



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MÉXICO

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

---

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN  
INGENIERÍA**

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**ESTIMACIÓN DE LLUVIA EN EL  
DISTRITO FEDERAL UTILIZANDO DATOS  
DE PLUVIÓGRAFOS Y DE RADAR  
METEOROLÓGICO**

**T E S I S**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**MAESTRA EN INGENIERÍA**

**INGENIERÍA CIVIL – HIDRÁULICA**

**P R E S E N T A :**

**LETICIA BECERRA SORIANO**

TUTOR:

**DRA. GRACIELA HERRERA ZAMARRÓN**



2009

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: **Dr. Francisco Javier Aparicio Mijares**

Secretario: **Dr. Carlos Escalante Sandoval**

Vocal: **Dra. Graciela Herrera Zamarrón**

1er. Suplente: **Dr. Alfonso Gutiérrez López**

2do. Suplente: **Dr. Marín Díaz Viera**

Lugar donde se realizó la tesis:  
**DEPFI-UNAM, Campus Morelos**

**TUTORA DE TESIS:**

**Dra. Graciela Herrera Zamarrón**

---

**FIRMA**

## DEDICATORIA

*Para Pablo, Díane y Dirichlet*

## **AGRADECIMIENTOS**

A mi directora de tesis **Dra. Graciela Herrera Zamarrón**

A mi jurado de tesis

**Dr. Francisco Javier Aparicio Mijares**

**Dr. Carlos Escalante Sandoval**

**Dr. Alfonso Gutiérrez López**

**Dr. Martín Díaz Viera**

Al **Dr. Arturo Valdés Manzanilla** de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, por su asesoría en el desarrollo de la tesis.

Al **Instituto Mexicano de Tecnología del Agua** por todo lo que ha contribuido en mi formación profesional.

Al **M. C. Carlos Gutiérrez Ojeda** por todo el apoyo brindado.

Al **CONACyT** y a la **UNAM** por el apoyo brindado.

Al **SMN**, especialmente al **Dr. Michel M. Rosengaus**, y a sus colaboradores el **Ing. Alberto Hernández Unzón**, **Ing. Modesto Mendoza** y al **Ing. José Carrasco**.



3.2.2	Análisis estructural .....	64
3.2.3	Estimación espacial .....	66
3.2.4	Validación cruzada .....	69
3.2.5	Cálculo de precipitación-escurrimiento .....	74
3.3	Análisis tormenta 2.....	75
3.3.1	Análisis exploratorio de los datos .....	75
3.3.2	Análisis estructural .....	78
3.3.3	Estimación espacial .....	80
3.3.4	Validación cruzada .....	83
3.3.5	Cálculo de precipitación-escurrimiento .....	86
<b>4.</b>	<b>DISCUSIÓN, CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....</b>	<b>89</b>
4.1	Discusión .....	89
4.2	Conclusiones .....	89
4.3	Recomendaciones .....	90
<b>5.</b>	<b>REFERENCIAS.....</b>	<b>91</b>

## ÍNDICE DE FIGURAS

2.1 Semivariogramas teóricos más comunes (Samper y Carrera, 1990) .....	33
3.1 Ubicación y cobertura del radar Cerro de la Catedral y ubicación de los pluviógrafos .....	51
3.2 Posición y magnitud de los datos de pluviógrafo, tormenta 1 .....	56
3.3 Posición y magnitud de los datos de radar, tormenta 1 .....	58
3.4 Diferencias de mediciones de radar y pluviógrafo (radar-pluviógrafo), tormenta 1 .....	59
3.5 Histograma de los datos de pluviógrafo, tormenta 1 .....	61
3.6 Histograma del Ln de los datos de pluviógrafo, tormenta 1 .....	61
3.7 Histograma de los datos de radar, tormenta 1 .....	62
3.8 Histograma del Ln de los datos de radar, tormenta 1 .....	62
3.9 Dispersión de pluviógrafo contra radar, tormenta 1 .....	63
3.10 Semivariogramas experimental y teórico del Ln de los datos de pluviógrafo, tormenta 1 ...	65
3.11 Semivariogramas experimental y teórico del Ln de los datos de radar, tormenta 1 .....	65
3.12 Semivariogramas cruzados, tormenta 1 .....	65
3.13 Estimación simple de los datos de pluviógrafo, tormenta 1 .....	67
3.14 Estimación conjunta, tormenta 1 .....	67
3.15 Varianza del error de la estimación simple (pluviógrafo), tormenta 1 .....	68
3.16 Varianza del error de la estimación conjunta (cokrigado), tormenta 1 .....	69
3.17 Error de la validación cruzada de la estimación por krigado (Ln mm), tormenta 1 .....	72
3.18 Error de la validación cruzada de la estimación por cokrigado (Ln mm), tormenta 1 .....	73
3.19 Error cuadrático estándar de la validación cruzada de la estimación por krigado (Ln mm), tormenta 1 .....	73
3.20 Error cuadrático estándar de la validación cruzada de la estimación por cokrigado (Ln mm), tormenta 1 .....	74
3.21 Delegaciones del DF (delimitadas con línea negra) y zona estimada .....	75
3.22 Posición y magnitud de los datos, tormenta 2 .....	76
3.23 Diferencias de mediciones de radar y pluviógrafo (radar-pluviógrafo), tormenta 2 .....	76
3.24 Dispersión de pluviógrafo contra radar, tormenta 2 .....	78
3.25 Semivariogramas experimental y teórico del Ln de los datos de pluviógrafo, tormenta 2 ...	79
3.26 Semivariogramas experimental y teórico del Ln de los datos de radar, tormenta 2 .....	79
3.27 Semivariogramas cruzados, tormenta 2 .....	80
3.28 Estimación simple de los datos de pluviógrafo, tormenta 2 .....	81
3.29 Estimación conjunta, tormenta 2 .....	81
3.30 Varianza del error de la estimación simple (pluviógrafo), tormenta 2 .....	82
3.31 Varianza del error de la estimación conjunta (cokrigado), tormenta 2 .....	82

3.32 Error de la validación cruzada de la estimación por krigado (Ln mm), tormenta 2.....	84
3.33 Error de la validación cruzada de la estimación por cokrigado (Ln mm), tormenta 2.....	85
3.34 Error cuadrático estándar de la validación cruzada de la estimación por krigado (Ln mm), tormenta 2.....	85
3.35 Error cuadrático estándar de la validación cruzada de la estimación por cokrigado (Ln mm), tormenta 2.....	86

## ÍNDICE DE TABLAS

3.1 Resumen del análisis estadístico, tormenta 1.....	60
3.2 Características del semivariograma obtenido de la tormenta 1.....	64
3.3 Resumen de errores de la validación cruzada, tormenta 1.....	72
3.4 Resumen del cálculo precipitación-escorrentía, tormenta 1.....	75
3.5 Resumen del análisis estadístico, tormenta 2.....	77
3.6 Características del semivariograma obtenido de la tormenta 2.....	78
3.7 Resumen de errores de la validación cruzada, tormenta 2.....	83
3.8 Resumen del cálculo precipitación-escorrentía, tormenta 2.....	87



## 1. INTRODUCCIÓN

La precipitación es uno de los factores principales del ciclo hidrológico y la estimación de su distribución espacial y temporal es indispensable para ser utilizada en modelos de lluvia–escorrentía, el cálculo de líneas de flujo, la estimación de áreas de precipitación y como dato de entrada en modelos de cuencas, entre otros. El conocimiento de patrones de precipitación es necesario tanto en ciencias de la atmósfera como en hidrología.

Tradicionalmente la estimación de precipitación se ha realizado utilizando información obtenida por pluviómetros<sup>1</sup> únicamente. La integración de datos de radar muestra ser una poderosa herramienta para mejorar las estimaciones de precipitación con respecto a la estimación resultante de utilizar sólo datos de pluviómetros.

En el trabajo desarrollado en esta tesis se combinan mediciones de radar y de pluviógrafo, dos mediciones distintas pero correlacionadas, para estimar la precipitación, utilizando un método geoestadístico. La información proporcionada por estos instrumentos es de naturaleza diferente. Por un lado los datos de radar son continuos en espacio y proveen información a detalle de la variabilidad espacial de la precipitación; sin embargo, tienen errores aleatorios y sistemáticos. En contraste, los pluviógrafos proporcionan mediciones muy precisas pero discretas en el espacio.

### *1.1 Antecedentes*

Desde mediados del siglo pasado, se inició en México el registro sistemático de información meteorológica e hidrométrica. En 1877 se creó el Observatorio Meteorológico Central, precursor del Servicio Meteorológico Nacional (SMN) que

---

<sup>1</sup> En esta tesis se utilizará la palabra pluviómetro para cualquier instrumento que mida la altura de la precipitación (como lo define el “Vocabulario Científico y Técnico” de la Real Academia de Ciencias Exactas y Naturales). Por otro lado, la palabra pluviógrafo se referirá a aquellos instrumentos que miden la altura de la precipitación registrándola en papel o en medios electrónicos en forma continua. Por lo tanto, los pluviómetros incluyen también a los pluviógrafos.

actualmente depende de la Comisión Nacional del Agua; el SMN es promotor del registro sistemático de datos meteorológicos en todo el país.

Actualmente la Comisión Nacional del Agua, a través del SMN, produce y difunde periódica y oportunamente toda la información meteorológica y climatológica, y en todas las escalas espaciales y temporales que es posible obtener con la tecnología disponible. Tanto el tipo como la periodicidad de esta información son muy diversos, ya que en tiempo real se obtienen y difunden datos básicos sobre el estado de la atmósfera y sus posibles cambios (Becerra, 1997).

Dentro de la información que genera el SMN están datos de precipitación medida en mm/hr obtenidos a través de una red de 12 radares, el centro colector de datos se encuentra ubicado en las instalaciones del SMN en la Ciudad de México, en donde se analiza, procesa y almacena toda la información. La red proporciona una cobertura aproximada del 70% del Territorio Nacional.

Un treceavo radar, opera actualmente en el estado de Querétaro, en el Centro Hidrometeorológico de la Comisión Estatal de Aguas del estado de Querétaro (CEAQ). En su operación, este centro integra dos elementos: un radar meteorológico y un Sistema Automático de Información Hidrometeorológica (SAIH), que recibe y procesa todos los datos que se generan en la red de estaciones hidroclimatológicas de la CEAQ. En su reporte de precipitación pluvial, presenta la precipitación diaria medida por las estaciones pluviométricas y de manera independiente el acumulado horario de precipitación en una imagen de radar. La CEAQ apoyó el proyecto “Modelos Hidrológicos de Lluvia y Escorrentía basados en Mediciones de Radar Meteorológico” cuyo responsable fué el Dr. Nabil Mobayed Khodr, catedrático de la Universidad Autónoma de Querétaro (UAQ).

El proyecto tenía como objetivos: (1) elaborar y/o mejorar modelos hidro-climatológicos de tipo distribuido que sean alimentados con información fisiográfica actualizada y datos registrados en tiempo real mediante el sistema de radar y estaciones de medición

hidrométrica y climatológica; (2) encontrar correlaciones significativas entre los registros del radar y la medición de las estaciones climatológicas, para hacer la calibración de los datos generados por el radar, con base en las mediciones terrenas; (3) con respecto a la simulación de la escorrentía pluvial, caracterizar la forma de ocurrencia espacio-temporal de eventos extremos que se registren para calibrar la magnitud de los escurrimientos superficiales en función de los parámetros del radar y los del propio modelo (como es el caso de las llamadas condiciones precedentes de humedad); y (4) estudiar el comportamiento espacio-temporal de la nubosidad y distribución de las intensidades de precipitación, mediante herramientas tales como la geoestadística y el análisis fractal, con objeto de explicar la forma de respuesta de las cuencas ante la ocurrencia del fenómeno lluvia-escorrentía y de mejorar, en consecuencia, la calidad de los modelos de pronóstico.

El proyecto ha sido terminado y son varios los logros alcanzados, pero destacan: calibración de parámetros del radar, obtención de hietogramas de tormenta y acoplamiento con modelo hidrológico distribuido para simulación del fenómeno lluvia-escorrentía. Se desarrolló un paquete de cómputo, con énfasis en el manejo de imágenes desde Windows (sin dependencia de LINUX). Actualmente se trabaja en calibración de parámetros escalados y mejora en la distribución espacial de intensidades de precipitación.

El 15 de mayo de 2009 la Conagua anunció la entrada en operación del primer radar hidrometeorológico en el país, instalado en el estado de Chiapas. Este radar permitirá calcular los niveles de escurrimiento por lluvias, contar con información en tiempo real para el manejo de volúmenes en ríos y presas, y brindar información temprana a las áreas de protección civil para que éstas preparen las acciones de apoyo a la población en áreas de riesgo. Este radar cuenta con características técnicas de vanguardia y está ubicado en el cerro Mozotal, en Motozintla, en la sierra chiapaneca, desde donde estará enviando permanentemente información para estimar la intensidad de precipitación, vientos y rachas de los ciclones en el océano, así como sobre el seguimiento de los sistemas de tormentas que ya ingresaron a territorio Chiapaneco y con ello conocer su evolución y severidad.

El radar hidrometeorológico tiene una cobertura de 200 km de resolución muy alta y 400 km de radio de resolución media; por su posición en la zona de Motozintla tiene una capacidad de observación de toda la cuenca del Usumacinta.

Para estimar la precipitación, primero se tiene que detectar y clasificar qué tipo de precipitación es, lo que se puede lograr utilizando el radar con capacidad de doble polarización. Los fenómenos hidrometeorológicos que se pronostican con el apoyo de los radares son:

a) Tormentas. Una tormenta es un fenómeno atmosférico caracterizado por la coexistencia próxima de dos o más masas de aire de diferentes temperaturas. A las tormentas las podemos clasificar según el mecanismo que da origen al ascenso del aire en;

- *Tormentas de masa de aire:* producidas por una intensa insolación que hace que las capas de aire cercanas al suelo tengan un gran calentamiento; también en zonas costeras sobre el continente como efecto del traslado del aire frío del mar al continente por la tarde, o durante la noche o la madrugada cuando el aire frío fluye del continente al mar. Suelen ser lluvias de gran intensidad y corta duración.
- *Tormentas orográficas:* la orografía proporciona a menudo los mecanismos de ascenso necesarios para el desarrollo de una tormenta, básicamente lo que sucede es que el vapor de agua que posee el aire al subir se enfría, condensa y precipita. Típico en las cadenas montañosas.
- *Tormentas frontales o ciclónicas:* tienen lugar cuando una masa de aire relativamente fría obliga al ascenso de una masa de aire caliente, húmedo e inestable, el ascenso se da por una pendiente frontal, siendo más frecuentes las que se originan a consecuencia del desplazamiento de un frente frío.

Las tormentas analizadas en esta tesis son del tipo convectivo, que es el sistema más sencillo de formación de lluvia y que está incluido en las tormentas de masa de aire.

- b) Lluvia (ligera, media o intensa). La lluvia es un fenómeno atmosférico iniciado con la condensación del vapor de agua contenido en las nubes.
- c) Ciclones tropicales, huracanes o tifones. Un ciclón tropical es un sistema de tormentas con una circulación cerrada alrededor de un centro de baja presión. Los ciclones tropicales extraen su energía de la condensación de aire húmedo produciendo fuertes vientos.
- d) Granizo, es un tipo de precipitación que consiste en partículas irregulares de hielo. El granizo se produce en tormentas intensas en las que se producen gotas de agua sobreenfriadas, es decir, aún líquidas pero a temperaturas por debajo de su punto normal de congelamiento ( $0^{\circ}$  C).

Uno de los propósitos de los radares meteorológicos es la evaluación cuantitativa de lluvia, ésta se mide en mm/hr. Bajo una calibración cuidadosa, los radares sirven para establecer las tasas de precipitación con errores de más menos veinte por ciento (Rosengaus, 1995).

Las mediciones del radar son resultado de un promedio del volumen de la potencia retornada o reflectividad ( $Z$ ), la cual se convierte a precipitación ( $R$ ): utilizando las llamadas relaciones  $Z-R$  (Marshall y Palmer, 1948). La estimación de precipitación de radar es continua en espacio y provee información de la variabilidad espacial de la misma.

El cálculo de la precipitación a partir de las mediciones de radar tiene errores aleatorios o sistemáticos (Wilson y Brandes, 1979), lo que degrada la calidad de las estimaciones. Estos errores pueden ser producto, entre otros, del mal funcionamiento del equipo del radar, bloqueo orográfico, ecos falsos, propagación anómala, atenuación, evaporación de la lluvia antes de llegar al suelo, llenado parcial del haz de radar y su altura sobre el terreno, y la diversidad de tormentas. En el 2002 los investigadores Jameson y Kostinski han puesto sobre la mesa de discusión que las relaciones  $Z-R$  utilizadas en las últimas

décadas no son las adecuadas, ellos argumentan que el número de datos utilizados en las realizaciones de las simulaciones realizadas por Marshall y Palmer no representa las características reales de la lluvia. Sugieren aumentar el número de muestreo, con el fin de tener una distribución que tenga un valor más representativo de la lluvia (Jameson y Kostinski, 2002).

En el pasado los términos *calibración de radar* y *ajuste meteorológico de radar* se han utilizado como sinónimos; sin embargo, algunos investigadores proponen hacer distinción entre estos dos términos. Koistinen y Puhakka (1986) fueron de los primeros en enfatizar que la calibración es un procedimiento eléctrico aplicado al equipo del radar, lo que las observaciones en pluviómetros no pueden hacer. Por otro lado, como un resultado del Taller de Calibración de la Sociedad Meteorológica Americana de Radar 2001 (Joe y Smith, 2001), propusieron la siguiente definición general de ajuste meteorológico de radar: "Ajuste es una modificación de la cantidad medida de radar para igualar una cantidad externa. La modificación es dependiente de la aplicación (cuestiones temporales y espaciales abundan aquí)". En esta tesis se utilizarán estos dos términos como se acaban de definir. Sin embargo, hay casos en los que estos dos términos siguen siendo usados de manera intercambiable (Wood et al., 2000).

Recientemente se realizó el trabajo *Calibración hidrológica de radares meteorológicos* (Méndez-Antonio et al., 2006). La metodología fue aplicada en el Distrito Federal en dos casos, 1) calibración para estimar la precipitación media en la cuenca del río Mixcoac y 2) calibración hidrológica para el Distrito Federal. En este segundo caso dividieron al DF en dos zonas: plana y montañosa.

Propusieron varios métodos de calibración (puntual [Rosenfeld et al., 1994], en la vecindad y con retraso) para alcanzar la mejor relación Z-R entre lo que registra el radar en la atmósfera y lo medido por los pluviógrafos sobre el terreno. Así como clasificar los tipos de lluvia, ya que el volumen de precipitación total de una tormenta depende en gran medida de su tamaño y duración, clasificándola en convectivas (evento de corta duración y de gran intensidad sobre áreas pequeñas) y estratiformes (distribución

espacial y vertical es casi homogénea, principalmente en sentido horizontal). Y definieron el intervalo de umbral de las tormentas.

Compararon de manera cualitativa la precipitación estimada del radar obtenida con sus ecuaciones de ajuste: a) bajo el criterio de todos los pares de puntos hicieron dos calibraciones, la primera formando pares de puntos, donde la intensidad de lluvia fue el promedio de nueve celdas ( $\bar{R}_{t+1} = 1.18\bar{Z}^{0.18}$ ), la segunda formando pares de puntos, donde el valor de la intensidad de lluvia se tomó de la celda central de la matriz de pixeles de 3x3 ( $\bar{R}_{t+1} = 1.22\bar{Z}^{0.17}$ ); b) bajo el criterio de tormenta convectiva zona 1 ( $\bar{R}_{t+1} = 0.0162\bar{Z}^{0.714}$ ), bajo el criterio de tormenta estratiforme zona 1 ( $\bar{R}_{t+1} = 0.149\bar{Z}^{0.625}$ ), bajo el criterio de tormenta convectiva zona 2 ( $\bar{R}_{t+1} = 0.024\bar{Z}^{0.714}$ ), bajo el criterio de tormenta estratiforme zona 2 ( $\bar{R}_{t+1} = 0.077\bar{Z}^{0.625}$ ), contra la ecuación de Marshall-Palmer ( $Z=200R^{1.6}$ ) y la estimación de pluviógrafos (mediante interpolación con el método del inverso de la distancia al cuadrado). Los resultados muestran que para la zona plana (zona 1), la precipitación convectiva estimada con la ecuación de Marshall-Palmer es muy similar a la obtenida con la ecuación de ajuste que ellos proponen y ambas subestiman los valores obtenidos con los pluviógrafos. En la zona de montaña (zona 2), la ecuación de ajuste de lluvias convectivas da mejores resultados que la ecuación de Marshall-Palmer. Observaron que las calibraciones hechas sin discriminar el tipo de lluvia dan resultados aceptables y cuando se hace esta clasificación las lluvias convectivas dan buenos resultados, pero la correlación obtenida para lluvias estratiformes es bastante mala en todos los casos. Lo que indica que la parte convectiva de la tormenta predomina fuertemente sobre la estratiforme y no es útil clasificarlas por medio de un umbral.

## ***1.2 Métodos de estimación de lluvia por radar***

Se han hecho varias tentativas de utilizar al mismo tiempo datos del radar y las mediciones de los pluviómetros para la estimación de la precipitación. De la formulación más simple, encontrando un factor multiplicativo constante de la calibración (Wilson y Brandes, 1979), a los acercamientos estadísticos basados en el análisis multiplicativo

(Hevesi et al., 1992ab), el análisis de las funciones de distribución de probabilidad del radar con las mediciones de los pluviómetros, llamado Método de Igualación de Probabilidad (Calheiros y Zawadzki, 1987, Rosenfeld et al., 1993) o la interpolación geoestadística (Krajewski, 1987, Creutin et al., 1988, Azimi-Zonooz et al., 1989, Seo et al., 1990ab, Cassiraga y Gómez-Hernández, 1997).

En este documento se emplea este último enfoque de forma bivariada para estimar la distribución espacial de la precipitación usando datos de pluviógrafos para ajustar las estimaciones de radar.

La experiencia ha mostrado que combinar datos de radar con datos de pluviómetros no es fácil. Steiner et al. (1999) hacen una breve descripción de los errores de estos dos dispositivos que intervienen al realizar este tipo de estimación. Éstos incluyen errores de pluviómetro, errores de radar y discrepancias debido a diferencias en el tiempo de muestreo tiempo y las resoluciones espaciales de los dos sistemas de medición. Las mediciones de radar son tomadas en alturas diferentes, y con una variación de la extensión vertical y horizontal debido a la curvatura de la tierra y al ensanchamiento del rayo de radar. Donde los obstáculos bloquean el rayo o donde el rayo se extiende encima de la capa de precipitación, el volumen medido real tiene que ser calculado antes de la conversión a la precipitación para evitar la subestimación.

La lluvia estimada por los pluviómetros proporciona información puntual de la tormenta en estudio, a nivel de tierra. En cambio el radar proporciona información en toda la cobertura de su radio, pero a una altura de dos km. Al aplicar el cokrigado, el cual considera de manera simultánea la correlación espacial de cada variable y la correlación entre diferentes variables regionalizadas, se pretende estimar la precipitación en toda el área de interés, con un margen de error aceptable.

Algunos autores han utilizado métodos basados en cokrigado similares al propuesto aquí con buenos resultados. A continuación se hace una descripción de los trabajos más relevantes.



En 1975, Brandes ajustó el campo del radar con observaciones de lluvia de pluviómetro determinando coeficientes de ajuste multiplicativos en cada sitio de pluviómetro. Cuando la medición era mayor que 2.5 mm, las mediciones de pluviómetro eran divididas por los datos crudos del radar de las celdas que contenían el pluviómetro para determinar el factor de ajuste; después usó el esquema del análisis objetivo de Barnes (1964) para mover factores de la corrección obtenida de sitios de pluviómetro sobre todos los puntos de celdas que representaban el campo del radar. Concluyó que las estimaciones de la precipitación se mejoraban cuando las observaciones del pluviómetro se utilizaban para ajustar datos cuantitativos del radar así como para estimar la precipitación en áreas sin datos del radar (Todini, 2001). Sin embargo, uno de los problemas en el uso del método de Brandes es que en estructuras a escalas pequeñas introducen errores de muestreo en las relaciones radar/pluviómetro pues contaminan los procesos de ajuste que limitan la confiabilidad de las pruebas de verificación e impiden discernir las mejoras en el proceso de ajuste (Fattorelli, 1995).

En el contexto de realización de pruebas para proponer un sistema de estimación de lluvia en tiempo real utilizando datos de radar, de pluviómetro y de satélite, para el Sistema Meteorológico Nacional de los Estados Unidos de América, Krajewski (1987) propuso conjuntar los datos de pluviómetro y de radar a través de un análisis multivariado. El propósito del trabajo fue estimar la precipitación media a nivel de la tierra sobre bloques con un área igual a la muestreada por el radar. Para lograr esto se propone obtener la estimación como una combinación lineal de los datos puntuales de los pluviómetros y los datos del radar, concebidos como una medida de la media de la precipitación sobre los píxeles del radar. Utilizando la técnica de interpolación de krigado por bloques se obtiene una estimación de la precipitación media sobre los bloques y posteriormente se aplica cokrigado a la estimación resultante y a los datos del radar. La distribución utilizada para los datos fue la lognormal y para las matrices de covarianza se utilizaron modelos exponenciales isotrópicos.

