

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

TESIS

“ANÁLISIS DINÁMICO DE LA SUSPENSIÓN DE UN  
VEHÍCULO TIPO FORMULA SAE”

Para obtener el título como Ingeniero  
Mecánico.

Ing. Armando Sánchez Guzmán

Alumno. Contreras Nava Omar

## INDICE

INTRODUCCIÓN.....	3
1. Objetivo.....	3
Antecedentes.....	4
CAPITULO 1 Análisis dinámico de una suspensión.....	8
1.1. Descripción del sistema de la suspensión.....	8
1.2. Ecuaciones de la dinámica del automóvil.....	11
1.2.1. Plano horizontal.....	11
1.2.2. Estudio de las fuerzas a las que se somete un vehículo en un camino inclinado. ....	13
1.2.3. Análisis dinámico de las fuerzas que se involucran cuando un automóvil tiene cierta aceleración.....	15
1.2.4. Vehículo acelerando en un camino inclinado ....	18
1.2.5. Carro estacionado en un camino con inclinación lateral ....	19
CAPITULO 2. Propuesta y validación de la suspensión.....	21
CONCLUSIONES.....	36
Bibliografía.....	39
Apéndices.....	40
Apéndice A Desarrollo de ecuaciones.....	40
Apéndice B Tablas de datos.....	60

## INTRODUCCIÓN

En una revisión de trabajos de investigación referente a los problemas que se tienen en una suspensión de los vehículos de formula SAE son principalmente tres, 1. El diseño. 2. La manufactura y 3. La unión en materiales compuestos (horquillas deformadas por las cargas producidas en las competencias, horquillas rotas, masas fracturadas, elementos de la dirección rotos o deformados) así como los costos y métodos de fabricación y unión son factores de relevante análisis. Este trabajo de tesis analizará las fuerzas que actúan en la suspensión del vehículo FSAE con la finalidad de obtener una configuración adecuada a los circuitos del FSAE, para este análisis se apoyará en diferentes herramientas como software para un análisis detallado del diseño que se propone en los siguientes capítulos, así como también en diversa bibliografía, esto con el fin de aportar datos relevantes en el estudio de la suspensión de un vehículo formula SAE.

### 1. Objetivo

Analizar dinámicamente la suspensión de un vehículo de formula SAE para obtener las cargas a las que se encuentra sometida, para proponer una configuración que las resista.

En los antecedentes se describirá el origen y reglas de la Formula SAE. En el capítulo 1 se explicará el conjunto de la suspensión y el desarrollo de las ecuaciones que se utilizaran para identificar las fuerzas que actúan en la suspensión. En el capítulo 3 se describirá la propuesta y validación de una suspensión propuesta a partir de los datos obtenidos del capítulo 2.

## Antecedentes

“La FSAE (Formula SAE) es una competencia de diseño estudiantil. Organizada por SAE internacional (antiguamente sociedad automotriz de ingenieros). La Primera competencia inicio en 1979 después Mark Marshek, entonces en la universidad de Houston Texas contacto al departamento de relaciones con la educación SAE en 1978 para discutir agregar una variante al evento de Mini Baja; el nombre Mini Indy fue encontrado. Como muchos organizadores han encontrado, el trabajo en construir un carro puede ser excedido solo por los organizadores del evento, en 1980 fallo el proceso de organización. Teniendo visto el potencial del evento, Mike Best, Robert Edwards y John Tellkamp estudiantes de la universidad de Austin Texas se acercaron al Dr. Ron Matthews con una idea de cómo acercarse a otra Mini Indy, pero con algunos cambios. Hacer las reglas más abiertas dejar ser ilimitado como una posibilidad. Se desearía que esta nueva competencia tomara carros a otro nivel de ingeniería. La competencia de Baja fue grandiosa para el diseño del chasis, pero muchos estudiantes querían trabajar en mejores motores. Las nuevas reglas guardarían restricciones al motor a un bar mínimo de presión. Algún motor de cuatro tiempos fue permitido por los primeros cuatro años con la limitante de 25.4 mm en la admisión como restricción.

Con el apoyo de los estudiantes el Dr. Ron Matthews contacto al departamento de relaciones con la educación de SAE y la puesta en movimiento de las ruedas. Diferenciaron este nuevo evento del Mini Indy. Un nuevo nombre se busco, que reflejara mejor la naturaleza de la pista de carreras y el incremento de contenido de ingeniería. Con lo que se adopto el nombre de Formula SAE.” (<http://students.sae.org/competitions/formulaseries/about.htm>)

Y con esto se tuvo el origen de la FSAE, una competencia de estudiantes en pistas de carreras, con vehículos a los que se le desarrolla ingeniería.

De acuerdo a los requerimientos de la formula SAE:

La formula SAE dentro de sus reglas indica que se debe de tener una distancia entre ejes (wheelbase) de 1525 mm (60 inches) y un ancho (track) no menor al 75% del lo largo de dicha dimensión que se calcula de la siguiente manera: con la ecuación de la condición de Ackerman,

$$\cot\delta_0 - \cot\delta_i = \frac{w}{l} \text{ Donde } w:\text{track}$$

$l$ :wheelbase

Y  $\delta_0$  y  $\delta_i$  son los ángulos del centro de rotación al centro de cada rueda donde  $\delta_i$  es la rueda interna a la curva y  $\delta_0$  la rueda externa a la curva. Estos datos son muy importantes porque con ellos aventajaremos para la prueba de FSAE SKIDPAD LAYOUT, prueba descrita a continuación en la figura 1.1:

Este evento consta de 8 subeventos los cuales tratan en general sobre una prueba de dar giros en una curva de radio constante

FORMULA SAE

SAE International

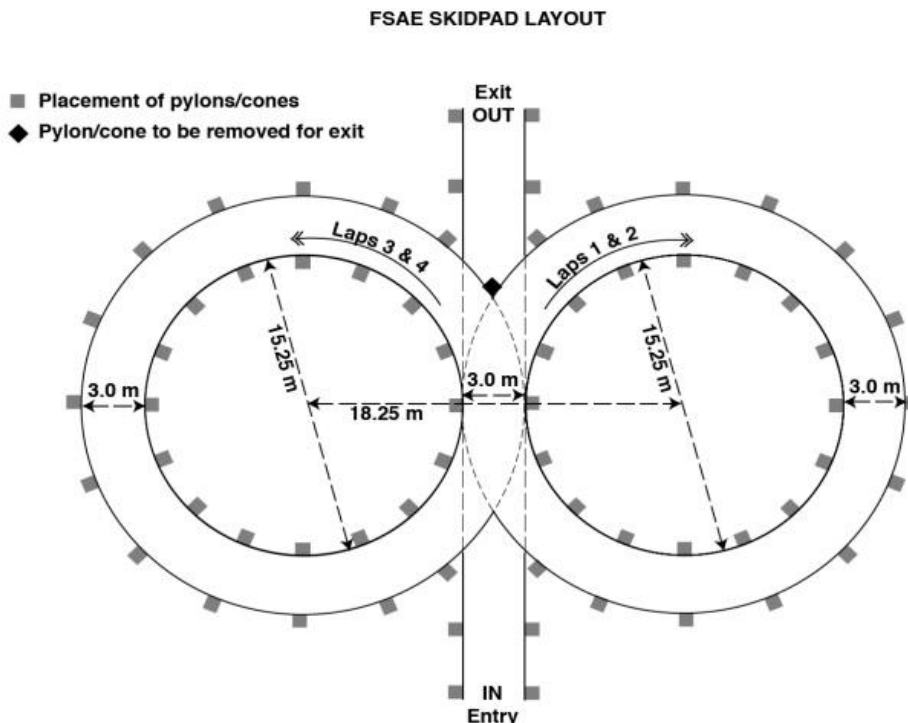


Figura 1.1 Imagen ilustrativa tomada de <http://students.sae.org/competitions/formulaseries/rules/2013fsaerules.pdf> para ilustrar la prueba SKID-PAD

entonces:

$$R = \sqrt{a_2^2 + l^2 \cot^2 \delta}$$

Donde:

$$\cot \delta \text{ es: } \frac{\cot \delta_0 + \cot \delta_i}{2}$$

$a_2^2$ : es la distancia del eje trasero al centroide del vehículo elevada al cuadrado

De esta manera se obtiene un primer punto para el diseño de la suspensión.

El siguiente punto a considerar son los tipos de materiales y correcta manufactura del habitáculo. Los materiales permitidos en las otras partes del vehículo y los requerimientos a cumplir como modulo de Young, esfuerzo de cedencia y esfuerzo último, así como requerimientos en soldadura, espesor de pared y su aplicación.

Hay también pruebas ó inspecciones técnicas las cuales son importantes porque con ellas se otorga el permiso para correr o practicar en la pista. Estas son:

Part 1 - Electrical and mechanical scrutineering

Part 2 - Tilt table test. Esta prueba es muy importante en este caso particular porque trata de poner al vehículo en in plano inclinado como su nombre lo indica, la inclinación es de 45° y 60°, con lo cual se tiene otra consideración para nuestra suspensión.

Part 3 - Noise, Master swicht, Ready-to-drive-sound, rain test and brake test.

Para este trabajo la suspensión debe cumplir con los puntos que se enlistan a continuación:

1. La suspensión debe de estar equipada con un sistema de absorción de impacto adelante y atrás.

2. Con recorridos o carrera en las ruedas de 2 pulgadas o su equivalente en mm.
3. Y una pulgada o su equivalente en mm de bote y rebote (jounce and rebound), con el conductor sentado.
4. Todos los puntos donde se monta la suspensión deben de ser visibles a los jueces.
5. Debe de cumplir con una altura al suelo apropiada (ground clearance) para que en ningún momento el auto toque el suelo con excepción de las ruedas.
6. Los rines deben de ser de 203.2 mm (8 pulgadas) o mas de diámetro.

En el capítulo 1 se hablara de los antecedentes que involucran una descripción de los diferentes tipos de suspensión que por sus ventajas y desventajas nos indicaran cual es la suspensión más adecuada para los automóviles de Formula SAE. Posteriormente se aplicaran las ecuaciones necesarias para estudiar el comportamiento dinámico del vehículo y compararlo con tablas que miden el desempeño de diferentes autos deportivos o de formula INDY, que resultan adecuadas ya que la suspensión en este tipo de automóviles es igual a la empleada en el formula SAE, así mismo una vez recopilados estos datos se propondrá un diseño conceptual de una suspensión que se pretende sea adecuada a las sollicitaciones para, posteriormente concluir sobre este trabajo de tesis, y para ello hablaremos primero de los antecedentes de la suspensión y su análisis.

## CAPITULO 1 Análisis dinámico de una suspensión

### 1.1 Descripción del sistema de la suspensión

La suspensión es un subconjunto mecánico del automóvil que es esencial ya que mantiene el contacto entre el automóvil y la pista ó asfalto según sea el caso. Dentro de los tipos de suspensión se encuentran muchos diseños tanto para el eje delantero o eje trasero. En el Eje delantero encontramos los tipos más comunes de suspensión la de doble horquilla, la Mcpherson y en esta hay variantes como horquilla en L y horquilla en A, siendo estas las más comunes en los automóviles turismo actualmente. En los automóviles de carreras é incluso, en algunos automóviles turismo de alto desempeño se usa la suspensión de doble horquilla, porque resulta la más adecuada para estos automóviles, porque ofrece diversas ventajas como un control total del viaje de las ruedas en la carrera de la suspensión como sería un camber negativo a lo largo de todo el viaje de la rueda con esto la longitud denominada track no se hace menor. Para las desventajas en las reparaciones se encontró que son muy caras ya que hay más piezas que pueden sufrir daños, y para un automóvil turismo no es lo más deseado ya que las calles no garantizan que siempre estén en buenas condiciones a diferencia de la pista de carreras.

Para definir a la suspensión hace falta definir los diferentes ángulos que la componen, cuando hay camber positivo ó negativo, y también definir otros ángulos como caster, trust angle y toe.

Caster: en una vista lateral del automóvil es el ángulo que comprende la línea vertical que parte del centro de la rueda y el eje que forma el amortiguador. Rango recomendado -4 a -6 grados.



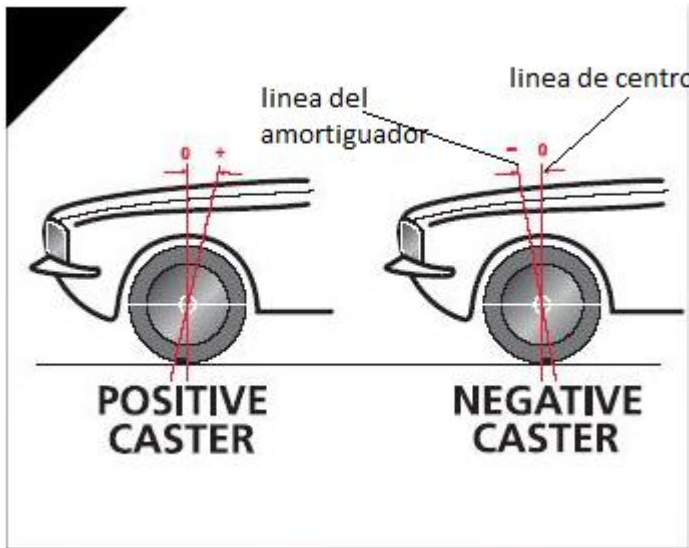


Figura 2.1. Ilustración del ángulo caster

Camber: en una vista frontal o trasera del automóvil es el ángulo comprendido entre la línea vertical que se tiene en la huella de rodamiento del neumático, y el eje de la huella de rodamiento del neumático. (Ver figura 2.2) Rango recomendado -1.5 a -2 grados.

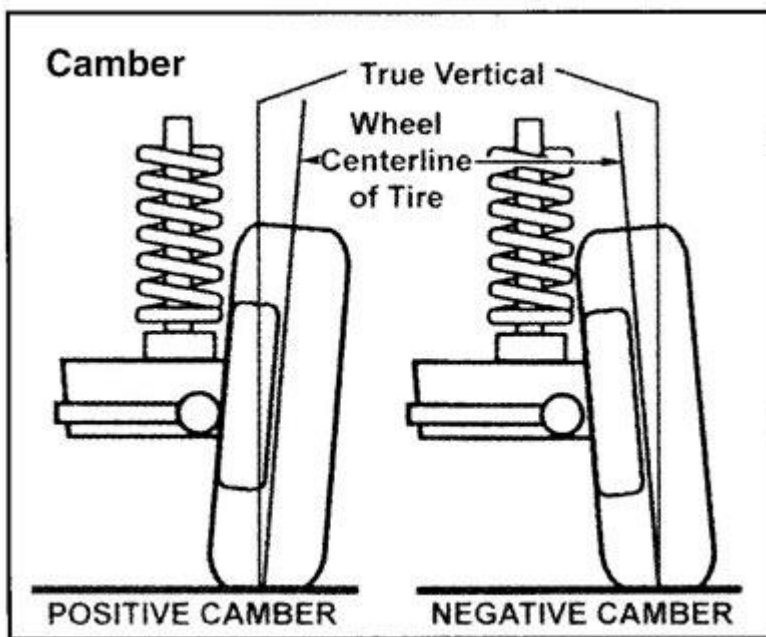


Figura 2.2. Ilustración del ángulo camber

Toe: Es el ángulo comprendido entre la línea de centro del automóvil y la líneas de centro de las ruedas. Angulo que se ilustra en una vista superior del automóvil. (Ver figura 2.3.)

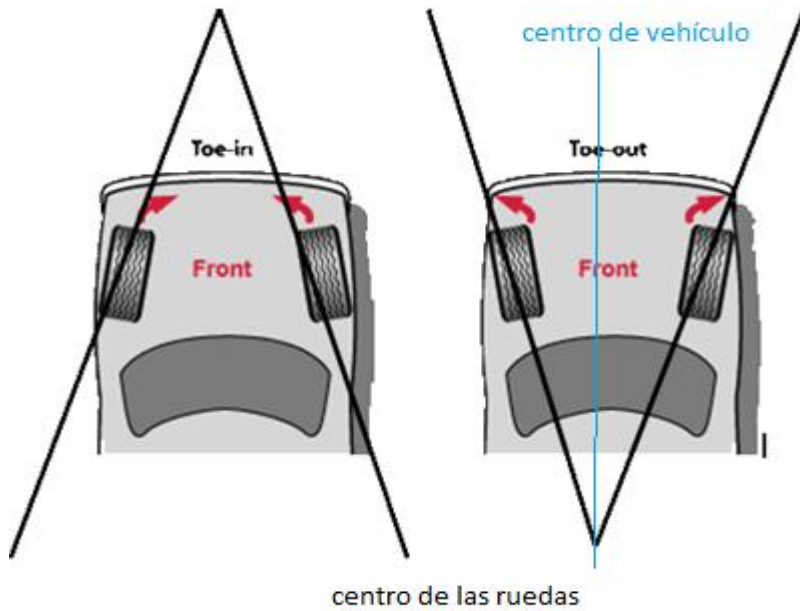


Figura 2.3. Ilustración del ángulo toe

Trust angle: Es el ángulo entre la línea de centro del vehículo y la línea perpendicular al eje trasero. (Ver figura 2.4.)

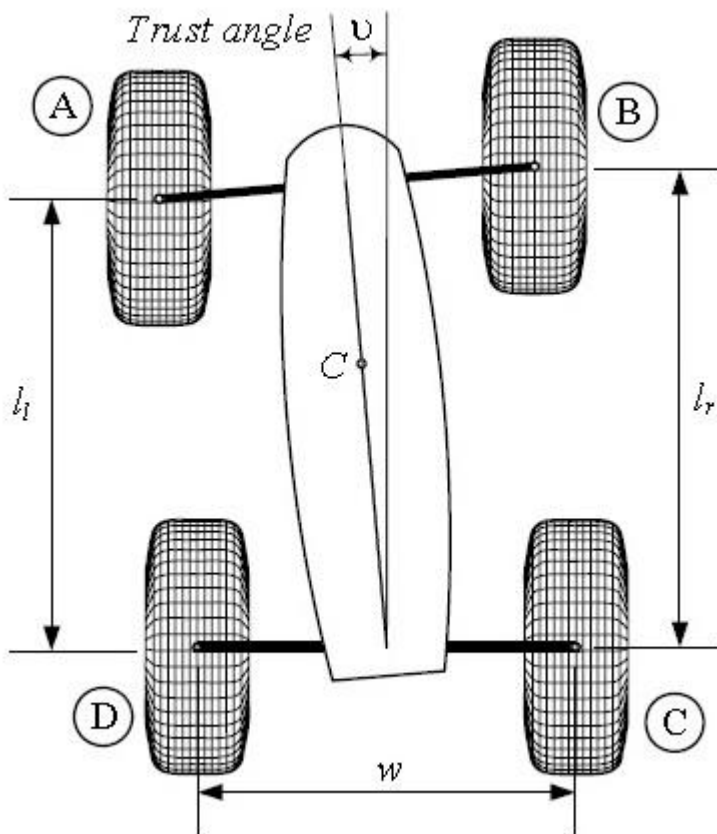


Figura 2.4. Ilustración del ángulo trust

Una vez que se definieron los parámetros que se necesitan de la suspensión del automóvil, que es nuestro objeto de estudio y se obtuvo conocimiento de los autos de competencia tipo formula, se procederá con el estudio de las fuerzas involucradas.

## 1.2. Ecuaciones de la dinámica del automóvil

### 1.2.1. Plano horizontal

Primero en este apartado se abordarán las ecuaciones para el cálculo de las fuerzas a las que se somete a cada rueda con el automóvil detenido en un plano horizontal y esta ecuación es la siguiente:

$$F_{z1} = \frac{1}{2}mg \frac{a_2}{l} \quad (1)$$

$$F_{z2} = \frac{1}{2}mg \frac{a_1}{l} \quad (2)$$

Donde:

- $a_1$  es la distancia del centro de masa del auto al eje delantero.
- $a_2$  es la distancia del centro de masa del auto al eje trasero
- $l$  es la suma de  $a_1 + a_2$

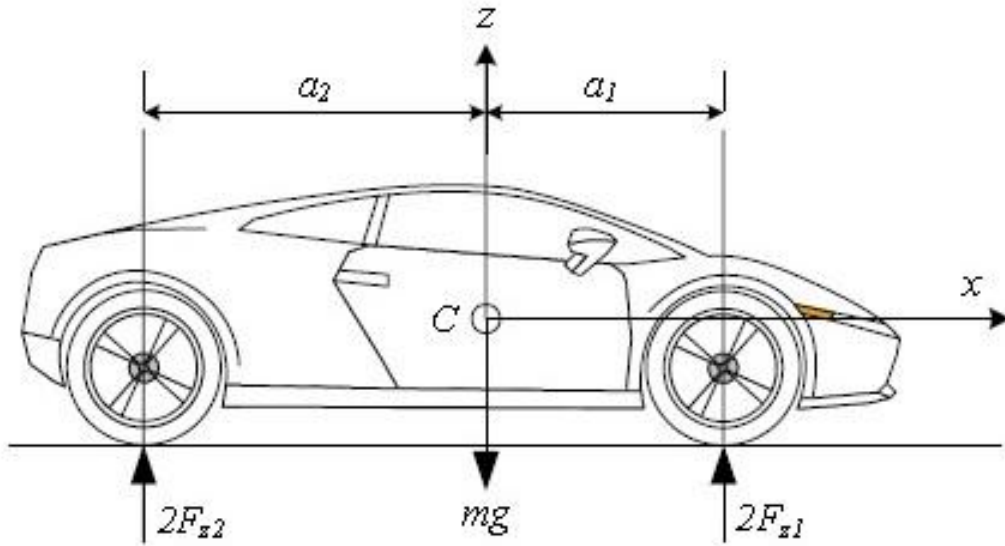


Figura 2.5. Auto detenido en un plano horizontal.

