es independiente de la presión,  $P$ . Experimentos hechos por Maxwell confirman este hecho, sobre un amplio rango de presiones, asumiendo que la presión no sea muy pequeña. Además, la Ec. 3.23 indica que  $\mu$  aumenta en proporción directa con  $\sqrt{M_m}$  y  $\sqrt{T}$ . Experimentos han confirmado que  $\mu$  se incrementa con la temperatura pero la potencia excede ligeramente el  $1/2$ .

La dependencia de  $\mu$  con respecto a la temperatura puede expresarse por una relación empírica conocida como la Ecuación de Sutherland:

$$\mu = \mu_0 \frac{1 + T_s/T_0}{1 + T_s/T} \sqrt{\frac{T}{T_0}} \quad 3.24$$

Donde  $T_0 = 273.16\text{K}$ ,  $\mu_0$  es el coeficiente de viscosidad en  $T_0$  y  $T_s$  es una constante.  $\mu_0$  y  $T_s$  son dependientes del gas considerado. Usualmente, el coeficiente de viscosidad de un líquido es mucho más sensible a la temperatura que el de un gas.

### 3.1.3.2 Ecuaciones para Flujo Viscoso

Considérese un elemento cúbico en un fluido, como el de la Fig. 3.6. Hay 6 componentes de fuerza cortante sobre su superficie, causados por el gradiente de velocidad del flujo  $\tau_{xy}(x_0)$ ,  $\tau_{xy}(x_0 + dx)$ ,  $\tau_{yz}(y_0)$ ,  $\tau_{yz}(y_0 + dy)$ ,  $\tau_{zx}(x_0)$ ,  $\tau_{zx}(z_0 + dz)$ . También hay 6 componentes de fuerza normal sobre su superficie, causadas por la presión:  $P(x)dydz$ ,  $P(x + dx)dydz$ ,  $P(y)dxdz$ ,  $P(y + dy)dxdz$ ,  $P(z)dxdy$ ,  $P(z + dz)dxdy$ .

Asumiendo que el peso del fluido estable es despreciable, el balance de fuerzas para el cubo en la dirección  $z$  es:

$$[P(z) - P(z + dz)]dxdy + [\tau_{xz}(x + dx) - \tau_{xz}(x)]dydz + [\tau_{yz}(y + dy) - \tau_{yz}(y)]dxdz = 0 \quad 3.25$$

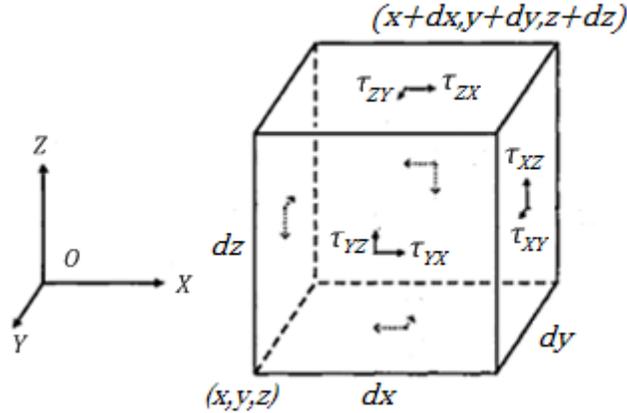


Fig. 3.6 Esfuerzos cortantes sobre la superficie de un cubo. [3]

Por lo tanto, tenemos:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{XZ}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{YZ}}{\partial y} \quad 3.26$$

Como  $\tau_{XZ} = \mu \frac{\partial w}{\partial x}$ ,  $\tau_{YZ} = \mu \frac{\partial w}{\partial y}$ , tenemos:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad 3.27$$

Donde  $w$  es la componente de la velocidad en la dirección  $z$ . De igual forma, para  $u$  y  $v$ , las componentes de la velocidad en las direcciones  $x$  y  $y$ , respectivamente, tenemos:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad 3.28$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad 3.29$$

Las Ec. 3.27, 3.28 y 3.29 son las ecuaciones para el flujo viscoso de un fluido ocasionado por una presión,  $P$ .

### 3.1.3.3 Modelos de Amortiguamiento

Para superficies MEMS móviles que interactúan con gases o líquidos, hay dos modelos básicos para disipación de energía: *amortiguamiento por película deslizante*, la cual se presenta cuando dos superficies están moviéndose de forma paralela entre si, cortando el flujo entre las superficies, como se ilustra en la Fig. 3.7a, y *amortiguamiento por película comprimida*. En aplicaciones MEMS, uno o ambos tipos de amortiguamiento pueden ocurrir; sin embargo, para el presente trabajo solo se tomará en consideración el amortiguamiento por película comprimida, el cual se trata a continuación.

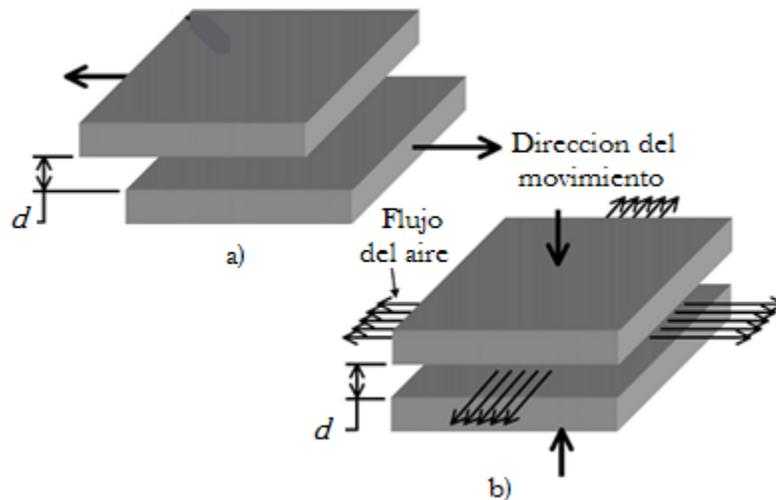


Fig. 3.7 a) Amortiguamiento por película deslizante y b) Amortiguamiento por película comprimida para dispositivos MEMS. [12]

### 3.1.3.4 Amortiguamiento por Película Comprimada

Cuando una placa está paralela a una pared y se mueve hacia la pared, la película de aire entre la placa y la pared se comprime, por lo que parte del flujo de aire es expulsado del gap. Por tanto, se desarrolla una presión  $\Delta p$  en el gap debido al flujo viscoso del aire, Fig 3.7b. De manera contraria, cuando la placa se aleja de la pared, la presión se reduce dentro del gap para mantener el flujo del aire dentro del gap.

En ambos casos, las fuerzas sobre la placa, causadas por la concentración de presión, siempre están en contra del movimiento de la placa. Así, el trabajo hecho por la placa es consumido por el flujo viscoso del aire y transformado en calor. La película de aire funciona como un amortiguador y este efecto es llamado *amortiguamiento por película comprimida*. Para amortiguamiento por película comprimida, la fuerza de amortiguamiento depende de la distancia del gap; para un gap pequeño, la fuerza de amortiguamiento es grande y viceversa. Por tanto, la fuerza de amortiguamiento puede controlarse mediante la distancia del gap de aire, o cualquier otro fluido, y así poder obtener un nivel de amortiguamiento esperado para microestructuras.

### Ecuaciones Básicas

Supóngase un par de placas paralelas sobre el plano  $x$ - $y$ , Fig 3.8, con dimensiones mucho más grandes que la distancia entre ellas, de manera que el flujo del gas entre las placas, causado por su movimiento relativo, es lateral (sobre los ejes  $x$  y  $y$ ). Además, considérese una columna,  $h dx dy$  (donde  $h = h_2 - h_1$ ), como se muestra en la Fig. 3.8, donde  $q_x$  es la razón del flujo en la dirección  $x$ , por unidad de longitud en la dirección  $y$ , y  $q_y$  es la razón del flujo en la dirección  $y$ , por unidad de longitud en la dirección  $x$ .

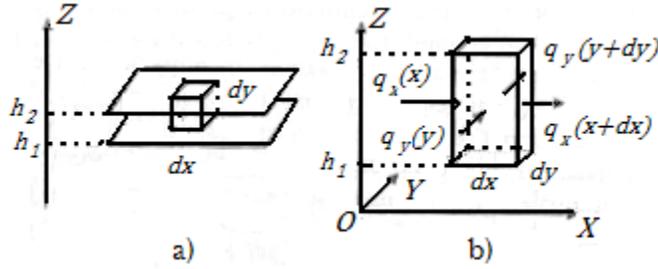


Fig. 3.8 Flujo de masa. a)Columna elemental y b)Definición de la razón del flujo. [3]

El balance para la masa del flujo es:

$$(\rho q_x)_x dy - (\rho q_x)_{x+dx} dy + (\rho q_y)_y dx - (\rho q_y)_{y+dy} dx = \left( \frac{\partial \rho h_2}{\partial t} - \frac{\partial \rho h_1}{\partial t} \right) dx dy \quad 3.30$$

Ocupando las relaciones siguientes:

$$(\rho q_x)_{x+dx} = (\rho q_x)_x + \frac{\partial(\rho q_x)}{\partial x} dx, \quad (\rho q_y)_{y+dy} = (\rho q_y)_y + \frac{\partial(\rho q_y)}{\partial y} dy$$

Tenemos:

$$\frac{\partial(\rho q_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho q_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} = 0 \quad 3.31$$

Para hallar \$q\_x\$ y \$q\_y\$, es necesario encontrar la distribución de la velocidad en la dirección \$z\$. Para hacer esto, se corta un elemento de la columna entre \$z\$ y \$z+dz\$, Fig 3.9. El balance de fuerzas en la dirección \$x\$, es:

$$P(x) dy dz + T_{zx}(z + dz) dx dy = P(x + dx) dy dz + T_{zx}(z) dx dy \quad 3.32$$

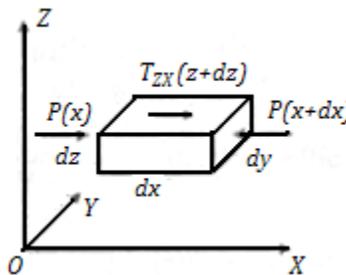


Fig. 3.9 Balance de fuerzas sobre una columna elemental. [3]

