

Capítulo 2

Antecedentes

En este capítulo, se definen en forma breve conceptos importantes para el diseño posterior de los controladores. Se explican las formas de modelado utilizadas para el trabajo. Así como la teoría para el diseño de controladores LQR y controladores difusos.

2.1. Conceptos básicos de control

Se considera **sistema**, a un conjunto de entradas y uno de salidas, que se relacionan de forma definida entre sí; además de poseer una frontera que los diferencia del ambiente. Existen varias maneras de catalogar a los sistemas de acuerdo a sus características. En esta tesis se trabaja únicamente con **sistemas dinámicos o con memoria**; esto quiere decir que la salida de estos depende tanto de la entrada presente, así como de entradas pasadas. Visto de otra forma, todos los sistemas con los que se trabaja tienen elementos almacenadores de energía.

El modelo de un sistema dinámico es un conjunto de ecuaciones que representan su dinámica, de forma adecuada para el objetivo de análisis y diseño. Es importante resaltar que un modelo matemático no es único para un sistema determinado; sino que pueden existir varios modelos para este, de forma que un modelo matemático puede ser más conveniente que otro dependiendo del empleo que se le dé.

Por otra parte, un **sistema de parámetros concentrados** es aquel en el que el número de variables que intervienen en el modelo es finito. En caso de que los coeficientes de las ecuaciones diferenciales que conforman al modelo sean constantes, se trata de un **sistema invariante en el tiempo**; esto quiere decir, que las características de los sistemas no cambian conforme éste transcurre. Los modelos vistos en este trabajo son de parámetros concentrados e invariantes en el tiempo.

Se ha dicho que todos los sistemas con los que se trabaja en esta tesis son dinámicos, es decir, que no dependen sólo de las entradas presentes. No obstante,

los tres sistemas presentes en este trabajo son físicos y por tanto son **sistemas causales**; esto quiere decir que su salida en tiempo presente, depende únicamente de valores pasados y/o presentes de las variables de entrada, pero nunca de valores futuros de éstas.

Se dice que un **sistema es lineal**, siempre que cumpla con el principio de superposición, el cual se expresa

$$\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) \rightarrow \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{R}.$$

En un sistema lineal, la respuesta ante múltiples entradas se calcula, tratando cada una por separado y sumando los resultados. Otra condición para que el sistema sea lineal, es que la salida debe de ser cero mientras no se le aplique una entrada.

Otra forma de clasificar a los sistemas es desde el punto de vista energético. Los sistemas en los cuales existen pérdidas de energía son llamados **sistemas disipativos**; que se identifican porque presentan elementos resistivos o fricciones. Desde un punto de vista mecánico, una fuerza disipativa es aquella que merma la energía cinética del sistema, sin convertirla en energía potencial reutilizable.

Aquellos sistemas en donde no se presentan fuerzas disipativas, y por tanto elementos resistivos o fricciones, son llamados **sistemas conservativos**, dado que conservan su energía no cediéndola al medio con el que interactúan.

2.2. Tipos de modelado

En este trabajo, se utilizan dos formas de modelado de sistemas: variables de estado y método de Euler-Lagrange. En esta sección se da una breve descripción de los métodos de modelado y sus características.

2.2.1. Variables de estado

Se define **estado** como el conjunto más pequeño de variables, cuyo conocimiento en un tiempo $t = t_0$, junto con el conocimiento de la entrada en un tiempo $t \geq t_0$ determinan el comportamiento del sistema para $t \geq t_0$. Mientras que las **variables de estado** son las que forman al conjunto más pequeño de variables que determina el estado del sistema. La representación en variables de estado pretende describir al sistema mediante n ecuaciones diferenciales de primer orden; dando origen a una ecuación diferencial matricial de primer orden. El modelo, para el caso de parámetros invariantes en el tiempo, se representa:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) \end{bmatrix},$$

$$y = \begin{bmatrix} h_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) \\ h_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) \\ \vdots \\ h_p(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) \end{bmatrix},$$

donde:

n es el número de estados del sistema,

m es el número de entradas del sistema,

p es el número de salidas del sistema,

Si el sistema es lineal se representa de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax(t) + Bu(t), \\ y &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned}$$

donde:

x es el vector de estados del sistema,

y es el vector de salidas producidas por el sistema,

u es el vector de entradas aplicadas al sistema,

A, B, C y D son las matrices de coeficientes.