El método se probó con datos generados numéricamente utilizando una estructura hipotética para los errores de los dos dispositivos, y se evaluaron las estimaciones

obtenidas, tanto removiendo el sesgo en los datos en el proceso del krigado como incluyéndolo (aunque en el sistema de estimación de tiempo real se propone el retiro de la tendencia utilizando un filtro de Kalman). Se examinó el efecto de los errores en las mediciones del radar y la densidad de la red de pluviómetros sobre las estimaciones obtenidas. Se usaron datos de precipitación diaria. Se obtuvieron dos resultados generales: 1) el error cuadrático máximo en el campo del radar (que en todos los casos fue el campo con más ruido) en todos los casos se redujo a un nivel limitado por la incertidumbre en los datos de los pluviómetros; 2) las estimaciones en áreas más grandes mostraron las mayores reducciones en las características del error promedio. Por otro lado, el autor indica que la mejor configuración de un sistema de estimación de la precipitación en tiempo real, usando datos de radar y una red de pluviómetros, incluye un procedimiento separado para remover el sesgo, de modo que campos de precipitación de radar sin sesgo sean utilizados en el cokrigado. Si el sesgo es removido efectivamente y el ruido en el campo del radar es bajo, el cokrigado no alterará substancialmente los resultados del radar. Sin embargo, si el ruido es alto, entonces se puede obtener una mejora substancial.

Creutin et al. (1988), dividieron la información muestral de su estudio en dos porciones, una de 29 estaciones utilizadas para la estimación conjunta de pluviómetro y radar, y la otra de 69 estaciones que proporcionó información independiente a la del radar que sirvió para validar los resultados de la combinación de radar y pluviómetro. El grupo de datos de radar disponible presentó graves limitaciones para aplicaciones hidrológicas principalmente en relación a efectos de los ecos en suelo para radios de 52 km de distancia a la ubicación del radar. A pesar de estas condiciones desfavorables, el método para la combinación propuesto parece mejorar levemente el funcionamiento de los datos crudos de radar y superar al método de ajuste clásico uniforme.

Los autores concluyen que la metodología presentada en el artículo es solamente un acercamiento preliminar al problema de la combinación del pluviómetro–radar, y considera que otros esfuerzos se tendrán que hacer para considerar, más explícitamente, los errores inherentes en los dos dispositivos combinados. Varias posibilidades están

disponibles en el modelo propuesto para ocuparse de tales correcciones. Por ejemplo, (i) la relación lineal que da la estimación del radar a través de la regresión se puede sustituir por una relación más compleja, o (ii) suposiciones más sofisticadas se pueden hacer sobre el mal comportamiento de los residuales. En su forma actual, el método de cokrigado simplificado ofrece características prometedoras: *i*) la simplificación propuesta reduce drásticamente el tamaño del sistema, haciéndolo manejable en un contexto operacional, *ii*) el estimador obtenido satisface el criterio clásico de la minimización por el error cuadrático medio a condición de que se pueden hacer ciertas hipótesis relativamente débiles. A pesar de tener un grupo de datos desfavorables, los resultados obtenidos son satisfactorios en comparación con el ajuste convencional del radar usando pluviómetros. Otros usos de este método (en proceso) usando un grupo de datos más apropiado (datos de una red densa de pluviómetros cerca del sitio del radar) manifiestan que es necesario confirmar estos resultados iniciales.

Seo et al. (1990a, 1990b) desarrollaron dos experimentos. En el primero suponen que los valores de pluviómetro son los verdaderos, la metodología empleada es krigado por bloques y cokrigado ordinario, simple y universal, los semivariogramas utilizados fueron esféricos, exponenciales y gaussianos. En el segundo experimento se presenta un esquema de comparación muy grande, integrada con varios estimadores: el método Brandes, estimación únicamente con el radar, estimación únicamente con pluviómetro usando krigado ordinario, disyuntivo y universal, y estimación conjunta usando cokrigado ordinario, disyuntivo y universal. Suponen que los valores verdaderos de precipitación son generados utilizando modelos espacio-tiempo. Concluyen que bajo varias condiciones de la densidad de la red de pluviómetros y características del error de datos de precipitación del radar, la estimación radar-pluviómetro usando cokrigado ordinario o disyuntivo demuestra que proporciona estimaciones constantes y mejores de precipitación, en el sentido del mínimo error de varianza, que usar solamente estimaciones de pluviómetro o sólo estimaciones de radar.

La mejora de cokrigado ordinario es solamente marginal. La consistencia de la mejora, bajo varias características del error de la precipitación del radar, hace al cokrigado

ordinario o al cokrigado disyuntivo una herramienta atractiva en la estimación de la precipitación. Aún cuando los datos de la precipitación del radar tienen sesgo, las estimaciones radar-pluviómetro con cokrigado disyuntivo son mejores que las estimaciones solamente del radar. En general, las estimaciones radar-pluviómetro obtenidas con cokrigado ordinario son tan imparciales como las estimaciones de pluviómetro obtenidas de krigado ordinario. Cuando suponen homogeneidad se resuelven bien, el cokrigado disyuntivo demuestra una mejora substancial sobre cokrigado ordinario. Las estimaciones de krigado y cokrigado tienden a sobrestimar precipitación cercana al suelo y subestimar precipitación a altitudes elevadas. Las estimaciones de radar-pluviómetro son generalmente mejores que estimaciones sólo de pluviómetro en predecir precipitación a elevaciones bajas o altas. El cokrigado universal no tiene ventajas sobre el cokrigado ordinario o disyuntivo.

Un método no paramétrico para transformar los valores de reflectividad del radar en intensidad de lluvia, tal que la distribución probable de las estimaciones de lluvias concuerde con la lluvia medida por el pluviómetro, ha sido desarrollado por Rosenfeld et al. (1993). El método es atractivo ya que la única suposición es que la función de distribución de probabilidad (FDP) de la lluvia derivada con radar (incluyendo los casos de ausencia de lluvia) sea idéntica con la FDP de las lluvias medidas con pluviógrafo. Mejoras adicionales en la exactitud del método es presentada por Rosenfeld et al. (1995) usando una clasificación objetiva de datos para diferentes regímenes de lluvia (Fattorelli et al., 1995).

En el 2001 Todini propuso una técnica de combinación Bayesiana, basada en el empleo de krigado por bloque y el filtro de Kalman, que apunta a la eliminación de la tendencia de estimaciones de precipitación meteorológicas de radar y en la producción de estimaciones de precipitación de varianzas mínimas sobre los píxeles de tamaño variable. En particular se espera que la técnica presente resultados apreciables en tiempo real en el uso de pronóstico de inundaciones donde la fiabilidad y la reducción de incertidumbre son las exigencias principales.

El Instituto Mexicano de Tecnología del Agua (IMTA), ha llevado a cabo proyectos relacionados con la estimación de lluvia. A continuación se presenta un resumen de cada uno de ellos.

En 1989 el Instituto Tecnológico de Sonora (ITSON) realizó un convenio con el IMTA para desarrollar el proyecto denominado “Estimación de la distribución espacial y temporal de la lluvia en tiempo real utilizando radar y satélite” teniendo como objetivos:

1. Digitalizar un radar móvil, produciendo mapas de isoyetas en tiempo real y crear un archivo de datos.
2. Analizar estadísticamente los datos generados para, posteriormente, realizar pronósticos de lluvia y avenidas en tiempo real.
3. Participar en la preparación de la Misión para medir Lluvia Tropical (TRMM) de la NASA, programada para 1992.
4. Calibrar imágenes de satélite GOES para la estimación de lluvia.
5. Instalar y probar el equipo para recibir la señal de GOES.
6. Desarrollar paquetes de cómputo para el despliegue y procesamiento de las imágenes digitales.

La metodología propuesta fue la siguiente: en el año de 1989, se iniciaría la instalación del equipo para digitalizar el radar y para recepción de GOES, en 1990, iniciaría la operación de la estación GOES, archivando imágenes cada media hora para el Noroeste de México. Por otra parte se grabarían los datos de precipitación del radar para hacer un análisis posterior, así determinando la correlación de la lluvia en el sur de Sonora, se calibraría el radar con algunas estaciones de campo y después utilizarlo para calibrar los datos de GOES, los datos a recabar serían del mes de julio a octubre y realizar un estudio estadístico de las correlaciones de la lluvia en tiempo y espacio. No reportan resultados del proyecto.

En 1998 el IMTA desarrolló el proyecto “Estimación y Pronóstico de Precipitación Pluvial sobre México (EPPrePMex)” para el Servicio Meteorológico Nacional (SMN)

con el objetivo de mejorar y actualizar los algoritmos operativos para la estimación y el pronóstico meteorológico de la lluvia en México mediante el uso conjunto de satélite y radar. La metodología propuesta para la calibración de parámetros del sistema EPPrePMex para la estimación fue utilizar las imágenes infrarrojas del satélite GOES y las de reflectividad de los radares meteorológicos. Los resultados presentan subestimación en los valores máximos, en la estimación de precipitación acumulada en 3 horas (mm), consideraron la causa principal de esa subestimación a la amplificación de los procesos convectivos asociado a los forzamientos de flujo atmosférico generado por la topografía de esa región.

En el año 2000, el IMTA llevó a cabo un proyecto contratado por el Sistema Meteorológico Nacional (Conagua, 2000), el objetivo general fue diseñar un sistema piloto que utilizara la información a tiempo real disponible dentro de la zona de cobertura de un cierto radar, tanto de pluviógrafos como de radar, para mejorar la estimación de lluvia en esa zona. El método que se probó para llevar a cabo la estimación fue el propuesto por Krajewski (1987), que, como se mencionó antes estima la precipitación utilizando la técnica de interpolación de cokrigado por bloques y propone el retiro del sesgo utilizando un filtro de Kalman (Anhert et al., 1986), aunque no lo aplica en su trabajo. En el trabajo de Conagua (2000) se probaron tanto el retiro del sesgo con el filtro de Kalman, como el cokrigado por bloques para la estimación de lluvia acumulada horaria. Las conclusiones del trabajo fueron que sería factible implementar el diseño desarrollado en la zona metropolitana de la Ciudad de México, ya que cuenta con una red de pluviógrafos dentro de la zona de cobertura del radar ubicado en el Cerro Catedral. En las pruebas que realizaron, utilizando datos de lámina de lluvia en el Distrito Federal, se estimó una reducción del error de la estimación de lluvia del radar del 20% al usar este nuevo sistema. Y se recomienda proseguir la investigación sobre la estimación de lluvia por medio del radar, explorando técnicas para corregir los errores aleatorios locales como el método de cokrigado, así como métodos más efectivos para eliminar ecos falsos y métodos para reducir la atenuación.

En el año 2008, Méndez modela la variabilidad espacial de la precipitación usando un

método de simulación estocástica con enfoque geoestadístico, el método Secuencial Gaussiano (Alabert y Massonat, 1990), a una tormenta ocurrida en el valle de la Ciudad de México. La simulación estocástica con un enfoque geoestadístico consiste en obtener nuevas realizaciones “artificiales” de la función aleatoria, de manera tal que éstas reflejen las mismas propiedades estadísticas que se esperan que posea la función aleatoria. Concluyen que las simulaciones secuenciales gaussianas usando kriging así como cokriging reproducen adecuadamente los primeros momentos de la función aleatoria, pero pierden información de los lugares con mayor precipitación, reportados en los histogramas de los promedios de las simulaciones. Señalan que las cosimulaciones reproducen de mejor manera el variograma de los datos de pluviómetro.

Posteriormente Díaz-Viera et al. (2009), realizaron estimaciones conjuntas de precipitación de pluviógrafos y radar meteorológico, consideraron tres casos: el primero es cokrigado ordinario usando un modelo de correogionalización lineal incluyendo los datos de lluvia de pluviógrafos y todos los datos de la imagen de radar, el segundo caso es cokrigado ordinario sin usar un modelo de correogionalización lineal incluyendo los datos de lluvia de pluviógrafos y todos los datos de la imagen de radar y el tercer caso es cokrigado colocado, en el cual incluyen en la estimación todos los datos de lluvia de pluviógrafos y sólo el valor de radar que coincide con el punto de la malla de estimación. Concluyeron que cuando se tienen redes de monitoreo suficientemente densas como es el caso de la Ciudad de México, el uso del krigado produce estimaciones bastante precisas de la distribución espacial de la precipitación en sentido general. Sin embargo, el cokrigado ordinario de mediciones de pluviógrafos y de radar cuando se aplica usando un modelo de correogionalización lineal produce estimaciones mucho más precisas y detalladas de la variabilidad espacial a la escala de resolución del radar. Por el contrario, cuando el cokrigado ordinario es empleado sin verificar que sea válido un modelo de correogionalización lineal las estimaciones que resultan pueden ser erróneas ya que se pudieran obtener varianzas del error de la estimación negativas. Señalan que el cokrigado colocado es menos preciso que el cokrigado usando un modelo de correogionalización lineal, pero es computacionalmente más eficiente, sugieren su uso para sistemas de estimación en tiempo real, aunque mencionan que hay

que tomar en cuenta el sesgo que introduce el viento. Como trabajo futuro una perspectiva sería incluir la topografía como variable secundaria en los casos donde no se cuenta con información de imágenes de radar. Así como comparar la precisión y desempeño de los métodos geoestadísticos con algún estimador espacial basado en un filtro de Kalman.

La presente tesis es continuación de estos dos últimos trabajos. Su objetivo es evaluar el método de cokrigado para estimar precipitación combinando mediciones de radar y de pluviógrafo al utilizar todos los datos de la imagen de radar para tormentas en el Distrito Federal. Se prefirió esta opción a la del cokrigado colocado porque como se comentó anteriormente, la lámina de lluvia que se obtiene del radar en la posición del pluviógrafo con frecuencia no es la más cercana a la lluvia medida en tierra. Como parte de la evaluación del método se incluye el cálculo del volumen de escurrimiento, como posible ingreso al sistema de desagüe del DF.

La zona de estudio se escogió porque es la región más densamente monitoreada por pluviógrafos en el país y se tienen productos de radar que cubren toda el área de estudio. Por otro lado las tormentas que se presentan en el DF son en su mayoría convectivas, caracterizadas por una alta variabilidad espacial y temporal, lo que hace que ésta sea una zona interesante para probar la potencialidad del método.

Los datos que se analizaron son datos de lluvia del DF, obtenidos de dos fuentes distintas, por un lado los recabados por la red de pluviógrafos que tiene a su cargo el Sistema de Aguas de la Ciudad de México, SACM (antes Dirección General de Construcción y Operación de Obras Hidráulicas, DGCOH), que contaba con 61 pluviógrafos; y por otro lado, los datos de lluvia estimada a partir de reflectividad medida por el radar meteorológico que está ubicado en el Cerro Catedral en el Estado de México, y que tiene a su cargo el Sistema Meteorológico Nacional (SMN). Se utilizaron los datos de precipitación reportada por la SACM debido a que se requería información horaria para hacer pares de datos con la precipitación estimada por el radar y la DGCOH reporta, vía radio, cada minuto la lluvia acumulada (Conagua, 2000); a diferencia de la



información de la red de pluviómetros de la Conagua que es lluvia acumulada diaria.

El método propuesto se aplicó a dos tormentas, la tormenta 1 con fecha 15 de julio de 1997 y la tormenta 2 con fecha 16 de julio de 1997.

La tesis está conformada de cinco capítulos, el primer capítulo incluye la introducción ya leída por el lector, los antecedentes y los métodos de estimación de lluvia por radar. En el segundo capítulo se presenta la teoría del análisis geoestadístico, iniciando con las definiciones básicas y métodos geoestadísticos generales, la geoestadística univariada desarrollando el análisis estructural, desde el análisis exploratorio de los datos, estimación del semivariograma experimental, las consideraciones para la estimación del semivariograma, se describen los tipos de modelos para el ajuste del semivariograma, el criterio para el ajuste del semivariograma teórico, descripción del método de krigeado ordinario, validación del modelo del semivariograma, después se describe la geoestadística bivariada, incluye el análisis estructural, análisis de correlación, análisis de semivariograma cruzado y el modelo de correogionalización lineal, acompañado del cokrigeado, la validación del semivariograma cruzado. El capítulo tres inicia con la descripción del preprocesamiento de datos de lluvia de pluviógrafos y radar, y es *grosso modo* la descripción del método, aplicándolo a dos tormentas. El capítulo cuatro son las conclusiones y recomendaciones. En el último capítulo, el cinco, se incluyen las referencias de los artículos y documentos consultados.



## 2. TEORÍA DEL ANÁLISIS GEOESTADÍSTICO

La geoestadística se puede definir como la rama de la estadística dedicada al análisis de procesos distribuidos espacialmente (Journel, 1986). Esta tiene el fin de caracterizar espacialmente al fenómeno natural que se esté analizando.

Una de las aplicaciones más importantes de la geoestadística es la *estimación espacial* de una variable dada a partir de un conjunto de medidas, ya que la gran mayoría de las ocasiones en las que se desea obtener este tipo de estimaciones no se tiene la cantidad suficiente de información, por lo que se tiene la necesidad de darle un tratamiento estocástico al problema. Este es el tema fundamental de esta tesis.

La estimación espacial requiere de una función que describa la variabilidad espacial de la variable analizada. Con este fin se utilizan funciones como la covarianza o el semivariograma, por ejemplo. En esta tesis la función que se utilizará es la segunda.

En esta tesis se hacen dos tipos de análisis, uno univariado y el otro bivariado. En el análisis univariado se estima la precipitación con la técnica de interpolación llamada krigado ordinario y en el bivariado con cokrigado ordinario.

En este capítulo se presentan los conceptos básicos de la geoestadística univariada y bivariada, suponiendo como conocidos los conceptos y resultados de la estadística. El contenido es en gran parte un resumen del libro de Samper y Carrera (1990), cuando se utilice alguna otra referencia se indica en el texto.

### 2.1 *Definiciones básicas*

La función aleatoria puede visualizarse como una variable aleatoria definida en todos los puntos del espacio, o lo que es igual, cada realización de la función aleatoria es una función espacial. Lo característico de las funciones aleatorias es que cada realización se

puede concebir como suma de una componente estructurada y otra aparentemente errática. La componente estructurada es la que permite asegurar que, si nos encontramos en una zona en que se han realizado varias medidas por encima de lo normal, lo más probable es que las medidas adicionales también sean altas. La componente aleatoria es la que impide predecir con exactitud el valor de dichas hipotéticas medidas.

Considérese una función aleatoria  $Z(x)$  definida en  $R^n$ . Para cualesquiera  $k$  puntos  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , el vector aleatorio  $[Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_k)]$  se caracteriza por su función de distribución  $k$  –variable.

$$F_{x_1, x_2, \dots, x_k}(Z_1, Z_2, \dots, Z_k) = Prob[Z(x_1) \leq Z_1, Z(x_2) \leq Z_2, \dots, Z(x_k) \leq Z_k] \quad (2.1)$$

El conjunto de todas estas distribuciones para todo valor de  $k$  y para cualquier selección de puntos en  $R^n$  constituye la “ley espacial de probabilidad” de la función aleatoria  $Z(x)$ .

En esta tesis se utilizó únicamente geoestadística lineal, en la cual son suficientes los dos primeros momentos de la distribución de  $Z(x)$ . De hecho, en la mayoría de las aplicaciones prácticas la información disponible no permite inferir momentos de mayor orden.

El momento de primer orden es la esperanza matemática definida como

$$E[Z(x)] = m(x)$$

Aunque la función  $m(x)$  se conoce con los nombres de deriva y tendencia, algunos autores prefieren la utilización del término deriva.

Los tres momentos de segundo orden considerados en geoestadística son:

- a) La varianza o momento de segundo orden de  $Z(x)$  respecto a  $m(x)$ :

$$\sigma^2 = \text{Var}[Z(x)] = E\{[Z(x) - m(x)]^2\}$$

En general,  $\text{Var}[Z(x)]$  es una función de  $x$ .

- b) La covarianza de dos variables aleatorias  $Z(x_i)$  y  $Z(x_j)$ ,  $C(x_i, x_j)$ , definida como:

$$C(x_i, x_j) = E\{[Z(x_i) - m(x_i)][Z(x_j) - m(x_j)]\}$$

Es en general una función de  $x_i$  y  $x_j$ . A esta función se le llama a veces función de autocovarianza.

- c) El semivariograma  $\gamma(x_i, x_j)$  que se define como:

$$\gamma(x_i, x_j) = \frac{1}{2}E\{[Z(x_i) - Z(x_j)]^2\}. \quad (2.2)$$

Nótese que tanto la varianza como el semivariograma siempre son positivos mientras que la covarianza puede adoptar valores negativos.

Es conveniente hacer algunas definiciones de funciones aleatorias, para tener bases para el entendimiento del análisis posterior.

- *Funciones aleatorias estacionarias*

Se dice que una función aleatoria es estrictamente estacionaria si su función de distribución (2.1) es invariante a cualquier traslación respecto de vector  $h$ , o lo que es equivalente, la función de distribución del vector aleatorio  $[Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_k)]$  es idéntica a la del vector  $[Z](x_1 + h), Z(x_2 + h), \dots, Z(x_k + h)$  para cualquier  $h$ .

Puesto que usualmente se trabaja sólo con los momentos hasta de segundo orden, resulta

práctico limitar la hipótesis de estacionariedad a estos primeros momentos.

Se dice que una función aleatoria  $Z(x)$  es estacionaria de orden 2 o de segundo orden si se cumple que:

- a)  $E[Z(x)]$  existe y no depende de  $x$ , es decir,

$$E[Z(x)] = m \quad \text{para todo } x$$

- b) Para cualquier par de variables aleatorias  $\{Z(x+h), Z(x)\}$ , su covarianza existe y sólo depende del vector de separación  $h$ , es decir,

$$C(x+h, x) = E[Z(x+h)Z(x)] - m^2 = C(h)$$

La estacionariedad de la covarianza implica que la varianza  $Var[Z(x)]$  existe, es finita y no depende de  $x$ , es decir

$$Var[Z(x)] = C(0). \quad (2.3)$$

Asimismo, bajo esta hipótesis el semivariograma también es estacionario y se cumple que:

$$\gamma(x+h, x) = \gamma(h) = \frac{1}{2} E\{[Z(x+h) - Z(x)]^2\}.$$

Además existe una relación directa entre el semivariograma y la función de covarianza

$$\gamma(h) = C(0) - C(h).$$

En este caso resulta suficiente usar una de las dos funciones para caracterizar la dependencia espacial. En este trabajo se utiliza el semivariograma con este fin.

- *Funciones aleatorias intrínsecas*

Existen funciones aleatorias que representan y fenómenos físicos reales que muestran una capacidad casi ilimitada de variación. Para estas funciones no están definidas la varianza ni la covarianza. Sin embargo existen casos en que sus incrementos o diferencias  $[Z(x + h) - Z(x)]$  tienen una varianza finita. En otras palabras, esto quiere decir que las diferencias son estacionarias de segundo orden.

Por lo tanto las funciones aleatorias intrínsecas son aquellas que cumplen las siguientes condiciones:

El valor esperado de las diferencias es

$$E[Z(x + h) - Z(x)] = 0$$

La varianza de las diferencias es

$$Var[Z(x + h) - Z(x)] = 2\gamma(h)$$

Estas condiciones se conocen en conjunto como Hipótesis Intrínseca.

Bajo esta hipótesis, entonces el semivariograma es:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2}Var[Z(x + h) - Z(x)] = \frac{1}{2}E\{[Z(x + h) - Z(x)]^2\}.$$

Es evidente que una función aleatoria estacionaria de segundo orden es siempre intrínseca. El recíproco no siempre es cierto. A las funciones que cumplen con la hipótesis intrínseca se les considera como débilmente estacionarias (Matheron, 1970).

En la metodología geoestadística una parte medular es el análisis estructural, que consiste en caracterizar la variabilidad del fenómeno. Para que el planteamiento sea correcto es necesario tener una caracterización adecuada de la variabilidad del fenómeno a estudiar.

## **2.2 *Geoestadística univariada***

En esta sección se explicaran los métodos que se utilizan en geoestadística para el análisis de una sola variable.

### **2.2.1 Análisis estructural**

El análisis estructural se lleva a cabo mediante dos pasos: 1) un análisis exploratorio de los datos y 2) el ajuste de un semivariograma teórico al semivariograma experimental. A continuación éstos se explican con detalle.

#### **2.2.1.1 Análisis exploratorio de los datos**

La metodología geoestadística a seguir es primero hacer un análisis preliminar de los datos con los que se cuenta. La muestra debe cumplir los siguientes requisitos: *a)* que tenga una distribución espacial homogénea, *b)* que su distribución de probabilidad sea aproximadamente normal, *c)* que no se vea afectada por valores atípicos (*outliers*) tanto distribucionales como espaciales, y *d)* que no exista tendencia, es decir que sea estacionaria al menos la media (Díaz-Viera, 2002).

Se debe realizar un análisis de la distribución espacial de la muestra a fin de conocer si está distribuida de forma homogénea en la región de estudio, o bien si presenta una distribución preferencial por zonas o en alguna dirección.

Para analizar si la distribución de probabilidad de la muestra es aproximadamente normal, se realiza un análisis estadístico, en el que se grafica el histograma para visualizar su forma y se obtienen el valor medio, la mediana, la desviación estándar, la varianza, el coeficiente de asimetría y la curtosis de la tormenta. La distribución normal o gaussiana tiene propiedades que están a favor de su uso porque, entre otras cosas, el valor estimado por krigeado es el óptimo absoluto, esto es, el que minimiza la varianza del error de la estimación.



Es muy importante la detección de los valores atípicos (discordantes) y su posible eliminación ya que pueden influir de manera significativa en los resultados de las etapas posteriores, y también podemos percatarnos si hay algún valor discordante, producto del error humano o por consecuencia del mecanismo de medición. Debemos considerar dos categorías de valores atípicos: *a) distribucionales*, que son los que tienen valores que se alejan significativamente del valor medio de la muestra; y *b) espaciales*, que son los que tienen un valor muy diferente al de sus vecinos más cercanos.

Hay que verificar si existe o no, tendencia en los datos. Una manera de hacerlo es estimando el semivariograma. Cuando este muestra un crecimiento igual o más rápido que una función cuadrática es un indicador de la posible presencia de tendencia.