Por lo tanto:

$$\frac{\partial T_{zx}}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} \quad 3.33$$

Acorde a la Ec. 3.21, tenemos:

$$T_{zx} = \mu \frac{du}{dz} \quad 3.34$$

Donde  $u$  es la componente de la velocidad en la dirección  $x$ , por tanto:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad 3.35$$

Para un gap pequeño,  $P(x,y)$  no es función de  $z$ ; así, integrando 2 veces la ecuación, tenemos:

$$u(z) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} z^2 + C_1 \frac{1}{\mu} z + C_2 \quad 3.36$$

Si las placas no se mueven lateralmente, se fija el origen de coordenadas en la parte inferior y las condiciones de frontera para la Ec. 3.36 son  $u(0) = 0$  y  $u(h) = 0$ , tenemos:

$$u(z) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} z(z-h) \quad 3.37$$

La razón del flujo en la dirección  $x$  por unidad de longitud en la dirección  $y$  es:

$$q_x = \int_0^h u dz = -\frac{h^3}{12\mu} \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right) \quad 3.38$$

De forma similar:

$$q_y = -\frac{h^3}{12\mu} \left( \frac{\partial P}{\partial y} \right) \quad 3.39$$

El signo negativo indica que la dirección del flujo va con el decremento de la presión. Sustituyendo las Ecs. 3.38 y 3.39 en 3.31, tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 12 \frac{d(h\rho)}{dt} \quad 3.40$$

La Ec. 3.40 es conocida como la Ecuación de Reynolds. De la Ec. 3.40, si  $h$  es uniforme en  $x$  y  $y$ , tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \frac{12\mu}{h^3} \frac{d(h\rho)}{dt} \quad 3.41$$

Para una película isotérmica, la densidad del aire,  $\rho$ , es proporcional a la presión  $P$ , es decir;  $\rho = \frac{P}{P_0} \rho_0$ , así, la Ec. 3.41 puede escribirse como:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} P^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} P^2 = \frac{24\mu}{h^3} \frac{d(h\rho)}{dt} \quad \text{o} \quad \nabla^2 P^2 = \frac{24\mu}{h^3} \frac{d(h\rho)}{dt} \quad 3.42$$

Además, la Ec. 3.42 puede desarrollarse como:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 + P\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}P^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}P^2\right) = \frac{12\mu}{h^3}\left(P\frac{dh}{dt} + P\frac{dP}{dt}\right) \quad 3.43$$

Asumiendo que  $h = h_0 + \Delta h$  y  $P = P_0 + \Delta P$ , para pequeños movimientos, tenemos  $\Delta h \ll h_0$  y  $\Delta P \ll P_0$ . Bajo estas condiciones, la Ec. 3.43 se aproxima a:

$$P_0\left(\frac{\partial^2 \Delta P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta P}{\partial y^2}\right) = \frac{12\mu}{h^3}P_0h_0\left(\frac{1}{h_0}\frac{d\Delta h}{dt} + \frac{1}{P_0}\frac{d\Delta P}{dt}\right) \quad 3.44$$

Si  $\frac{\Delta P}{P_0} \ll \frac{\Delta h}{h_0}$ , tenemos:

$$\frac{\partial^2 \Delta P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta P}{\partial y^2} = \frac{12\mu}{h^3}\frac{d\Delta h}{dt} \quad \text{o} \quad \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{12\mu}{h^3}\frac{dh}{dt} \quad 3.45$$

En las ecuaciones anteriores,  $P$  es equivalente a  $\Delta P$  y  $h$  es equivalente a  $\Delta h$ .

### Placa Rectangular

Considérese una placa rectangular, con longitudes en las direcciones  $x$  y  $y$  dadas por  $B=2a$  y  $L=2b$ , respectivamente, como se muestra en la Fig. 3.10. La ecuación diferencial para la presión de la película de aire es la Ec. 3.45, con las condiciones de frontera:

$$P(\pm a, y) = 0, P(x, \pm b) = 0 \quad 3.46$$

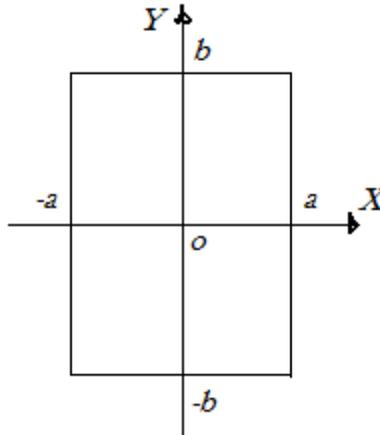


Fig. 3.10 Placa rectangular. [3]

La solución a la Ec. 3.45 puede dividirse en 2 partes:  $P = p_1 + p_2$ , donde  $p_1$  es la solución específica y  $p_2$  es una solución general a la ecuación de Laplace.

Para encontrar  $p_1$ , se asume que es de la forma:  $p_1 = A + Bx + Cx^2$ . Conociendo la condiciones de frontera,  $p_1(\pm a) = 0$ , se tiene:

$$p_1 = -\frac{6\mu}{h^3} \frac{dh}{dt} (a^2 - x^2) \quad 3.47$$

Para  $p_2$ , de la definición de  $P = p_1 + p_2$  y las condiciones de frontera  $p(\pm a, y) = 0$ , tenemos:

$$p_1(\pm a, y) + p_2(\pm a, y) = 0 \quad 3.48$$

Acorde a la Ec. 3.47, las condiciones de fronteras para  $p_2$  en  $x = \pm a$  puede ser:

$$p_2(\pm a, y) = 0 \quad 3.49$$

Acorde a la Ec. 3.46, las condiciones de frontera para  $P$  en  $y = \pm b$  debe ser  $P(x, \pm b) = 0$ , es decir:

$$p_1(x) + p_2(x, \pm b) = 0 \quad 3.50$$

Por lo tanto, las condiciones de frontera para  $p_2$  en  $y = \pm b$  son:

$$p_2(x, \pm b) = -p_1(x) = \frac{6\mu}{h^3} \frac{dh}{dt} (a^2 - x^2) \quad 3.51$$

Así las condiciones de frontera para  $p_2$  son las Ecs. 3.50 y 3.51. Para hallar la solución de  $p_2$ , separamos las variables suponiendo que:  $p_2 = X(x)Y(y)$ . Sustituyendo esta ecuación en la Ec. 3.52, obtenemos la Ec. 3.53:

$$\frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_2}{\partial y^2} = 0 \quad 3.52$$

$$\ddot{X}(x)Y(y) + \ddot{Y}(y)X(x) = 0 \quad \text{o} \quad \frac{\ddot{X}(x)}{X(x)} = -\frac{\ddot{Y}(y)}{Y(y)} = \lambda \quad 3.53$$

Por lo tanto, se tienen 2 ecuaciones independientes:  $\ddot{X}(x) - \lambda X(x) = 0$  y  $\ddot{Y}(y) - \lambda Y(y) = 0$ . Para  $X(x)$  se asume que:

$$X(x) = A_1 \cos \alpha x + A_2 \sin \alpha x \quad 3.54$$

Como  $X(\pm a) = 0$ , tenemos  $A_2 = 0$  y  $\alpha = \frac{2n\pi}{a}$  para  $n = 1, 3, 5, \text{etc.}$

$$X(x) = A_1 \cos \frac{2n\pi x}{a} \quad 3.55$$

Para  $Y(y)$  se asume que:

$$Y(y) = C_1 \cosh \gamma y + C_2 \sinh \gamma y \quad 3.56$$

Donde  $\gamma = \frac{2n\pi}{a}$  y  $n = 1, 3, 5, \text{etc.}$  Usando las condiciones de frontera para  $Y(y)$ , es decir,  $Y(b) = Y(-b)$ , se encuentra que  $C_2 = 0$ . Por lo tanto:

$$Y(y) = C_1 \cosh \frac{2n\pi y}{a} \quad 3.57$$

De las Ecs.  $p_2 = X(x)Y(y)$ , 3.55 y 3.57, tenemos que:

$$p_2(x, y) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} a_n \cosh \frac{n\pi y}{2a} \cos \frac{n\pi x}{2a}$$

Para satisfacer las condiciones de frontera de la Ec. 3.51, tenemos:

$$\sum_{n=1,3,5}^{\infty} a_n \cosh \frac{n\pi y}{2a} \cos \frac{n\pi x}{2a} = \frac{6\mu}{h^3} \dot{h}(a^2 - x^2) \quad 3.58$$

Las constantes  $a_n$ 's están definidas por:

$$a_n = \frac{\int_{-a}^a \frac{6\mu}{h^3} \dot{h}(a^2 - x^2) \cos \frac{n\pi x}{2a} dx}{\cosh \frac{n\pi b}{2a} \int_{-a}^a \cos^2 \frac{n\pi x}{2a} dx} = \frac{192\mu \dot{h} a^2 \sin \frac{n\pi}{2}}{n^2 \pi^3 h^3 \cosh \frac{n\pi b}{2a}}, n = 1,3,5, etc. \quad 3.59$$

Por lo tanto:

$$p_2(x, y) = \frac{192\mu a^2}{\pi^3 h^3} \dot{h} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^3 \cosh \frac{n\pi b}{2a}} \cosh \frac{n\pi y}{2a} \cos \frac{n\pi x}{2a} \quad 3.60$$

Así, la solución final para la presión es:

$$P = p_1 + p_2 = -\frac{6\mu}{h^3} \frac{dh}{dt} (a^2 - x^2) + \frac{192\mu a^2 \dot{h}}{\pi^3 h^3} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^3 \cosh \frac{n\pi b}{2a}} \cosh \frac{n\pi y}{2a} \cos \frac{n\pi x}{2a} \quad 3.61$$

La fuerza de amortiguamiento ejercida por la placa rectangular es:

$$\begin{aligned} F_{rec} &= \int_{-a}^a dx \int_{-b}^b P(x, y) dy = \frac{16a^3 b \mu}{h^3} \dot{h} \left\{ 1 - \frac{192}{\pi^5} \left(\frac{a}{b}\right) \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh \frac{n\pi b}{2a} \right\} \\ &= -\frac{\mu L B^3}{h^3} \dot{h} \beta \left(\frac{B}{L}\right) \end{aligned} \quad 3.62$$