El uso de este tipo de modelado permite el diseño de observadores para estimar los estados que se desconocen, así como el análisis de cada estado en forma individual.

Un **punto de equilibrio** se puede ver como el punto, en el que el sistema permanece sino se le excita. Además, es aquel valor de $x = X$ y $u = U$ tal que es solución de

$$f(X, U) = 0, \quad \dot{x} = 0.$$

Para el caso de un sistema lineal el punto de equilibrio es único y se encuentra en el origen; mientras que un sistema no lineal puede presentar varios puntos de equilibrio.

Un sistema es **controlable**, si para cualquier condición inicial $X_0 = X(0)$, existe una entrada $u(t)$ tal que lleva al sistema a cualquier condición final $X(t_1)$ en tiempo finito.

Para determinar si un sistema lineal es controlable, como se indica en [5] se obtiene la matriz de controlabilidad

$$\varrho = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B],$$

siendo n es el número de estados del sistema

Una vez obtenida la matriz de controlabilidad ϱ , se determina su rango. El rango de una matriz, se obtiene del número máximo de renglones o columnas linealmente independientes entre sí, se dice que una matriz es de rango completo si todos sus renglones y columnas son linealmente independientes. Si la matriz ϱ es de rango completo, entonces el sistema es totalmente controlable [5].

2.2.2. Método de Euler-Lagrange

Las ecuaciones de Euler-Lagrange se pueden utilizar para describir un sistema y por tanto, para modelarlo. Este tipo de modelado se basa en obtener las ecuaciones de energía del sistema, y mediante derivadas parciales describir el comportamiento de éste en un arreglo de matrices, las cuales se relacionan con las diferentes coordenadas del sistema [15].

La ecuación de Euler-Lagrange para las fuerzas generalizadas que actúan sobre el sistema es

$$Q_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}, \quad (2.1)$$

donde

q_j es la coordenada generalizada de la j -ésima partícula,

Q_j son las fuerzas generalizadas que actúan sobre la partícula j ,

T es la energía cinética total del sistema,

Para el caso de los sistemas mecánicos, las coordenadas q_j se refieren a posiciones [4]. Por lo que \dot{q}_j es la velocidad generalizada de dicha partícula.

Si se supone que el sistema es conservativo (todas sus fuerzas son conservativas), se pueden expresar a todas las fuerzas como un potencial, quedando

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}, \quad (2.2)$$

en donde V es la energía potencial total del sistema. Se pueden igualar las ecuaciones 2.1 con 2.2, teniendo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} &= -\frac{\partial V}{\partial q_j}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial(T - V)}{\partial q_j} &= 0. \end{aligned}$$

El lagrangiano expresa la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial del sistema, estando definido como

$$L = T - V.$$

Para el caso de los sistemas mecánicos la energía potencial no depende de las velocidades, por lo que

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0,$$

entonces

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}.$$

De esta forma las ecuaciones del sistema se pueden definir mediante el lagrangiano, teniendo

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0.$$

Para el caso general no se pueden expresar todas las fuerzas del sistema como un potencial, dado que no todas son conservativas. La ecuación de Euler-Lagrange para las fuerzas disipativas generalizadas que actúan sobre el sistema es

$$\tilde{Q}_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j}.$$

El modelado mediante ecuaciones de Euler-Lagrange o mediante el lagrangiano, generalmente se expresa de la forma:

$$\tau = M(\dot{q})\ddot{q} + D(q, \dot{q}) + G(q) + C(q, \dot{q})\dot{q},$$

en donde:

M es la matriz de inercias del sistema, siempre es invertible,

D es la matriz de disipación del sistema, es positiva semidefinida, cuando no hay fricciones es cero,

G es la matriz de gravedad del sistema, contiene la información de las fuerzas asociadas a la gravedad,

C es la matriz de coriolis del sistema, contiene la información de los efectos de fuerzas de coriolis y términos rotacionales,

q es el vector de estados del sistema,

τ es la entrada del sistema,

2.3. Discretización

Cuando se hacen implementaciones físicas se debe tomar en cuenta que las lecturas del sistema tienen cierto tiempo de muestreo, por lo que resulta conveniente pasar del tiempo continuo al discreto en la planta. Lo anterior se puede hacer por diversos métodos, en esta tesis se utiliza el método de discretización exacta con retenedor de orden cero (ZOH). Para un sistema lineal representado en variables de estado este método se expresa como

$$A_d = e^{A_c T_s},$$

$$B_d = \int_0^{T_s} e^{A_c a} B_c da,$$

$$C_d = C_c,$$

$$D_d = D_c,$$

donde $T_s =$ es el tiempo de muestreo, el cual debe ser el mismo para el diseño de controladores u observadores.