Lo anterior se demuestra considerando un automóvil longitudinalmente simétrico como se muestra en la figura 2.5. Lo cual puede ser modelado como un vehículo de dos ejes. Un vehículo de dos ejes simétrico es equivalente a una barra rígida con dos soportes. La fuerza vertical sobre las llantas delanteras y traseras puede ser determinada usando ecuaciones de equilibrio estático.

$$\Sigma F_z = 0 \quad (3)$$

$$\Sigma M_y = 0 \quad (4)$$

Después de aplicar las ecuaciones de equilibrio se obtiene

$$2F_{z1} + 2F_{z2} - mg = 0 \quad (5)$$

$$-2F_{z1}a_1 + 2F_{z2}a_2 = 0 \quad (6)$$

Finalmente las reacciones sobre las llantas delanteras y traseras.

$$F_{z1} = \frac{1}{2}mg \frac{a_2}{a_1+a_2} \quad (7)$$

$$= \frac{1}{2}mg \frac{a_2}{l}$$

$$F_{z2} = \frac{1}{2}mg \frac{a_1}{a_1+a_2} \quad (8)$$

$$= \frac{1}{2}mg \frac{a_1}{l}$$

En esta primera ecuación se muestra el desarrollo para la obtención de las ecuaciones para determinar las fuerzas de reacción, y de aquí en adelante solo se trabajara con las ecuaciones y no se mostrara el algebra detrás de ellas, para obtener las fuerzas de reacción y el procedimiento está disponible en los apéndices.

1.2.2. Estudio de las fuerzas a las que se somete un vehículo en un camino inclinado.

Cuando un automóvil está detenido sobre un camino inclinado con respecto a la horizontal las fuerzas normales bajo cada una de las ruedas delanteras y traseras.

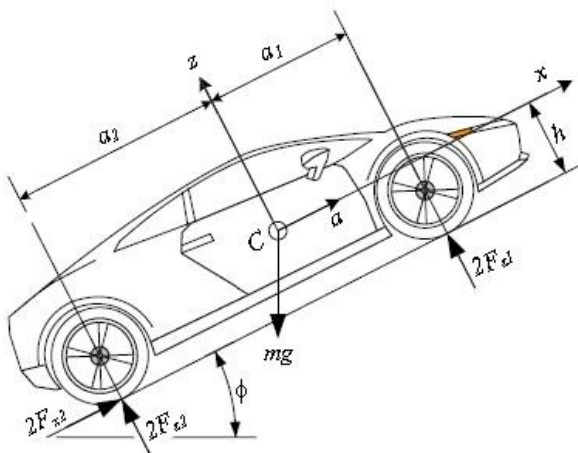


Figura 2.6. Automóvil detenido en un plano inclinado respecto de la horizontal.

Las siguientes ecuaciones proporcionan las fuerzas de frenado y reacción bajo las ruedas traseras.

$$F_{z1} = \frac{1}{2}mg \frac{a_2}{l} \cos\phi - \frac{1}{2}mg \frac{h}{l} \sin\phi \quad (9)$$

$$F_{z2} = \frac{1}{2}mg \frac{a_1}{l} \cos\phi + \frac{1}{2}mg \frac{h}{l} \sin\phi \quad (10)$$

$$F_{x2} = \frac{1}{2}mgsin\phi \quad (11)$$

La siguiente fuerza es la fuerza de frenado en las ruedas delanteras

Cuando las ruedas delanteras están frenando solamente  $F_{x2}=0$  y  $F_{x1}$  es diferente de cero. Igual que en el caso anterior donde las ruedas traseras son las que frenaban, las ecuaciones para las ruedas delanteras son las siguientes:

$$F_{z1} = \frac{1}{2}mg \frac{a_2}{l} \cos\phi - \frac{1}{2}mg \frac{h}{l} \sin\phi$$

$$F_{z2} = \frac{1}{2}mg \frac{a_1}{l} \cos\phi + \frac{1}{2}mg \frac{h}{l} \sin\phi$$

$$F_{x1} = \frac{1}{2}mgsin\phi$$

Frenando con cuatro ruedas

Considerando un automóvil detenido por freno en las cuatro ruedas en una subida como se muestra en la siguiente figura.

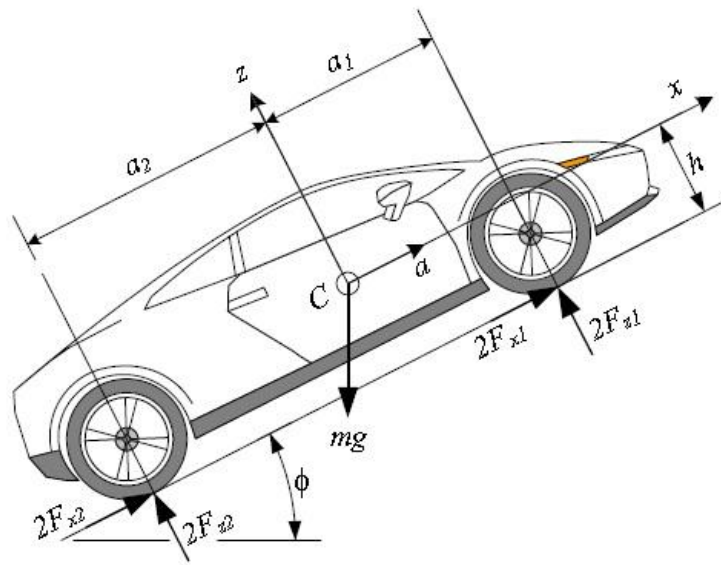


Figura 2.7. Automóvil detenido en subida frenando con las cuatro ruedas.

En estas condiciones, ahí estarán dos fuerzas de frenado  $F_{x1}$  en las ruedas delanteras y dos fuerzas de frenado  $F_{x2}$  en las ruedas traseras.

Las fuerzas de frenado y reacción, bajo las llantas delanteras y traseras son:

$$F_{z1} = \frac{1}{2}mg \frac{a_2}{l} \cos\phi - \frac{1}{2}mg \frac{h}{l} \sin\phi \quad (12)$$

$$F_{z2} = \frac{1}{2}mg \frac{a_1}{l} \cos\phi - \frac{1}{2}mg \frac{h}{l} \sin\phi \quad (13)$$

$$F_{x1} + F_{x2} = \frac{1}{2}mg \sin\phi \quad (14)$$

1.2.3. Ahora se realiza un análisis dinámico de las fuerzas que se involucran cuando un automóvil tiene cierta aceleración

Automóvil acelerando en un camino plano.

Cuando un vehículo está en movimiento con aceleración  $a$  en un camino plano como se muestra en la figura 2.8.

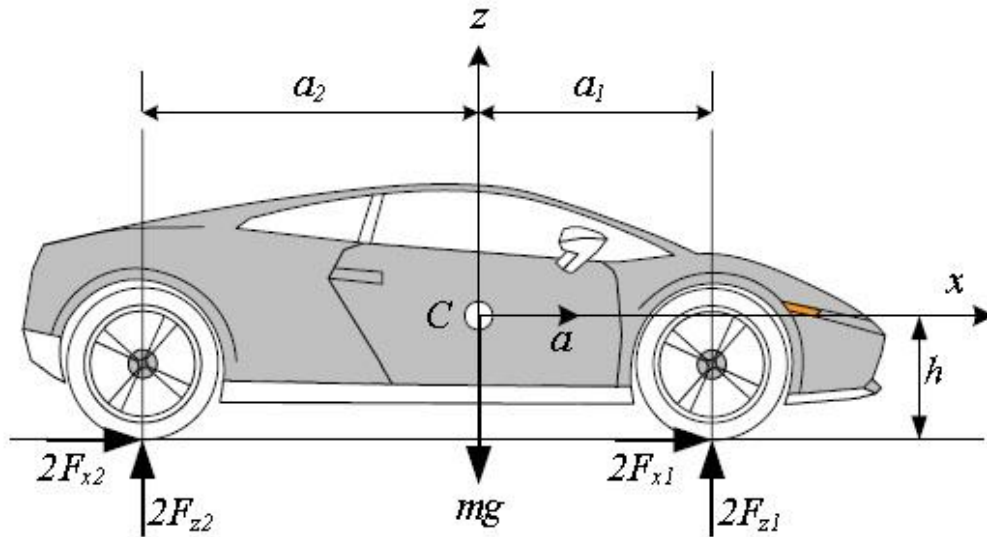


Figura 2.8. Vehículo acelerando en un camino plano.

Las fuerzas verticales sobre las ruedas delanteras y traseras son:

$$F_{z1} = \frac{1}{2}mg \frac{a_2}{l} - \frac{1}{2}mg \frac{h}{l} \frac{a}{g} \quad (15)$$

$$F_{z2} = \frac{1}{2}mg \frac{a_1}{l} + \frac{1}{2}mg \frac{h}{l} \frac{a}{g} \quad (16)$$

Los primeros términos  $F_{z1}$  de las ecuaciones que son los que ya conocemos son llamados la parte estática y los segundos términos  $F_{z2}$  que son los que acabamos de introducir son llamados la parte dinámica de las fuerzas normales.

Supongamos que el vehículo es considerado como un cuerpo rígido que se mueve a lo largo de un camino plano. La fuerza en la huella de rodadura de cada llanta puede ser descompuesta en una fuerza normal y otra longitudinal. La ecuación de movimiento para un automóvil acelerando viene



dada por la primera ley de newton en la dirección X y dos ecuaciones de equilibrio estático.

$$\Sigma F_x = ma \quad (17)$$

$$\Sigma F_z = 0 \quad (18)$$

$$\Sigma M_y = 0 \quad (19)$$

Máxima aceleración para un vehículo con un solo eje de tracción.

La máxima aceleración  $a_{rwd}$  para un vehículo con tracción trasera es conseguida por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{a_{rwd}}{g} &= \frac{a_1 \mu_x}{l - h \mu_x} \\ &= \frac{\mu_x}{1 - \mu_x \frac{h}{l}} \frac{a_1}{l} \end{aligned} \quad (20)$$

Y

$$\frac{a_{rwd}}{g} < \frac{a_2}{h} \quad (21)$$

El valor menor de ambas ecuaciones es nuestro valor de la aceleración.

Tiempo mínimo para el 0 a 100 Km/H. en un camino plano.

Y el tiempo para tracción trasera nos queda de la siguiente forma

$$t = \frac{27.78}{a} = \frac{27.78}{g \mu_x \frac{a_1}{l - h \mu_x}} \quad (22)$$

Y con esta ecuación tenemos el menor tiempo en el 0 a 100 Km/H. para cualquier vehículo de tracción trasera, y se expresa esta ecuación porque estamos analizando un vehículo tipo formula, el cual su principal función es competir en una serie de carreras, además el dato de la aceleración es necesario en ecuaciones dinámicas las cuales tienen como

resultado una fuerza sobre una o varias ruedas de nuestro vehículo.

#### 1.2.4. Vehículo acelerando en un camino inclinado

Cuando un automóvil está acelerando en un camino inclinado con un ángulo  $\phi$  como se muestra en la siguiente figura.

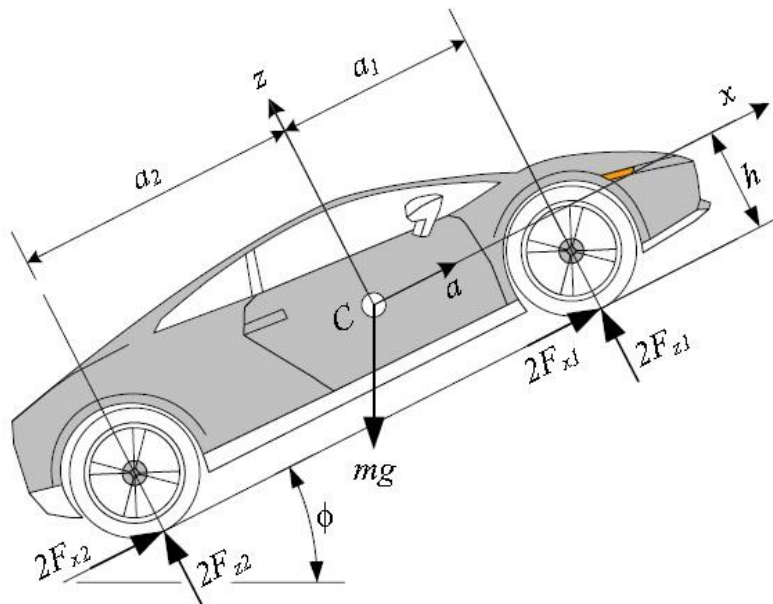


Figura 2.9. Vehículo acelerando en un camino inclinado.

Las fuerzas normales bajo cada una de las ruedas delanteras y traseras  $F_{z1}$ ,  $F_{z2}$ , son:

$$F_{z1} = \frac{1}{2}mg \left( \frac{a_2}{l} \cos\phi - \frac{h}{l} \sin\phi \right) - \frac{1}{2}ma \frac{h}{l} \quad (23)$$

$$F_{z2} = \frac{1}{2}mg \left( \frac{a_1}{l} \cos\phi + \frac{h}{l} \sin\phi \right) + \frac{1}{2}ma \frac{h}{l} \quad (24)$$

#### Máxima aceleración en un camino inclinado

La máxima aceleración depende de la fricción bajo las ruedas. Supongamos que el coeficiente de fricción en las ruedas

delanteras y traseras es igual, entonces las fuerzas de reacción delanteras y traseras son:

$$F_{x1} \leq \mu_x F_{z1}$$

$$F_{x2} \leq \mu_x F_{z2}$$

Si se presenta la condición donde las ruedas delanteras y traseras alcanzan su límite de tracción en el mismo tiempo entonces

$$F_{x1} = \mu_x F_{z1}$$

$$F_{x2} = \mu_x F_{z2}$$

Resulta la siguiente ecuación:

$$\frac{a_M}{g} = \mu_x \cos\phi - \sin\phi \quad (25)$$

Donde  $a_M$  es la máxima aceleración posible.

### 1.2.5. Automóvil estacionado en un camino con inclinación lateral

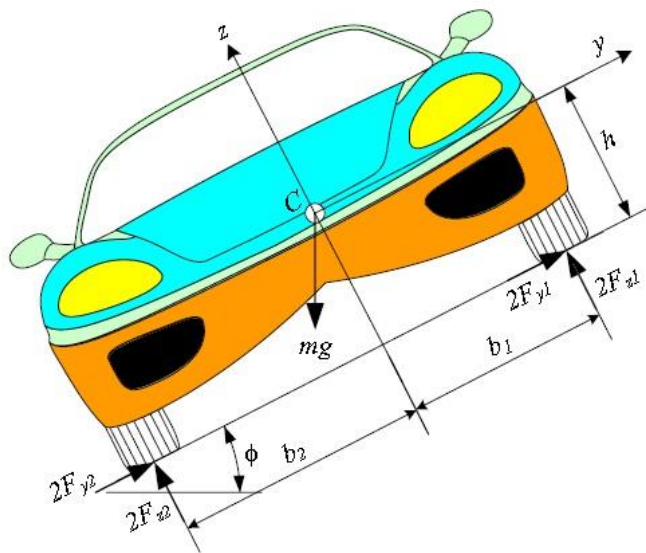


Figura 2.10. Vehículo estacionado en un plano inclinado longitudinalmente.

La figura 2.10. Representa el efecto de un peralte con un ángulo  $\phi$  y la distribución de cargas en el vehículo. Un peralte causa cargas en la parte inferior de las llantas que incrementan, y las cargas en la parte superior decrecen. Las fuerzas de reacción en las llantas son

$$F_{z1} = \frac{1}{2} \frac{mg}{w} (b_2 \cos\phi - h \sin\phi) \quad (26)$$

$$F_{z2} = \frac{1}{2} \frac{mg}{w} (b_1 \cos\phi + h \sin\phi) \quad (27)$$

$$w = b_1 + b_2 \quad (28)$$

Ya tenemos nuestras ecuaciones las cuales nos describen las fuerzas a las que se someten las ruedas podemos realizar el análisis correspondiente para los elementos de nuestra suspensión.

## CAPITULO 2 Propuesta y validación de la suspensión

En este capítulo, se procede a realizar la geometría de la propuesta con un software CAD (catia)

Con los datos obtenidos del CAD como centroide y peso, aun que este ultimo lo tomaremos como un dato que nos recomienda SAE procedemos a realizar los cálculos para poder conocer las fuerzas que actúan en la suspensión.

Enseguida se procede a realizar una serie de cálculos y como podemos observar (disponibles en los apéndices) la fuerza de mayor magnitud es de 131.8323 Kg fuerza la cual actúa directamente en la llanta y viaja a través de los componentes hasta llegar al Up right el cual interactúa directamente con las horquillas y aquí el punto de estudio de este trabajo, el conjunto horquillas, Up right y amortiguador (Ver figura 18.) el cual se debe someter al análisis de elemento finito con fuerzas de 131.8323 kg-fuerza, pero el punto es que no se deben de aplicar de manera longitudinal a la pieza en estudio, por recomendación de varios trabajos que se revisaron, la pieza deberá ser sometida a torsión que es cuando más comúnmente fallan.

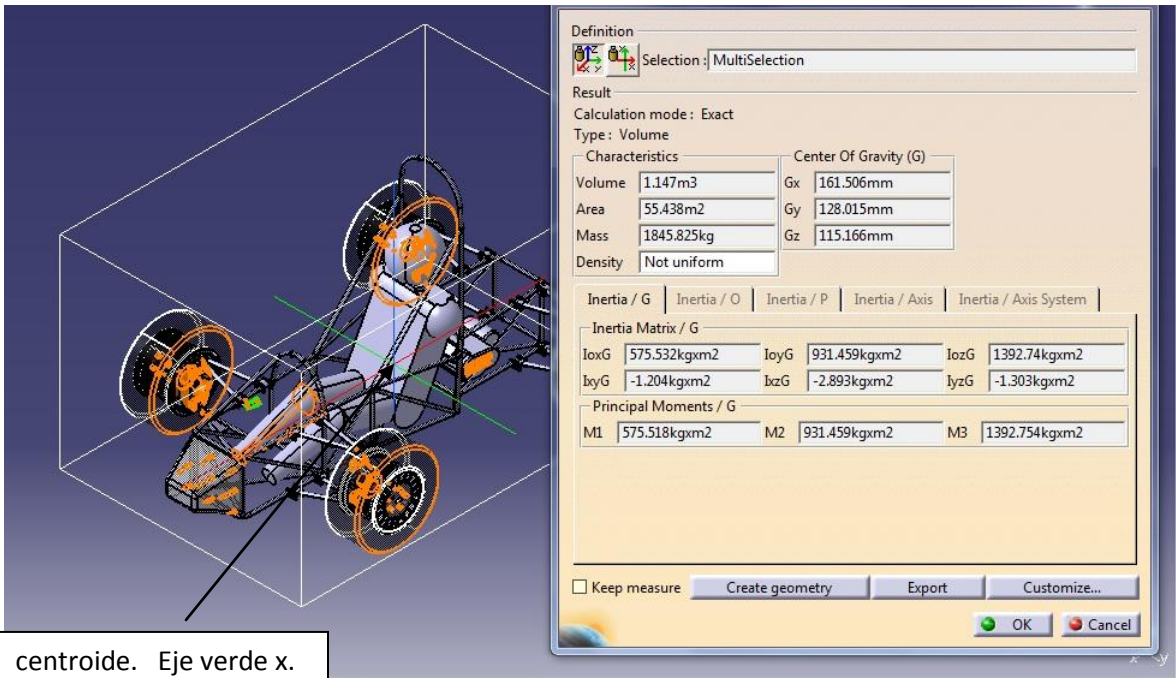
Resultados obtenidos del análisis matemático.

Fuerza normal a la superficie en un plano horizontal en las ruedas delanteras.	$F_{z1} = \frac{1}{2} mg \frac{a_2}{l}$	90 Kgf
Fuerza normal a la superficie en un plano horizontal en las ruedas traseras.	$F_{z2} = \frac{1}{2} mg \frac{a_1}{l}$	124.5 Kgf
Fuerza de normal en las ruedas delanteras en un plano con ángulo de inclinación $\Phi$ .*	$F_{z1} = \frac{1}{2} mg \frac{a_2}{l} \cos\phi - \frac{1}{2} mg \frac{h}{l} \sin\phi$	$\Phi=0$ 90 Kgf
Fuerza de normal en las ruedas traseras en un plano con ángulo de inclinación $\Phi$ .*	$F_{z2} = \frac{1}{2} mg \frac{a_1}{l} \cos\phi + \frac{1}{2} mg \frac{h}{l} \sin\phi$	$\Phi=0$ 124.5 Kg

\*Esa fuerza es mayor con ángulo de cero grados, por que cuando hay inclinación, la fuerza se reparte en la fuerza normal y en la fuerza de fricción en el neumático

Fuerza de vertical sobre las ruedas delanteras con aceleración de 1.20 m/s <sup>2</sup> en un camino horizontal	$F_{z1} = \frac{1}{2}mg \frac{a_2}{l} - \frac{1}{2}mg \frac{ha}{lg}$	88.6091 Kgf
Fuerza de vertical sobre las ruedas traseras con aceleración de 5.050 m/s <sup>2</sup> en un camino horizontal	$F_{z2} = \frac{1}{2}mg \frac{a_1}{l} + \frac{1}{2}mg \frac{ha}{lg}$	131.832386 Kgf
Fuerza normal sobre las ruedas delanteras en un plano inclinado $\phi=0$ con aceleración de 1.20 m/s <sup>2</sup>	$F_{z1} = \frac{1}{2}mg \left( \frac{a_2}{l} \cos\phi - \frac{h}{l} \sin\phi \right) - \frac{1}{2}ma \frac{h}{l}$	$\phi=0$ 88.6092 Kgf
Fuerza normal sobre las ruedas delanteras en un plano inclinado $\phi=0$ con aceleración de 5.050 m/s <sup>2</sup>	$F_{z2} = \frac{1}{2}mg \left( \frac{a_1}{l} \cos\phi + \frac{h}{l} \sin\phi \right) + \frac{1}{2}ma \frac{h}{l}$	$\phi=0$ 100.66 Kgf

A continuación se muestran los elementos en los cuales se basa este estudio y por recomendaciones del reglamento de formula SAE.



centroide. Eje verde x.  
Eje rojo y y eje azul z.

