

## Capítulo 2

# Análisis en el Dominio de la Frecuencia de Algoritmos de Modos Deslizantes de Order Superior

### 2.1. Introducción

El método de respuesta en frecuencia es una herramienta muy poderosa para llevar a cabo el análisis y diseño de un sistema lineal, se basa en describir a un sistema de control lineal a través de una función de variable compleja, esto nos presenta una ventaja en el análisis de estabilidad o en la respuesta a una señal periódica de un sistema mediante una simple inspección de un conjunto de ecuaciones algebraicas en el dominio de la frecuencia, además de que las representaciones gráficas facilitan su análisis y diseño. Sin embargo, debe mencionarse que el análisis en el dominio de la frecuencia no puede ser aplicado directamente a sistemas no lineales, a pesar de esto se pueden realizar ciertas consideraciones para que las teorías de respuesta en frecuencia para sistemas lineales se puedan aplicar a sistemas no lineales.

En este capítulo se presentan los métodos en el dominio de la frecuencia, función descriptiva (FD) y lugar geométrico para sistemas relevados con perturbaciones (LGSRP), que se mostrará más adelante. El objetivo de aplicar FD y LGSRP a modos deslizantes de segundo orden (MD2O)[5] es obtener los parámetros de chattering[14]: amplitud y frecuencia. Al hacer un análisis de entrada-salida a las funciones signo de los algoritmos de MD2O, consideradas como relevadores, se obtiene la amplitud de la señal de entrada de la no linealidad y la frecuencia de la señal de salida de la misma, enfocándose en

la frecuencia, la frecuencia de la señal de salida de la función signo es la misma para la conmutación del relevador que genera las oscilaciones periódicas y al tratar el sistema como un sistema lineal, con ayuda de la ganancia equivalente, esta frecuencia se mantiene en cada parte del sistema ( $u(t)$ ,  $y(t)$ , véase Figura 2.1 ). Con respecto a la amplitud en la entrada del relevador, esta sí presenta variaciones a lo largo del sistema, pero se realimenta el sistema conectando la salida con el relevador, por lo tanto, la amplitud de la salida del sistema  $y(t)$  es la amplitud de la entrada del relevador, y es esta amplitud, la que se encuentra con FD y LGSRP, véase Figura 2.1.[15]

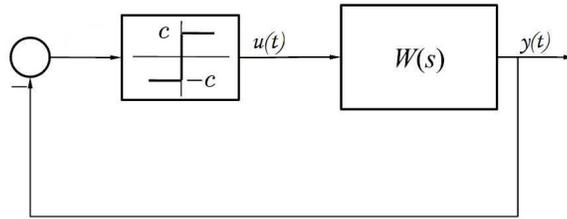


Figura 2.1: Esquema básico de control para un relevador.

## 2.2. Función descriptiva

A pesar de las restricciones que existen para los sistemas no lineales, para algunos existe una versión extendida del método de respuesta en frecuencia, esta versión es conocida como función descriptiva (FD), este método se puede utilizar para obtener un análisis aproximado y predecir el comportamiento de un sistema no lineal, a pesar de ser solo una aproximación dicho método es una herramienta muy práctica para los ingenieros en control. Los principales usos para el método de función descriptiva son: predecir las señales periódicas en sistemas no lineales, llevar a cabo la predicción de subarmónicas y la respuesta de un sistema no lineal a una entrada senoidal [23].

Al momento de realizar el análisis en el dominio de la frecuencia a través del método de función descriptiva, se debe considerar que solo debe existir una no linealidad como se muestra en la Figura 2.2, siendo así que la planta debe de ser lineal, se debe de considerar lo siguiente para la aplicación de Función Descriptiva:

1. Que el sistema sea invariante, incluyendo a la no linealidad, en el tiempo de tal manera que los parámetros que lo integran sean constantes.

2. La salida del bloque no lineal debe de considerarse por medio de su aproximación a través de la primera armónica de su serie de Fourier.
3. En la aproximación de la salida por la serie de Fourier se considera que el primer coeficiente  $a_0$  ( componente de directa u offset) es cero.
4. Que el sistema se comporte como un filtro paso-bajas, es decir  $n=1$  para la serie de Fourier.