2.4. Linealización

La mayoría de los sistemas tienen una naturaleza no lineal, mientras que algunas técnicas de control como LQR o asignación de polos, únicamente trabajan con sistemas lineales.

Una alternativa es linealizar los sistemas para facilitar el diseño de controladores, lo cual se logra aproximando el comportamiento del sistema no lineal al de un plano o una recta, dicha aproximación se hace en torno a un punto de operación. Para lo cual se modela al sistema en variables de estado [5], teniendo la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u), \quad x(t_0) = x_0, \\ y &= h(x, u),\end{aligned}$$

con puntos de equilibrio constantes (U, X, Y) .

El siguiente paso es expandir al sistema en torno al punto de operación $x = X$ y $u = U$, lo que se hace mediante series de Taylor. Siendo el resultado de la expansión

$$\begin{aligned}f(x, u) &= f(X, U) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(X, U)} + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(X, U)} + T.O.S, \\ h(x, u) &= h(X, U) + \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{(X, U)} + \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{(X, U)} + T.O.S,\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} h_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ \vdots \\ h_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Las matrices del sistema linealizado en torno al punto de operación se obtienen a partir de los jacobianos de la siguiente forma

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(X, U)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \vdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

$$B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(X,U)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \vdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}, \quad B \in \mathfrak{R}^{n \times m},$$

$$C = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{(X,U)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_p}{\partial x_1} & \vdots & \frac{\partial h_p}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad C \in \mathfrak{R}^{p \times n},$$

$$D = \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{(X,U)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_p}{\partial u_1} & \vdots & \frac{\partial h_p}{\partial u_m} \end{bmatrix}, \quad D \in \mathfrak{R}^{p \times m}.$$

Finalmente se considera que $x - X$ es un valor pequeño, con lo que se puede aproximar al sistema como

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= A\bar{x} + B\bar{u}, \\ \bar{y} &= C\bar{x} + D\bar{u}, \end{aligned}$$

en donde

$$\bar{x} = x - X, \quad \bar{u} = u - U, \quad \bar{y} = y - Y \quad \text{y} \quad \dot{\bar{x}} = \dot{x}.$$

Es importante mencionar que el modelo linealizado, únicamente es válido para una región cercana al punto de operación respecto al cual se linealiza.

2.5. Estabilidad en el sentido de Lyapunov

La estabilidad de un sistema se entiende como la continuidad en la evolución de sus trayectorias, ante pequeños cambios de la condición inicial y la entrada [7].

Para conocer la estabilidad en el sentido de Lyapunov se considera una entrada $u(t) = 0$ y una condición inicial $X_0 \neq 0$ para un sistema $\dot{x} = f(x)$ con un punto de equilibrio $X = 0$, en donde se dice lo siguiente

- Es marginalmente estable si cada X_0 finito excita una respuesta de $x(t)$ acotada.
- Es asintóticamente estable si cada X_0 finito excita una respuesta de $x(t)$ acotada que además cumple con

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

En cuanto a los puntos de equilibrio, se definen tres regiones con centro en el punto de equilibrio. La primera de radio k es una bola que contiene a las soluciones y condiciones iniciales del sistema, la región de las soluciones es la de radio ε y la región de las condiciones iniciales es de radio δ . Un punto

