



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería

Aislamiento de fallas con modelos estructurados de  
componentes principales

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**Doctor en Ingeniería**

ÁREA: ELÉCTRICA CAMPO: CONTROL

P R E S E N T A:

**Jesús Darío Mina Antonio**

DIRECTORA DE TESIS: DRA. MARÍA CRISTINA VERDE RODARTE

México, D.F. Enero de 2008



## **JURADO ASIGNADO**

Presidente: Dr. Gerardo René Espinosa Pérez

Secretario: Dr. Efraín Alcorta García

Vocal: Dra. María Cristina Verde Rodarte

1er. Suplente: Dr. Luis Gerardo Vela Valdés

2do. Suplente: Dr. Héctor Benítez Pérez

Lugar donde se realizó la tesis:

Instituto de Ingeniería, UNAM

## **DIRECTORA DE TESIS:**

**Dra. María Cristina Verde Rodarte**



## **Al Gran Yo Soy**

*Si Dios no edifica la casa, en vano trabajan los que la edifican; si Dios no guarda la ciudad, en vano vela la guardia. Por demás es que os levantéis de madrugada y vayáis tarde a reposar, y que comáis pan de dolores, pues que a su amado dará Dios el sueño.*

*Salmos 127:1,2*



# Agradecimientos

A mis padres Samuel y María por sus consejos y su amor incondicional, el cual constituye la principal motivación para luchar y seguir adelante.

A mis hermanos José Luis, Misael y Lucia quienes son mis mejores amigos, a mi cuñada Mariela y mis sobrinos Dakiru y Sahori quienes han traído alegría a la casa.

A Orquídia con quien he descubierto lo bello de poder enamorarse y entregarse sin reservas para sencillamente hacer un sólo corazón.

A la Dra. Cristina Verde que como asesora de doctorado siempre fue paciente y dispuesta para dirigirme en este proyecto y mostrarme una visión más allá de sólo lo académico.

A los miembros del comité tutorial por sus valiosos comentarios.

A la Dra Sylviane Gentil quien me asesoró durante mi estancia en el LAG (hoy GIPSA-Lab) en Grenoble, Francia.

A mis amigos en Cuernavaca, Raúl Jiménez, Miguel Flores, a la iglesia de la comunidad cristiana en Guacamayas, a la familia San Martín Ubando, al profesor Marino Sánchez, por que su amistad ha permitido que en Cuernavaca uno se siga sintiendo como en casa.

A mis amigos en el D.F., Connie, Enrique y Guadalupe, Oscar Rosas, René Jiménez, Alexander Schaum, Edmundo Rocha, Jorge Díaz, Cecilia Cornejo, Mauricio Ángeles, los pastores Juan Diego y Consuelo, Daniel y Olivia, Mireya Ávila, Adriana Torres, Roger y Marina, la familia Jiménez Grajales, y demás, por su apoyo, consejos y por hacer más grata mi estancia por esta gran ciudad.

Al personal del Instituto de Ingeniería-UNAM pues su labor es parte de lo que en conjunto somos y hacemos.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, a la Dirección General de Estudios de Posgrado de la UNAM y al Instituto de Ingeniería-UNAM, por el apoyo económico durante la realización de este trabajo.



# Índice general

Índice de figuras	III
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Aislabilidad de fallas</b>	<b>7</b>
2.1. Detección y aislamiento de fallas en sistemas dinámicos . . . . .	7
2.2. Análisis de la estructura del sistema . . . . .	11
<b>3. Análisis de Componentes Principales para detección de fallas</b>	<b>19</b>
3.1. Fundamentos de PCA . . . . .	20
3.1.1. Dimensión del espacio de componentes principales . . . . .	24
3.2. Modelado implícito . . . . .	26
3.2.1. Estandarización de datos . . . . .	26
3.2.2. Subespacio de componentes principales y subespacio residual . . . . .	27
3.3. Detección de fallas basada en PCA . . . . .	29
3.3.1. Umbrales de los residuos . . . . .	29
3.3.2. Algoritmo de detección de fallas . . . . .	31
3.4. PCA dinámico . . . . .	32
<b>4. Detección robusta vía estandarización adaptable</b>	<b>35</b>
4.1. Señales no estacionarias . . . . .	35
4.2. Sensibilidad de los residuos . . . . .	37
4.2.1. Sensibilidad de $T^2$ . . . . .	37
4.2.2. Sensibilidad de SPE . . . . .	40
4.2.3. Invarianza de la estructura de correlación . . . . .	42
4.3. Identificación de la matriz de respuesta al impulso . . . . .	44
4.3.1. Estimación de parámetros . . . . .	44
4.3.2. Propiedades estadísticas de los parámetros $\hat{\mathbf{b}}_i$ . . . . .	49
4.3.3. Orden de los modelos de respuesta al impulso . . . . .	51
4.4. Detección de fallas con estandarización adaptable . . . . .	52
4.4.1. Estimación móvil de medias y desviaciones estándar . . . . .	52
4.4.2. Algoritmo robusto de detección de fallas . . . . .	53
4.5. Sistema de tres tanques como caso de estudio . . . . .	55
4.5.1. Detección de fallas para el sistema de tres tanques . . . . .	56
<b>5. Aislamiento de fallas con modelos estructurados</b>	<b>65</b>
5.1. Algoritmo para el aislamiento de fallas . . . . .	66
5.1.1. Aislamiento de fallas para el sistema de tres tanques . . . . .	68

6. Conclusiones	77
A. Nomenclatura	81
Bibliografía	83

# Índice de figuras

2.1.	Esquema de FDI basado en el modelo del proceso . . . . .	8
2.2.	Eliminación de la variable desconocida $x_z$ . . . . .	13
2.3.	Grafo aparejado con $u_1$ como variable exógena . . . . .	15
2.4.	Grafo aparejado con el conjunto $\{u_1, y_2\}$ como variables pseudo-exógenas . . . . .	16
2.5.	Grafo aparejado con el conjunto $\{u_1, y_1\}$ como variables pseudo-exógenas . . . . .	16
3.1.	Gráfica típica de SCREE . . . . .	25
3.2.	Esquema de detección de fallas basado en PCA . . . . .	32
4.1.	Variables y Fallas . . . . .	37
4.2.	Esquema de detección de fallas basado en DPCA con estandarización adaptable . . . . .	54
4.3.	Sistema de Tres Tanques . . . . .	56
4.4.	Señales de entrada y salida nominales . . . . .	57
4.5.	Curvas del criterio cuadrático de los errores $J(\cdot)$ y de dispersión total de los parámetros estimados $DTP$ , en función del orden de los modelos FIR para las salidas $h_1, h_2$ y $h_3$ . . . . .	58
4.6.	Secuencia de ponderaciones de los modelos FIR para las salidas $h_1, h_2$ y $h_3$ . . . . .	59
4.7.	Condición de falla: $UCL_p$ - Umbral de condición normal; Mon1 - Monitoreo basado en DPCA; Mon2 - DPCA con estandarización adaptable . . . . .	61
4.8.	Condición normal: $UCL_p$ - Umbral de condición normal; Mon1 - Monitoreo basado en DPCA; Mon2 - DPCA con estandarización adaptable . . . . .	61
4.9.	Condición normal: $UCL_p$ - Umbral de condición normal; Mon1 - Monitoreo basado en DPCA; Mon2 - DPCA con estandarización adaptable . . . . .	62
4.10.	Condición normal y falla: $UCL_p$ - Umbral de condición normal; Mon1 - Monitoreo basado en DPCA; Mon2 - DPCA con estandarización adaptable . . . . .	62
5.1.	FDI basado en modelos estructurados DPCA con estandarización adaptable . . . . .	67
5.2.	Grafo bipartita del sistema (t1-t9) . . . . .	69
5.3.	Grafo aparejado con el conjunto $\{u_1, y_3\}$ como variables pseudo-exógenas . . . . .	70
5.4.	Grafo aparejado con el conjunto $\{u_2, y_3\}$ como variables pseudo-exógenas . . . . .	71
5.5.	Grafo aparejado con el conjunto $\{y_1, y_2\}$ como variables pseudo-exógenas . . . . .	71
5.6.	Grafo aparejado con el conjunto $\{u_1, u_2\}$ como variables exógenas . . . . .	71
5.7.	Respuesta residual para: $f_{y_1}, f_{y_3}$ . . . . .	72
5.8.	Respuesta residual para: $f_{y_2}, f_{u_1}$ . . . . .	73
5.9.	Respuesta residual para: $f_{u_2}, f_{f_3}$ . . . . .	73
5.10.	Respuesta residual para: $f_{\alpha_{13}}, f_{\alpha_{32}}$ . . . . .	74
5.11.	Respuesta residual para $f_{u_2}$ . (a) FDI-DPCA con estandarización adaptable. (b) FDI-DPCA sin estandarización adaptable. . . . .	75

5.12. Respuesta residual para $f_{\alpha_{32}}$ . (a) FDI-DPCA con estandarización adaptable. (b) FDI-DPCA sin estandarización adaptable. . . . .	75
--	----

# Resumen

En este trabajo se propone un método para detectar y aislar fallas en procesos dinámicos estables cuyos modelos analíticos explícitos no son disponibles, como es el caso en la mayoría de los sistemas de gran escala. La propuesta consiste en la integración de análisis estructural con modelos de componentes principales dinámicos (DPCA, por sus siglas en inglés) lo cual se ha denominado *modelos estructurados DPCA*. El análisis *a priori* de la estructura del proceso, vía herramientas de teoría de grafos, permite la obtención de subsistemas llamados *grafos redundantes*, expresados en términos de variables medibles y subconjuntos de restricciones, los cuales determinan las posibilidades de aislabilidad de fallas del proceso. Por su parte, los generadores de residuos para cada grafo redundante se implementan usando DPCA. Se analiza el problema de las falsas alarmas en la detección de fallas debido a condiciones no estacionarias en las variables, las cuales pueden ser inducidas por cambios en el punto de operación del proceso o por fallas externas a un generador de residuos. Para evitar las falsas alarmas, se propone un mecanismo de *estandarización adaptable* para cada generador de residuos. En la estandarización adaptable se requiere de un modelo determinístico entrada-salida, y aquí se propone el uso de modelos de respuesta finita al impulso, los cuales se identifican simultáneamente al modelado estadístico basado en DPCA. El algoritmo de FDI propuesto permite lograr una detección robusta y maximizar la aislabilidad de fallas, para su implementación únicamente se requiere de un modelo genérico del proceso y la disponibilidad de un conjunto de datos nominales del proceso. La efectividad del algoritmo propuesto de FDI se evalúa, a nivel simulación, en un sistema hidráulico de tres tanques interconectados.



# Abstract

In this work a method is proposed for fault detection and isolation in stable dynamic processes whose explicit analytical models are not available, as in the case of most of the large scale systems. The proposal consists of the integration of structural analysis with dynamic principal components analysis (DPCA), which is named *DPCA structured models*. The *a priori* analysis of the process structure, using tools of graph theory, allows the generation of subsystems so-called *redundant graphs*, expressed in terms of measured variables and subsets of constraints, which characterize the process fault isolability possibilities. On the other hand, the residual generators for each redundant graph are implemented using DPCA. It is analyzed the problem of false alarms in the fault detection due to non stationary conditions in the variables, which can be induced by changes in the process operation point and faults external to a residual generator. In order to avoid the false alarms, an *adaptive standardization* mechanism is proposed for each residual generator. In the adaptive standardization an input-output deterministic model is required, for which the use of finite impulse response models is proposed, which are identified simultaneously with the DPCA based statistical model. The proposed FDI algorithm allows to carry out a robust fault detection and to maximize the fault isolation, its implementation requires only the process generic model and the availability of a set of process nominal data. The effectiveness of the proposed FDI algorithm is evaluated, by means of simulations, in an interconnected three-tanks hydraulic system.



# Capítulo 1

## Introducción

Los sistemas físicos están sujetos, por diversas causas, a fallas en cualquiera de sus componentes que lo integran. Entendiéndose como falla a la desviación no permitida de al menos una propiedad característica del sistema (Isermann y Ballé, 1996). Las consecuencias de las fallas son múltiples, desde productos fuera de especificación, incrementos en los costos de operación, paro de línea del proceso, hasta un nocivo impacto ambiental y pérdidas de vidas humanas, por mencionar algunas. Es decir, el nivel de seguridad, desempeño y confiabilidad de los sistemas se ve deteriorado por las fallas. Estos hechos han motivado, en las últimas décadas, el interés por diseñar sistemas automáticos de monitoreo confiables que detecten y diagnostiquen oportunamente las funciones defectuosas de un proceso con el fin de tomar acciones correctivas, como la reconfiguración de la parte dañada del sistema (Isermann, 2006).

La tarea de detección de fallas consiste en la decisión binaria que determina si el sistema opera satisfactoriamente o no. Por su parte, la tarea de aislamiento tiene como fin localizar la fuente de la falla, por ejemplo, cuál sensor o actuador está defectuoso. El procedimiento combinado de detección y aislamiento de fallas se conoce como FDI, por sus siglas en inglés. Y en general, un esquema de monitoreo que detecta, aísla fallas y evalúa su importancia y severidad es llamado un sistema de diagnóstico de fallas (Patton *et al.*, 2000).

Desde el punto de vista práctico, las simples protecciones en las variables críticas de un proceso se pueden considerar como los dispositivos más elementales de monitoreo. En este caso, cada una de las variables se monitorea con respecto a un umbral que se selecciona tomando en cuenta el tamaño de la detección para desviaciones anormales y las fluctuaciones normales de las variables. A pesar de la simplicidad del monitoreo univariado, éste está limitado para determinar las causas

de la violación de un umbral; adicionalmente, en procesos de gran escala y con muchas variables correlacionadas, ante la presencia de una falla se pueden activar varias alarmas generando un fenómeno que se conoce como “alarm-shower”, lo cual hace más difícil el problema de aislamiento de falla (Isermann 2006).

Una de las metodologías mayormente consolidadas para resolver el problema de FDI es la basada en modelos del proceso a monitorear. En este marco, se evalúa la consistencia entre el comportamiento actual del proceso y el comportamiento estimado vía su modelo con el propósito de identificar la presencia de condiciones anormales. En la comunidad de control los esquemas de FDI usan modelos explícitos del proceso junto con métodos de estimación de parámetros, estimación de estados o ecuaciones de paridad, estos esquemas son útiles para sistemas de menor escala cuyas descripciones matemáticas son precisas (Gertler, 1998). Por su parte, en ausencia de modelos explícitos, la comunidad de inteligencia artificial recurre a herramientas como redes neuronales, lógica borrosa, entre otras, para modelar implícitamente el proceso, en conjunto con otros métodos como reconocimiento de patrones para la decisión en el diagnóstico de fallas (Venkatasubramanian *et al.*, 2003a).

Los procesos de gran escala son sistemas con una gran cantidad de componentes interconectados que generan importantes cantidades de información. Para este tipo de procesos la obtención de modelos precisos es difícil y caro, así que es común recurrir a métodos basados en manejo de datos o procesamiento de señales como una alternativa para inferir el estado de operación del proceso. Entre otros enfoques, el análisis estadístico multivariado permite obtener un modelo implícito del proceso a partir de datos históricos del proceso operando en condiciones nominales. El monitoreo consiste en comparar los datos actuales del proceso con respecto al modelo implícito. El análisis estadístico multivariado toma en cuenta la correlación entre las variables con lo cual se evitan los problemas de falsas alarmas que se presentan en el monitoreo univariado (Kourti, 2002), (Martin *et al.*, 2002).

En particular, el análisis de componentes principales (PCA, por sus siglas en inglés) es conocido por su capacidad de transformar un conjunto de observaciones multivariadas a un espacio ortogonal de menor dimensión (subespacio de las componentes principales), esto a partir de la correlación entre variables del proceso. En el caso de sistemas dinámicos, la autocorrelación entre observaciones de una variable se toma en cuenta incorporando retardos de las series de tiempo, esta

extensión se conoce como PCA dinámico (DPCA) (Ku *et al.*, 1995). PCA originalmente fue usado en aplicaciones de control estadístico de calidad (Hair *et al.*, 1999); sin embargo, actualmente este método es ampliamente usado en tareas de FDI (Chiang *et al.*, 2001). En este trabajo se hace uso de DPCA para fines de detección y aislamiento de fallas.

A pesar de las ventajas de DPCA para sistemas de FDI, éste presenta limitaciones, principalmente en la generación de falsas alarmas ante cambios en el punto de operación del proceso y su baja capacidad para el aislamiento de fallas. Los hechos anteriores motivaron el presente trabajo en donde se proponen procedimientos para superar los problemas de falsas alarmas y aislamiento de fallas.

### **Estandarización adaptable**

En la etapa de modelado de DPCA tradicionalmente se supone que las señales son estacionarias<sup>1</sup>, es decir, los parámetros estadísticos de medias y covarianzas de las variables permanecen invariantes con el tiempo. Sin embargo, en el diagnóstico se presenta una alta razón de falsas alarmas si las nuevas observaciones o datos evaluados no satisfacen dicha suposición (Tracy *et al.*, 1992), (Norvilas *et al.*, 2000), (Mina y Verde, 2006).

Una condición no estacionaria en las nuevas observaciones puede tener como causas: la presencia de fallas o cambios de punto de operación del proceso. Por lo tanto, es necesario que el sistema de FDI basado en DPCA sea robusto a los cambios de punto de operación y sensible a las fallas de interés.

Para distinguir entre cambios de punto de operación y fallas, en este trabajo se propone la integración de DPCA e identificación de sistemas para la implementación de un mecanismo de *estandarización adaptable* de las señales de entrada y salida del proceso, en donde se asume linealidad en las relaciones entre las variables. Las medias y varianzas, parámetros de estandarización, de las señales de entrada, se estiman continuamente mediante EWMA (Exponentially Weighted Moving Average) y EWMC (Exponentially Weighted Moving Covariance), respectivamente; por su parte, la estimación de medias y varianzas de las señales de salida se hace a partir de las medias y varianzas de las entradas y de relaciones entrada-salida nominales identificadas previamente. Dado que el modelado basado en DPCA se lleva a cabo mediante análisis de correlación de un conjunto de datos

---

<sup>1</sup>Sea  $x(t)$  un proceso aleatorio. Se dice que es débilmente estacionario (o estacionario hasta momentos de segundo orden) si:  $\mu_x \triangleq E[x(t)] = cte$  y  $\gamma_x^2(\tau) \triangleq E\{[x(t-\tau) - \mu_x][x(t) - \mu_x]^T\}$ , depende sólo de la diferencia temporal  $\tau$ .

del proceso, en este trabajo se propone usar esta información para la identificación simultánea de los modelos entrada-salida, específicamente modelos de respuesta finita al impulso (FIR, por sus siglas en inglés).

### Aislabilidad de fallas con modelos estructurados DPCA

Aun cuando los sistemas de FDI con modelos DPCA son potencialmente útiles para detección de fallas, éstos están limitados para la tarea de aislamiento de fallas (Yoon y MacGregor, 2000), (MacGregor, 2003). La metodología usual para el aislamiento es el de las llamadas gráficas de contribución (Kourti y MacGregor, 1996). Estas gráficas provienen de un modelo basado en correlación y sólo indican qué grupo de variables están correlacionadas con la falla, quedando al ingeniero del proceso proveer una interpretación práctica de las posibles causas.

Otra alternativa, en el marco de los modelos analíticos, que intenta resolver el problema de aislamiento de fallas es la generación de residuos estructurados. Al respecto, (Gertler y McAvoy, 1997) y (Gertler *et al.*, 1999) proponen utilizar los vectores propios complementarios al subespacio de componentes principales, como relaciones de redundancia o de paridad, a partir de las cuales se generen los residuos. Recientemente, en (Gertler y Cao, 2005) se sugiere obtener modelos parciales PCA para generar residuos estructurados. Ambos procedimientos tienen la desventaja de no conocer *a priori* si existe una estructura de correlación entre las variables asociadas en cada generador de residuo, que garantice la solución del problema de FDI para el conjunto particular de fallas.

Las posibilidades de solución de un problema de FDI dependen de propiedades estructurales asociadas a la interrelación de variables internas y externas del proceso, esto significa que la existencia de un generador de residuos es función de la estructura del proceso. En particular, (Krysander y Nyberg, 2002), (Blanke *et al.*, 2003) y (Gentil *et al.*, 2004) proponen el uso de análisis estructural basado en teoría de grafos para obtener las relaciones de redundancia entre variables conocidas del proceso, las cuales determinan las capacidades de aislamiento del proceso.

En este trabajo se propone complementar DPCA con análisis estructural, con el fin de resolver el problema de aislamiento de los esquemas de FDI basados en DPCA. La idea es analizar *a priori* la estructura del proceso y de acuerdo con las posibilidades de aislamiento de fallas, seleccionar de manera apropiada los subconjuntos de variables correlacionadas necesarias para la generación de residuos *vía modelos estructurados DPCA* con estandarización adaptable.

Como resultado de la integración de DPCA con identificación de sistemas y análisis estructural se puede afirmar que el algoritmo de FDI propuesto en este trabajo tiene las siguientes fortalezas en términos de la información requerida para la implementación:

- El modelado se logra a partir de datos históricos.
- La generación de residuos está basada en modelos estructurados DPCA.

Por otro lado, en términos del desempeño logrado, la propuesta permite lo siguiente:

- Detección robusta de fallas ante condiciones no estacionarias de las variables del proceso.
- Maximización de la aislabilidad de fallas.



## Capítulo 2

# Aislabilidad de fallas

En este capítulo se discuten los conceptos básicos en un problema de FDI, haciendo énfasis en el problema de aislabilidad; se revisa el marco de análisis estructural para determinar las capacidades de aislamiento de un proceso utilizando herramientas de la teoría de grafos, en donde se usa el concepto propuesto de *grafo redundante*.

### 2.1. Detección y aislamiento de fallas en sistemas dinámicos

Una tarea fundamental de los sistemas de supervisión automática de procesos industriales es la detección y aislamiento de fallas. El mecanismo de FDI puede ser implementado usando duplicación de hardware, lo que es conocido como *redundancia física*; en este enfoque las salidas de los componentes redundantes son comparadas para evaluar su consistencia. Este método de monitoreo es costoso, y en la práctica solamente se utiliza en subsistemas de alto riesgo. De manera alternativa, el problema de FDI puede ser abordado usando modelos cuantitativos o cualitativos del proceso conjuntamente con estrategias de diagnóstico por software, este enfoque se conoce como FDI basado en modelos y permite sustituir la redundancia física por redundancia por software (Patton *et al.* 2000).

Los procedimientos de FDI basados en modelos constan básicamente de dos etapas: la generación de residuos y su evaluación, la figura 2.1 muestra el esquema general. En la primera etapa, mediante el procesamiento de las variables medibles del proceso, se generan señales conocidas como *residuos*, las cuales reflejan la consistencia entre el comportamiento actual del proceso y el comportamiento estimado vía su modelo. Asumiendo que una inconsistencia en los datos es el resultado de fallas en el proceso, entonces, los residuos proveen información que puede ser usada para la detección y aislamiento en la etapa de evaluación (Patton *et al.*, 1991).

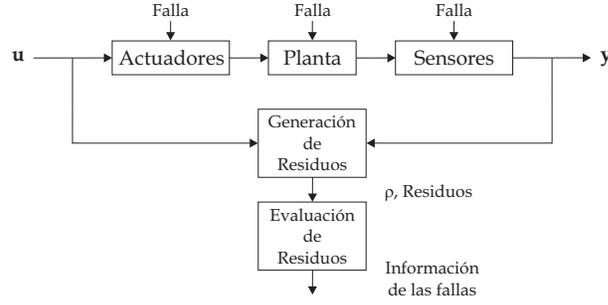


Figura 2.1: Esquema de FDI basado en el modelo del proceso

Los conceptos básicos usados en un problema general de FDI se pueden enmarcar en las siguientes tres definiciones.

**Definición 1** (Frisk y Åslund, 2005) Sea  $\mathbf{z} = [\mathbf{u}^T \mathbf{y}^T]$  un vector de señales conocidas de un proceso. La función escalar  $RR(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \ddot{\mathbf{z}}, \dots)$  es una relación de redundancia si para toda  $\mathbf{z}$  consistente con el modelo libre de fallas se satisface

$$RR(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \ddot{\mathbf{z}}, \dots) = 0 \quad (2.1)$$

**Definición 2** (Frisk y Åslund 2005) Sea  $\mathbf{z}$  un vector de señales conocidas. Un sistema dinámico, con entrada  $\mathbf{z}$  y una señal  $\rho(t)$  como salida, es un generador de residuo si siendo  $\mathbf{z}$  consistente con el modelo libre de falla, implica  $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = 0$ .