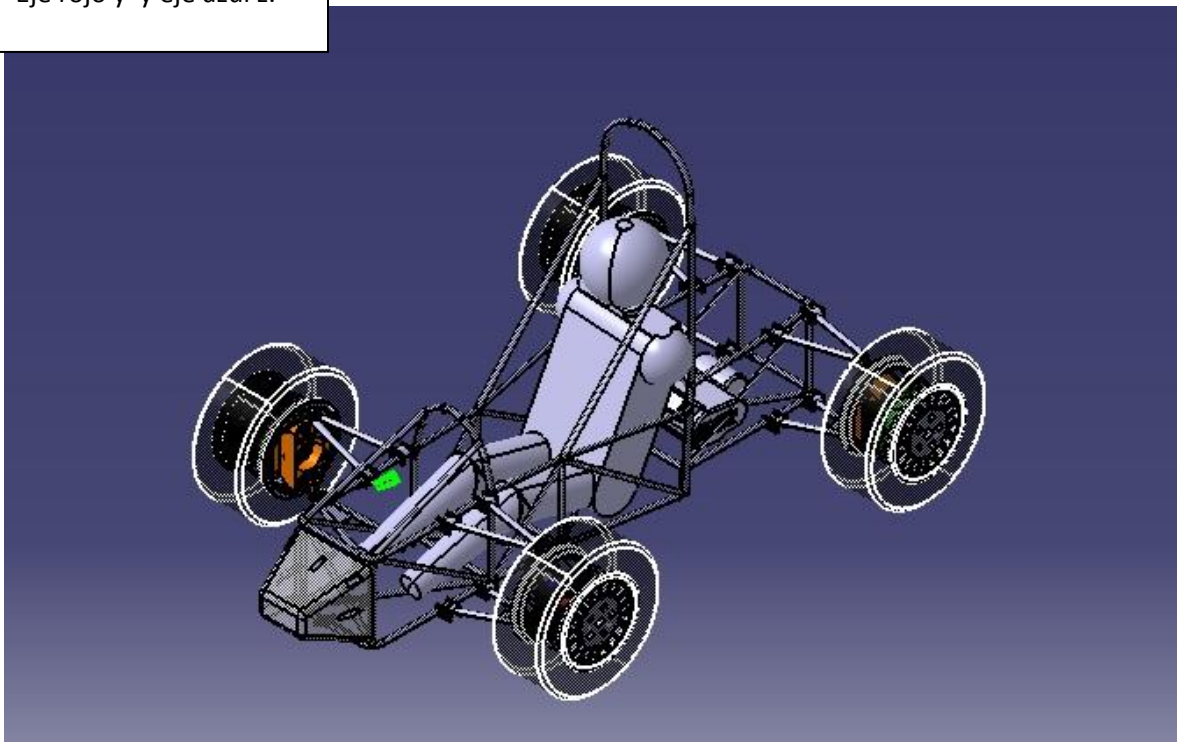


Figura 3.1. y 3.2. respectivamente. Chasis con suspensión, este ensamble no se utilizara en análisis por elemento finito. Solo es para obtener el centroide y centro de masa.

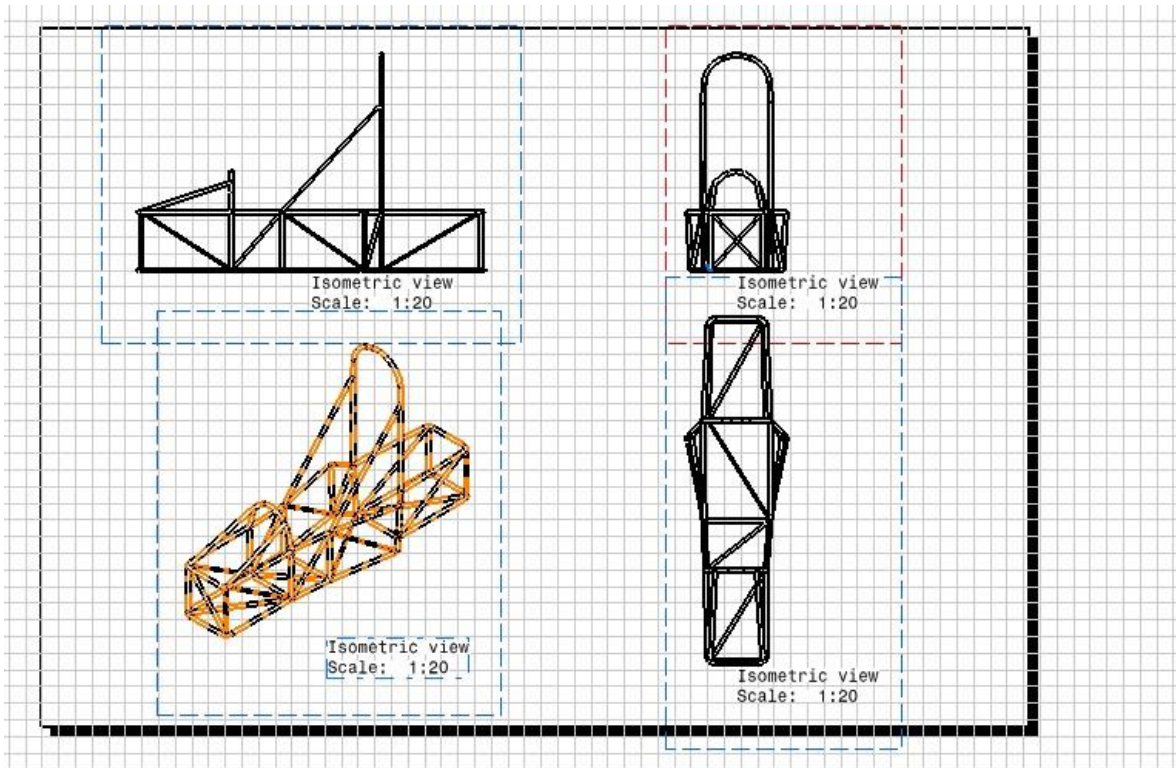


Figura 3.3. Chasis propuesto para el estudio.

Los componentes como frenos, rodamientos y masas se modelaron para dar una aproximación lo más real posible en el cálculo del centro de masa, de la misma manera se dibujo el motor y el piloto.

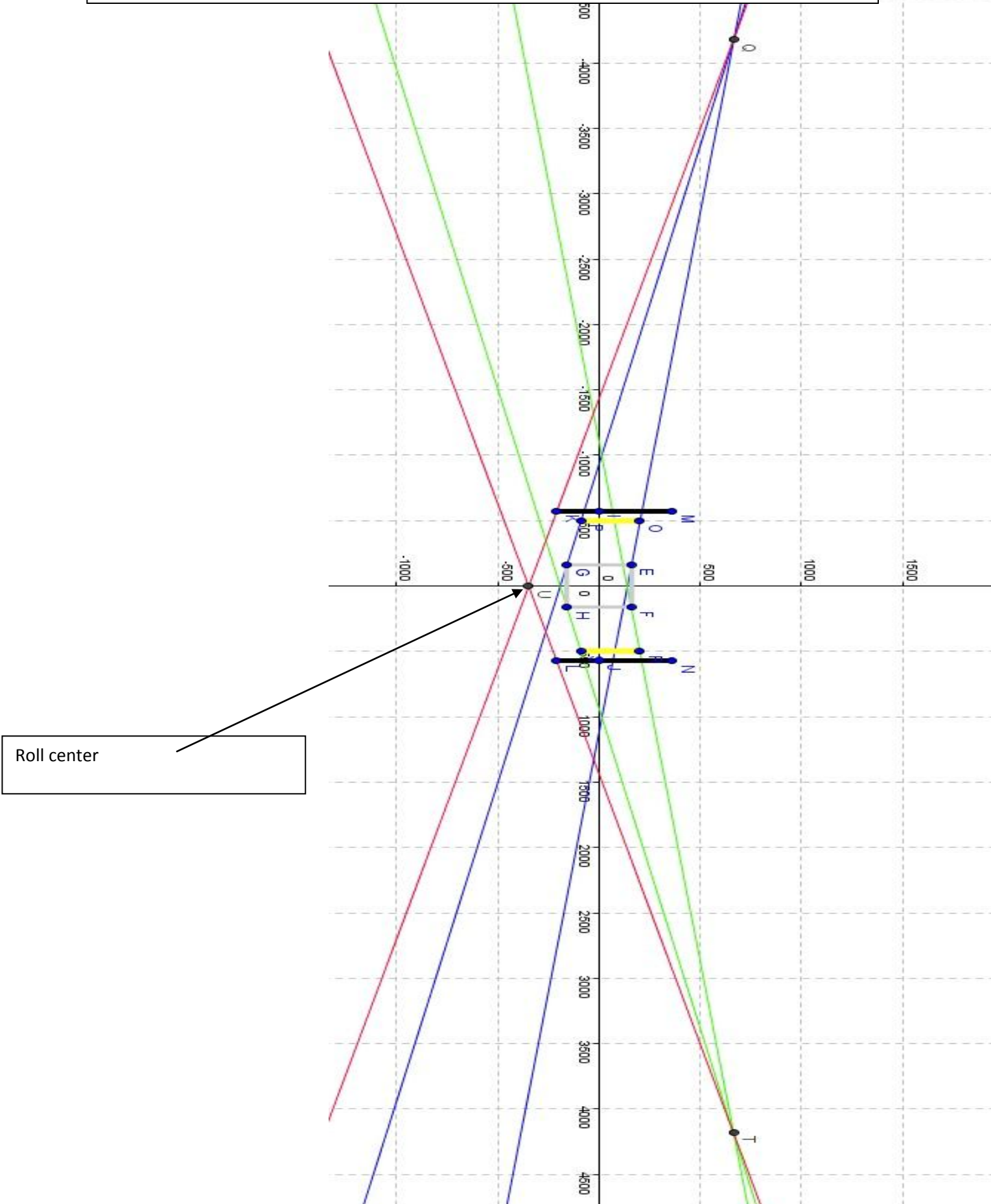
Por otro lado se analiza el chasis y se realiza una configuración la cual garantiza un buen ROLL CENTER o centro de giro del vehículo.

Este centro de giro es donde se ejerce la fuerza en las curvas un ejemplo muy claro, al ser un vehículo de competencia se debe de esforzar en asegurar un buen centro de giro para que en la carrera el piloto no pierda segundos que son de suma importancia para cumplir el objetivo del automóvil y del piloto, que es ser rápidos en la pista.

Un diagrama de este trabajo se muestra a continuación en la siguiente página (Ver figura 3.4).



Figura 3.4. Ilustración del ROLL CENTER.



En la intersección de los ejes de color rojo es donde se localiza el roll center.

Este tema se estudio porque se considera que es muy importante la afinación de la suspensión, ya que en la literatura revisada se habla de la importancia del roll center en un auto de carreras.

Por otro lado es muy importante aclarar que el reglamento formula SAE les exige a los competidores un análisis de elemento finito del chasis ya que la seguridad es lo primero, y también se dan datos que tiene que cumplir el material utilizado en la fabricación del vehículo, como modulo de Young, esfuerzo de cedencia entre otros.

Una vez aclarada la parte teórica se propone la configuración de la suspensión para posteriormente analizarla con elemento finito y una matriz de decisiones para conocer los mejores materiales para fabricarla.

Se propone una configuración de doble brazo en A para proporcionar precisión y rigidez.

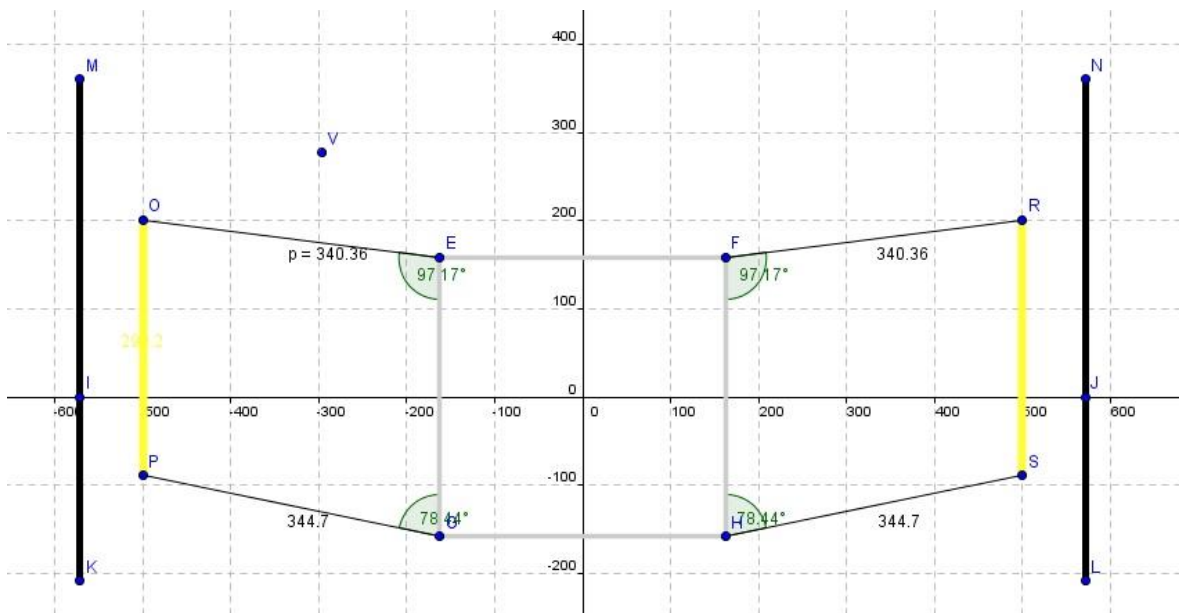


Figura 3.5. Ilustración de la propuesta de suspensión a analizar.

Enseguida se muestra en la figura la configuración del diseño de la suspensión que se propone partiendo de una buena ubicación del ROLL CENTER. Posteriormente, se pasa a analizar la horquilla que es junto con los Up right los elementos que reciben mayores sollicitaciones en la suspensión.

En la figura 3.6 se muestra la forma en la que se ensamblan las horquillas con los elementos de la rueda.

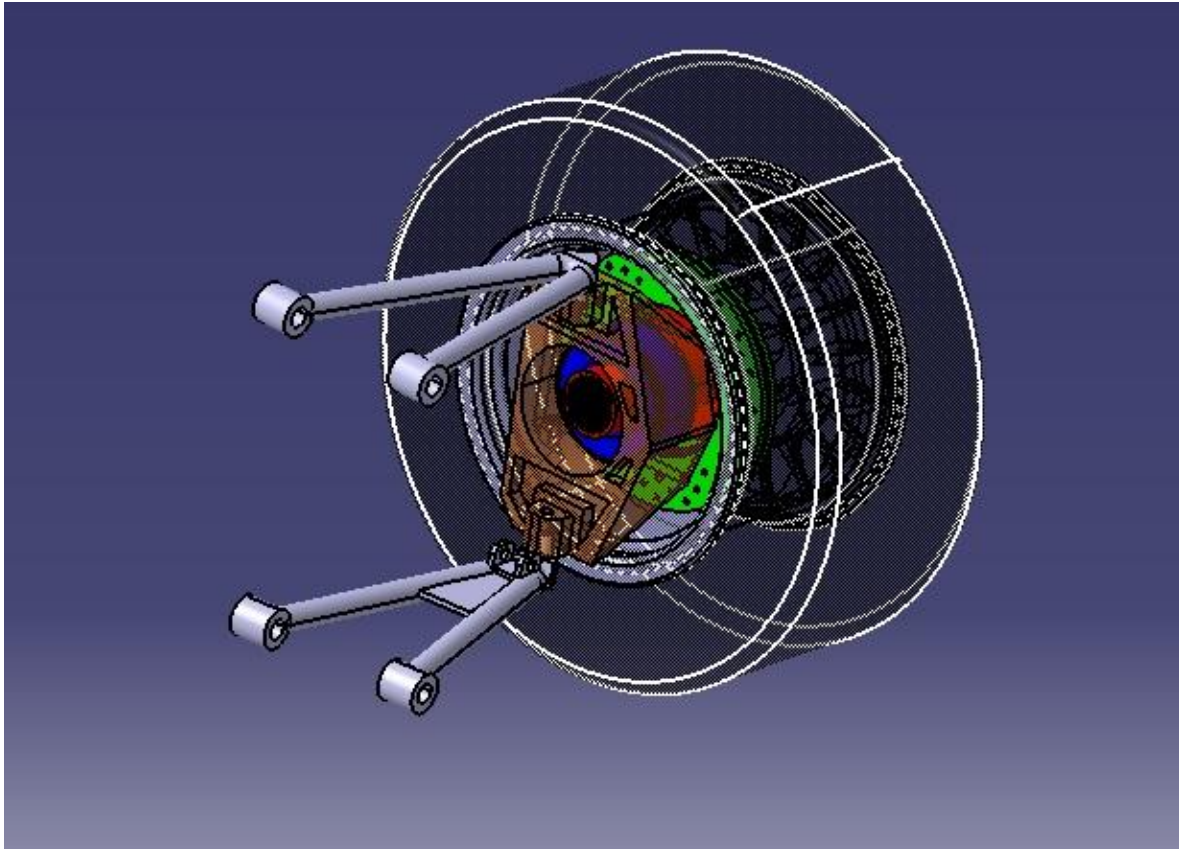


Figura 3.6. Ensamble de la suspensión.

Ahora se procede a realizar el análisis de elemento finito en la suspensión ensamblada. Esto con la intención de mostrar los esfuerzos a los que se somete dicho conjunto de piezas.

Las propiedades que se usaron son las que marca el reglamento formula SAE.

Módulo de Young	$E= 200 \text{ GPa}$
Esfuerzo de cedencia	$S_y= 305 \text{ MPa}$
Esfuerzo último	$S_u= 365 \text{ MPa}$

Durante las pruebas en la competencia se presentan situaciones de carga que se analizaron en este ejercicio mediante elemento finito.

En este análisis se efectuaron tres casos, y son:

1.- La fuerza está en dirección  $z+$  que es la fuerza mayor en el análisis, este análisis se realizó con una fuerza de 4000 N, que es un caso extremo, donde se supone un caso extraordinario que todo el peso se aplique en una sola llanta.

2.- La fuerza se aplica en dirección  $x$ , la fuerza aplicada es de 4000 N en cada llanta y representa una situación en la que el auto tenga una aceleración lateral de 4.077 G, recordando que el vehículo pesa 300 Kg y el piloto 100 Kg que es un piloto pesado son 400 Kg y  $F=ma$ .