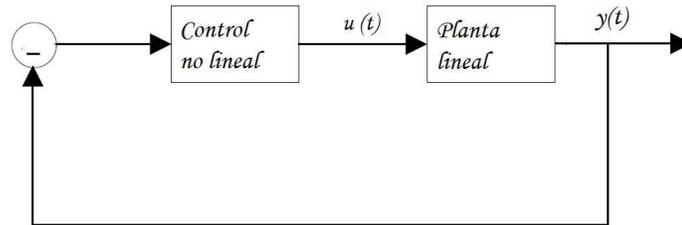


Figura 2.2: Esquema basico de control para realizar el analisis del controlador con función descriptiva

El problema de esto, consiste en obtener la relación de entrada-salida como se muestra en la FIGura 2.3 por lo cual se define a la entrada como:



Figura 2.3: Relación entrada y salida para el control no lineal

$$y(t) = A \sin(\omega t) \tag{2.1}$$

siendo  $A$  la amplitud y  $\omega$  la frecuencias de la señal de salida del sistemas.

y la salida  $u(t)$ , representada por su serie de Fourier:

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \text{sen}(n\omega t)] \quad (2.2)$$

Tomando en cuenta las consideraciones mencionadas anteriormente ( $a_0=0$  y  $n = 1$ ), resulta que la relación entrada–salida puede escribirse como:

$$\frac{u(t)}{y(t)} \simeq \frac{a_1 \cos(\omega t) + b_1 \text{sen}(\omega t)}{A \text{sen}(\omega t)} \quad (2.3)$$

Donde el numerador puede expresarse en términos de la identidad trigonométrica:

$$a_1 \cos(\omega t) + b_1 \text{sen}(\omega t) = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \text{sen}(\omega t + \phi) \quad (2.4)$$

donde puede definirse

$$M(A, \omega) = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \quad (2.5)$$

siendo  $\phi(A, \omega) = \text{angtg}(\frac{a_1}{b_1})$ . Entonces, puede escribirse:

$$\frac{u(t)}{y(t)} \simeq \frac{M(A, \omega) \text{sen}(\omega t + \phi)}{A \text{sen}(\omega t)} \quad (2.6)$$

Dado que se desea estudiar el comportamiento de la amplitud  $A$  y de la frecuencia  $\omega$  la relación  $\frac{u(t)}{y(t)}$  se escribe como una función de estas variables:

$$N(A, \omega) = \frac{M(A, \omega) \text{sen}(\omega t + \phi)}{A \text{sen}(\omega t)} \quad (2.7)$$

Para simplificar se recomienda utilizar la forma de euler para la variable compleja y así se llega a:

$$N(A, \omega) = \frac{M e^{j(\omega t + \phi)}}{A e^{j\omega t}} = \frac{M}{A} e^{j\phi} = \frac{(b_1 + j a_1)}{A} \quad (2.8)$$

Donde los coeficientes  $a_1$  y  $b_1$  de la primera componente de la serie de Fourier están dados por:

$$a_1 = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} u(t) \cos(\omega t) dt, \quad (2.9)$$

$$b_1 = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} u(t) \text{sen}(\omega t) dt \quad (2.10)$$

sustituyendo en Ec.2.8 se llega a:

$$N(A, \omega) = \frac{\omega}{\pi A} \int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} u(t) \text{sen}(\omega t) dt + j \frac{1}{\pi A} \int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} u(t) \cos(\omega t) dt \quad (2.11)$$

también se puede reescribir de la siguiente manera:

$$N(A, \omega) = \frac{\omega}{\pi A} \int_0^{2\pi/\omega} u(t) \text{sen}(\omega t) dt + j \frac{\omega}{\pi A} \int_0^{2\pi/\omega} u(t) \cos(\omega t) dt \quad (2.12)$$

### 2.2.1. Función descriptiva para un relevador

La siguiente ley de control se utiliza en el esquema de control de la Figura 2.3:

$$u(t) = -c \text{sign}(y(t)) \quad (2.13)$$

En la Figura 2.4 se muestra la señal que describe el comportamiento de un relevador en operación, cabe destacar que esta señal es periódica, también muestra a "T" el periodo de la señal, el tiempo de un ciclo completo considerado como  $2\pi$  unidades, en donde se considera que cada estado (positivo, negativo) ocupa exactamente la mitad del período como se muestra en la Figura 2.4.