Donde el factor  $\beta \left(\frac{B}{L}\right)$  es una función de la razón de aspecto  $\left(\frac{B}{L}\right)$ , es decir:

$$\beta \left(\frac{B}{L}\right) = \left\{ 1 - \frac{192}{\pi^5} \left(\frac{B}{L}\right) \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh \frac{n\pi L}{2B} \right\} \quad 3.63$$

En la Fig. 3.11 se muestra la relación entre  $\beta \left(\frac{B}{L}\right)$  y  $\left(\frac{B}{L}\right)$ . Donde, para una placa muy larga,  $\beta=1$ , y para una placa cuadrada,  $(a = b)$ ,  $\beta=0.42$ . Así, el coeficiente de amortiguamiento es:

$$c_{rec} = \frac{\mu L B^3}{h^3} \beta \left(\frac{B}{L}\right) \quad 3.65$$

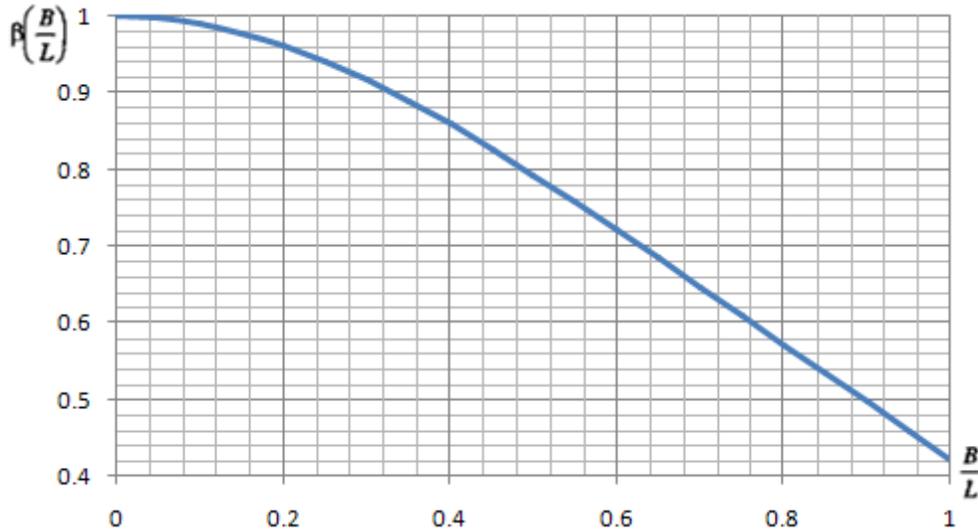


Fig. 3.11 Dependencia del factor  $\beta(B/L)$  sobre la razón de aspecto  $(B/L)$ . [3]

## 3.2 Esfuerzo y Deformación

Como el silicio es un excelente material de estado sólido, sus propiedades mecánicas están gobernadas por la teoría clásica de la elasticidad en un amplio rango de temperaturas. Cuando la geometría de una estructura mecánica de estado sólido es miniaturizada sus propiedades mecánicas pueden cambiar, sin embargo, no se han observado cambios significativos en las “micromáquinas de silicio”. Por tanto, se asume que las propiedades mecánicas de una microestructura de silicio son idealmente elásticas. El silicio, ya sea en su forma cristalina o policristalina no es mecánicamente homogéneo, es decir, sus características mecánicas no son las mismas en todas las direcciones; pero, si se asume que sus propiedades mecánicas son homogéneas, se simplifica el análisis, obteniéndose errores insignificantes en los resultados finales. En muchos casos, los resultados finales son afectados por la variación en los procesos de fabricación, más que por las aproximaciones.

### 3.2.1 Esfuerzo

Acorde a la teoría de la elasticidad; las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo de estado sólido producen fuerzas internas entre las porciones del cuerpo y provocan deformación. Si las fuerzas externas no exceden cierto límite, la deformación desaparece una vez que las fuerzas son removidas. Para describir las fuerzas internas, se introduce el tensor<sup>7</sup>

de esfuerzo. Matemáticamente, el esfuerzo es un tensor de segundo orden, el cual tiene 9 componentes, como se muestra por la matriz:

$$T = \begin{bmatrix} T_{XX} & T_{XY} & T_{XZ} \\ T_{YX} & T_{YY} & T_{YZ} \\ T_{ZX} & T_{ZY} & T_{ZZ} \end{bmatrix} \quad 3.66$$

Donde las 3 componentes de la diagonal principal son referidas como esfuerzos normales, y los 6 restantes, como esfuerzos cortantes. En la Fig. 3.12 se muestra un cubo elemental, parte diminuta, de un cuerpo. Las 6 caras del cubo son nombradas como  $x, \bar{x}, y, \bar{y}, z$  y  $\bar{z}$  acorde a la dirección normal de las caras.

Una componente del tensor esfuerzo esta definida como la fuerza por unidad de área sobre una superficie especifica del cubo elemental.  $T_{XX}$  es la fuerza normal por unidad de área de la cara  $x$ ,  $T_{XY}$  es la fuerza en la dirección  $y$  aplicada sobre una unidad de área de la cara  $x$ ,  $T_{XZ}$  es la fuerza en la dirección  $z$  aplicada sobre una unidad de área de la cara  $x$ , y así sucesivamente.

Los signos de las componentes del tensor están definidos acorde a la regla de la mano derecha del sistema de coordenadas.

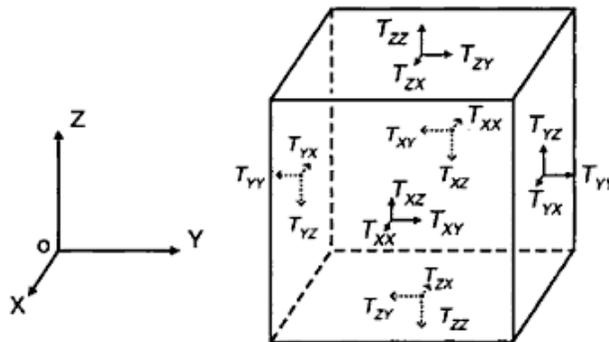


Fig. 3.12 Componentes del Tensor de Esfuerzo. [3]

De acuerdo a las condiciones de equilibrio, los  $T_{XX}$  en dos planos paralelos opuestos ( $x$  y  $\bar{x}$ ) deben ser iguales en cantidad y signo. Lo mismo ocurre para  $T_{YY}$  y  $T_{ZZ}$ . De las condiciones de equilibrio, también se cumple que:

$$T_{XY} = T_{YX}, T_{YZ} = T_{ZY}, T_{XZ} = T_{ZX} \quad 3.67$$

Esto significa que el tensor de esfuerzo es simétrico y solo tiene 6 componentes independientes. Por lo que se puede reducir la notación del sistema.

$$T_1 = T_{XX}, T_2 = T_{YY}, T_3 = T_{ZZ}, T_4 = T_{YZ}, T_5 = T_{XZ}, T_6 = T_{XY} \quad 3.68$$

### 3.2.2 Deformación

Acorde a la teoría de la elasticidad, la deformación dentro de un material será producida por los esfuerzos. Si las componentes del desplazamiento para un punto  $P(x,y,z)$  son  $u(x,y,z)$ ,  $v(x,y,z)$  y  $w(x,y,z)$  en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente. Entonces, el desplazamiento incremental entre el punto  $P(x,y,z)$  y  $P'(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$  pueden expresarse como:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} \quad 3.69
 \end{aligned}$$

Si el material de estado sólido no tiene movimiento rotacional, el último término del lado derecho de la Ec. 3.69 es cero y la ecuación se reduce a:

$$\begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} \quad 3.70$$

Los componentes de la diagonal principal en la Ec. 3.70 son denominados componentes normales de la deformación.

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad 3.71$$

Las cantidades de la Ec. 3.71 son unidades de elongación a lo largo de los 3 ejes coordenados. Las 6 componentes fuera de la diagonal principal son referidas como las componentes cortantes de la deformación.

$$e_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad e_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad e_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad 3.72$$

Por lo tanto, la deformación puede describirse por un tensor de segundo orden, el tensor deformación,  $e$ , que relaciona el desplazamiento con la distancia así:

$$\begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} = (e) \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} \quad 3.73$$

Como el tensor deformación ( $e$ ) es simétrico con solo 6 componentes independientes, puede ser simplificado a:  $e_1=e_{xx}$ ,  $e_2=e_{yy}$ ,  $e_3=e_{zz}$ ,  $e_4=e_{yz}=e_{zy}$ ,  $e_5=e_{zx}=e_{xz}$ ,  $e_6=e_{xy}=e_{yx}$ . Las 3 componentes de la deformación cortante están relacionadas con la distorsión angular del material. Para explicar esto, consideremos la distorsión de un ángulo en un elemento de sección  $PA = dx$  y  $PB = dy$  en el plano  $x$ - $y$ , Fig. 3.13. Si  $u$  y  $v$  son los desplazamientos en las direcciones  $x$  y  $y$  para un punto  $P(x,y)$  respectivamente, el desplazamiento del punto  $A$  en  $y$  y el desplazamiento del punto  $B$  en  $x$  son  $v = (x + dx, y) = v(x, y) + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx$  y  $u = (x, y + dy) = u(x, y) + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy$ , respectivamente. La nueva dirección  $P'A'$  ahora esta inclinada respecto a su dirección inicial,  $PA$ , por un pequeño ángulo  $\gamma_1 = \frac{\partial v}{\partial x}$ . De igual forma, la nueva dirección  $P'B'$  esta inclinada un pequeño ángulo  $\gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial y}$ . Ahora, el ángulo inicial  $APB$  esta distorsionado por un ángulo  $\gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$ . Por lo tanto, la deformación cortante  $e_6=e_{xy}$  es la mitad de la distorsión angular,  $e_6 = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ . Los componentes  $e_4$  y  $e_5$  tienen el mismo significado.