3.- La fuerza se aplica en un ángulo de  $45^\circ$  en el plano  $xz$  esto con la finalidad de tener una referencia en cuanto a las magnitudes. Los resultados se muestran en las figuras 3.7 a 3.12

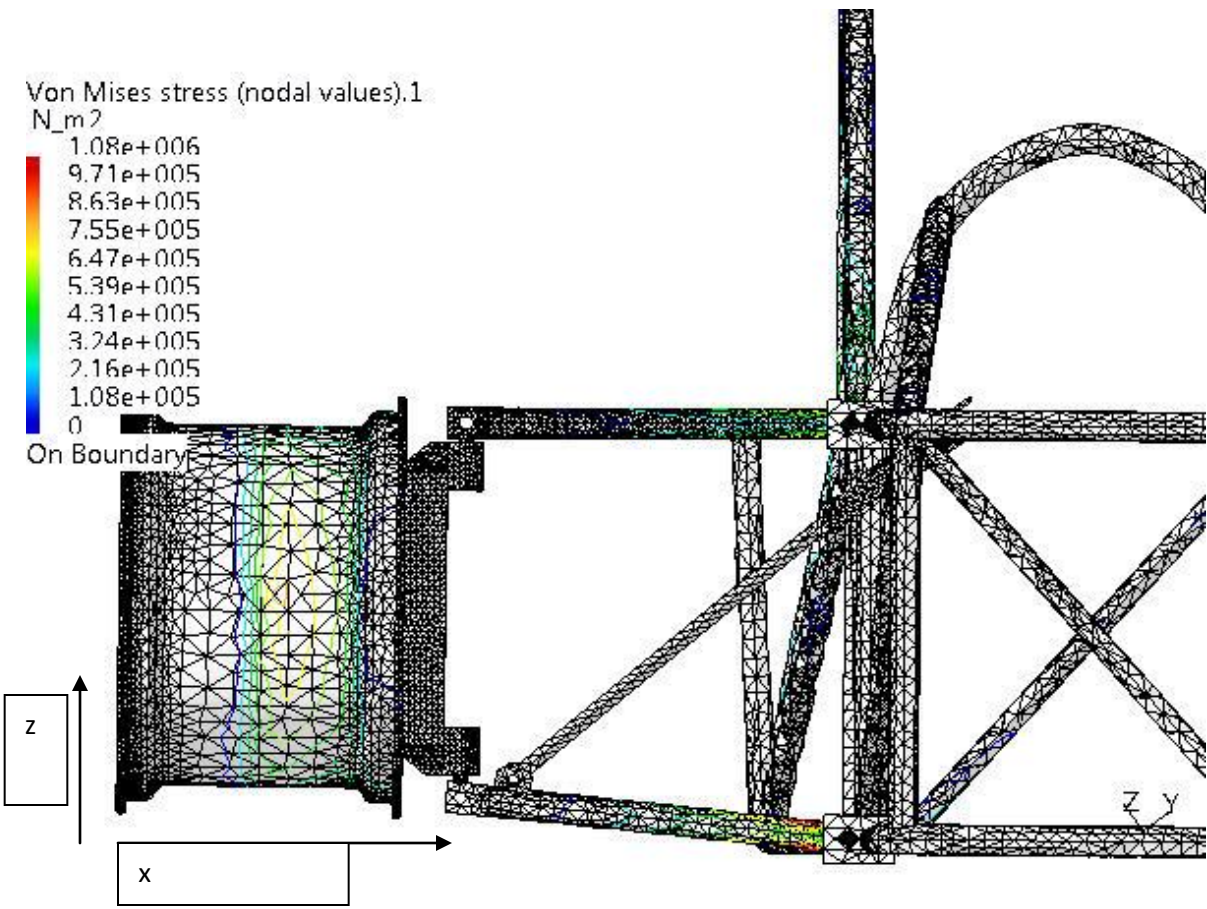


Figura 3.7. Análisis de elemento finito en el ensamble. El resultado mostrado es Von Mises. Fuerza aplicada en dirección z, con magnitud de 4000N ó 407.74 Kgf. El resultado muestra que es seguro ya que la fuerza máxima en el análisis es de 1293.276 N ó 131.832 Kgf.



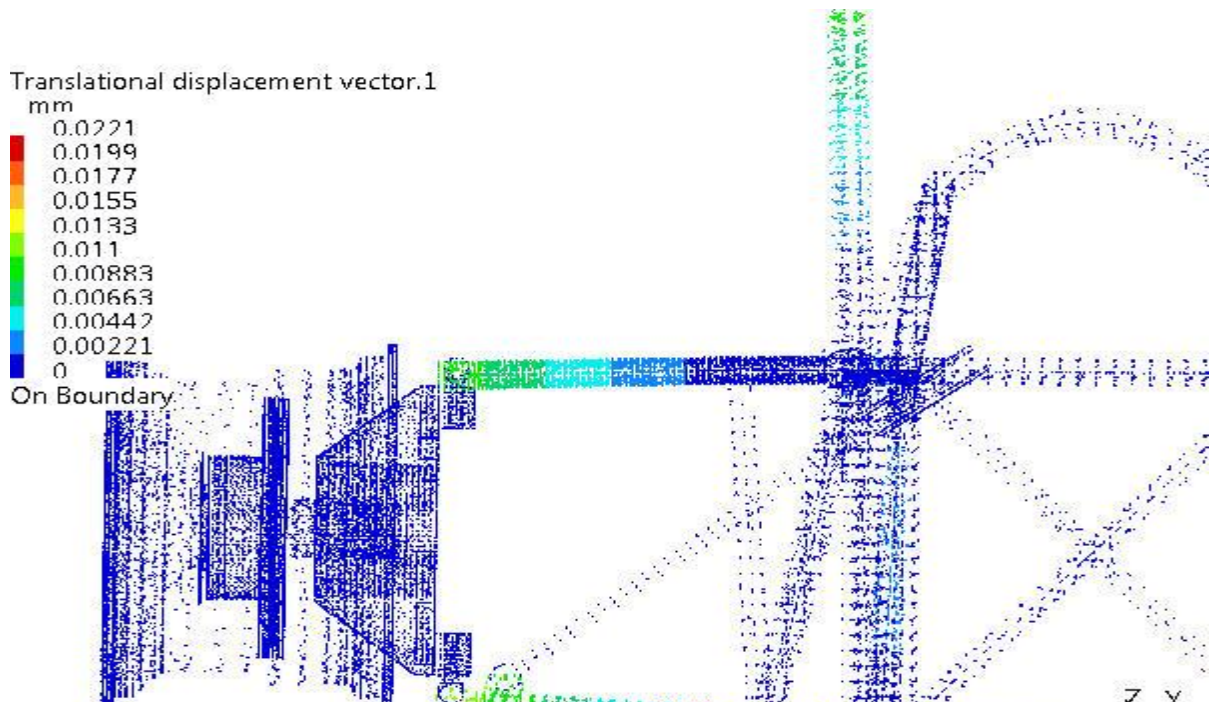


Figura 3.8. El mismo caso que la figura 3.7 solo que aquí se muestran los desplazamientos. Como se puede observar el desplazamiento máximo es de 0.0221 mm que es un valor que no afecta en lo mínimo a la suspensión.

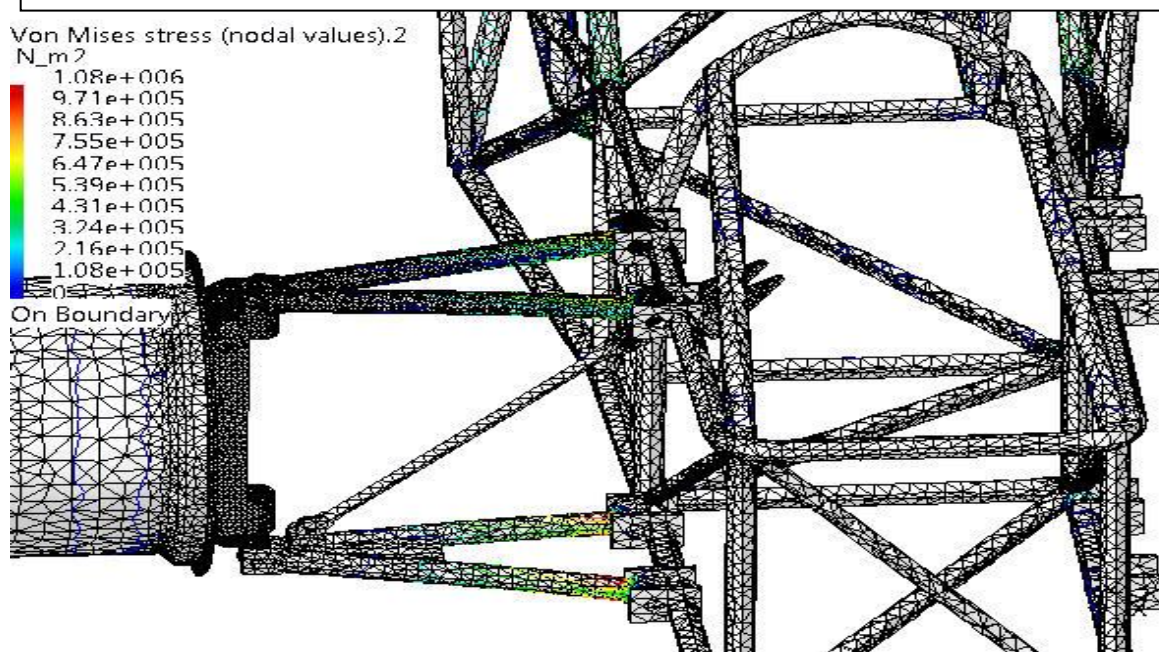


Figura 3.9. Esta figura muestra una fuerza de 4000 N ó 407.74 Kg<sub>f</sub> aplicada en la dirección x y se muestra el resultado de Von Mises. Segundo caso de análisis.

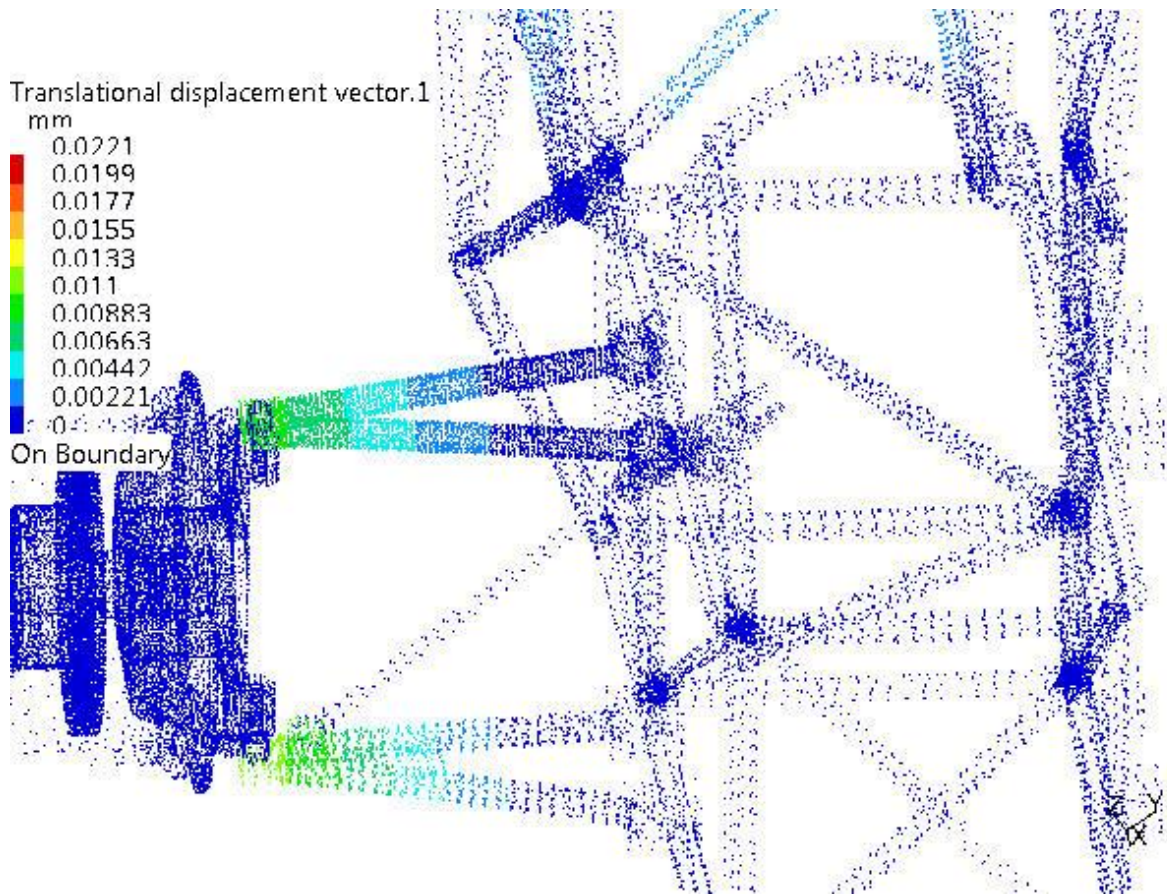


Figura 3.10. Caso en el plano x, mostrando desplazamientos.



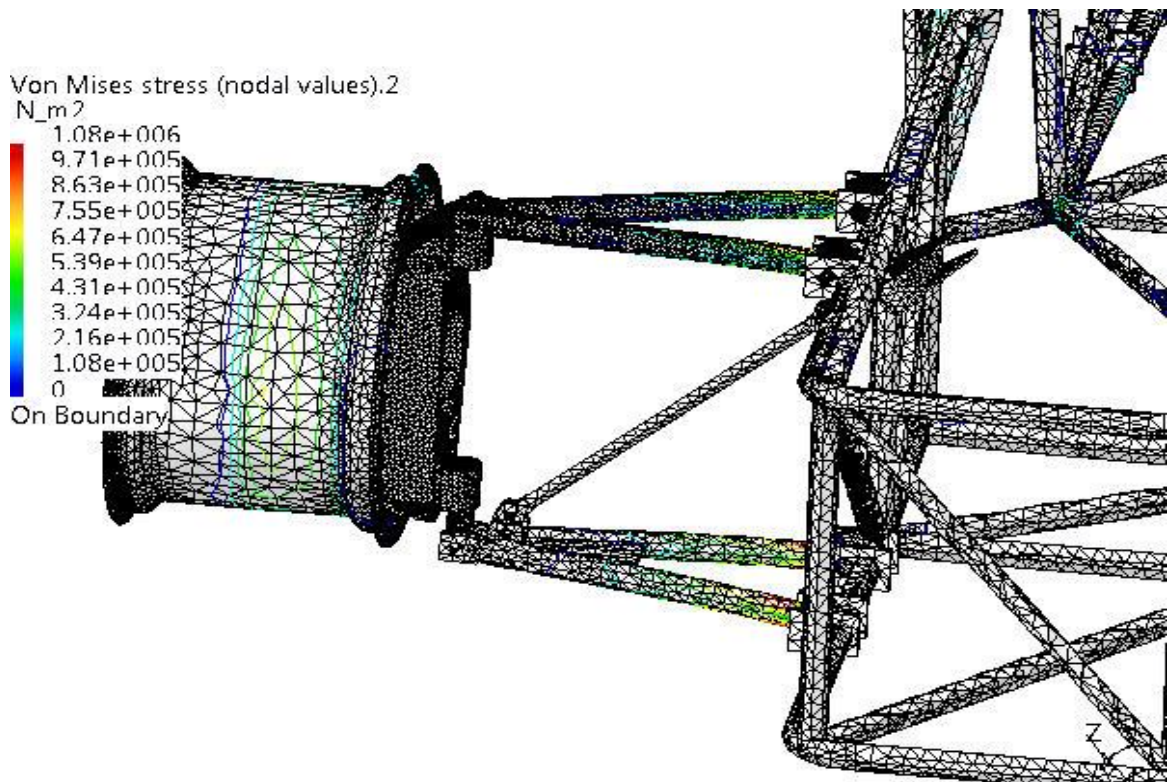


Figura 3.11. Caso donde se aplica la misma fuerza de 4000N ó 407.747 Kgf en un ángulo de 45° en el plano xz. Tercer caso de análisis.

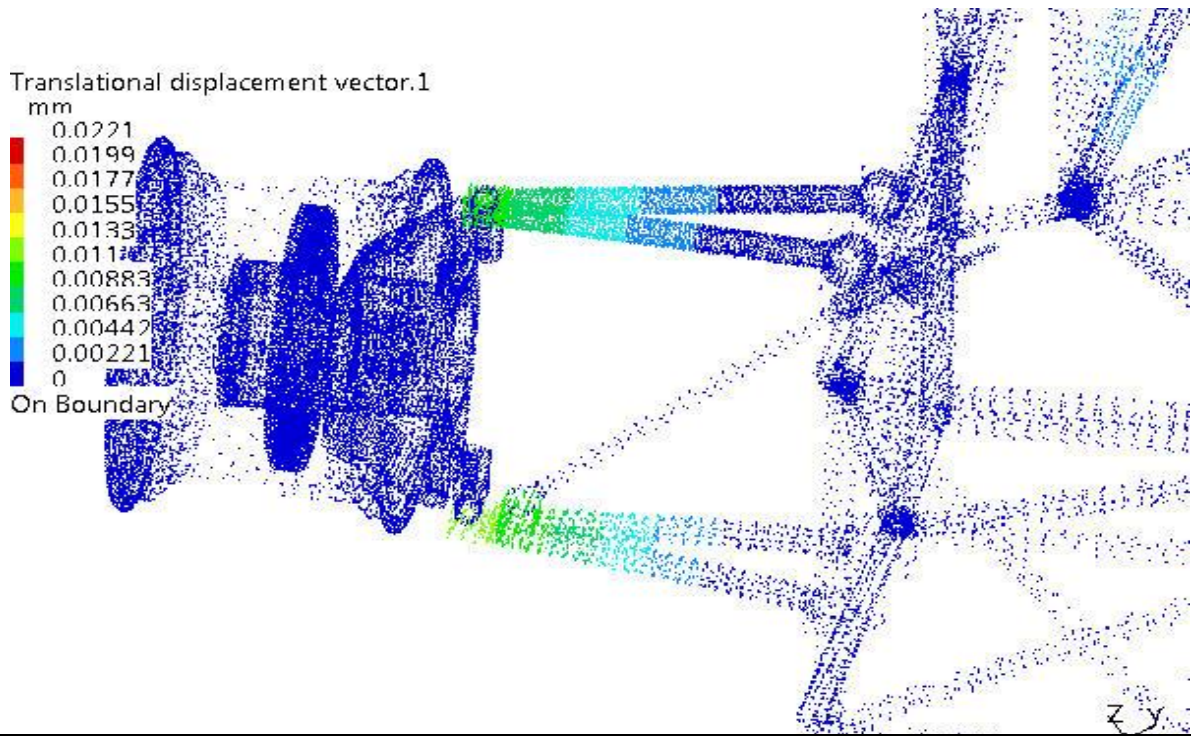


Figura 3.12. Muestra de desplazamientos a un ángulo a 45° xz.

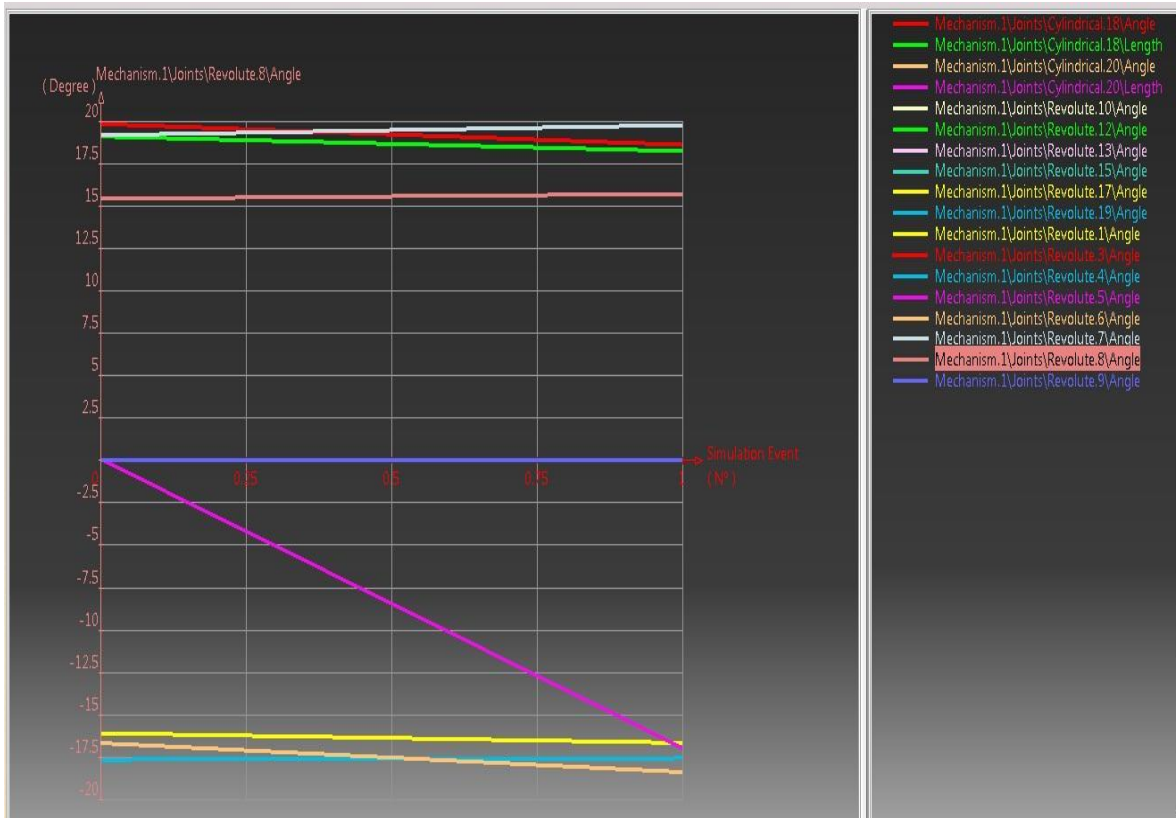


Como se observa en las figuras 3.7 a 3.12, las solicitaciones que sufre el ensamble no superan las capacidades del acero que recomienda el reglamento del formula SAE. Aun que si hay desplazamientos no llega a un punto crítico y por esa razón se concluye que las horquillas que fallan en los vehículos son por alguna causa como un mal diseño o una manufactura defectuosa. Aun que vale la pena mencionar que estas fuerzas son para un vehículo que pesa 300 Kg y no se pueden tomar como referencia para un automóvil de otro peso.

Otro análisis realizado fue el análisis cinemático que consiste en verificar el desplazamiento de la suspensión o la carrera del mecanismo.

Para este análisis se utilizo el Diseño Asistido por Computadora CAD (por sus siglas en inglés) que fue de mucha ayuda en la simulación.