La forma más simple de generar un residuo a partir de las relaciones de redundancia es definir

$$\rho(t) := RR(\mathbf{z}) \quad (2.2)$$

el cual en condición de falla resulta en

$$\rho(t) = RR(\mathbf{z}(f)) \neq 0 \quad (2.3)$$

si la falla es fuertemente detectable y  $f$  pertenece al conjunto de fallas detectable con (2.1). Es decir, la salida de un generador de residuos es una señal con valor cero cuando no hay falla y diferente de cero cuando el proceso está en condiciones de falla.

**Definición 3** Sea  $\mathcal{RR}(\mathbf{z}) = \{RR_1(\mathbf{z}), RR_2(\mathbf{z}), \dots, RR_n(\mathbf{z})\}$  un conjunto de generadores de residuos. Dos fallas diferentes  $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ , donde  $\mathcal{F}$  es el conjunto de fallas de interés; se dice que son aislables si se satisface

$$\mathcal{RR}(\mathbf{z}(f_1)) \neq \mathcal{RR}(\mathbf{z}(f_2)) \quad (2.4)$$

En general, el generador de residuos es un sistema dinámico que toma en cuenta, directa o indirectamente, la redundancia de las mediciones de un proceso para evaluar la consistencia entre éstas. Uno de los conceptos más usados y consolidados para generar residuos es el de *redundancia analítica*, el cual utiliza modelos matemáticos cuantitativos explícitos del sistema. En este caso, la redundancia analítica se obtiene explotando la redundancia inherente contenida en las relaciones estáticas y dinámicas del modelo.

Considérese el siguiente modelo matemático:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{d}(t), \mathbf{f}(t)) \\ \mathbf{y}(t) &= h(\mathbf{x}(t))\end{aligned}\tag{2.5}$$

donde:  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , es el vector de estados;  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^l$ , el vector de entradas;  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^s$ , el vector de salidas;  $\mathbf{f}$ , el vector de fallas; y  $\mathbf{d}$ , el vector de perturbaciones y/o fallas de no interés. Dado que se busca un generador de residuos que sea sensible a fallas de interés e insensible a errores de modelado, incertidumbre en los parámetros, perturbaciones, y fallas de no interés, éste se puede diseñar en el marco de sistemas con *desacoplamiento a perturbaciones o entradas desconocidas*. Este marco de referencia dio origen a que se propusieran para la implementación del generador de residuos herramientas de la teoría de control, como son: *relaciones de paridad, observadores y estimación de parámetros* del modelo (2.5).

El método de relaciones de paridad en esquemas de FDI es el más antiguo y fue publicado por (Chow y Willsky, 1984). Las relaciones de paridad se pueden obtener mediante manipulaciones o transformaciones de los modelos de entrada-salida o en espacio de estados, las cuales pueden imponer restricciones estructurales para lograr aislamiento (Gertler 1998). El método consiste en examinar la consistencia de las ecuaciones matemáticas del proceso a partir de sus mediciones. En (Staroswiecki y Comtet-Varga, 2001) se propone una extensión del análisis de paridad al caso de sistemas no lineales, y se dan condiciones para el diseño de residuos estructurados, los cuales son polinomios de las derivadas de las entradas y las salidas.

Los esquemas de FDI basados en observadores reconstruyen mediciones del proceso y la diferencia entre las salidas medidas y las estimadas es usada como vector de residuos. La generación de residuos robustos con observadores para sistemas lineales fue tratado por (Massoumnia *et al.*, 1989), usando el enfoque geométrico. En este caso, el observador se puede diseñar si se satisfacen condiciones de existencia de un subespacio no observable para las fallas de no interés y

simultáneamente, la existencia de un subespacio observable para la falla de interés. En (Frank y Ding, 1994) se analizan las condiciones de existencia de estos subespacios, considerando sistemas modelados en el dominio de la frecuencia. Para sistemas no lineales, usando el enfoque geométrico, las condiciones de solución a un problema específico de FDI se presentan en términos de la existencia de distribuciones de no observabilidad de unas fallas y correspondientes codistribuciones de observabilidad de otras (De Persis y Isidori, 2001).

Otro enfoque ampliamente usado en FDI es el uso de métodos de estimación de parámetros, donde las condiciones de falla se determinan a partir de las discrepancias entre los parámetros estimados y los nominales. Dado que los parámetros del proceso son función de coeficientes físicos del proceso, en algunos casos no es posible, a partir de los cambios en los parámetros, determinar qué componente físico está fallando (Isermann, 1994).

Los esquemas de FDI basados en redundancia analítica son reconocidos por su buen desempeño, siempre que se disponga de modelos matemáticos adecuados del proceso. Un resumen importante de aplicaciones basadas en modelos se reporta en (Patton *et al.* 2000) e (Isermann 2006).

En procesos de gran escala, debido a su complejidad, la correlación entre un gran número de variables, y la imprecisión o ausencia de modelos analíticos, los esquemas de FDI basados en modelos explícitos tienen poco éxito. Lo anterior ha motivado el uso de modelos cualitativos. En (Hoskins *et al.*, 1997) se reporta la implementación de una red neuronal para un sistema de FDI de una planta química; (Lunze y Schiller, 1999) usan conjuntos borrosos para clasificar síntomas heurísticos de falla; (Simani y Patton, 2002) también implementan un sistema de lógica borrosa para la identificación de fallas en un reactor de tanque continuamente agitado. Una revisión de varios enfoques basados en modelos cualitativos se encuentra en (Venkatasubramanian *et al.*, 2003c), (Venkatasubramanian *et al.*, 2003b), (Gentil, 2007).

Una alternativa propuesta en el área de ingeniería de procesos, para el diseño del generador de residuos en sistemas complejos, es el uso de métodos basados en manejo de datos. Entre estos métodos, el análisis estadístico multivariado permite modelar implícitamente un proceso a partir del análisis de correlación entre variables. Las técnicas de análisis estadístico multivariado como análisis de componentes principales (PCA), mínimos cuadrados parciales (PLS) y análisis variado canónico (CVA), que se revisan en (Chiang *et al.* 2001), se han utilizado ampliamente en esquemas

de FDI de procesos químicos. En (Kresta *et al.*, 1991) se compara a nivel simulación, esquemas de FDI basados en PLS y PCA para un reactor y una columna de destilación. En (Yoon y MacGregor 2000), se compara un esquema de FDI basado en ecuaciones de paridad y PCA para un reactor de tanque continuamente agitado, donde se resalta la mayor facilidad de implementación del esquema basado en PCA. En (Russell *et al.*, 2000) se compara PCA y CVA en el simulador del proceso *Tennessee Eastman*, considerando datos de 52 variables. PCA y PLS también se han aplicado a procesos en lote, como en el caso de un reactor de polimerización de DuPont (Chen y Liu, 2002), (Piovoso, 2002).

A pesar de los avances brevemente descritos en el área de FDI, aún existen preguntas abiertas en el campo, principalmente la relacionada a la factibilidad de resolver un problema de aislamiento. En el marco de redundancia analítica estas limitaciones se deben, en muchos casos, a que las condiciones de solución se evalúan conjuntamente con el diseño del generador de residuos tomando en cuenta el modelo global (2.5). Por su parte, en los enfoques basados en modelos cualitativos y los basados en manejo de datos, la solución al problema de aislamiento depende de la disponibilidad de *redundancia de información*, esto es, de información del proceso en diversas condiciones de operación.

Los hechos descritos anteriormente denotan la necesidad de analizar *a priori* las capacidades de aislamiento de un proceso en particular, antes de iniciar el diseño de los generadores de residuos, a fin de formular el problema en un marco viable de solución. En el marco de redundancia analítica, este problema se ha intentado resolver en términos de una previa descomposición del modelo en subsistemas, e.g. (Berdjag *et al.*, 2006). Otra alternativa para determinar la capacidad de aislamiento de un proceso, sin necesidad de modelos analíticos, es examinar sus *propiedades estructurales*. Estas propiedades, que se pueden analizar usando teoría de grafos, permiten estudiar la existencia de relaciones de redundancia útiles para el diagnóstico. En la siguiente sección se describe brevemente esta herramienta.

## 2.2. Análisis de la estructura del sistema

Un *modelo estructural* es una abstracción del modelo de comportamiento del proceso en el sentido de que sólo considera la estructura de las restricciones, relaciones existentes entre las variables del sistema. Las restricciones se representan por un *grafo bipartita*, que es independiente de la naturaleza de las relaciones y variables (cuantitativas, cualitativas, ecuaciones, reglas, etc.),

y del valor de los parámetros, es decir, el modelo estructural tiene la ventaja de ser válido para familia de sistemas con la misma estructura (Blanke *et al.* 2003).

Por otro lado, el análisis de este tipo de modelos permite obtener propiedades estructurales, las cuales proveen información útil como la siguiente:

- La identificación de la parte monitoreable del sistema, i.e. el subconjunto de componentes del sistema cuyas fallas pueden ser detectadas y aisladas.
- La obtención de relaciones de redundancia para la implementación de residuos que satisfagan algunos requerimientos específicos de diagnóstico de fallas.
- Las posibilidades de reconfiguración ante fallas en el sistema.

Esta información permite identificar las condiciones de solución al problema de FDI y al de control tolerante a fallas. Es importante notar que el análisis estructural sólo provee las relaciones de redundancia, dejando al diseñador del sistema de supervisión en libertad para seleccionar el mejor método para la implementación de los generadores de residuos. Por ejemplo, (Commault *et al.*, 2002) propone la generación de residuos basada en observadores, donde las condiciones de solución están dadas por las propiedades de las trayectorias entrada-salida de los grafos asociados.

En este trabajo específicamente se estudia la posibilidad de solución a un problema de FDI usando el enfoque de análisis estructural, dada sus ventajas de ser aplicable a sistemas de gran escala y de generar relaciones de redundancia no parametrizadas. Por otro lado, la implementación del generador de residuos se lleva a cabo usando análisis de componentes principales dinámico, DPCA, con estandarización adaptable.

**Definición 4** *Un sistema dinámico puede representarse por un grafo bipartita  $\mathcal{G} = \{\mathcal{C}, \mathcal{V}, \mathcal{E}\}$ , donde  $\mathcal{C}$  es el conjunto de ecuaciones o restricciones del sistema con cardinalidad  $|\mathcal{C}| = n_c$ . El conjunto de variables en el grafo está definido por  $\mathcal{V} = \mathcal{X} \cup \mathcal{Z}$  con  $|\mathcal{V}| = n_v$ ; donde  $\mathcal{X}$  es el conjunto de variables desconocidas con  $|\mathcal{X}| = n$ ;  $\mathcal{Z} = \mathcal{U} \cup \mathcal{Y}$  es el conjunto de variables conocidas,  $\mathcal{U}$  el conjunto de variables exógenas con  $|\mathcal{U}| = l$ , y el conjunto  $\mathcal{Y}$  de variables endógenas con  $|\mathcal{Y}| = s$ . Adicionalmente,  $\mathcal{E}$  es el conjunto de aristas entre variables y restricciones tales que*

$$e_{ij} = \begin{cases} (c_i, v_j) & \text{si } v_j \text{ está presente en } c_i \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

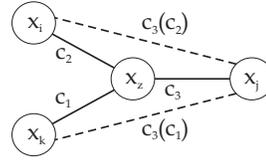


Figura 2.2: Eliminación de la variable desconocida  $x_z$

En el caso de sistemas dinámicos existen diferentes opciones para tomar en cuenta la derivada en el tiempo o el operador de corrimiento en un grafo bipartita (Nyberg, 2006). Aquí, para cada variable de estado  $x_i$  se incluye una restricción adicional de la forma

$$x_k = dx_i = \dot{x}_i \quad (2.6)$$

para variables continuas o

$$x_k(t) = qx_i(t) = x_i(t+1) \quad (2.7)$$

en el caso de variables discretas.

La herramienta básica para obtener la estructura de  $\mathcal{G}$  es el proceso de *aparejamiento*, el cual está basado en la propiedad de calculabilidad y asocia variables con restricciones, a partir de las cuales pueden ser eliminadas las variables desconocidas. Una vez que se obtiene un aparejamiento, las concatenaciones de las restricciones involucradas pueden ser interpretadas como operadores entre un conjunto y otro de variables, o como trayectorias de unión entre las variables del grafo orientado.

Por ejemplo, en el grafo de la figura 2.2 si  $\{x_i, x_j, x_k\}$  son variables conocidas, se pueden encontrar dos relaciones redundantes eliminando la variable interna  $x_z$  de la siguiente forma

- Relacionar  $x_z$  en términos de las mediciones  $\{x_i, x_k\}$  usando  $\{c_1, c_2\}$  y después determinar la medición  $x_j$  a través de  $c_3$ .
- Relacionar  $x_z$  en términos de  $x_j$  usando  $c_3$ , y después expresar las dos mediciones  $\{x_i, x_k\}$  a través de  $c_1$  y  $c_2$ , respectivamente.

Existen diversos algoritmos de aparejamiento para obtener, a partir de  $\mathcal{G}$ , trayectorias posibles entre variables que caracterizan las relaciones de redundancia primarias como funciones concatenadas de variables conocidas (Lorentzen *et al.*, 2003), (Gentil *et al.* 2004). Sin embargo, no existen procedimientos automatizados que generen subgrafos o relaciones de redundancia con un menor

número de restricciones concatenadas.

Dada la propiedad bidireccional del grafo, es posible redefinir variables endógenas como exógenas, como en el ejemplo anterior donde  $x_j$  se ha considerado como exógena. Siguiendo la nomenclatura dada por (Verde *et al.*, 2007) la redefinición de una variable endógena se denomina como *pseudo-exógena*, la cual se considera como una variable externa independiente en un subgrafo orientado. Esta redefinición de variables simplifica el análisis de subgrafos y la búsqueda de relaciones de redundancia que maximicen la aislabilidad de fallas del sistema. Así, similar a la **Definición 1** para una relación de redundancia, en este trabajo se define el concepto de *grafo redundante*.

**Definición 5** (Verde y Mina, 2007) Sea  $\mathcal{Z}_i = \mathcal{U}_{si} \cup y_i$  un subconjunto de variables conocidas perfectamente aparejadas mediante el subconjunto de restricciones  $\mathcal{C}_i$  entonces

$$\mathcal{GR}_i(\mathcal{C}_i, \mathcal{U}_{si}, y_i) \quad (2.8)$$

es un grafo redundante, el cual establece, mediante  $\mathcal{C}_i$ , una consistencia entre el subconjunto pseudo-exógeno  $\mathcal{U}_{si} \subset \mathcal{Z} \setminus y_i$  y la variable objetivo  $y_i$ .

Considerando la **Definición 5**, un grafo con una trayectoria corta entre las variables conocidas  $\mathcal{U}_{si}$  e  $y_i$ , se traduce en una relación de redundancia con un número pequeño de restricciones en el conjunto  $\mathcal{C}_i$ , la cual será sensible sólo a las fallas que intervienen directamente en  $\mathcal{C}_i$ . De lo anterior, interesa entonces buscar grafos  $\mathcal{GR}_i$  con trayectorias cortas o mínima cardinalidad de  $\mathcal{C}_i$ , a fin de obtener relaciones de redundancia con máxima capacidad de aislamiento.

A partir de un grafo bipartita  $\mathcal{G}$ , el siguiente ejemplo clarifica cómo obtener y caracterizar los grafos redundantes  $\mathcal{GR}_i$  y los correspondientes subconjuntos  $\mathcal{Z}_i = \mathcal{U}_{si} \cup y_i$  de variables correlacionadas y subconjuntos de restricciones  $\mathcal{C}_i$ ; se muestra además cómo  $\mathcal{GR}'_i$ s con trayectorias cortas poseen mayor capacidad de aislamiento.

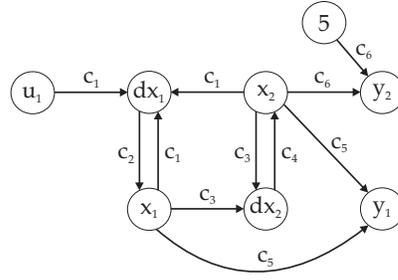
Considere el sistema dinámico dado por

$$\dot{x}_1 = -ax_1 + x_2 + u_1 \quad (c1)$$

$$x_3 = dx_1 \quad (c2)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + bx_2 \quad (c3)$$

$$x_4 = dx_2 \quad (c4)$$

Figura 2.3: Grafo aparejado con  $u_1$  como variable exógena

$$y_1 = x_1 + x_2 \quad (c5)$$

$$y_2 = 5 + x_2 \quad (c6)$$

sujeto a fallas no concurrentes en sensores, actuador y proceso; las últimas especificadas como desviaciones en los parámetros  $a$  y  $b$ . Considerando el marco de control,  $u_1$  es una señal exógena y  $\{y_1, y_2\}$  son señales endógenas. Bajo estas condiciones se obtiene el grafo orientado de la figura 2.3, de donde se pueden obtener dos trayectorias entre variables conocidas las cuales conectan  $u_1$  con  $y_1$  e  $y_2$ , respectivamente:

- $\mathcal{GR}_1(\mathcal{C}_1, \mathcal{U}_{s1}, y_1)$  que relaciona la variable exógena  $\mathcal{U}_{s1} = u_1$ , con la variable objetivo  $y_1$ , mediante el conjunto de restricciones  $\mathcal{C}_1 = \{c1, c2, c3, c4, c5\}$ .
- $\mathcal{GR}_2(\mathcal{C}_2, \mathcal{U}_{s2}, y_2)$  que relaciona la variable exógena  $\mathcal{U}_{s2} = u_1$ , con la variable objetivo  $y_2$ , mediante el conjunto de restricciones  $\mathcal{C}_2 = \{c1, c2, c3, c4, c6\}$ .

Tomando en cuenta las variables y restricciones involucradas en cada grafo, se identifica la correspondiente sensibilidad a fallas como se muestra en la siguiente matriz de firmas de falla, donde  $f$  denota una falla y el subíndice indica la falla específica.

\	$\mathcal{Z}_i$	$ \mathcal{C}_i $	$f_{y1}$	$f_{y2}$	$f_{u1}$	$f_a$	$f_b$
$\mathcal{GR}_1$	$\mathcal{U}_{s1}, y_1$	5	1	0	1	1	1
$\mathcal{GR}_2$	$\mathcal{U}_{s2}, y_2$	5	0	1	1	1	1

Dado que  $\mathcal{GR}_1$  y  $\mathcal{GR}_2$  responden a todas las fallas excepto una, su capacidad de aislamiento es baja; entonces sólo se pueden aislar fallas en sensores si se limita el generador de residuos con éstos grafos redundantes. Además, dado que las tres últimas columnas de fallas tienen la misma firma, esto significa que las fallas en el actuador  $f_{u1}$ , y las fallas en el proceso  $\{f_a, f_b\}$  son detectables, pero no aislables con estos  $\mathcal{GR}'s$ .

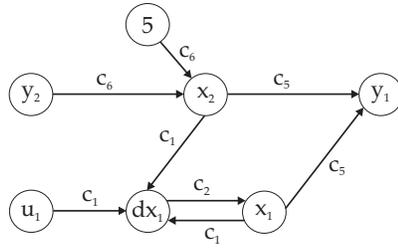


Figura 2.4: Grafo aparejado con el conjunto  $\{u_1, y_2\}$  como variables pseudo-exógenas

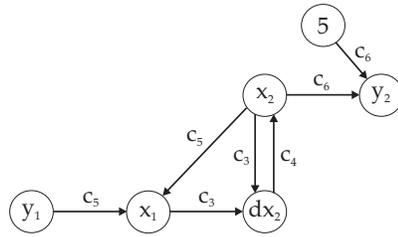


Figura 2.5: Grafo aparejado con el conjunto  $\{u_1, y_1\}$  como variables pseudo-exógenas

Por otro lado, considerando a  $y_2$  como pseudo-exógena en el grafo bipartita, el proceso de aparejamiento genera el grafo orientado  $\mathcal{GR}_3(\mathcal{C}_3, \mathcal{U}_{s3}, y_1)$  dado en la figura 2.4, el cual liga al conjunto  $\mathcal{U}_{s3} = \{u_1, y_2\}$  con la variable objetivo  $y_1$  mediante el conjunto de restricciones  $\mathcal{C}_3 = \{c1, c2, c5, c6\}$ . Dado que  $c3$  no está en la trayectoria, este grafo es insensible a las fallas en  $c3, c4$  y las dinámicas de  $x_2$  no son consideradas. Como resultado, las fallas  $\{f_{u1}, f_a\}$  pueden ser aisladas de  $f_b$ . En otras palabras, mediante  $\mathcal{GR}_3$  se ha identificado una correlación entre las variables  $\mathcal{U}_{s3}$  y  $y_1$ , con la cual se mejora la aislabilidad con respecto a los casos anteriores.

$$\begin{array}{c} \backslash \quad \mathcal{Z}_3 \quad |\mathcal{C}_3| \quad f_{y1} \quad f_{y2} \quad f_{u1} \quad f_a \quad f_b \\ \mathcal{GR}_3 \quad \mathcal{U}_{s3}, y_1 \quad 4 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \end{array}$$

Otra opción es suponer  $\mathcal{U}_{s4} = \{y_1\}$  como pseudo-exógeno resultando el grafo aparejado de la figura 2.5. En este caso se identifica una trayectoria entre el subconjunto  $\mathcal{U}_{s4}$  y la variable objetivo  $y_2$  por medio del subconjunto de restricciones  $\mathcal{C}_4 = \{c3, c4, c5, c6\}$ . El correspondiente grafo redundante  $\mathcal{GR}_4(\mathcal{C}_4, \mathcal{U}_{s4}, y_2)$  es insensible a  $f_{u1}$  y  $f_a$  y puede también ser considerado en la matriz de firmas de falla

$$\begin{array}{c} \backslash \quad \mathcal{Z}_4 \quad |\mathcal{C}_4| \quad f_{y1} \quad f_{y2} \quad f_{u1} \quad f_a \quad f_b \\ \mathcal{GR}_4 \quad \mathcal{U}_{s4}, y_2 \quad 4 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \end{array}$$

Dado que  $\mathcal{GR}_3$  y  $\mathcal{GR}_4$  ambos aíslan  $f_b$  de  $\{f_a, f_{u1}\}$ , ambos tienen la misma capacidad de aislamiento, entonces una de éstas puede eliminarse de la matriz de firmas de falla. Se retiene  $\mathcal{GR}_4$

Tabla 2.1: Firmas de falla para el sistema (c1-c6)

\	$\mathcal{Z}_i$	$ \mathcal{C}_i $	$f_{y1}$	$f_{y2}$	$f_{u1}$	$f_a$	$f_b$
$\mathcal{GR}_1$	$\mathcal{U}_{s1}, y_1$	5	1	0	1	1	1
$\mathcal{GR}_2$	$\mathcal{U}_{s2}, y_2$	5	0	1	1	1	1
$\mathcal{GR}_4$	$\mathcal{U}_{s4}, y_2$	4	1	1	0	0	1

ya que ésta involucra menos variables conocidas.

Integrando los grafos redundantes seleccionados, se obtiene la matriz de firmas de falla de la Tabla 2.1, la cual caracteriza la estructura de aislabilidad, donde sólo la falla  $f_{u1}$  en el actuador y la falla  $f_a$  en el proceso no son aislables. Comparando la sensibilidad a fallas de los  $\mathcal{GR}'s$  se puede verificar que mientras más grande es la cardinalidad de un subconjunto de restricciones  $\mathcal{C}_i$ , más baja es su capacidad de aislamiento. Véase las firmas de falla de  $\mathcal{GR}_1$  y  $\mathcal{GR}_2$  con  $\mathcal{GR}_4$ .

La mínima aislabilidad se logra con trayectorias largas en los grafos, las cuales resultan al considerar en  $\mathcal{U}_s$  sólo las entradas convencionales de control, esto es  $\mathcal{U}_s = \{u_1, u_2, \dots, u_l\}$ . Por otro lado, como se observó en el ejemplo anterior, al incrementar la cardinalidad de  $\mathcal{U}_s$  adicionándole elementos de  $\mathcal{Y}$ , el número de restricciones involucradas en el aparejamiento de los grafos redundantes resultantes se reduce, con lo que se mejora la capacidad de aislamiento. Así, la máxima aislabilidad se logra cuando para la selección de alguna variable objetivo  $y_i$ , el conjunto pseudo-exógeno se integra por  $\mathcal{U}_s = \mathcal{U} \cup \{y_k \in \mathcal{Y}, y_k \neq y_i\}$ .