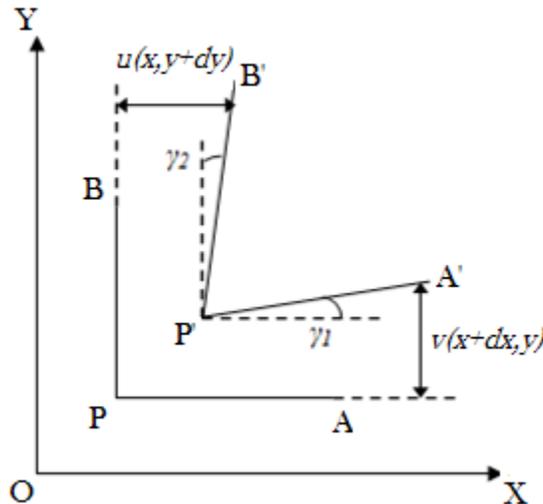


Fig. 3.13 Deformación angular debida a esfuerzo cortante. [3]

Sin embargo, en ingeniería, la deformación en un material está definida como:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_6 & \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 & \varepsilon_2 & \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 & \varepsilon_4 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad 3.74$$

Las componentes de la Ec. 3.74 son  $\varepsilon_1=e_1$ ,  $\varepsilon_2=e_2$ ,  $\varepsilon_3=e_3$ ,  $\varepsilon_4=2e_4$ ,  $\varepsilon_5=2e_5$  y  $\varepsilon_6=2e_6$ . Acorde a la definición en ingeniería, la componente cortante  $e_6 = \gamma_1 + \gamma_2$ , es igual a la distorsión angular entre el plano z-x y el plano z-y en el material, y así sucesivamente.

La deformación es una cantidad adimensional, sin embargo, por conveniencia se usa una unidad llamada microdeformación,  $\mu\varepsilon$ , definida como una deformación de  $10^{-6}$ . Así, una deformación de  $10^{-4}$  es nombrada como 100  $\mu\varepsilon$ .

### 3.2.3 Ley de Hooke

La relación lineal entre el esfuerzo y la deformación es conocida como *Ley de Hooke*. Para un material homogéneo y considerando un paralelepípedo rectangular, con sus lados paralelos a los ejes coordenados; si un par de lados opuestos del paralelepípedo, paralelos al eje x, son sometidos a la acción de un esfuerzo normal  $T_{XX}$ , la elongación relativa del elemento esta dada por:

$$e_{XX} = \frac{T_{XX}}{E} \quad 3.75$$

Donde  $E$  es una constante relacionada con el material llamada módulo de Young.  $E$  es usualmente muy grande en comparación con los esfuerzos permitidos por lo que la unidad de elongación  $\varepsilon_{ii}$  es menor a 1000  $\mu\varepsilon$ . Por lo tanto, la superposición puede utilizarse para deformaciones en muchas aplicaciones sin causar errores significativos.

La extensión del elemento en la dirección x siempre va acompañada por una contracción en sus direcciones laterales.

$$e_{YY} = -\nu e_{XX}, \quad e_{ZZ} = -\nu e_{XX} \quad 3.76$$

Donde  $\nu$  es otra constante relacionada con el material llamada *razón de Poisson*. Para cualquier material esta razón varia entre 0.25 y 0.3.

Si el elemento es sometido simultáneamente a la acción de esfuerzos normales  $T_{XX}$ ,  $T_{YY}$  y  $T_{ZZ}$ , las componentes resultantes de deformación pueden obtenerse de las Ecs. 3.75 y 3.76 por superposición:

$$\begin{aligned} e_{XX} &= [T_{XX} - \nu(T_{YY} + T_{ZZ})]/E \\ e_{YY} &= [T_{YY} - \nu(T_{XX} + T_{ZZ})]/E \\ e_{ZZ} &= [T_{ZZ} - \nu(T_{XX} + T_{YY})]/E \end{aligned} \quad 3.77$$

De las Ecs. 3.77, el módulo de Young,  $E$ , y la razón de Poisson,  $\nu$ , definen las relaciones entre deformación normal y esfuerzo normal.

Para materiales homogéneos, las relaciones para deformación cortante y esfuerzo cortante están definidas como:

$$e_{XY} = \frac{T_{XY}}{2G}, e_{YZ} = \frac{T_{YZ}}{2G}, e_{ZX} = \frac{T_{ZX}}{2G} \quad 3.78$$

Donde  $G$  es el módulo cortante, definido como:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad 3.79$$

Las Ecs. 3.78 indican que una componente de la deformación cortante solo depende de la correspondiente componente del esfuerzo cortante. Si se utiliza la definición de ingeniería para deformación,  $\epsilon$ , la Ec. 3.78 puede expresarse como:

$$\epsilon_{XY} = \frac{T_{XY}}{G}, \epsilon_{YZ} = \frac{T_{YZ}}{G}, \epsilon_{ZX} = \frac{T_{ZX}}{G} \quad 3.80$$

### 3.2.4 Esfuerzo y deformación en una Viga

Considere una viga recta y delgada con una sección transversal rectangular de ancho  $b$  y espesor  $h$  y un sistema de coordenadas con origen en el centro de la sección transversal, el eje  $x$  a lo largo de la longitud de la viga, y el eje  $z$  apuntando hacia abajo y sobre el espesor de la viga, Fig. 3.14. Si la viga se flexiona hacia arriba, sobre el plano  $x$ - $z$ , debido a un momento flexionante,  $M$ , Fig. 3.15, la parte superior (lado cóncavo) de la viga se comprime y la parte inferior (lado convexo) se alarga. Sin embargo, existe un plano neutral, el cual no se comprime ni se alarga por el doblamiento. Se comprobará que el plano neutral está justo a la mitad de la viga rectangular para flexión pura (por flexión pura se entiende que no hay fuerza pura axial sobre la sección transversal de la viga).

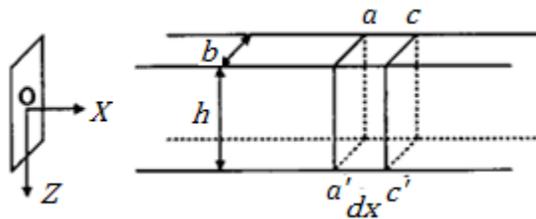


Fig. 3.14 Elemento  $dx$  de la viga. [3]

Considérese un elemento,  $dx$ , de la viga entre 2 planos verticales,  $aa'$  y  $cc'$ . El desplazamiento en la dirección  $z$  de la viga,  $w$ , es una función de la posición,  $x$ , es decir,  $w = w(x)$ . Dicha función es referida como la función de desplazamiento de la viga. Si el radio de curvatura del elemento  $dx$  es  $r$ , Fig. 3.15, para una sección horizontal del plano central ( $z = 0$ ), tenemos  $dx = r d\theta$ . Sin embargo, para una capa de la viga más allá del plano central ( $z \neq 0$ ), el material es comprimido o alargado en la dirección  $x$  debido al doblamiento. Esta elongación del material en la dirección  $x$  de la capa en  $z$  es:

$$\Delta(dx) = (r + z)d\theta - rd\theta = zd\theta \quad 3.81$$

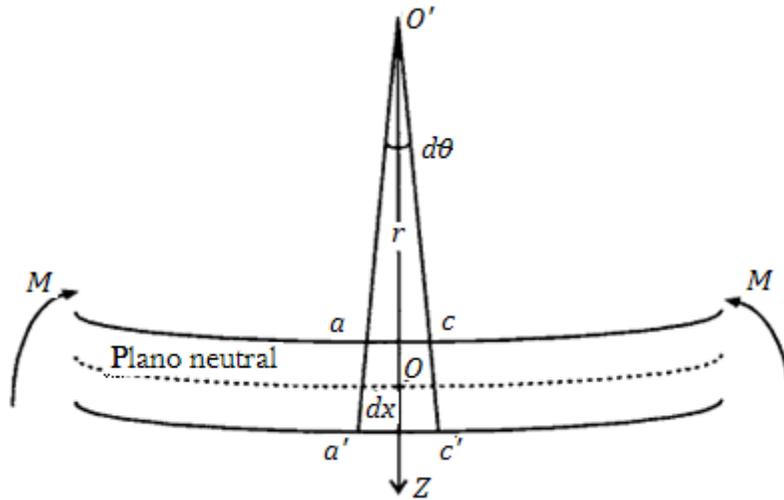


Fig. 3.15 Doblamiento bajo un momento flexionante. [3]

La deformación de la capa es la elongación relativa del material, es decir:

$$\epsilon(z) = \frac{\Delta(dx)}{dx} = \frac{zd\theta}{rd\theta} = \frac{z}{r} \quad 3.82$$

Acorde a la ley de Hooke, el esfuerzo de la capa en  $z$  es:

$$T_{xx}(z) = \frac{Ez}{r} \quad 3.83$$

El signo del esfuerzo o deformación es positivo para alargamiento y negativo para compresión. Como se asume que la viga es delgada, entonces se tiene un problema unidimensional, por tanto, no se consideran los demás esfuerzos normales y cortantes.

### 3.2.4.1 Desplazamiento de una Viga

Para una curva, el recíproco del radio de curvatura es el valor absoluto de la segunda derivada, es decir:

$$\frac{1}{r} = |w''(x)| \quad 3.84$$

De las Ec. 3.83 y 3.84 tenemos:

$$|T(z)| = Ez|w''(x)| \quad 3.85$$

Para una flexión en  $z > 0$  (por debajo del plano neutral, como la mostrada en la Fig. 3.15), la capa es alargada, es decir,  $T > 0$ , y viceversa. Por lo que, se puede establecer la siguiente relación:

$$T(z) = -Ezw''(x) \quad 3.86$$

### 3.2.4.2 Momento Flexionante y Momento de Inercia de una Viga

La definición de flexión pura dice que la fuerza axial total sobre la sección transversal es cero. De la Ec. 3.86, la fuerza axial total sobre la sección transversal es:

$$F = \int T(z)bdz = -Ebw''(x) \int_{-h/2}^{h/2} zdz \quad 3.87$$

La condición de  $F = 0$ , nos permite determinar el plano neutral de cualquier sección transversal. Como ya se mencionó, para una sección transversal rectangular el plano neutral está en  $z = 0$ .