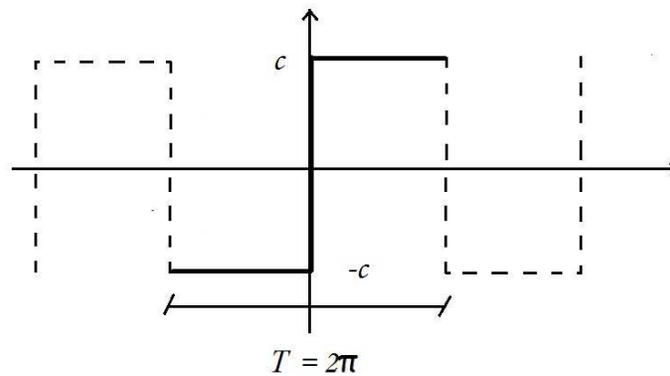


Figura 2.4: Señal generada por un relevador y su período

Si se repiten  $n$  ciclos iguales en el mismo tiempo, entonces puede escribirse la frecuencia angular como  $\omega = 2\pi n$ , esto es:

$$n = \frac{2\pi}{\omega} \quad (2.14)$$

Entonces, el modelo matemático de la señal se representa en la ecuación:

$$r(t) = \begin{cases} -c & \text{si } -\frac{\pi}{\omega} < t < 0 \\ 0 & \\ c & \text{si } 0 < t < \frac{\pi}{\omega} \end{cases} \quad (2.15)$$

Utilizando el análisis de Fourier, la señal del relevador puede representarse por:

$$r^*(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \text{sen}(n\omega t)] \quad (2.16)$$

Donde

$$a_0 = \frac{2}{p} \int_{-p}^p r(t) dt \quad (2.17)$$

$$a_n = \frac{2}{p} \int_{-p}^p r(t) \cos\left(\frac{n\pi}{p}t\right) dt \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (2.18)$$

$$b_n = \frac{2}{p} \int_{-p}^p r(t) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{p}t\right) dt \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (2.19)$$

Debido a que no hay componente de directa u offset en la señal del relevador entonces el valor de  $a_0$  es cero. De igual manera, debido a que  $r^*(t)$  es una función impar los coeficientes  $a_n \quad n = 1, 2, 3 \dots$  son también iguales a cero.

Sustituyendo valores para calcular  $b_n \quad n = 1, 2, 3 \dots$  se obtiene que:

$$b_n = \frac{2}{\omega} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} c \text{sen}\left(\frac{n\pi}{\omega}t\right) dt \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (2.20)$$

Realizando los cálculos

$$b_n = \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} c \text{sen}(n\omega t) dt \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (2.21)$$

$$b_n = \frac{2c}{\pi\omega} [1 - \cos(n\pi)] \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (2.22)$$

Sustituyendo  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$  en la ecuación (2.16) se llega a:

$$r^*(t) = \frac{2c}{n\pi} \text{sin}(n\omega t) \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (2.23)$$

Utilizando solo la primera armónica, esto es  $n = 1$ , se obtiene:

$$r^*(t) \simeq \frac{4c}{\pi} \text{sin}(\omega t) \quad (2.24)$$

Recordando que la función descriptiva se representa como la función de transferencia del elemento no lineal presentado en la Figura 2.5, resulta que la función descriptiva del relevador es donde se consideran las restricciones mencionadas, y estas son:

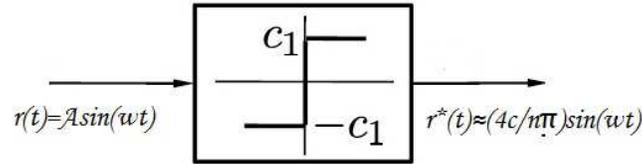


Figura 2.5: Relación de entrada y salida de un relevador.

$$N(A, \omega) = \frac{r^*(t)}{r(t)} = \frac{\frac{4c}{\pi} \text{sen}(\omega t)}{A \text{sen}(\omega t)} \quad (2.25)$$

$$N(A, \omega) = \frac{4c}{\pi A} \quad (2.26)$$

### 2.2.2. Función Descriptiva del Algoritmo de dos Relevadores

El algoritmo utilizado para este trabajo es el llamado "algoritmodedosrelevadores".

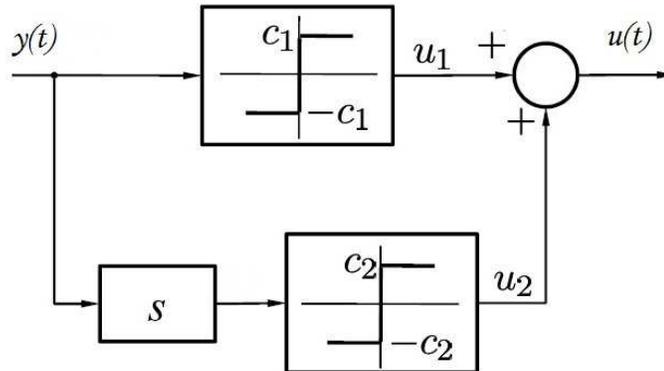


Figura 2.6: Esquema de control para el algoritmo de dos relevadores

$$u(t) = -c_1 \text{sign}(y(t)) - c_2 \text{sign}(\dot{y}(t)) \quad (2.27)$$

Este algoritmo puede representarse según la Figura 2.3 considerando que el control está formado como se muestra en la Figura (2.6) la función que define el comportamiento de un relevador se presenta en la Figura (2.4), matemáticamente puede expresarse como en la Ecuación (2.30). En base a esto se llega a que la función descriptiva del primer relevador es:

$$N_1(A_1, \omega) = \frac{4c_1}{\pi A_1} \quad (2.28)$$

y de la misma manera para el segundo relevador:

$$N_2(A_2, \omega) = \frac{4c_2}{\pi A_2} \quad (2.29)$$

En donde debe entenderse que si  $A_1$  es la amplitud de la señal de entrada al primer relevador entonces  $A_2$  será la amplitud de la señal de entrada al segundo relevador, la cual está afectada previamente por el término  $s$ , lo que implica la derivada de  $A_1 \text{sen}(\omega t)$ , es decir  $A_1 \omega \cos(\omega t)$ , por lo que se observa que la amplitud de la señal de entrada al segundo relevador es  $A_2 = A_1 \omega$ .

A pesar del control discontinuo (no lineal), la salida del esquema de la Figura 2.6 puede escribirse como una combinación lineal de la siguiente manera:

$$N(A_1, \omega) = N_1(A_1, \omega) + s N_2(A_1 \omega, \omega) \quad (2.30)$$

por lo que la función descriptiva del algoritmo de dos relevadores es:

$$N(A, \omega) = \frac{4c_1}{\pi A} + j\omega \frac{4c_2}{\pi A} = \frac{4}{\pi A} (c_1 + jc_2) \quad (2.31)$$

### 2.3. LGSRP: Lugar geométrico para sistemas relevados con perturbaciones

En esta sección se presenta el segundo método en el dominio de la frecuencia utilizado como herramienta para desarrollar este trabajo, el método se conoce como LPRS por sus siglas en inglés *Locus of a Perturbed Relay System* y se traduce al español como Lugar geométrico para sistemas relevados con perturbaciones.