A continuación se presentan imágenes del desplazamiento. (Figuras 3.13 a 3.15)



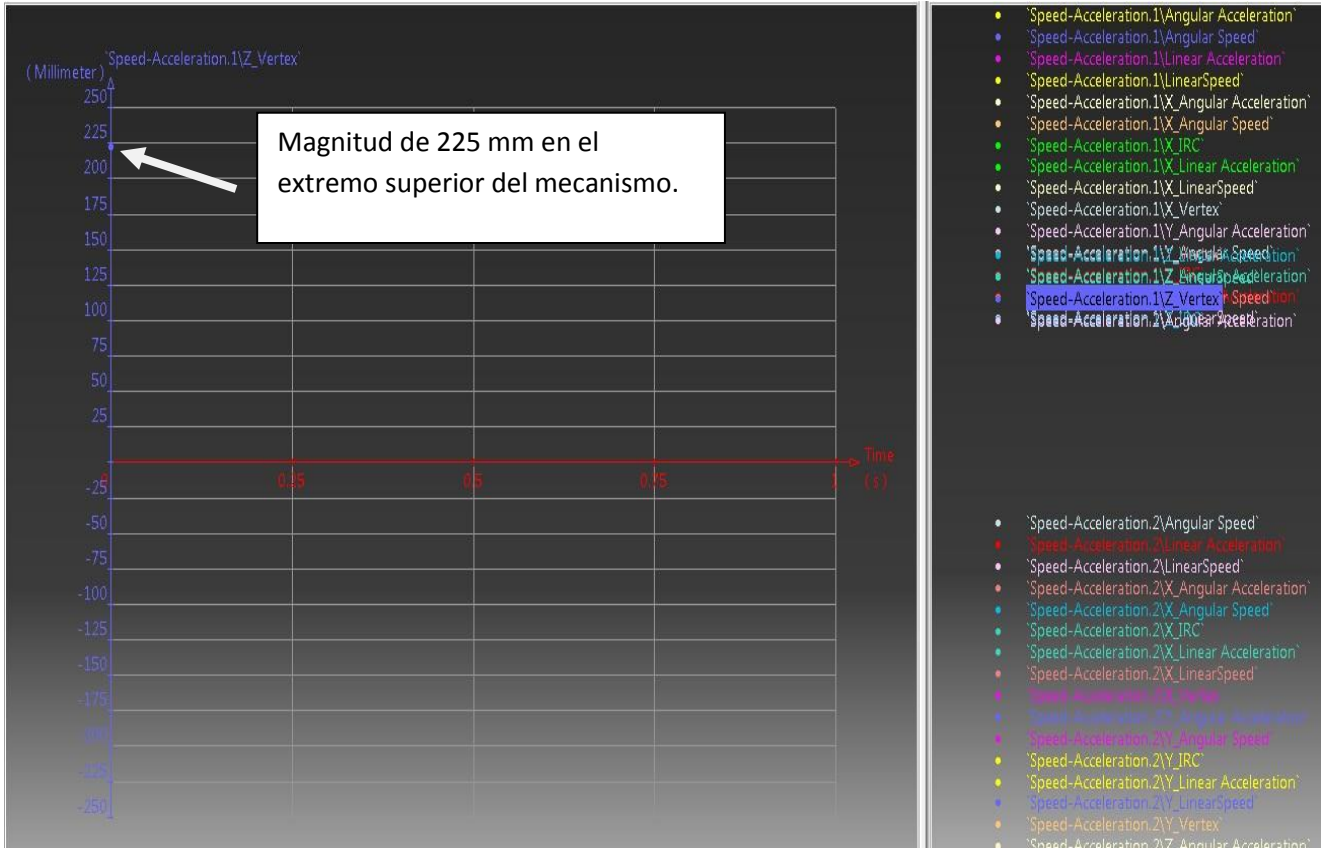


Figura 3.14. En esta figura se muestra el valor máximo en el eje Z que alcanza el mecanismo en movimiento.

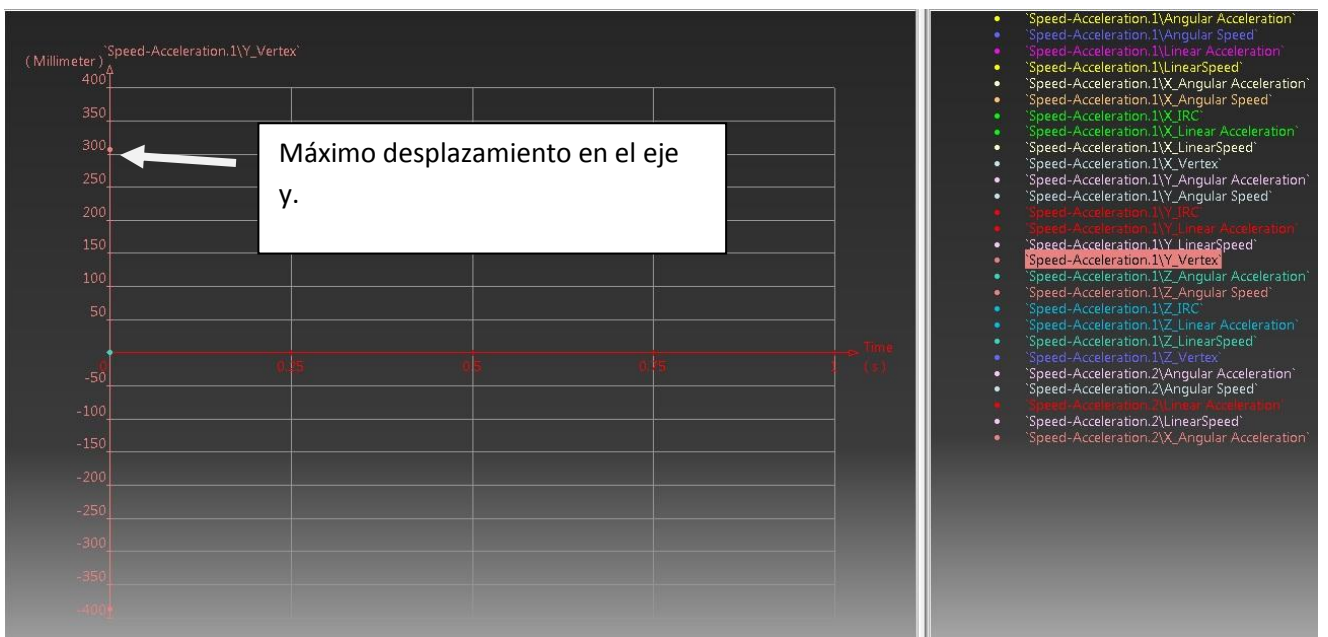


Figura 3.15. Valor máximo en el eje Y. Con esto para obtener el desplazamiento real hay que sacar el modulo de estos dos puntos ya que el chasis se posiciono a 45° sobre la horizontal en el plano YZ.

Como se puede observar el modulo de las gráficas de arriba es de 375 mm, y este resultado es mayor al recorrido que nos marca el reglamento del formula SAE que es de 50.8 mm, el recorrido se puede ajustar con el amortiguador, y con esto, se cumple con este dato que la formula SAE solicita. Con esta información se puede pasar a las conclusiones de este trabajo de tesis.

## Conclusiones

Con esta información el objetivo de conocer las fuerzas que se producen en la suspensión, se cumple en un 90%, considerando que la ecuación del automóvil en una curva es un caso estático y no dinámico.

También de este trabajo se concluye los pasos a seguir para diseñar una suspensión delantera de un automóvil (Proceso de diseño propuesto en la página 38) y los parámetros que se debe tener en cuenta para asegurar su óptimo funcionamiento en cualquier circunstancia, ya que no se sabe qué uso le puedan dar los demás.

Para aplicar los pasos a seguir se debe tener bien definido el uso del automóvil.

- Para que se usara el vehículo.
- En qué tipo de pista o carretera circulara.
- El peso total máximo que soportará.
- Las medidas del chasis.
- Datos que influyen en la dinámica como centro de masa, centroide, momentos de inercia.

Una vez que se tienen estos datos se procede a realizar el análisis con CAE (compute aid engeenering), CAD (compute aid desing), CAM (compute aid manufacture) y FMEA (Failure meassure efects and analisis).

Como trabajo futuro o punto de partida para continuar esta investigación se realizara el desarrollo de la ecuación dinámica del automóvil en una curva con diferentes tipos de peralte y condiciones de fricción entre neumático y pista.

Posteriormente de ser analizado es cuestión de la manufactura garantizar las piezas finales.

Por el lado de la suspensión se concluye que los automóviles de carreas traen tracción trasera por que en general es más ventajosa en muchas circunstancias que una tracción delantera, por ejemplo una tracción trasera nos da una aceleración mayor que una tracción delantera, y las fuerzas ejercidas en la tracción trasera son mayores que en un

tracción delantera lo cual ayuda a mantener una mejor tracción y con esto obtener una mejor aceleración.

La configuración de la suspensión se recomienda que sea doble horquilla en A ya que garantiza un mejor desempeño que otros tipos de suspensión y también da una mayor precisión en curvas ya que al ajustar el jounce y rebound, se pierde menos camber en comparación con la MCPerson por ejemplo.

En el ángulo caster no se tiene de manera directa, en comparación con otros tipos de suspensión o incluso en una doble A de automóvil turismo.

También se puede decir que muchas de las fallas en suspensión en la formula SAE son debidas al diseño mecánico y algunos casos a la manufactura de las piezas, ya que en ambos casos no se contemplan todos los factores que involucra una suspensión.

Por otro lado se pretende incitar a los compañeros que compiten en la formula SAE a desarrollar ingeniería y no solo fomentar la manufactura, ya que en todas las automotrices se desarrolla la ingeniería CAE y FMEA. Se considera que en la industria se tiene mucho presupuesto y con ello laboratorios muy avanzados tecnológicamente, pero se empezó por los métodos de análisis de falla y con la ingeniería concurrente.

Y para ser congruente con esta idea aquí se deja a la disposición de quien lo desee, los datos obtenidos en este análisis, las fuerzas que se aplican a cada rueda y en cada caso. Estacionado, acelerando, en un plano inclinado y en una curva con peralte. Como se menciona en el capítulo anterior la fuerza más grande con magnitud de 131.8323 Kg-Fuerza fue en las ruedas traseras y en el eje delantero la fuerza de mayor magnitud fue de 90 Kg-Fuerza.

La ecuación que se puede realizar experimentalmente es la curva con peralte, ya que si hay un traslado de la masa y en las ecuaciones teóricas no se percibe ese cambio en la posición de la inercia.

Por último este trabajo de tesis me ha permitido aplicar un método de diseño para obtener una solución a un problema planteado. Con los conocimientos que adquirí durante mi

estancia en la licenciatura he aprendido a buscar soluciones a problemas que involucran la práctica y la teoría en el área de la ingeniería con lo cual pude realizar esta tesis y asesorándome con mi tutor.

Como experiencias generadas aprendí la importancia de equipos multidisciplinarios en las investigaciones de proyectos que pretenden innovar y desarrollar tecnología.

#### PROCESO DE DISEÑO PROPUESTO

- Identificar la necesidad del diseño, funciones a realizar, uso y condiciones del producto o pieza a diseñar.
- Analizar casos específicos y críticos de la pieza o producto.
- Proponer un diseño y evaluarlo con las diversas herramientas que se tengan disponibles.
- Analizar la factibilidad de construcción y si se es factible construir un diseño a escala para realizar pruebas de desempeño.
- Evaluar el producto o pieza para su fabricación.

## BIBLIOGRAFÍA

- *Carroll Smit. (2004). Racing chasis and suspension desing. Pennsylvania. Society of Automotive Engineers. (SAE)*
- *Reza N. Jazar. (2008). Vehicle Dynamics Theory and Aplications. Manhattan. Springer.*
- *William F. Milliken. (2004). Hands-on racing cars engineer. Pennsylvania. Society of Automotive Engineers. (SAE)*

## Mesografia

- Figura 2.2 Rockrawler (8 de Mayo, 2013). Recuperado el 8 de Mayo de 2013 de <http://www.rockcrawler.com/techreports/glossary/index.asp> Ultima fecha de revisión 08/04/2013.
- SAE International. Recuperado el 25 de Abril de 2013 de <http://students.sae.org/competitions/formulaseries/>
- Reid Olsen Andrew Bookholt Eric Melchiori (Junio, 2010) Composite Suspension for Formula SAE Vehicle. Recuperado el 15 de Junio de 2013 de Faculty of the Mechanical Engineering Department California Polytechnic State University

APENDICES

APENDICE A

2.2.1. Obtención del centro de masa

Para determinar el centro de masa  $C$  se puede hacer experimentalmente, como se muestra a continuación:

Se mide el peso total del automóvil, así como también la fuerza bajo las ruedas delanteras o traseras como lo muestra la siguiente figura,

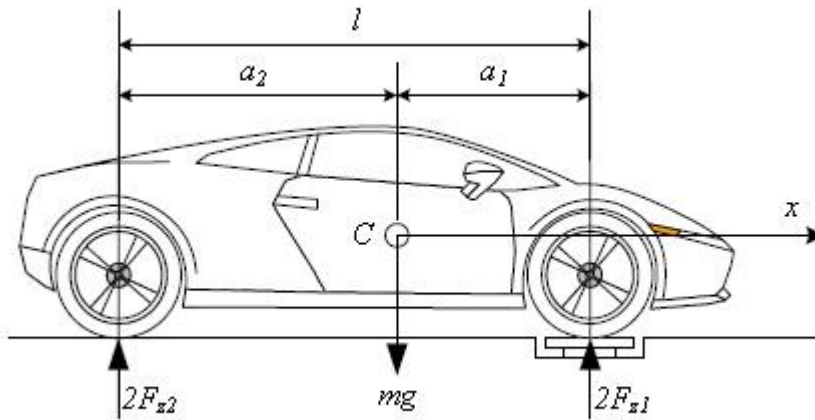


Figura 2.2.1.1.a. La ilustración nos muestra la medición bajo las ruedas

Y suponiendo que la fuerza bajo las ruedas delanteras es  $2F_{z1}$  la posición del centro de masa se calcula por las ecuaciones de equilibrio estático 3 y 4.

$$\Sigma F_z = 0$$

$$\Sigma M_y = 0$$

Y con las ecuaciones 5 y 6



$$2F_{z1} + 2F_{z2} - mg = 0$$

$$-2F_{z1}a_1 + 2F_{z2}a_2 = 0$$

Y procedemos a medir la longitud que nosotros conocemos como "Wheel base" o  $l$  y recordando que  $l$  es la suma de  $a_1 + a_2$  podemos determinar nuestro centro de masa. Hay que aclarar que para vehículos con diferentes ruedas adelante y atrás cambian las ecuaciones aquí descritas, pero aquí no las presentamos por que el vehículo que se someterá a análisis tendrá las mismas ruedas adelante y atrás.

Centro de masa en la posición lateral

Muchos carros están aproximadamente simétricos sobre el plano centro longitudinal, pasando por el medio de las ruedas entonces la posición lateral del centro de masa  $C$  está cerrada en el plano centro. Sin embargo la posición lateral de  $C$  puede ser calculada pesando un lado del carro.

Altura del centro de masa

Para determinar la altura del centro de masa  $C$ , se debe de medir las fuerzas bajo las ruedas delanteras y traseras mientras el automóvil este en una superficie inclinada. Experimentalmente se usa un dispositivo tal como se muestra en la siguiente figura,

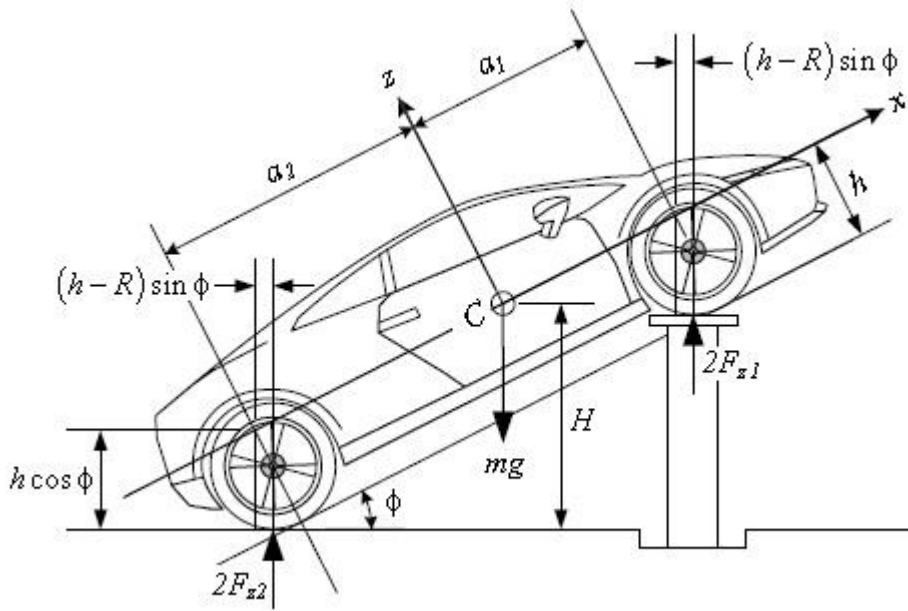


Figura 2.2.1.1.b. Determinación del centro de masa en la posición h.

El vehículo está detenido en una superficie de nivel tal que las ruedas delanteras están en un gato. Las ruedas delanteras serán sujetas y aseguradas al gato, mientras que las ruedas traseras estarán libres para girar. El gato levantará las ruedas delanteras y requerirá aplicar una fuerza vertical por el gato y esta será medida por una celda de carga.

Suponiendo que nosotros tenemos la posición longitudinal de  $C$  y el gato está levantado tal que hace que el carro tenga un ángulo  $\phi$  con el plano horizontal. La pendiente del ángulo  $\phi$  es medible. Suponiendo que la fuerza bajo las ruedas delanteras es  $2F_{z1}$  la altura del centro de masa  $C$  puede ser calculada por las ecuaciones de equilibrio estático que son 3 y 4.

Y aplicando las ecuaciones

$$2F_{z1} + 2F_{z2} - mg = 0$$

$$-2F_{z1}(a_1 \cos \phi - (h - R) \sin \phi) + 2F_{z2}(a_2 \cos \phi + (h - R) \sin \phi) = 0$$

2.2.2. Estudio de las fuerzas a las que se somete un vehículo en un camino inclinado.

Cuando un automóvil está detenido sobre un camino inclinado con respecto a la horizontal las fuerzas normales bajo cada una de las ruedas delanteras y traseras son:

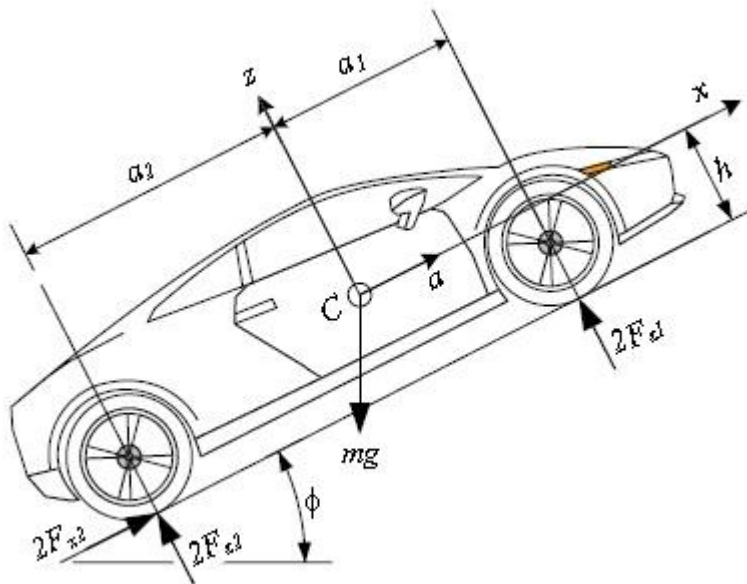


Figura 2.2.2.1. Automóvil detenido en un plano inclinado respecto de la horizontal.

$$F_{z1} = \frac{1}{2}mg \frac{a_2}{l} \cos\phi + \frac{1}{2}mg \frac{h}{l} \sin\phi$$

$$F_{z2} = \frac{1}{2}mg \frac{a_1}{l} \cos\phi - \frac{1}{2}mg \frac{h}{l} \sin\phi$$

$$l = a_1 + a_2$$

Donde  $\phi$  es el ángulo del camino respecto de la horizontal y la horizontal es perpendicular a la aceleración gravitacional  $g$ .

Si se considera la figura 8 y se supone que el carro está detenido por una fuerza de frenado aplicada solo a las ruedas traseras. Y las ruedas delanteras están libres para rodar. Aplicamos las ecuaciones de equilibrio estático.

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma F_z = 0$$

$$\Sigma M_y = 0$$

Resulta

$$2F_{x2} - mg \sin\phi = 0$$

$$2F_{z1} + 2F_{z2} - mg \cos\phi = 0$$

$$-2F_{z1}a_1 + 2F_{z2}a_2 - 2F_{x2}h = 0$$

Las siguientes ecuaciones nos darán las fuerzas de frenado y reacción bajo las ruedas delanteras y traseras.

$$F_{z1} = \frac{1}{2}mg \frac{a_2}{l} \cos\phi - \frac{1}{2}mg \frac{h}{l} \sin\phi$$

$$F_{z2} = \frac{1}{2}mg \frac{a_1}{l} \cos\phi + \frac{1}{2}mg \frac{h}{l} \sin\phi$$

$$F_{x2} = \frac{1}{2}mg \sin\phi$$

Proporcionando la posición vertical de C y las fuerzas de reacción bajo las ruedas traseras

$$F_{z2} = \frac{1}{2}mg - F_{z1}$$

$$\begin{aligned}
h &= \frac{F_{z1}(R\sin\phi + a_1\cos\phi) + F_{z2}(R\sin\phi - a_2\cos\phi)}{mg\sin\phi} \\
&= R + \frac{a_1F_{z1} - a_2F_{z2}}{mg} \cot\phi \\
&= R + \left(2\frac{F_{z1}}{mg}l - a_2\right) \cot\phi
\end{aligned}$$

Incremento del ángulo de inclinación.