Dentro de una viga flexionada hay fuerzas internas a través de sus secciones transversales. El momento que provoca la flexión es la integral de los momentos de dichas fuerzas a través de la sección transversal de la viga:

$$M(x) = \int zdF = \int zT(z)dA = - \int Ez^2w''(x)dA \quad 3.88$$

Notar que para la integración, el origen del eje  $z$  debe tomarse sobre el plano neutral. Si el origen no está en el plano neutral y la posición del plano está en  $z = a$ , entonces debe reemplazarse  $z$  por  $z - a$  en la Ec. 3.88. Además, si el ancho de la sección transversal no es uniforme,  $b = b(z)$ , tenemos  $dA = b(z)dz$ , y:

$$M(x) = -Ew''(x) \int z^2b(z)dz \quad 3.89$$

La integral de la Ec. 3.89 es conocida como el momento de inercia de la viga,  $I$ , es decir,  $I = \int_{-h/2}^{h/2} z^2b(z)dz$ . Para una viga con sección transversal rectangular de ancho  $b$  y espesor  $h$ , su momento de inercia es:

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad 3.90$$

La Ec. 3.89 puede escribirse como:

$$M(x) = -EIw''(x) \quad 3.91$$

De las Ecs. 3.86 y 3.91, tenemos:

$$T(z) = \frac{zM(x)}{I} \quad 3.92$$

Las 2 ecuaciones anteriores son útiles para encontrar la función del desplazamiento,  $w(x)$ , y el esfuerzo en la viga si se conoce el momento flexionante.

Acorde a la definición, el momento flexionante es positivo en signo si la viga se flexiona hacia arriba sobre ambos extremos del elemento, porque  $dF$  es positiva para  $z > 0$  y negativa para  $z < 0$ , como se observa en la Fig. 3.16. Para las fuerzas externas que crean los momentos flexionantes, la regla de los signos es: si observamos del lado izquierdo del elemento  $dx$ , el momento causado por una fuerza en sentido horario, es positivo. Sin embargo, si observamos del lado derecho el elemento  $dx$ , el momento causado por una fuerza en sentido anti horario, es positivo. Por el contrario, el momento flexionante es negativo si la viga se dobla hacia abajo en ambos lados.

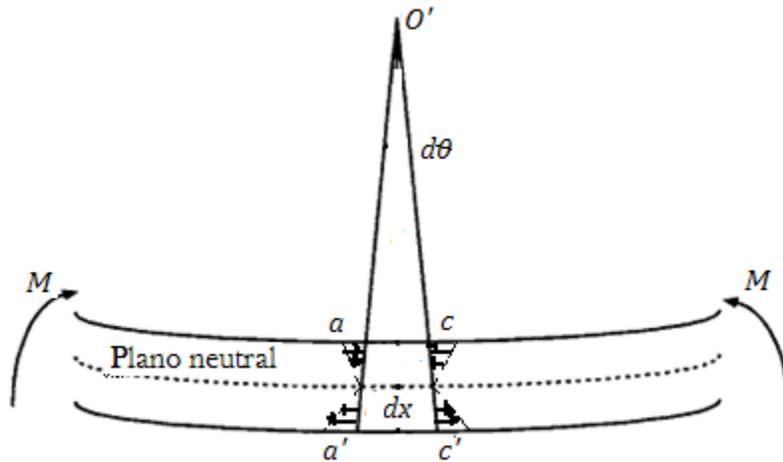


Fig. 3.16 Momento flexionante causado por las fuerzas. [3]

Considérese una viga cantiléver rectangular con una carga concentrada, Fig 3.17, con ancho  $b$ , espesor  $h$  y longitud  $L$ . Si  $F$  es la fuerza causada por una masa  $M$ , anclada en el extremo libre de la viga y la aceleración de la gravedad, es decir,  $F = Mg$ . Además, supóngase que la masa de la viga,  $M_b$ , es despreciable, con respecto a  $M$ . Para balancear la fuerza  $F$ , debe existir una fuerza  $F_0$ , actuando sobre la viga en el extremo que se encuentra fijo, por tanto en la dirección  $z$  tenemos  $F = F_0$ . Además, debe existir un momento,  $m_0$ , en el extremo fijo de la viga para balancear el momento,  $FL$  en sentido horario, causado por la fuerza  $F$ .

De la Fig. 3.17, el momento de lado izquierdo de la posición  $x$  es  $(-m_0 + F_0x)$  y el momento del lado derecho es  $-F(L - x)$ . Aplicando la condición de equilibrio se tiene que:

$$(-m_0 + F_0x) = -F(L - x) \quad 3.93$$

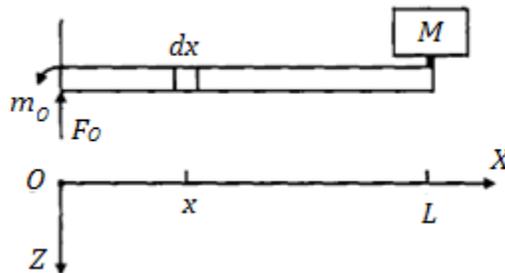


Fig. 3.17 Viga cantiléver con carga concentrada en su extremo libre. [3]

El momento flexionante de la izquierda es igual al momento flexionante de la derecha, es decir,  $M(x) = -F(L - x)$ , por tanto, la ecuación diferencial para  $w(x)$  es:

$$-EIw''(x) = -F(L - x) \quad 3.94$$

Y las condiciones de frontera para este problema son:

$$w(0) = 0, w'(0) = 0, w''(0) = 0 \quad 3.95$$

La solución a las Ecs 3.94 y 3.95 es:

$$w'(x) = \frac{F(2L - x)x}{2EI} = \frac{6F(2L - x)x}{Ebh^3} \quad 3.96$$

$$w(x) = \frac{F(3L - x)x^2}{6EI} = \frac{2F(3L - x)x^2}{Ebh^3} \quad 3.97$$

El máximo desplazamiento ( $x = L$ ) es:

$$w_{MAX} = \frac{FL^3}{3EI} = w(L) = \frac{4L^3}{Ebh^3} F \quad 3.98$$

Por lo tanto, la constante de rigidez de una viga de sección transversal rectangular es:

$$k = \frac{Ebh^3}{4L^3} = \frac{3EI}{L^3}, \text{ donde } I \text{ es el momento de inercia del área transversal.}$$

De la Ec. 3.86, el máximo esfuerzo sobre la parte superior de la viga ( $z = -h/2$ ) es:

$$T(x) = -E \left( -\frac{h}{2} \right) w''(x) = \frac{Fh(L - x)}{2I} = \frac{6F(L - x)}{bh^2} \quad 3.99$$

De la Ec. 3.99, el máximo esfuerzo en  $x = 0$  es:

$$T_{MAX} = \frac{FhL}{2I} = \frac{6FL}{bh^2} \quad 3.100$$

En el análisis anterior se analizaron las relaciones entre fuerza y desplazamiento para determinar la constante de rigidez de una viga de sección transversal. En la siguiente sección se determinará la constante de torsión de una viga, la cual esta bajo la acción de un torque.

### 3.2.5 Torsión de Vigas

Cuando un torque,  $T$ , es aplicado sobre el extremo libre de una viga cantiléver, la viga experimenta un desplazamiento angular (torsión) hasta que un torque de restauración balancea al torque aplicado. Dentro del rango elástico, como se revisó en la sección 3.1.2, la relación entre el ángulo de torsión,  $\Phi$ , y el torque es:

$$T = k_{\Phi} \Phi \quad 3.101$$

Donde  $k_\phi$  es denominada como la constante de torsión de la viga. Este tipo de vigas son llamadas barras de torsión.

Primero se tratará el caso de una barra de torsión con sección transversal circular. Para determinar la constante de torsión hay que considerar un cilindro sólido de radio  $a$  y longitud  $L$ , y seguir el siguiente análisis:

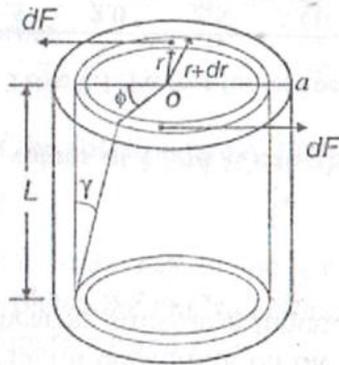


Fig. 3.18 Barra de torsión circular. [3]

Considerar un elemento cilíndrico entre  $r$  y  $r+dr$ . El área efectiva  $dA$  sobre la cual una fuerza tangencial,  $dF$ , se aplica es la mitad del área de la sección transversal, es decir,  $dA = \pi r dr$ . De acuerdo a la definición del módulo cortante (shear modulus)  $G$ , tenemos:

$$G = \frac{dF}{\gamma dA} \quad 3.102$$

Donde  $\gamma$  es el ángulo cortante como se muestra en la Fig. 3.18. Como  $\gamma = \Phi r/L$ , tenemos:

$$dF = \frac{\pi r^2 G \Phi}{L} dr \quad 3.103$$

El torque sobre la parte superior del cilindro es:

$$T = 2 \int_0^a r dF = \frac{\pi G a^4}{2L} \Phi = k_\phi \Phi \quad 3.104$$

Por tanto, la constante de torsión de un cilindro sólido es:

$$k_\phi = \frac{\pi G a^4}{2L} \quad 3.105$$

Ahora bien, el análisis de la constante de torsión para una barra de torsión con sección transversal rectangular es un poco más complicado. Según Bao [3] la relación teórica es:

$$T = \frac{1}{3L} G \Phi a^3 b \left( 1 - \frac{192a}{\pi^5 b} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh \frac{n\pi b}{2a} \right) \quad 3.106$$

Donde  $\Phi$  es ángulo de torsión de la barra,  $a$  y  $b$  las longitudes del lado más corto y más largo de la sección transversal rectangular ( $b > a$ ). En general, esta relación puede ser expresada como:

$$T = \frac{k_1 G \Phi a^3 b}{L} \quad 3.107$$

$$k_\phi = \frac{T}{\phi} = \frac{k_1 G a^3 b}{L} \quad 3.108$$

Donde  $k_1$  es un factor numérico que depende de la relación  $a/b$ . Algunos valores son dados en la Tabla 3.1.