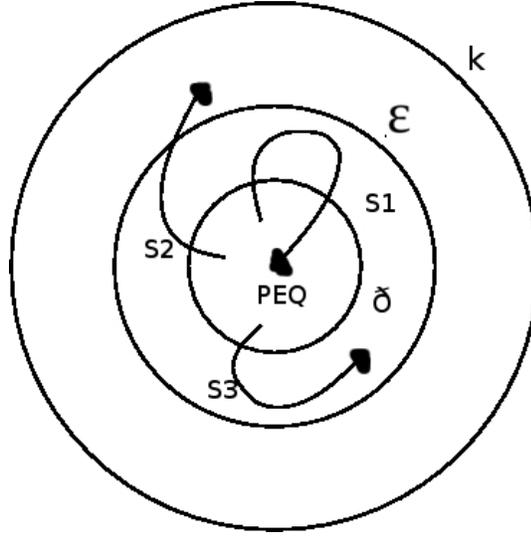


Figura 2.1: Regiones alrededor del punto de equilibrio

de equilibrio es estable, si todas las trayectorias que comienzan dentro de la región de radio δ permanecen dentro de la región de radio ϵ cuando el tiempo tiende a infinito, tal es el caso de la trayectoria S_3 en la figura 2.1. Si, además, dicha trayectoria tiende al punto de equilibrio, como en la trayectoria S_1 en la misma figura, se trata de un punto de equilibrio asintóticamente estable. Si la trayectoria sale de la región de radio ϵ el punto de equilibrio es inestable, como lo muestra S_2 [21].

Para el caso de los sistemas lineales $\dot{x} = Ax$ con una entrada acotada $u(t) = 0$ y una condición inicial $X_0 \neq 0$, la estabilidad se puede determinar mediante los valores característicos λ_i de A : son marginalmente estables los sistemas con al menos un valor característico $\lambda_i = 0$; asintóticamente estables los que tengan todos sus valores característicos con parte real menor negativa e inestables los que tengan al menos un valor característico con parte real positiva.

Para el caso de los sistemas discretos la estabilidad también es determinada por sus valores característicos. Siendo estables aquellos sistemas en los cuales todos sus valores propios se encuentren dentro de un círculo de radio unitario con centro en el origen. Por su parte, los sistemas con uno o más valores propios que salen del círculo mencionado, son inestables.

2.6. Control óptimo lineal

El control óptimo se basa en minimizar una función de costo, tal que encuentre la ley de control más adecuada para el problema que se ataca [5]. La

función de costo a minimizar está dada por la ecuación:

$$J = m(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} l(x, u, t) dt,$$

en donde la función l es el término de pesos, tanto para la trayectoria $x(t)$ como para el esfuerzo de control $u(t)$; por su parte el término $m(x(t_1))$ evalúa el estado final del sistema.

Dado un sistema

$$\dot{x} = f(x, u, t),$$

con un control realimentado $u(t) = \varphi(x, t)$. El valor mínimo de la función de costo J , se define como

$$J^* = \min_{u[t_0, t_1]} \left\{ \int_{t_0}^{t_1} l(x, u, t) dt + m(x(t_1)) \right\},$$

donde al control que minimiza a J se le denomina “control óptimo ” y se le denota u^* . Este control es único para cada función de costo.

Por su parte, según el **principio de optimalidad** si $u^*(t)$ es óptimo en el intervalo $[t, T]$, entonces necesariamente es óptimo en el subintervalo $[t + \Delta t, T]$

La solución al problema de optimalidad se obtiene a partir de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman

$$-\frac{\partial J^*}{\partial t} = \min_{u[t]} \left\{ l(x, u, t) + \frac{\partial^T J^*}{\partial x} f(x, u, t) \right\},$$

que tiene como condición de frontera

$$J^*(x, T) = m(x(T)) \forall x.$$

Por su parte, el control que minimiza a J es

$$u^* = \varphi \left(\frac{\partial^T J^*}{\partial x}, x, t \right),$$

al aplicarse a la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman

$$-\frac{\partial J^*}{\partial t} = l(x, \varphi \left(\frac{\partial^T J^*}{\partial x}, x, t \right), t) + \frac{\partial^T J^*}{\partial x} f(x, \varphi, t),$$

con condición de frontera en

$$J^*(x, T) = m(x(T)).$$

El regulador cuadrático lineal (LQR por sus siglas en inglés) es un caso particular de control óptimo lineal, en el cual se manejan en forma matricial, tanto la ecuación de estado como los factores de peso del sistema. Es un controlador por realimentación de estados, con ganancia constante, es decir, estático. Para el caso particular de un LQR se tienen las siguientes características:

un sistema lineal en la forma

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t),$$

con un control lineal realimentado

$$u = -k(t)x(t),$$

donde el objetivo es regular a x en un punto de equilibrio.

De esta manera, se forma la función de costo cuadrática

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (x^T Q x + u^T R u) dt + x^T(t_1) M x(t_1),$$

con

$$Q \in \mathfrak{R}^{n \times n}, Q \geq 0,$$

$$R \in \mathfrak{R}^{m \times m}, R > 0,$$

$$M \in \mathfrak{R}^{n \times n}, M \geq 0,$$

siendo n el número de estados y m es el número de entradas del sistema.