El análisis estructural se usa para estudiar la factibilidad de solución al problema de aislamiento de fallas, su ventaja es que los  $\mathcal{GR}'s$  que caracterizan las propiedades de aislamiento del proceso bajo monitoreo, son identificados sin modelos numéricos.

Por otro lado, algunos autores generan a partir de los  $\mathcal{GR}'s$ , relaciones de redundancia analítica (2.1) usando herramientas simbólicas y concatenación de restricciones, en donde se requiere conocer los parámetros del modelo analítico, es decir, para la generación de residuos se utilizan los modelos analíticos parametrizados. En procesos de gran escala esta filosofía para la implementación de los generadores de residuos es inadecuada dado que no se dispone de modelos analíticos o son modelos con muchas incertidumbres.

El inconveniente arriba descrito sugiere el uso de métodos basados en manejo de datos para la

generación de residuos, donde sólo se suponen conocidos los grafos redundantes y datos históricos del proceso. El argumento usado es que dada la estructura de los  $\mathcal{GR}'s$ , se asegura la existencia de correlación entre las señales  $Z_i$  involucradas en los grafos, por lo tanto, se puede llevar a cabo un modelado implícito basado en DPCA para cada grafo redundante. Este nuevo enfoque para la generación de residuos estructurados se describe en el capítulo 5.

## Capítulo 3

# Análisis de Componentes Principales para detección de fallas

Los procesos industriales son sistemas complejos y altamente instrumentados, en los cuales se maneja un número considerable de variables asociadas ya sea al control o para fines de monitoreo. Un enfoque convencional de monitoreo es el univariado, donde para cada variable se define un umbral de condición normal. Así, la detección consiste en evaluar cada observación con respecto al umbral, activándose una alarma cuando una observación se sale de los límites establecidos.

Sin embargo, el enfoque univariado no toma en cuenta la correlación entre las variables (correlación cruzada o paralela) y la correlación entre mediciones a diferentes tiempos de una misma variable (autocorrelación o correlación serie), lo cual genera insensibilidad y falsas alarmas a ciertas condiciones de falla (Tracy *et al.* 1992), (Raich y Çinar, 1996), (Chiang *et al.* 2001).

Esta limitante de las gráficas de monitoreo univariado para detección de fallas ha llevado al desarrollo de enfoques basados en análisis estadístico multivariado. En este sentido, dada la cantidad de variables disponibles, el número de correlaciones puede ser muy elevado, por lo tanto, se sugiere transformar las variables a un número tal que se conserve la mayor variabilidad de los datos originales.

El análisis de componentes principales, PCA, permite de manera óptima, transformar un conjunto de datos multivariados a un conjunto ortogonal de menor dimensión, esto en términos de la captura de la varianza de los datos y tomando en cuenta la correlación entre variables, lo cual constituye una forma de modelado implícito (Jackson, 1991).

Cabe hacer notar que a pesar de las ventajas del modelado basado en PCA para monitorear procesos complejos, éste está limitado a la tarea de detección de fallas debido a la ausencia de procedimientos para aislar fallas. En este trabajo para resolver el problema de aislamiento de los esquemas de FDI basados en PCA, se propone un estudio preliminar de las capacidades de aislamiento del proceso, para esto se recurre al análisis estructural descrito en la sección 2.2, el cual genera los grafos redundantes que determinan la aislabilidad del proceso. Por otro lado, dada la existencia de correlación entre las variables involucradas en cada grafo redundante, entonces se asegura la viabilidad de implementar modelos estructurados PCA para resolver el problema de FDI.

En este capítulo se revisan los fundamentos de PCA; se describe el procedimiento de modelado basado en PCA, el cual consiste en la caracterización implícita de la estructura de correlación de las variables del proceso; se presenta la extensión de PCA al caso de series de tiempo de sistemas dinámicos, DPCA; y finalmente se describe el uso de DPCA para detección de fallas.

### 3.1. Fundamentos de PCA

En las herramientas de análisis estadístico multivariado como lo es PCA, se consideran las siguientes condiciones.

**Suposición 1** *Las mediciones obtenidas en cada instante de muestreo son observaciones serialmente independientes.*

**Suposición 2** *Las variables asociadas a las observaciones tienen una distribución normal.*

**Suposición 3** *El proceso se encuentra trabajando alrededor de un punto de operación y por lo tanto, las observaciones son estacionarias.*

Sea un conjunto de  $N$  observaciones de  $n$  variables  $z_i$  de un proceso operando en condiciones nominales, las cuales se ordenan en la matriz de datos siguiente

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 & \cdots & \mathbf{z}_n \end{bmatrix}_{(N \times n)} \quad (3.1)$$

o

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}(1) \\ \mathbf{z}(2) \\ \vdots \\ \mathbf{z}(N) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

donde:  $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \end{bmatrix}$ . Asumiendo que  $\mathbf{Z}$  satisface las **Suposiciones 1-3**, PCA puede transformar este conjunto  $n$ -dimensional, en un espacio  $n$ -dimensional de variables no correlacionadas con varianzas maximizadas. Las componentes del espacio ortogonal son combinaciones lineales particulares de los  $n$  vectores  $\mathbf{z}_j$ .

La primera componente en el espacio ortogonal se define como

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{Z}\mathbf{q}_1 \quad (3.3)$$

con varianza

$$\gamma_{\mathbf{p}_1}^2 = \mathbf{q}_1^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{q}_1 \quad (3.4)$$

donde:  $\mathbf{\Gamma}$  es la matriz de covarianza de  $\mathbf{Z}$ , y  $\mathbf{q}_1^T = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{21} & \cdots & q_{n1} \end{bmatrix}$ . El problema consiste en encontrar el vector  $\mathbf{q}_1$  que maximice  $\gamma_{\mathbf{p}_1}^2$ . Además se impone la restricción  $\mathbf{q}_1^T \mathbf{q}_1 = 1$ , es decir,  $\mathbf{q}_1$  debe ser ortonormal.

Por lo tanto, el problema de determinar  $\mathbf{q}_1$  se puede plantear en términos de maximizar la siguiente función (Johnson y Wichan, 1982), (Krzanowski, 1990)

$$\max v_1 = \mathbf{q}_1^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{q}_1 - \lambda_1 (\mathbf{q}_1^T \mathbf{q}_1 - 1) \quad (3.5)$$

donde  $\lambda_1$  es un multiplicador de Lagrange. Por lo tanto

$$\frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{q}_1} = 2\mathbf{\Gamma}\mathbf{q}_1 - 2\lambda_1\mathbf{q}_1 = 0 \quad (3.6)$$

es una condición necesaria de la solución, que puede escribirse como

$$(\mathbf{\Gamma} - \lambda_1 \mathbf{I}_n) \mathbf{q}_1 = \mathbf{0} \quad (3.7)$$

o equivalentemente

$$\mathbf{\Gamma}\mathbf{q}_1 = \lambda_1 \mathbf{q}_1 \quad (3.8)$$

Considerando que (3.7) es un sistema homogéneo de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas, éste tiene una solución diferente de la trivial sí y sólo sí  $|\mathbf{\Gamma} - \lambda_1 \mathbf{I}_n| = 0$ . Por lo tanto, el multiplicador de Lagrange  $\lambda_1$  es un valor propio de  $\mathbf{\Gamma}$ , y la solución  $\mathbf{q}_1$  es su correspondiente vector propio normalizado. Dado que  $\mathbf{\Gamma} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  tiene  $n$  vectores propios, es necesario determinar el que maximice la varianza de  $\mathbf{p}_1$ . Premultiplicando (3.8) por  $\mathbf{q}_1^T$  se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{q}_1 &= \lambda_1 \mathbf{q}_1^T \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_1^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{q}_1 &= \lambda_1 = \gamma_{\mathbf{p}_1}^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

es decir,  $\lambda_1$  es la varianza de  $\mathbf{p}_1$ . Por lo tanto, dado que se busca la máxima varianza entonces  $\mathbf{q}_1$  es el vector propio asociado al valor propio más grande de  $\mathbf{\Gamma}$ .

De manera similar a la primera componente, la segunda componente en el espacio ortogonal está dada por la siguiente combinación lineal de los datos

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{Z}\mathbf{q}_2 \quad (3.10)$$

con varianza

$$\gamma_{\mathbf{p}_2}^2 = \mathbf{q}_2^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{q}_2 \quad (3.11)$$

donde:  $\mathbf{q}_2^T = [q_{12} \quad q_{22} \quad \cdots \quad q_{n2}]$ . El problema consiste en encontrar el vector  $\mathbf{q}_2$  que maximice  $\gamma_{\mathbf{p}_2}^2$ , con  $\mathbf{q}_2^T \mathbf{q}_2 = 1$  y la restricción adicional  $\mathbf{q}_2^T \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_1^T \mathbf{q}_2 = 0$ , es decir,  $\mathbf{q}_2$  debe ser ortogonal a  $\mathbf{q}_1$ .

En este caso el problema de optimización, dada las dos restricciones, requiere de dos multiplicadores de Lagrange, y se busca maximizar

$$\max v_2 = \mathbf{q}_2^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{q}_2 - \lambda_2 (\mathbf{q}_2^T \mathbf{q}_2 - 1) - \psi (\mathbf{q}_2^T \mathbf{q}_1) \quad (3.12)$$

donde:  $\lambda_2$  y  $\psi$  son los multiplicadores de Lagrange. Derivando  $v_2$  con respecto a  $\mathbf{q}_2$  e igualando a cero resulta

$$\frac{\partial v_2}{\partial \mathbf{q}_2} = 2\mathbf{\Gamma}\mathbf{q}_2 - 2\lambda_2\mathbf{q}_2 - \psi\mathbf{q}_1 = 0 \quad (3.13)$$

la cual puede reescribirse como

$$2(\mathbf{\Gamma} - \lambda_2\mathbf{I}_n)\mathbf{q}_2 - \psi\mathbf{q}_1 = \mathbf{0} \quad (3.14)$$

o equivalentemente

$$(\mathbf{\Gamma} - \lambda_2\mathbf{I}_n)\mathbf{q}_2 = \frac{1}{2}\psi\mathbf{q}_1 \quad (3.15)$$

Premultiplicando (3.15) por  $\mathbf{q}_1^T$  resulta

$$\mathbf{q}_1^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{q}_2 = \frac{1}{2}\psi = \mathbf{q}_2^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{q}_1 \quad (3.16)$$

La igualdad en (3.16) es válida ya que la transpuesta de un escalar es el mismo escalar y  $\mathbf{\Gamma}$  es una matriz simétrica. Premultiplicando (3.8) por  $\mathbf{q}_2^T$  se obtiene

$$\mathbf{q}_2^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{q}_1 = \lambda_1 \mathbf{q}_2^T \mathbf{q}_1 = 0 \quad (3.17)$$

lo que significa que  $\psi = 0$ , y por lo tanto, (3.15) resulta en

$$(\mathbf{\Gamma} - \lambda_2\mathbf{I}_n)\mathbf{q}_2 = \mathbf{0} \quad (3.18)$$

Así, de manera similar al análisis de (3.7) para la primer componente, de (3.18) se deduce que

$$\lambda_2 = \mathbf{q}_2^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{q}_2 = \gamma_{\mathbf{p}_2}^2 \quad (3.19)$$

por lo tanto,  $\mathbf{q}_2$  es el vector propio normalizado asociado al segundo valor propio más grande de  $\mathbf{\Gamma}$ .

El análisis anterior se puede llevar a cabo para cada una de las  $n$  componentes del espacio ortogonal. Así, para la  $j$ -ésima componente definida por la combinación lineal:  $\mathbf{p}_j = \mathbf{Z}\mathbf{q}_j$ , se busca el vector  $\mathbf{q}_j$  que maximice la varianza de la componente  $\mathbf{p}_j$ , que satisfaga  $\mathbf{q}_j^T \mathbf{q}_j = 1$  y sea ortogonal a todos los previos vectores  $\mathbf{q}_i$  (i.e.  $\mathbf{q}_j^T \mathbf{q}_i = 0$ ,  $\forall i < j$ ). La maximización de la varianza ante estas restricciones implica la maximización de una expresión  $v_j$  que involucra  $j$  multiplicadores de Lagrange.

En resumen, el problema de determinar los vectores  $\mathbf{q}_j$  que generan un espacio ortogonal, se reduce al problema de obtener la estructura propia de la matriz  $\mathbf{\Gamma}$  de covarianza de los datos, esto es

$$\mathbf{\Gamma}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda} \quad \text{o} \quad \mathbf{\Gamma} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^T \quad (3.20)$$

donde  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de vectores propios ortonormales y  $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz diagonal de los correspondientes valores propios, ordenados en forma decreciente, esto es:  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ .

### Propiedades de la matriz de covarianza $\mathbf{\Gamma}$

**Propiedad 1** *Dado que  $\mathbf{\Gamma}$  es una matriz simétrica, entonces sus valores propios son reales.*

**Propiedad 2** *Si  $\mathbf{\Gamma}$  es positiva definida, entonces sus valores propios satisfacen  $\lambda_j > 0$ , para  $j = 1, 2, \dots, n$ .*

**Propiedad 3** *Si  $\mathbf{\Gamma}$  es positiva semidefinida de rango  $p$ , entonces exactamente  $p$  de sus  $n$  valores propios son positivos mientras que los  $n - p$  valores propios restantes son cero.*

### Propiedades de las componentes del espacio ortogonal

**Propiedad 4** *Las varianzas de las componentes ortogonales  $\mathbf{p}_j$  están dadas por los valores propios de  $\mathbf{\Gamma}$ .*

Dada la matriz de componentes ortogonales

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}\mathbf{q}_1 & \mathbf{Z}\mathbf{q}_2 & \dots & \mathbf{Z}\mathbf{q}_n \end{bmatrix} = \mathbf{Z}\mathbf{Q} \quad (3.21)$$

su covarianza está definida como

$$\text{cov}(\mathbf{P}) = \mathbf{Q}^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{Q} \quad (3.22)$$

de donde al sustituir (3.20) en (3.22) resulta

$$\text{cov}(\mathbf{P}) = \mathbf{Q}^T (\mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^T) \mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda} \quad (3.23)$$

dado que  $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}_n$ .

**Propiedad 5** *La varianza total de la matriz de observaciones  $\mathbf{Z}$  está dada por la suma de las varianzas de cada variable, y es igual a la suma de los valores propios  $\lambda_j$ .*

Defínase la varianza total de los datos como

$$V_T = \text{tr}(\mathbf{\Gamma}) = \sum_{j=1}^n \gamma_{jj}^2 \quad (3.24)$$

Por lo tanto, al sustituir (3.20) en (3.24) se obtiene

$$V_T = \text{tr}(\mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^T) = \text{tr}(\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda}) = \text{tr}(\mathbf{\Lambda}) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \quad (3.25)$$

es decir, la varianza total de  $\mathbf{Z}$  es igual a la suma de las varianzas de las  $n$  componentes principales.

Debido a la naturaleza de las variables, las cuales pueden tener valores en rangos y/o unidades diferentes, es conveniente estandarizar los datos en  $\mathbf{Z}$  con respecto a sus medias y desviaciones estándar. Esta estandarización permite una ponderación equitativa de la variabilidad de los datos en el proceso de obtención de las componentes ortogonales. Así, considerando los datos estandarizados  $\tilde{\mathbf{Z}}$ , en el proceso arriba descrito se debe sustituir en las ecuaciones (3.20-3.25), la matriz de covarianza  $\mathbf{\Gamma}$  por

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{D}_z^{-1} \mathbf{\Gamma} \mathbf{D}_z^{-1} \quad (3.26)$$

que es la matriz de correlación de los datos.  $\mathbf{D}_z = \text{sqr}t(\text{diag}(\mathbf{\Gamma}))$ , es la matriz diagonal de desviaciones estándar de las variables.

### 3.1.1. Dimensión del espacio de componentes principales

Uno de los usos más generalizados de PCA es su habilidad de transformar un conjunto de datos  $n$ -variado, en un conjunto reducido de  $p$  variables no correlacionadas denominadas componentes principales, las cuales retienen la mayor variabilidad de los datos. A pesar de la ventaja señalada anteriormente, desafortunadamente no existe un método aceptado de manera general para determinar el valor de  $p$  o el número de componentes principales. En (Dillon y Goldstein, 1984), (Jackson

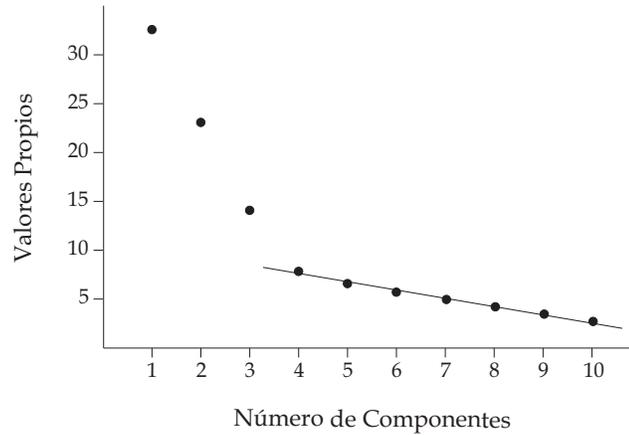


Figura 3.1: Gráfica típica de SCREE

1991) se revisan algunos de los procedimientos para determinar cuántas componentes retener.

Uno de los métodos más usados y que está basado en principios estadísticos es el de validación cruzada. El método consiste en dividir aleatoriamente el conjunto de datos  $\mathbf{Z}$  en  $g$  grupos de  $n/g$  observaciones cada uno. Se lleva a cabo el modelado PCA con una sola componente, a partir de toda la muestra de datos excepto el primer grupo; enseguida se realiza la estimación de cada una de las observaciones del grupo excluido y se calcula para cada una, el error cuadrático de predicción,  $SPE$ ; se reintegra el primer grupo y se repite el proceso con toda la muestra excepto el segundo grupo, y así sucesivamente hasta evaluar todos los grupos; finalmente se calcula el promedio general de todos los  $SPE$  obtenidos, lo cual se conoce como estadística suma predictiva de cuadrados,  $PRESS$ . El proceso completo se repite para modelos PCA con dos componentes, tres componentes, etc., para los cuales se calculan respectivos parámetros  $PRESS$ . El número  $p$  de componentes principales a retener lo determina el mínimo valor del parámetro  $PRESS$ .

Por otro lado, en el enfoque gráfico denominado prueba de SCREE, los valores propios son graficados, los cuales típicamente describen una curva como la que se muestra en la figura 3.1. En esta curva se identifica una inflexión entre los valores propios más significativos y los valores propios más pequeños, los cuales están básicamente alineados en línea recta. El punto de inflexión determina el número de componentes a retener.

Otro método es el criterio del porcentaje de varianza. Recordando de (3.25) que la varianza total de los datos está dada por la suma de los valores propios, entonces un cierto porcentaje de la

varianza se retiene con un número  $p$  de componentes, esto es

$$R_V = \frac{V_p}{V_T} 100 = \frac{\sum_{j=1}^p \lambda_j}{\sum_{j=1}^n \lambda_j} 100 \quad (3.27)$$

el porcentaje de varianza,  $R_V$ , se selecciona para cada proceso particular y está determinado por el grado de correlación entre las variables.

## 3.2. Modelado implícito

Considerando el conjunto de datos nominales (3.1), el modelado implícito basado en PCA se resume en dos pasos, la estandarización de los datos y la generación de los subespacios de componentes principales y residual.

### 3.2.1. Estandarización de datos

Sea el conjunto de datos nominales  $\mathbf{Z}$  dado en (3.1), sus correspondientes medias están dadas por

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{z}} = \left[ \frac{1}{N} \mathbf{1} \mathbf{Z} \right] = \left[ \hat{\mu}_{z_1} \quad \cdots \quad \hat{\mu}_{z_n} \right]_{(1 \times n)} \quad (3.28)$$

donde  $\mathbf{1} = [1, 1, \dots, 1] \in \mathfrak{R}^{1 \times N}$ . Así, los datos con extracción de medias se obtienen a partir de

$$\bar{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z} - \mathbf{1}^T \hat{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{z}} \quad (3.29)$$

Por otro lado, la matriz de covarianzas de  $\mathbf{Z}$  está dada por

$$\hat{\boldsymbol{\Gamma}} = \frac{1}{N-1} \bar{\mathbf{Z}}^T \bar{\mathbf{Z}} \quad (3.30)$$

y el vector de desviaciones estándar de  $\mathbf{Z}$  es

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{z}} = \sqrt{\text{diag}(\boldsymbol{\Gamma})} = \left[ \hat{\sigma}_{z_1} \quad \cdots \quad \hat{\sigma}_{z_n} \right]_{(1 \times n)} \quad (3.31)$$

Por lo tanto, la estandarización de los datos se obtiene a partir de la siguiente expresión

$$\tilde{\mathbf{Z}} = \bar{\mathbf{Z}} \mathbf{D}_{\mathbf{z}}^{-1} \quad (3.32)$$

donde:  $\mathbf{D}_{\mathbf{z}} = \text{diag}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{z}})$ .

### 3.2.2. Subespacio de componentes principales y subespacio residual

A partir de la matriz de correlación entre variables,  $\widehat{\Sigma} = \frac{1}{N-1} \widetilde{\mathbf{Z}}^T \widetilde{\mathbf{Z}} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ , es posible obtener su correspondiente estructura propia, esto es

$$\widehat{\Sigma} \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \Lambda \quad \text{o} \quad \widehat{\Sigma} = \mathbf{Q} \Lambda \mathbf{Q}^T \quad (3.33)$$

En general,  $\mathbf{Q}$  puede ser descompuesta en dos submatrices como

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_p & \mathbf{Q}_r \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

donde:  $\mathbf{Q}_p \in \mathfrak{R}^{n \times p}$  y  $\mathbf{Q}_r \in \mathfrak{R}^{n \times r}$ ,  $r = n - p$ .

**Hecho 1** Dado que los vectores propios en  $\mathbf{Q}$  son ortonormales entonces se satisface:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_p^T \mathbf{Q}_p &= \mathbf{I}_p \\ \mathbf{Q}_r^T \mathbf{Q}_r &= \mathbf{I}_r \\ \mathbf{Q}_p \mathbf{Q}_p^T + \mathbf{Q}_r \mathbf{Q}_r^T &= \mathbf{I}_n \end{aligned}$$

**Demostración.** Dado que  $\mathbf{Q}$  es una matriz cuadrada ortonormal, se satisface

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}_n = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \quad (3.35)$$

Sustituyendo (3.34) en (3.35)

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} &= \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_p^T \\ \mathbf{Q}_r^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_p & \mathbf{Q}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_p^T \mathbf{Q}_p & \mathbf{Q}_p^T \mathbf{Q}_r \\ \mathbf{Q}_r^T \mathbf{Q}_p & \mathbf{Q}_r^T \mathbf{Q}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_r \end{bmatrix} = \mathbf{I}_n \\ \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T &= \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_p & \mathbf{Q}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_p^T \\ \mathbf{Q}_r^T \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_p \mathbf{Q}_p^T + \mathbf{Q}_r \mathbf{Q}_r^T = \mathbf{I}_n \end{aligned}$$

■

Así,  $\mathbf{Q}_p$  el subconjunto de vectores propios asociados a los valores propios más significativos, constituye una base para el subespacio denominado de las componentes principales; por su parte,  $\mathbf{Q}_r$  el subconjunto de vectores propios complementarios, asociados a los valores propios menos significativos, es una base para el subespacio denominado como residual. Las dimensiones de los subespacios se pueden determinar de acuerdo con los procedimientos descritos en la sección 3.1.1.

En el análisis convencional del modelado basado en PCA, el conjunto de datos  $\mathbf{Z}$  se maneja sin hacer diferencia entre variables de entrada y salida. Sin embargo, considérese que  $\mathbf{Z}$  está conformado por mediciones de  $l$ -variables de entrada y  $s$ -variables de salida de un proceso, las cuales se

representan por los siguientes vectores

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(t) &= \mathbf{u}^0(t) + \eta(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{y}^0(t) + \nu(t)\end{aligned}\tag{3.36}$$

donde  $\eta(t)$  y  $\nu(t)$  son vectores de ruido blanco adicionado a la entrada y a la salida del sistema, con media cero y varianzas  $\gamma_\eta^2$  y  $\gamma_\nu^2$ , respectivamente. Asumiendo la existencia de relaciones lineales estáticas entre  $\mathbf{u}(t)$  e  $\mathbf{y}(t)$ , expresadas en la forma

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \nu(t)\tag{3.37}$$

donde:  $\mathbf{B} \in \mathfrak{R}^{s \times l}$  y  $\text{rank}(\mathbf{B}) = l$ , entonces se satisface el siguiente hecho.