$b/a$	1.0	1.2	1.5	2.0	2.5	3.0	4.0	5.0	10	$\infty$
$k_1$	0.141	0.166	0.196	0.229	0.249	0.263	0.281	0.291	0.312	0.333

Tabla 3.1 Factores para la relación de torsión. [3]

### 3.2.6 Frecuencia de Vibración

La vibración de una estructura mecánica puede simplificarse considerando un modelo masa-resorte, Fig. 3.19. El origen del eje  $x$  coincide con la posición de balance de la masa. Un desplazamiento  $x$  de la masa, desde su posición de balance, causa una fuerza de restauración sobre la masa debida al resorte,  $F = -kx$ ,  $k$  es la constante elástica del resorte, El signo negativo indica que la fuerza esta en dirección opuesta a la del eje  $x$ . Si no hay otra fuerza que actúe sobre la masa,  $M$ , la ecuación diferencial del sistema es:

$$M\ddot{x} = -kx \quad 3.109$$

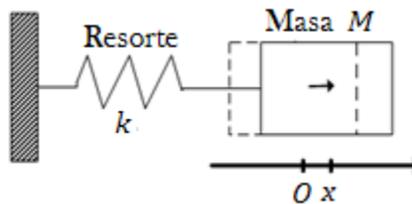


Fig. 3.19 Modelo masa-resorte. [3]

Si  $\omega^2 = k/M$ , tenemos:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad 3.110$$

La solución general para la Ec. 3.110 es una vibración de la masa;  $x = A \text{sen}(\omega t + \alpha)$ . Donde  $\omega$  es la frecuencia radial,  $A$  es la amplitud y  $\alpha$  el ángulo de desfase de la vibración. Como puede observarse, sólo los parámetros  $k$  y  $M$  determinan la frecuencia radial  $\omega$ .

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} \quad 3.111$$

Este mismo método puede utilizarse para barras de torsión. Si consideramos una barra de torsión con una masa en su extremo libre. Esta estructura puede ser considerada como un sistema masa-resorte. Cuando la barra es torsionada un ángulo  $\Phi$  en su extremo libre, el torque de restauración que actúa sobre la masa es:

$$T = -k_{\phi}\phi \quad 3.112$$

Si para la rotación de una masa,  $I_{\phi}$  es el momento de inercia, por la Segunda Ley de Newton, tenemos la ecuación diferencial para el movimiento de torsión:

$$I_{\phi}\ddot{\phi} + k_{\phi}\phi = 0 \quad 3.113$$

La solución a la Ec. 3.113 es una oscilación angular;  $\phi = A \text{sen}(\omega t + \alpha)$ . Por lo que, la frecuencia radial de oscilación es:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{\phi}}{I_{\phi}}} \quad 3.114$$

Cabe mencionar que existen diversos métodos para calcular la frecuencia de vibración de un sistema mecánico, como el método de Rayleigh-Ritz, con los cuales se obtienen resultados similares, sin embargo dichos métodos requieren de un análisis más complejo.

### 3.3 Instrumentos Medidores de Vibraciones

El elemento básico de muchos instrumentos medidores de vibraciones es la unidad sismica mostrada en la Fig. 3.20, la cual consiste de una masa, un resorte y un amortiguador. Dependiendo del rango de frecuencias que excitan al instrumento; el desplazamiento, la velocidad o la aceleración pueden ser registrados por el movimiento relativo de la masa suspendida, con respecto a la caja.

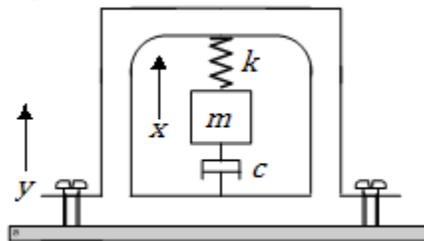


Fig. 3.20 Sistema masa-resorte-amortiguador. [13]

Para determinar el comportamiento de un instrumento medidor de vibraciones consideremos la ecuación de movimiento de  $m$ , que es:

$$m\ddot{x} = -c(\dot{x} - \dot{y}) - k(x - y) \quad 3.115$$

Donde  $x$  y  $y$  son los desplazamientos de la masa sísmica y del cuerpo vibrante, respectivamente, medidos con respecto a una referencia inercial. Si nombramos el desplazamiento relativo de la masa  $m$  con respecto al del cuerpo vibrante como:

$$z = x - y \quad 3.116$$

Y se supone que el cuerpo vibrante tiene un movimiento senoidal, es decir,  $y = Y \text{ sen } \omega t$ , podemos obtener la ecuación:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = m\omega^2 Y \text{ sen } \omega t \quad 3.117$$

Tratándose de una ecuación diferencial de segundo grado, según Thompson [13] la solución estacionaria es de la forma:

$$z = Z \text{ sen } (\omega t - \varphi) \quad 3.118$$

Por lo que la amplitud y la fase de la ecuación anterior se calculan sustituyendo la Ec. 3.118 en la Ec. 3.117, así mismo mencionar que en el movimiento armónico las fases de velocidad y aceleración están adelante del desplazamiento en  $90^\circ$  y  $180^\circ$  respectivamente, donde  $Z$  queda definida como:

$$Z = \frac{m\omega^2 Y}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} = \frac{Y \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad 3.119$$

$$\tan \theta = \frac{c\omega}{k - m\omega^2} = \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad 3.120$$

Donde  $\omega_n$  y  $\xi$  son la frecuencia natural de oscilación y el factor de amortiguamiento del sistema, respectivamente, los cuales están dados por:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad 3.121$$

$$\xi = \frac{c}{2m\omega_n} \quad 3.122$$

De las Ecs. 3.119 y 3.120 los principales parámetros involucrados son la razón de frecuencias  $\omega/\omega_n$  y el factor de amortiguamiento  $\xi$ . Las Figs. 3.21 y 3.22 muestran un grafico de estas ecuaciones. El tipo de instrumento, sismómetro o acelerómetro, que se obtenga está determinado por el rango útil de frecuencias con respecto a la frecuencia natural  $\omega_n$  del instrumento.

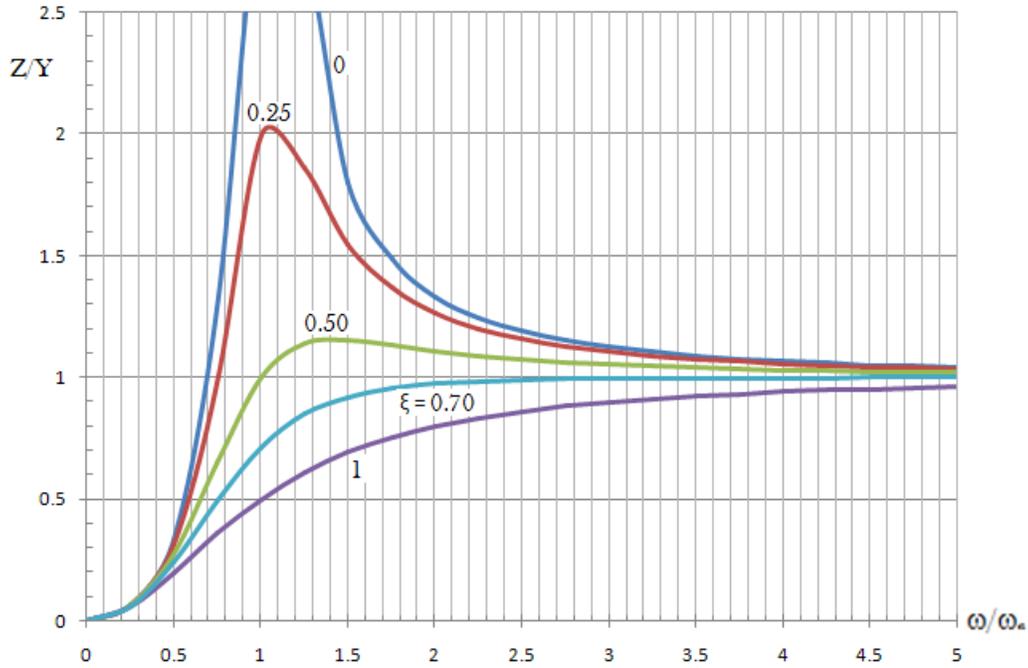


Fig. 3.21 Respuesta de un instrumento medidor de vibraciones,  $|Z/Y|$  vs  $\omega/\omega_n$ . [13]

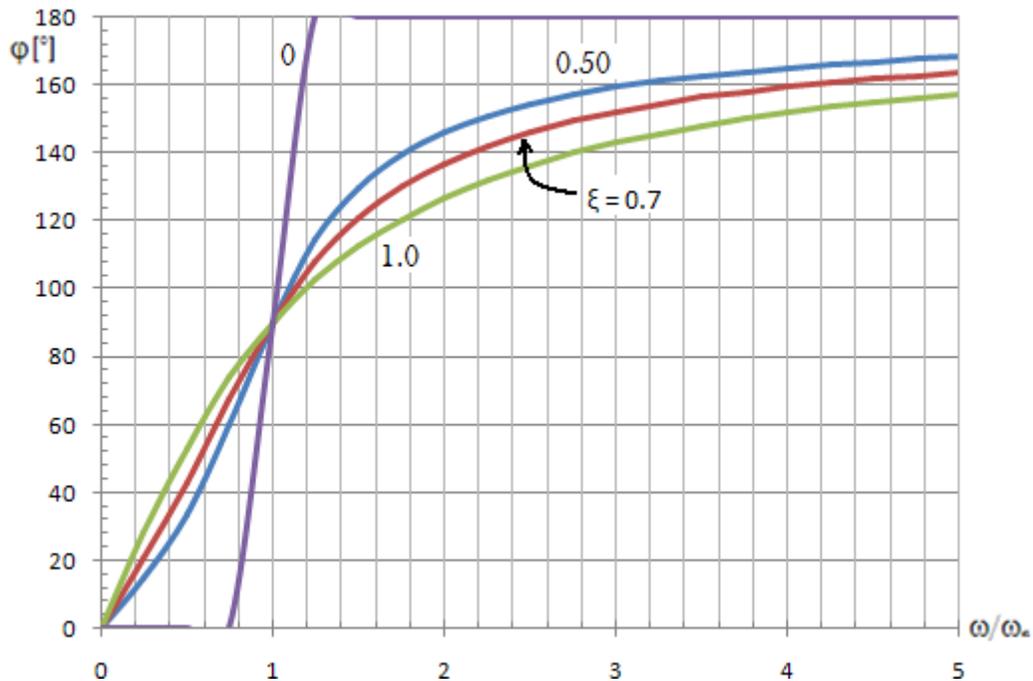


Fig. 3.22 Respuesta de un instrumento medidor de vibraciones, Angulo  $\phi$  vs  $\omega/\omega_n$ . [13]

### 3.3.1 Sismómetro

Cuando la relación  $\omega/\omega_n$  es un número muy grande, debido a que la frecuencia natural,  $\omega_n$ , del instrumento es baja con respecto a la vibración que se va a medir, el desplazamiento relativo  $Z$  se aproxima a  $Y$ , no importando el valor del amortiguamiento. Por lo que la masa

$m$  permanece estacionaria mientras que la carcasa se mueve junto con la base. A este tipo de instrumentos se les denomina sismómetros.