En la función de costo Q es la matriz de pesos de los estados, mientras que R es la matriz de peso del gasto energético. Cuando se incrementa Q se asigna un mayor peso a la convergencia de los estados, de manera similar, al incrementar R se incrementa el peso asignado al gasto energético.

En la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman la función de costo tiene la relación

$$l(x, u, t) = x^T Q x + u^T R u,$$

$$J^*(x, t_1) = x^T(t_1) M x(t_1),$$

$$f(x, u, t) = Ax + Bu,$$

en donde $Mx(t_1)$ es el término que evalúa el estado final del sistema.

Se desea minimizar al término

$$l(x, u, t) + \frac{\partial^T J^*}{\partial x} f(x, u, t),$$

el cual se reescribe como

$$H = x^T Q x + u^T R u + \frac{\partial^T J^*}{\partial x} (Ax + Bu).$$

Para obtener el mínimo, se deriva con respecto a u y se iguala con cero

$$\nabla_u H = u^T R + u^T R + \frac{\partial^T J^*}{\partial x} B = 0,$$

$$2u^T R = -\frac{\partial^T J^*}{\partial x} B,$$

debido a que $R > 0$ es posible obtener R^{-1} , entonces

$$u^* = -\frac{1}{2} R^{-1} B^T \frac{\partial^T J^*}{\partial x}.$$

Para comprobar que u^* es un mínimo se obtiene la segunda derivada

$$\nabla_u^2 H = 2R > 0.$$

Considerando que $u^* = -k(t)x(t)$, el valor mínimo de J toma la forma

$$J^* = x^T(t)P(t)x(t),$$

que es una forma cuadrática con $J^* > 0$ y con $P(t) = P^T(t)$.

De esta manera

$$\left(\frac{\partial J^*}{\partial x}\right)^T = x^T P + x^T P = 2x^T P,$$

entonces

$$u^* = -R^{-1} B^T P(t)x(t),$$

y por lo tanto $k(t) = R^{-1} B^T P(t)$.

Para encontrar a $P(t)$ se sustituye el control óptimo en la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman

$$\begin{aligned} f(x, u, t) &= (A - BR^{-1}B^T P)x(t), \\ l(x, u, t) &= x^T Qx + (-x^T PBR^{-1})R(-R^{-1}B^T Px), \\ \frac{\partial J^*}{\partial t} &= \frac{\partial(x^T Px)}{\partial t} = x^T \dot{P}x, \end{aligned}$$

pudiendo reescribir la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman como

$$-x^T \dot{P}x = x^T Qx + x^T PBR^{-1}B^T x + 2x^T P(A - BR^{-1}B^T P)x.$$

Desarrollando la ecuación anterior

$$-x^T \dot{P}x = x^T Qx + 2x^T P Ax - x^T PBR^{-1}B^T Px.$$

Sin embargo el término $2x^T P Ax$ se puede expresar como

$$\begin{aligned} 2x^T P Ax &= x^T P Ax + x^T P Ax, \\ &= x^T P Ax + (x^T P Ax)^T, \\ &= x^T P Ax + x^T A^T P x. \end{aligned}$$

Además se puede obviar la forma cuadrática $x^T(\dots)x$, obteniendo finalmente la ecuación de Ricatti, dada por

$$-\dot{P} = Q - PBR^{-1}B^T P + A^T P + PA \quad ; P \in \mathfrak{R}^{n \times n},$$

$$m(x(t_1)) = x^T(t_1)Mx(t_1),$$

cuya condición de frontera es

$$P(t_1) = M.$$

En esta tesis únicamente se utiliza el método de solución del LQR para tiempo infinito, en el cual la función de costo está dada por

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt.$$

En el problema de horizonte de tiempo infinito se asume que P es una solución estable, por lo que $\lim_{t \rightarrow \infty} P < \infty$. Lo que implica que $\dot{P} = 0$, razón por la cual la ecuación de Ricatti queda reducida a

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0,$$

lo cual resulta en un control con ganancia constante.

$$u = -kx,$$

$$k = R^{-1}B^T P(t).$$

Aunque la ecuación de Ricatti tiene varias soluciones para P , se debe considerar aquella en la que $P > 0$ y además sea invertible.