**Hecho 2** Sea un conjunto de datos  $\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}^T & \mathbf{Y}^T \end{bmatrix}$  del sistema (3.37). En ausencia de ruido en las mediciones, dadas las  $s$ -relaciones lineales de  $\mathbf{Z}$ , su correspondiente matriz de covarianza  $\mathbf{\Gamma} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  satisface  $\text{rank}(\mathbf{\Gamma}) = l$ , por lo tanto, de acuerdo con la **Propiedad 3**, los  $l$ -primeros valores propios de  $\mathbf{\Gamma}$  son positivos, mientras que los últimos  $s = n - l$  valores propios son cero.

**Demostración.** Los parámetros estadísticos de media y covarianza de las variables de entrada son

$$\begin{aligned}\mu_{\mathbf{u}} &= E[\mathbf{u}] \\ \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{u}} &= E[\mathbf{u}\mathbf{u}^T] - \mu_{\mathbf{u}}\mu_{\mathbf{u}}^T\end{aligned}\tag{3.38}$$

y los de las variables de salida

$$\begin{aligned}\mu_{\mathbf{y}} &= E[\mathbf{y}] = \mathbf{B}\mu_{\mathbf{u}} \\ \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{y}} &= E[\mathbf{y}\mathbf{y}^T] - \mu_{\mathbf{y}}\mu_{\mathbf{y}}^T = \mathbf{B}\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{u}}\mathbf{B}^T\end{aligned}\tag{3.39}$$

La covarianza entre las señales de entrada y salida está dada por

$$\begin{aligned}\mathbf{\Gamma} &= E[\mathbf{z}\mathbf{z}^T] - \mu_{\mathbf{z}}\mu_{\mathbf{z}}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{u}} & \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{u}}\mathbf{B}^T \\ \mathbf{B}\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{u}} & \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{u}} & \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{u}}\mathbf{B}^T \\ \mathbf{B}\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{u}} & \mathbf{B}\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{u}}\mathbf{B}^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_{11} & \mathbf{\Gamma}_{12} \\ \mathbf{\Gamma}_{21} & \mathbf{\Gamma}_{22} \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{3.40}$$

donde

$$\mu_{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \mu_{\mathbf{u}} \\ \mu_{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{\mathbf{u}} \\ \mathbf{B}\mu_{\mathbf{u}} \end{bmatrix}\tag{3.41}$$

Dado que  $\mathbf{\Gamma}_{12}$ ,  $\mathbf{\Gamma}_{21}$  y  $\mathbf{\Gamma}_{22}$  son combinaciones lineales de  $\mathbf{\Gamma}_{11}$ , entonces  $\text{rank}(\mathbf{\Gamma}) = \text{rank}(\mathbf{\Gamma}_{11}) = \text{rank}(\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{u}}) = l$ . Por lo tanto, los  $l$  primeros valores propios de  $\mathbf{\Gamma}$  serán positivos, mientras que los últimos  $s = n - l$  valores propios tendrán valor cero. Ante la presencia de ruido en las mediciones

los  $s$ -últimos valores propios serán aproximadamente cero.

■

Es decir, si se sabe que existe una relación lineal (3.37) entre las variables de entrada y salida, entonces, de acuerdo con el **Hecho 2**, se puede seleccionar *a priori* las dimensiones de los subespacios de componentes principales y residual con  $p = l$  y  $r = s$ , respectivamente.

En conclusión, a partir de un conjunto de datos nominales  $\mathbf{Z}$  de un proceso multivariado, a través de PCA, éste puede ser modelado implícitamente mediante el conjunto de parámetros siguientes

$$\{\hat{\mu}_{\mathbf{z}}, \hat{\sigma}_{\mathbf{z}}, \mathbf{Q}_p, \mathbf{Q}_r\} \quad (3.42)$$

Con base en este modelo implícito, el monitoreo del proceso se puede llevar a cabo mediante la evaluación en línea de la proyección de nuevas observaciones, ya sea en el subespacio de componentes principales o en el residual. A continuación se describe el procedimiento de detección de fallas.

### 3.3. Detección de fallas basada en PCA

#### 3.3.1. Umbrales de los residuos

El procedimiento de detección de fallas consiste en la evaluación de residuos que se pueden generar en el subespacio de componentes principales o en el subespacio residual. Específicamente, en el subespacio de componentes principales se usa como residuo el parámetro de Hotelling  $T^2$ , y en el subespacio residual se usa como residuo el error cuadrático de predicción,  $SPE$ .

Cada observación  $\tilde{\mathbf{z}}(i) \in \mathfrak{R}^{1 \times n}$  del conjunto de datos  $\mathbf{Z}$  dado en (3.1), se puede expresar en el subespacio de las componentes principales como se define enseguida

$$\mathbf{p}(i) = \tilde{\mathbf{z}}(i)\mathbf{Q}_p \quad (3.43)$$

y adicionalmente en el subespacio residual como

$$\mathbf{r}(i) = \tilde{\mathbf{z}}(i)\mathbf{Q}_r \quad (3.44)$$

Tomando en cuenta los datos en el subespacio de las componentes principales (3.43) y en el subespacio residual (3.44), a continuación se describe cómo generar los residuos de cada subespacio y determinar los respectivos umbrales.

**Umbral de los residuos  $T^2$** 

El residuo  $T^2$  para cada una de las observaciones  $\mathbf{p}(i)$  está dado por

$$T_{\mathbf{p}}^2(i) = \mathbf{p}(i)\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{p}}^{-1}\mathbf{p}(i)^T \quad (3.45)$$

donde:  $\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{p}}$  es la matriz de covarianza de  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{p}} = \text{diag}(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_p)$ . Sustituyendo (3.43) en (3.45), se puede obtener una expresión de  $T_{\mathbf{p}}^2$  en términos de  $\tilde{\mathbf{z}}(i)$ , esto es

$$T_{\mathbf{p}}^2(i) = \tilde{\mathbf{z}}(i)\mathbf{Q}_p\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{p}}^{-1}\mathbf{Q}_p^T\tilde{\mathbf{z}}(i)^T = \tilde{\mathbf{z}}(i)\mathbf{F}\tilde{\mathbf{z}}(i)^T \quad (3.46)$$

donde

$$\mathbf{F} = \mathbf{Q}_p\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{p}}^{-1}\mathbf{Q}_p^T = \mathbf{F}^T \quad (3.47)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \dots + \mathbf{F}_p = \mathbf{q}_1\lambda_1^{-1}\mathbf{q}_1^T + \dots + \mathbf{q}_p\lambda_p^{-1}\mathbf{q}_p^T \quad (3.48)$$

$\mathbf{F}$  y  $\mathbf{F}_j$  son matrices simétricas.

A partir de la distribución de probabilidad del conjunto de parámetros  $T_{\mathbf{p}}^2(i)$ , para  $i = 1, \dots, N$ , se calcula el umbral de condición normal  $UCL_p$ . La distribución de probabilidad de  $T_{\mathbf{p}}^2$  puede ser  $\chi^2$ ,  $F$  o  $\beta$ , la diferencia es menos notable conforme  $N \rightarrow \infty$ . Asumiendo una distribución tipo  $\beta$ ,  $UCL_p$  se determina como sigue

$$UCL_p = \frac{(N-1)^2 \left( \frac{p}{N-p-1} \right) F\left(\frac{\alpha}{2}; p, N-p-1\right)}{N \left( 1 + \left( \frac{p}{N-p-1} \right) F\left(\frac{\alpha}{2}; p, N-p-1\right) \right)} \quad (3.49)$$

donde  $N$  y  $p$  son las dimensiones de  $\mathbf{P}$  y  $\alpha$  es el nivel de confianza. La confiabilidad de este umbral depende de la validez de la **Suposición 2**, (Tracy *et al.* 1992).

**Umbral de los residuos  $SPE$** 

Sea una observación  $\tilde{\mathbf{z}}(i)$  del conjunto de datos  $\mathbf{Z}$ , ésta se puede escribir como

$$\tilde{\mathbf{z}}(i) = \tilde{\mathbf{z}}(i)\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T \quad (3.50)$$

donde:  $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}_n$ . Dado que  $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_p & \mathbf{Q}_r \end{bmatrix}$ , y de acuerdo con el **Hecho 1**,  $\tilde{\mathbf{z}}(i)$  se reescribe como

$$\tilde{\mathbf{z}}(i) = \tilde{\mathbf{z}}(i) \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_p\mathbf{Q}_p^T & \mathbf{Q}_r\mathbf{Q}_r^T \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{z}}(i)\mathbf{Q}_p\mathbf{Q}_p^T + \tilde{\mathbf{z}}(i)\mathbf{Q}_r\mathbf{Q}_r^T \quad (3.51)$$

sustituyendo (3.43) y (3.44) en (3.51) se obtiene

$$\tilde{\mathbf{z}}(i) = \mathbf{p}(i)\mathbf{Q}_p^T + \mathbf{r}(i)\mathbf{Q}_r^T = \widehat{\mathbf{z}}^p(i) + \widehat{\mathbf{z}}^r(i) \quad (3.52)$$

es decir, (3.52) está compuesto por dos términos, donde  $\widehat{\mathbf{z}}^p(i)$  corresponde al estimado de  $\tilde{\mathbf{z}}(i)$  a partir del subespacio de componentes principales, y  $\widehat{\mathbf{z}}^r(i)$  corresponde al estimado a partir del subespacio residual y constituye el error de estimación.

Así, el residuo  $SPE$  para cada una de las observaciones  $\mathbf{r}(i)$ , para  $i = 1, \dots, N$ , está dado por

$$SPE_{\mathbf{r}}(i) = \widehat{\mathbf{z}}^r(i) \widehat{\mathbf{z}}^r(i)^T = \mathbf{r}(i) \mathbf{Q}_r^T \mathbf{Q}_r \mathbf{r}(i)^T = \mathbf{r}(i) \mathbf{r}(i)^T \quad (3.53)$$

Sustituyendo (3.44) en (3.53), se obtiene una expresión de  $SPE_{\mathbf{r}}$  en términos de  $\tilde{\mathbf{z}}(i)$ , esto es

$$SPE_{\mathbf{r}}(i) = \tilde{\mathbf{z}}(i) \mathbf{Q}_r \mathbf{Q}_r^T \tilde{\mathbf{z}}(i)^T = \tilde{\mathbf{z}}(i) \mathbf{G} \tilde{\mathbf{z}}(i)^T \quad (3.54)$$

donde

$$\mathbf{G} = \mathbf{Q}_r \mathbf{Q}_r^T = \mathbf{G}^T \quad (3.55)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 + \dots + \mathbf{G}_r = \mathbf{q}_{p+1} \mathbf{q}_{p+1}^T + \dots + \mathbf{q}_n \mathbf{q}_n^T \quad (3.56)$$

$\mathbf{G}$  y  $\mathbf{G}_j$  son matrices simétricas.

El umbral de condición normal  $UCL_r$  para el conjunto de parámetros univariados,  $SPE_{\mathbf{r}}(i)$ , asociados al subespacio residual, se calcula mediante la expresión (Jackson 1991), (Raich y Çinar 1996)

$$UCL_r = \theta_1 \left[ \frac{h_0 c_\alpha \sqrt{2\theta_2}}{\theta_1} + 1 + \frac{\theta_2 h_0 (h_0 - 1)}{\theta_1^2} \right]^{\frac{1}{h_0}} \quad (3.57)$$

donde:  $\theta_k = \sum_{j=p+1}^n \lambda_j^k$ ;  $h_0 = 1 - \frac{2\theta_1 \theta_3}{3\theta_2^2}$ ;  $c_\alpha$  es la desviación normal correspondiente al percentil  $(1 - \alpha)$ ,  $\alpha$  es un nivel de confianza del estimado  $UCL_r$ .

### 3.3.2. Algoritmo de detección de fallas

Sea una nueva observación

$$\mathbf{z}^a = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_n \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

El monitoreo del proceso consiste en evaluar en línea la consistencia de  $\mathbf{z}^a \in \Re^{1 \times n}$  con respecto al modelo implícito (3.42). Esto se lleva a cabo mediante la evaluación de los residuos de  $\mathbf{z}^a$ , generados en los subespacios de componentes principales y residual, con respecto a los correspondientes umbrales (3.49) y (3.57). El procedimiento de monitoreo se resume en los siguientes pasos, ver el esquema de la figura 3.2.

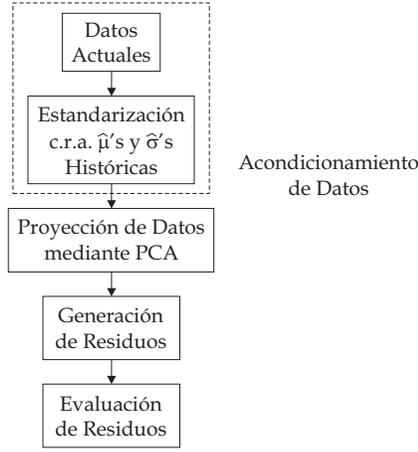


Figura 3.2: Esquema de detección de fallas basado en PCA

1. Estandarizar (3.58) con respecto a las medias (3.28) y las desviaciones estándar (3.31), esto es

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{z}}^a &= \mathbf{z}^a - \hat{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{z}} \\ \tilde{\mathbf{z}}^a &= \bar{\mathbf{z}}^a \mathbf{D}_{\mathbf{z}}^{-1}\end{aligned}\quad (3.59)$$

2. Transformar el vector estandarizado  $\tilde{\mathbf{z}}^a$  en los subespacios de componentes principales y residual, mediante  $\mathbf{Q}_p$  y  $\mathbf{Q}_r$

$$\begin{aligned}\mathbf{p}^a &= \tilde{\mathbf{z}}^a \mathbf{Q}_p \\ \mathbf{r}^a &= \tilde{\mathbf{z}}^a \mathbf{Q}_r\end{aligned}\quad (3.60)$$

3. Generar los correspondientes residuos para  $\mathbf{p}^a$  y  $\mathbf{r}^a$

$$\begin{aligned}T_{\mathbf{p}^a}^2 &= \mathbf{p}^a \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{p}}^{-1} \mathbf{p}^{aT} \\ SPE_{\mathbf{r}^a} &= \mathbf{r}^a \mathbf{r}^{aT}\end{aligned}\quad (3.61)$$

4. Si alguno de los residuos es mayor a su respectivo umbral,  $UCL_p$  o  $UCL_r$ , entonces la presencia de una falla en el proceso es detectada.

### 3.4. PCA dinámico

El algoritmo de detección de fallas descrito anteriormente está basado en el modelo implícito obtenido a partir de un conjunto de datos serialmente independientes. Sin embargo, en procesos dinámicos las variables son series de tiempo autocorrelacionadas, por lo tanto, al aplicar PCA en un conjunto de datos de series de tiempo, el modelo implícito sólo incluirá las relaciones estáticas entre las variables del proceso y como consecuencia, en la etapa de detección se provocarán falsas

alarmas y pérdida de sensibilidad a fallas (Kresta *et al.* 1991), (Negiz y Çinar, 1997).

Así, en el caso de sistemas dinámicos la matriz de datos de las series de tiempo se debe expresar incorporando retardos de tiempo. La generalidad del procedimiento de PCA aplicado a la matriz de datos extendida se conoce como PCA dinámico, DPCA (Ku *et al.* 1995). El procedimiento se describe a continuación.

Sea la matriz  $\mathbf{Z}(t)$  un conjunto de datos compuesto de  $n_t$  observaciones de  $n$  series de tiempo de un proceso dinámico operando en condiciones nominales y alrededor de un punto de operación, esto es

$$\mathbf{Z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1(t) & \mathbf{z}_2(t) & \cdots & \mathbf{z}_n(t) \end{bmatrix}_{(n_t \times n)} \quad (3.62)$$

Con el fin de considerar las autocorrelaciones en cada señal,  $\mathbf{Z}(t)$  se expresa en  $w$ -retardos de tiempo, de donde se obtiene la denominada *matriz de trayectoria* siguiente

$$\mathbf{Z}_{(w)}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{1(w)}(t) & \mathbf{Z}_{2(w)}(t) & \cdots & \mathbf{Z}_{n(w)}(t) \end{bmatrix}_{(N \times m)} \quad (3.63)$$

donde e.g.  $\mathbf{Z}_{j(w)}(t) = [\mathbf{z}_j(t) \quad \mathbf{z}_j(t-1) \quad \dots \quad \mathbf{z}_j(t-w)]$ ;  $N = n_t - w$ ,  $m = n(w+1)$ .

Por lo tanto, para sistemas dinámicos, el modelado implícito se lleva a cabo a partir del conjunto de datos nominales resumidos en la matriz de trayectoria (3.63), de acuerdo con el procedimiento descrito en la sección 3.2. Así, en el algoritmo de detección de fallas basado en DPCA, para la evaluación de las nuevas observaciones  $\mathbf{z}^a$ , éstas deben ser expresadas con sus correspondientes  $w$ -retardos de tiempo. Por otro lado, es importante resaltar que a pesar que la extensión al caso dinámico es muy simple, poco se ha discutido respecto a la selección del orden  $w$  de retardos de tiempo.

Aun cuando en el enfoque convencional de DPCA no se hace diferencia entre variables de entrada y salida, no obstante, en este trabajo sí se hará tal diferencia considerando a las entradas como causas y a las salidas como efectos. El propósito es dotar a DPCA con un mecanismo de estandarización adaptable y lograr aislamiento de fallas.



## Capítulo 4

# Detección robusta vía estandarización adaptable

En este capítulo se presenta el esquema propuesto de *estandarización adaptable* para la detección robusta de fallas donde se lleva a cabo el análisis de sensibilidad de los residuos obtenidos vía DPCA, ante cambios de punto de operación y fallas; se describe la integración de DPCA con identificación de sistemas, donde se analiza la invarianza de la estructura de correlación ante cambios de punto de operación. Así mismo, se explica cómo identificar los modelos FIR, necesarios para la estandarización adaptable, a partir de la información de la matriz de covarianzas utilizada en el modelado basado en DPCA; se presenta un análisis, en términos de funciones de auto e intercovarianzas, de las propiedades estadísticas de las secuencias de ponderación de los modelos FIR, y se propone un procedimiento para la selección del orden de los modelos FIR que toma en cuenta la suma de los cuadrados de los errores de predicción y la incertidumbre en los parámetros estimados; se describe el procedimiento para la estimación en línea de los parámetros estadísticos nominales necesarios en el mecanismo de estandarización adaptable. Finalmente, se presenta el algoritmo para la detección robusta de fallas y se muestran resultados, a nivel simulación, del algoritmo propuesto aplicado a un sistema hidráulico de tres tanques interconectados, donde se evalúa la robustez de la detección.

### 4.1. Señales no estacionarias

El procesamiento de datos con DPCA supone estacionariedad en las señales durante el modelado estadístico. Por lo tanto, al usar este modelo en un sistema de diagnóstico, se presenta una alta tasa de falsas alarmas cuando las nuevas observaciones o datos evaluados no son estacionarios.

El problema de no estacionariedad ha sido abordado con versiones adaptables de PCA, en el marco del subespacio de componentes principales (Gallagher *et al.*, 1997), (Li *et al.*, 2000), (Choi *et al.*, 2006); sin embargo, la adaptación está basada en las variaciones de los parámetros estadísticos de las observaciones multivariadas actuales  $\mathbf{z}^a$ , variaciones que se suponen debido sólo a condiciones nominales. Esta consideración inhabilita a PCA como algoritmo de FDI pues no es capaz de distinguir las causas de la no estacionariedad.

Considérese el proceso mostrado en la figura 4.1, cuyas  $l$ -variables de entrada  $\mathbf{u}(t)$  y  $s$ -variables de salida  $\mathbf{y}(t)$ , son series de tiempo medibles, las cuales en condiciones estacionarias y nominales están dadas como

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(t) &= \mathbf{u}^0(t) + \eta(t) = \mu_{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^d(t) + \eta(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{y}^0(t) + \nu(t) = \mu_{\mathbf{y}} + \mathbf{y}^d(t) + \nu(t)\end{aligned}\tag{4.1}$$

donde:  $\mathbf{u}^0$  e  $\mathbf{y}^0$  son las señales que actúan sobre el proceso y se generan en el proceso, las cuales se supone que pueden expresarse por medio de sus respectivas medias ( $\mu_{\mathbf{u}}$ ,  $\mu_{\mathbf{y}}$ ), y señales aleatorias ( $\mathbf{u}^d$ ,  $\mathbf{y}^d$ );  $\eta$  es una señal de ruido blanco adicionada a las señales de entrada, con media cero, varianza  $\gamma_{\eta}^2$ , e independiente de  $\mathbf{u}^d$ ;  $\nu$  es ruido blanco en las mediciones de las variables de salida, con media cero, varianza  $\gamma_{\nu}^2$ , e independiente de  $\mathbf{y}^d$ . Adicionalmente, en la figura 4.1 se indican las fallas,  $\mathbf{f}_{\mathbf{B}}$  fallas en el proceso,  $\mathbf{f}_{\mathbf{a}}$  fallas en los actuadores y  $\mathbf{f}_{\mathbf{y}}$  fallas en los sensores a la salida.

La pérdida de estacionariedad en las series de tiempo  $\mathbf{u}(t)$  e  $\mathbf{y}(t)$  tiene como causas: el envejecimiento de componentes, los eventos de fallas, y los cambios de punto de operación del proceso. En particular, un cambio de punto de operación involucra cambios nominales en  $\mu_{\mathbf{u}}$  y/o  $\mathbf{u}^d(t)$ , y sus efectos correspondientes en  $\mu_{\mathbf{y}}$  y/o  $\mathbf{y}^d(t)$ ; sin embargo, una falla en el proceso, por ejemplo, provocará cambios en  $\mu_{\mathbf{y}}$  y/o  $\mathbf{y}^d(t)$  aun cuando los valores nominales de  $\mu_{\mathbf{u}}$  y/o  $\mathbf{u}^d(t)$  no cambien. Por lo tanto, se requiere un sistema de FDI que sea robusto a los cambios de punto de operación, vistos como cambios nominales de señales externas, y que por otro lado, sea sensible a los cambios debido a envejecimiento y fallas de interés.

En las siguientes secciones se lleva a cabo un análisis de sensibilidad de los residuos  $T^2$  y  $SPE$ , ante cambios de punto de operación y ante fallas, con el fin de mostrar las causas de las falsas alarmas; se describe la propuesta para eliminar las falsas alarmas, esto es, el mecanismo de estandarización adaptable, en el que se propone explotar la información de los datos históricos usados en el modelado implícito para poder estimar en línea los parámetros estadísticos de estandarización.

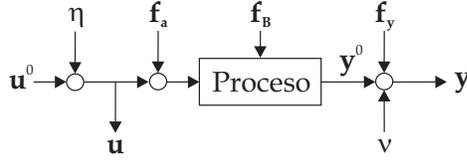


Figura 4.1: Variables y Fallas

## 4.2. Sensibilidad de los residuos

Considérese para fines de análisis, que existen relaciones lineales estáticas entre  $\mathbf{u}(t)$  e  $\mathbf{y}(t)$ , expresadas en la forma

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \nu(t) \quad (4.2)$$

Por lo tanto, considerando (4.1), las salidas se pueden expresar como

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{B}\mathbf{u}^0(t) + \mathbf{B}\eta(t) + \nu(t) = \mathbf{B}\mu_{\mathbf{u}} + \mathbf{B}\mathbf{u}^d(t) + \mathbf{B}\eta(t) + \nu(t) \quad (4.3)$$

resultando,  $\mu_{\mathbf{y}} = \mathbf{B}\mu_{\mathbf{u}}$  y  $\mathbf{y}^d(t) = \mathbf{B}\mathbf{u}^d(t) + \mathbf{B}\eta(t)$ .