El método se presenta a partir del concepto de balance armónico por lo que para explicarlo se parte de método de FD aplicado a un relevador con histéresis, refiriéndose a la Figura 2.7. Entonces,

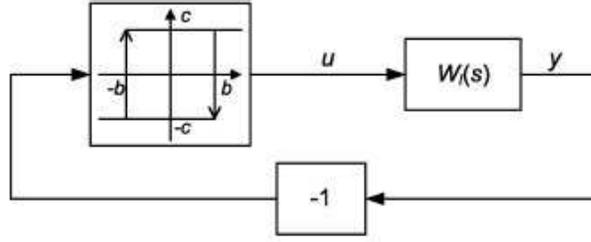


Figura 2.7: Esquema básico de control para un relevador, para la construcción de una traza LPRS

tomando como base las fórmulas del inverso negativo de la FD y de la ganancia equivalente de un relevador con histéresis, se muestran a continuación:

$$-N^{-1}(a) = -\frac{\pi a}{4c} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} - j \frac{\pi b}{4c}, (a \geq b) \quad (2.32)$$

$$k_{nFD} = \frac{2c}{\pi a} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}} \quad (2.33)$$

Y considerando la ecuación de balance armónico  $W(j\Omega) = -1/N(a)$ , puede escribirse la siguiente fórmula

$$W(j\Omega) = -\frac{1}{2}k_n(FD) - j \frac{\pi}{4c}y_{(FD)}(0) \quad (2.34)$$

Donde en la parte imaginaria de (2.34) puede verse la condición de conmutación del relevador de menos a mas (definida como tiempo cero), esta condición de conmutación se cumple cuando la salida del sistema es igual al valor negativo de la histéresis ( $-b$ ):  $y_{FD}(t=0) = -b$ .

El análisis con FD de un relevador muestra y permite considerar que la frecuencia de oscilación  $\Omega$  y el valor de la ganancia equivalente  $k_{n(FD)}$  cambian si se modifica el valor de la histéresis del relevador  $b$ , por lo tanto se consideran los siguientes mapeos: para  $\Omega$ ,  $M_1 : b \rightarrow \Omega$  y para  $k_{n(FD)}$ ,  $M_2 : b \rightarrow k_n$ . Asumiendo que  $M_1$  tiene un mapeo inverso  $M_1^{-1} : \Omega \rightarrow b$  y relacionando, se considera el mapeo  $M_2(M_1^{-1}) : \Omega \rightarrow b \rightarrow k_n$ . Ahora, definiendo una función  $J_{FD}$  que represente la expresión de la parte derecha de (2.34), si se aplica el mapeo  $M_2(M_1^{-1}) : \omega \rightarrow b \rightarrow k_n$ ,  $\omega \in [0; \infty)$ , en el cual la frecuencia  $\omega$  es el parámetro independiente, la expresión que representa a la función  $J_{FD}$  es la siguiente :

$$J_{FD}(\omega) = -\frac{1}{2k_n} + j \frac{\pi}{4c}y(t)\Big|_{t=0} \quad (2.35)$$

Donde  $k_n = M_2(M_1^{-1})$ ,  $y(t)|_{t=0} = M_1^{-1}$  y  $t=0$  es el tiempo de conmutación del relevador de  $-c$  a  $+c$ .

La parte real de  $J_{FD}(\omega)$  contiene información sobre la ganancia equivalente con lo cual se puede conocer la amplitud y la parte imaginaria de  $J_{FD}(\omega)$  que involucra la condición de conmutación del relevador, por lo que tiene información sobre la frecuencia de oscilación.

Es necesario señalar que los valores de  $k_n$  y de la frecuencia de oscilación  $\Omega$  de la expresión  $J_{FD}(\omega)$  son aproximados en relación con la hipótesis de filtro paso-bajas considerada al usar el método de FD. Entonces al no ser tan estricto con la hipótesis de filtro paso-bajas para tener valores exactos tanto de  $\Omega$  como de  $k_n$ , pues de esta manera se considerarían mas armónicas y no solo la primera, lo que tendría como resultado mayor aproximación en los valores de  $\Omega$  y  $k_n$ .