También es importante verificar que no exista anisotropía en los datos. Y para poder determinarla se procede realizando la estimación de semivariogramas direccionales. Esta se presenta cuando los alcances de los semivariogramas son significativamente diferentes. Si la anisotropía es significativa se determinan los alcances (radio de correlación) en las direcciones de menor y de mayor valor, con lo cual se pueden construir modelos anisotrópicos.

### ***2.2.1.2 Estimación del semivariograma experimental***

El análisis estructural consiste en encontrar una función que describa el grado de correlación espacial de la propiedad que se estudia. Como se mencionó antes en este trabajo la función utilizada con este fin es el semivariograma.

### ***2.2.1.3 Consideraciones para la estimación del semivariograma***

El semivariograma se estima con base en los datos y en la estructura del fenómeno. En principio, si solo se dispusiese de los datos, el semivariograma se estimaría directamente a partir de su definición (en la ecuación 2.2) como:

$$\gamma^*(h) \cong \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} [Z(x_i + h) - Z(x_i)]^2.$$

Donde  $\gamma^*$  es el semivariograma experimental,  $Z(x_i)$  son los valores experimentales en los puntos  $x_i$ , en los que se dispone de datos tanto en  $x_i$  como en  $x_i + h$  y  $N(h)$  es el número de pares de puntos separados por una distancia  $h$ .

En el cálculo del semivariograma cabe observar varios aspectos: el número de parejas disminuye al aumentar la distancia  $h$ . Si bien esto no tiene porqué ser así siempre, es común que el número de parejas se reduzca a partir de una cierta distancia. Esto hace que para distancias grandes la estimación del semivariograma sea poco fiable y limita el máximo valor de  $h$  para el que se puede estimar el semivariograma. A veces se recomienda utilizar como máxima distancia la mitad de la dimensión del dominio. Sin embargo, esto se puede decidir en función del número de pares que se formen, para cada distancia máxima utilizada en cada caso en particular. Por otro lado, no es necesario que el semivariograma llegue a estabilizarse ya que esto sólo sucede cuando el proceso es estacionario.

Ya definido el semivariograma experimental, el siguiente paso a seguir es calcularlo y ajustarlo a algún semivariograma teórico. Los semivariogramas teóricos no son más que funciones con una expresión analítica sencilla, que cumplen las reglas que se introducen a continuación y que, por ello, se emplean frecuentemente para representar semivariogramas reales. En general dichos semivariogramas teóricos pueden dividirse en no acotados (lineal, logarítmico, potencial) y acotados (esférico, exponencial, gaussiano) (Warrick et al., 1986). Los parámetros básicos de estos modelos son el efecto pepita que representa una discontinuidad puntual del semivariograma en el origen, la meseta que es el límite del semivariograma cuando la distancia  $h$  tiene a infinito y el rango que es la distancia  $h$  para la cual dos observaciones son independientes (David, 1977).

#### *Condiciones que deben cumplir los modelos de semivariograma*

1. De la definición de semivariograma se deduce que  $\gamma(h)$  ha de ser nulo en el origen, es decir

$$\gamma(0) = 0$$

Esto no tiene graves implicaciones prácticas, ya que, como se permiten discontinuidades, la condición (de la ecuación 2.3) se obvia fácilmente imponiendo las definiciones analíticas para  $h > 0$ .

2.  $\gamma(h)$  es una función “condicionalmente negativa definida”, o bien,  $-\gamma(h)$  es “condicionalmente positiva definida”. Es decir,

Para todo conjunto  $x_1, \dots, x_n$  de puntos arbitrarios y para todo conjunto  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  de coeficientes que satisfacen  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$  ha de cumplirse que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \gamma(x_i - x_j) \leq 0 \quad (2.4)$$

Esta condición se deduce del hecho de que la variable  $Y$ ,

$$Y = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i)$$

ha de tener varianza positiva, es decir:

$$\text{Var}(Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j C(x_i - x_j) \geq 0 \quad (2.5)$$

Sustituyendo  $\lambda(h) = \text{Var}(Z) - C(h)$  en la ecuación 2.5, esta condición es equivalente a:

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(Z) \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^n \lambda_j - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \gamma(x_i - x_j) \geq 0$$

Pero como  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$  (condición que se impone precisamente para evitar los casos en que  $\text{Var}(Z)$  no esté definida), resulta la ecuación 2.4.

3. Como consecuencia de la propiedad anterior, se puede demostrar que el

semivariograma debe tener un ritmo de crecimiento inferior a  $h^2$  (Journel y Huijbregts, 1978), es decir

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\gamma(h)}{h^2} = 0 \quad (2.6)$$

Cuando el semivariograma experimental no satisface esta condición, es posible que no se satisfaga la condición de estacionariedad.

#### ***2.2.1.4 Tipos de modelos para el semivariograma***

Los modelos de semivariograma son una serie de funciones de las que se sabe satisfacen las tres condiciones referidas en el punto anterior. Estas funciones son las utilizadas en la práctica para ajustar los semivariogramas experimentales, ya que estos últimos pueden no satisfacerlas y es más incómodo trabajar con ellos.

Los modelos más comunes se muestran en la Figura 2.1 y se describen a continuación:

##### **a. Efecto pepita puro**

Este modelo es indicativo de un fenómeno sin ninguna autocorrelación espacial. No es común emplearlo solo, sino en combinación con algún otro, ya que la discontinuidad en el origen, denominada efecto pepita, podría indicar que los valores de la variable cambian bruscamente a pequeña escala y suele ser debida a errores de medida en la toma de datos, entendiéndose por ello, el hecho de que la muestra obtenida no sea capaz de detectar la estructura de correlación relativa a microescala, cualquier escala menor a la utilizada como unidad de medida (Matheron, 1970). Para efectos de modelación, basta superponer el efecto pepita puro a cualquiera de los semivariogramas teóricos. Su ecuación es:

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0 & h = 0 \\ s & h > 0 \end{cases}$$

### b. Modelo esférico

El modelo esférico es uno de los más empleados en la práctica. Se caracteriza porque alcanza la meseta para una distancia finita ( $h = a$ ). Es indicativo de fenómenos continuos (o con un conjunto a lo sumo numerable de discontinuidades), aunque no derivables. Es decir, fenómenos cuya representación puede presentar quiebros. Su ecuación está dada por:

$$\gamma(h) = \begin{cases} \frac{S}{2} \left[ 3 \left( \frac{h}{a} \right) - \left( \frac{h}{a} \right)^3 \right] & h \leq a. \\ S & h > a \end{cases}$$

Sus características, pues, son el alcance  $a$  y la meseta  $S$  mientras que la pendiente en el origen es igual a  $1.5 \left( \frac{S}{a} \right)$ .

### c. Modelo exponencial

El semivariograma exponencial es representativo de fenómenos continuos salvo en un conjunto de puntos (en una dimensión), líneas (en dos dimensiones) o planos (en tres dimensiones). Su ecuación es:

$$\gamma(h) = S \left( 1 - e^{-\frac{h}{a}} \right),$$

Por lo tanto, alcanza su meseta de forma asintótica:

$$\text{Meseta} = \lim_{h \rightarrow \infty} S \left( 1 - e^{-\frac{h}{a}} \right) = S.$$

### d. Modelo gaussiano

Está dado por la expresión:

$$\gamma(h) = S \left[ 1 - \exp\left(-\frac{h^2}{a^2}\right) \right],$$

También alcanza su meseta asintóticamente

$$\text{Meseta} = \lim_{h \rightarrow \infty} \gamma(h) = S.$$

Por lo tanto, estrictamente hablando, no tiene alcance, sino que se define para efectos prácticos  $a' = \sqrt{3a}$ , valor para el cual el variograma es igual a  $0.95S$ .

Su comportamiento en el origen, de tipo parabólico con pendiente nula, es indicativo de una gran regularidad.

Este modelo se emplea para representar fenómenos “suaves”, es decir, continuos en todos los puntos y derivables en la mayoría.

El semivariograma gaussiano suele conducir a problemas numéricos, salvo cuando se usa con efecto pepita. Por ello, su empleo en la práctica es poco habitual.

**e. Modelos monómicos** (en  $h^\theta$ ). Son los de la forma

$$\gamma(h) = Kh^\theta.$$

Donde  $\theta$  está en el intervalo  $(0,2)$  sin tomar sus valores extremos. Nótese que  $\theta = 0$  corresponde a un efecto pepita puro. Este parámetro no puede ser igual o mayor que 2, pues no se satisfaría la condición de la ecuación 2.6. Estos semivariogramas no tienen meseta, pues tienden a infinito cuando lo hace  $h$ .

Los modelos monómicos se emplean para representar fenómenos no estacionarios. En este sentido, una variable con semivariograma de este tipo tiene estructura fractal con una dimensión fractal igual a  $2 - \frac{\theta}{2}$  (Burrough, 1983; Neuman et al., 1989).

Otros semivariogramas empleados con mucha menos frecuencia son el logarítmico, cúbico, cuadrático y los que presentan efecto agujero.

El semivariograma **logarítmico** puede ser de utilidad cuando el semivariograma experimental se comporta linealmente si se usa una escala logarítmica para las distancias. Su expresión es:  $\gamma(h) = C_1 \log h$ .

Donde  $C_1$  es una constante. Nótese que este semivariograma no está definido en el entorno del origen y no tiene meseta ya que

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \gamma(h) = \infty.$$

El semivariograma **cúbico** tiene como expresión

$$\gamma(h) = \begin{cases} S \left( \frac{7h^2}{a^2} - \frac{35h^3}{4a^3} + \frac{7h^5}{2a^5} - \frac{3h^7}{4a^7} \right) & \text{si } h < a \\ S & \text{si } h \geq a \end{cases}.$$

Como se puede observar, alcanza la meseta para una distancia finita  $a$ . Su comportamiento en el origen es cuadrático, por lo que es típico de fenómenos muy suaves, aunque no tanto como los correspondientes a un semivariograma gaussiano del mismo alcance.

Otro semivariograma empleado en ocasiones es el **cuadrático**, dado por la expresión:

$$\gamma(h) = \begin{cases} S \left( \frac{2h}{a} - \frac{h^2}{a^2} \right) & \text{si } h < a \\ S & \text{si } h \geq a \end{cases}.$$

Que tiene un alcance finito  $a$  y un comportamiento lineal en el origen, con pendiente  $2S/a$ . Tiene un comportamiento similar al esférico.

El **efecto agujero** es indicativo de fenómenos con componentes periódicas o

cuasiperiódicas. En general, estas componentes son difíciles de estudiar por el método de krigeado. Si la periodicidad se conoce bien, lo mejor es filtrarla por algún otro método. Si no existen datos suficientes para asegurar su tendencia, entonces puede ser mejor ignorar las posibles ondulaciones del semivariograma, que pueden ser debidas a otras causas.

Los semivariogramas más comunes con efecto agujero son:

$$\gamma(h) = S \left( 1 - \frac{\sinh h}{h} \right).$$

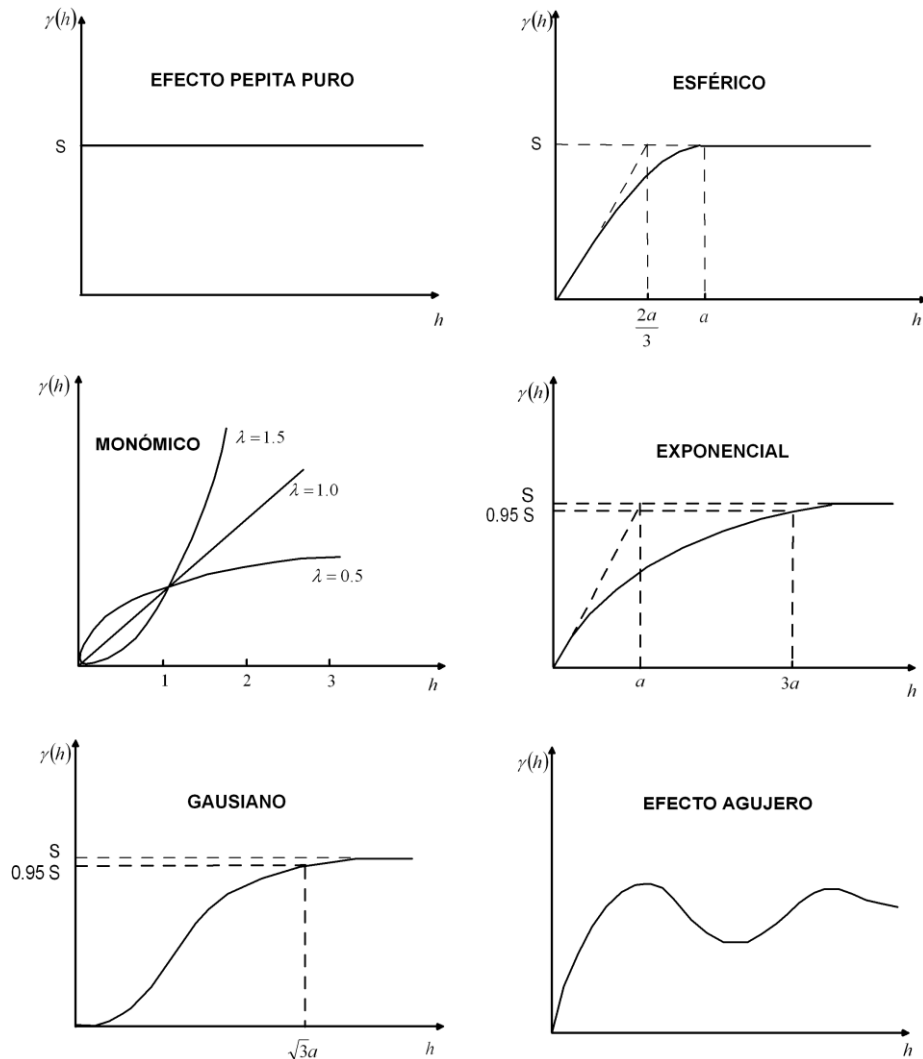
Con comportamiento parabólico en el origen y negativo definido en tres dimensiones.

Otra alternativa válida para efecto agujero muy acentuado en una dirección es el siguiente modelo:

$$\gamma(h) = S(1 - \cosh h).$$

Este modelo es definido negativo en una dimensión.





**Figura 2.1** Semivariogramas teóricos más comunes (Samper y Carrera, 1990)

### 2.2.1.5 Ajuste del semivariograma teórico

En esta tesis los ajustes de los modelos teóricos de semivariogramas se realizaron a prueba y error, y se utilizó el Criterio de Información de Akaike (Akaike, 1974) para seleccionar el mejor modelo. Este estadístico permite decidir el orden de un modelo. El criterio toma en consideración tanto la medida en que el modelo se ajusta a las series observadas como el número de parámetros utilizados en el ajuste, y se puede estimar usando la siguiente fórmula

$$CIA = \left\{ n \ln \left( \frac{2\pi}{n} \right) + n + 2 \right\} + n \ln(R) + 2p,$$

Donde:

$n$  es el número de valores estimados  $\{\gamma^*(h_i), i = 1, \dots, n\}$  del semivariograma muestral,

$R$  es la suma residual de los cuadrados de las diferencias entre los valores experimentales  $\gamma^*(h_i)$  y los del modelo ajustado  $\gamma(h)$ , es decir,  $R = \sum_{i=1}^n [\gamma(h_i) - \gamma^*(h_i)]^2$ ,

$p$  es el número de parámetros del modelo de semivariograma ajustado  $\gamma(h)$ . El criterio de selección será escoger modelos con valores más bajos de CIA.

### 2.2.2 Método de krigado ordinario

El krigado es un método que con frecuencia está asociado con el acrónimo *BLUE* término que designa al *mejor estimador lineal insesgado* por sus siglas en inglés *Best Linear Unbiased Estimator* (Kitanidis, 1997); el krigado es *lineal* porque estas estimaciones son combinaciones lineales pesadas de los datos disponibles; éste es *insesgado* porque hace que, el residuo medio o error, sea igual a 0; es el mejor porque minimiza, la varianza de los errores.

El nombre de krigado apareció alrededor de 1960 para nombrar una técnica creada en Francia por Matheron (1962) a partir de los trabajos de D. G. Krige, quien fue probablemente el primero que hizo uso de la correlación espacial y del mejor estimador lineal insesgado en el campo de la evaluación de yacimientos minerales.

Solamente se requiere el conocimiento del momento de segundo orden de la función aleatoria (la covarianza o el semivariograma) y en general en la práctica es posible estimarlo a partir de una realización de la misma.

Para explicar este método se sigue el texto de Díaz-Viera (2002).

### 2.2.2.1 Planteamiento del problema general

Sea  $Z(x)$  una función aleatoria, la cual está definida en un soporte puntual y es estacionaria de segundo orden, con:

- Un valor esperado

$$E[Z(x)] = m, \quad \forall x,$$

donde  $m$  es una constante generalmente desconocida.

- Una función de covarianza centrada

$$C(h) = E[Z(x+h)Z(x)] - m^2.$$

- Un variograma

$$Var[Z(x+h) - Z(x)] = 2\gamma(h),$$

donde al menos uno de estos dos momentos de segundo orden se supone conocido.

Cuando solamente existe el variograma, entonces la función aleatoria  $Z(x)$  se considera intrínseca.

Los valores experimentales consisten en un conjunto de valores discretos  $\{Z(x_i), i = 1, \dots, n\}$ . Con frecuencia estos valores están definidos en soportes puntuales o casi puntuales, en otros casos son los valores medios  $Z_{v_i}(x_i)$  definidos en los soportes  $V_i$  centrados en los puntos  $x_i$  donde los  $n$  soportes pueden ser todos diferentes.

La estimación del valor medio  $Z_{v_i}(x_i)$  en el dominio de  $V_i$  se define como

$$Z_{V_i}(x_i) = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} Z(x) dx.$$

Es conveniente destacar que bajo la hipótesis de estacionariedad el valor esperado de cada uno de estos datos es  $E[Z(x_i)] = m, \forall i$ .

El estimador lineal  $Z_k^*$  considerado es una combinación lineal de  $n$  valores de datos tal que:

$$Z^*(x_k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i),$$

Los  $n$  coeficientes  $\lambda_i$  son calculados de manera tal que el estimador sea insesgado y que la varianza de la estimación sea mínima, entonces se dice que el estimador  $Z_k^*$  es óptimo.

### 2.2.2.2 Ecuaciones

Como ya hemos planteado el estimador krigeado se considera óptimo ya que es insesgado y es el que minimiza la varianza de la estimación. A partir de estos dos criterios se derivan las ecuaciones del krigeado.

Para obtener un estimador insesgado, el valor esperado del error debe ser igual a cero, por lo que resulta suficiente imponer la condición:

$$E[Z_k^*] = E[\sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i)] = m,$$

donde  $m$  es el valor esperado de la función aleatoria  $Z(x)$ .

Esto implica que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i E[Z(x_i)] = E[Z_k^*],$$

por lo que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i m = m,$$

y finalmente

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1.$$

Para satisfacer la condición de que la estimación sea de mínima varianza y la condición que garantiza el no sesgo de la estimación, hay que minimizar la siguiente función:

$$F = \sigma_e^2 - 2\mu[\sum_{i=1}^n \lambda_i - 1],$$

donde  $\sigma_e^2$  es la varianza de la estimación,  $\mu$  es un multiplicador de Lagrange.

La varianza de la estimación se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sigma_e^2 &= \text{Var}[Z_k - Z_k^*] = E[(Z_k - Z_k^*)^2], \\ &= \text{Var}[Z_k] - 2\text{Cov}[Z_k, Z_k^*] + \text{Var}[Z_k^*] \end{aligned}$$

Sustituyendo en esta última fórmula la expresión del estimador  $Z_k^*$  tenemos:

$$\sigma_e^2 = \text{Var}[Z_k] - 2\text{Cov}[Z_k, \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i)] + \text{Var}[\sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i)],$$

desarrollando y sustituyendo  $\text{Cov}(Z_k, Z_k^*)$  por  $\sigma_{Z_k Z_i}$

$$\sigma_e^2 = \sigma_{Z_k}^2 - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_{Z_k Z_i} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \sigma_{Z_i Z_j}. \quad (2.7)$$

Si hallamos las derivadas parciales de  $F$  respecto a los coeficientes desconocidos  $\lambda_i$  y con respecto a  $\mu$  obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = -2\sigma_{Z_k Z_i} + 2 \sum_{j=1}^n \lambda_j \sigma_{Z_i Z_j} - 2\mu = 0, & i = 1, \dots, n \\ \frac{\partial F}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^n \lambda_i - 1 = 0 \end{cases}$$

De una manera más usual se escribe como sigue:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j \sigma_{Z_k Z_i}, & i = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \end{cases} \quad (2.8)$$

El sistema de ecuaciones así obtenido sirve para el cálculo del krigado puntual. Y la varianza del error de la estimación se puede calcular de una manera más simple si se sustituye  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \sigma_{Z_i Z_j}$  por  $\mu$  en la ecuación 2.7:

$$\sigma_e^2 = \sigma_{Z_k}^2 - \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_{Z_k Z_i} + \mu.$$

### 2.2.2.3 Ecuaciones del krigado ordinario en forma matricial

Podemos representar el sistema de ecuaciones del krigado 2.8 en forma matricial como sigue:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} & 1 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdots \\ \lambda_n \\ -\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{k1} \\ \sigma_{k2} \\ \cdots \\ \sigma_{kn} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

donde  $\sigma_{ij} = \sigma_{Z_i Z_j}$ .

Nótese que bajo la hipótesis intrínseca las covarianzas pueden ser reemplazadas por los semivariogramas, usando la expresión:

$$\sigma_{ij} = \sigma^2 - \gamma_{ij},$$

donde  $\sigma^2 = C(0)$  es la varianza total o *a priori* de la muestra y  $\gamma_{ij} = \gamma(x_i - x_j)$ .

Entonces sustituyendo la expresión de la covarianza en función del semivariograma obtenemos el sistema del krigado en función de los semivariogramas:

$$\begin{bmatrix} 0 & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} & 1 \\ \gamma_{21} & 0 & \cdots & \gamma_{2n} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdots \\ \lambda_n \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{k1} \\ \gamma_{k2} \\ \cdots \\ \gamma_{kn} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Y la varianza de la estimación se calcula como sigue:

$$\sigma_e^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma_{ki} + \mu.$$

Estas últimas expresiones resultan ser la formulación del krigado más común puesto que se aplica en el caso cuando la variable regionalizada cumple la hipótesis intrínseca la cual es una condición menos exigente que la estacionariedad de segundo orden.

### 2.2.3 Validación del modelo del semivariograma

Puesto que una de las posibles aplicaciones del semivariograma es la estimación espacial de una variable regionalizada  $Z(x)$ , parece razonable plantear un estimador del semivariograma que se base en la idea de minimizar los errores de estimación de  $Z(x)$ . Aunque algunos autores suelen llamar “*jackknife*” al método de validación cruzada, Journel (1980) y Davis (1987) realizaron observaciones y distinguieron la diferencia entre ambos términos. Mientras que la técnica “*jackknife*” es un método para estimar los estadísticos de una variable basados en la división de los datos en grupos, la validación cruzada es un método para la evaluación de los errores de estimación (Efron y Gong, 1983).

El método de la validación cruzada ha sido ampliamente utilizado para evaluar el grado de bondad de un modelo de semivariograma (Delhomme, 1978; Candy y Mao, 1981; y Baafi et al., 1982). También ha sido reconocido como un método óptimo de estimación

de sus parámetros (Dowd, 1984; Bastin y Gevers, 1985; Samper, 1986).

El procedimiento de validación cruzada permite establecer si el modelo de semivariograma obtenido es representativo de la variabilidad espacial de los datos usados en la estimación del mismo. Para validar el modelo obtenido de semivariograma se puede proceder de varias maneras. Un método que resulta atractivo por su sencillez y eficiencia es el *leave one out* (Journel, 1986; Journel, 1989; Samper y Carrera, 1990) que consiste en sacar un elemento de la muestra y estimar el valor en ese punto con el tipo de krigado que se esté utilizando empleando el modelo de semivariograma obtenido. De forma análoga se actúa para el resto de los elementos de la muestra. Como resultado se obtiene un mapa de las diferencias entre el valor real y el estimado.

Se realiza un análisis integral de los estadísticos de las diferencias y se aplican de manera combinada algunos de los siguientes criterios (Omre, 1984):

- El valor medio de las diferencias debe ser cercano a cero.
- La varianza de las diferencias debe ser pequeña.
- La varianza normalizada de las diferencias debe ser próxima a la unidad.
- La correlación muestral entre el valor real y el estimado debe ser próxima a la unidad.
- La correlación muestral entre el valor real y la diferencia dividida por la desviación típica debe ser próxima a cero.

### **2.3 Geoestadística multivariada**

El análisis geoestadístico de varias variables regionalizadas  $Z_1(x), Z_2(x), \dots, Z_m(x)$  se realiza de forma análoga al caso de una variable. Es decir, las  $m$  variables regionalizadas se interpretan como una posible realización de un conjunto de  $m$  funciones aleatorias  $Z_1(x), Z_2(x), \dots, Z_m(x)$  correlacionadas entre sí. Al igual que en el caso univariado, es necesario introducir hipótesis acerca de la naturaleza de dichas funciones aleatorias para



hacer posible la inferencia estadística.

### **2.3.1 Análisis estructural**

Este análisis consiste en dos pasos, de los cuales el primero es un análisis de correlación y el segundo, es el ajuste de los semivariogramas cruzados.

#### ***2.3.1.1 Análisis de correlación***

El despliegue más común de datos bivariados es el de correlación, el cual es una gráfica  $x - y$  de los datos en la cual la coordenada  $x$  corresponde al valor de una variable y el valor de la coordenada  $y$  corresponde a la otra variable.

Este análisis provee un buen cualitativo para relacionar dos variables, además es útil para detectar visualmente datos atípicos. Lo cual es necesario inspeccionar los datos, ya que el éxito de cualquier método de estimación depende de datos confiables.

En un amplio sentido, hay tres patrones que podemos observar en este análisis, las variables son correlacionadas positivamente, correlacionadas negativamente o no correlacionadas.