Para el caso discreto la función de costo que se desea minimizar es

$$J = \sum_{n=0}^{\infty} (x^T Q x + u^T R u).$$

Se busca la matriz $P[n]$ que solucione la ecuación de Ricatti en tiempo discreto dada por

$$A^T P A - P - (A^T P B)(R + B^T P B)^{-1}(B^T P A) + Q = 0.$$

Al igual que en el caso de tiempo continuo P debe de ser invertible, además de positiva definida. R debe de ser positiva definida y Q positiva semidefinida.

Al encontrar la matriz P que cumpla con lo anterior y sea solución de la ecuación de Ricatti se puede encontrar una matriz de ganancias k

$$k = (B^T P B + R)^{-1}(B^T P A), \quad (2.3)$$

en donde el control está dado por $u = -kx$ y el sistema en variables de estado en tiempo discreto se expresa como

$$x[n+1] = Ax[n] + Bu[n].$$

2.7. Incertidumbre paramétrica

En algunos campos complejos, los modelos matemáticos únicamente sirven para simplificar y reducir representaciones de la física real del sistema; en estos casos existen un gran número de incertidumbres en los parámetros, condiciones iniciales y finales, y leyes constitutivas de éste [23].

Suponiendo un sistema dinámico

$$\dot{x} = f(x, u, t),$$

$$y = h(x, u, t),$$

el comportamiento de este sistema se determina mediante los coeficientes de las matrices que lo caracterizan. Por lo general, en los casos prácticos, estos coeficientes dependen de parámetros físicos, tales como masas, resistencias, coeficientes de fricción, etc [2]. Se llama **incertidumbre paramétrica** a la falta o deficiencia en la información de los parámetros antes mencionados; se presenta cuando no se conocen exactamente las condiciones iniciales o finales, los parámetros físicos del sistema, las leyes constitutivas del modelo o existe ruido en la medición. Todos los fenómenos anteriores, se presentan en gran medida en sistemas físicos complejos de modelar, como ya se ha dicho.

Los principales problemas que se presentan para modelar o eliminar incertidumbres paramétricas son

1. Uso de herramientas matemáticas complejas para el manejo de señales, que por lo general no son diferenciables ni integrables de manera ordinaria
2. Es complicado realizar experimentos con procesos aleatorios, debido a que se requiere material especial y bastante tiempo de medición
3. Las no linealidades producen grandes perturbaciones en la teoría lineal, razón por la cual los sistemas pueden llegar a ser complejos de modelar adecuadamente de forma convencional.

El análisis del impacto que tienen las incertidumbres paramétricas, constituye una rama de investigación dentro de la teoría de control.

2.8. Sistemas difusos

2.8.1. Lógica difusa

La lógica difusa fue propuesta por Lofti Zadeh en 1965, con el tiempo ha demostrado ser útil en la solución de problemas de control. Ha sido empleada con mucho éxito sobre todo en Japón, en donde se pueden encontrar componentes de lógica difusa en aparatos como televisores, cámaras de video, lavadoras, hornos de microondas, etc [1]. En lo referido a control, se ha utilizado para sistemas de purificación de agua y procesos de manufactura en la industria cementera; quizás una de las aplicaciones más importantes de control mediante sistemas difusos,

es la utilizada para la operación de los trenes automáticos del subterráneo de la ciudad de Sendai [20].

En la lógica difusa, una variable pertenece en cierto grado a un conjunto, dicha pertenencia toma valores dentro del intervalo $[0, 1]$. La lógica booleana se puede entender como un caso particular de la lógica difusa, en el que la variable toma el valor de 0 o 1 según sea el caso.

Adjetivos como “mucho” o “poco” a menudo se utilizan en el lenguaje coloquial de las personas para denotar qué tan marcada es alguna característica; dicho análisis se realiza de forma empírica. Como ejemplo se puede considerar el clima, del cual sin conocer algún modelo matemático que lo describa, las personas son capaces de hacer un análisis e indicar cuándo un día es frío o caluroso.

Este tipo de análisis empírico presenta la ventaja de no requerir un modelo que describa al sistema, sin embargo, es necesario contar con un vasto conocimiento de éste, para que el análisis sea lo más adecuado posible.