Por lo tanto, para poder considerar todas las frecuencias y tener mayor aproximación, se obtiene una función  $J(\omega)$  que sea válida para todas las frecuencias y que preserve la forma de  $J_{FD}(\omega)$ . A esta nueva función  $J(\omega)$  junto con su traza en el plano complejo para  $\omega \in [0; \infty)$  se le llama lugar geométrico de un sistema relevado perturbado LGSRP.

Suponiendo que contamos con el LGSRG de algún sistema que se desee analizar, igual que con FD, podemos obtener los valores de  $k_n$  y  $\Omega$  con la bondad de que se obtienen valores teóricamente exactos. En la FIGura 2.8 se muestra un posible ejemplo de la interpretación geométrica del LGSRP, el punto de intersección del LGSRP, es decir de la función  $J(\omega)$ , y la línea recta, la cual se encuentra a una distancia de  $\pi b/4c$  abajo del eje real y paralela a este eje, permite calcular la frecuencia de las oscilaciones y la ganancia equivalente  $k_n$  del relevador.

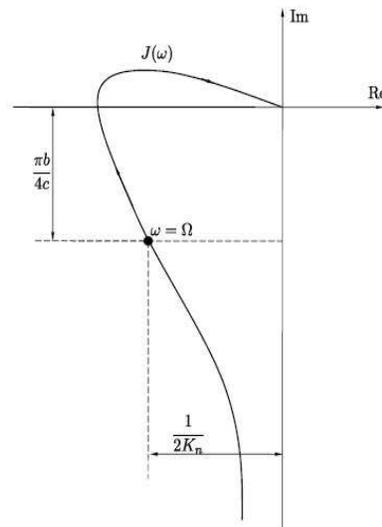


Figura 2.8: LPRS y análisis de oscilaciones

Cuando se calcula la función  $J(\omega)$  se desea conservar la forma de (2.35), la frecuencia de oscilaciones puede ser calculada resolviendo la ecuación:

$$ImJ(\Omega) = -\frac{\pi b}{4c} \quad (2.36)$$

y la ganancia equivalente  $k_n$  como

$$k_n = \frac{1}{2ReJ(\Omega)} \quad (2.37)$$

En resumen el LGSRP se puede definir como una representación exacta en el dominio de la frecuencia de un relevador.

En la siguiente sección se mostrará la forma en que se calcula  $J(\omega)$  para obtener los parámetros exactos de un sistema representado mediante una función de transferencia.

### 2.3.1. LGSRP para un sistema representado por su función de transferencia

A continuación se muestra como se obtiene la fórmula de  $J(\omega)$  que entrega valores exactos de amplitud y frecuencia para el caso en que se tenga una planta lineal sin integradores.

Expandiendo en serie de Fourier la señal  $u(t)$  de la FIGura 2.8, se obtiene:

$$u(t) = u_0 + \frac{4c}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{sen} \left( \frac{\pi k \theta_1}{(\theta_1 + \theta_2)} \right) \times \left\{ \cos \left( \frac{k\omega\theta_1}{2} \right) \cos(k\omega t) + \text{sen} \left( \frac{k\omega\theta_1}{2} \right) \text{sen}(k\omega t) \right\} \quad (2.38)$$

Donde  $u_0 = c(\theta_1 - \theta_2)/(\theta_1 + \theta_2)$ ,  $\omega = 2\pi/(\theta_1 + \theta_2)$ . Por lo tanto,  $y(t)$  como una respuesta de la planta con función de transferencia  $W(s)$  a una entrada  $u(t)$  puede escribirse como:

$$y(t) = y_0 + \frac{4c}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{sen} \left( \frac{\pi k \theta_1}{(\theta_1 + \theta_2)} \right) \times \left\{ \cos \left( \frac{k\omega\theta_1}{2} \right) \cos [k\omega t + \varphi(k\omega)] + \text{sen} \left( \frac{k\omega\theta_1}{2} \right) \text{sen} [k\omega t + \varphi(k\omega)] \right\} A(k\omega) \quad (2.39)$$

donde  $\varphi(k\omega) = \arg W(jk\omega)$ ,  $A(k\omega) = |W(jk\omega)|$ ,  $y_0 = u_0 |W(j0)|$ .