Dos variables son correlacionadas positivamente si los valores son muy grandes. En una variable se tiende a asociar con valores muy grandes de la otra variable, y en forma similar con los valores muy pequeños de cada variable.

Dos variables son correlacionadas negativamente si los valores muy grandes de una variable tienden a asociarse con los valores pequeños de la otra.

La última posibilidad es que las dos variables no estén relacionadas. Un incremento en una variable puede no causar efecto en la otra.

### **2.3.1.2 Semivariograma cruzado**

En el análisis de varias variables correlacionadas entre sí aparecen una serie de momentos de segundo orden que miden el grado de correlación entre las distintas variables. Bajo la hipótesis de estacionariedad de segundo orden, se pueden definir para cada pareja de variables  $Z_i(x)$  y  $Z_j(x)$  el semivariograma cruzado  $\gamma_{ij}(h)$  como:

$$\gamma_{ij}(h) = \frac{1}{2} E\{[Z_i(x+h) - Z_i(x)][Z_j(x+h) - Z_j(x)]\}.$$

Obviamente cuando  $i = j$ , los momentos cruzados se convierten en el semivariograma de la variable  $i$ , es decir,  $\gamma_{ii}(h)$ .

El semivariograma cruzado  $\gamma_{ij}(h)$  puede tomar valores negativos a diferencia del semivariograma simple (o de una variable)  $\gamma_{ii}(h)$  que siempre es positivo. Valores negativos del semivariograma cruzado  $\gamma_{ij}(h)$  pueden presentarse cuando el aumento de una de las variables ( $Z_i$ ) se corresponde en promedio con una disminución de la otra ( $Z_j$ ).

De acuerdo con su definición, el semivariograma cruzado  $\gamma_{ij}(h)$  es simétrico en  $h$  y en  $(i, j)$ , es decir,

$$\gamma_{ij}(h) = \gamma_{ij}(-h) \text{ y } \gamma_{ij}(h) = \gamma_{ji}(h).$$

### **2.3.1.3 Análisis estructural multivariado y modelo de correogionalización lineal**

El análisis estructural multivariado que se requiere para el cokrigado es mucho más complejo y sofisticado que el que demanda el krigeado ya que para modelar los semivariogramas cruzados de  $n$  variables aleatorias regionalizadas, se deben modelar (ajustar) un total de  $n(n+1)/2$  semivariogramas simples. A diferencia del caso

univariado, el uso de modelos de semivariogramas autorizados o combinaciones de éstos no garantiza que la matriz de covarianzas  $\underline{C}(h)$  sea positiva definida.

El modelo más usado en la actualidad para realizar un análisis estructural multivariado según Goovaerts (1997) es el modelo de corregeionalización lineal (MCL). No obstante existen otras metodologías menos difundidas que usan métodos espectrales y están basadas en el teorema de Bochner (Christakos, 1992; Wackernagel, 1998). Este modelo se expresa como:

$$\begin{aligned}\underline{Z}(x) &= \sum_{k=0}^S \underline{A}_k \underline{Y}_k(x) \\ Z_i(x) &= \sum_{k=0}^S \sum_{j=1}^p a_{ij}^k Y_{jk}(x); \quad i = 1, \dots, n\end{aligned}\tag{2.9}$$

donde  $\underline{Y}_k(x) = [Y_{1k}(x), Y_{2k}(x), \dots, Y_{pk}(x)]^T$  es el vector de  $p$  funciones aleatorias estacionarias de segundo orden no correlacionadas (independientes entre sí) definidas en la escala espacial  $k$ .

La función de covarianza asociada a este modelo multivariado consiste de la suma de funciones de covarianzas anidadas.

$$\underline{C}(h) = \sum_{k=0}^S \underline{V}_k \rho_k(h)$$

donde  $k$  es el índice de  $S + 1$  estructuras anidadas a diferentes escalas con función de correlación  $\rho_k(h)$  y las matrices de corregeionalización  $\underline{V}_k$  son las matrices de covarianzas que describen la correlación multivariada a la escala  $k$ .

Una vía para determinar los coeficientes del modelo de corregeionalización lineal, a partir de un modelo multivariado de funciones de covarianzas anidadas es mediante la aplicación del método de componentes principales basado en la descomposición en valores propios de las matrices de corregeionalización  $\underline{V}_k$ .

El punto medular para poder establecer un modelo de corregeionalización lineal consiste en probar que las matrices de coeficientes  $\underline{\underline{V}}_k$  son positivas semidefinidas.

Por definición, una matriz  $\underline{\underline{V}}_k$  es positiva semidefinida (Golub y Van Loan, 1989) sí

$$\underline{\underline{b}}^T \underline{\underline{V}}_k \underline{\underline{b}} \geq 0, \quad \forall \underline{\underline{b}}.$$

donde  $\underline{\underline{b}}$  es un vector cualquiera. Cuando una matriz es positiva semidefinida sus valores propios y los determinantes de ella y de todos sus menores principales son no negativos.

Un modelo de corregeionalización lineal está dado por

$$\underline{\underline{C}}(h) = \sum_{k=0}^S \underline{\underline{V}}_k \rho_k(h) \leftrightarrow C_{ij}(h) = \sum_{k=0}^S \sigma_{ij}^k \rho_k(h), \quad (2.10)$$

en términos de las covarianzas, o equivalentemente

$$\underline{\underline{\gamma}}(h) = \sum_{k=0}^S \underline{\underline{V}}_k \gamma_k(h) \leftrightarrow \gamma_{ij}(h) = \sum_{k=0}^S \sigma_{ij}^k \gamma_k(h), \quad (2.11)$$

en términos de los semivariogramas. Y se interpreta como  $S + 1$  estructuras anidadas a diferentes escalas y las matrices de corregeionalización  $\underline{\underline{V}}_k$  son las matrices de covarianzas que describen la correlación multivariada a la escala  $k$ . Note que ha cada escala  $k$  le corresponde una estructura elemental o básica con mesetas igual a la unidad [ $\rho_k(h)$  o  $\gamma_k(h)$ ]. Si determinada estructura básica no está presente, se le hace corresponder un coeficiente cero en la matriz  $\underline{\underline{V}}_k$ .

El nombre de modelo de corregeionalización lineal se origina del hecho de que las matrices de covarianzas o semivariogramas de las ecuaciones 2.10 y 2.11 se obtienen considerando la combinación lineal de funciones aleatorias (ecuación 2.9).

Una condición suficiente para que el modelo de corregeionalización lineal sea válido

consiste en que todas las matrices de correionalización  $\underline{V}_k$  sean positivas semidefinidas.

Si  $\underline{V}_k$  es una matriz simétrica y positiva semidefinida, entonces se cumple que

$$|\sigma_{ij}^k| \leq \sqrt{\sigma_{ii}^k \sigma_{jj}^k}, \quad \forall i \neq j$$

Pero en general la proposición inversa es falsa.

No obstante en el caso de matrices de orden dos si se cumple, es decir es una condición necesaria y suficiente para que la matriz sea positiva semidefinida. Esto resulta muy útil, puesto que es muy común la modelación conjunta de sólo dos funciones aleatorias.

Un ejemplo de modelo de correionalización lineal en el caso de dos funciones aleatorias  $Z_1(x)$  y  $Z_2(x)$ , es

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11}(h) & \gamma_{12}(h) \\ \gamma_{21}(h) & \gamma_{22}(h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^0 & \sigma_{12}^0 \\ \sigma_{21}^0 & \sigma_{22}^0 \end{bmatrix} \gamma_0(h) + \dots + \begin{bmatrix} \sigma_{11}^S & \sigma_{12}^S \\ \sigma_{21}^S & \sigma_{22}^S \end{bmatrix} \gamma_S(h)$$

Para asegurar de que el modelo sea válido es suficiente probar que

$$\sigma_{11}^k > 0 \text{ y } \sigma_{22}^k > 0, \quad \forall k = 0, \dots, S.$$

$$|\sigma_{12}^k| \leq \sqrt{\sigma_{11}^k \sigma_{22}^k}, \quad \forall k = 0, \dots, S.$$

El procedimiento general para la obtención de un modelo de correionalización lineal consiste, en postular el número de estructuras y sus modelos elementales correspondientes para los cuales están definidos los rangos o alcances, y luego intentar el ajuste de las mesetas mediante prueba y error, o aplicando algún método de optimización.

El esquema general usando el método de prueba y error es el siguiente:

1. Modelar cada semivariograma simple  $\gamma_{ii}(h), i = 1, \dots, n$  y semivariograma cruzado  $\gamma_{ij}(h), i \neq j, y i, j = 1, \dots, n$  individualmente.
2. Determinar el número de estructuras anidadas  $S + 1$  de manera que sea mínimo (es deseable que sean cuanto más tres), según las condiciones siguientes:
  - a. Si  $\sigma_{ij}^k > 0$  entonces  $\sigma_{ii}^k > 0$  y  $\sigma_{jj}^k > 0$ . Es decir, si una estructura  $\gamma_k(h)$  hace contribución al modelo anidado del variograma cruzado  $\gamma_{ij}(h)$ , entonces debe contribuir también en el modelo de los semivariogramas simples  $\gamma_{ii}(h)$  y  $\gamma_{jj}(h)$ . Lo contrario es falso.
  - b. Si  $\sigma_{ii}^k > 0$  y  $\sigma_{jj}^k > 0$  no implica nada sobre  $\sigma_{ij}^k$ . Es decir, si una estructura  $\gamma_k(h)$  hace contribución a los modelos anidados de los semivariogramas simples  $\gamma_{ii}(h)$  y  $\gamma_{jj}(h)$ , dicha estructura puede contribuir o no en el modelo anidado del variograma cruzado  $\gamma_{ij}(h)$ .
  - c. Si  $\sigma_{ii}^k = 0$ , entonces  $\sigma_{ij}^k = 0, \forall j = 1, \dots, n$  Es decir, si una estructura  $\gamma_k(h)$  no contribuye en el modelo anidado del variograma simple  $\gamma_{ii}(h)$ , entonces dicha estructura no puede contribuir en ninguno de los modelos anidados de los semivariogramas cruzados  $\gamma_{ij}(h)$  que involucran a la componente  $i$ .
3. Comprobar que todos los determinantes de los menores de orden dos son no negativos.

Verificar que todas las matrices de correogionalización  $\underline{V}_k$  sean positivas semidefinidas, en caso contrario hacer los cambios necesarios hasta satisfacer la condición o volver al paso 2 (Díaz-Viera, 2002).

### 2.3.2 Cokrigado

El cokrigado o krigado de funciones aleatorias correlacionadas es la extensión del

krigeado. Mientras que en el krigado los coeficientes del estimador lineal se determinan teniendo en cuenta la correlación espacial, el método de cokrigado utiliza tanto la correlación espacial como la correlación entre las distintas variables.

Entre las dificultades prácticas del cokrigado cabe mencionar la falta de modelos tipo para representar la covarianza o el semivariograma entre variables. Usando el método lineal, la varianza de estimación con cokrigado no es menor que la varianza obtenida con el krigado por separado de cada una de las variables a excepción de las dos aplicaciones siguientes: detección de errores de muestreo y estimación de una variable a partir de otras muestreadas más intensamente. Otra dificultad asociada con el cokrigado es su mayor complicación de notación comparada con la requerida por el krigado.

Dadas  $m$  funciones aleatorias  $Z_1(x), Z_2(x), \dots, Z_m(x)$  muestreadas en  $N$  puntos  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , el cokrigado puede servir para resolver los siguientes problemas:

- a) Diferente intensidad de muestreo. Supóngase por ejemplo que todas las variables han sido muestreadas en todos los puntos a excepción de  $Z_1$  que no ha sido muestreada en  $x_1$ . En estas condiciones, el problema que se plantea es la estimación de  $Z_1(x_1)$  como una combinación lineal del tipo:

$$Z_1^*(x_1) = \sum_{i=2}^N \lambda_{i1} Z_1(x_i) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=2}^m \lambda_{ij} Z_j(x_i)$$

donde los coeficientes  $\lambda_{ij}$  se determinan según el método convencional en krigado de imponer que el error de estimación sea insesgado y de varianza mínima.

- b) Estimación de errores de medición  $\varepsilon(x)$ . Para una función aleatoria  $Z(x)$  cuyos valores medidos son  $Z_0(x)$ , se supone que  $Z(x) = Z_0(x) + \varepsilon(x)$ . Los errores de medición  $\varepsilon(x)$  se suponen: (a) independientes de  $Z_0(x)$ ; (b) de media nula  $E[\varepsilon(x)] = 0$ ; y (c) no correlacionados espacialmente. Puesto que  $Z(x)$  y  $Z_0(x)$  son dos variables dependientes se puede plantear el problema

de estimar  $Z(x)$  a partir de  $Z_0(x)$ .

- c) Estimación conjunta de  $m$  variables. Dados los valores de las  $m$  variables en  $n$  puntos, se quiere estimar  $Z_1(x), Z_2(x), \dots, Z_m(x)$  en un punto no muestreado empleando para ello todos los datos disponibles  $Z_j(x_k), j = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, N$ .

### 2.3.3 Validación del modelo de semivariograma cruzado

El método convencional de validación del semivariograma cruzado  $\gamma_{ij}(h)$  en el caso de dos variables consiste en estimar por cokrigado los valores de  $Z_i(x)$  y  $Z_j(x)$  en los puntos muestrales usando el procedimiento de *leave one out*. Con los valores estimados obtenidos  $Z_i^*(x), Z_j^*(x)$  y sus correspondientes varianzas de la estimación  $\sigma_i^2, \sigma_j^2$  se calculan los criterios convencionales de la validación cruzada para una variable (error medio, error cuadrático medio, entre otros) (Díaz-Viera, 2002).

### 2.3.4 Transformación de la variable, Ln mm a mm

Como ya se menciona con anterioridad, el krigado es óptimo cuando  $Z$  tiene una distribución normal. Sin embargo, su optimalidad se puede degradar considerablemente al tratar otros tipos de distribuciones, especialmente en el caso de distribuciones muy sesgadas. Para superar esta limitación es conveniente realizar una transformación sobre  $Z$  de forma que siga una distribución normal.

Los estimadores asociados a la distribución normal suelen ser bastante robustos, en el sentido de que sus propiedades de optimalidad no se ven fuertemente alteradas por el hecho de que la distribución real de la variable sea ligeramente distinta de la normal. Por ello, y desde una perspectiva puramente práctica, puede ser conveniente buscar expresiones sencillas que transformen  $Z$  en una variable aproximadamente normal.



Lo que debe tenerse presente es que  $E(Z)$  no es igual a  $f^{-1}(E(Y))$ .

El caso particular más frecuente de esta metodología es el de la distribución logarítmico-normal. Si  $Z$  sigue una distribución log-normal, entonces  $Y = \log(Z)$  seguirá una distribución normal. De hecho, es posible relacionar la media y función de covarianza de  $Z$  con las de  $Y$  mediante las expresiones de Sichel:

$$m_Z = e^{m_Y + \frac{1}{2}\sigma_Y^2} \quad (2.12)$$

$$\sigma_Z^2 = \text{Var}(Z) = m_Z^2(e^{\sigma_Y^2} - 1). \quad (2.13)$$

### 2.3.5 Cálculo de la precipitación-escurrimiento

El cálculo de precipitación-escurrimiento se realizó de la siguiente manera: 1) cálculo del área, 2) clasificación del área, en zona urbana y no urbana, 3) asignación del coeficiente de escurrimiento por zona, 4) estimación del promedio de la altura de precipitación por área, obtenida del krigado y cokrigado, 5) cálculo del volumen de precipitación, estimado por krigado y cokrigado, y 6) cálculo del volumen de escurrimiento, por krigado y cokrigado. A continuación se dan los detalles del cálculo asociados con cada uno de estos puntos:

- 1) Se obtuvo el dato del área de cada una de las 16 delegaciones que conforman al DF del estudio del SACM (2005). 13 de ellas están cubiertas al 100% en la zona estimada, tres están cubiertas parcialmente, Xochimilco (94%), Milpa Alta (10%) y Tlalpan (45%), localizadas en la parte sur de la zona de estudio (Figura 3.21).
- 2) Se tomó la clasificación del área, en zona urbana y no urbana, calculada en el estudio antes mencionado. En las tres delegaciones que no se cubren al cien por ciento, se le aplicó el factor correspondiente a zona urbana y no urbana en cada delegación.
- 3) El coeficiente de escurrimiento para zona urbana se asignó de 0.60 y para zona no urbana de 0.20. Para el coeficiente de 0.60 consideraron las posibles variaciones

debidas a los desarrollos habitacionales, vialidades y banquetas, así como las llamadas áreas verdes. Para el coeficiente de 0.20 consideraron generalmente áreas agrícola y forestal (SACM, 2005).

- 4) La estimación del promedio de la altura de precipitación se realizó, graficando las isolíneas de precipitación obtenidas con el krigado y las obtenidas por el cokrigado; calculando el promedio aritmético (precipitación mínima más precipitación máxima dividida entre dos) presentado en cada delegación. Obteniendo dos valores de altura de precipitación (hp), el hp del krigado y el hp del cokrigado.
- 5) Se calculó el volumen de precipitación, multiplicando el área por la altura de precipitación (para cada delegación), para el krigado y cokrigado.
- 6) El cálculo del volumen de escurrimiento, resulta de la multiplicación del coeficiente de escurrimiento por el volumen de precipitación; obteniendo un valor por cada delegación, tanto en el krigado como en el cokrigado.

### 3. ANÁLISIS GEOESTADÍSTICO DE LLUVIA POR PLUVIÓGRAFOS Y RADAR

El método propuesto se aplicó a la estimación de lluvia en el Distrito Federal (DF). La zona de estudio se escogió porque es la región más densamente monitoreada por pluviógrafos en el país y se tienen productos de radar que cubren toda el área de estudio. Por otro lado, las tormentas que se presentan en el DF son en su mayoría convectivas, caracterizadas por una alta variabilidad espacial y temporal, lo que hace que esta sea una zona interesante para probar la potencialidad del método.

El área de estudio está ubicada al Norte  $19^{\circ}36'$ , al Sur  $19^{\circ}03'$  de latitud Norte; al Este  $98^{\circ}57'$ , al Oeste  $99^{\circ}22'$  de longitud Oeste, con una superficie de  $2,400 \text{ km}^2$ . Se tiene una red pluviográfica de 61 elementos que se muestran en la Figura 3.1. La metodología se aplicó a dos tormentas, una ocurrida el 15 de julio y la otra el 16 de julio, ambas del año 1997.

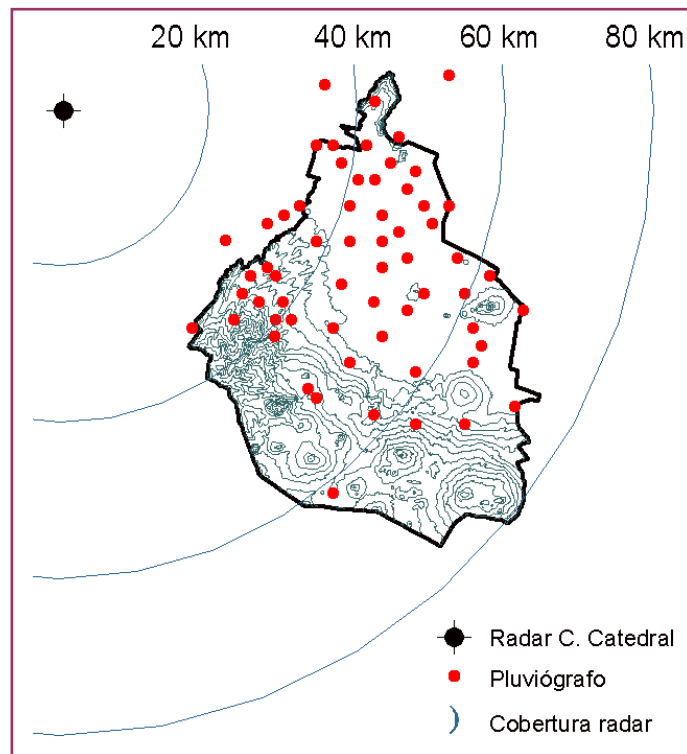


Figura 3.1 Ubicación y cobertura del radar Cerro de la Catedral y ubicación de los pluviógrafos

La tormenta ocurrida el 15 de julio de 1997 se llamará tormenta 1. Cuenta con 50 datos de

pluviógrafos, teniendo una densidad media de 48 km<sup>2</sup> por pluviógrafo. Los productos de radar tienen las siguientes características, resolución de 1x1 km y una cobertura de 120 km de radio. La segunda tormenta cuenta con 40 datos, dando una densidad de 60 km<sup>2</sup> por pluviógrafo, esta tormenta ocurrió el 16 de julio del mismo año.

El análisis de la situación meteorológica imperante durante los días 15 y 16 de julio, indica la presencia de un sistema de alta presión en altura en el noreste del país, de vientos del este a niveles medios de la troposfera: mientras que en superficie se tenía la presencia de una línea de vaguada (zona de baja presión) en el centro del país. Esta configuración sinóptica provoca una fuerte convergencia en superficie y divergencia en altura, favoreciendo la formación de tormentas convectivas intensas en el centro del país. Por otro lado, los vientos del este a niveles medios influyeron tanto en la trayectoria de las tormentas como en su formación por la tarde en las zonas montañosas aledañas al valle de México y por la noche en el valle mismo.

La tormenta del 15 de julio, localizada en las faldas de la sierra Chichinautzin, está también relacionada a un sistema convectivo de mesoescala meso-beta, el cual tiene un tamaño entre 20 y 200 km, que se movió al oeste a lo largo de la cuenca del río Balsas. Por otro lado, la tormenta del 16 de julio, localizada en el norte del Distrito Federal está más relacionada a la interacción de la línea de vaguada con tormentas convectivas formadas en su cercanía.

La metodología que se siguió fue la siguiente: 1) se realizó un análisis exploratorio de los datos, 2) se hizo un análisis estructural, donde se caracterizó la muestra por medio de un semivariograma experimental, 3) se modeló este semivariograma, 4) se realizó un modelo de correogionalización, 5) se realizaron las estimaciones simples, 6) se hizo un cokrigado o un krigado conjunto, 7) se validaron los modelos simples y conjuntos, 8) transformación de variables, Ln mm a mm y 9) cálculo de la precipitación-escurrencia. El análisis realizado en cada punto se hizo de acuerdo con la teoría expuesta en el capítulo 2.

### ***3.1 Preprocesamiento de datos de lluvia de pluviógrafos y radar***

Los datos de pluviógrafos utilizados pertenecen a la red pluviográfica del Sistema de Aguas de la Ciudad de México, integrada por 61 elementos, los cuales reportan, vía radio, cada minuto

la lluvia acumulada en ese intervalo a una computadora central.

Los productos de radar utilizados fueron registrados en el radar del Cerro Catedral, localizado en el km. 34 de la carretera Ixtlahuaca–Naucalpan parte alta del Cerro Catedral, Estado de México. Entendiéndose como producto el despliegue en pantalla o impresión que muestra las mediciones que el radar realiza, de 8 bits de 240 x 240 km con resolución de 1 km en la presentación pseudo-CAPPI (para cada posición se almacena el valor de reflectividad del eco más bajo disponible, este es el producto que idealmente debería representar mejor a la lluvia efectiva ocurrida sobre tierra) a 2 km de altura sobre el sitio de radar y se obtienen cada 15 minutos. Para que se haga una estimación precisa de la lluvia se necesita que las imágenes estén libres de ecos falsos, como antenas de comunicación, etc.

Es muy común que para barridos con ángulos de elevación bajos, el haz de un radar sea interceptado por algún obstáculo fijo sobre el terreno, generalmente parte del relieve topográfico. Aquí la energía ya no se propaga más allá del obstáculo y el radar recibe un eco sumamente intenso, el cual se puede confundir con una tormenta que se apreciaría muy intensa; es importante conocer la orografía alrededor de la ubicación del radar para interpretar adecuadamente productos extraños en apariencia.

Para evitar errores en la interpretación de los productos se debe contar con mapas topográficos de la zona alrededor del radar, cuando menos hasta dos veces el alcance nominal en dirección radial; y con un diagrama del ángulo de elevación en que se presentan bloqueos orográficos para los 360° en azimut.

Los radares de marca Ericsson (marca del radar del Cerro Catedral) cuentan actualmente con equipo y paquetes de computación para proporcionar productos libres de ecos, mediante la utilización de los filtros como el MTI (Moving Target Indicator) que discrimina los ecos estacionarios de los móviles, STC (Sensitivity Time Control) que discrimina ecos muy cercanos al radar y de ecos de segundo viaje (second-trip echoes) que discrimina ecos más allá de la distancia máxima del radar que aparecen como si estuvieran cerca de él.

Una vez obtenidos los datos de radar y pluviógrafos, se calcula la lluvia acumulada en una hora. En el caso del radar se utilizó la relación  $Z - R$  del tipo  $Z = 300R^{1.4}$ , que se usa en los radares de Estados Unidos, para transformar de reflectividad del radar  $dBZ$  en intensidad de lluvia ( $mm/h$ ); aunque se puede usar cualquier relación  $Z - R$  como la Marshall–Palmer ( $Z = 200R^{1.6}$ ), ya que en este caso no es tan importante que relación  $Z - R$  se usa, porque la estimación de lluvia del radar es ajustada por los pluviógrafos.

Para cada sitio donde están ubicados los pluviógrafos del Sistema de Aguas del Distrito Federal se encuentra la intensidad de lluvia ( $mm/h$ ) en los nueve píxeles circundantes de la imagen de radar, que incluye el píxel donde está situado el pluviógrafo y los ocho píxeles a su alrededor.