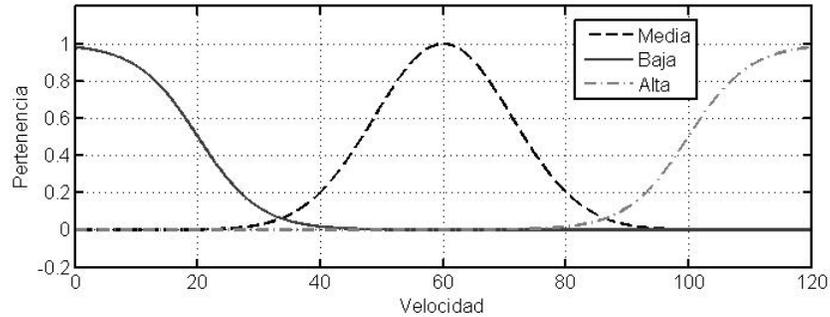


Figura 2.2: Ejemplo de conjuntos difusos para la velocidad de un carro

Los sistemas difusos se componen principalmente por tres partes, que son

- **Conjuntos difusos.**- Son los conjuntos a los cuales puede pertenecer una variable, por ejemplo para el caso de la estatura de una persona, pueden existir los conjuntos difusos de estatura alta, estatura media o estatura baja, se puede observar un ejemplo en la figura 2.2. Las variables de entrada se etiquetan con términos lingüísticos.
- **Funciones de membresía.**- Determinan el valor de pertenencia de una variable a un conjunto difuso. Algunos tipos de funciones de membresía son

$$\begin{array}{l}
 \text{Trapezoidales} \\
 \text{Triangulares} \\
 \text{Gaussianas} \\
 \text{Sigmoiales}
 \end{array}
 \mu_i(x) = \left\{ \begin{array}{l} -a_1x + b_1, x \in [x_{min}, x_{m1}] \\ c, x \in [x_{m1}, x_{m2}] \\ a_2x + b_2, x \in [x_{m2}, x_{max}] \end{array} \right\}$$

$$\mu_i(x) = \left\{ \begin{array}{l} -a_1x + b_1, x \in [x_{min}, x_{m1}] \\ a_2x + b_2, x \in [x_{m2}, x_{max}] \end{array} \right\}$$

$$\mu_i(x) = e^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

$$\mu_i(x) = \frac{\tanh(x)+1}{2}$$

los cuales se muestran en la figura 2.3

- **Reglas difusas.**- Son variables lingüísticas expresadas mediante conjuntos difusos, las cuales tienen la estructura

Si x_1 es A_1 y x_2 es A_2 y ... y x_n es A_n (parte antecedente) entonces y es B_i (parte consecuente)

En la salida final cada regla se debe ponderar, el valor de verdad o valor de activación de cada regla depende de su parte antecedente.

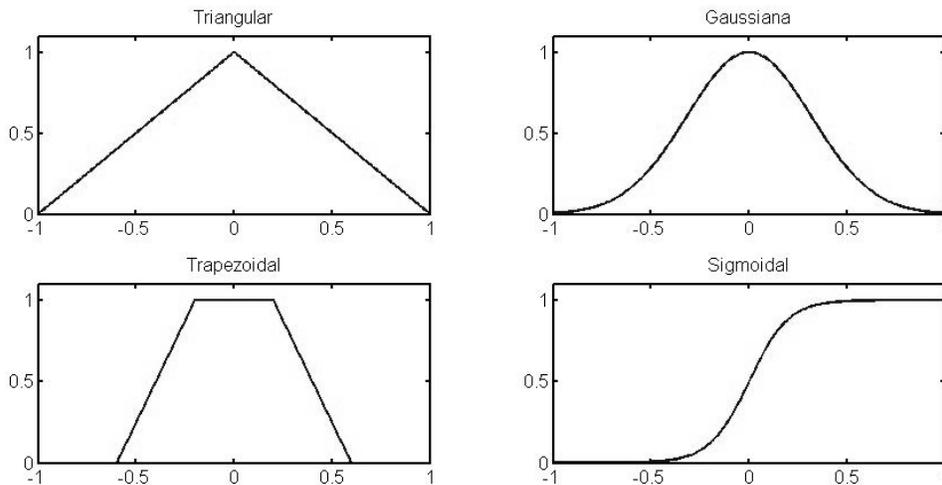


Figura 2.3: Ejemplos de funciones de membresía

2.8.2. Operadores lógicos difusos

Son una extensión de los operadores lógicos booleanos, en donde los valores se obtienen mediante las funciones de membresía de cada variable. Los operadores lógicos difusos son