Una desventaja del sismómetro es su gran tamaño. Como  $Z = Y$ , el movimiento relativo de la masa sísmica debe ser del mismo orden de magnitud que el de la vibración que se va a medir, teniendo una frecuencia natural de 1 a 5 Hz y un rango útil de frecuencia de 10 a 2000 Hz.

### 3.3.2 Acelerómetro

Cuando la frecuencia natural es alta comparada con la vibración a ser medida, el instrumento registra aceleración. Examinando el denominador de la Ec. 3.119, se observa que el factor

$$\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Se aproxima a uno cuando la relación de  $\omega/\omega_n \rightarrow 0$ , de modo que

$$Z = \frac{\omega^2}{\omega_n^2} Y = \frac{\text{Aceleracion}}{\omega_n^2} \quad 3.123$$

De manera que,  $Z$  es proporcional a la aceleración del movimiento que se va a medir, con un factor  $1/\omega_n^2$ . El rango útil del acelerómetro puede verse al graficar la siguiente expresión:

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

La gráfica de la Fig. 3.23 muestra el rango de frecuencias útiles para diferentes factores de amortiguamiento del acelerómetro. Para el caso en que el amortiguamiento es nulo,  $\xi=0$ , su rango de operación es muy limitado. Sin embargo, con un factor de amortiguamiento de  $\xi = 0.7$ , el rango de frecuencia útil es  $0 \leq \omega/\omega_n \leq 0.2$ , con un error máximo menor al 0.01%. Así, un instrumento con una frecuencia natural de 100 Hz, tiene un rango de frecuencia útil entre 0 y 20 Hz, con un error despreciable. De manera que los diseñadores buscan obtener un factor  $\xi$  de 0.7 que no solo extiende el rango de frecuencia útil, sino que también evita distorsión de fase para ondas complejas, como se muestra a continuación.

Algo muy importante a considerar es que para reproducir una onda compleja sin cambiar su forma, la fase relativa de todas las componentes armónicas debe permanecer invariable con respecto a la fundamental. Esto requiere que el ángulo de desfaseamiento sea cero o que todas las componentes armónicas sean desplazadas igualmente.

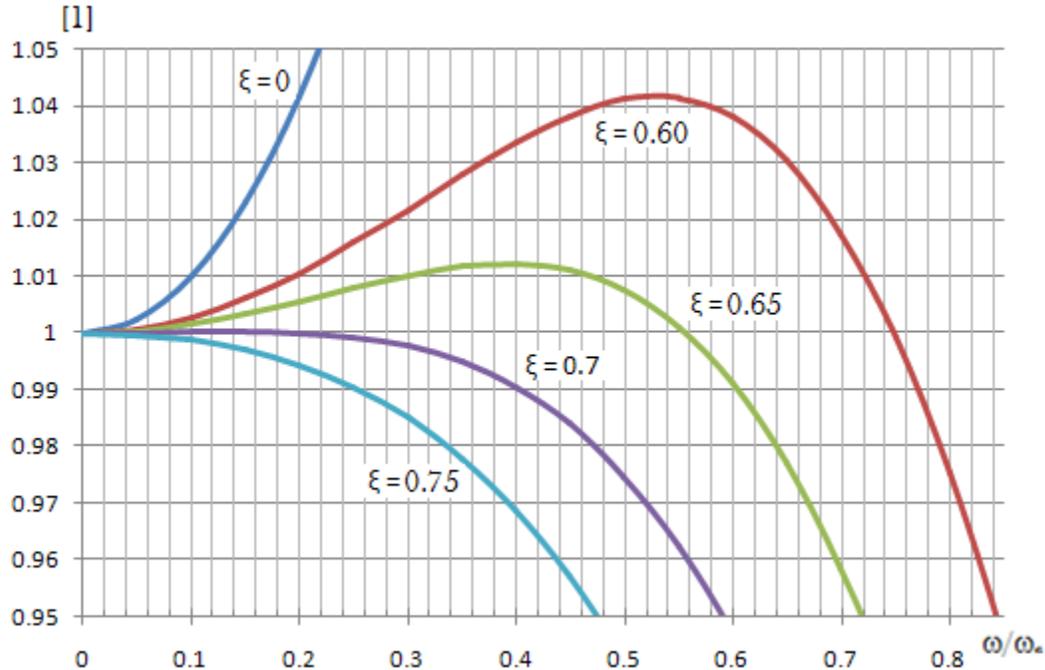


Fig. 3.23 Error de Aceleración vs Frecuencia ( $\omega/\omega_n$ ) con  $\xi$  como parámetro. [13]

El primer caso, de desplazamiento nulo de fase, corresponde a  $\xi = 0$  para  $\omega/\omega_n < 1$ . Para el segundo caso, de igual desfase en todas las componentes armónicas, casi se satisface para  $\xi = 0.7$  si  $\omega/\omega_n < 1$ , por lo que, en este caso el ángulo de fase puede expresarse como:

$$\varphi \cong \frac{\pi}{2} \frac{\omega}{\omega_n} \quad 3.124$$

Así, para  $\xi = 0$  o  $\xi = 0.7$ , la distorsión de fase es prácticamente eliminada, sin embargo, en el primer caso el ancho banda decrece considerablemente, mientras que para  $\xi = 0.7$ , la distorsión de fase es aproximadamente cero y el ancho de banda se incrementa, un resultado que es de gran utilidad en las consideraciones de diseño.

### 3.4 Escalamiento de Dispositivos Micromecánicos

Una persona puede tener la sensación del tamaño de las cosas con solo observar a su alrededor. Las bacterias y los virus son de muchos órdenes de magnitud más pequeñas que las hormigas; el sistema de carreteras de algún país es varios órdenes de magnitud más grande que la ballena más grande; y la órbita de la Tierra es de muchos órdenes de magnitud más grande que el sistema carretero de cualquier país. Incrementando otros órdenes de magnitud llegamos a las distancias interestelares.

Cuando la escala, o tamaño, de un sistema cambia por muchos órdenes de magnitud, el sistema tiende a funcionar de forma muy diferente. Por ejemplo, considerar un recipiente de agua de aproximadamente 5 cm de lado. Al verter el agua en el vaso sobre una tabla, se observa como el agua fluye y se va a los bordes de la tabla. Si el tamaño del vaso de agua es

decrementado por un factor de 100, ahora el vaso es de 0.05 cm (0.5 mm) de cada lado. Al verter el agua contenida en el vaso sobre la tabla, se observa como la tensión superficial retiene el agua en una gota que se mantiene sobre la tabla. Si se gira la tabla sobre uno de sus lados se observa que es difícil hacer que la gota fluya a uno de los bordes de la tabla. Ahora bien, si se vuelve a decrementar el tamaño del vaso por otro factor de 100, ahora el vaso es de 0.0005 cm, o 5  $\mu\text{m}$ , de lado. Si se intenta verter una gota de este tamaño sobre la tabla, es muy probable que inclusive no alcance la tabla, alguna corriente de aire se presente y se lleve la gota lejos.

En cada caso, la sustancia es la misma, agua, y la tabla es la misma, pero el cambiar el tamaño de escala del agua provoca que su comportamiento sea muy diferente. Inclusive el hecho de verter el cristal sobre la tabla es diferente. En el primer caso el agua fluye, mientras que el agua en 0.05 cm y 0.0005 cm esta limitada por la tensión superficial.

Es así como, la teoría de escalamiento es una valiosa guía que permite saber que puede trabajar y que no podrá trabajar.

### 3.4.1 Leyes de Escalamiento

Cuando el tamaño de un sistema cambia, sus parámetros físicos también cambian, a veces de forma dramática. [14] Para entender estos cambios, considérese el factor de escala  $S$ . Este factor es similar a la notación de 1:10, usualmente usada en los dibujos técnicos, la cual indica que el objeto es 10 veces el tamaño del dibujo. En el microdominio, la escala debe ser 10:1, la cual significa que el objeto es 10 veces más pequeño que el dibujo. Cuando la escala cambia, todas las dimensiones del objeto cambian exactamente por la misma cantidad  $S$ , tal que 1: $S$ .