Debido a que las imágenes de radar se obtienen cada 15 minutos, para una hora se puede contar hasta con cuatro imágenes. Para obtener la lluvia acumulada horaria se multiplican las estimaciones de lluvia de los nueve píxeles circundantes de cada una de las cuatro imágenes en una cierta hora por 0.25. En caso de que, debido a la corta vida de las tormentas, no se cuente con las cuatro que se requieren en una hora no se realiza el cálculo. Esta información se almacena en un archivo de computadora que contiene 61 líneas por imagen de radar (cada 15 minutos) donde cada línea corresponde a un cierto pluviógrafo del Sistema de Aguas de la Ciudad de México e incluye el número de pluviógrafo, el mes, día y hora de la imagen de radar en hora de Greenwich u hora  $Z$ , la longitud y latitud donde está ubicado el pluviógrafo y la lluvia acumulada horaria para cada uno de los nueve píxeles circundantes. Cabe resaltar que el valor mínimo que registra un pluviógrafo de balancín es de 0.25 mm (Rosengaus, 2000; Aparicio, 1997).

Para el control de la calidad de los datos, se utilizó el criterio conocido como *best match*, el cual consiste en seleccionar de entre los nueve píxeles más cercanos al pluviógrafo, el que tenga el dato más parecido al dato del pluviógrafo. La justificación para utilizar este criterio es la incertidumbre en la posición del pluviógrafo en el que cae la lluvia medida por el radar, debido a la acción del viento.

## 3.2 *Análisis tormenta 1*

### 3.2.1 **Análisis exploratorio de los datos**

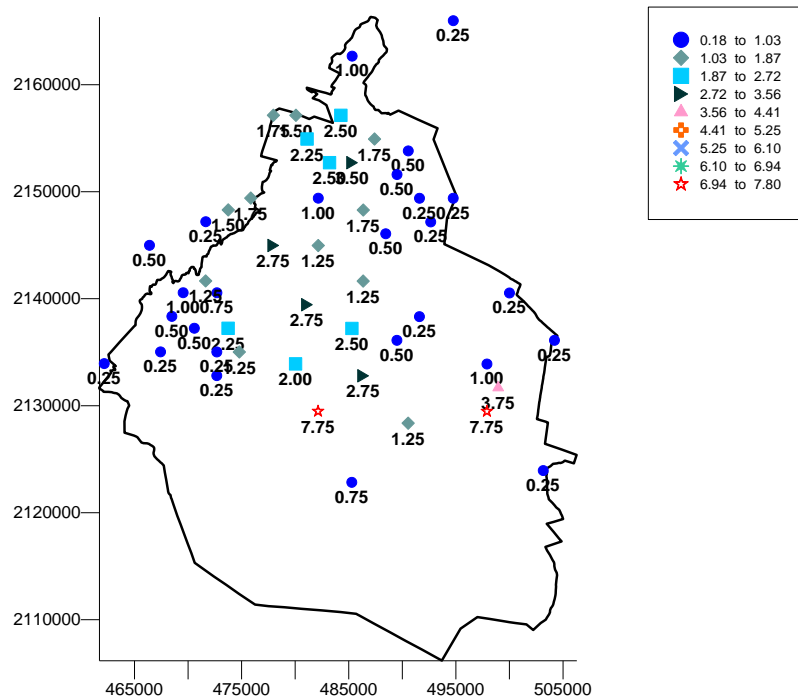
Se realizó el análisis exploratorio para la tormenta, se inició con la determinación de la posición y magnitud de los valores de los datos, posteriormente se realizó un análisis estadístico y se obtuvieron el valor medio, la mediana, la desviación estándar, varianza, el coeficiente de asimetría y la curtosis de la tormenta. También se verificó que la distribución de la muestra fuera aproximadamente normal. Dado que los datos no muestran una distribución normal, se procedió a hacer una transformación logarítmica de los datos, logrando con ello que los datos asemejaran más una distribución normal. Ya que la mayoría de los métodos geoestadísticos sólo son óptimos si la variable  $Z$  sigue una distribución normal, además, por sus propiedades están a favor de su uso en aproximaciones teóricas de la estimación (Isaaks y Srivastava, 1989). Como recomiendan Samper y Carrera (1990) y Kitanidis (1997), dado que los coeficientes de asimetría y de curtosis de la muestra no indican una distribución normal, se realizó una transformación de variables. En este caso bastó con tomar  $Y = \ln Z$  para que los coeficientes de asimetría y de curtosis de la muestra dieran valores aceptables.

Recordando, que el coeficiente de asimetría de una distribución caracteriza el grado de asimetría de una distribución con respecto a su media. La asimetría positiva indica una distribución con respecto a su media. La asimetría positiva indica una distribución unilateral que se extiende hacia valores más positivos. La asimetría negativa indica una distribución unilateral que se extiende hacia valores más negativos. La curtosis caracteriza la elevación o el achatamiento relativo de una distribución, comparada con la distribución normal. Una curtosis positiva indica una distribución elevada, mientras que una curtosis negativa indica una distribución relativamente plana. Se realizó una comparación de las distribuciones, diagramas de dispersión y análisis de correlación, para el análisis de grupos de datos.

#### 3.2.1.1 *Posición y magnitud de los datos*

Se tienen 50 pares de datos de pluviógrafos, los cuales están distribuidos de una manera muy

regular en la parte central y norte de la zona de estudio, y de manera menos densa hacia la parte sur. En la Figura 3.2 se aprecia que hay dos valores máximos que están marcados con el símbolo de una estrella en color rojo, ambos con mediciones de 7.75 mm.



**Figura 3.2** Posición y magnitud de los datos de pluviógrafo, tormenta 1

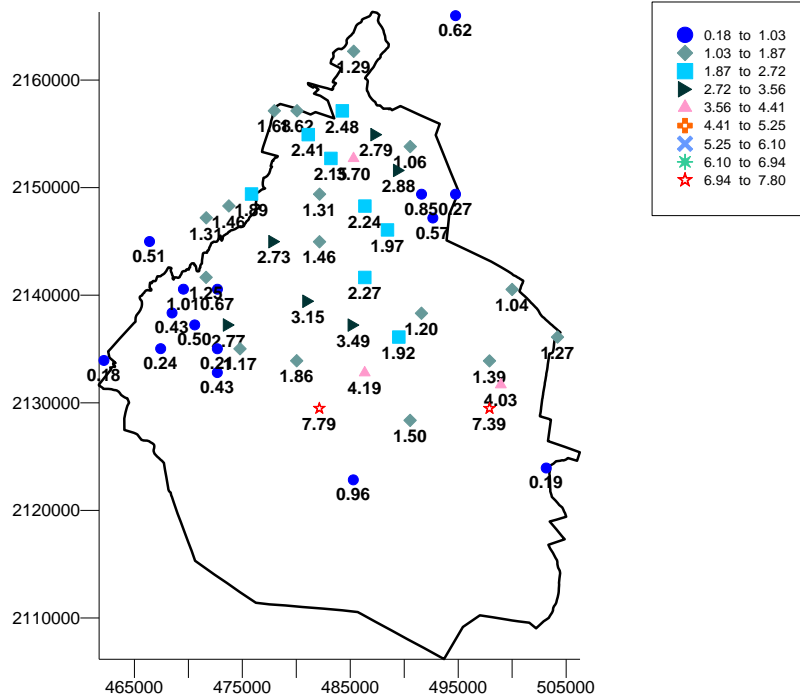
Para realizar el análisis exploratorio y estructural bivariados es necesario que la posición de ambas variables coincida. Por este motivo se escogieron los datos de acuerdo al criterio de *best match*, descrito en el subcapítulo anterior, con el que se escogió el valor del dato de radar más parecido al valor del dato del pluviógrafo en los nueve píxeles circundantes. El rango de valores de los datos de pluviógrafo es similar a la de los datos de radar, ya que los valores mínimo y máximo del pluviógrafo son de 0.25 mm y de 7.75 mm, respectivamente, y el mínimo del radar es de 0.18 mm y el máximo de 7.79 mm. Al hacer la comparación entre estos dos grupos de datos es importante recordar que los datos del pluviógrafo son múltiplos de 0.25 mm de precipitación, debido a que así opera el mecanismo del pluviógrafo, a diferencia del radar que puede ser cualquier valor.



En la Figura 3.2 se muestran las posiciones y magnitudes de los datos del pluviógrafo, divididos en nueve clases. Podemos observar que en las mediciones del pluviógrafo hay un número muy grande de valores pequeños. En la primera clase hay 26 elementos agrupados en tres valores diferentes, de éstos, 13 son valores de 0.25 mm. El número de datos en las clases van disminuyendo, en la segunda clase hay 11, en la tercera seis, en la cuarta cuatro, y en la quinta uno. En las clases sexta, séptima y octava no hay datos. En el último intervalo de clase hay dos valores, que son muy altos en comparación del resto de la muestra, ambos miden 7.75 mm y están ubicados en la parte sur de la zona.

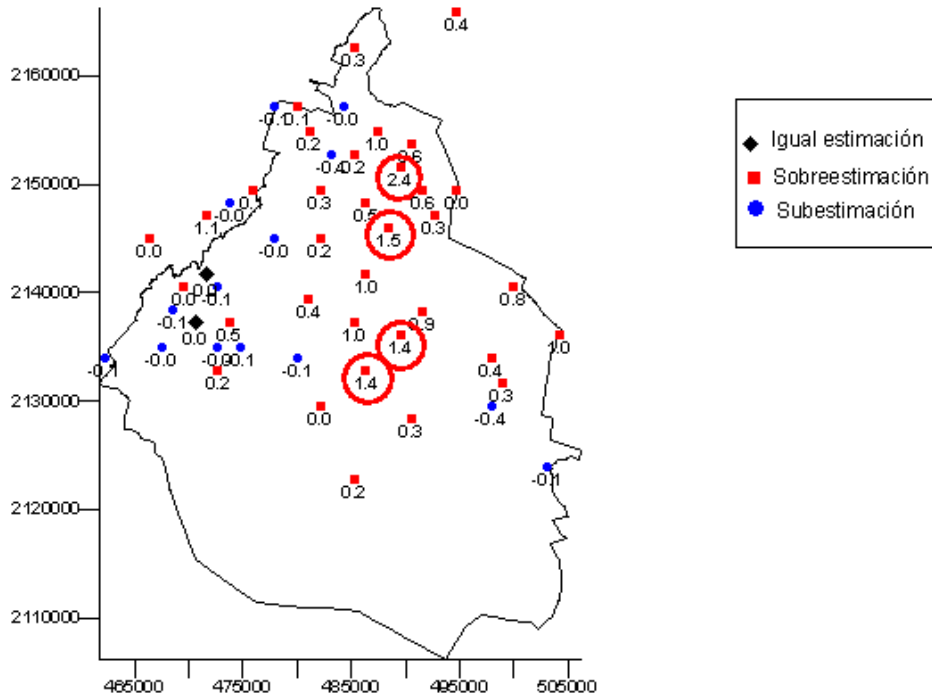
En la Figura 3.3, en la que se están utilizando el mismo número de clases que en la del pluviógrafo, se aprecia que existe una diversidad más grande de valores en la muestra del radar. En este caso sólo se tienen 15 valores que caen dentro del primer intervalo, y al igual que las clases del pluviógrafo los valores agrupados decrecen. En el segundo intervalo hay 16, en el tercero hay ocho, en el cuarto son seis, en el quinto son tres. También se tienen tres intervalos o clases sin datos, las cuales son la sexta, séptima y octava. En el último se encuentran alojados los valores más altos de la muestra del radar estos son semejantes a los valores más altos del pluviógrafo, de 7.79 y 7.39 mm, y están ubicados en las mismas posiciones que los del radar.

Comparando la Figura 3.2 y Figura 3.3, se aprecia que los valores pequeños (menores de 1.08 mm) se agrupan de igual manera en el lado oeste de la zona de estudio. En general ambas muestras tienen una distribución espacial parecida en sus valores más pequeños y en los más altos; sin embargo, en el pluviógrafo abundan los datos de menor valor de precipitación. Los valores tienen una distribución muy semejante, especialmente en los valores más altos. En los datos de pluviógrafos el valor tiende a ser más pequeño, y repetirse más, esto se justifica debido a que el instrumento tiene una escala de medición más limitada, comparada con la amplia gama de discretización de los datos obtenidos por un radar, dando como resultado una discrepancia en la escala inferior de valores en comparación con los datos obtenidos por el pluviógrafo.



**Figura 3.3** Posición y magnitud de los datos de radar, tormenta 1

En la Figura 3.4 se muestra una comparación visual de las mediciones de lluvia del radar y del pluviógrafo. El radar está sobreestimando de manera considerable en los puntos encerrados con un círculo rojo. En general el radar está sobreestimando en 34 posiciones, subestimando en 14 posiciones y midiendo igual que el pluviógrafo únicamente en dos posiciones. Poniéndolo en porcentajes el número de posiciones en las que el radar sobreestima es de 68%, en las que subestima es de 28% y sólo en el 4% de las posiciones la medición es igual en ambos sensores.



**Figura 3.4** Diferencias de mediciones de radar y pluviógrafo (radar-pluviógrafo), tormenta 1

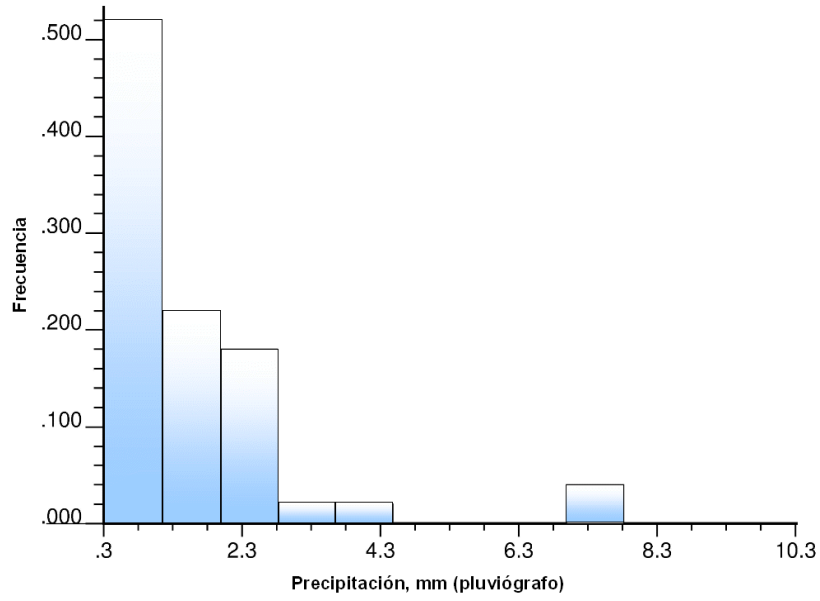
### 3.2.1.2 Análisis estadístico

En la Tabla 3.1 se presentan los estadísticos obtenidos en el análisis exploratorio y, en la Figura 3.5 y Figura 3.7 se presentan los histogramas de los datos de los pluviógrafos y el radar. Se aprecia que para los datos de pluviógrafo existe asimetría en la distribución y el coeficiente de curtosis es positivo, lo cual indica que la distribución de la muestra es leptocúrtica y no tiene una distribución normal. Para los datos del radar la distribución de la muestra es planicúrtica y tampoco tiene una distribución normal, debido a que hay asimetría y su coeficiente de curtosis es negativo. Por lo tanto, se procedió a realizar una transformación logarítmica a ambas muestras, el resultado lo vemos en la Tabla 3.1 y, en la Figura 3.6 y Figura 3.8. En las gráficas se puede observar una distribución más simétrica y, por otro lado, la media y mediana se parecen más, y la varianza, la asimetría y la curtosis disminuyen, por lo tanto, los datos transformados con logaritmo natural tienen una forma más parecida a la normal. En el caso de la asimetría para los datos transformados del pluviógrafo, es más cercana a cero, aunque los del radar se alejan un poco de este valor. Los cálculos posteriores se

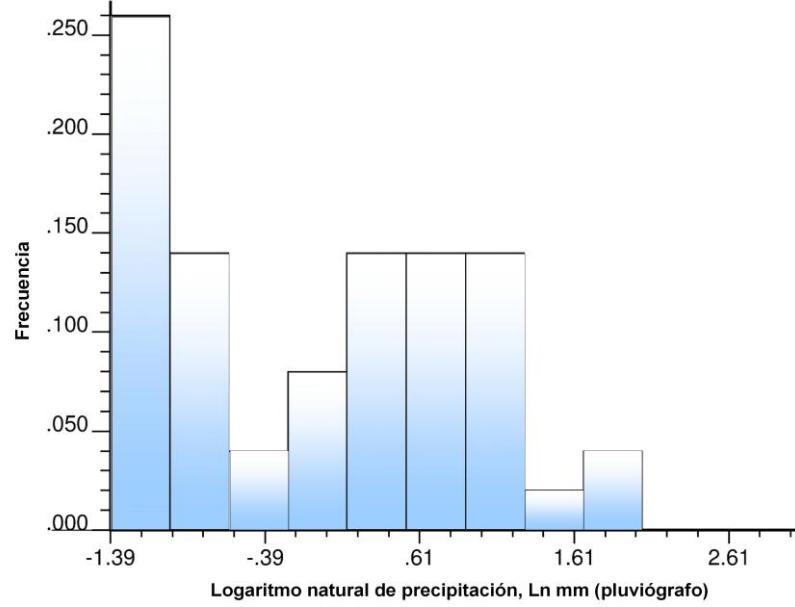
realizaron con los datos transformados con el logaritmo natural. Se realizaron dos análisis estadísticos previos a la transformación, uno sin valores atípicos y el otro sin transformar los datos, teniendo como resultado que no mejoraban lo obtenido en el análisis que se presenta en la tesis. También se realizó un análisis de tendencia que consistió en analizar semivariogramas adireccionales, como se mencionó en el capítulo 2, cuando éstos muestran un crecimiento igual o más rápido que una función cuadrática es un indicador de la posible presencia de tendencia. En este caso se encuentran acotados a un nivel aproximado a las varianzas totales de la muestra, por lo que se consideró que no había una tendencia significativa en los datos. El análisis de existencia de anisotropía geométrica, indica que la muestra no presenta un comportamiento anisotrópico significativo, ya que los alcances de los semivariogramas direccionales no son significativamente diferentes.

**Tabla 3.1 Resumen del análisis estadístico, tormenta 1**

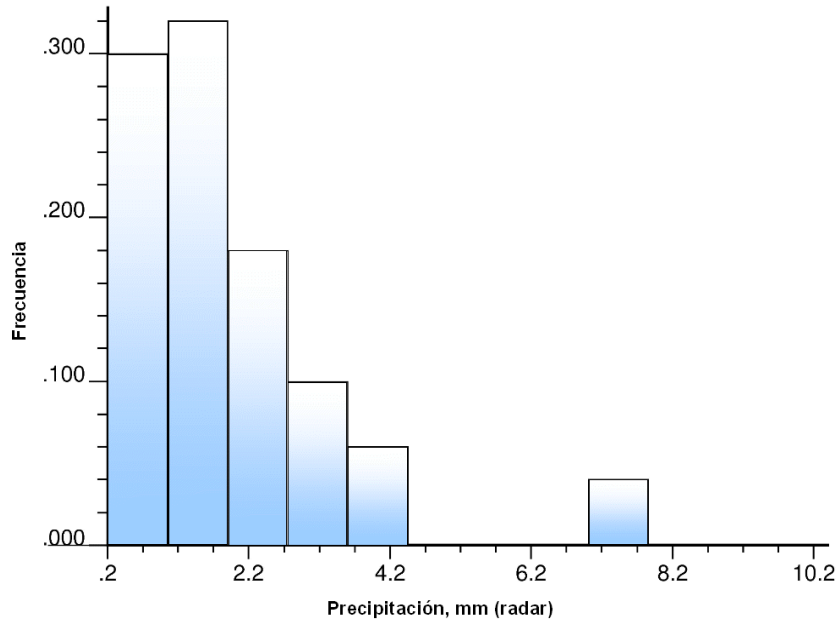
Estadístico Tormenta 1	Pluviógrafo (mm)	Logaritmo natural de los datos	
		de pluviógrafo (Ln mm)	de radar (Ln mm)
Media	1.47	1.83	-0.09
Mediana	1.00	1.42	0.00
Valor mínimo	0.25	-1.39	0.18
Valor máximo	7.75	2.05	7.79
Desviación estándar	1.59	1.56	0.99
Varianza	2.57	2.47	1.00
Coficiente de asimetría	2.55	2.09	0.12
Curtosis	7.94	5.66	-0.96



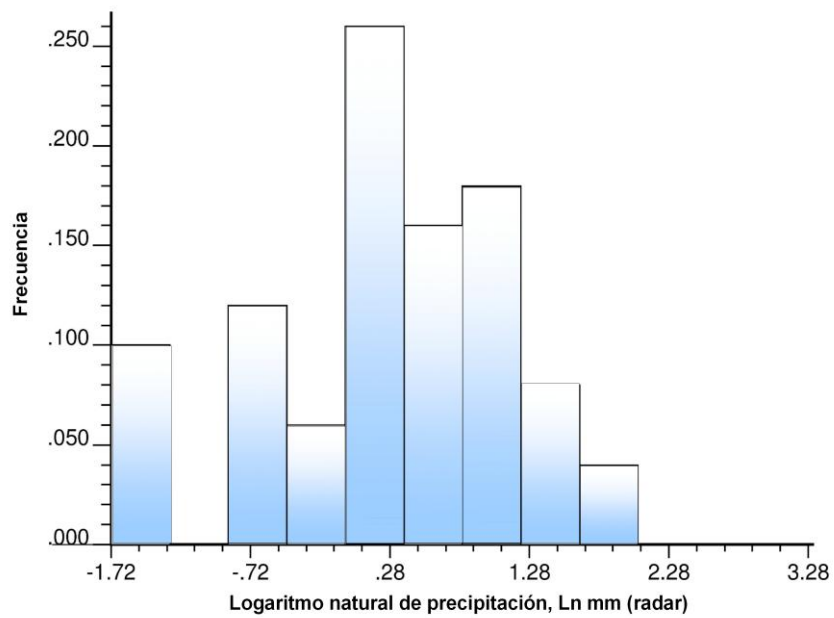
**Figura 3.5** Histograma de los datos de pluviógrafo, tormenta 1



**Figura 3.6** Histograma del Ln de los datos de pluviógrafo, tormenta 1



**Figura 3.7** Histograma de los datos de radar, tormenta 1



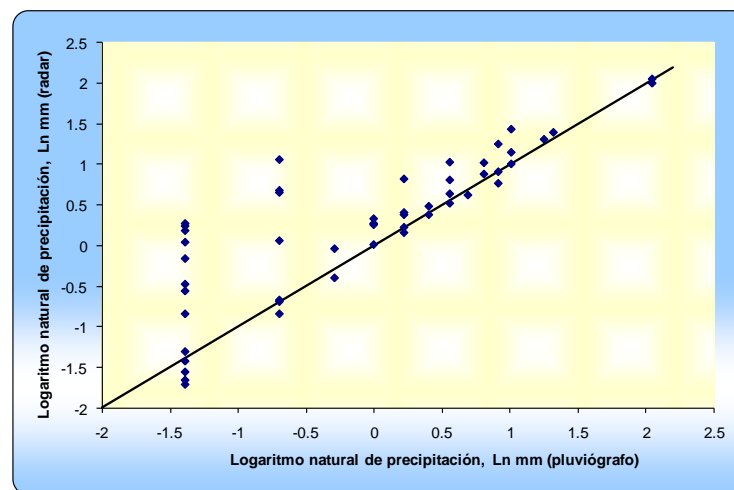
**Figura 3.8** Histograma del Ln de los datos de radar, tormenta 1

### 3.2.1.3 Diagrama de dispersión

El análisis estadístico conjunto consistió en verificar la existencia o no de correlación entre las dos variables regionalizadas. En la Figura 3.9 se presenta el diagrama de dispersión del

pluviógrafo contra radar. Se observa que, para valores pequeños la dispersión es alta y tiene poca correlación, en la figura esto se aprecia claramente. Esto ya se había notado en el análisis espacial de ambas muestras, en la sección anterior, en esta representación se ve de manera muy clara el gran número de puntos con sobreestimación de precipitación. El centro está menos disperso y su correlación es más alta. Este comportamiento es generado por las características de operación del pluviógrafo, ya que este marca la medición en intervalos de 0.25 mm, como ya se mencionó con anterioridad, produciendo una acumulación de datos en los intervalos de 0.25 y 0.50 mm, en los cuales los valores medidos por el radar oscilan entre esos dos intervalos. Si se retiran los 20 valores en esos intervalos, el coeficiente de correlación sería de 0.95, el cual es mejor que dejando los 50 pares de datos, pero empobrecemos la muestra y el análisis posterior no presenta buenos resultados, como se verá en el análisis realizado a una segunda tormenta.

El coeficiente de correlación ( $r$ ) utilizando los 50 pares de datos es de 0.826 el cual es bueno. Si la correlación hubiese sido pobre entre las variables, no tendría caso hacer la estimación conjunta, dado que la variable secundaria, que en este caso es el radar, no aportaría información significativa en la estimación.



**Figura 3.9**      **Dispersión de pluviógrafo contra radar, tormenta 1**

### 3.2.2 Análisis estructural

En esta sección se presenta el análisis estructural univariado y bivariado.

El análisis univariado consistió en obtener el semivariograma experimental de cada uno de los parámetros y el ajuste de un modelo teórico de semivariograma a prueba y error, utilizando el criterio de información de Akaike, como se explicó en el capítulo 2.

Para el análisis bivariado se utilizó un modelo de correogionalización lineal (la explicación de la teoría sobre este punto se presentó en el capítulo 2), el procedimiento consistió en postular el número de estructuras y sus modelos elementales correspondientes para los cuales están definidos los rangos o alcances, y luego ajustar las mesetas.

En la Tabla 3.2 se resumen los parámetros de los modelos de los semivariogramas ajustados de la tormenta 1, el simple para el pluviógrafo, el simple para el radar y el cruzado. Se tomaron los modelos que tuvieran un criterio de información de Akaike pequeño. Tienen el mismo alcance (20,000 m) y tipo de modelo ajustado (esférico), estos dos últimos requisitos para que cumpla con la condición de ser un modelo de correogionalización positivo semidefinido.