Agrupando las observaciones en el vector conjunto de variables de entrada-salida como sigue

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^T & \mathbf{y}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 & \cdots & z_n \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

donde:  $n = l + s$ , los respectivos vectores de medias y desviaciones estándar para un punto de operación particular están dados por

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbf{z}} &= \begin{bmatrix} \mu_{\mathbf{u}}^T & \mu_{\mathbf{y}}^T \end{bmatrix} \\ \sigma_{\mathbf{z}} &= \begin{bmatrix} \sigma_{\mathbf{u}}^T & \sigma_{\mathbf{y}}^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.5)$$

### 4.2.1. Sensibilidad de $T^2$

#### *Sensibilidad de $T^2$ ante cambios de media*

Considérese un cambio de punto de operación en el proceso, el cual provoca una desviación  $\delta\mu_{\mathbf{u}}$  con respecto al valor medio de las variables de entrada, esto es

$$\mathbf{u}^a = \delta\mu_{\mathbf{u}} + \mu_{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^d + \eta \quad (4.6)$$

Este cambio se refleja en las salidas como

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^a &= \mathbf{B}\delta\mu_{\mathbf{u}} + \mathbf{B}\mu_{\mathbf{u}} + \mathbf{B}\mathbf{u}^d + \mathbf{B}\eta + \nu \\ \mathbf{y}^a &= \delta\mu_{\mathbf{y}} + \mu_{\mathbf{y}} + \mathbf{y}^d + \nu \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde:  $\delta\mu_{\mathbf{y}} = \mathbf{B}\delta\mu_{\mathbf{u}}$ . El vector conjunto de variables de entrada-salida es

$$\mathbf{z}^a = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{aT} & \mathbf{y}^{aT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\delta\mu_{\mathbf{u}} + \mu_{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^d + \eta)^T & (\delta\mu_{\mathbf{y}} + \mu_{\mathbf{y}} + \mathbf{y}^d + \nu)^T \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

cuya extracción de medias con respecto a  $\mu_{\mathbf{z}}$  resulta en

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{z}}^a &= \mathbf{z}^a - \mu_{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} (\delta\mu_{\mathbf{u}} + \mu_{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^d + \eta)^T & (\delta\mu_{\mathbf{y}} + \mu_{\mathbf{y}} + \mathbf{y}^d + \nu)^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_{\mathbf{u}}^T & \mu_{\mathbf{y}}^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\delta\mu_{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^d + \eta)^T & (\delta\mu_{\mathbf{y}} + \mathbf{y}^d + \nu)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\delta\mu_{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}})^T & (\delta\mu_{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{y}})^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde:  $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^d + \eta$  e  $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y}^d + \nu$ . Por otro lado, la normalización de  $\bar{\mathbf{z}}^a$  con respecto a  $\sigma_{\mathbf{z}}$  es

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{z}}^a &= \bar{\mathbf{z}}^a \mathbf{D}_{\mathbf{z}}^{-1} = \begin{bmatrix} (\delta\mu_{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}})^T \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{u}}}^{-1} & (\delta\mu_{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{y}})^T \mathbf{D}_{\bar{\mathbf{y}}}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\tilde{\delta}\mu_{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}})^T & (\tilde{\delta}\mu_{\mathbf{y}} + \tilde{\mathbf{y}})^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}^T & \tilde{\mathbf{y}}^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\delta}\mu_{\mathbf{u}}^T & \tilde{\delta}\mu_{\mathbf{y}}^T \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\delta}\mu_{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde:  $\mathbf{D}_{\mathbf{z}} = \text{diag}(\sigma_{\mathbf{z}})$ ,  $\mathbf{D}_{\bar{\mathbf{u}}} = \text{diag}(\sigma_{\bar{\mathbf{u}}})$  y  $\mathbf{D}_{\bar{\mathbf{y}}} = \text{diag}(\sigma_{\bar{\mathbf{y}}})$ .  $\tilde{\delta}\mu_{\mathbf{z}}$  representa el error debido al cambio de punto de operación. Así, de acuerdo con (3.46), el correspondiente  $T_{\mathbf{p}^a}^2$  es

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{p}^a}^2 &= \tilde{\mathbf{z}}^a \mathbf{F} \tilde{\mathbf{z}}^{aT} = \left( \tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\delta}\mu_{\mathbf{z}} \right) \mathbf{F} \left( \tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\delta}\mu_{\mathbf{z}} \right)^T \\ &= \tilde{\mathbf{z}} \mathbf{F} \tilde{\mathbf{z}}^T + \tilde{\mathbf{z}} \mathbf{F} \tilde{\delta}\mu_{\mathbf{z}}^T + \tilde{\delta}\mu_{\mathbf{z}} \mathbf{F} \tilde{\mathbf{z}}^T + \tilde{\delta}\mu_{\mathbf{z}} \mathbf{F} \tilde{\delta}\mu_{\mathbf{z}}^T \\ &= T_{\mathbf{p}}^2 + T_{\mathbf{p}^c}^2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

donde:  $T_{\mathbf{p}^c}^2 = \tilde{\mathbf{z}} \mathbf{F} \tilde{\delta}\mu_{\mathbf{z}}^T + \tilde{\delta}\mu_{\mathbf{z}} \mathbf{F} \tilde{\mathbf{z}}^T + \tilde{\delta}\mu_{\mathbf{z}} \mathbf{F} \tilde{\delta}\mu_{\mathbf{z}}^T$ . Es decir,  $T_{\mathbf{p}^a}^2$  está formado por la componente nominal  $T_{\mathbf{p}}^2$ , asociada al punto de operación original, y una componente  $T_{\mathbf{p}^c}^2$ , asociada al nuevo punto de operación. Dado que el umbral de condición normal se definió para  $T_{\mathbf{p}}^2$ , entonces el valor de  $T_{\mathbf{p}^a}^2$  será malinterpretado como falla, aun cuando las condiciones de operación siguen siendo nominales.

A continuación se analiza la sensibilidad de  $T_{\mathbf{p}^a}^2$  con respecto al error  $\tilde{\delta}\mu_{\mathbf{z}}$ , esto es

$$\frac{\partial T_{\mathbf{p}^a}^2}{\partial \tilde{\delta}\mu_{\mathbf{z}}} = \tilde{\mathbf{z}} \mathbf{F} + \tilde{\mathbf{z}} \mathbf{F}^T + \tilde{\delta}\mu_{\mathbf{z}} (\mathbf{F} + \mathbf{F}^T) \quad (4.12)$$

y considerando la simetría de  $\mathbf{F}$  resulta

$$\frac{\partial T_{\mathbf{p}^a}^2}{\partial \tilde{\delta}\mu_{\mathbf{z}}} = 2\tilde{\mathbf{z}} \mathbf{F} + 2\tilde{\delta}\mu_{\mathbf{z}} \mathbf{F} = 2 \left( \tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\delta}\mu_{\mathbf{z}} \right) \mathbf{F} \quad (4.13)$$

y dado que

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \dots + \mathbf{F}_p = \sum_{j=1}^p \mathbf{q}_j \lambda_j^{-1} \mathbf{q}_j^T \quad (4.14)$$

se concluye que la sensibilidad de  $T_{\mathbf{p}^a}^2$  dada en (4.13), ante cambios de punto de operación  $\tilde{\delta}\mu_{\mathbf{z}}$ , depende de la suma de las componentes consideradas en  $\mathbf{F}$  y el inverso de sus respectivos factores de variabilidad. Es decir, mientras mayor sea  $\mathbf{F}$ , mayor será el efecto del cambio de punto de operación. Por lo tanto, para minimizar las falsas alarmas, se deberá calcular  $T_{\mathbf{p}^a}^2$  con la componente de mayor variabilidad, esto es:  $T_{\mathbf{p}^a}^2 = \tilde{\mathbf{z}}^a \mathbf{F}_1 \tilde{\mathbf{z}}^{aT}$ .

*Sensibilidad de  $T^2$  ante fallas en el proceso*

Considérese una falla en el proceso dada por:  $\mathbf{f}_B + \mathbf{B}$ , con  $\mathbf{B}$  constante. En este caso la entrada actual es

$$\mathbf{u}^a = \mu_{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^d + \eta \quad (4.15)$$

que corresponde a la misma de condiciones nominales. Por su parte, el efecto de la falla en las variables de salida es

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^a &= \mathbf{f}_B \mathbf{u}^a + \mathbf{B} \mathbf{u}^a + \nu = \mathbf{f}_B \mathbf{u}^a + \mathbf{B} \mu_{\mathbf{u}} + \mathbf{B} \mathbf{u}^d + \mathbf{B} \eta + \nu \\ \mathbf{y}^a &= \delta_{\mathbf{y}} + \mu_{\mathbf{y}} + \mathbf{y}^d + \nu \end{aligned} \quad (4.16)$$

donde:  $\delta_{\mathbf{y}} = \mathbf{f}_B \mathbf{u}^a$ . Por lo tanto, una nueva observación en condición de falla se describe como

$$\mathbf{z}^a = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{aT} & \mathbf{y}^{aT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mu_{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^d + \eta)^T & (\delta_{\mathbf{y}} + \mu_{\mathbf{y}} + \mathbf{y}^d + \nu)^T \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

y considerando las medias nominales  $\mu_{\mathbf{z}}$  se tiene

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{z}}^a &= \mathbf{z}^a - \mu_{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} (\mu_{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^d + \eta)^T & (\delta_{\mathbf{y}} + \mu_{\mathbf{y}} + \mathbf{y}^d + \nu)^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_{\mathbf{u}}^T & \mu_{\mathbf{y}}^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\mathbf{u}^d + \eta)^T & (\delta_{\mathbf{y}} + \mathbf{y}^d + \nu)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}^T & (\delta_{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{y}})^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.18)$$

y cuya estandarización se obtiene de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{z}}^a &= \bar{\mathbf{z}}^a \mathbf{D}_{\mathbf{z}}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{D}_{\mathbf{u}}^{-1} & (\delta_{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{y}})^T \mathbf{D}_{\mathbf{y}}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}^T & (\tilde{\delta}_{\mathbf{y}} + \tilde{\mathbf{y}})^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}^T & \tilde{\mathbf{y}}^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \tilde{\delta}_{\mathbf{y}}^T \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\delta}_{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Donde  $\tilde{\delta}_{\mathbf{z}}$  corresponde al efecto de la falla. De acuerdo con (3.46), el correspondiente  $T_{\mathbf{p}^a}^2$  sería

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{p}^a}^2 &= \tilde{\mathbf{z}}^a \mathbf{F} \tilde{\mathbf{z}}^{aT} = (\tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\delta}_{\mathbf{z}}) \mathbf{F} (\tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\delta}_{\mathbf{z}})^T \\ &= \tilde{\mathbf{z}} \mathbf{F} \tilde{\mathbf{z}}^T + \tilde{\mathbf{z}} \mathbf{F} \tilde{\delta}_{\mathbf{z}}^T + \tilde{\delta}_{\mathbf{z}} \mathbf{F} \tilde{\mathbf{z}}^T + \tilde{\delta}_{\mathbf{z}} \mathbf{F} \tilde{\delta}_{\mathbf{z}}^T \\ &= T_{\mathbf{p}}^2 + T_{\mathbf{p}^f}^2 \end{aligned} \quad (4.20)$$

donde:  $T_{\mathbf{p}^f}^2 = \tilde{\mathbf{z}} \mathbf{F} \tilde{\delta}_{\mathbf{z}}^T + \tilde{\delta}_{\mathbf{z}} \mathbf{F} \tilde{\mathbf{z}}^T + \tilde{\delta}_{\mathbf{z}} \mathbf{F} \tilde{\delta}_{\mathbf{z}}^T$ . En este caso,  $T_{\mathbf{p}^a}^2$  contiene una componente nominal  $T_{\mathbf{p}}^2$ , asociada al punto de operación original, y una componente  $T_{\mathbf{p}^f}^2$  debida a la falla. Por lo tanto, al definir el umbral de condición normal para  $T_{\mathbf{p}}^2$ , entonces el valor de  $T_{\mathbf{p}^a}^2$  rebasará el umbral  $UCL_p$  con lo cual se detecta la existencia de una falla.

La sensibilidad de  $T_{\mathbf{p}^a}^2$  con respecto a  $\tilde{\delta}_{\mathbf{z}}$  está dada por

$$\frac{\partial T_{\mathbf{p}^a}^2}{\partial \tilde{\delta}_{\mathbf{z}}} = \tilde{\mathbf{z}} \mathbf{F} + \tilde{\mathbf{z}} \mathbf{F}^T + \tilde{\delta}_{\mathbf{z}} (\mathbf{F} + \mathbf{F}^T) = 2\tilde{\mathbf{z}} \mathbf{F} + 2\tilde{\delta}_{\mathbf{z}} \mathbf{F} = 2 \left( \tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\delta}_{\mathbf{z}} \right) \mathbf{F} \quad (4.21)$$

y dado que

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \cdots + \mathbf{F}_p = \sum_{j=1}^p \mathbf{q}_j \lambda_j^{-1} \mathbf{q}_j^T \quad (4.22)$$

la sensibilidad de  $T_{\mathbf{p}^a}^2$  ante fallas, depende de cuántas componentes se consideran en  $\mathbf{F}$  y de la norma de  $\mathbf{F}$ . Como resultado, contrario al caso de cambios de punto de operación, se obtiene una mayor sensibilidad a fallas al considerar el máximo número de componentes en  $\mathbf{F}$  para el cálculo de  $T_{\mathbf{p}^a}^2$ .

Así, dado que interesa reducir el efecto en  $T_{\mathbf{p}^a}^2$  ante cambios de punto de operación, y amplificar el efecto de las fallas, se debe establecer un compromiso entre estas dos condiciones en la selección del número de componentes en  $\mathbf{F}$  para el cálculo de  $T_{\mathbf{p}^a}^2$ .

#### 4.2.2. Sensibilidad de SPE

##### *Sensibilidad de SPE ante cambios de media*

Considérese un cambio de punto de operación el cual provoca una desviación  $\delta\mu_{\mathbf{u}}$  con respecto al valor medio de las variables de entrada, entonces cada observación del vector de entrada y salida se puede expresar, respectivamente, como:  $\mathbf{u}^a = \delta\mu_{\mathbf{u}} + \mu_{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^d + \eta$  e  $\mathbf{y}^a = \delta\mu_{\mathbf{y}} + \mu_{\mathbf{y}} + \mathbf{y}^d + \nu$ . Así, de acuerdo con (4.9) y (4.10), el vector estandarizado de la observación actual  $\mathbf{z}^a = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{aT} & \mathbf{y}^{aT} \end{bmatrix}$  es

$$\tilde{\mathbf{z}}^a = \tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\delta}\mu_{\mathbf{z}} \quad (4.23)$$

De acuerdo con (3.54) el correspondiente  $SPE_{\mathbf{r}^a}$  resulta en

$$\begin{aligned} SPE_{\mathbf{r}^a} &= \mathbf{r}\mathbf{r}^T = \tilde{\mathbf{z}}^a \mathbf{Q}_r \mathbf{Q}_r^T \tilde{\mathbf{z}}^{aT} = \tilde{\mathbf{z}}^a \mathbf{G} \tilde{\mathbf{z}}^{aT} = \left( \tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\delta}\mu_{\mathbf{z}} \right) \mathbf{G} \left( \tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\delta}\mu_{\mathbf{z}} \right)^T \\ &= \tilde{\mathbf{z}} \mathbf{G} \tilde{\mathbf{z}}^T + \tilde{\mathbf{z}} \mathbf{G} \tilde{\delta}\mu_{\mathbf{z}}^T + \tilde{\delta}\mu_{\mathbf{z}} \mathbf{G} \tilde{\mathbf{z}}^T + \tilde{\delta}\mu_{\mathbf{z}} \mathbf{G} \tilde{\delta}\mu_{\mathbf{z}}^T \\ &= SPE_{\mathbf{r}} + SPE_{\mathbf{r}^c} \end{aligned} \quad (4.24)$$

donde:  $SPE_{\mathbf{r}^c} = \tilde{\mathbf{z}} \mathbf{G} \tilde{\delta}\mu_{\mathbf{z}}^T + \tilde{\delta}\mu_{\mathbf{z}} \mathbf{G} \tilde{\mathbf{z}}^T + \tilde{\delta}\mu_{\mathbf{z}} \mathbf{G} \tilde{\delta}\mu_{\mathbf{z}}^T$ . Es decir,  $SPE_{\mathbf{r}^a}$  se ve afectado por el cambio en el punto de operación con un error  $SPE_{\mathbf{r}^c}$ . Dado que el umbral de condición normal se definió para  $SPE_{\mathbf{r}}$ , entonces el valor de  $SPE_{\mathbf{r}^a}$  es mayor al umbral y será malinterpretado como falla, aun cuando el proceso opera en condición de no falla.

La sensibilidad de  $SPE_{\mathbf{r}^a}$  con respecto al error  $\tilde{\delta}\mu_{\mathbf{z}}$  está dado por

$$\frac{\partial SPE_{\mathbf{r}^a}}{\partial \tilde{\delta}\mu_{\mathbf{z}}} = \tilde{\mathbf{z}} \mathbf{G} + \tilde{\mathbf{z}} \mathbf{G}^T + \tilde{\delta}\mu_{\mathbf{z}} (\mathbf{G} + \mathbf{G}^T) \quad (4.25)$$

y considerando la simetría de  $\mathbf{G}$  resulta

$$\frac{\partial SPE_{\mathbf{r}^a}}{\partial \tilde{\delta}\mu_{\mathbf{z}}} = 2\tilde{\mathbf{z}} \mathbf{G} + 2\tilde{\delta}\mu_{\mathbf{z}} \mathbf{G} = 2 \left( \tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\delta}\mu_{\mathbf{z}} \right) \mathbf{G} \quad (4.26)$$

Por otro lado, de (3.56) se tiene

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 + \cdots + \mathbf{G}_r = \sum_{j=p+1}^n \mathbf{q}_j \mathbf{q}_j^T \quad (4.27)$$

así que la sensibilidad de  $SPE_{r^a}$  dada en (4.26), ante cambios de punto de operación, depende de cuántas componentes se consideran en  $\mathbf{G}$ , es decir, de la norma o factor de amplificación.

Tomando en cuenta que la amplificación es acumulativa, para reducir las falsas alarmas, se sugiere calcular  $SPE_{r^a}$  con la componente  $\mathbf{q}_n$  asociada a  $\lambda_n$ , es decir, la componente que genera la menor varianza. Esto es:  $SPE_{r^a} = \tilde{\mathbf{z}}^a \mathbf{G}_r \tilde{\mathbf{z}}^{aT}$ .

### *Sensibilidad de SPE ante fallas en el proceso*

Similar al análisis de  $T^2$ , considérese una falla  $\mathbf{f}_B$  en el proceso. Donde de acuerdo con (4.19), la nueva observación estandarizada en condición de falla se puede expresar como

$$\tilde{\mathbf{z}}^a = \tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\delta}_z \quad (4.28)$$

con correspondiente  $SPE_{r^a}$

$$\begin{aligned} SPE_{r^a} &= \tilde{\mathbf{z}}^a \mathbf{G} \tilde{\mathbf{z}}^{aT} = (\tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\delta}_z) \mathbf{G} (\tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\delta}_z)^T \\ &= \tilde{\mathbf{z}} \mathbf{G} \tilde{\mathbf{z}}^T + \tilde{\mathbf{z}} \mathbf{G} \tilde{\delta}_z^T + \tilde{\delta}_z \mathbf{G} \tilde{\mathbf{z}}^T + \tilde{\delta}_z \mathbf{G} \tilde{\delta}_z^T \\ &= SPE_r + SPE_{r^f} \end{aligned} \quad (4.29)$$

donde:  $SPE_{r^f} = \tilde{\mathbf{z}} \mathbf{G} \tilde{\delta}_z^T + \tilde{\delta}_z \mathbf{G} \tilde{\mathbf{z}}^T + \tilde{\delta}_z \mathbf{G} \tilde{\delta}_z^T$ . En este caso,  $SPE_{r^a}$  contiene la componente nominal,  $SPE_r$ , asociada al punto de operación original, y una componente debida a la falla,  $SPE_{r^f}$ . Dado que el umbral de condición normal se definió para  $SPE_r$ , entonces el valor de  $SPE_{r^a}$  rebasará el umbral  $UCL_r$  con lo cual se revela la existencia de una falla.

La sensibilidad de  $SPE_{r^a}$  con respecto a  $\tilde{\delta}_z$  está dada por

$$\frac{\partial SPE_{r^a}}{\partial \tilde{\delta}_z} = \tilde{\mathbf{z}} \mathbf{G} + \tilde{\mathbf{z}} \mathbf{G}^T + \tilde{\delta}_z (\mathbf{G} + \mathbf{G}^T) = 2 (\tilde{\mathbf{z}} + \tilde{\delta}_z) \mathbf{G} \quad (4.30)$$

De acuerdo con (3.56)

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 + \cdots + \mathbf{G}_r = \sum_{j=p+1}^n \mathbf{q}_j \mathbf{q}_j^T \quad (4.31)$$

de manera similar al caso de desviación en el punto de operación, la sensibilidad de  $SPE_{r^a}$  con respecto a las fallas, depende de cuántas componentes se consideran en  $\mathbf{G}$  y cuánta amplificación aporta cada una de éstas. Dado el fenómeno acumulativo de cada  $\mathbf{G}_j$  cuya norma es igual a uno,

en este caso interesa la mayor amplificación del efecto de falla  $\tilde{\delta}_{\mathbf{z}}$ , por lo tanto, se sugiere retener todas las  $r$  componentes en  $\mathbf{G}$  para el cálculo de  $SPE_{r^a}$ .

Análogamente al caso de  $T^2$ , se debe establecer un compromiso entre la mayor sensibilidad a fallas y la menor sensibilidad a cambios en el punto de operación, en la selección del número de componentes en  $\mathbf{G}$  para el cálculo de  $SPE_{r^a}$ .

Del análisis anterior se concluye que las falsas alarmas se derivan de la no estacionariedad asociada a los cambios de punto de operación. El problema fundamental es la estandarización de las observaciones actuales del proceso con respecto a los parámetros estadísticos fijos  $\mu_{\mathbf{z}}$  y  $\sigma_{\mathbf{z}}$ , esto se puede ver de las ecuaciones (4.9) y (4.10). Es necesario entonces la estandarización con respecto a parámetros estadísticos nominales actuales, lo cual conlleva a diferenciar entre variables de entrada y variables de salida.

Así, dado que un cambio de punto de operación es un cambio en las variables de entrada, lo cual tiene un correspondiente efecto en las variables de salida, se propone un mecanismo de *estandarización adaptable*, donde:

- Las medias y varianzas actuales de las variables de entrada se estiman mediante promediado móvil con ponderación exponencial (EWMA) y covarianza móvil con ponderación exponencial (EWMC), respectivamente.
- Las medias y varianzas de las variables de salida se estiman a partir de las medias y varianzas de las entradas a través de relaciones entrada-salida nominales.

La propuesta se basa en el hecho de que en condiciones nominales, aún ante cambios de punto de operación, la estructura de correlación entre las señales del sistema no cambia, por lo tanto, el modelo estadístico basado en DPCA también es invariante a los cambios de punto de operación. En la siguiente sección se analiza la propiedad de invarianza de la estructura de correlación.

### 4.2.3. Invarianza de la estructura de correlación

En un sistema lineal (4.2) las variables entrada-salida son afines, por lo tanto, la estructura de correlación entre las variables es invariante con respecto a cambios en el punto de operación del sistema (Kailath *et al.*, 2000). A continuación se demuestra la propiedad de invarianza de la

estructura de correlación entre variables de un sistema libre de fallas.

Considérese el sistema lineal (4.2), en donde para simplificar el análisis se supone la ausencia de ruido en las variables de entrada y salida, esto es

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mu_{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^d \\ \mathbf{y} &= \mathbf{B}\mu_{\mathbf{u}} + \mathbf{B}\mathbf{u}^d\end{aligned}\quad (4.32)$$

Con el fin de describir la covarianza entre las señales de entrada  $\mathbf{u}$  y salida  $\mathbf{y}$ , defínase el vector  $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^T & \mathbf{y}^T \end{bmatrix}^T$  cuyas medias están dadas por

$$\mu_{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \mu_{\mathbf{u}} \\ \mu_{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{\mathbf{u}} \\ \mathbf{B}\mu_{\mathbf{u}} \end{bmatrix}\quad (4.33)$$

y entonces la covarianza es

$$\mathbf{\Gamma} = E[\mathbf{z}\mathbf{z}^T] - \mu_{\mathbf{z}}\mu_{\mathbf{z}}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{u}} & \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{u}}\mathbf{B}^T \\ \mathbf{B}\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{u}} & \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{u}} & \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{u}}\mathbf{B}^T \\ \mathbf{B}\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{u}} & \mathbf{B}\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{u}}\mathbf{B}^T \end{bmatrix}\quad (4.34)$$

La matriz de correlación de  $\mathbf{z}$  se define como sigue

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{D}_{\mathbf{z}}^{-1}\mathbf{\Gamma}\mathbf{D}_{\mathbf{z}}^{-1}\quad (4.35)$$

donde:  $\mathbf{D}_{\mathbf{z}} = \text{sqrt}(\text{diag}(\mathbf{\Gamma}))$ .