Al incrementar el ángulo de inclinación la fuerza normal bajo las ruedas delanteras de un automóvil detenido decrecen mientras que en las ruedas traseras la fuerza de frenado incrementa. El límite para el incremento  $\phi$  es donde el vector de peso  $mg$  va a través del punto de contacto de la rueda trasera con el piso. Tal ángulo es llamado tilting angle.

Angulo de inclinación máximo

La fuerza de frenado  $F_{x2}$  requerida incrementa por el ángulo de inclinación. Porque  $F_{x2}$  es igual a la fuerza de fricción entre la llanta y el pavimento. Es máxima la dependencia entre la llanta y las condiciones del pavimento. Ahí tenemos un ángulo específico  $\phi_M$  en el cual la fuerza de frenado  $F_{x2}$  se saturara y no podrá incrementarse más. En este ángulo máximo, la fuerza de frenado es proporcional a la fuerza normal  $F_{z2}$

$$F_{x2} = \mu_{x2}F_{z2}$$

Donde el coeficiente  $\mu_{x2}$  es el coeficiente de fricción en la dirección x para las ruedas traseras. En el caso de  $\phi = \phi_M$  las ecuaciones de equilibrio se reducen a:

$$\begin{aligned}
2\mu_{x2}F_{z2} - mg\sin\phi_M &= 0 \\
2F_{z1} + 2F_{z2} - mg\cos\phi_M &= 0
\end{aligned}$$

$$2F_{z1}a_1 - 2F_{z2}a_2 + 2\mu_{x2}F_{z2}h = 0$$

Estas ecuaciones nos proporcionan

$$F_{z1} = \frac{1}{2}mg \frac{a_2}{l} \cos\phi_M - \frac{1}{2}mg \frac{h}{l} \sin\phi_M$$

$$F_{z2} = \frac{1}{2}mg \frac{a_1}{l} \cos\phi_M + \frac{1}{2}mg \frac{h}{l} \sin\phi_M$$

$$\tan\phi_M = \frac{a_1\mu_{x2}}{l - \mu_{x2}h}$$

Mostrando que ahí hay una relación entre el coeficiente de fricción  $\mu_{x2}$ , la máxima inclinación  $\phi_M$  y la posición geométrica del centro de masa. El ángulo  $\phi_M$  incrementa por decremento de  $h$ .

Se pasara a la fuerza de frenado en las ruedas delanteras

Cuando las ruedas delanteras están frenando solamente  $F_{x2}=0$  y  $F_{x1}$  es diferente de cero. En este caso las ecuaciones de equilibrio serán:

$$2F_{x1} - mg \sin\phi = 0$$

$$2F_{z1} + 2F_{z2} - mg \cos\phi = 0$$

$$-2F_{z1}a_1 + 2F_{z2}a_2 - 2F_{x1}h = 0$$

Y estas ecuaciones proporcionan, igual que en el caso anterior donde las ruedas traseras son las que frenaban, las ecuaciones siguientes

$$F_{z1} = \frac{1}{2}mg \frac{a_2}{l} \cos\phi - \frac{1}{2}mg \frac{h}{l} \sin\phi$$

$$F_{z2} = \frac{1}{2}mg \frac{a_1}{l} \cos\phi + \frac{1}{2}mg \frac{h}{l} \sin\phi$$

$$F_{x1} = \frac{1}{2} m g \sin \phi$$

Y en el ángulo final  $\phi = \phi_M$

$$F_{x1} = \mu_{x1} F_{z1}$$

Y

$$2\mu_{x1} F_{z1} - m g \sin \phi_M = 0$$

$$2F_{z1} + 2F_{z2} - m g \cos \phi_M = 0$$

$$2F_{z1} a_1 - 2F_{z2} a_2 + 2\mu_{x1} F_{z1} h = 0$$

Y con estas ecuaciones obtenemos

$$F_{z1} = \frac{1}{2} m g \frac{a_2}{l} \cos \phi_M - \frac{1}{2} m g \frac{h}{l} \sin \phi_M$$

$$F_{z2} = \frac{1}{2} m g \frac{a_1}{l} \cos \phi_M + \frac{1}{2} m g \frac{h}{l} \sin \phi_M$$

$$\tan \phi_M = \frac{a_2 \mu_{x1}}{l - \mu_{x1} h}$$

Ahora renombraremos dos ecuaciones, ángulo ultimo para el freno en las ruedas delanteras como  $\phi_{Mf}$ , y ángulo ultimo para el freno en las ruedas traseras como  $\phi_{Mr}$ , y comparándolos se muestra que

$$\frac{\phi_{\mu f}}{\phi_{\mu r}} = \frac{a_1 \mu_{x2} (l - \mu_{x1} h)}{a_2 \mu_{x1} (l - \mu_{x2} h)}$$

Y como suponemos que las llantas delanteras y traseras son iguales así que

$$\mu_{x1} = \mu_{x2}$$

Por lo tanto

$$\frac{\phi_{\mu f}}{\phi_{\mu r}} = \frac{a_1}{a_2}$$

De ahí si  $a_1 < a_2$  entonces  $\phi_{\mu f} < \phi_{\mu r}$  por lo tanto un freno trasero es más efectivo que un freno delantero en una detención cuesta arriba en la condición que  $\phi_{\mu f}$  es menos que el tilting angle (ángulo de inclinación),  $\phi_{\mu f} < \tan^{-1} \frac{a_2}{h}$ . En el ángulo de inclinación el vector peso pasa a través del punto de contacto de las ruedas traseras con el piso.

Similarmente se puede concluir que cuando se tiene el carro en una cuesta abajo el freno delantero es más efectivo que el trasero.

Frenado con cuatro ruedas

Considerando un automóvil detenido por freno en las cuatro ruedas en una subida como se muestra en la siguiente figura

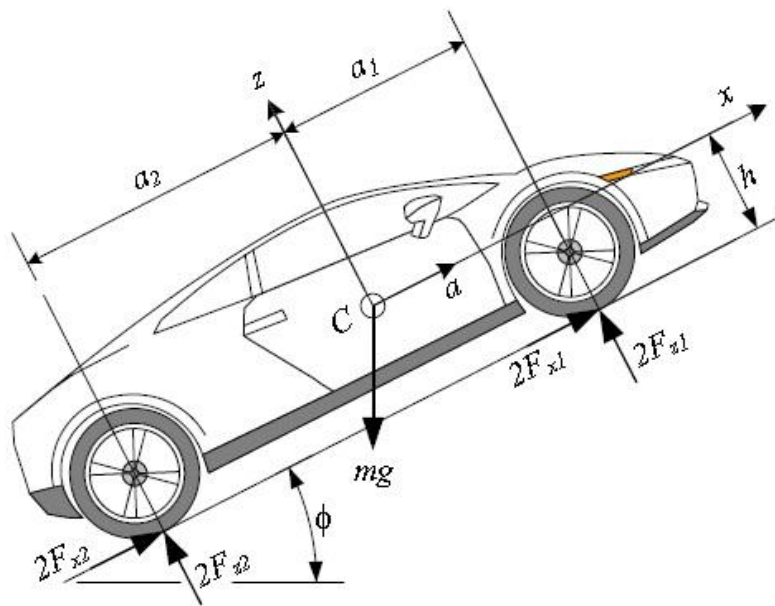


Figura 2.2.2.2. Automóvil detenido en subida frenando con las cuatro ruedas



En estas condiciones, ahí estarán dos fuerzas de frenado  $F_{x1}$  en las ruedas delanteras y dos fuerzas de frenado  $F_{x2}$  en las ruedas traseras.

Las ecuaciones de equilibrio para este caso son

$$\begin{aligned}2F_{x1} + 2F_{x2} - mg\sin\phi &= 0 \\2F_{z1} + 2F_{z2} - mg\cos\phi &= 0 \\-2F_{z1}a_1 + 2F_{z2}a_2 - (2F_{x1} + 2F_{x2})h &= 0\end{aligned}$$

Estas ecuaciones proporcionan las fuerzas de frenado y reacción, bajo las llantas delanteras y traseras

$$\begin{aligned}F_{z1} &= \frac{1}{2}mg\frac{a_2}{l}\cos\phi - \frac{1}{2}mg\frac{h}{l}\sin\phi \\F_{z2} &= \frac{1}{2}mg\frac{a_1}{l}\cos\phi - \frac{1}{2}mg\frac{h}{l}\sin\phi \\F_{x1} + F_{x2} &= \frac{1}{2}mg\sin\phi\end{aligned}$$

En el ángulo último  $\phi = \phi_M$ , todas las ruedas empezaran a deslizar simultáneamente y por lo tanto,

$$\begin{aligned}F_{x1} &= \mu_{x1}F_{z1} \\F_{x2} &= \mu_{x2}F_{z2}\end{aligned}$$

Las ecuaciones de equilibrio se muestran así

$$\begin{aligned}2\mu_{x1}F_{z1} + 2\mu_{x2}F_{z2} - mg\sin\phi_M &= 0 \\2F_{z1} + 2F_{z2} - mg\cos\phi_M &= 0 \\-2F_{z1}a_1 + 2F_{z2}a_2 - (2\mu_{x1}F_{z1} + 2\mu_{x2}F_{z2})h &= 0\end{aligned}$$

Y suponemos

$$\mu_{x1} = \mu_{x2} = \mu_x$$

Nos proporcionara

$$F_{z1} = \frac{1}{2}mg \frac{a_2}{l} \cos\phi_M - \frac{1}{2}mg \frac{h}{l} \sin\phi_M$$

$$F_{z2} = \frac{1}{2}mg \frac{a_1}{l} \cos\phi_M - \frac{1}{2}mg \frac{h}{l} \sin\phi_M$$

$$\tan\phi_M = \mu_x$$

2.2.3. Ahora se realizara un análisis dinámico de las fuerzas que se involucran cuando un automóvil tiene cierta aceleración

Automóvil acelerando en un camino plano

Cuando un vehículo está corriendo con aceleración  $a$  en un camino plano como se muestra en la siguiente figura

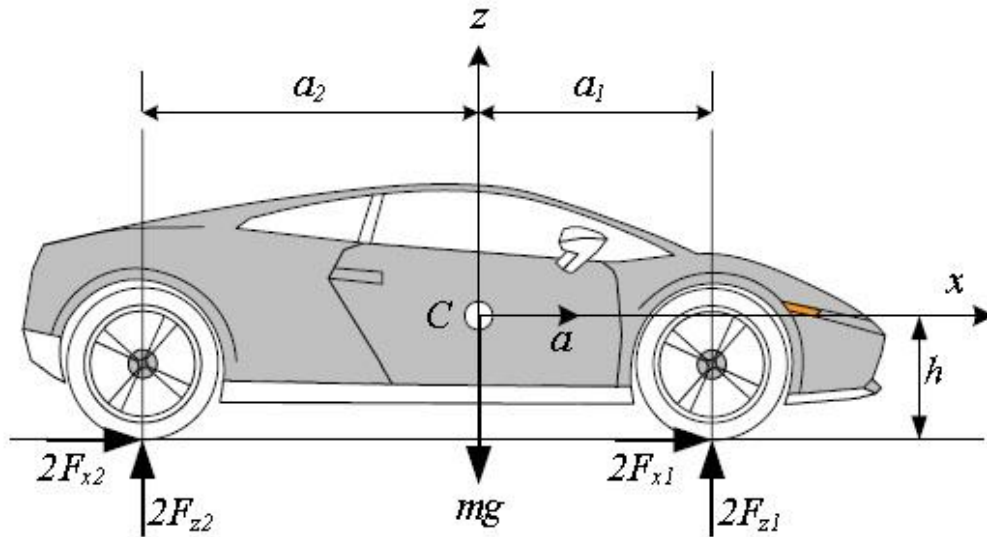


Figura 2.2.3.1. Vehículo acelerando en un camino plano

Las fuerzas verticales bajo las ruedas delanteras y traseras son

$$F_{z1} = \frac{1}{2}mg \frac{a_2}{l} - \frac{1}{2}mg \frac{h}{l} \frac{a}{g} \quad (15)$$

$$F_{z2} = \frac{1}{2}mg \frac{a_1}{l} + \frac{1}{2}mg \frac{h}{l} \frac{a}{g} \quad (16)$$

Los primeros términos de las ecuaciones que son los que ya se han descrito y son llamados la parte estática y los segundos términos que se acaba de introducir son llamados la parte dinámica de las fuerzas normales.

Supongamos que el vehículo es considerado como un cuerpo rígido que se mueve a lo largo de un camino plano. La fuerza en la huella de rodadura de cada llanta puede ser descompuesta en una fuerza normal y otra longitudinal. La ecuación de movimiento para un carro acelerando viene dada por la primera ley de newton en la dirección x y dos ecuaciones de equilibrio estático.

$$\Sigma F_x = ma \quad (a)$$

$$\Sigma F_z = 0 \quad (b)$$

$$\Sigma M_y = 0 \quad (c)$$

Ahora al desarrollar las ecuaciones se tienen cuatro incógnitas  $F_{x1}$ ,  $F_{x2}$ ,  $F_{z1}$ ,  $F_{z2}$  y tres ecuaciones

$$2F_{x1} + 2F_{x2} = ma \quad (d)$$

$$2F_{z1} + 2F_{z2} - mg = 0 \quad (e)$$

$$-2F_{z1}a_1 + 2F_{z2}a_2 - 2(F_{x1} + F_{x2})h = 0 \quad (f)$$

Sin embargo es posible eliminar  $(F_{x1} + F_{x2})$  entre la primera y tercera ecuación, y resolver para las fuerzas normales  $F_{z1}$ ,  $F_{z2}$ .

$$\begin{aligned}
 F_{z1} &= (F_{z1})_{st} + (F_{z1})_{dyn} \\
 &= \frac{1}{2}mg \frac{a_2}{l} - \frac{1}{2}mg \frac{h}{l} \frac{a}{g}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{z2} &= (F_{z2})_{st} + (F_{z2})_{dyn} \\
 &= \frac{1}{2}mg \frac{a_1}{l} - \frac{1}{2}mg \frac{h}{l} \frac{a}{g}
 \end{aligned}$$

Las partes estáticas

$$(F_{z1})_{st} = \frac{1}{2}mg \frac{a_2}{l}$$

$$(F_{z2})_{st} = \frac{1}{2}mg \frac{a_1}{l}$$

La distribución de peso para un carro estacionado depende de la posición horizontal del centro de masa. Sin embargo la parte dinámica

$$(F_{z1})_{dyn} = -\frac{1}{2}mg \frac{h}{l} \frac{a}{g}$$

$$(F_{z2})_{dyn} = \frac{1}{2}mg \frac{h}{l} \frac{a}{g}$$

La distribución de peso indicada acorde a la aceleración horizontal, y depende de la posición vertical del centro de masa. Cuando la aceleración  $a > 0$  la fuerza normal bajo las llantas delanteras es menos que la carga estática, y bajo las llantas traseras es más que la carga estática.

Ruedas delanteras con tracción acelerando en un camino plano.

Cuando el automóvil es tracción delantera,  $F_{x2} = 0$  las ecuaciones (15), (16) y (a) a (d) proporcionarían las mismas fuerzas verticales en la huella de rodadura como las ecuaciones (15) y (16). Sin embargo la fuerza horizontal requerida consigue la misma aceleración,  $a$ , debe de ser proporcionada únicamente por las ruedas delanteras.

Ruedas traseras con tracción acelerando en un camino plano.

Si un vehículo es tracción trasera entonces,  $F_{x1} = 0$  y las fuerzas requeridas consiguen la aceleración  $a$ , y debe de ser proporcionada solo por las ruedas traseras. La fuerza vertical bajo las ruedas nos las seguirán proporcionando las ecuaciones (15) y (16).

Máxima aceleración en un camino plano

La máxima aceleración de un automóvil es proporcional a la fricción bajo las ruedas. Se supone el coeficiente de fricción en las ruedas delanteras y traseras es igual y todas las ruedas alcanzan su máxima tracción en el mismo tiempo

$$F_{x1} = \mu_x F_{z1}$$

$$F_{x2} = \mu_x F_{z2}$$

Ahora podemos escribir la ecuación (d) de la siguiente manera

$$ma = 2\mu_x(F_{z1} + F_{z2})$$

Entonces sustituimos  $F_{z1}$  y  $F_{z2}$  de (e) y (f) resulta

$$a = \mu_x g$$

Por lo tanto la máxima aceleración y desaceleración depende directamente del coeficiente de fricción.

Máxima aceleración para un vehículo con un solo eje de tracción.

La máxima aceleración  $a_{rwd}$  para un vehículo con tracción trasera es conseguida cuando se sustituye  $F_{x1} = 0$ ,  $F_{x2} = \mu_x F_{z2}$  en la ecuación (d) y usamos la ecuación (16).

$$\mu_x mg \left( \frac{a_1}{l} + \frac{h}{l} \frac{a_{rwd}}{g} \right) = ma_{rwd}$$

Y por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{a_{rwd}}{g} &= \frac{a_1 \mu_x}{l - h \mu_x} \\ &= \frac{\mu_x}{1 - \mu_x \frac{h}{l}} \frac{a_1}{l} \quad (g) \end{aligned}$$

Las ruedas delanteras pueden salir del camino cuando  $F_{z1} = 0$ . Sustituyendo  $F_{z1} = 0$  en la ecuación (16) proporciona la máxima aceleración en la cual las ruedas delanteras estarán en el camino.

$$\frac{a_{rwd}}{g} < \frac{a_2}{-h} \quad (h)$$

Por lo tanto la máxima aceleración posible sería el valor menor de la ecuación (g) o (h).

Similarmente la máxima aceleración  $a_{fwd}$  para un carro con tracción delantera es conseguida cuando se sustituye  $F_{x2} = 0$ ,  $F_{x1} = \mu_x F_{z1}$  en la ecuación (d) y usamos la ecuación (16).

$$\begin{aligned} \frac{a_{fwd}}{g} &= \frac{a_2 \mu_x}{l + h \mu_x} \\ &= \frac{\mu_x}{1 + \mu_x \frac{h}{l}} \left(1 - \frac{a_1}{l}\right) \end{aligned}$$

Se ve el efecto del cambio de la posición del centro de masa en la máxima aceleración alcanzable.

La máxima aceleración puede también estar limitada por las condiciones de inclinación

$$\frac{a_M}{g} < \frac{a_2}{-h}$$

#### 2.2.4. Vehículo acelerando en un camino inclinado

Cuando un automóvil está acelerando en un camino inclinado con un ángulo  $\phi$  como se muestra en la siguiente figura

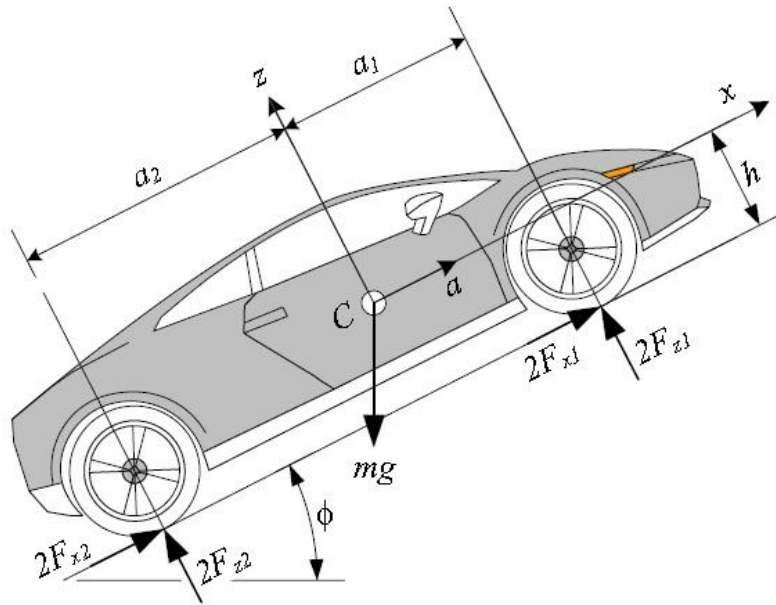


Figura 2.2.4.1. Vehículo acelerando en un camino inclinado

Las fuerzas normales bajo cada una de las ruedas delanteras y traseras  $F_{z1}$ ,  $F_{z2}$ , son:

$$F_{z1} = \frac{1}{2}mg \left( \frac{a_2}{l} \cos\phi - \frac{h}{l} \sin\phi \right) - \frac{1}{2}ma \frac{h}{l} \quad (i)$$

$$F_{z2} = \frac{1}{2}mg \left( \frac{a_1}{l} \cos\phi + \frac{h}{l} \sin\phi \right) + \frac{1}{2}ma \frac{h}{l}$$

Y recordando que

$$l = a_1 + a_2$$

Las partes dinámicas  $\pm \frac{1}{2}mg \frac{ha}{lg}$ , dependen de la aceleración  $a$  y la altura  $h$  del centro de masa y todo lo demás queda sin cambios, mientras las partes estáticas son influenciadas por el ángulo tangente  $\phi$  y la altura del centro de masa.