Semivariograma, Tormenta 1	Pepita (Ln mm)	Meseta-Pepita (Ln mm)	Alcance (m)	CIA
Ln pluviógrafo (simple)	0.20	0.95	20,000	-155.28
Ln radar (simple)	0.15	0.67	20,000	-180.99
Ln pluviógrafo- Ln radar (cruzado)	0.12	0.70	20,000	-191.13

CIA.- Criterio de Información de Akaike.

En la Figura 3.10, Figura 3.11 y Figura 3.12 se aprecian los semivariogramas experimentales con línea continua y su modelo ajustado con línea segmentada. Estos tienen un buen ajuste, por lo que describen bien al semivariograma experimental.



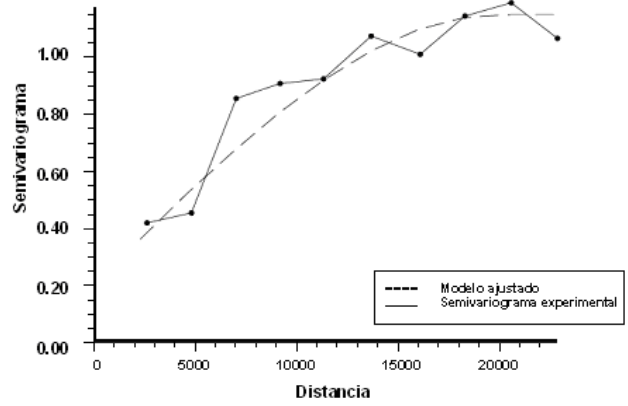


Figura 3.10 Semivariogramas experimental y teórico del Ln de los datos de pluviógrafo, tormenta 1

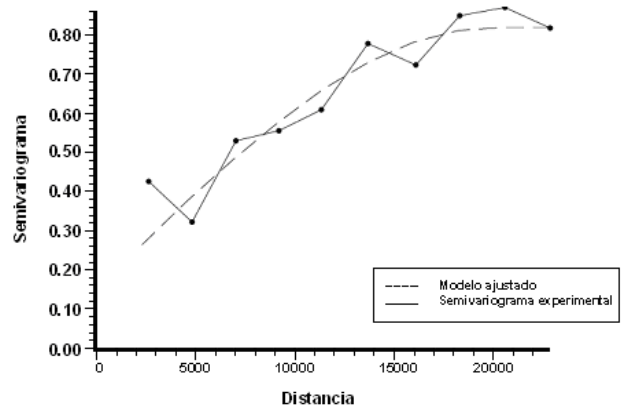


Figura 3.11 Semivariogramas experimental y teórico del Ln de los datos de radar, tormenta 1

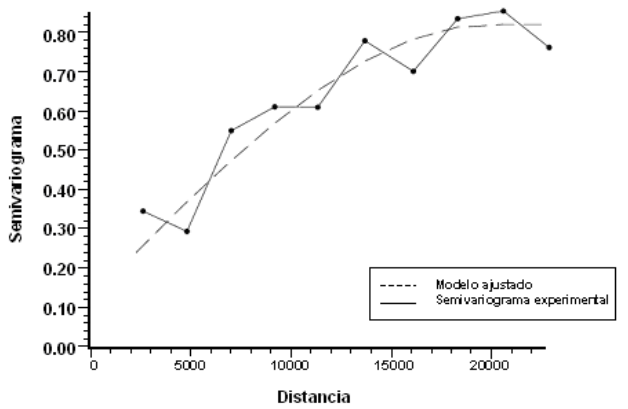


Figura 3.12 Semivariogramas cruzados, tormenta 1

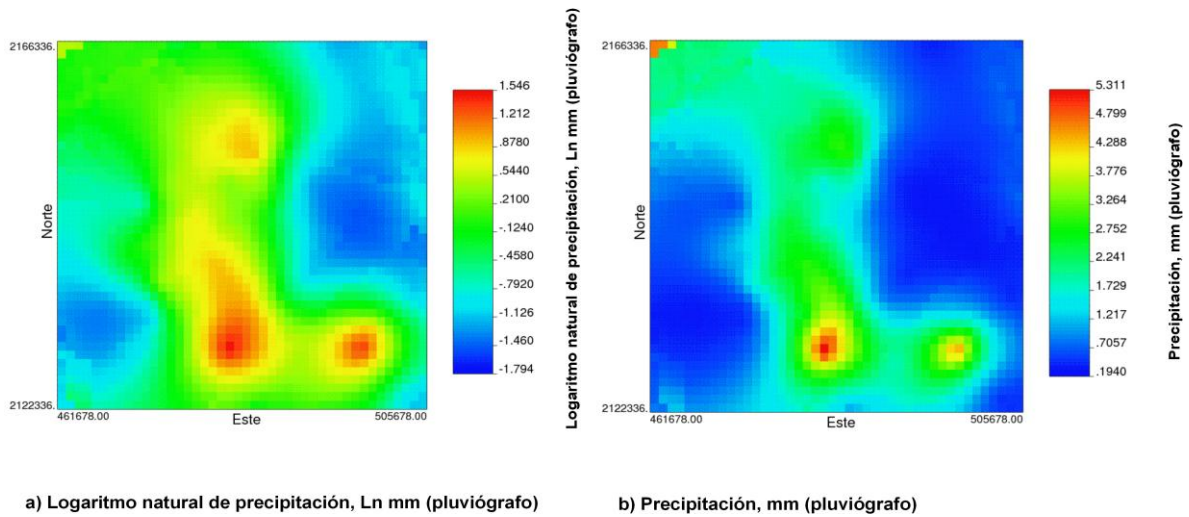
### 3.2.3 Estimación espacial

La estimación espacial se hizo sobre una malla con celdas de 1x1 km. En el caso univariado como se mencionó antes se estimó con kriging ordinario y se utilizaron los 50 datos del logaritmo natural de pluviógrafo. Para la estimación conjunta con cokriging ordinario, se utilizaron los 50 datos del logaritmo natural de pluviógrafo, en las celdas que contaban con datos de pluviógrafo se utilizaron el logaritmo natural de los datos de radar que coincidieran con el criterio de *best match* y en el resto de las posiciones el dato válido de la malla del radar.

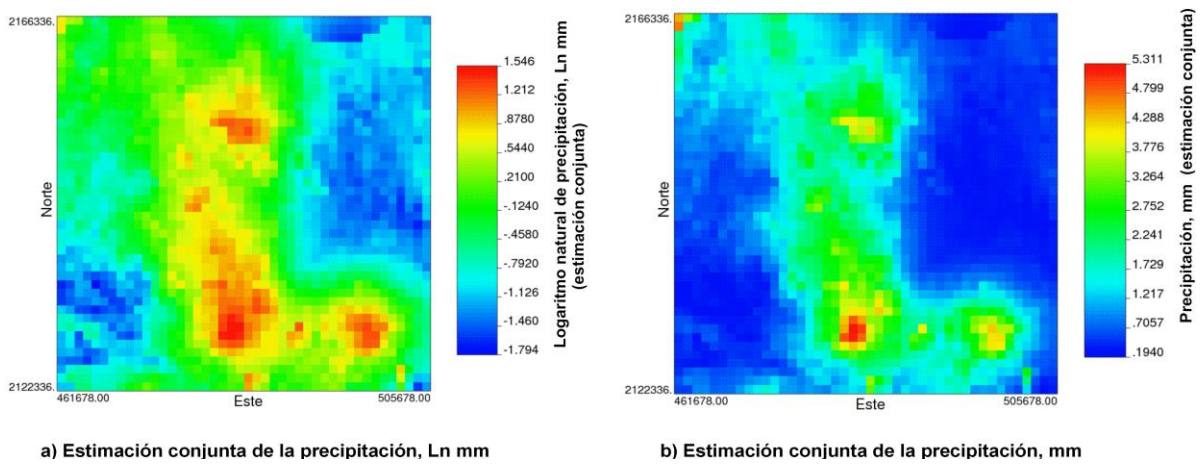
Los resultados de la estimación espacial se muestran en las siguientes figuras. En la Figura 3.13a se presentan las estimaciones de Ln de precipitación obtenidas mediante kriging en Ln mm, y en la Figura 3.13b se muestra el kriging con las estimaciones transformadas a precipitación en mm, utilizando la ecuación 2.12 descrita en el capítulo 2; se realizó lo mismo para el cokriging.

En los resultados obtenidos se aprecia la ventaja de la utilización de la geoestadística para estudiar la variabilidad espacial de la precipitación; permitiéndose obtener estimaciones en puntos donde no se tiene información. En el caso bivariado (cokriging) se aprecia la variabilidad de los datos con más detalle, como son los valores de precipitación más pequeños (menor a 1.7 mm) y en un núcleo de precipitación de intensidad superior a los 3.7 mm, localizado en la parte norte de la imagen (Figura 3.13b), a diferencia del kriging que suaviza los valores pequeños y en el caso del núcleo de precipitación, no se aprecia tan intenso.

La correlación es alta en los datos, logrando tener una buena estimación conjunta.



**Figura 3.13** Estimación simple de los datos de pluviógrafo, tormenta 1



**Figura 3.14** Estimación conjunta, tormenta 1

En las Figuras 3.15 y 3.16 se presentan las varianzas del error de la estimación del Ln de precipitación en  $\text{Ln}(\text{mm})^2$  y la varianza del error de la estimación de la precipitación en  $\text{mm}^2$ , obtenidas al realizar las transformaciones de la primera en la segunda al aplicar la ecuación 2.13, descritas en el capítulo 2.

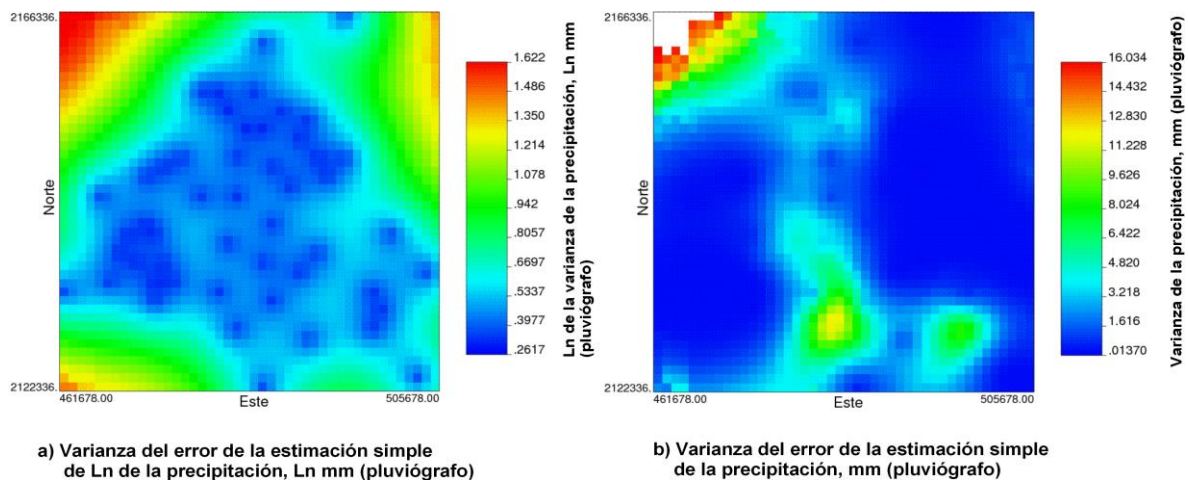
El rango de valores de las varianzas del error de las estimaciones de la precipitación va de 0.04 mm a 158.70 mm para el krigado y de 0.01 mm a 83.28 mm para el cokrigado, sin embargo los valores máximos para cada método se presentan en la esquina superior izquierda de la zona de estudio y son 21 para el krigado y 4 para el cokrigado. La zona señalada no cuenta con

datos de pluviógrafo y el más cercano se encuentra aproximadamente a 18,500 m. Por este motivo, las estimaciones obtenidas con ambos métodos tienen una incertidumbre muy alta, por lo que se decidió excluirlos de la discusión a continuación.

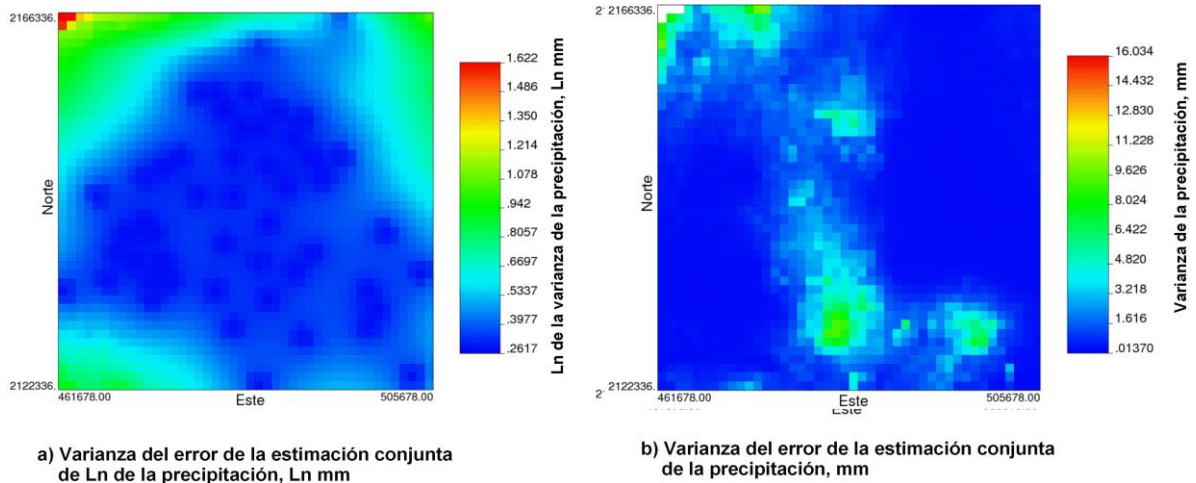
En la Figura 3.15b y en la Figura 3.16b se graficó como valor máximo 16 mm, se aprecia que las varianzas máximas del cokrigado son más pequeñas (9.8 mm) que las obtenidas por el krigado (16.02), la diferencia entre ellas es del orden de 6.22 mm. En ambos casos las varianzas máximas se presentan en las posiciones de los datos con valores mayores.

En el cokrigado los valores que predominan son menores de 3 mm (90% de los estimados), este valor cubre la mayoría de la zona de estimación, como se aprecia en la Figura 3.16b, en esta última imagen se ve más uniforme las tonalidades en las zonas de varianza más baja; y la zona de varianza alta presentada en la estimación del pluviógrafo, no se aprecian prácticamente ya en la estimación conjunta.

Al realizar las transformaciones de las variables, de Ln mm a mm, se aprecian visualmente diferencias en el rango de valores y en un mayor suavizado espacial para las estimaciones del krigado Figuras 3.15b y 3.16b.



**Figura 3.15 Varianza del error de la estimación simple (pluviógrafo), tormenta 1**



**Figura 3.16 Varianza del error de la estimación conjunta (cokrigado), tormenta 1**

### 3.2.4 Validación cruzada

Se analizaron por separado los estadísticos de tres opciones: 1) para todos los datos disponibles en la zona de estudio; 2) de manera sectorial en la siguiente forma: *a) sin valores extremos*, *b) sólo valores externos* y *c) sólo valores internos*; y 3) reduciendo el espacio muestral de la tormenta con base en los errores mayores.

En la segunda opción, la división por sectores se definió de la siguiente manera: *a) sin valores extremos*, definidos estos como los valores que presentan una precipitación muy alta ( $>7$  mm) en comparación con el resto de la muestra; *b) sólo valores externos*, aquí se consideraron los errores de los datos de posiciones en la frontera de la zona de estudio para los que en la validación se realiza una extrapolación; y *c) sólo valores internos*, que son el complemento de los errores del inciso *b)* con respecto al total de la muestra.

En la tercera opción se eliminaron los datos que presentaron mayor error, se fueron eliminando uno a uno. Cabe destacar que esto sólo aplicó en el cokrigado.

A continuación se reportan en forma detallada los resultados de la primera opción. La comparación entre los resultados de la validación cruzada para el krigado del logaritmo natural de los datos del pluviógrafo y del cokrigado para toda la muestra se reportan en la

Tabla 3.3. En general, los estadísticos fueron mejores para el cokrigado que para el krigado, exceptuando el valor medio de los errores y el error cuadrático medio estándar donde dio mejores resultados en el krigado.

Enseguida se procede a describir el análisis de los resultados obtenidos en la validación cruzada, se eligieron seis estadísticos a analizar: el primero de ellos es, el valor medio de los errores, en el krigado tiene un valor de 0.064 y en el cokrigado es de -0.085, el criterio de selección indica que debe ser próximo a cero. Por lo tanto, tiene un mejor resultado el krigado, aunque la magnitud del valor del cokrigado es cercano al del krigado.

El segundo parámetro es el valor medio de la varianza muestral de los errores, en el krigado tiene un valor de 0.731 y en el cokrigado es de 0.572, el criterio de selección indica que el dato con menor error es mejor. Dando menor error el cokrigado.

En cuanto a la correlación muestral entre el valor real y el estimado es el tercer parámetro analizado, en el krigado es de 0.680 a diferencia del cokrigado el cual es de 0.828, siendo este último mejor resultado, dado que el criterio de selección indica que es mejor el más cercano a la unidad.

Otro parámetro a analizar es el error estándar de la estimación, teniendo como resultado en el krigado un valor de 0.104 y en el cokrigado de 0.081, el criterio de selección indica que es mejor el valor cercano a cero. Siendo el cokrigado mejor que el krigado.

El quinto parámetro es el error cuadrático medio estándar, en el krigado es de 0.898 y en el cokrigado es de 1.408, el criterio indica que debe ser cercano a la unidad. Los resultados del análisis nos muestran que la varianza sobreestima los errores, por eso el error cuadrático medio estándar es mayor a uno en el cokrigado.

El último parámetro es la varianza (promedio), en el krigado es de 0.559 y en el cokrigado de 0.227, el criterio indica que debe ser tomado como mejor el que presente un valor menor. Los resultados indican que es mejor el cokrigado, debido a la aportación que presentan los

valores válidos adicionales de la malla del radar.

Los resultados obtenidos se representan en las figuras: Figura 3.17 a la Figura 3.20. En la Figura 3.17 y Figura 3.18 se aprecia que para ambas interpolaciones los errores son aleatorios y pequeños, en general. Pero, es mejor la distribución del krigado dado que no se concentran valores de igual magnitud y signo; que son muy visibles en el cokrigado.

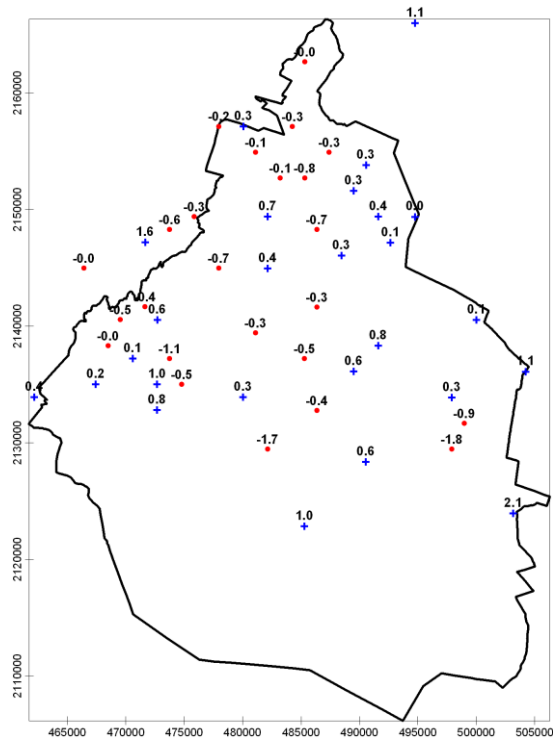
En la Figura 3.19 se presenta la distribución espacial del error cuadrático estándar de la validación cruzada de la estimación por krigado; y en la Figura 3.20 los resultados del mismo error pero del cokrigado. Se aprecia que los errores de mayor magnitud en el krigado, son por mucho más pequeños y menos frecuentes que en el cokrigado. Manifestándose en los valores de mayor precipitación (valores extremos) y en puntos donde sus vecinos son diferentes en magnitud.

El análisis sectorial no mostró diferencias importantes en los estadígrafos con respecto a dejar toda la muestra, lo que indica que no hay una afectación significativa de los errores por valores extremos o por la extrapolación. Por otro lado, el análisis de reducción de la muestra, nos indicó que en el krigado no se obtienen estadísticos mejores con el retiro de los puntos que manifiestan errores más grandes, en cambio en el cokrigado el retiro de dos puntos con errores más grandes (los números 44 y 10, con valores de 9.8 y 9.5 respectivamente) logran bajar el error cuadrático medio estándar. Pero, se opta por dejar la muestra integra con sus 50 valores dado que el espacio muestral es pequeño.

Se concluye que el cokrigado proporciona un modelo más robusto porque las diferencias entre ambas interpolaciones son claras: la red de pluviógrafos en la mayoría de los casos no es capaz de reproducir la variabilidad espacial de la imagen de radar, de manera que tiende a suavizar la precipitación describiendo formas 'redondeadas' que en muchos casos no están relacionadas con el patrón de lluvia captado por el radar.

**Tabla 3.3 Resumen de errores de la validación cruzada, tormenta 1**

Parámetro, Tormenta 1	Krigado logaritmo	Cokrigado utilizando	Criterio
	natural pluviógrafo	la malla radar	
	(Ln mm)	(Ln mm)	
Valor medio de los errores	0.064	-0.085	Próximo a cero
Valor medio de la varianza muestral de los errores	0.731	0.572	Menor
Correlación muestral entre el valor real y el estimado	0.680	0.828	Cercano a la unidad
Error estándar de la estimación	0.104	0.081	Cercano a cero
Error cuadrático medio estándar	0.898	1.408	Cercano a la unidad
Varianzas (promedio)	0.559	0.227	Menor



**Figura 3.17 Error de la validación cruzada de la estimación por krigado (Ln mm), tormenta 1**



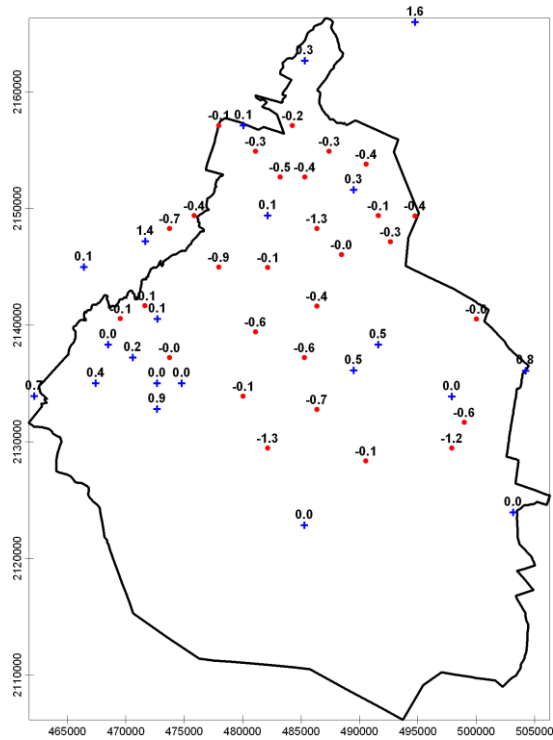


Figura 3.18 Error de la validación cruzada de la estimación por cokrigado (Ln mm), tormenta 1

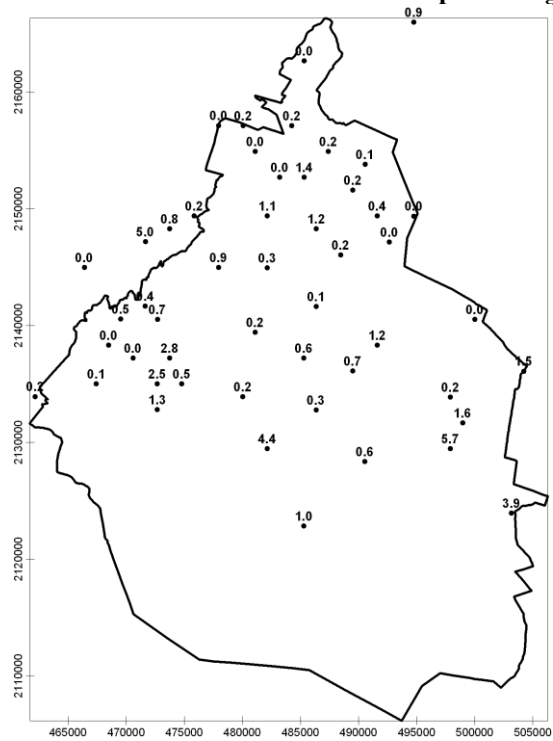
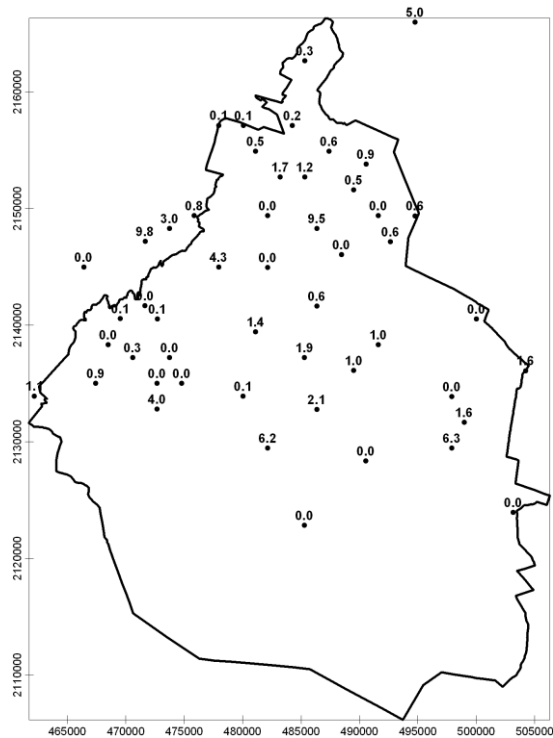


Figura 3.19 Error cuadrático estándar de la validación cruzada de la estimación por krigado (Ln mm), tormenta 1



**Figura 3.20 Error cuadrático estándar de la validación cruzada de la estimación por cokrigado (Ln mm), tormenta 1**

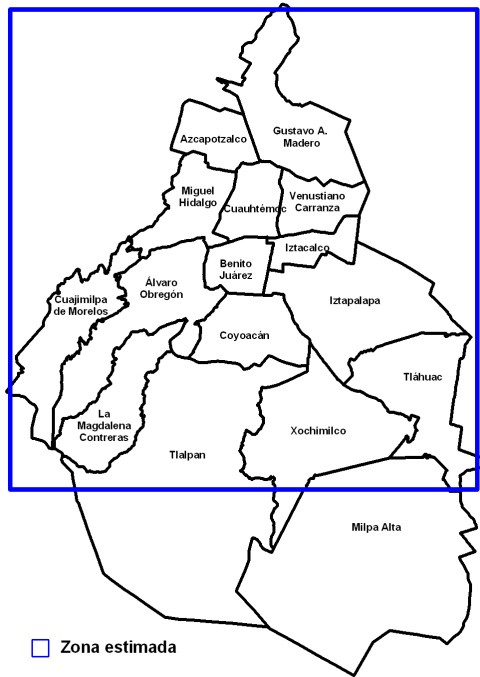
### 3.2.5 Cálculo de precipitación-escorrimento

En la sección 2.3.5 se introdujo la metodología utilizada en el cálculo de la precipitación-escorrimento en el DF. Los resultados obtenidos al aplicarla nos indican que el porcentaje de escurrimento con el método de krigeado es de 39.81% del volumen que llueve, a diferencia del 41.54% de escurrimento con el cokrigado. La diferencia del porcentaje del volumen que llueve de lo estimado por el krigeado y lo estimado por el cokrigado es de 1.73%. La diferencia del escurrimento obtenido con el kriging y el cokriging es de 118,380 m<sup>3</sup> que representan aproximadamente el 15% del escurrimento obtenido con el kriging.