Las condiciones de conmutación del relevador de acuerdo a la FIGura 2.7 son las siguientes:

$$\begin{aligned} f_0 - y(0) &= b \\ f_0 - y(\theta_1) &= -b \end{aligned} \quad (2.40)$$

donde  $y(0)$  y  $y(\theta_1)$  se obtienen de (2.39) considerando  $t = 0$  y  $t = \theta_1$ , respectivamente:

$$y(0) = y_0 + \frac{4c}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ 0,5 \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi k \theta_1}{(\theta_1 + \theta_2)} \right) \operatorname{Re}W(jk\omega) + \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\pi k \theta_1}{(\theta_1 + \theta_2)} \right) \operatorname{Im}W(jk\omega) \right] / k \quad (2.41)$$

$$y(\theta_1) = y_0 + \frac{4c}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ 0,5 \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi k \theta_1}{(\theta_1 + \theta_2)} \right) \operatorname{Re}W(jk\omega) - \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\pi k \theta_1}{(\theta_1 + \theta_2)} \right) \operatorname{Im}W(jk\omega) \right] / k \quad (2.42)$$

Considerando (2.41) y (2.42) como conocidas, las incógnitas del sistema de ecuaciones formado por las condiciones de conmutación (2.40) son  $f_0$  y  $b$ . Las expresiones para obtener la solución del sistema de ecuaciones son:

$$f_0 = \frac{y(0) + y(\theta_1)}{2} \quad (2.43)$$

$$b = \frac{y(\theta_1) - y(0)}{2} \quad (2.44)$$

Derivando (2.40) con respecto a  $f_0$ , considerando (2.41) y (2.42), se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} & \frac{c|W(0)|}{2\theta} \left( \frac{d\theta_1}{df_0} - \frac{d\theta_2}{df_0} \right) \\ & + \frac{c}{\theta} \left( \frac{d\theta_1}{df_0} - \frac{d\theta_2}{df_0} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \cos(\pi k) \operatorname{Re}W(\omega_k) \\ & - \frac{2c}{\theta^2} \left( \frac{d\theta_1}{df_0} + \frac{d\theta_2}{df_0} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi k}{2} \frac{d\operatorname{Im}W(\omega_k)}{d\omega_k} - 1 = 0 \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} & \frac{c|W(0)|}{2\theta} \left( \frac{d\theta_1}{df_0} - \frac{d\theta_2}{df_0} \right) \\ & + \frac{c}{\theta} \left( \frac{d\theta_1}{df_0} - \frac{d\theta_2}{df_0} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \cos(\pi k) \operatorname{Re}W(\omega_k) \\ & + \frac{2c}{\theta^2} \left( \frac{d\theta_1}{df_0} + \frac{d\theta_2}{df_0} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi k}{2} \frac{d\operatorname{Im}W(\omega_k)}{d\omega_k} - 1 = 0 \end{aligned} \quad (2.46)$$

donde  $\omega_k = \pi k / \omega$ .

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior para  $d(\theta_1 - \theta_2)/df_0$  y  $d(\theta_1 + \theta_2)/df_0$  se obtienen las fórmulas que contienen las derivadas para el punto  $\theta_1 = \theta_2 = \theta = \pi/\omega$ , es decir,  $d(\theta_1 + \theta_2)/df_0|_{f_0=0} = 0$ , primera parte de la solución que corresponde a la derivada de la frecuencia de oscilación, y la segunda parte de la solución da como resultado:

$$\frac{d(\theta_1 - \theta_2)}{df_0} \Big|_{f_0=0} = 2\theta / \left[ c \left( |W(0)| + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos(\pi k) \operatorname{Re} W(\omega k) \right) \right] \quad (2.47)$$

Considerando la fórmula del sistema en lazo cerrado de  $f_0$  a  $u$  del sistema mostrado en la Figura 2.7, se puede escribir:

$$\frac{d(\theta_1 - \theta_2)}{df_0} \Big|_{f_0=0} = k_n / (1 + k_n |A(0)|) 2\theta / c \quad (2.48)$$