$$\begin{array}{ll}
\text{Negación } NOT & NOT(\mu_i(x)) = 1 - \mu_i(x) \\
\text{Conjunción } AND & \mu_i(x)AND\mu_j(x) = \left\{ \begin{array}{l} \min[\mu_i(x), \mu_j(x)] \\ \mu_i(x)\mu_j(x) \\ \max[0, \mu_i(x) + \mu_j(x) - 1] \end{array} \right\} \\
\text{Disyunción } OR & \mu_i(x)OR\mu_j(x) = \left\{ \begin{array}{l} \max[\mu_i(x), \mu_j(x)] \\ \mu_i(x) + \mu_j(x) - \mu_i(x)\mu_j(x) \\ \min[1, \mu_i(x) + \mu_j(x)] \end{array} \right\}
\end{array}$$

Para clasificación o rápida implementación en procesadores limitados se utilizan los criterios de *max* y *min*, mientras que en sistemas de identificación, control y aproximación se suelen utilizar las formas algebraicas, por suavidad y diferenciabilidad.

2.8.3. Sistemas Difusos Takagi-Sugeno

El diagrama de bloques de la figura 2.4 muestra las etapas de los sistemas difusos



Figura 2.4: Diagrama de bloques que describe el proceso de un control difuso

El proceso de *difusión* es aquel en donde las entradas adquieren grados de pertenencia para los pasos posteriores, la *agregación* es la evaluación de la parte antecedente, la *activación* es la evaluación de la parte consecuente, la *acumulación* es la combinación de las partes consecuentes y finalmente la *desdifusión* es donde se obtiene la decisión final.

Según el método utilizado para llevar a cabo los pasos anteriores, los sistemas difusos se dividen en tipo **Mamdani**, **Larsen**, **Tsukamoto** o **Takagi-Sugeno** [12].

Para esta tesis únicamente se utilizan sistemas difusos del tipo Takagi-Sugeno en los cuales las reglas están dadas en la forma

$$R_i : \text{si } x_1 \text{ es } A_{i1} \text{ y } x_2 \text{ es } A_{i2} \text{ y } \dots \text{ y } x_k \text{ es } A_{ik} \text{ entonces } f_i(x_1, x_2, \dots, x_k), \\ i = 1, 2, \dots, n,$$

o bien de la forma

$$R_i : \text{si } x_i \text{ es } A_i \text{ entonces } f_i(x), i = 1, 2, \dots, n,$$

donde f_1, f_2, \dots, f_n son funciones $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k \rightarrow \mathfrak{R}$ y $A_i = \bigwedge_{j=1}^k A_{ij}$.

Dichas reglas se combinan para obtener la función

$$R(x) = \frac{A_1(x)f_1(x) + A_2(x)f_2(x) + \dots + A_n(x)f_n(x)}{A_1(x) + A_2(x) + \dots + A_n(x)},$$

la cual es una función real.

Tomando el producto de los elementos A_{ij} , las reglas difusas se pueden expresar de una manera simplificada como

$$R_j : \text{si } x \text{ es } A_j \text{ entonces } u_j = f_j(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

donde el grado de activación de cada regla R_j es $A_j(x)$, mientras que el valor total de la señal de control se obtiene a partir del método de desfusión de promedios ponderados. El cual consiste en obtener un promedio de todas las reglas con su respectivo grado de activación, es decir, al momento de promediar tienen un mayor peso las reglas que presentan un mayor grado de activación; para este caso se utiliza el criterio de máximos para realizar la conjunción entre funciones [14].

La desfusión por este método se describe mediante el promedio ponderado

$$u(x) = \frac{\sum_{j=1}^r A_j(x) f_j(x)}{\sum_{j=1}^r A_j(x)}.$$

En los sistemas Takagi-Sugeno, las funciones f_j generalmente son lineales, siendo expresadas como

$$f_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{0j} + \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} x_i.$$

Sin embargo, en algunos casos también se utilizan funciones cuadráticas

$$f_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{0j} + \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} x_i^2,$$

o funciones trigonométricas

$$f_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = e^{\sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \sin x_i}.$$

La decisión del tipo de función a emplear, depende de la aplicación que se le da al control difuso.

Por su parte los sistemas tipo **Singleton** son un caso particular de los Takagi-Sugeno, en los cuales las funciones f_j son constantes a_{0j} .