Este factor de escala  $S$  puede ser usado para describir como los fenómenos físicos cambian. Todas las longitudes de la escala de un dibujo se escalan por el factor  $S$ , pero otros parámetros como el volumen se escalan diferente. El volumen  $V$  es la longitud  $L$  por el ancho  $W$  y por la altura  $H$ , o también:

$$V = L * W * H$$

Cuando la escala cambia por 1/100 (decrece por un factor de 100), la longitud, el ancho y la altura cambian 1/100, y el volumen decrece por  $(1/100)^3$  o 1/1,000,000. El volumen decrece por un factor de un millón cuando la escala decrece por un factor de 100.

$$V = S^1 * S^1 * S^1 = S^3$$

Por tanto, el volumen es un ejemplo de un parámetro que se escala como  $S^3$ . De igual forma, la masa es un parámetro que se escala como el volumen, sabemos que la masa  $M$  de un objeto se define como la densidad  $\rho$  del material por su volumen  $V$ , o también:

$$M = \rho * L * W * H = \rho * V$$

Donde se asume que la densidad es constante ( $S^0$ ), por lo que la masa de un objeto se escala como:

$$M = \rho * V = S^0 * S^3 = S^3$$

### 3.4.2 Notación Vertical de Trimmer

Esta notación matemática captura las leyes del escalamiento en una forma conveniente. Este arreglo muestra diferentes leyes de escalamiento en una sola notación y puede utilizarse fácilmente para entender que ocurre a los diferentes términos y parámetros de una ecuación cuando el tamaño de la escala cambia.

En esta notación, por ejemplo, si se consideran 4 diferentes leyes de fuerza,  $F = S^1$ ,  $F = S^2$ ,  $F = S^3$ ,  $F = S^4$ , y se agrupan dentro de una matriz vertical:

$$F = \begin{bmatrix} S^1 \\ S^2 \\ S^3 \\ S^4 \end{bmatrix}$$

El elemento del primer renglón de este arreglo se refiere al caso en el que la fuerza se escala como  $S^1$ , el siguiente elemento cuando se escala la fuerza como  $S^2$ , y así sucesivamente.

Veamos como la aceleración y el tiempo de transición cambian para diferentes fuerzas. La aceleración  $a$  es igual a la fuerza  $F$  dividida por la masa  $m$ :

$$a = \frac{F}{m} = F * m^{-1}$$

Sabemos que la masa se escala como  $S^3$ , y  $m^{-1}$  se escala como  $S^{-3}$ , quedando:

$$a = \begin{bmatrix} S^1 \\ S^2 \\ S^3 \\ S^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S^3 \\ S^3 \\ S^3 \\ S^3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} S^1 \\ S^2 \\ S^3 \\ S^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S^{-3} \\ S^{-3} \\ S^{-3} \\ S^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^{-2} \\ S^{-1} \\ S^0 \\ S^1 \end{bmatrix}$$

Este es un resultado interesante. Cuando la fuerza se escala como  $S^1$ , la aceleración se escala como  $S^{-2}$ . Si el tamaño de un sistema se decreta por un factor de 100, la aceleración se incrementa por  $(1/100)^{-2} = 10,000$ . Por tanto, si el sistema es más pequeño, la aceleración se incrementa. Una de las fuerzas predominantes en el microdominio son las escaladas como  $S^2$ . Para estas fuerzas, la aceleración se escala como  $S^{-1}$ , si decrece el tamaño por un factor de 100, la aceleración se incrementa por un factor de 100, todavía existe un buen incremento de la aceleración. En general, los sistemas pequeños tienden a acelerarse rápidamente. Cuando la fuerza se escala como  $S^3$ , la aceleración permanece constante,  $(1/100)^0 = 1$ , y la aceleración decrece para fuerzas que se escalan como  $S^4$ . Es así como, en una sola notación se muestra el escalamiento para 4 diferentes leyes de fuerza.

El tiempo de transición  $t$  para mover un cuerpo desde  $A$  hasta  $B$  puede ser calculado como:

$$x = \frac{1}{2} at^2 \quad t = \sqrt{\frac{2x}{a}} = \sqrt{2} * x^{0.5} * a^{-0.5}$$

$$t = \begin{bmatrix} S^0 \\ S^0 \\ S^0 \\ S^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S^1 \\ S^1 \\ S^1 \\ S^1 \end{bmatrix}^{0.5} \begin{bmatrix} S^{-2} \\ S^{-1} \\ S^0 \\ S^1 \end{bmatrix}^{-0.5} = \begin{bmatrix} S^0 \\ S^0 \\ S^0 \\ S^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S^{0.5} \\ S^{0.5} \\ S^{0.5} \\ S^{0.5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S^{0.1} \\ S^{0.5} \\ S^0 \\ S^{-0.5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^{1.5} \\ S^1 \\ S^{0.5} \\ S^0 \end{bmatrix}$$

Para el caso donde la fuerza se escala como  $S^2$ , el tiempo de transición  $t$  se escala como  $S^1$ . Si el sistema decrece por un factor de 100, el tiempo de transición decrece por un factor de 100. De nueva cuenta, sabemos de forma intuitiva; las cosas pequeñas tienden a ser rápidas.

Dependiendo de la ecuación y las variables de interés, la notación vertical de Trimmer puede ser configurada de formas diferentes.

Veamos como se escala la fuerza gravitacional entre un objeto y la Tierra (la masa de la Tierra permanece constante y la masa del objeto se escala como su volumen,  $S^3$ ). La fuerza entre 2 objetos es:

$$F = G \frac{M_1 * M_2}{r^2}$$

Donde  $F$  es la fuerza;  $G$  es la constante gravitacional ( $G = 6.670 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$ ), la cual no cambia con el tamaño de la escala;  $M_1$  y  $M_2$  son las masas de los objetos; y  $r$  es la separación. De esta forma, la fuerza gravitacional  $F$  se escala como:

$$F = S^0 \frac{S^3 * S^3}{S^2} = S^4$$

Ahora, suponiendo que la densidad no es constante con el tamaño de la escala. La densidad podría ser representada como:

$$\rho = \begin{bmatrix} S^0 \\ S^{-1} \\ S^{-2} \\ S^{-3} \end{bmatrix}$$

Entonces la fuerza gravitacional  $F$  queda como:

$$F = G \frac{M_1 * M_2}{r^2} = F = G \frac{\rho V_1 * \rho V_2}{r^2} = G * \rho^2 * V_1 * V_2 * r^{-1}$$

$$F = S^0 \begin{bmatrix} S^0 \\ S^{-1} \\ S^{-2} \\ S^{-3} \end{bmatrix}^2 S^3 S^3 S^{-2} = S^0 \begin{bmatrix} S^0 \\ S^{-2} \\ S^{-4} \\ S^{-6} \end{bmatrix} S^3 S^3 S^{-2} = \begin{bmatrix} S^4 \\ S^2 \\ S^0 \\ S^{-2} \end{bmatrix}$$

Del primer renglón, donde la densidad no cambia con la escala, la fuerza se escala como  $S^4$ , que es el mismo resultado obtenido en el análisis anterior. Del tercer renglón, cuando la densidad se escala como  $S^{-2}$ , la fuerza gravitacional permanece constante cuando el tamaño de la escala cambia. Esto es, si los objetos astronómicos llegaran a ser menos densos entonces llegarían a ser más grandes (ya que  $\rho = S^{-2}$ ), entonces la fuerza gravitacional entre los objetos permanece constante ( $F = S^0$ ).

Continuando, sabemos que el trabajo  $W$  es la fuerza  $F$  por la distancia  $D$ , o:

$$W = F * D$$

Aplicando la notación, tenemos;

$$W = F * D = \begin{bmatrix} S^1 \\ S^2 \\ S^3 \\ S^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S^1 \\ S^1 \\ S^1 \\ S^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^2 \\ S^3 \\ S^4 \\ S^5 \end{bmatrix}$$

Sabemos que la fuerza gravitacional se escala como  $S^4$ , observando el último renglón, vemos que una fuerza escalada como  $S^4$ , que da trabajo o energía, es escalada como  $S^5$ . Si el tamaño del sistema decrece por un factor de 1000 (es decir, de 10 cm a 0.1 mm), la energía gravitacional requerida para mover un objeto del fondo de una máquina hasta la parte superior bajo consideración decrece por  $(1/1000)^5 = 1/1,000,000,000,000,000$ . El trabajo gravitacional decrece significativamente, Aunque esto se conoce intuitivamente, si se deja caer a una hormiga desde 10 veces su altura, esta sigue como si nada hubiera ocurrido.

$$F = \begin{bmatrix} S^1 \\ S^2 \\ S^3 \\ S^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \textit{Tensión superficial} \\ \textit{Electrostática, Presión, Biológicas, Magnéticas} (J = S^{-1}) \\ \textit{Magnéticas} (J = S^{-0.5}) \\ \textit{Gravitacional, Magnéticas} (J = S^0) \end{bmatrix}$$

El listado de arriba muestra como se escalan las diferentes fuerzas. La tensión superficial tiene el factor de escala  $S^1$  y se incrementa relativamente más rápido que otras fuerzas cuando un sistema llega a ser más pequeño; sin embargo, cambiar la tensión superficial usualmente requiere cambiar la temperatura, alterando algún parámetro que es difícil de controlar. Muchas fuerzas usadas por los microdiseñadores se escalan como  $S^2$ . Estas incluyen fuerzas electrostáticas, fuerzas generadas por presiones, y fuerzas biológicas. Las fuerzas magnéticas se escalan dependiendo de cómo se escala la densidad de corriente (corriente por unidad de área de las bobinas). Si la densidad de corriente  $J$  en las bobinas permanece constante ( $S^0$ ), la fuerza magnética entre 2 bobinas se escala como  $S^4$ , y en este caso las fuerzas magnéticas son débiles en el microdominio; sin embargo, se puede eliminar calor mas eficientemente de un volumen pequeño, y la densidad de corriente de una microbobina puede ser mucho mas

grande que el de una bobina grande. Si la densidad de corriente se escala como  $S^{-1}$  cuando el sistema decrece por un factor de 10, la densidad de corriente se incrementa por un factor de 10. En este caso, la bobina tiene mayores pérdidas resistivas, por lo que la fuerza con más ganancia es la que se escala como  $S^2$ .

Por último, el escalamiento provee una buena guía de cómo funcionan las cosas y ofrece ideas en los sistemas pequeños, pero el escalamiento es solo eso - una buena guía.

Usualmente no provee soluciones exactas. Por tanto, la creatividad e intuición son partes de un diseño excelente: *el escalamiento es una guía para entender cuales elementos de diseño son importantes.* [14]