En la Tabla 3.4 se muestra un resumen del cálculo del volumen que escurre en el Distrito Federal. Y en la Figura 3.21 las delegaciones del DF y la zona estimada.

**Tabla 3.4 Resúmen del cálculo precipitación-escorrimento, tormenta 1**

Método	Área (ha)	hp acumulada (mm)	Volumen precipitación (m <sup>3</sup> )	Volumen escurrimento (m <sup>3</sup> )
Krigeado	105,619.3	55.3	1'938,199	771,679
Cokrigeado	105,619.3	63.4	2'142,645	890,059



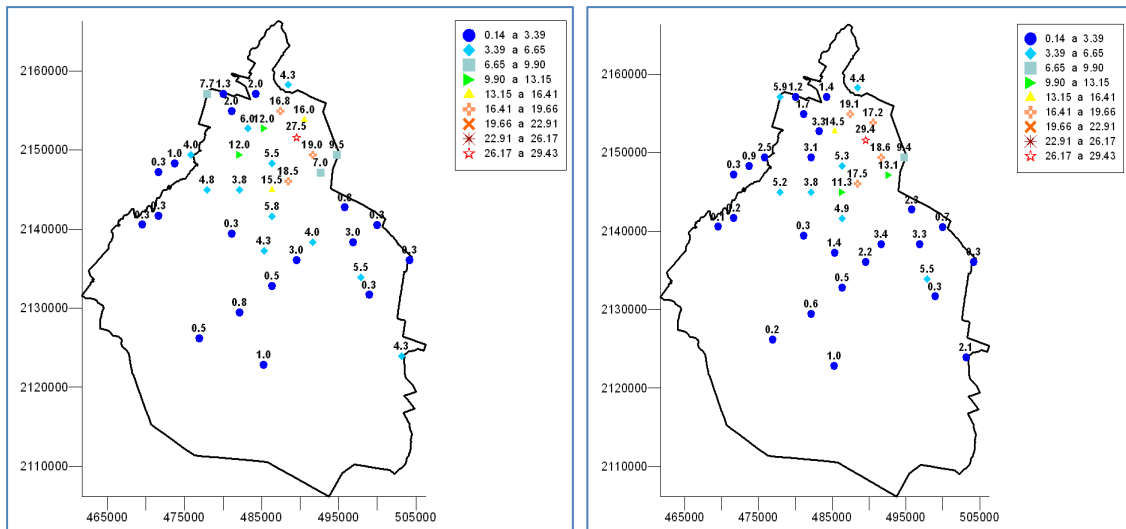
**Figura 3.21 Delegaciones del DF (delimitadas con línea negra) y zona estimada**

### 3.3 *Análisis tormenta 2*

#### 3.3.1 **Análisis exploratorio de los datos**

Se realizó el análisis exploratorio de esta tormenta, siguiendo los mismos pasos de la tormenta 1.

En esta segunda tormenta se tienen sólo 40 pares de mediciones. La lluvia registrada está distribuida de manera muy regular en la parte central y superior de la zona, y de manera menos densa hacia la parte inferior (Figura 3.22). Predominan valores pequeños, menores a los 3.4 mm, tanto en el pluviógrafo y el radar. A diferencia de la tormenta anterior, en ésta la precipitación es más intensa, alcanzando valores de 27.5 mm en el pluviógrafo y de 29.4 mm en el radar.

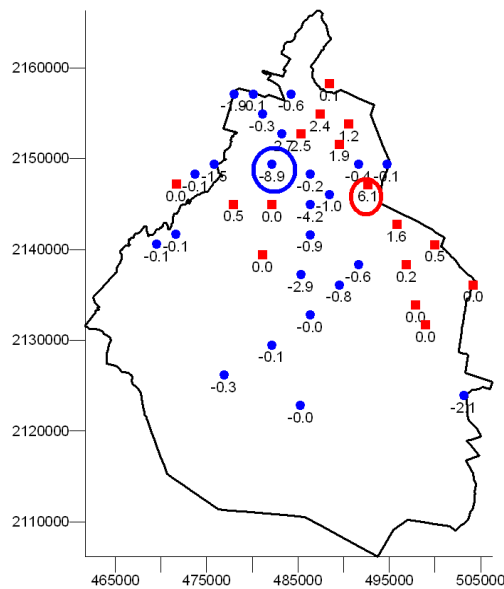


a) Pluviógrafo, mm

b) Radar, mm

**Figura 3.22 Posición y magnitud de los datos, tormenta 2**

En la Figura 3.23 se muestra una comparación visual de las mediciones de lluvia del radar y del pluviógrafo. El radar sobreestima de manera considerable en el punto encerrado con un círculo rojo y subestimando en el punto encerrado en el azul. En general el radar sobreestima en el 40% de las mediciones, subestima en el 60% restante y no mide igual que el pluviógrafo en ninguna posición.



**Figura 3.23 Diferencias de mediciones de radar y pluviógrafo (radar-pluviógrafo), tormenta 2**

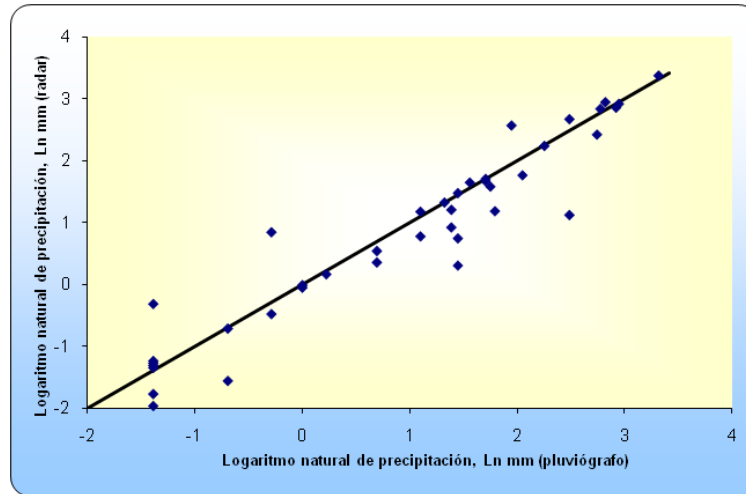
Al igual que para la tormenta anterior, se realizaron dos análisis estadísticos previos a la transformación de la precipitación, uno sin valores atípicos y el otro sin transformar los datos, teniendo como resultado que no mejoraba lo obtenido en el análisis que se presenta. También se realizó un análisis de tendencia, y al igual que en el caso anterior los resultados indicaron que la tendencia no es significativa en los datos. El análisis de existencia de anisotropía, y al igual que en el caso anterior indican que la muestra no presenta un comportamiento anisotrópico significativo.

En la Tabla 3.5 se presenta el análisis estadístico de la tormenta 2, hay una mejoría en los estadísticos de asimetría y curtosis en las variables transformadas, al igual que la media y la mediana son más parecidas en los datos transformados. Por lo que se decidió utilizar los datos transformados para los cálculos posteriores.

**Tabla 3.5 Resumen del análisis estadístico, tormenta 2**

Estadístico Tormenta 2	Pluviógrafo (mm)	Logaritmo natural de los datos	
		de pluviógrafo (Ln mm)	Radar (mm)
			Logaritmo natural de datos de radar (Ln mm)
Media	5.78	0.95	5.46
Mediana	4.00	1.39	2.80
Valor mínimo	0.25	-1.39	0.14
Valor máximo	27.5	3.31	29.42
Desviación estándar	6.47	1.46	1.24
Varianza	42.91	2.19	47.15
Coficiente de asimetría	1.56	-0.34	1.78
Curtosis	2.09	-1.10	2.88

En la Figura 3.24 se presenta el diagrama de dispersión del pluviógrafo contra radar, que a diferencia de la tormenta anterior en la que los datos de radar están sobreestimando el 68%, en esta segunda tormenta el radar está subestimando el 60%. Otra diferencia es que no presenta la aglomeración de datos con valor pequeño, tan marcada en la primer tormenta; en ésta sólo se aprecia una línea formada por 7 datos con el valor mínimo medido por el pluviógrafo (0.25 mm, -1.368 Ln mm). Hay menos dispersión y su correlación es más alta,  $r = 0.951$ .



**Figura 3.24**      **Dispersión de pluviógrafo contra radar, tormenta 2**

### 3.3.2 Análisis estructural

En esta sección se presenta el análisis estructural univariado y bivariado.

En la Tabla 3.6 se resumen los parámetros de los modelos de los semivariogramas ajustados de la tormenta 2.

**Tabla 3.6**      **Características del semivariograma obtenido de la tormenta 2**

Semivariograma, Tormenta 2	Pepita (Ln mm)	Meseta-Pepita (Ln mm)	Alcance (m)	CIA
Ln pluviógrafo (simple)	0.10	2.79	23,000	-19.41
Ln radar (simple)	0.10	2.80	23,000	-23.13
Ln pluviógrafo-Ln radar (cruzado)	0.05	2.70	23,000	-26.11

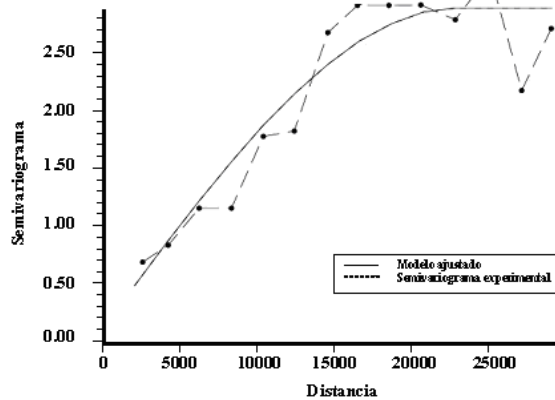
CIA.- Criterio de Información de Akaike.

Como se aprecia en la Tabla 3.2 (tormenta 1) y Tabla 3.6, el CIA de estos ajustes varían cuantiosamente en la primer tormenta oscila en el orden de los -155 a los -191, y en esta segunda tormenta de los -19 a los -26; los rangos de alcance no varían mucho, en la primer tormenta está en los 20,000 m y en esta segunda en los 23,000 m.

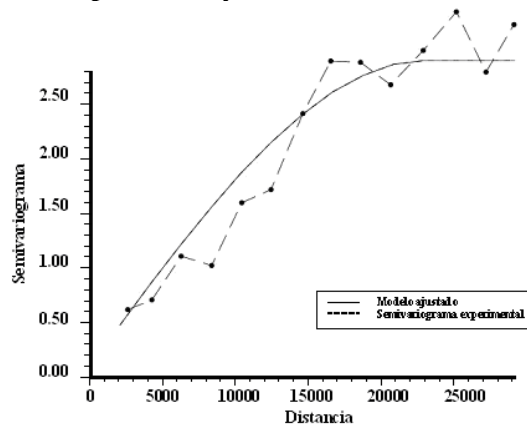
Los semivariogramas experimentales (líneas segmentadas) y los modelados (líneas continuas) se presentan en la Figura 3.25, Figura 3.26 y Figura 3.27. En esta tormenta los semivariogramas experimentales presentan quiebres abruptos (atribuidos al tamaño de la

muestra (40 datos) y a la alta variabilidad de la medición (casi 30 mm de diferencia entre el valor mínimo y el valor máximo). En la primera tormenta esta variabilidad es más pequeña del orden de los 8 mm.

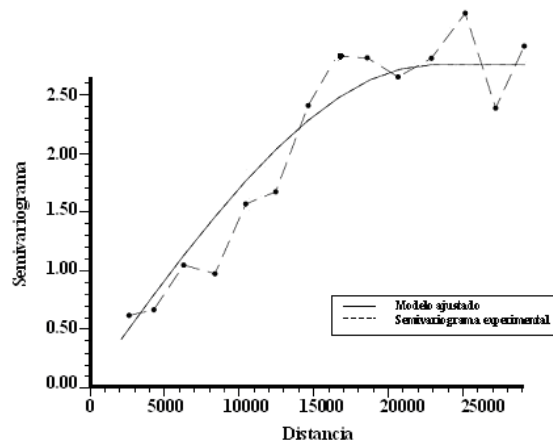
Los semivariogramas enseguida mostrados fueron los mejores ajustes obtenidos con modelos estándares simples (los semivariogramas teóricos probados son los presentados en la sección 2.2.1.4), se procede a hacer las estimaciones con krigado y cokrigado y su correspondiente validación cruzada, lo que en última instancia debe de indicar qué tan adecuados resultan los modelos.



**Figura 3.25** Semivariogramas experimental y teórico del Ln de los datos de pluviógrafo, tormenta 2



**Figura 3.26** Semivariogramas experimental y teórico del Ln de los datos de radar, tormenta 2



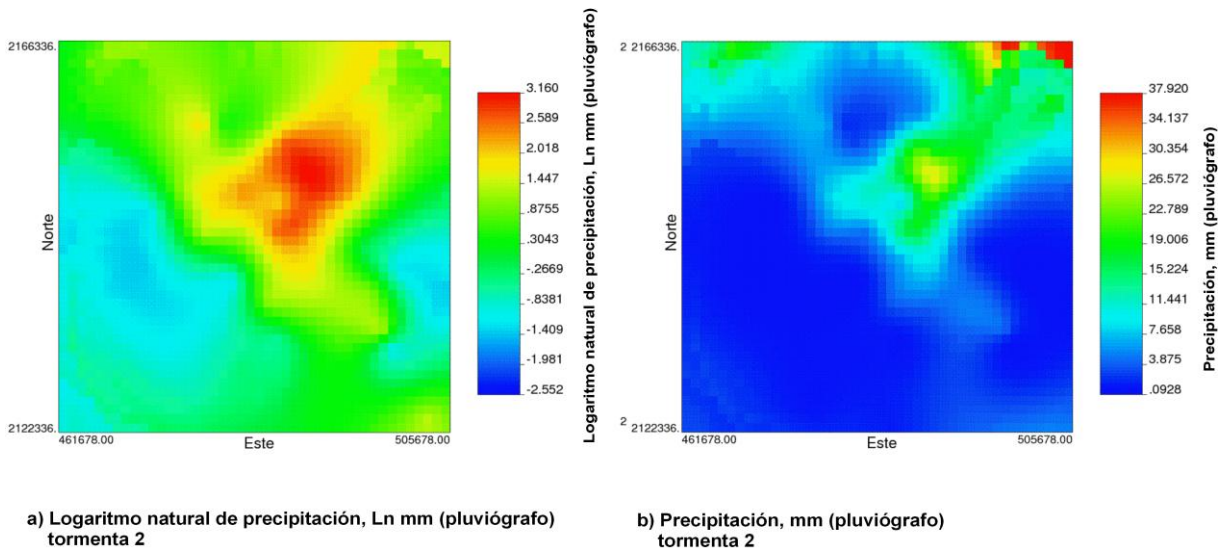
**Figura 3.27 Semivariogramas cruzados, tormenta 2**

### 3.3.3 Estimación espacial

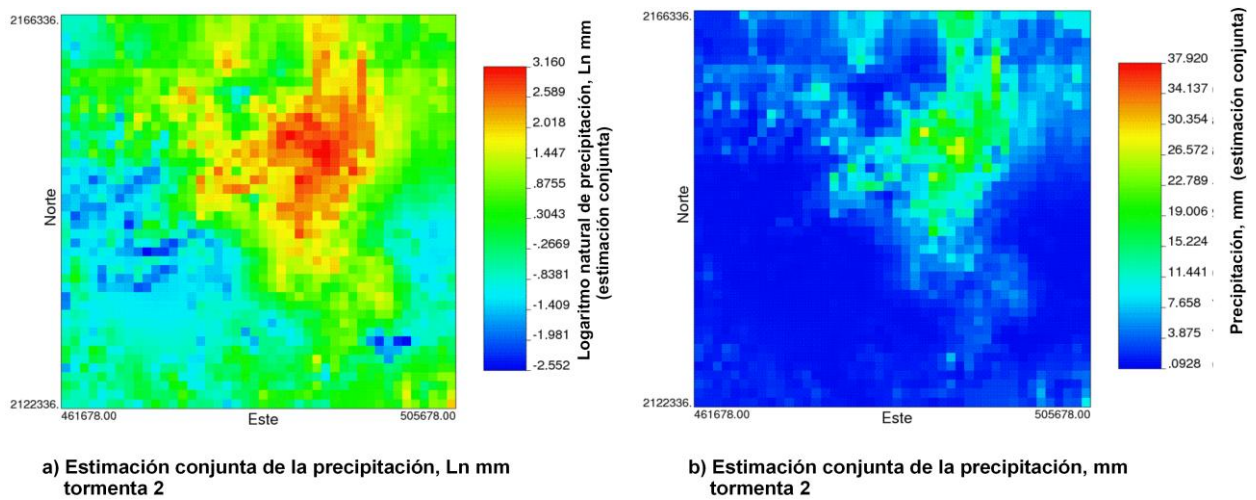
Los resultados de la estimación espacial se aprecian en la Figura 3.28 y Figura 3.29. Del lado izquierdo de las figuras se presentan las estimaciones de Ln de precipitación, y del lado derecho las estimaciones transformadas a precipitación en mm.

En la esquina noreste del área de estimación del krigado, se presenta una zona de intensa precipitación, superior a 38 mm, ésta zona está siendo extrapolada, no se tiene medición de pluviógrafo (Figura 3.28b); en la estimación realizada con el cokrigado no se aprecia ésta extrapolación. Además, se observa un rango más amplio de valores en el cokrigado que en el krigado (Figura 3.28b y Figura 3.29b), lo que indica que se ha incorporado información espacial proporcionada por los datos del radar. Nuevamente el krigado suaviza la estimación y aparentemente la estimación conjunta captura de mejor manera la variabilidad espacial de la tormenta.





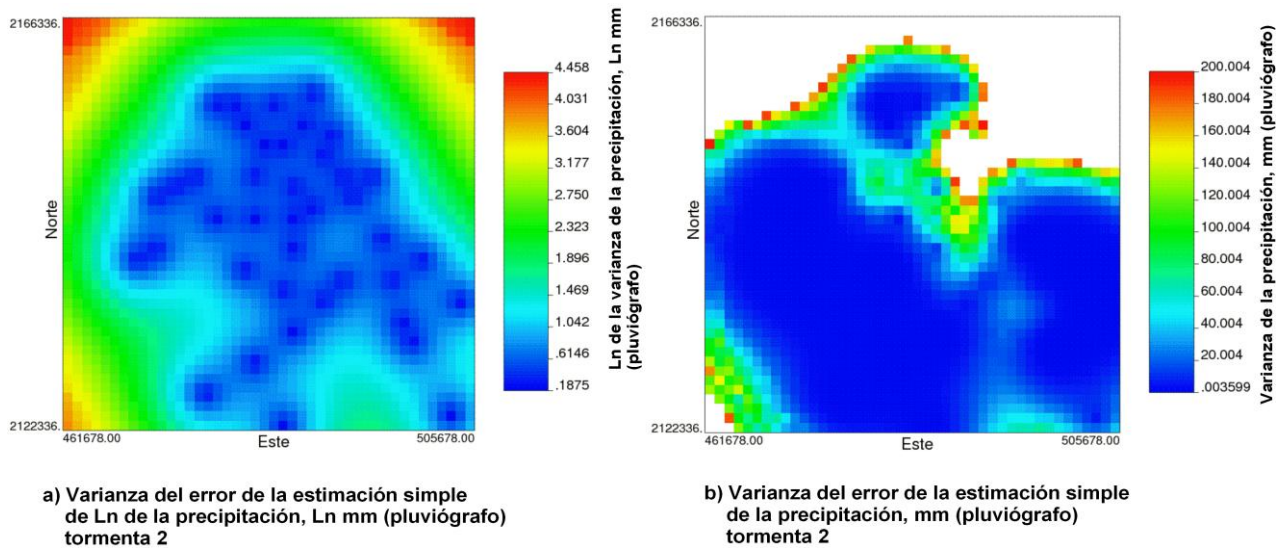
**Figura 3.28 Estimación simple de los datos de pluviógrafo, tormenta 2**



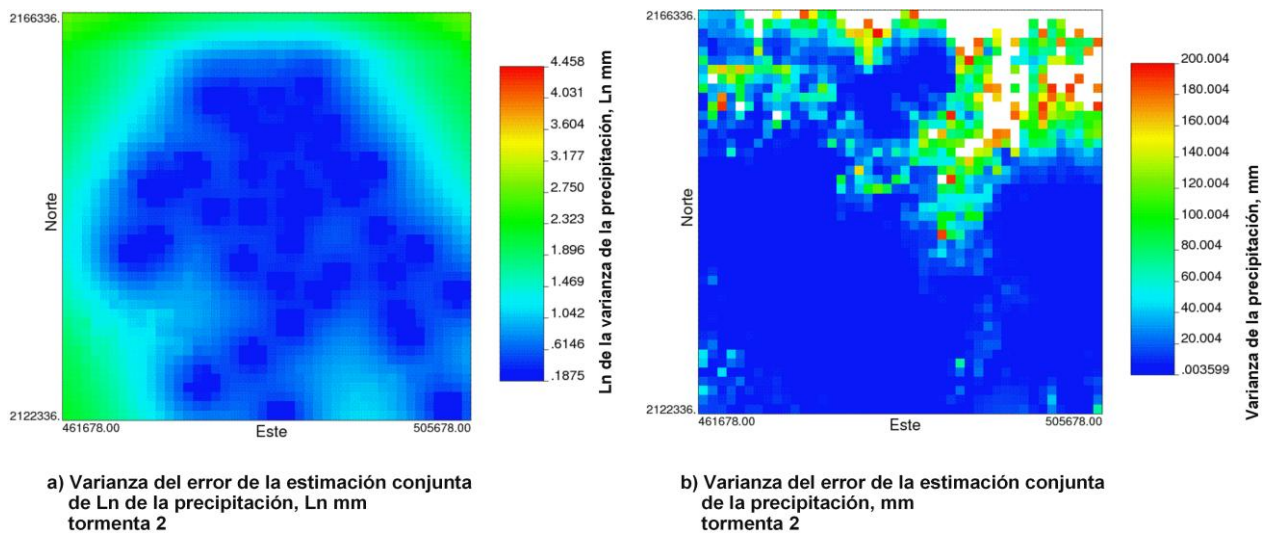
**Figura 3.29 Estimación conjunta, tormenta 2**

El rango de valores de las varianzas del error de las estimaciones de la precipitación va de 0.032 mm a 114,637 mm para el krigado y de 0.003 mm a 1993 mm para el cokrigado. La desviación estándar máxima en el krigado es de 338.58 mm, y de 44.63 mm. Los valores más altos de la varianza del error de la estimación del krigado se localizan en la esquina superior derecha (sólo un dato), el cokrigado presentó este error con valor mucho más pequeño, con dos órdenes de magnitud menor, siendo de 1,993 mm en la misma zona. Se decidió acotar la Figura 3.30b y la Figura 3.31b hasta los 200 mm, para apreciar la variabilidad de la varianza del error en las estimaciones, así como los valores obtenidos con ambos métodos, superiores a

los 200 mm, que tienen una incertidumbre muy alta; en el krigado se están graficando 1488 datos de los 1936 estimados (76.86%), en el cokrigado 1807 de los también 1936 estimados (93.33%). Las varianzas del error de la estimación en el krigado simple mostrado en la Figura 3.30, son mucho más grandes que las estimadas en el cokrigado, las cuales son mejoradas de manera cuantiosa en el cokrigado (Figura 3.31).