La sumatoria de fuerzas en  $x$  y dos ecuaciones de equilibrio estático deben de ser examinadas para encontrar la ecuación de movimiento y las fuerzas de reacción en el pavimento.

$$\Sigma F_x = ma \quad (j)$$

$$\Sigma F_z = 0$$

$$\Sigma M_y = 0$$

Y al desarrollar las siguientes ecuaciones se tiene tres ecuaciones y cuatro incógnitas.  $F_{x1}$ ,  $F_{x2}$ ,  $F_{z1}$ ,  $F_{z2}$

$$2F_{x1} + 2F_{x2} - mg \sin \phi = ma \quad (k)$$

$$2F_{z1} + 2F_{z2} - mg \cos \phi = 0 \quad (l)$$

$$2F_{z1} a_1 - 2F_{z2} a_2 + 2(F_{x1} + F_{x2}) h = 0 \quad (m)$$

Y es posible eliminar  $(F_{x1} + F_{x2})$  entre la primera y tercera ecuación y resolver para las fuerzas normales  $F_{z1}$ ,  $F_{z2}$ .

$$\begin{aligned} F_{z1} &= (F_{z1})_{st} + (F_{z1})_{dyn} \\ &= \frac{1}{2} mg \left( \frac{a_2}{l} \cos \phi - \frac{h}{l} \sin \phi \right) - \frac{1}{2} ma \frac{h}{l} \quad (n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{z2} &= (F_{z2})_{st} + (F_{z2})_{dyn} \\ &= \frac{1}{2} mg \left( \frac{a_1}{l} \cos \phi + \frac{h}{l} \sin \phi \right) + \frac{1}{2} ma \frac{h}{l} \quad (o) \end{aligned}$$

Para el caso de un vehículo con tracción trasera acelerando en un camino inclinado

Sustituimos  $F_{x2} = 0$  en la ecuación (k) y (m) y se resuelve para las fuerzas de reacción normales bajo cada llanta proporcionando el mismo resultado como en las ecuaciones (n) y (o). Por lo tanto las fuerzas normales aplicadas en las llantas no se sienten si están aplicadas adelante, atrás o en las cuatro ruedas. Así como nosotros manejamos en un camino recto con baja aceleración las ruedas de tracción pueden ser delanteras o traseras. Sin embargo las ventajas y desventajas de adelante o atrás ó todas las ruedas con tracción aparecen en maniobras, en caminos resbaladizos, o cuando la máxima aceleración es requerida.



Máxima aceleración en un camino inclinado

La máxima aceleración depende de la fricción bajo las ruedas. Supongamos que el coeficiente de fricción en las ruedas delanteras y traseras es igual, entonces las fuerzas de reacción delanteras y traseras son

$$F_{x1} \leq \mu_x F_{z1}$$

$$F_{x2} \leq \mu_x F_{z2}$$

Si suponemos que las ruedas delanteras y traseras alcanzan su límite de tracción en el mismo tiempo entonces

$$F_{x1} = \mu_x F_{z1}$$

$$F_{x2} = \mu_x F_{z2}$$

Y se puede reescribir la ecuación (j) como

$$ma_M = 2\mu_x(F_{z1} + F_{z2}) - mg\sin\phi$$

Donde  $a_M$  es la máxima aceleración posible. Ahora sustituyendo  $F_{z1}$  y  $F_{z2}$  de la ecuación (n) y (o) y resulta en

$$\frac{a_M}{g} = \mu_x \cos\phi - \sin\phi$$

Acelerando en un camino de subida ( $a > 0, \phi > 0$ ) y frenando en una bajada ( $a < 0, \phi < 0$ ) son casos extremos en donde el carro puede parar. En estos casos el carro puede moverse mientras que  $\mu_x \geq |\tan\phi|$ .

Máxima desaceleración para un vehículo con un solo eje de frenado.

Nosotros podemos encontrar la máxima desaceleración o freno,  $a_{fwb}$  de un vehículo con las ruedas delanteras con freno en un camino horizontal sustituimos  $\phi = 0, F_{x2} = 0, F_{x1} = -\mu_x F_{z1}$  en la ecuación (k) y usando la ecuación (i)

$$-\mu_x mg \left( \frac{a_2}{l} - \frac{h}{l} \frac{a_{rwb}}{g} \right) = ma_{fwb}$$

Por lo tanto

$$\frac{a_{fwb}}{g} = -\frac{\mu_x}{1-\mu_x \frac{h}{l}} \left( 1 - \frac{a_1}{l} \right)$$

Similarmente la máxima desaceleración  $a_{rwb}$  en un vehículo con freno en el eje trasero puede ser conseguida cuando se sustituye  $F_{x2} = 0$ ,  $F_{x1} = \mu_x F_{z1}$ .

$$\frac{a_{rwb}}{g} = -\frac{\mu_x}{1+\mu_x \frac{h}{l}} \frac{a_1}{l}$$

### 2.2.5. Carro estacionado en un camino con inclinación lateral

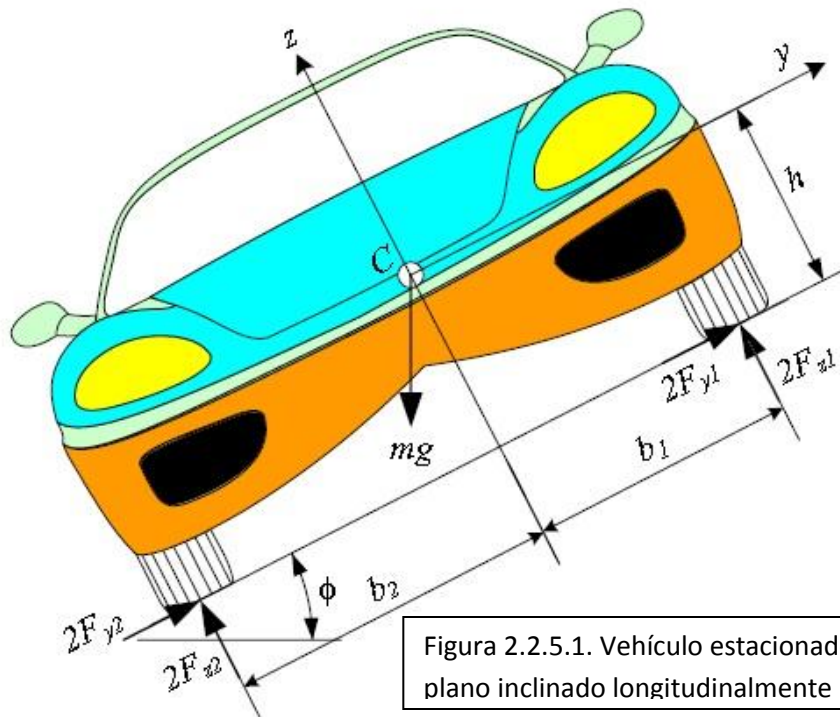


Figura 2.2.5.1. Vehículo estacionado en un plano inclinado longitudinalmente

La figura 2.2.5.1. Representa el efecto de un peralte con un ángulo  $\phi$  y la distribución de cargas en el vehículo. Un peralte causa cargas en la parte inferior de las llantas que incrementan, y las cargas en la parte superior decrecen. Las fuerzas de reacción en las llantas son

$$F_{z1} = \frac{1}{2} \frac{mg}{w} (b_2 \cos \phi - h \sin \phi)$$

$$F_{z2} = \frac{1}{2} \frac{mg}{w} (b_1 \cos\phi + h \sin\phi)$$

$$w = b_1 + b_2$$

Se inicia con las ecuaciones de equilibrio

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

$$\sum M_x = 0$$

Se puede escribir las siguientes ecuaciones

$$2F_{y1} + 2F_{y2} - mg \sin\phi = 0$$

$$2F_{z1} + 2F_{z2} - mg \cos\phi = 0$$

$$2F_{z1}b_1 - 2F_{z2}b_2 + 2(F_{y1} + F_{y2})h = 0$$

Se supone que la fuerza bajo la parte inferior de la rueda adelante y atrás es igual y también las fuerzas en la superficie superior de la rueda de adelante y de atrás es igual. Para calcular las fuerzas de reacción bajo cada llanta se supone que la fuerza lateral total  $F_{y1} + F_{y2}$  es desconocida, la solución de estas ecuaciones proporciona las fuerzas laterales y de reacción bajo la parte superior e inferior de la llanta

$$F_{z1} = \frac{1}{2} mg \frac{b_2}{w} \cos\phi - \frac{1}{2} mg \frac{h}{w} \sin\phi$$

$$F_{z2} = \frac{1}{2} mg \frac{b_1}{w} \cos\phi - \frac{1}{2} mg \frac{h}{w} \sin\phi$$

$$F_{y1} + F_{y2} = \frac{1}{2} mg \sin\phi$$

APENDICE B

TABLAS DE DATOS

cotδo-cotδi=w/l		Ackerman condition		coeficiente de relacion a1+a2=l		
l	1525	a2	a1			
w/l	w	915	610	0.6	w/2	
0.6	915	899.75	625.25	0.59	457.5	
0.61	930.25	884.5	640.5	0.58	465.125	
0.62	945.5	869.25	655.75	0.57	472.75	
0.63	960.75	854	671	0.56	480.375	7625
0.64	976	838.75	686.25	0.55	488	2
0.65	991.25	823.5	701.5	0.54	495.625	-2
0.66	1006.5	808.25	716.75	0.53	503.25	R1
0.67	1021.75	793	732	0.52	510.875	15250
0.68	1037	777.75	747.25	0.51	518.5	
0.69	1052.25	762.5	762.5	0.5	526.125	
0.7	1067.5	747.25	777.75	0.49	533.75	
0.71	1082.75	732	793	0.48	541.375	
0.72	1098	716.75	808.25	0.47	549	
0.73	1113.25	701.5	823.5	0.46	556.625	
0.74	1128.5	686.25	838.75	0.45	564.25	
0.75	1143.75	671	854	0.44	571.875	
0.76	1159	655.75	869.25	0.43	579.5	
0.77	1174.25	640.5	884.5	0.42	587.125	
0.78	1189.5	625.25	899.75	0.41	594.75	
0.79	1204.75	610	915	0.4	602.375	
0.8	1220	594.75	930.25	0.39	610	
0.81	1235.25	579.5	945.5	0.38	617.625	
0.82	1250.5	564.25	960.75	0.37	625.25	
0.83	1265.75	549	976	0.36	632.875	
0.84	1281	533.75	991.25	0.35	640.5	
0.85	1296.25	518.5	1006.5	0.34	648.125	
0.86	1311.5	503.25	1021.75	0.33	655.75	
0.87	1326.75	488	1037	0.32	663.375	
0.88	1342	472.75	1052.25	0.31	671	
0.89	1357.25	457.5	1067.5	0.3	678.625	
0.9	1372.5	442.25	1082.75	0.29	686.25	
0.91	1387.75	427	1098	0.28	693.875	
0.92	1403	411.75	1113.25	0.27	701.5	
0.93	1418.25	396.5	1128.5	0.26	709.125	
0.94	1433.5	381.25	1143.75	0.25	716.75	
0.95	1448.75	366	1159	0.24	724.375	
0.96	1464	350.75	1174.25	0.23	732	
0.97	1479.25	335.5	1189.5	0.22	739.625	
0.98	1494.5	320.25	1204.75	0.21	747.25	
0.99	1509.75	305	1220	0.2	754.875	
1	1525	289.75	1235.25	0.19	762.5	
1.01	1540.25	274.5	1250.5	0.18	770.125	
1.02	1555.5	259.25	1265.75	0.17	777.75	
1.03	1570.75	244	1281	0.16	785.375	
1.04	1586	228.75	1296.25	0.15	793	
1.05	1601.25	213.5	1311.5	0.14	800.625	
1.06	1616.5	198.25	1326.75	0.13	808.25	

En este caso ya se conoce R  
entonces la ecuación resulta:

$$\sqrt{\frac{R^2 - a_2^2}{l^2}} = \cot^2 \delta \quad \cot \delta = \frac{\cot \delta_o + \cot \delta_i}{2}$$

R1	R	R=raiz ((a2*a2)+( *l)*(cotδ*cotδ))					
		cotδ	2cotδ	cotδi	cotδo	δi	δo
8082.5	8134.12757						
8090.125	8140.00446	5.30112252	10.602245	5.00112252	5.601122523	11.30745932	10.1226845
8097.75	8145.9128	5.30610262	10.6122052	5.00110262	5.611102619	11.30750317	10.1050513
8105.375	8151.85252	5.31108275	10.6221655	5.00108275	5.621082752	11.30754693	10.0874788
8113	8157.82355	5.31606292	10.6321258	5.00106292	5.631062923	11.30759061	10.0699665
8120.625	8163.82582	5.32104313	10.6420863	5.00104313	5.641043131	11.3076342	10.0525143
8128.25	8169.85926	5.32602338	10.6520468	5.00102338	5.651023376	11.30767772	10.0351218
8135.875	8175.92381	5.33100366	10.6620073	5.00100366	5.661003658	11.30772116	10.0177886
8143.5	8182.01939	5.33598398	10.671968	5.00098398	5.670983977	11.30776451	10.0005146
8151.125	8188.14593	5.34096433	10.6819287	5.00096433	5.680964332	11.30780778	9.98329938
8158.75	8194.30338	5.34594472	10.6918894	5.00094472	5.690944725	11.30785098	9.96614266
8166.375	8200.49164	5.35092515	10.7018503	5.00092515	5.700925154	11.30789409	9.94904415
8174	8206.71067	5.35590562	10.7118112	5.00090562	5.710905619	11.30793712	9.93200357
8181.625	8212.96038	5.36088612	10.7217722	5.00088612	5.720886121	11.30798008	9.91502061
8189.25	8219.24071	5.36586666	10.7317333	5.00086666	5.730866659	11.30802295	9.898095
8196.875	8225.55158	5.37084723	10.7416945	5.00084723	5.740847233	11.30806574	9.88122643
8204.5	8231.89293	5.37582784	10.7516557	5.00082784	5.750827843	11.30810846	9.86441464
8212.125	8238.26469	5.38080849	10.761617	5.00080849	5.760808489	11.3081511	9.84765933
8219.75	8244.66678	5.38578917	10.7715783	5.00078917	5.770789172	11.30819365	9.83096023
8227.375	8251.09914	5.39076989	10.7815398	5.00076989	5.780769889	11.30823613	9.81431705
8235	8257.56169	5.39575064	10.7915013	5.00075064	5.790750643	11.30827853	9.79772952
8242.625	8264.05436	5.40073143	10.8014629	5.00073143	5.800731432	11.30832086	9.78119737
8250.25	8270.57708	5.40571226	10.8114245	5.00071226	5.810712256	11.3083631	9.76472031
8257.875	8277.12979	5.41069312	10.8213862	5.00069312	5.820693116	11.30840527	9.74829807
8265.5	8283.71241	5.41567401	10.831348	5.00067401	5.830674012	11.30844736	9.7319304
8273.125	8290.32486	5.42065494	10.8413099	5.00065494	5.840654942	11.30848937	9.715617
8280.75	8296.96709	5.42563591	10.8512718	5.00063591	5.850635907	11.30853131	9.69935763
8288.375	8303.639	5.43061691	10.8612338	5.00061691	5.860616908	11.30857317	9.68315202
8296	8310.34055	5.43559794	10.8711959	5.00059794	5.870597943	11.30861495	9.6669999
8303.625	8317.07164	5.44057901	10.881158	5.00057901	5.880579013	11.30865665	9.650901
8311.25	8323.83222	5.44556012	10.8911202	5.00056012	5.890560118	11.30869828	9.63485508
8318.875	8330.62221	5.45054126	10.9010825	5.00054126	5.900541258	11.30873984	9.61886187
8326.5	8337.44153	5.45552243	10.9110449	5.00052243	5.910522431	11.30878132	9.60292111

		180			
$\phi$ grados	$\phi$ radianes	3.1416			$t = \frac{27.78}{\alpha} = \frac{27.78}{\frac{2\pi}{360} \cdot \frac{v_1}{h\mu_0}}$
0	0				t
10	0.17453333				a=v/t
15	0.2618				23.0637336 1.20448842
20	0.34906667				22.5012036 1.23460063
25	0.43633333				21.9654606 1.26471284
30	0.5236				21.454636 1.29482505
35	0.61086667				20.9670306 1.32493726
40	0.69813333				20.5010966 1.35504947
45	0.7854				20.0554206 1.38516168
					19.6287095 1.41527389
					19.219778 1.4453861
					18.8275377 1.47549831
	h	mx	g		18.4509869 1.50561052
	115.166	0.3	9.81		18.0892029 1.53572273
					17.7413336 1.56583494
	mg				17.4065914 1.59594715
	300	kg			17.0842471 1.62605936
					16.7736245 1.65617157
					16.4740955 1.68628378
					16.1850762 1.71639599
					15.9060232 1.7465082
					15.6364296 1.77662041
					15.3758224 1.80673262
					15.1237598 1.83684483
					14.8798282 1.86695704
					14.6436404 1.89706925
					14.4148335 1.92718147
					14.1930669 1.95729368
					13.9780204 1.98740589
					13.7693932 2.0175181
					13.5669021 2.04763031
					13.3702804 2.07774252
					13.1792764 2.10785473
					12.9936528 2.13796694
					12.8131854 2.16807915
					12.6376623 2.19819136
					12.4668831 2.22830357
					12.3006579 2.25841578
					12.1388072 2.28852799
					11.9811603 2.3186402
					11.8275557 2.34875241
					11.6778398 2.37886462
					11.5318668 2.40897683
					11.3894981 2.43908904
					11.2506018 2.46920125
					5.5 5.05090909

Ecuaciones que describen las fuerzas en un plano con inclinación longitudinal.

$F_{z1} = \frac{1}{2} \frac{mg}{w} (b_1 \cos\phi - h \sin\phi)$		$F_{z2} = \frac{1}{2} \frac{mg}{w} (b_1 \cos\phi + h \sin\phi)$	
Fz1 cp		Fz2 cp	
75		75	
70.6358926		70.6358926	
67.715622		67.715622	
64.3271707		64.3271707	
60.492822		60.492822	
56.2381461		56.2381461	
51.5918354		51.5918354	
46.5855146		46.5855146	
41.253527		41.253527	

Ecuación que describe la fuerza de frenado solo en el eje trasera en un camino inclinado.

$F_{z2} = \frac{1}{2} mg \sin\phi$	
0	
26.0472869	
38.8229455	
51.3031366	
63.392878	
75.0001591	
86.036641	
96.418329	
106.066212	



	$F_{z1} = \frac{1}{2} m g \frac{a_2}{l}$		$F_{z2} = \frac{1}{2} m g \frac{a_1}{l}$
Fz1	90	Fz2	60
KgF	88.5		61.5
	87		63
	85.5		64.5
	84		66
	82.5		67.5
	81		69
	79.5		70.5
	78		72
	76.5		73.5
	75		75
	73.5		76.5
	72		78
	70.5		79.5
	69		81
	67.5		82.5
	66		84
	64.5		85.5
	63		87
	61.5		88.5
	60		90
	58.5		91.5
	57		93
	55.5		94.5
	54		96
	52.5		97.5
	51		99
	49.5		100.5
	48		102
	46.5		103.5
	45		105
	43.5		106.5
	42		108
	40.5		109.5
	39		111
	37.5		112.5
	36		114
	34.5		115.5
	33		117
	31.5		118.5
	30		120
	28.5		121.5
	27		123
	25.5		124.5

Fuerzas de reacción en las ruedas delanteras  $F_{z1}$  y traseras  $F_{z2}$  en un plano horizontal con el automóvil detenido.

	$F_{z1} = \frac{1}{2}mg \frac{a_2}{l} - \frac{1}{2}mg \frac{h a}{l D}$		$F_{z2} = \frac{1}{2}mg \frac{a_1}{l} + \frac{1}{2}mg \frac{h a}{l D}$
Fz1 a	88.6091531	Fz2 a	61.3908469
	87.074382		62.925618
	85.5396108		64.4603892
	84.0048396		65.9951604
	82.4700684		67.5299316
	80.9352973		69.0647027
	79.4005261		70.5994739
	77.8657549		72.1342451
	76.3309838		73.6690162
	74.7962126		75.2037874
	73.2614414		76.7385586
	71.7266702		78.2733298
	70.1918991		79.8081009
	68.6571279		81.3428721
	67.1223567		82.8776433
	65.5875855		84.4124145
	64.0528144		85.9471856
	62.5180432		87.4819568
	60.983272		89.016728
	59.4485009		90.5514991
	57.9137297		92.0862703
	56.3789585		93.6210415
	54.8441873		95.1558127
	53.3094162		96.6905838
	51.774645		98.225355
	50.2398738		99.7601262
	48.7051027		101.294897
	47.1703315		102.829669
	45.6355603		104.36444
	44.1007891		105.899211
	42.566018		107.433982
	41.0312468		108.968753
	39.4964756		110.503524
	37.9617045		112.038296
	36.4269333		113.573067
	34.8921621		115.107838
	33.3573909		116.642609
	31.8226198		118.17738
	30.2878486		119.712151
	28.7530774		121.246923
	27.2183063		122.781694
	25.6835351		124.316465
	24.1487639		125.851236
	18.1676142		131.832386

Fuerzas de reacción en las ruedas delanteras  $F_{z1}$  y traseras  $F_{z2}$  en un plano horizontal con el automóvil acelerando.

Fuerza de reacción en las ruedas delanteras de un automóvil detenido en un plano con inclinación  $\phi$ .