Igualando (2.47) y (2.48), y despejando  $k_n$ , se obtiene la siguiente expresión:

$$k_n = 0,5 / \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{Re} W(k\pi/\theta) \quad (2.49)$$

Tomando en cuenta la fórmula (2.49), la identidad  $\omega = \pi/\theta$ , y la forma de la función  $J_{FD}(\omega)$  que se quiere conservar para  $J(\omega)$ , se obtiene la expresión final para  $\operatorname{Re} J(\omega)$ :

$$\operatorname{Re} J(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \operatorname{Re} W(k\omega)$$

De manera similar, resolviendo (2.44) para  $b$  sustituyendo  $y(0)$  y  $y(\theta_1)$  con la forma de (2.41) y (2.42), respectivamente, se obtiene la expresión:

$$b = -\frac{4c}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\pi k \theta_1}{\theta_1 + \theta_2} \right) \operatorname{Im} W(k\omega) \quad (2.50)$$

Empleando la identidad  $\operatorname{sen}^2(A) = 0,5 - 0,5 \cos(2A)$  y considerando  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$  la expresión (2.50) se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} b &= -\frac{4c}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left\{ \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(k\pi) \right] \operatorname{Im} W(k\omega) \right\} \\ &= -\frac{4c}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left\{ \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (-1)^k \right] \operatorname{Im} W(k\omega) \right\} \\ &= -\frac{4c}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \operatorname{Im} W[(2k-1)\omega] \end{aligned} \quad (2.51)$$

Entonces conservando la forma de  $J_{FD}(\omega)$  para obtener  $J(\omega)$ , se sustituye (2.51) en (2.36) y se obtiene la parte imaginaria del LGSRP como:

$$\operatorname{Im} J(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \operatorname{Im} W[(2k-1)\omega]$$

Finalmente juntando la parte real y la parte imaginaria, la fórmula del LGSRP  $J(\omega)$  para sistemas representados en función de transferencia es:

$$J(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} ReW(k\omega) + j \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} ImW[(2k-1)\omega] \quad (2.52)$$

### 2.3.2. Contenido armónico para sistemas perturbados

Cuando se trabaja con señales en el dominio de la frecuencia y se lleva a cabo una implementación, se debe de considerar el efecto de las armónicas que se puedan generar, ya que si se considera que todas las plantas se comportan como un filtro paso-bajas, existirán un conjunto de valores de ciertas armónicas que pertenecerán al rango de operación en el que estamos trabajando. Es decir, si tenemos un rango de operación de 0 a 200[Hz] al momento de trabajar en 25[Hz] tendremos el efecto de las armónicas de 50, 75 y 100 (correspondiente a su segunda, tercer y cuarta armónica respectivamente) sobre nuestra frecuencia objetivo, estos efectos pueden ser visto como ligeras deformaciones en las señales con las que se trabaja, de esta manera, el efecto sobre nuestra frecuencia objetivo se va disminuyendo así como aumenta el grado de la armónica[16].

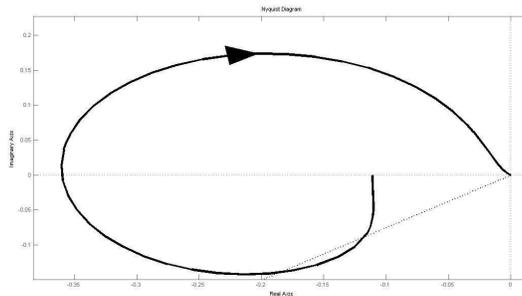


Figura 2.9: Nyquist de la suma de un sistema con una perturbación

Como se puede ver en la FIGura 2.9 la línea punteada toca en dos puntos la traza resultante de la suma de un sistema y una perturbación, a partir de esto se puede concluir que al presentarse algún tipo de perturbación se puede presentar variación en la frecuencia y en la amplitud de la señal de salida del sistema.