Por otro lado, para demostrar la invarianza de la estructura de correlación  $\mathbf{\Sigma}$ , considérese un cambio de punto de operación en el sistema (4.2), el cual provoca una desviación  $\delta\mu_{\mathbf{u}}$  con respecto al valor medio de las variables de entrada, esto es

$$\mathbf{u}^a = \delta\mu_{\mathbf{u}} + \mu_{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^d = \delta\mu_{\mathbf{u}} + \mathbf{u}\quad (4.36)$$

Este cambio se refleja en las salidas como

$$\mathbf{y}^a = \mathbf{B}\delta\mu_{\mathbf{u}} + \mathbf{B}\mu_{\mathbf{u}} + \mathbf{B}\mathbf{u}^d = \mathbf{B}\delta\mu_{\mathbf{u}} + \mathbf{B}\mathbf{u}\quad (4.37)$$

Las medias de las variables de entrada y salida son

$$\begin{aligned}\mu_{\mathbf{u}^a} &= E[\mathbf{u}^a] = \delta\mu_{\mathbf{u}} + \mu_{\mathbf{u}} \\ \mu_{\mathbf{y}^a} &= E[\mathbf{y}^a] = \mathbf{B}\delta\mu_{\mathbf{u}} + \mathbf{B}\mu_{\mathbf{u}}\end{aligned}\quad (4.38)$$

Entonces, similarmente a (4.34), se tiene la matriz de covarianza para  $\mathbf{z}^a = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{aT} & \mathbf{y}^{aT} \end{bmatrix}^T$

$$\begin{aligned}\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{z}^a} &= E[\mathbf{z}^a\mathbf{z}^{aT}] - \mu_{\mathbf{z}^a}\mu_{\mathbf{z}^a}^T = E \left[ \begin{array}{cc} (\delta\mu_{\mathbf{u}} + \mathbf{u})(\delta\mu_{\mathbf{u}} + \mathbf{u})^T & (\delta\mu_{\mathbf{u}} + \mathbf{u})(\mathbf{B}\delta\mu_{\mathbf{u}} + \mathbf{B}\mathbf{u})^T \\ (\mathbf{B}\delta\mu_{\mathbf{u}} + \mathbf{B}\mathbf{u})(\delta\mu_{\mathbf{u}} + \mathbf{u})^T & (\mathbf{B}\delta\mu_{\mathbf{u}} + \mathbf{B}\mathbf{u})(\mathbf{B}\delta\mu_{\mathbf{u}} + \mathbf{B}\mathbf{u})^T \end{array} \right] \\ &- \left[ \begin{array}{cc} (\delta\mu_{\mathbf{u}} + \mu_{\mathbf{u}})(\delta\mu_{\mathbf{u}} + \mu_{\mathbf{u}})^T & (\delta\mu_{\mathbf{u}} + \mu_{\mathbf{u}})(\mathbf{B}\delta\mu_{\mathbf{u}} + \mathbf{B}\mu_{\mathbf{u}})^T \\ (\mathbf{B}\delta\mu_{\mathbf{u}} + \mathbf{B}\mu_{\mathbf{u}})(\delta\mu_{\mathbf{u}} + \mu_{\mathbf{u}})^T & (\mathbf{B}\delta\mu_{\mathbf{u}} + \mathbf{B}\mu_{\mathbf{u}})(\mathbf{B}\delta\mu_{\mathbf{u}} + \mathbf{B}\mu_{\mathbf{u}})^T \end{array} \right]\end{aligned}$$

$$\Gamma_{z^a} = E \begin{bmatrix} \mathbf{u}\mathbf{u}^T & \mathbf{u}\mathbf{u}^T\mathbf{B}^T \\ \mathbf{B}\mathbf{u}\mathbf{u}^T & \mathbf{B}\mathbf{u}\mathbf{u}^T\mathbf{B}^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_{\mathbf{u}}\mu_{\mathbf{u}}^T & \mu_{\mathbf{u}}\mu_{\mathbf{u}}^T\mathbf{B}^T \\ \mathbf{B}\mu_{\mathbf{u}}\mu_{\mathbf{u}}^T & \mathbf{B}\mu_{\mathbf{u}}\mu_{\mathbf{u}}^T\mathbf{B}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{\mathbf{u}} & \Gamma_{\mathbf{u}}\mathbf{B}^T \\ \mathbf{B}\Gamma_{\mathbf{u}} & \mathbf{B}\Gamma_{\mathbf{u}}\mathbf{B}^T \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

De donde se observa que  $\Gamma_{z^a} = \Gamma$ , por lo tanto,  $\mathbf{D}_{z^a} = \text{sqrt}(\text{diag}(\Gamma_{z^a})) = \mathbf{D}_{\mathbf{z}}$  y entonces

$$\Sigma_{z^a} = \mathbf{D}_{z^a}^{-1}\Gamma_{z^a}\mathbf{D}_{z^a}^{-1} = \Sigma \quad (4.40)$$

Esto demuestra que la correlación entre variables del sistema (4.2) es invariante ante cambios de punto de operación. Como consecuencia, las matrices  $\mathbf{Q}_p$ ,  $\mathbf{Q}_r$  y  $\mathbf{\Lambda}_p$ , que se obtienen en el modelado estadístico también son invariantes.

### 4.3. Identificación de la matriz de respuesta al impulso

En la propuesta de estandarización adaptable de las observaciones actuales, para la estimación de las medias y desviaciones estándar de las variables de salida se requiere de relaciones nominales entrada-salida. En este trabajo se propone el uso de modelos de respuesta finita al impulso (FIR, por sus siglas en inglés) para cada una de las variables de salida del proceso como función de las entradas. La ventaja de los modelos FIR es que no suponen conocida la estructura ni el orden de las ecuaciones del sistema, y sólo se asume estacionariedad en las series de entrada-salida y estabilidad del sistema.

Dado que la identificación de modelos FIR, al igual que el modelado basado en DPCA, se puede llevar a cabo mediante análisis de correlación de un conjunto de datos del proceso, se propone identificar, simultáneamente, estos modelos a partir de la información resumida en la matriz de covarianza, usada en el modelado estadístico (3.20). El procedimiento se describe a continuación.

#### 4.3.1. Estimación de parámetros

Considérese un sistema estable cuya respuesta al impulso para cada una de las variables de salida se puede expresar por

$$y_i(t) = \sum_{\tau=0}^{\infty} b_{i1\tau} u_1(t-\tau) + \cdots + \sum_{\tau=0}^{\infty} b_{il\tau} u_l(t-\tau) + \nu_i(t) = \sum_{j=1}^l \sum_{\tau=0}^{\infty} b_{ij\tau} u_j(t-\tau) + \nu_i(t) \quad (4.41)$$

para  $i = 1, \dots, s$ . En la práctica (4.41) se simplifica suponiendo:  $b_{ij\tau} = 0$  para  $\tau > n_{ij}$ , resultando

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^l \sum_{\tau=0}^{n_{ij}} b_{ij\tau} u_j(t - \tau) + \nu_i(t) \quad (4.42)$$

donde:  $\{b_{ij\tau}\}$  es la secuencia de ponderación para el modelo de respuesta finita al impulso de la  $i$ -ésima salida.

El siguiente procedimiento de estimación de los parámetros  $\{b_{ij\tau}\}$  está tomado de (Soderstrom y Stoica, 1989) y (Box *et al.*, 1994), y se basa en un análisis de correlación entre las variables entrada-salida de (4.42).

Multiplicando (4.42) por una entrada  $u_p(t - \varphi)$  con retardo  $\varphi$  y aplicando el operador  $E[\cdot]$  se tiene

$$E[u_p(t - \varphi) y_i(t)] = \sum_{j=1}^l \sum_{\tau=0}^{n_{ij}} b_{ij\tau} E[u_p(t - \varphi) u_j(t - \tau)] + E[u_p(t - \varphi) \nu_i(t)] \quad (4.43)$$

donde:

- $E[u_p(t - \varphi) y_i(t)] = \gamma_{u_p y_i}^i(\varphi)$  es la intercovarianza entre la  $p$ -ésima entrada al retardo de tiempo  $\varphi$  y la  $i$ -ésima salida.
- $E[u_p(t - \varphi) u_j(t - \tau)] = \gamma_{u_p u_j}^i(\varphi - \tau)$  para  $p = j$  o  $p \neq j$ , respectivamente, es la autocovarianza o intercovarianza entre la  $p$ -ésima entrada y la  $j$ -ésima entrada, al retardo de tiempo  $\varphi - \tau$ .
- $E[u_p(t - \varphi) \nu_i(t)] = 0$  dado que  $u_p(t)$  y  $\nu_i(t)$  son estadísticamente independientes.

Por lo tanto, (4.43) se reduce a

$$\gamma_{u_p y_i}^i(\varphi) = \sum_{j=1}^l \sum_{\tau=0}^{n_{ij}} b_{ij\tau} \gamma_{u_p u_j}^i(\varphi - \tau) \quad (4.44)$$

De esta expresión se obtienen  $l$  ecuaciones asociadas a las  $l$  entradas, esto es

$$\begin{aligned} \gamma_{u_1 y_i}^i(\varphi) &= \sum_{j=1}^l \sum_{\tau=0}^{n_{ij}} b_{ij\tau} \gamma_{u_1 u_j}^i(\varphi - \tau) \\ &\vdots \\ \gamma_{u_l y_i}^i(\varphi) &= \sum_{j=1}^l \sum_{\tau=0}^{n_{ij}} b_{ij\tau} \gamma_{u_l u_j}^i(\varphi - \tau) \end{aligned} \quad (4.45)$$

Evaluando  $\gamma_{u_j y_i}^i(\varphi)$  para  $\varphi = 0, \dots, n_{ij}$ , es posible obtener un sistema completo de ecuaciones en términos de las funciones de covarianza

$$\gamma_{u_j y_i}^i = \mathbf{\Gamma}_{uu}^i \mathbf{b}_i \quad (4.46)$$

Así, el estimado de las secuencias de ponderación  $\{b_{ij\tau}\}$ , se reduce a una función de auto e inter-covarianzas estimadas

$$\hat{\mathbf{b}}_i = \left( \hat{\mathbf{\Gamma}}_{uu}^i \right)^{-1} \hat{\gamma}_{u_j y_i}^i \quad (4.47)$$

lo cual implica que la matriz de autocovarianzas  $\hat{\mathbf{\Gamma}}_{uu}^i$  debe ser no singular. En la practica, debido a la presencia de ruido se recomienda disponer de un número mayor de ecuaciones, es decir, evaluar  $\gamma_{u_j y_i}^i(\varphi)$  para  $\varphi = 0, \dots, n_{ij}, \dots, w$ , con lo cual se obtiene una mejor estimación de  $\{b_{ij\tau}\}$ . En este caso, (4.46) resulta en un sistema de ecuaciones lineales sobredeterminado, el cual se puede resolver mediante la pseudoinversa, esto es

$$\hat{\mathbf{b}}_i = \left( \hat{\mathbf{\Gamma}}_{uu}^i \right)^\dagger \hat{\gamma}_{u_j y_i}^i \quad (4.48)$$

Así, las relaciones entrada-salida identificadas, están dadas por

$$\begin{aligned} \hat{y}_i^0(t) &= \sum_{j=1}^l \sum_{\tau=0}^{n_{ij}} \hat{b}_{ij\tau} u_j(t-\tau) \\ \hat{y}_i^0(t) &= \sum_{\tau=0}^{n_{i1}} \hat{b}_{i1\tau} u_1(t-\tau) + \dots + \sum_{\tau=0}^{n_{il}} \hat{b}_{il\tau} u_l(t-\tau) \end{aligned} \quad (4.49)$$

la cual puede expresarse en forma compacta como

$$\hat{y}_i^0(t) = \mathbf{u}_{(i)}(t) \hat{\mathbf{b}}_i \quad (4.50)$$

donde

$$\hat{\mathbf{b}}_i = \left[ \hat{b}_{i10} \quad \dots \quad \hat{b}_{i1n_{i1}} \quad \dots \quad \hat{b}_{il0} \quad \dots \quad \hat{b}_{iln_{il}} \right]_{(1 \times n_i)}^T \quad (4.51)$$

y

$$\mathbf{u}_{(i)}(t) = \left[ u_1(t) \quad \dots \quad u_1(t-n_{i1}) \quad \dots \quad u_l(t) \quad \dots \quad u_l(t-n_{il}) \right]_{(1 \times n_i)} \quad (4.52)$$

donde:  $n_i = \sum_{j=1}^l (n_{ij} + 1)$ . Finalmente, las relaciones (4.50) para  $i = 1, \dots, s$ , se pueden expresar en notación matricial como

$$\hat{\mathbf{y}}^0(t) = \mathbf{u}_{(L)}(t) \hat{\mathbf{B}} \quad (4.53)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = \hat{\mathbf{y}}^0(t) + \nu(t) = \mathbf{u}_{(L)}(t) \hat{\mathbf{B}} + \nu(t) \quad (4.54)$$

donde

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = \left[ \hat{y}_1(t) \quad \dots \quad \hat{y}_s(t) \right]_{(1 \times s)} \quad (4.55)$$

$$\mathbf{u}_{(L)}(t) = \left[ u_1(t) \quad \dots \quad u_1(t-L) \quad \dots \quad u_l(t) \quad \dots \quad u_l(t-L) \right]_{(1 \times o)} \quad (4.56)$$

y  $\widehat{\mathbf{B}} \in \mathfrak{R}^{o \times s}$  está conformada por los coeficientes

$$\widehat{b}_{ij\tau} = \begin{cases} \widehat{b}_{ij\tau} & , \quad \tau \leq n_{ij} & \text{para } j = 1, \dots, l \\ 0 & , \quad n_{ij} < \tau \leq L & i = 1, \dots, s \end{cases}$$

$L = \text{Max} \{n_{ij}\}$  y  $o = l(L + 1)$ .

Como se observa de (4.47) o (4.48), las ponderaciones estimadas  $\widehat{\mathbf{b}}_i$  se obtienen a partir de estimados de las funciones de auto e intercovarianzas, las cuales, por el principio de ergodicidad en las señales<sup>1</sup>, se pueden obtener a partir de datos históricos.

### Estimación de las autocovarianzas e intercovarianzas

La propuesta de identificar los modelos FIR simultáneamente con el modelado basado en DPCA, es viable dado que la información resumida en la matriz de covarianza calculada en el modelado estadístico coincide con los datos requeridos en (4.48). Considérese el siguiente hecho.

**Hecho 3** *Suponiendo condiciones de estacionariedad y ergodicidad en un conjunto de datos históricos del proceso resumidos en la matriz de trayectoria  $\mathbf{Z}_{(w)}$ , donde  $w$  es el orden de retardos de tiempo. Entonces la correspondiente matriz de covarianza  $\widehat{\mathbf{\Gamma}}$  de  $\mathbf{Z}_{(w)}$ , utilizada en el modelado basado en DPCA, está conformada por funciones de auto e intercovarianza de orden  $w$ .*

**Demostración.** Sea  $\mathbf{Z}(t)$  una matriz de datos históricos conformada por  $n_t$  observaciones de un sistema dinámico con  $l$ -señales de entrada y  $s$ -señales de salida

$$\mathbf{Z}(t) = \left[ \begin{array}{cccccc} \mathbf{u}_1(t) & \dots & \mathbf{u}_l(t) & \mathbf{y}_1(t) & \dots & \mathbf{y}_s(t) \end{array} \right]_{(n_t \times n)} \quad (4.57)$$

apartir de la cual se puede construir la *matriz de trayectoria* de orden  $w$

$$\mathbf{Z}_{(w)}(t) = \left[ \begin{array}{cccccc} \mathbf{U}_{1(w)}(t) & \dots & \mathbf{U}_{l(w)}(t) & \mathbf{Y}_{1(w)}(t) & \dots & \mathbf{Y}_{s(w)}(t) \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{U}_{(w)} & \mathbf{Y}_{(w)} \end{array} \right]_{(N \times m)} \quad (4.58)$$

donde e.g.  $\mathbf{U}_{j(w)}(t) = [\mathbf{u}_j(t) \quad \mathbf{u}_j(t-1) \quad \dots \quad \mathbf{u}_j(t-w)]$ ;  $N = n_t - w$ ,  $m = n(w+1)$ .

<sup>1</sup>Sea  $x(t)$  un proceso estocástico estacionario. Se dice que es ergódico con respecto a sus momentos de primero y segundo orden si:  $\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x(t) \rightarrow E[x(t)]$  y  $\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x(t-\tau)x(t) \rightarrow E[x(t-\tau)x(t)]$  conforme  $N \rightarrow \infty$ . Esta definición es valiosa puesto que los análisis teóricos basados en valores esperados  $E[\cdot]$ , pueden en el sentido práctico desarrollarse a partir de medias y covarianzas muestrales estimadas de un conjunto de datos suficientemente grande.

La matriz de covarianza de  $\mathbf{Z}_{(w)}$  es

$$\hat{\mathbf{\Gamma}} = \frac{1}{N-1} \left( \mathbf{Z}_{(w)} - \mathbf{1}\hat{\mu}_{\mathbf{z}_{(w)}} \right)^T \left( \mathbf{Z}_{(w)} - \mathbf{1}\hat{\mu}_{\mathbf{z}_{(w)}} \right) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{\Gamma}}_{uu} & \hat{\mathbf{\Gamma}}_{uy} \\ \hat{\mathbf{\Gamma}}_{yu} & \hat{\mathbf{\Gamma}}_{yy} \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{\Gamma}}_{uu} &= \frac{1}{N-1} \left( \mathbf{U}_{(w)} - \mathbf{1}\hat{\mu}_{\mathbf{u}_{(w)}} \right)^T \left( \mathbf{U}_{(w)} - \mathbf{1}\hat{\mu}_{\mathbf{u}_{(w)}} \right) \\ &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{\Gamma}}_{u_1u_1} & \hat{\mathbf{\Gamma}}_{u_1u_2} & \cdots & \hat{\mathbf{\Gamma}}_{u_1u_l} \\ \hat{\mathbf{\Gamma}}_{u_2u_1} & \hat{\mathbf{\Gamma}}_{u_2u_2} & \cdots & \hat{\mathbf{\Gamma}}_{u_2u_l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\mathbf{\Gamma}}_{u_lu_1} & \hat{\mathbf{\Gamma}}_{u_lu_2} & \cdots & \hat{\mathbf{\Gamma}}_{u_lu_l} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.60)$$

y para cualquier pareja de señales de entrada  $\mathbf{U}_{j(w)}$  y  $\mathbf{U}_{i(w)}$  su correspondiente matriz de covarianza está dada por

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{\Gamma}}_{u_ju_i} &= \frac{1}{N-1} \left( \mathbf{U}_{j(w)} - \mathbf{1}\hat{\mu}_{\mathbf{u}_{j(w)}} \right)^T \left( \mathbf{U}_{i(w)} - \mathbf{1}\hat{\mu}_{\mathbf{u}_{i(w)}} \right) \\ &= \begin{bmatrix} \hat{\gamma}_{u_ju_i}(0) & \hat{\gamma}_{u_ju_i}(-1) & \cdots & \hat{\gamma}_{u_ju_i}(-w) \\ \hat{\gamma}_{u_ju_i}(1) & \hat{\gamma}_{u_ju_i}(0) & \cdots & \hat{\gamma}_{u_ju_i}(-w+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\gamma}_{u_ju_i}(w) & \hat{\gamma}_{u_ju_i}(w-1) & \cdots & \hat{\gamma}_{u_ju_i}(0) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.61)$$

es decir, (4.61) agrupa las funciones de autocovarianzas de orden 0 a  $\pm w$ .

De manera similar, la matriz de covarianza entre entradas y salidas se puede escribir como

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{\Gamma}}_{uy} &= \frac{1}{N-1} \left( \mathbf{U}_{(w)} - \mathbf{1}\hat{\mu}_{\mathbf{u}_{(w)}} \right)^T \left( \mathbf{Y}_{(w)} - \mathbf{1}\hat{\mu}_{\mathbf{y}_{(w)}} \right) \\ &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{\Gamma}}_{u_1y_1} & \hat{\mathbf{\Gamma}}_{u_1y_2} & \cdots & \hat{\mathbf{\Gamma}}_{u_1y_s} \\ \hat{\mathbf{\Gamma}}_{u_2y_1} & \hat{\mathbf{\Gamma}}_{u_2y_2} & \cdots & \hat{\mathbf{\Gamma}}_{u_2y_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\mathbf{\Gamma}}_{u_ly_1} & \hat{\mathbf{\Gamma}}_{u_ly_2} & \cdots & \hat{\mathbf{\Gamma}}_{u_ly_s} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.62)$$

donde para cualquier pareja de señales entrada-salida  $\mathbf{U}_{j(w)}$  e  $\mathbf{Y}_{i(w)}$  su correspondiente matriz de covarianza está dada por

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{\Gamma}}_{u_jy_i} &= \frac{1}{N-1} \left( \mathbf{U}_{j(w)} - \mathbf{1}\hat{\mu}_{\mathbf{u}_{j(w)}} \right)^T \left( \mathbf{Y}_{i(w)} - \mathbf{1}\hat{\mu}_{\mathbf{y}_{i(w)}} \right) \\ &= \begin{bmatrix} \hat{\gamma}_{u_jy_i}(0) & \hat{\gamma}_{u_jy_i}(-1) & \cdots & \hat{\gamma}_{u_jy_i}(-w) \\ \hat{\gamma}_{u_jy_i}(1) & \hat{\gamma}_{u_jy_i}(0) & \cdots & \hat{\gamma}_{u_jy_i}(-w+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\gamma}_{u_jy_i}(w) & \hat{\gamma}_{u_jy_i}(w-1) & \cdots & \hat{\gamma}_{u_jy_i}(0) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.63)$$

es decir, (4.63) agrupa las funciones de intercovarianzas de orden 0 a  $\pm w$ .

■

Como resultado, dependiendo del orden  $n_{ij}$  del modelo (4.42), se determinan las dimensiones de las matrices  $\hat{\Gamma}_{uu}^i$  y  $\hat{\gamma}_{uy_i}^i$  en (4.48), base para obtener los estimados  $\hat{\mathbf{b}}_i$ , y que corresponden, respectivamente, con submatrices de (4.61) y (4.63).

A continuación se analizan las propiedades estadísticas de los estimados  $\hat{\mathbf{b}}_i$  obtenidos a partir de (4.48).

### 4.3.2. Propiedades estadísticas de los parámetros $\hat{\mathbf{b}}_i$

Considérese el sistema (4.42) para el cual su secuencia de ponderaciones  $\hat{\mathbf{b}}_i$  se ha estimado mediante (4.48). A continuación se analizan las propiedades estadísticas de  $\hat{\mathbf{b}}_i$ . El análisis se lleva a cabo en términos de las funciones de auto e intercovarianza, la razón es que la identificación se realiza directamente de las auto e intercovarianzas usadas del modelado DPCA.