Fz1 p	$F_{z1} = \frac{1}{2} mg \frac{a_2}{l} \cos\phi - \frac{1}{2} mg \frac{h}{l} \sin\phi$								
		10	15	20	25	30	35	40	45
$\phi=0$									
90	86.6656344	84.0014522	80.6979652	76.780315	72.2783176	67.22623595	61.66251968	55.6295122	
88.5	85.1884229	82.5525637	79.2884266	75.420854	70.9792804	65.99750912	60.51345459	54.568854	
87	83.7112114	81.1036752	77.8788881	74.061393	69.6802432	64.76878228	59.3643895	53.5081958	
85.5	82.2339999	79.6547867	76.4693496	72.7019319	68.381206	63.54005544	58.21532441	52.4475375	
84	80.7567884	78.2058982	75.0598111	71.3424709	67.0821688	62.3113286	57.06625932	51.3868793	
82.5	79.2795768	76.7570097	73.6502726	69.9830098	65.7831317	61.08260177	55.91719422	50.3262211	
81	77.8023653	75.3081212	72.2407341	68.6235488	64.4840945	59.85387493	54.76812913	49.2655629	
79.5	76.3251538	73.8592327	70.8311956	67.2640878	63.1850573	58.62514809	53.61906404	48.2049046	
78	74.8479423	72.4103442	69.4216571	65.9046267	61.8860201	57.39642125	52.46999895	47.1442464	
76.5	73.3707307	70.9614557	68.0121185	64.5451657	60.5869829	56.16769442	51.32093386	46.0835882	
75	71.8935192	69.5125672	66.60258	63.1857047	59.2879457	54.93896758	50.17186877	45.02293	
73.5	70.4163077	68.0636787	65.1930415	61.8262436	57.9889085	53.71024074	49.02280368	43.9622717	
72	68.9390962	66.6147902	63.783503	60.4667826	56.6898713	52.48151391	47.87373859	42.9016135	
70.5	67.4618846	65.1659017	62.3739645	59.1073216	55.3908342	51.25278707	46.7246735	41.8409553	
69	65.9846731	63.7170132	60.964426	57.7478605	54.091797	50.02406023	45.57560841	40.7802971	
67.5	64.5074616	62.2681247	59.5548875	56.3883995	52.7927598	48.79533339	44.42654332	39.7196388	
66	63.0302501	60.8192362	58.145349	55.0289385	51.4937226	47.56660656	43.27747823	38.6589806	
64.5	61.5530385	59.3703476	56.7358104	53.6694774	50.1946854	46.33787972	42.12841314	37.5983224	
63	60.075827	57.9214591	55.3262719	52.3100164	48.8956482	45.10915288	40.97934805	36.5376642	
61.5	58.5986155	56.4725706	53.9167334	50.9505554	47.596611	43.88042604	39.83028296	35.4770059	
60	57.121404	55.0236821	52.5071949	49.5910943	46.2975738	42.65169921	38.68121787	34.4163477	
58.5	55.6441925	53.5747936	51.0976564	48.2316333	44.9985367	41.42297237	37.53215278	33.3556895	
57	54.1669809	52.1259051	49.6881179	46.8721723	43.6994995	40.19424553	36.38308768	32.2950313	
55.5	52.6897694	50.6770166	48.2785794	45.5127112	42.4004623	38.96551869	35.23402259	31.2343731	
54	51.2125579	49.2281281	46.8690409	44.1532502	41.1014251	37.73679186	34.0849575	30.1737148	
52.5	49.7353464	47.7792396	45.4595023	42.7937892	39.8023879	36.50806502	32.93589241	29.1130566	
51	48.2581348	46.3303511	44.0499638	41.4343281	38.5033507	35.27933818	31.78682732	28.0523984	
49.5	46.7809233	44.8814626	42.6404253	40.0748671	37.2043135	34.05061134	30.63776223	26.9917402	
48	45.3037118	43.4325741	41.2308868	38.7154061	35.9052763	32.82188451	29.48869714	25.9310819	
46.5	43.8265003	41.9836856	39.8213483	37.355945	34.6062392	31.59315767	28.33963205	24.8704237	
45	42.3492887	40.5347971	38.4118098	35.996484	33.307202	30.36443083	27.19056696	23.8097655	
43.5	40.8720772	39.0859086	37.0022713	34.637023	32.0081648	29.13570399	26.04150187	22.7491073	
42	39.3948657	37.6370201	35.5927328	33.2775619	30.7091276	27.90697716	24.89243678	21.688449	
40.5	37.9176542	36.1881316	34.1831942	31.9181009	29.4100904	26.67825032	23.74337169	20.6277908	
39	36.4404427	34.7392431	32.7736557	30.5586399	28.1110532	25.44952348	22.5943066	19.5671326	
37.5	34.9632311	33.2903546	31.3641172	29.1991788	26.812016	24.22079664	21.44524151	18.5064744	
36	33.4860196	31.8414661	29.9545787	27.8397178	25.5129788	22.99206981	20.29617642	17.4458161	
34.5	32.0088081	30.3925776	28.5450402	26.4802568	24.2139417	21.76334297	19.14711133	16.3851579	
33	30.5315966	28.9436891	27.1355017	25.1207957	22.9149045	20.53461613	17.99804623	15.3244997	
31.5	29.054385	27.4948006	25.7259632	23.7613347	21.6158673	19.30588929	16.84898114	14.2638415	
30	27.5771735	26.0459121	24.3164247	22.4018737	20.3168301	18.07716246	15.69991605	13.2031832	
28.5	26.099962	24.5970236	22.9068861	21.0424126	19.0177929	16.84843562	14.55085096	12.142525	
27	24.6227505	23.1481351	21.4973476	19.6829516	17.7187557	15.61970878	13.40178587	11.0818668	

Fuerza de reacción en las ruedas traseras de un automóvil detenido en un plano con inclinación  $\phi$ .

	$F_{z2} = \frac{1}{2} m g \frac{a_1}{l} \cos \phi + \frac{1}{2} m g \frac{h}{l} \sin \phi$								
Fz2 p	0	10	15	20	25	30	35	40	45
60	57.121404	55.0236821	52.5071949	49.5910943	46.2975738	42.65169921	38.68121787	34.4163477	
61.5	58.5986155	56.4725706	53.9167334	50.9505554	47.596611	43.88042604	39.83028296	35.4770059	
63	60.075827	57.9214591	55.3262719	52.3100164	48.8956482	45.10915288	40.97934805	36.5376642	
64.5	61.5530385	59.3703476	56.7358104	53.6694774	50.1946854	46.33787972	42.12841314	37.5983224	
66	63.0302501	60.8192362	58.145349	55.0289385	51.4937226	47.56660656	43.27747823	38.6589806	
67.5	64.5074616	62.2681247	59.5548875	56.3883995	52.7927598	48.79533339	44.42654332	39.7196388	
69	65.9846731	63.7170132	60.964426	57.7478605	54.091797	50.02406023	45.57560841	40.7802971	
70.5	67.4618846	65.1659017	62.3739645	59.1073216	55.3908342	51.25278707	46.7246735	41.8409553	
72	68.9390962	66.6147902	63.783503	60.4667826	56.6898713	52.48151391	47.87373859	42.9016135	
73.5	70.4163077	68.0636787	65.1930415	61.8262436	57.9889085	53.71024074	49.02280368	43.9622717	
75	71.8935192	69.5125672	66.60258	63.1857047	59.2879457	54.93896758	50.17186877	45.02293	
76.5	73.3707307	70.9614557	68.0121185	64.5451657	60.5869829	56.16769442	51.32093386	46.0835882	
78	74.8479423	72.4103442	69.4216571	65.9046267	61.8860201	57.39642125	52.46999895	47.1442464	
79.5	76.3251538	73.8592327	70.8311956	67.2640878	63.1850573	58.62514809	53.61906404	48.2049046	
81	77.8023653	75.3081212	72.2407341	68.6235488	64.4840945	59.85387493	54.76812913	49.2655629	
82.5	79.2795768	76.7570097	73.6502726	69.9830098	65.7831317	61.08260177	55.91719422	50.3262211	
84	80.7567884	78.2058982	75.0598111	71.3424709	67.0821688	62.3113286	57.06625932	51.3868793	
85.5	82.2339999	79.6547867	76.4693496	72.7019319	68.381206	63.54005544	58.21532441	52.4475375	
87	83.7112114	81.1036752	77.8788881	74.061393	69.6802432	64.76878228	59.3643895	53.5081958	
88.5	85.1884229	82.5525637	79.2884266	75.420854	70.9792804	65.99750912	60.51345459	54.568854	
90	86.6656344	84.0014522	80.6979652	76.780315	72.2783176	67.22623595	61.66251968	55.6295122	
91.5	88.142846	85.4503407	82.1075037	78.1397761	73.5773548	68.45496279	62.81158477	56.6901704	
93	89.6200575	86.8992292	83.5170422	79.4992371	74.876392	69.68368963	63.96064986	57.7508286	
94.5	91.097269	88.3481177	84.9265807	80.8586981	76.1754292	70.91241647	65.10971495	58.8114869	
96	92.5744805	89.7970062	86.3361192	82.2181592	77.4744663	72.1411433	66.25878004	59.8721451	
97.5	94.0516921	91.2458947	87.7456577	83.5776202	78.7735035	73.36987014	67.40784513	60.9328033	
99	95.5289036	92.6947832	89.1551962	84.9370812	80.0725407	74.59859698	68.55691022	61.9934615	
100.5	97.0061151	94.1436717	90.5647347	86.2965423	81.3715779	75.82732382	69.70597531	63.0541198	
102	98.4833266	95.5925602	91.9742733	87.6560033	82.6706151	77.05605065	70.8550404	64.114778	
103.5	99.9605382	97.0414487	93.3838118	89.0154643	83.9696523	78.28477749	72.00410549	65.1754362	
105	101.43775	98.4903372	94.7933503	90.3749254	85.2686895	79.51350433	73.15317058	66.2360944	
106.5	102.914961	99.9392257	96.2028888	91.7343864	86.5677267	80.74223117	74.30223567	67.2967527	
108	104.392173	101.388114	97.6124273	93.0938474	87.8667638	81.970958	75.45130077	68.3574109	
109.5	105.869384	102.837003	99.0219658	94.4533085	89.165801	83.19968484	76.60036586	69.4180691	
111	107.346596	104.285891	100.431504	95.8127695	90.4648382	84.42841168	77.74943095	70.4787273	
112.5	108.823807	105.73478	101.841043	97.1722305	91.7638754	85.65713852	78.89849604	71.5393856	
114	110.301019	107.183668	103.250581	98.5316916	93.0629126	86.88586535	80.04756113	72.6000438	
115.5	111.77823	108.632557	104.66012	99.8911526	94.3619498	88.11459219	81.19662622	73.660702	
117	113.255442	110.081445	106.069658	101.250614	95.660987	89.34331903	82.34569131	74.7213602	
118.5	114.732653	111.530334	107.479197	102.610075	96.9600242	90.57204587	83.4947564	75.7820185	
120	116.209865	112.979222	108.888735	103.969536	98.2590613	91.8007727	84.64382149	76.8426767	
121.5	117.687076	114.428111	110.298274	105.328997	99.5580985	93.02949954	85.79288658	77.9033349	
123	119.164288	115.876999	111.707812	106.688458	100.857136	94.25822638	86.94195167	78.9639931	
124.5	120.641499	117.325888	113.117351	108.047919	102.156173	95.48695322	88.09101676	80.0246513	

Fuerza de reacción en las ruedas delanteras de un automóvil acelerando en un plano con inclinación  $\Phi$ .

$$F_{zd} = \frac{1}{2} m g \left( \frac{a_2}{l} \cos \phi - \frac{h}{l} \sin \phi \right) - \frac{1}{2} m a \frac{h}{l}$$

Fz1 c									
	0	10	15	20	25	30	35	40	45
88.6092004	85.2748349	82.6106526	79.3071656	75.3895154	70.887518	65.8354364	60.2717201	54.2387126	
87.0744304	83.7628533	81.1269941	77.8628571	73.9952844	69.5537108	64.5719395	59.087885	53.1432844	
85.5396604	82.2508718	79.6433356	76.4185486	72.6010534	68.2199037	63.3084427	57.9040499	52.0478562	
84.0048904	80.7388903	78.1596771	74.9742401	71.2068224	66.8860965	62.0449459	56.7202149	50.952428	
82.4701205	79.2269088	76.6760186	73.5299316	69.8125913	65.5522893	60.7814491	55.5363798	49.8569998	
80.9353505	77.7149273	75.1923601	72.0856231	68.4183603	64.2184821	59.5179522	54.3525447	48.7615715	
79.4005805	76.2029458	73.7087016	70.6413146	67.0241293	62.8846749	58.2544554	53.1687096	47.6661433	
77.8658105	74.6909643	72.2250432	69.1970061	65.6298983	61.5508678	56.9909586	51.9848745	46.5707151	
76.3310405	73.1789828	70.7413847	67.7526976	64.2356672	60.2170606	55.7274618	50.8010395	45.4752869	
74.7962705	71.6670012	69.2577262	66.3083891	62.8414362	58.8832534	54.4639649	49.6172044	44.3798587	
73.2615005	70.1550197	67.7740677	64.8640806	61.4472052	57.5494462	53.2004681	48.4333693	43.2844305	
71.7267305	68.6430382	66.2904092	63.419772	60.0529742	56.2156391	51.9369713	47.2495342	42.1890023	
70.1919605	67.1310567	64.8067507	61.9754635	58.6587432	54.8818319	50.6734744	46.0656991	41.0935741	
68.6571906	65.6190752	63.3230922	60.531155	57.2645121	53.5480247	49.4099776	44.8818641	39.9981458	
67.1224206	64.1070937	61.8394337	59.0868465	55.8702811	52.2142175	48.1464808	43.698029	38.9027176	
65.5876506	62.5951122	60.3557752	57.642538	54.4760501	50.8804104	46.882984	42.5141939	37.8072894	
64.0528806	61.0831307	58.8721167	56.1982295	53.0818191	49.5466032	45.6194871	41.3303588	36.7118612	
62.5181106	59.5711491	57.3884582	54.753921	51.687588	48.212796	44.3559903	40.1465237	35.616433	
60.9833406	58.0591676	55.9047998	53.3096125	50.293357	46.8789888	43.0924935	38.9626886	34.5210048	
59.4485706	56.5471861	54.4211413	51.865304	48.899126	45.5451816	41.8289967	37.7788536	33.4255766	
57.9138006	55.0352046	52.9374828	50.4209955	47.504895	44.2113745	40.5654998	36.5950185	32.3301483	
56.3790306	53.5232231	51.4538243	48.976687	46.1106639	42.8775673	39.302003	35.4111834	31.2347201	
54.8442606	52.0112416	49.9701658	47.5323785	44.7164329	41.5437601	38.0885062	34.2273483	30.1392919	
53.3094907	50.4992601	48.4865073	46.08807	43.3222019	40.2099529	36.7750093	33.0435132	29.0438637	
51.7747207	48.9872786	47.0028488	44.6437615	41.9279709	38.8761458	35.5115125	31.8596782	27.9484355	
50.2399507	47.475297	45.5191903	43.199453	40.5337399	37.5423386	34.2480157	30.6758431	26.8530073	
48.7051807	45.9633155	44.0355318	41.7551445	39.1395088	36.2085314	32.9845189	29.492008	25.7575791	
47.1704107	44.451334	42.5518733	40.310836	37.7452778	34.8747242	31.721022	28.3081729	24.6621509	
45.6356407	42.9393525	41.0682148	38.8665275	36.3510468	33.5409171	30.4575252	27.1243378	23.5667226	
44.1008707	41.427371	39.5845563	37.422219	34.9568158	32.2071099	29.1940284	25.9405028	22.4712944	
42.5661007	39.9153895	38.1008979	35.9779105	33.5625847	30.8733027	27.9305316	24.7566677	21.3758662	
37.6678125	35.0398897	33.2537211	31.1700838	28.8048355	26.1759773	23.3035165	20.2093144	16.9169198	
42	39.3948657	37.6370201	35.5927328	33.2775619	30.7091276	27.9069772	24.8924368	21.688449	
40.5	37.9176542	36.1881316	34.1831942	31.9181009	29.4100904	26.6782503	23.7433717	20.6277908	
39	36.4404427	34.7392431	32.7736557	30.5586399	28.1110532	25.4495235	22.5943066	19.5671326	
37.5	34.9632311	33.2903546	31.3641172	29.1991788	26.812016	24.2207966	21.4452415	18.5064744	
36	33.4860196	31.8414661	29.9545787	27.8397178	25.5129788	22.9920698	20.2961764	17.4458161	
34.5	32.0088081	30.3925776	28.5450402	26.4802568	24.2139417	21.763343	19.1471113	16.3851579	
33	30.5315966	28.9436891	27.1355017	25.1207957	22.9149045	20.5346161	17.9980462	15.3244997	
31.5	29.054385	27.4948006	25.7259632	23.7613347	21.6158673	19.3058893	16.8489811	14.2638415	



Fuerza de reacción en las ruedas traseras de un automóvil acelerando en un plano con inclinación  $\Phi$ .

$$F_{z2} = \frac{1}{2} m g \left( \frac{h}{l} \cos \phi + \frac{h}{l} \sin \phi \right) + \frac{1}{2} m a \gamma$$

Fz2 ci	0	10	15	20	25	30	35	40	45
58.6092004	55.7306044	53.6328826	51.1163953	48.2002948	44.9067743	41.2608996	37.2904183	33.0255481	
60.0744304	57.1730459	55.0470011	52.4911638	49.5249858	46.1710415	42.4548565	38.4047134	34.0514364	
61.5396604	58.6154875	56.4611196	53.8659324	50.8496768	47.4353087	43.6488133	39.5190085	35.0773246	
63.0048904	60.057929	57.8752381	55.2407009	52.1743679	48.6995759	44.8427702	40.6333036	36.1032128	
64.4701205	61.5003705	59.2893566	56.6154694	53.4990589	49.9638431	46.036727	41.7475987	37.1291011	
65.9353505	62.9428121	60.7034751	57.9902379	54.82375	51.2281102	47.2306839	42.8618938	38.1549893	
67.4005805	64.3852536	62.1175936	59.3650065	56.148441	52.4923774	48.4246407	43.9761889	39.1808775	
68.8658105	65.8276951	63.5317121	60.739775	57.4731321	53.7566446	49.6185976	45.090484	40.2067658	
70.3310405	67.2701367	64.9458307	62.1145435	58.7978231	55.0209118	50.8125544	46.2047791	41.232654	
71.7962705	68.7125782	66.3599492	63.489312	60.1225142	56.285179	52.0065113	47.3190742	42.2585422	
73.2615005	70.1550197	67.7740677	64.8640806	61.4472052	57.5494462	53.2004681	48.4333693	43.2844305	
74.7267305	71.5974613	69.1881862	66.2388491	62.7718962	58.8137134	54.3944249	49.5476644	44.3103187	
76.1919605	73.0399028	70.6023047	67.6136176	64.0965873	60.0779806	55.5883818	50.6619595	45.336207	
77.6571906	74.4823443	72.0164232	68.9883861	65.4212783	61.3422478	56.7823386	51.7762546	46.3620952	
79.1224206	75.9247859	73.4305417	70.3631546	66.7459694	62.606515	57.9762955	52.8905497	47.3879834	
80.5876506	77.3672274	74.8446602	71.7379232	68.0706604	63.8707822	59.1702523	54.0048448	48.4138717	
82.0528806	78.8096689	76.2587788	73.1126917	69.3953515	65.1350494	60.3642092	55.1191399	49.4397599	
83.5181106	80.2521105	77.6728973	74.4874602	70.7200425	66.3993166	61.558166	56.233435	50.4656481	
84.9833406	81.694552	79.0870158	75.8622287	72.0447336	67.6635838	62.7521229	57.3477301	51.4915364	
86.4485706	83.1369935	80.5011343	77.2369973	73.3694246	68.927851	63.9460797	58.4620252	52.5174246	
87.9138006	84.5794351	81.9152528	78.6117658	74.6941156	70.1921182	65.1400366	59.5763203	53.5433128	
89.3790306	86.0218766	83.3293713	79.9865343	76.0188067	71.4563854	66.3339934	60.6906154	54.5692011	
90.8442606	87.4643181	84.7434898	81.3613028	77.3434977	72.7206526	67.5279503	61.8049105	55.5950893	
92.3094907	88.9067597	86.1576083	82.7360713	78.6681888	73.9849198	68.7219071	62.9192056	56.6209775	
93.7747207	90.3492012	87.5717269	84.1108399	79.9928798	75.249187	69.915864	64.0335007	57.6468658	
95.2399507	91.7916427	88.9858454	85.4856084	81.3175709	76.5134542	71.1098208	65.1477958	58.672754	
96.7051807	93.2340843	90.3999639	86.8603769	82.6422619	77.7777214	72.3037777	66.2620909	59.6986422	
98.1704107	94.6765258	91.8140824	88.2351454	83.966953	79.0419886	73.4977345	67.376386	60.7245305	
99.6356407	96.1189673	93.2282009	89.609914	85.291644	80.3062558	74.6916914	68.4906811	61.7504187	
101.100871	97.5614089	94.6423194	90.9846825	86.616335	81.570523	75.8856482	69.6049762	62.7763069	
102.566101	99.0038504	96.0564379	92.359451	87.9410261	82.8347902	77.0796051	70.7192713	63.8021952	
100.667813	97.0827737	94.1070382	90.3707013	85.9021989	80.7355392	74.9100437	68.4700482	61.4645652	
108	104.392173	101.388114	97.6124273	93.0938474	87.8667638	81.970958	75.4513008	68.3574109	
109.5	105.869384	102.837003	99.0219658	94.4533085	89.165801	83.1996848	76.6003659	69.4180691	
111	107.346596	104.285891	100.431504	95.8127695	90.4648382	84.4284117	77.7494309	70.4787273	