**Figura 3.30 Varianza del error de la estimación simple (pluviógrafo), tormenta 2**



**Figura 3.31 Varianza del error de la estimación conjunta (cokrigado), tormenta 2**

### 3.3.4 Validación cruzada

La comparación entre los resultados de la validación cruzada para el krigado del logaritmo natural de los datos del pluviógrafo y del cokrigado se reporta en la Tabla 3.7. Todos los estadísticos fueron mejores para el cokrigado que para el krigado, exceptuando el error cuadrático medio estándar. El análisis se realizó al igual que en la tormenta 1, en tres escenarios. El procedimiento de estos ya fue descrito en la tormenta 1.

**Tabla 3.7 Resumen de errores de la validación cruzada, tormenta 2**

Parámetro	Krigado logaritmo	Cokrigado utilizando	Criterio
	natural pluviógrafo (Ln mm)	la malla radar (Ln mm)	
Valor medio de los errores	-0.013	-0.001	Próximo a cero
Valor medio de la varianza muestral de los errores	1.070	0.817	Menor
Correlación muestral entre el valor real y el estimado	0.692	0.850	Cercano a la unidad
Error estándar de la estimación	0.171	0.131	Cercano a cero
Error cuadrático medio estándar	1.258	2.043	Cercano a la unidad
Varianzas (promedio)	0.890	0.358	Menor

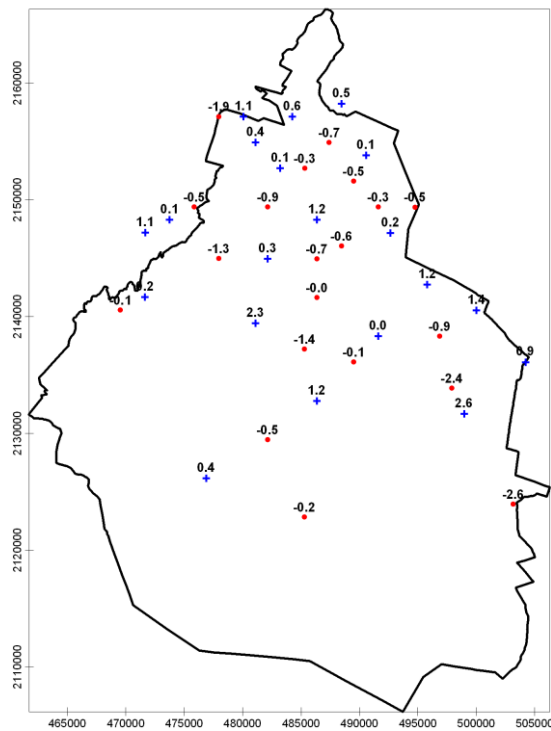
Al igual que en la tormenta 1, se analizó de manera sectorial y con reducción del espacio muestral. En el primer caso, no presentó información significativa y en el segundo en el krigado con el retiro de tres puntos se logró reducir el error cuadrático medio estándar, y en el cokrigado se analizó retirando seis puntos para reducir el error. Se procedió con el mismo criterio que en la tormenta 1, optar por trabajar con todo el espacio muestral, recordando que en esta tormenta son sólo 40 datos de pluviógrafo, siendo una muestra realmente pequeña se dejó la muestra original.

Los resultados obtenidos se representan en las figuras: Figura 3.32 a la Figura 3.35. En la Figura 3.32 y en la Figura 3.33 se aprecia que para ambas interpolaciones los errores en general son, aleatorios y pequeños. Pero, es mejor la distribución del cokrigado dado que sus errores son de menor magnitud.

En la Figura 3.34 se presenta los resultados del error cuadrático estándar de la validación

cruzada de la estimación por krigado, del logaritmo natural de datos; y en la Figura 3.35 los resultados del mismo error pero del cokrigado. Se aprecia que los errores son de mucha mayor magnitud en esta segunda tormenta, alcanzando valores de 14.3 en el error. Y al igual que la tormenta 1, los errores son menores y menos frecuentes en el krigado que en el cokrigado.

Concluyendo que en general el cokrigado proporciona un modelo más robusto y, los errores tanto positivos como negativos son pequeños y están distribuidos aleatoriamente.



**Figura 3.32** Error de la validación cruzada de la estimación por krigado (Ln mm), tormenta 2

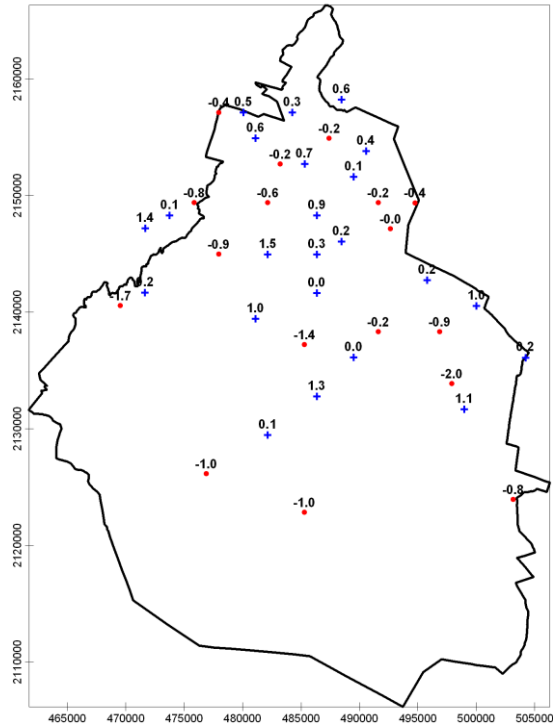


Figura 3.33 Error de la validación cruzada de la estimación por cokrigado (Ln mm), tormenta 2

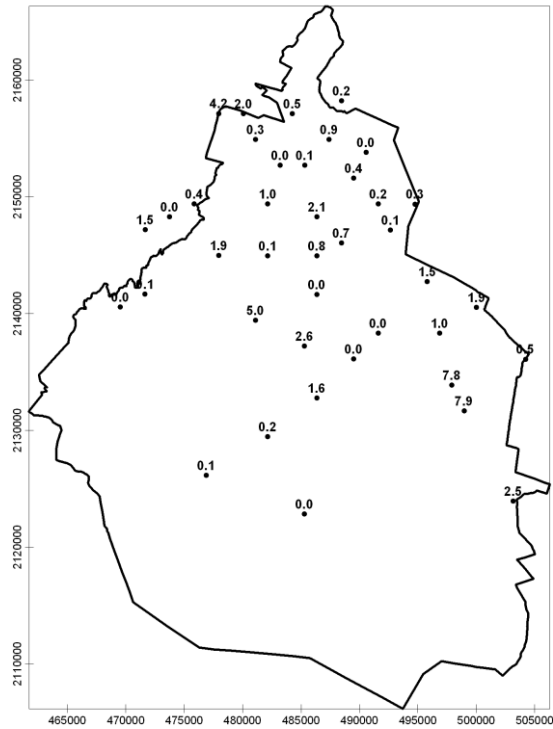
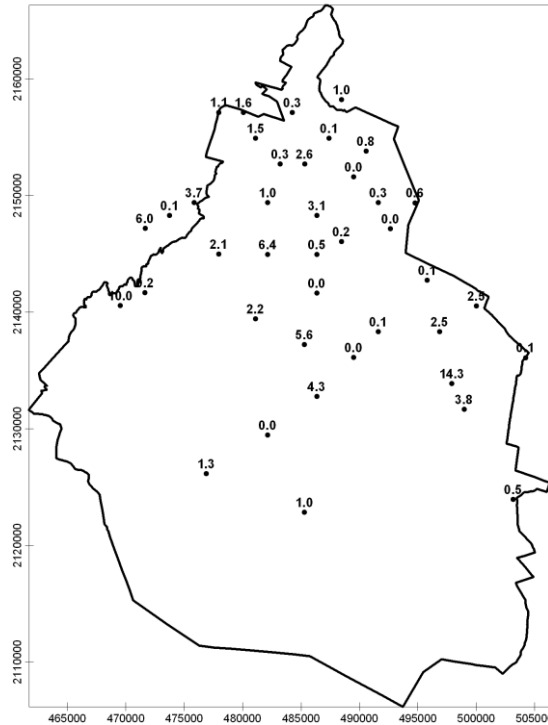


Figura 3.34 Error cuadrático estándar de la validación cruzada de la estimación por krigado (Ln mm), tormenta 2



**Figura 3.35 Error cuadrático estándar de la validación cruzada de la estimación por cokrigado (Ln mm), tormenta 2**

### 3.3.5 Cálculo de precipitación-escorrimento

El realizó el cálculo de precipitación-escorrimento en el DF de la segunda tormenta con la metodología descrita en la tormenta anterior.

Los resultados obtenidos nos indican que el porcentaje de escurrimento con el método de krigado es de 50.74% del volumen que llueve, a diferencia del 49.88% de escurrimento con el cokrigado. La diferencia del porcentaje entre lo estimado por el krigado y lo estimado por el cokrigado es de -0.86%. La diferencia del escurrimento obtenido con el kriging y el cokriging es de 275,024 m<sup>3</sup> que representan aproximadamente el 10% del escurrimento obtenido con el kriging.

En la Tabla 3.8 se muestra un resumen del cálculo del volumen que escurre en el Distrito Federal en esta segunda tormenta.

**Tabla 3.8**      **Resumen del cálculo precipitación-escorrentía, tormenta 2**

<b>Método</b>	<b>Área (ha)</b>	<b>hp acumulada (mm)</b>	<b>Volumen precipitación (m<sup>3</sup>)</b>	<b>Volumen escorrentía (m<sup>3</sup>)</b>
<b>Krigeado</b>	105,619.3	199.9	5'284,719	2'681,303
<b>Cokrigeado</b>	105,619.3	206.2	5'926,744	2'956,327

## 4. DISCUSIÓN, CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este capítulo se presentan las conclusiones y recomendaciones producto del trabajo realizado en esta tesis.

### 4.1 *Discusión*

El Distrito Federal es una de las zonas en el país con mayor densidad de estaciones pluviográficas, por lo que se decidió probar el método de cokrigado para estimar precipitación combinando mediciones de radar y de pluviógrafo. Los resultados indican que las estimaciones realizadas por el cokrigado en zonas donde no se cuenta con mediciones de pluviógrafo, presentan errores con varianzas más pequeñas, siendo más notorios esos resultados en la segunda tormenta que sólo tenía 40 datos de pluviógrafo, a diferencia de la primera tormenta que tenía 50 datos.

### 4.2 *Conclusiones*

Las dos tormentas analizadas presentan algunas características comunes:

- Las distribuciones tienen una forma muy asimétrica, presentan fuerte asimetría positiva, por lo que fue necesario realizar una transformación logarítmica a los datos.
- En ambos casos se obtuvo un modelo esférico para los semivariogramas.
- Los semivariogramas ajustados fueron del tipo esférico con pepita.
- Tienen un alcance entre 20 km y 23 km, mostrando un patrón en ambas tormentas.

En general el radar está sobreestimando en la primer tormenta el 68%, y en la segunda tormenta subestima en el 60%, al realizar el *best match*. Pero pese a esta deferencia la estimación obtenida con los datos de pluviógrafo y radar en forma conjunta proporcionan más detalle que la obtenida usando únicamente los datos de pluviógrafo.

El krigado aunque consigue resultados estadísticamente buenos presenta un excesivo suavizado en los contornos de precipitación. En contraste el cokrigado representa de mejor manera la variabilidad espacial de las tormentas.



La validación cruzada probó que los modelos utilizados son robustos, no obstante que la varianza está sobreestimando los errores de estimación.

Una ventaja de utilizar los métodos geoestadísticos es que permiten determinar el grado de incertidumbre de las estimaciones.

En los últimos años se ha presentado un auge en el uso de modelos distribuidos de las relaciones entre lluvia-escorrentía, de la mano con el uso de la herramienta computacional de los Sistemas de Información Geográfica. Sin embargo, la oportunidad que brinda esta herramienta para describir las características de la cuenca con gran detalle no ha sido aprovechada íntegramente en nuestro país, porque los modelos se han alimentado con datos de lluvia obtenidos a partir de redes de pluviómetros que en la práctica no tienen gran densidad espacial. En este trabajo se presentan los resultados obtenidos al aplicar la geoestadística bivariada como método de ajuste a los datos de precipitación del radar del Cerro La Catedral y de la red pluviométrica del SACM, con el fin de utilizarlos posteriormente en modelos hidrológicos distribuidos. Los resultados obtenidos pueden servir para establecer una metodología que pueda aplicarse en otras regiones, para llevar a cabo pronósticos operativos y acciones de prevención de avenidas en zonas de alto riesgo.

El uso de datos de radar meteorológico puede mejorar la estimación de la distribución espacial de la lluvia, que es un factor importante para optimizar pronósticos de crecientes en tiempo real, por ejemplo.

#### **4.3 Recomendaciones**

Es importante notar que el análisis realizado presupone que el radar tiene una calibración electrónica adecuada y los datos de pluviógrafo son correctos, y si no fuera así no se esperaría tener buenos resultados al aplicar este método.

Probar el método para hacer estimaciones de lluvia incluyendo además de los datos de radar y de pluviógrafo otros datos correlacionados con la precipitación, como lo puede ser la topografía.

Probar el método para incluirse en un procedimiento para estimación de lluvia en tiempo real.

Probar el método en zonas con menos mediciones pluviométricas.

## 5. REFERENCIAS

1. AHNERT, O. R.; KRAJEWSKI, W. F. y JONSON, E. R. Kalman filter estimation of radar-rainfall field bias. *Preprints 23 th Conf. On Radar Met.*, AMS, 1986, pp. 33-37.
2. AKAIKE, H., A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control* 19 (6), 1974, pp. 716-723.
3. APARICIO, F. J. *Fundamentos de hidrología de superficie*. Editorial Limusa. México, 1997, 303 pp.
4. AZIMI-ZONOOZ, A.; KRAJEWSKI, W. F.; BOWLES, D. S. y SEO, D. J. Spatial rainfall estimation by linear and non-linear co-kriging of radar-rainfall and raingage data. *Stochastic Hydrology and Hydraulics*, 3, 1989, pp. 51-67.
5. BAAFI, E. Y., LENERGAN, J. E., BARUA, S. L. y KIM, Y. C. *Condensed User's Manual for Basic Geostatistics Systems*, Dept. of Mining and Geological Engineering, Univ. of Arizona, Tucson, Arizona. 1982.
6. BARNES, S. L. A technique for maximizing details in numerical weather map analysis, *J. Appl. Meteor.*, 3, 1964, pp. 396-409.
7. BASTIN, G. y GEVERS, M. Identification y Optimal Estimation of Random Fields from Scattered Point- Wise Data, *Automatica*, 21 (2), 1985, pp. 139-155.
8. BECERRA, S. L. *Pronóstico de fenómenos hidrometeorológicos a base de una red nacional de radares meteorológicos*, Tesis, Instituto Tecnológico de Zacatepec (ITZ), Agosto de 1997, 79 pp.
9. BRANDES, E. A. Optimizing rainfall estimates with the aid of radar, *J. Appl. Meteorol.*, 14 (7), 1975, pp. 1339-1345.
10. BURROUGH, P. A. Multiscale sources of spatial variation in soil, I, The aplication of fractal concepts to nested levels of soil variation, *J. Soil. Sci.*, 34, 1983, pp. 577-597.
11. CALHEIROS, R. y ZAWAZDKI, I. Reflectivity-rain rate relationships for radar hydrology in Brazil, *Journal Clim. Appl. Met.*, 26, 1987, pp. 118-132.
12. CANDY, J. V. y MAO, N. Nuclear waste repository characterization: a spatial estimation/identification approach, *Proc. of the 8th Trienal World Congress IFAC Control Science and Technology*, Kyoto, 1981, pp. 629-636.
13. CASSIRAGA, E. F. y GÓMEZ-HERNÁNDEZ, J. J. *Improved Rainfall estimation by integration of radar data: A geoestatistical approach*. Soares et al. (Eds) GeoENV I:

- Geostatistics for Environmental Applications, Kluwer Academic Publishers, 1997, pp. 363-374.
14. CHRISTAKOS, G. Random Field Models in Earth Sciences, January, 1992.
  15. Conagua, VALDÉS-MANZANILLA, A. y HERRERA-ZAMARRÓN, G. S. (autores), Informe final del proyecto: *Diseño de un sistema de estimación de lluvia usando radar meteorológico*, Coordinación de Tecnología Hidrológica, Subcoordinación de hidrometeorología, IMTA, Nov., para la Comisión Nacional del Agua, 2000.
  16. CREUTIN, J. D., G. DELRIEU, G. y LEBEL, T. Rain measurement by raingage-radar combination: A geostatistical approach. *J. Atmos. Oceanic Technol.*, 5 (1), 1988, pp. 102-115.
  17. DAVID, M. *Geoestatistical ore reserve estimation*. Elsevier, Amsterdam, 1977, 364 pp.
  18. DAVIS, B. M. Uses and abuses of cross-validation in geostatistics, *Journal Math. Geology*, 19(3), 1987, pp. 241-248.
  19. DELHOMME, J. P. Kriging in the hydrosiences, *Advances in Resources*, I, 1978, pp. 251-266.
  20. DÍAZ-VIERA, M. *Geoestadística Aplicada*, Instituto de Geofísica, UNAM, 2002, 122 pp.
  21. DÍAZ-VIERA, M. A., HERRERA-ZAMARRÓN, G. S. y VALDÉS-MANZANILLA, A. Un modelo de correogionalización lineal para la estimación espacial de la precipitación en el valle de la ciudad de México, combinando datos de pluviógrafos con imágenes de radar meteorológico, *Revista Ingeniería hidráulica en México*, vol. XXIV, núm. 3, julio-septiembre, 2009, pp. 63-90.
  22. DOWD, P. A. The variogram and kriging: robust and resistant estimators, *Geostatistics for Natural Resources Characterization*, Verly et al., (eds.), NATO ASI Series, Reidel, Hingham, Mass., vol. 1, 1984, pp. 91-106.
  23. EFRON, B. y GONG, G. A leisurely look at the bootstrap, the jack-knife, and cross-validation, *The American Statistician*, 37(1), 1983.
  24. FATTORELLI, S.; CASALE, R.; BORGA, M. y DA ROS, D. Integración de técnicas radar y sensores remotos para la estimación de lluvias en aplicaciones hidrológicas y mitigación de riesgos de inundación, La contribución europea: perspectivas y expectativas, *Comisión Europea, Dirección General XII, Ciencia, investigación y desarrollo*, 1995, 77 pp.
  25. GOLUB, G. H. y VAN LOAN, C. F. *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University

- Press. Second Edition, ISBN 0-8018-3789-1, 1989.
26. GOOVAERTS, P. *Geostatistics for Natural Resources Evaluation*. Oxford University Press, New York, 1997.
  27. HEVESI, J. A.; ISTOK, J. D. y FLINT, A. L. Precipitation Estimation in Mountainous Terrain Using Multivariate Geostatistics. Part I: Structural Analysis, *Journal of Applied Meteorology* 31,1992a, pp. 661-676.
  28. HEVESI, J. A.; FLINT, A. L. y ISTOK, J. D. Precipitation Estimation in Mountainous Terrain Using Multivariate Geostatistics. Part II: Isohyetal Maps, *Journal of Applied Meteorology* 31, 1992b, pp. 677-688.
  29. ISAAKS, E. H. y SRIVASTAVA, R. M. *An Introduction to Applied Geostatistics*, Oxford University Press, 1989.
  30. JAMESON A. R. y KOSTINSKI A. B. Spurious power-law relations among rainfall and radar parameters, *Q. J. R. Meteorol.Soc.*, 128, 2002, pp. 2045-2058.
  31. JOE, P. y SMITH, P. L. Summary of the Radar Calibration Workshop, *Preprints 30th AMS Int. Conf. On Radar Met.*, AMS, 2001, pp. 174-176.
  32. JOURNEL, A. G. Geostatistics, Models and Tools for the Earth Sciences, Short Course in Geology: Vol. 8, *American Geophysical Union*, 1986, 40 pp.
  33. - Fundamentals of Geostatistics in five lessons, *Math. Geol.* 18(1), 1989, pp. 111-140.
  34. - The log-normal approach to predicting local distributions of selective mining unit grades, *J. Int. Assoc. Math. Geol.*, 12(4), 1980, pp. 285-303.
  35. JOURNEL, A. G. y HUIJBREGTS, J. *Mining Geostatistics*, Academic Press, 1978, 600 pp.
  36. KITANIDIS, P. K. *Introduction to GEOSTATISTICS Applications in hydrogeology*, Published by the press syndicate of the University of Cambridge, 1997, 249 pp.
  37. KOISTINEN, J. y PUHAKKA, T. Can we calibrate radar with raingauges?, *Geophysic* (Helsinki), 22, 1986, pp. 119-129.
  38. KRAJEWSKI, W. F. Cokriging radar-rainfall and rain gage data, *Journal of Geophysical Research*, 92, (D8), 1987, pp. 9571-9580.
  39. MARSHALL, J. S. y PALMER, W. M. The distribution of raindrops with size, *Journal of Meteorology*, Vol. 5, 1948, pp. 165-166.
  40. MATHERON, G. *Traite de geostatistique appliquee*, Tome 1 and 2, Memories Du Bureau

- De Recherches Geologiques Et Minières, Technip, Paris, 1962/3.
41. -*La Théorie des Variables Regionalisès et ses Applications* Les Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique de Fontainebleau, Fascicule 5, Ecole de Mines de Paris, 212 pp, 1970.
  42. MENDEZ-ANTONIO, B.; DOMINGUEZ-MORA, R.; MAGAÑA-RUEDA, V.; CAETANO, E.; CARRIZOSA-ELIZONDO, E. Calibración hidrológica de radares meteorológicos, *Revista Ingeniería hidráulica en México*, vol. 21, núm. 4 (Octubre-Diciembre), 2006, pp. 43-64.
  43. MENDEZ, J. *Modelación de la distribución espacial de la precipitación en el valle de la Ciudad de México usando técnicas geoestadísticas*, Tesis de Posgrado, Colegio de Posgraduados, México, 2008, 154 pp.
  44. NEUMAN, S. P., ZHANG, Y. K. y LEVIN, O. Quasilinear Análisis, Universal Scaling and Lagrangian Simulation of Dispersión in Complex Geologic Media, 1989.
  45. OMRE, H. The variogram and its estimation, *Geostatistics for Natural Resources Characterization*, Verly et al. (Eds.), *NATO ASI Series, Reidel, Hingham, Mass.*, vol. 1, 1984, pp. 107-125.
  46. ROSENFELD, D., WOLF, D. B. y AMITAI, E. The window probability matching method for rainfall measurements with radar. *Journal of Applied Meteorology*. Vol. 33, 1994, pp. 682-693.
  47. ROSENFELD, D.; AMITAI, E. y WOLFF, D. B. Classification of rain regimes by the threedimensional properties of reflectivity fields, *J. Appl. Meteor.*, 34, 1995, pp. 198-211.
  48. ROSENFELD, D.; WOLFF, D. B. y ATLAS, D. General probability-matched relations between radar reflectivity and rain rate, *J. Appl. Meteor.*, 32, 1993, pp. 50-72.
  49. ROSENGAUS, M. M. Fundamentos de radares meteorológicos: aspectos clásicos, *Ingeniería Hidráulica en México*, vol. X, Núm. 1, enero-abril de 1995, pp. 55-74.
  50. - Manejo de emergencias hidrometeorológicas en la ciudad de México, una propuesta, *Primer simposio internacional sobre riesgos geológicos y ambientales de la ciudad de México*, México DF, noviembre 2000.
  51. SACM. *Estudio para obtener la disponibilidad del acuífero de la Zona Metropolitana de la Ciudad de México*, Sistema de Aguas de la Ciudad de México (SACM), Instituto contratado IMTA, 2005, 300 pp.

52. SAMPER, F. J. *Statistical Methods of Analyzing Hydrological, Hydrochemical and Isotopic Data from Aquifers*, Ph. D. Diss., Dept. of Hydrology and Water Resour., Univ. de Arizona, Tucson, 1986.
53. SAMPER, F. J., y CARRERA, R. J. *Geoestadística. Aplicaciones a la hidrogeología subterránea*, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería. Universidad Politécnica de Catalunya, Ed. Gráficas Torres, Barcelona, 1990.
54. SEO, D. J., KRAJEWSKI, W. F. y BOWLES, D. S. Stochastic interpolation of rainfall data from rain gages and radar using Cokriging. 1. Desing of experiments. *Water Resources Research*, 26 (3), 1990a, pp. 469-477.
55. SEO, D. J., KRAJEWSKI, W. F., AZIMI-ZONOOZ, A. y D. S. BOWLES, D. S. Stochastic interpolation of rainfall data from rain gages and radar using Cokriging. 2. Results. *Water Resources Research*, 26 (5), 1990b, pp. 915-924.
56. STEINER, M.; SMITH, J. A.; BURGESS, S.; ALONSO, C. V. y DARDEN, R. W. Effect of bias adjustment and rain gauge data quality control on radar rainfall estimates, *Water Resources Research*, 35, 1999, pp. 2487-2503.
57. TODINI, E. A Bayesian technique for conditioning radar precipitation estimates to rain-gauge measurements, *Hydrol. Earth System Sc.*, vol 5 (2), 2001, pp. 187-199.
58. WACKERNAGEL, H. *Multivariate Geostatistics: An Introduction with Applications*, 2<sup>nd</sup> ed., Springer, Berlin, 1998, 291 pp.
59. WARRICK, A. W., MYERS, D. E. y NIELSEN, D. R. *Geostatistical methods applied to soil science. Methods of soils analysis*. Part I, Physical and mineralogical methods-agronomy monograph 9, pp. 53-81, 1986.
60. WILSON, J. W., y BRANDES, E. A. Radar measurement of rainfall- A summary, *Bull. Amer. Meteorol. Soc.*, 60(9), 1048-1058, 1979, pp. 1048-1058.
61. WOOD, S. J.; JONES, D. A. y MOORE, R. J. Static and dynamic calibration of radar data for hydrological use, *Hydrology and Earth System Sciences*, 4, 2000, pp. 544-545.