**Hecho 4**  $\hat{\mathbf{b}}_i$  es un estimado no desviado de  $\mathbf{b}_i$ .

**Demostración.** Para el sistema:  $\bar{\mathbf{y}}_i = \bar{\mathbf{U}}_{(i)} \mathbf{b}_i + \nu_i$ , de acuerdo con (4.48) el estimado  $\hat{\mathbf{b}}_i$  está dado por

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{b}}_i &= \left( \hat{\Gamma}_{uu}^i \right)^\dagger \hat{\gamma}_{uy_i}^i = \left( \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \bar{\mathbf{U}}_{(i)} \right)^\dagger \left( \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \bar{\mathbf{y}}_i \right) = \left( \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \bar{\mathbf{U}}_{(i)} \right)^\dagger \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \left( \bar{\mathbf{U}}_{(i)} \mathbf{b}_i + \nu_i \right) \\ &= \left( \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \bar{\mathbf{U}}_{(i)} \right)^\dagger \left( \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \bar{\mathbf{U}}_{(i)} \right) \mathbf{b}_i + \left( \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \bar{\mathbf{U}}_{(i)} \right)^\dagger \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \nu_i \end{aligned} \quad (4.64)$$

y por lo tanto su valor esperado es

$$E \left[ \hat{\mathbf{b}}_i \right] = \mathbf{b}_i + \left( \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \bar{\mathbf{U}}_{(i)} \right)^\dagger \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T E \left[ \nu_i \right] = \mathbf{b}_i \quad (4.65)$$

donde:  $E \left[ \nu_i \right] = 0$ . ■

**Hecho 5** La covarianza de  $\hat{\mathbf{b}}_i$  está dada por

$$Cov \left( \hat{\mathbf{b}}_i \right) = \frac{\gamma_{\nu_i}^2}{(N-1)} \left( \hat{\Gamma}_{uu}^i \right)^\dagger \hat{\Gamma}_{uu}^{n_w} \left( \hat{\Gamma}_{uu}^i \right)^\dagger{}^T \quad (4.66)$$

**Demostración.** La covarianza de  $\hat{\mathbf{b}}_i$  está definida por

$$Cov \left( \hat{\mathbf{b}}_i \right) = E \left[ \left( \hat{\mathbf{b}}_i - \mathbf{b}_i \right) \left( \hat{\mathbf{b}}_i - \mathbf{b}_i \right)^T \right] \quad (4.67)$$

donde

$$\begin{aligned} \left( \hat{\mathbf{b}}_i - \mathbf{b}_i \right) &= \left( \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \bar{\mathbf{U}}_{(i)} \right)^\dagger \left( \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \bar{\mathbf{U}}_{(i)} \right) \mathbf{b}_i + \left( \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \bar{\mathbf{U}}_{(i)} \right)^\dagger \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \nu_i - \mathbf{b}_i \\ &= \left( \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \bar{\mathbf{U}}_{(i)} \right)^\dagger \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \nu_i \end{aligned} \quad (4.68)$$

entonces

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\hat{\mathbf{b}}_i) &= E \left\{ \left[ \left( \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \bar{\mathbf{U}}_{(i)} \right)^\dagger \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \nu_i \right] \left[ \left( \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \bar{\mathbf{U}}_{(i)} \right)^\dagger \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \nu_i \right]^T \right\} \\ &= \left( \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \bar{\mathbf{U}}_{(i)} \right)^\dagger \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T E \left[ \nu_i \nu_i^T \right] \bar{\mathbf{U}}_{(w)} \left( \bar{\mathbf{U}}_{(i)}^T \bar{\mathbf{U}}_{(w)} \right)^\dagger \\ &= \frac{\gamma_{\nu_i}^2}{(N-1)} \left( \hat{\mathbf{\Gamma}}_{uu}^i \right)^\dagger \hat{\mathbf{\Gamma}}_{uw}^{n_w} \left( \hat{\mathbf{\Gamma}}_{uu}^i \right)^\dagger \end{aligned} \quad (4.69)$$

donde:  $E[\nu_i \nu_i^T] = \gamma_{\nu_i}^2$  y  $\hat{\mathbf{\Gamma}}_{uu}^{n_w} = \frac{1}{N-1} \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \bar{\mathbf{U}}_{(w)}$ . ■

**Hecho 6** Una estimación no desviada de  $\gamma_{\nu_i}^2$  está dada por

$$\hat{\gamma}_{\nu_i}^2 = \frac{J(\hat{\mathbf{b}}_i)}{\left\{ N - n_w - n_i + \text{Tr} \left[ \hat{\mathbf{\Gamma}}_{uu}^{n_i} \left( \hat{\mathbf{\Gamma}}_{uu}^i \right)^\dagger \hat{\mathbf{\Gamma}}_{uw}^{n_w} \left( \hat{\mathbf{\Gamma}}_{uu}^i \right)^\dagger \right] \right\}} \quad (4.70)$$

**Demostración.** Dado el error de predicción:  $\varepsilon(\hat{\mathbf{b}}_i) = \bar{\mathbf{y}}_i - \hat{\mathbf{y}}_i = \bar{\mathbf{y}}_i - \bar{\mathbf{U}}_{(i)} \hat{\mathbf{b}}_i$ . El criterio cuadrático de los errores está definido como

$$J(\hat{\mathbf{b}}_i) = \left[ \bar{\mathbf{y}}_i - \bar{\mathbf{U}}_{(i)} \hat{\mathbf{b}}_i \right]^T \left[ \bar{\mathbf{y}}_i - \bar{\mathbf{U}}_{(i)} \hat{\mathbf{b}}_i \right] \quad (4.71)$$

para el cual se obtiene una expresión en términos de funciones de auto e intercovarianzas como sigue. Sea

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{uy_i}^i &= \frac{1}{N-1} \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \bar{\mathbf{y}}_i \rightarrow \bar{\mathbf{y}}_i = (N-1) \left( \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \right)^\dagger \hat{\gamma}_{uy_i}^i \\ \hat{\gamma}_{uy_i}^i &= \frac{1}{N-1} \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \bar{\mathbf{y}}_i \rightarrow \bar{\mathbf{y}}_i = (N-1) \left( \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \right)^\dagger \hat{\gamma}_{uy_i}^i = (N-1) \left( \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \right)^\dagger \hat{\mathbf{\Gamma}}_{uu}^i \hat{\mathbf{b}}_i \end{aligned} \quad (4.72)$$

entonces

$$\begin{aligned} \varepsilon(\hat{\mathbf{b}}_i) &= (N-1) \left( \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \right)^\dagger \hat{\gamma}_{uy_i}^i - (N-1) \left( \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \right)^\dagger \hat{\mathbf{\Gamma}}_{uu}^i \hat{\mathbf{b}}_i \\ &= (N-1) \left( \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \right)^\dagger \left[ \hat{\gamma}_{uy_i}^i - \hat{\mathbf{\Gamma}}_{uu}^i \hat{\mathbf{b}}_i \right] \end{aligned} \quad (4.73)$$

y

$$\begin{aligned} J(\hat{\mathbf{b}}_i) &= (N-1)^2 \left[ \hat{\gamma}_{uy_i}^i - \hat{\mathbf{\Gamma}}_{uu}^i \hat{\mathbf{b}}_i \right]^T \left( \bar{\mathbf{U}}_{(w)} \right)^\dagger \left( \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \right)^\dagger \left[ \hat{\gamma}_{uy_i}^i - \hat{\mathbf{\Gamma}}_{uu}^i \hat{\mathbf{b}}_i \right] \\ &= (N-1) \left[ \hat{\gamma}_{uy_i}^i - \hat{\mathbf{\Gamma}}_{uu}^i \hat{\mathbf{b}}_i \right]^T \left( \hat{\mathbf{\Gamma}}_{uu}^{n_w} \right)^\dagger \left[ \hat{\gamma}_{uy_i}^i - \hat{\mathbf{\Gamma}}_{uu}^i \hat{\mathbf{b}}_i \right] \end{aligned} \quad (4.74)$$

Así, desarrollando (4.71) o (4.74) con:  $\hat{\mathbf{b}}_i = \left( \hat{\mathbf{\Gamma}}_{uu}^i \right)^\dagger \hat{\gamma}_{uy_i}^i = \left( \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \bar{\mathbf{U}}_{(i)} \right)^\dagger \left( \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \bar{\mathbf{y}}_i \right)$  e  $\bar{\mathbf{y}}_i = \bar{\mathbf{U}}_{(i)} \mathbf{b}_i + \nu_i$  se obtiene la expresión

$$\begin{aligned} J(\hat{\mathbf{b}}_i) &= \nu_i^T \nu_i - \nu_i^T \bar{\mathbf{U}}_{(i)} \left( \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \bar{\mathbf{U}}_{(i)} \right)^\dagger \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \nu_i - \nu_i^T \bar{\mathbf{U}}_{(w)} \left( \bar{\mathbf{U}}_{(i)}^T \bar{\mathbf{U}}_{(w)} \right)^\dagger \bar{\mathbf{U}}_{(i)}^T \nu_i + \\ &\quad \cdots + \nu_i^T \bar{\mathbf{U}}_{(w)} \left( \bar{\mathbf{U}}_{(i)}^T \bar{\mathbf{U}}_{(w)} \right)^\dagger \bar{\mathbf{U}}_{(i)}^T \bar{\mathbf{U}}_{(i)} \left( \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \bar{\mathbf{U}}_{(i)} \right)^\dagger \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \nu_i \end{aligned} \quad (4.75)$$

en donde el valor esperado de cada uno de los términos de  $J(\hat{\mathbf{b}}_i)$  es

$$E[\nu_i^T \nu_i] = N \gamma_{\nu_i}^2 \quad (4.76)$$

$$E \left[ \nu_i^T \bar{\mathbf{U}}_{(i)} \left( \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \bar{\mathbf{U}}_{(i)} \right)^\dagger \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \nu_i \right] = E \left\{ Tr \left[ \nu_i^T \bar{\mathbf{U}}_{(i)} \left( \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \bar{\mathbf{U}}_{(i)} \right)^\dagger \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \nu_i \right] \right\} \quad (4.77)$$

donde de acuerdo a la propiedad  $tr(\mathbf{AB}) = tr(\mathbf{BA})$  e introduciendo el valor esperado dentro de la traza, se obtiene

$$\begin{aligned} E \left[ \nu_i^T \bar{\mathbf{U}}_{(i)} \left( \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \bar{\mathbf{U}}_{(i)} \right)^\dagger \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \nu_i \right] &= Tr \left\{ E \left[ \nu_i \nu_i^T \right] \bar{\mathbf{U}}_{(i)} \left( \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \bar{\mathbf{U}}_{(i)} \right)^\dagger \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \right\} \\ &= \gamma_{\nu_i}^2 Tr \{ I_{n_w} \} = n_w \gamma_{\nu_i}^2 \end{aligned} \quad (4.78)$$

$$\begin{aligned} E \left[ \nu_i^T \bar{\mathbf{U}}_{(w)} \left( \bar{\mathbf{U}}_{(i)}^T \bar{\mathbf{U}}_{(w)} \right)^\dagger \bar{\mathbf{U}}_{(i)}^T \nu_i \right] &= E \left\{ Tr \left[ \nu_i^T \bar{\mathbf{U}}_{(w)} \left( \bar{\mathbf{U}}_{(i)}^T \bar{\mathbf{U}}_{(w)} \right)^\dagger \bar{\mathbf{U}}_{(i)}^T \nu_i \right] \right\} \\ &= Tr \left\{ E \left[ \nu_i \nu_i^T \right] \bar{\mathbf{U}}_{(w)} \left( \bar{\mathbf{U}}_{(i)}^T \bar{\mathbf{U}}_{(w)} \right)^\dagger \bar{\mathbf{U}}_{(i)}^T \right\} \\ &= \gamma_{\nu_i}^2 Tr \{ I_{n_i} \} = n_i \gamma_{\nu_i}^2 \end{aligned} \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned} &E \left[ \nu_i^T \bar{\mathbf{U}}_{(w)} \left( \bar{\mathbf{U}}_{(i)}^T \bar{\mathbf{U}}_{(w)} \right)^\dagger \bar{\mathbf{U}}_{(i)}^T \bar{\mathbf{U}}_{(i)} \left( \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \bar{\mathbf{U}}_{(i)} \right)^\dagger \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \nu_i \right] = \\ &= E \left\{ Tr \left[ \nu_i^T \bar{\mathbf{U}}_{(w)} \left( \bar{\mathbf{U}}_{(i)}^T \bar{\mathbf{U}}_{(w)} \right)^\dagger \bar{\mathbf{U}}_{(i)}^T \bar{\mathbf{U}}_{(i)} \left( \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \bar{\mathbf{U}}_{(i)} \right)^\dagger \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \nu_i \right] \right\} \\ &= \gamma_{\nu_i}^2 Tr \left\{ \bar{\mathbf{U}}_{(i)}^T \bar{\mathbf{U}}_{(i)} \left( \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \bar{\mathbf{U}}_{(i)} \right)^\dagger \bar{\mathbf{U}}_{(w)}^T \bar{\mathbf{U}}_{(w)} \left( \bar{\mathbf{U}}_{(i)}^T \bar{\mathbf{U}}_{(w)} \right)^\dagger \right\} \\ &= \gamma_{\nu_i}^2 Tr \left[ \hat{\mathbf{\Gamma}}_{uu}^{n_i} \left( \hat{\mathbf{\Gamma}}_{uu}^i \right)^\dagger \hat{\mathbf{\Gamma}}_{uu}^{n_w} \left( \hat{\mathbf{\Gamma}}_{uu}^i \right)^\dagger \right] \end{aligned} \quad (4.80)$$

Por lo tanto, el valor esperado de  $J(\hat{\mathbf{b}}_i)$  se reduce a

$$E \left[ J(\hat{\mathbf{b}}_i) \right] = \gamma_{\nu_i}^2 \left\{ N - n_w - n_i + Tr \left[ \hat{\mathbf{\Gamma}}_{uu}^{n_i} \left( \hat{\mathbf{\Gamma}}_{uu}^i \right)^\dagger \hat{\mathbf{\Gamma}}_{uu}^{n_w} \left( \hat{\mathbf{\Gamma}}_{uu}^i \right)^\dagger \right] \right\} \quad (4.81)$$

de donde se obtiene el estimador no desviado de  $\gamma_{\nu_i}^2$

$$\hat{\gamma}_{\nu_i}^2 = \frac{J(\hat{\mathbf{b}}_i)}{\left\{ N - n_w - n_i + Tr \left[ \hat{\mathbf{\Gamma}}_{uu}^{n_i} \left( \hat{\mathbf{\Gamma}}_{uu}^i \right)^\dagger \hat{\mathbf{\Gamma}}_{uu}^{n_w} \left( \hat{\mathbf{\Gamma}}_{uu}^i \right)^\dagger \right] \right\}} \quad (4.82)$$

donde:  $\hat{\mathbf{\Gamma}}_{uu}^{n_i} = \frac{1}{N-1} \bar{\mathbf{U}}_{(i)}^T \bar{\mathbf{U}}_{(i)}$  y  $J(\hat{\mathbf{b}}_i)$  se obtiene de (4.74). ■

### 4.3.3. Orden de los modelos de respuesta al impulso

El proceso de identificación de parámetros se puede traducir en un problema de optimización y por lo tanto, implícitamente involucra la minimización de algún criterio. Dos de los criterios más ampliamente usados son:

1. Minimizar la suma de los cuadrados de los errores de predicción,  $J(\hat{\mathbf{b}}_i)$ .
2. Minimizar la incertidumbre de los parámetros estimados,  $Cov(\hat{\mathbf{b}}_i)$ .

Es conocido que para un sistema en particular, los valores de  $J(\hat{\mathbf{b}}_i)$  y  $Cov(\hat{\mathbf{b}}_i)$  obtenidos de (4.74) y (4.66), respectivamente, dependen del número de datos  $N$ , de la riqueza de información provista por las entradas, y del contenido de ruido en  $y_i$ ,  $\gamma_{v_i}^2$ . Por lo tanto, en el proceso de identificación las condiciones en las cuales se lleven a cabo los experimentos influenciará en la calidad del modelo identificado (Soderstrom y Stoica 1989), (Ljung, 1999).

Otro factor importante en la identificación es el orden de los modelos FIR, esto es  $n_i = \dim(\hat{\mathbf{b}}_i)$ . Así que se propone evaluar  $J(\hat{\mathbf{b}}_i)$  y  $Cov(\hat{\mathbf{b}}_i)$  para diferentes valores de  $n_i$ , y a partir de los resultados establecer un buen compromiso entre los criterios y  $n_i$ . En particular se generan gráficas de

1. La suma de los cuadrados de los errores de predicción,  $J(\hat{\mathbf{b}}_i)$ , en función de  $n_i$ .
2. Dispersión total en los parámetros, (DTP), en función de  $n_i$ , donde

$$DTP(\hat{\mathbf{b}}_i) = \frac{Tr \left\{ \text{sqr}t \left[ Cov(\hat{\mathbf{b}}_i) \right] \right\}}{n_i} \quad (4.83)$$

y con base en dichas funciones se determina el orden  $n_i$ .

## 4.4. Detección de fallas con estandarización adaptable

En esta sección se describe el procedimiento para la obtención de los parámetros estadísticos nominales de las variables entrada-salida del proceso, necesarios en el mecanismo de estandarización adaptable. Además, se presenta la integración de este mecanismo con DPCA para lograr una detección robusta de fallas.

### 4.4.1. Estimación móvil de medias y desviaciones estándar

La estimación de medias y varianzas, parámetros de estandarización, de las señales de entrada se hace de manera continua mediante EWMA (Exponentially Weighted Moving Average) y EWMC (Exponentially Weighted Moving Covariance), respectivamente. Por otro lado, la estimación de medias y varianzas de las señales de salida se hace a partir de la medias y varianzas de las entradas a través del modelo de respuesta finita al impulso (4.54), identificado previamente.

Así, la estimación recursiva de las medias de las entradas se lleva a cabo de la siguiente manera

$$\hat{\mu}_{\mathbf{u}}(t) = \beta \hat{\mu}_{\mathbf{u}}(t-1) + (1-\beta) \mathbf{u}(t) \quad (4.84)$$

donde:  $(0 < \beta \leq 1)$  es el factor de olvido. Por su parte, la estimación de las desviaciones estándar de las entradas se obtienen de su respectiva matriz de covarianza, la cual se estima mediante

$$\widehat{\mathbf{\Gamma}}_{\mathbf{u}_{(L)}}(t) = \beta \widehat{\mathbf{\Gamma}}_{\mathbf{u}_{(L)}}(t-1) + (1-\beta) \bar{\mathbf{u}}_{(L)}(t) \bar{\mathbf{u}}_{(L)}^T(t) \quad (4.85)$$

donde:  $\bar{\mathbf{u}}_{(L)}(t) = \mathbf{u}_{(L)}(t) - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{u}_{(L)}}(t)$ ;  $\widehat{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{u}_{(L)}}(t)$  se construye a partir de las medias estimadas en (4.84). Así, las desviaciones estándar están dadas por

$$\widehat{\sigma}_{\mathbf{u}_{(L)}}(t) = \text{sqr}t \left\{ \text{diag} \left[ \widehat{\mathbf{\Gamma}}_{\mathbf{u}_{(L)}}(t) \right] \right\} \quad (4.86)$$

El vector de medias de las variables de salida al tiempo  $t$  se estima a partir de las medias de las entradas (4.84) y a través de (4.54) de acuerdo con

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{y}}(t) = \widehat{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{u}_{(L)}}(t) \widehat{\mathbf{B}} \quad (4.87)$$

En el caso de la estimación de las desviaciones estándar de las variables de salida se procede como sigue. Dado que en el modelo FIR (4.54),  $\mathbf{y}^0$  y  $\nu$  son independientes estadísticamente, entonces la varianza de  $\mathbf{y}$  se expresa como

$$\gamma_{\mathbf{y}}^2(t) = \gamma_{\mathbf{y}^0}^2(t) + \gamma_{\nu}^2(t) \quad (4.88)$$

y por lo tanto

$$\widehat{\sigma}_{\mathbf{y}}(t) = \sqrt{\widehat{\gamma}_{\mathbf{y}^0}^2(t) + \widehat{\gamma}_{\nu}^2(t)} \quad (4.89)$$

es decir, para obtener estimados en un tiempo  $t$  de las desviaciones estándar  $\widehat{\sigma}_{\mathbf{y}}(t)$ , es necesario tener estimados de  $\gamma_{\mathbf{y}^0}^2(t)$  y  $\gamma_{\nu}^2(t)$ .

La estimación de la varianza del ruido a la salida,  $\widehat{\gamma}_{\nu}^2(t)$ , se calcula mediante (4.70). Por su parte, los estimados  $\widehat{\gamma}_{\mathbf{y}^0}^2(t)$  se obtienen a partir de las covarianzas de las entradas dadas en (4.85) y a través de (4.54) de la siguiente manera

$$\widehat{\mathbf{\Gamma}}_{\mathbf{y}}^0(t) = \widehat{\mathbf{B}} \widehat{\mathbf{\Gamma}}_{\mathbf{u}_{(L)}}^T(t) \widehat{\mathbf{B}}^T \quad (4.90)$$

entonces

$$\widehat{\gamma}_{\mathbf{y}^0}^2(t) = \text{diag} \left[ \widehat{\mathbf{\Gamma}}_{\mathbf{y}}^0(t) \right] \quad (4.91)$$

#### 4.4.2. Algoritmo robusto de detección de fallas

Sea un vector de observación actual de las variables de entrada y salida del proceso, expresadas en  $w$  retardos de tiempo

$$\mathbf{z}_{(w)}^a(t) = \left[ \mathbf{u}_{1(w)}^a(t) \quad \dots \quad \mathbf{u}_{l(w)}^a(t) \quad \mathbf{y}_{1(w)}^a(t) \quad \dots \quad \mathbf{y}_{s(w)}^a(t) \right] = \left[ \mathbf{u}_{(w)}^a(t) \quad \mathbf{y}_{(w)}^a(t) \right]_{(1 \times m)} \quad (4.92)$$

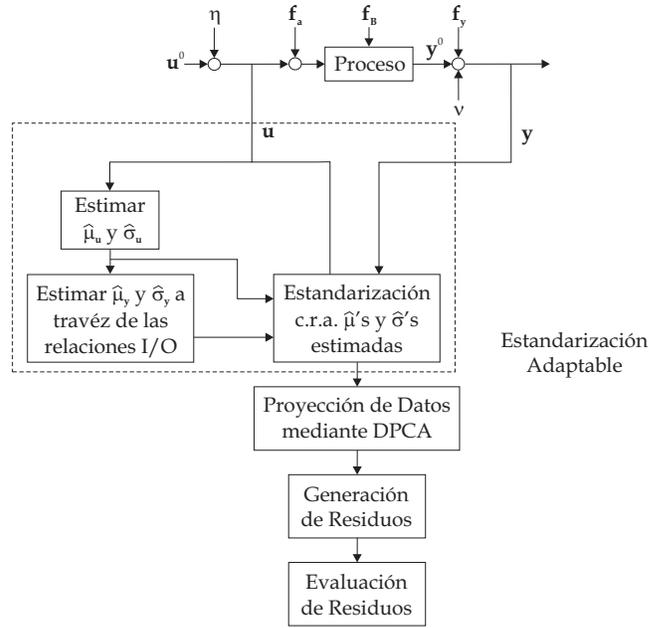


Figura 4.2: Esquema de detección de fallas basado en DPCA con estandarización adaptable

donde e.g.  $\mathbf{u}_{j(w)}^a(t) = \begin{bmatrix} u_j^a(t) & u_j^a(t-1) & \dots & u_j^a(t-w) \end{bmatrix}$ . El procedimiento para evaluar en línea la consistencia de esta observación con respecto al modelo DPCA, se describe a continuación. Ver el esquema de la figura 4.2.

### Estandarización

1. Estimar a través de (4.84) las medias de los datos de entrada actuales,  $\hat{\mu}_{\mathbf{u}_{(w)}^a}(t)$ , y a través de (4.87) las medias nominales de las variables de salida,  $\hat{\mu}_{\mathbf{y}_{(w)}}(t)$ ; y enseguida construir el vector

$$\hat{\mu}_{\mathbf{z}_{(w)}^a}(t) = \begin{bmatrix} \hat{\mu}_{\mathbf{u}_{(w)}^a}(t) & \hat{\mu}_{\mathbf{y}_{(w)}}(t) \end{bmatrix}_{(1 \times m)} \quad (4.93)$$

2. Estimar las desviaciones estándar de las entradas,  $\hat{\sigma}_{\mathbf{u}_{(w)}^a}(t)$ , a través de (4.85) y (4.86).
3. Estimar las desviaciones estándar de las salidas,  $\hat{\sigma}_{\mathbf{y}_{(w)}}(t)$ , a través de (4.90), (4.91) y (4.87). Construir a partir de  $\hat{\sigma}_{\mathbf{u}_{(w)}^a}(t)$  y  $\hat{\sigma}_{\mathbf{y}_{(w)}}(t)$  el vector de desviaciones estándar nominales

$$\hat{\sigma}_{\mathbf{z}_{(w)}^a}(t) = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{\mathbf{u}_{(w)}^a}(t) & \hat{\sigma}_{\mathbf{y}_{(w)}}(t) \end{bmatrix}_{(1 \times m)} \quad (4.94)$$

4. Estandarizar los  $m$  terminos en (4.92) usando las estimaciones de medias y desviaciones estándar dadas en (4.93) y (4.94), esto es

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{z}}_{(w)}^a(t) &= \mathbf{z}_{(w)}^a(t) - \hat{\mu}_{\mathbf{z}_{(w)}^a}(t) \\ \tilde{\mathbf{z}}_{(w)}^a(t) &= \bar{\mathbf{z}}_{(w)}^a(t) \mathbf{D}_{\mathbf{z}}^{-1} \end{aligned} \quad (4.95)$$

donde:  $\mathbf{D}_z = \text{diag} \left( \hat{\sigma}_{z_{(w)}}^a(t) \right)$ .

### Detección

1. Transformar el vector estandarizado  $\tilde{\mathbf{z}}_{(w)}^a(t)$  al subespacio de componentes principales mediante  $\mathbf{Q}_p$ , o al subespacio residual mediante  $\mathbf{Q}_r$ , esto es

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^a(t) &= \tilde{\mathbf{z}}_{(w)}^a(t) \mathbf{Q}_p \\ \mathbf{r}^a(t) &= \tilde{\mathbf{z}}_{(w)}^a(t) \mathbf{Q}_r \end{aligned} \quad (4.96)$$

2. Transformar  $\mathbf{p}^a(t)$  y  $\mathbf{r}^a(t)$  en los correspondientes residuos

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{p}^a}^2(t) &= \mathbf{p}^a(t) \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{p}}^{-1} \mathbf{p}^a(t)^T \\ SPE_{\mathbf{r}^a}(t) &= \mathbf{r}^a(t) \mathbf{r}^a(t)^T \end{aligned} \quad (4.97)$$

3. Si alguno de los residuos sobrepasa su respectivo umbral, entonces se revela la presencia de una falla en el proceso.

En la siguiente sección se valida, mediante simulaciones en un sistema hidráulico de tres tanques interconectados, la capacidad del algoritmo propuesto para distinguir entre cambios de punto de operación y los cambios debido a fallas.

## 4.5. Sistema de tres tanques como caso de estudio

El sistema de tres tanques interconectados consta de tres tanques cilíndricos, con válvulas de interconexión  $V_1$  entre los tanques 1 y 3,  $V_3$  entre el tanque 3 y 2,  $V_2$  entre el tanque 2 y el exterior, cuyos porcentajes de apertura se pueden manipular a fin de emular fallas (e.g. *obstrucción de tubería*); ver figura 4.3. Las dimensiones de los tanques son:  $h_T = 0.63m$ ,  $A_T = 0.01539m^2$ . Las variables medibles del sistema son: los gastos  $Q_1$  y  $Q_2$  que entran a los tanques 1 y 2, respectivamente, y las alturas de nivel del líquido  $h_1$ ,  $h_2$  y  $h_3$  en los tanques 1, 2 y 3, respectivamente. El modelo matemático del sistema se muestra enseguida.

$$\begin{aligned} A_T \frac{dh_1}{dt} &= Q_1 - Q_{13} - Q_{f1} \\ A_T \frac{dh_3}{dt} &= Q_{13} - Q_{32} - Q_{f3} \\ A_T \frac{dh_2}{dt} &= Q_2 + Q_{32} - Q_{20} - Q_{f2} \end{aligned} \quad (4.98)$$

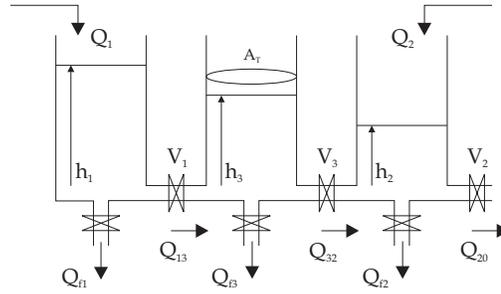


Figura 4.3: Sistema de Tres Tanques

$$\begin{aligned}
 Q_{13} &= \alpha_{13}\rho(h_1 - h_3) & \alpha_{13} &= cf_1\sqrt{2g\pi}r_p^2 \\
 Q_{32} &= \alpha_{32}\rho(h_3 - h_2) & \alpha_{32} &= cf_3\sqrt{2g\pi}r_p^2 \\
 Q_{20} &= \alpha_{20}\sqrt{h_2} & \alpha_{20} &= cf_2\sqrt{2g\pi}r_p^2 \\
 Q_{f1} &= \alpha_{f1}\sqrt{h_1} & \alpha_{f1} &= cf_1\sqrt{2g\pi}r_p^2 \\
 Q_{f3} &= \alpha_{f3}\sqrt{h_3} & \alpha_{f3} &= cf_3\sqrt{2g\pi}r_p^2 \\
 Q_{f2} &= \alpha_{f2}\sqrt{h_2} & \alpha_{f2} &= cf_2\sqrt{2g\pi}r_p^2
 \end{aligned} \tag{4.99}$$

donde:  $\rho(x) \triangleq \text{sgn}(x)\sqrt{|x|}$ .

- $\alpha_{ij}$  es la constante de flujo para la correspondiente tubería entre los tanques  $i$  y  $j$ .
- $Q_{ij}$  es el flujo entre los tanques  $i$  y  $j$ .
- $Q_{fi}$  es el flujo de la fuga en el  $i$ -ésimo tanque.
- $\alpha_{fi}$  es la constante de flujo de la correspondiente fuga.
- $r_p$  es el radio de apertura de las válvulas y está en el rango de 0 a 0.004m.
- $cf_i$  es el coeficiente de flujo con valores:  $cf_1 = 0.450289$ ,  $cf_3 = 0.461526$ ,  $cf_2 = 0.611429$ .

Para las simulaciones se considera el siguiente punto de operación, ver la figura 4.4:

Valores	Varianza	Ruido
$\mu_{Q_1} = 0.03l/s$	$\gamma_{Q_1}^2 = 5 \times 10^{-11}$	$\gamma_{\eta_1}^2 = 0.3\gamma_{Q_1}^2$
$\mu_{Q_2} = 0.02l/s$	$\gamma_{Q_2}^2 = 5 \times 10^{-11}$	$\gamma_{\eta_2}^2 = 0.3\gamma_{Q_2}^2$
$\mu_{h_1} = 0.310m$	$\gamma_{h_1}^2 = 5 \times 10^{-4}$	$\gamma_{\nu_1}^2 = 0.3\gamma_{h_1}^2$
$\mu_{h_2} = 0.135m$	$\gamma_{h_2}^2 = 5 \times 10^{-4}$	$\gamma_{\nu_2}^2 = 0.3\gamma_{h_2}^2$
$\mu_{h_3} = 0.220m$	$\gamma_{h_3}^2 = 5 \times 10^{-4}$	$\gamma_{\nu_3}^2 = 0.3\gamma_{h_3}^2$

#### 4.5.1. Detección de fallas para el sistema de tres tanques

En este caso se evalúa únicamente la robustez del algoritmo de detección de fallas ante cambios de punto de operación. Se considera el sistema global, es decir, se obtiene un sólo modelo basado

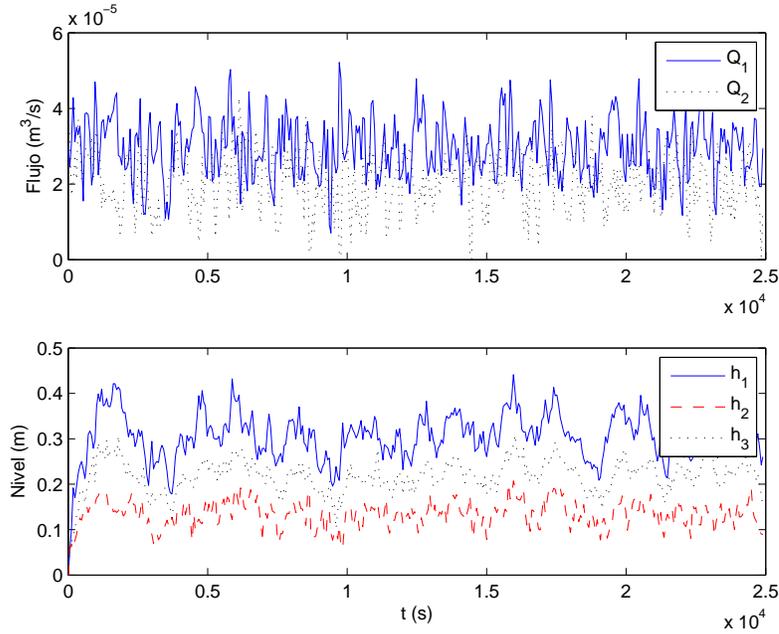


Figura 4.4: Señales de entrada y salida nominales

en DPCA a partir de datos de todas las variables medidas. El monitoreo se lleva a cabo en el subespacio de componentes principales.

Para el modelado basado en DPCA y la identificación de los modelos FIR, se toman  $n_t = 400$  datos nominales de las series de tiempo asociadas a las 2 entradas y las 3 salidas del sistema (4.98), muestreados cada 60 s, tomando en cuenta una constante de tiempo aproximada de 400 s. Con los datos históricos nominales se construye la correspondiente matriz de trayectoria de acuerdo con (3.63), donde el orden de retardos máximo es  $w = \frac{n_t}{4} = 100$ . Por lo tanto,  $N = n_t - w = 300$ ,  $m = n(w + 1) = 505$ ,  $n = 5$  variables. A partir de este conjunto de datos, mediante DPCA, se obtuvo el umbral de condición nominal  $UCL_p = 85$ , de acuerdo con (3.49).

### Identificación de los modelos FIR

Como se propone en el trabajo, simultáneamente al modelado implícito, se obtienen modelos FIR a partir de la información resumida en la matriz de covarianza de los datos históricos nominales para el sistema de tres tanques.

Se identifican para cada una de las salidas, correspondientes modelos FIR en función de las dos entradas, cuyos ordenes  $n_i$  se determinan de acuerdo a los criterios de minimización del cuadrado

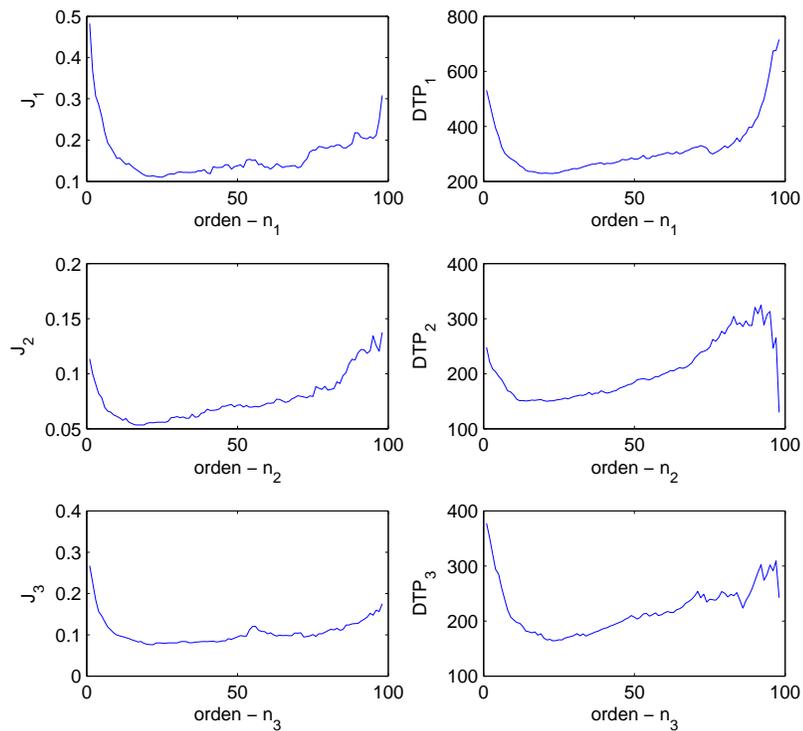


Figura 4.5: Curvas del criterio cuadrático de los errores  $J(\cdot)$  y de dispersión total de los parámetros estimados  $DTP$ , en función del orden de los modelos FIR para las salidas  $h_1$ ,  $h_2$  y  $h_3$

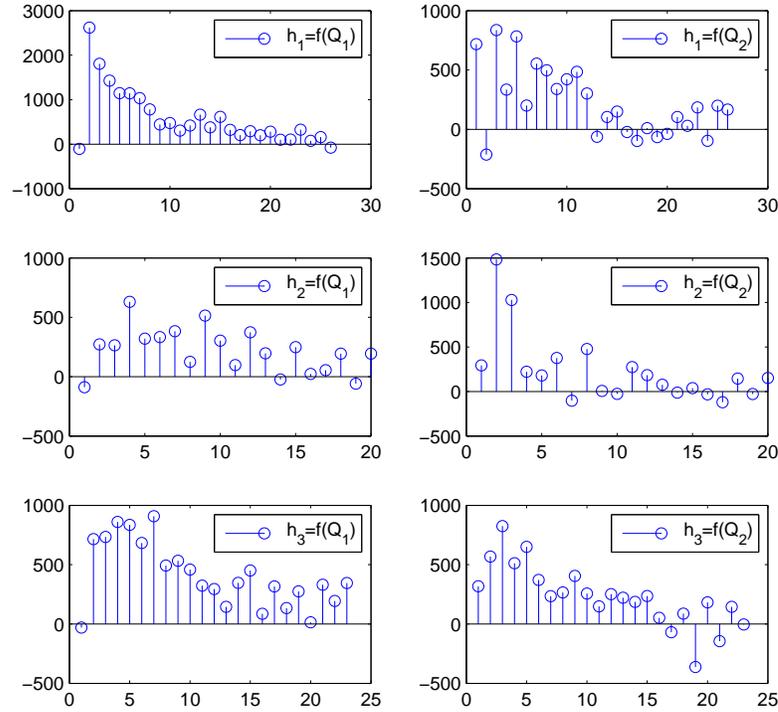


Figura 4.6: Secuencia de ponderaciones de los modelos FIR para las salidas  $h_1$ ,  $h_2$  y  $h_3$

de los errores  $J(\hat{\mathbf{b}}_i)$ , ecuación (4.74), y de la dispersión total de los parámetros  $DTP(\hat{\mathbf{b}}_i)$ , ecuación (4.83). En la figura 4.5, se muestran las curvas de  $J(\cdot)$  y  $DTP$  para cada una de las salidas correspondientes.

Al analizar las curvas de  $J(\cdot)$  y  $DTP$  se observa que para ordenes pequeños las magnitudes de  $J(\cdot)$  y  $DTP$  son grandes, lo mismo sucede para ordenes muy elevados, por lo tanto, de acuerdo con los mínimos en las curvas de la figura 4.5, los ordenes que se seleccionan son  $n_1 = 22$ ,  $n_2 = 16$ ,  $n_3 = 22$ , respectivamente, para cada uno de los modelos FIR asociados a las salidas:  $h_1 = f(Q_1, Q_2, n_1)$ ,  $h_2 = f(Q_1, Q_2, n_2)$  y  $h_3 = f(Q_1, Q_2, n_3)$ . Las secuencias de ponderaciones estimadas están dadas en la figura 4.6. Como se mencionó en la sección 4.3, pese a la sencillez de los modelos FIR los cuales no requieren del conocimiento de la estructura del modelo, no obstante la calidad de los estimados depende entre otros factores, del contenido de ruido en las señales, en el caso del sistema de tres tanques se adicionó un nivel de ruido con varianza del 30% de la varianza de las señales.

Así, de acuerdo al enfoque propuesto de estandarización adaptable, con estos modelos FIR

se lleva a cabo la estimación de los parámetros estadísticos de las señales de salida, siguiendo el procedimiento descrito en la sección 4.4.1.

### Detección de fallas

Enseguida se evalúa la robustez del algoritmo propuesto ante cambios de punto de operación. Las condiciones de operación que se emularon son las siguientes:

1. Condición de falla, obstrucción en la tubería que une los tanques 1 y 3, la falla se hizo presente a partir de los 40,000s.
2. Operación normal del sistema durante 60,000s, con cambios de media en  $Q_1$  de +20 % en  $15,000s < t < 25,000s$ , -20 % en  $35,000s < t < 45,000s$ ; y en  $Q_2$  de +20 % en  $20,000s < t < 30,000s$ , -20 % en  $40,000s < t < 50,000s$ .
3. Operación normal del sistema durante 60,000s, con cambios en la varianza de  $Q_1$ ,  $\gamma_{Q_1}^2 = 1 \times 10^{-10}$ , en  $20,000s < t < 30,000s$ ; y de  $Q_2$ ,  $\gamma_{Q_2}^2 = 1 \times 10^{-10}$ , en  $40,000s < t < 50,000s$ .
4. Cambio de media en  $Q_1$  de +20 % a partir de 20,000s; y condición de falla a partir de 40,000s.

La primera prueba tiene como propósito comparar el desempeño de la detección convencional basada en DPCA y la detección de falla basada en el algoritmo propuesto con estandarización adaptable. Los resultados del monitoreo se muestran en la figura 4.7, la cual muestra que ambos algoritmos de detección de fallas responden de manera similar.

Las pruebas dos y tres son en condiciones de operación normal pero ante cambios en las medias y de las varianzas de las señales de entrada, respectivamente. Los resultados del monitoreo se muestran en las figuras 4.8 y 4.9, donde se observa que la detección de fallas convencional basada en DPCA (Mon1), interpreta los cambios normales en el punto de operación como fallas, sin embargo, el algoritmo propuesto (Mon2), es robusto ante estos cambios.

Finalmente, la prueba 4 consiste en una combinación de condiciones de operación, cambio de punto de operación en la entrada  $Q_1$  y condición de falla. Como se observa de la figura 4.10, el algoritmo propuesto (Mon2), no solo es robusto al cambio de punto de operación, sino también es sensible a las fallas.

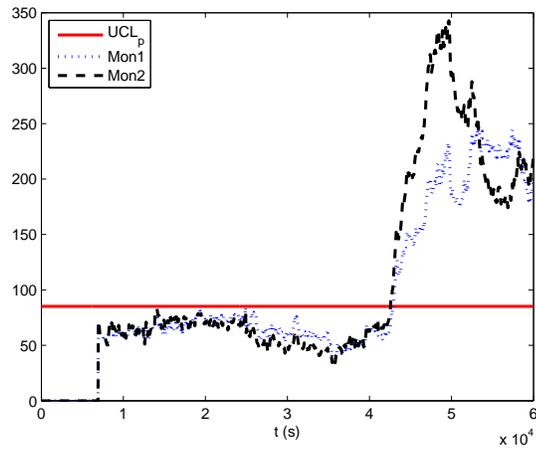


Figura 4.7: Condición de falla:  $UCL_p$  - Umbral de condición normal; Mon1 - Monitoreo basado en DPCA; Mon2 - DPCA con estandarización adaptable

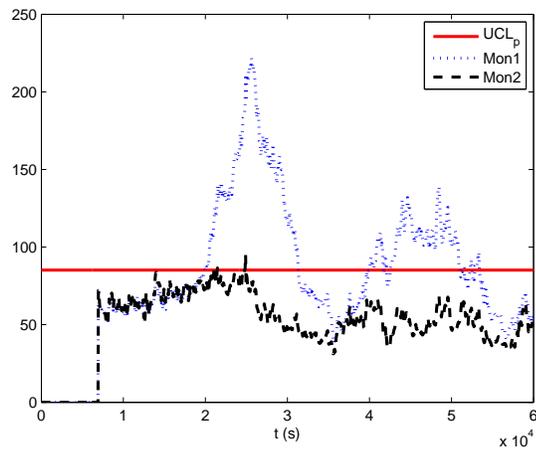


Figura 4.8: Condición normal:  $UCL_p$  - Umbral de condición normal; Mon1 - Monitoreo basado en DPCA; Mon2 - DPCA con estandarización adaptable

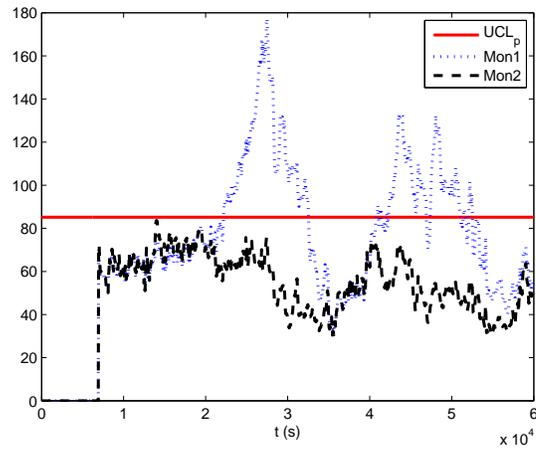


Figura 4.9: Condición normal:  $UCL_p$  - Umbral de condición normal; Mon1 - Monitoreo basado en DPCA; Mon2 - DPCA con estandarización adaptable

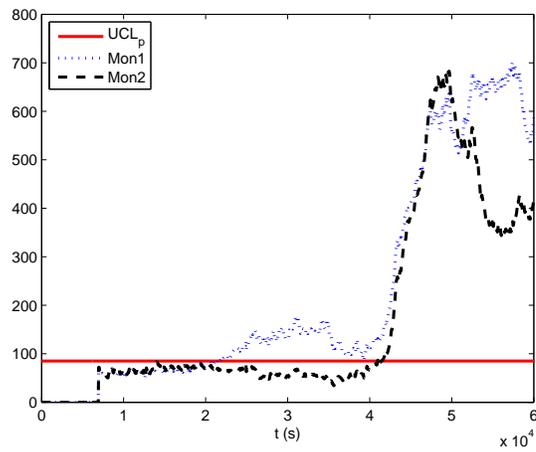


Figura 4.10: Condición normal y falla:  $UCL_p$  - Umbral de condición normal; Mon1 - Monitoreo basado en DPCA; Mon2 - DPCA con estandarización adaptable

Las simulaciones demuestran que mediante la integración del modelado estadístico basado en DPCA y la identificación de modelos entrada-salida, se puede implementar un mecanismo de estandarización adaptable con lo cual se logra una detección robusta de fallas. Esta idea permite manejar señales no estacionarias reduciendo significativamente la razón de falsas alarmas.



## Capítulo 5

# Aislamiento de fallas con modelos estructurados

A pesar de que el algoritmo propuesto de detección de fallas basado en DPCA con estandarización adaptable es robusto ante cambios de punto de operación, éste está limitado para la tarea de aislamiento de fallas. Esta limitación puede reducirse si se consideran subsistemas estructurados. En particular, se recurre al análisis estructural descrito en la sección 2.2, mediante el cual se generan los subsistemas o grafos redundantes que determinan la aislabilidad del sistema. Y la implementación de los correspondientes generadores de residuos se lleva a cabo usando DPCA con estandarización adaptable. Esta propuesta de integración se ha denominado *modelos estructurados DPCA* y la idea es la siguiente.

Sea un grafo redundante

$$\mathcal{GR}_i(\mathcal{C}_i, \mathcal{U}_{si}, y_i) \quad (5.1)$$

el cual forma parte de un conjunto de grafos obtenidos vía el análisis de la estructura de un sistema particular, y que determinan las posibilidades de aislamiento del sistema.  $\mathcal{GR}_i$  es sensible a un subconjunto de fallas  $\mathcal{F}_i$ . De acuerdo a la **Definición 1**, existe una relación de redundancia de la forma (2.1) la cual es también sensible a  $\mathcal{F}_i$ . Si el subsistema bajo supervisión es estable, funciona alrededor de un punto de operación y es linealizable, entonces existe para (5.1) una correspondiente relación de redundancia lineal descrita por

$$\mathbf{z}_{i(w)}(t)\mathbf{a}_i = 0 \quad (5.2)$$

donde:  $\mathbf{a}_i \in \mathfrak{R}^{m \times 1}$  y el vector  $\mathbf{z}_{i(w)}(t) \in \mathfrak{R}^{1 \times m}$  está descrito como

$$\mathbf{z}_{i(w)}(t) = [\mathbf{u}_{si}(t) \quad \mathbf{u}_{si}(t-1) \quad \dots \quad \mathbf{u}_{si}(t-w) \quad y_i(t) \quad y_i(t-1) \quad \dots \quad y_i(t-w)] \quad (5.3)$$

donde:  $\mathbf{u}_{si}(t) \in \Re^{1 \times l}$  está asociado al subconjunto pseudo-exógeno  $\mathcal{U}_{si}$  e  $y_i(t)$  es la variable objetivo;  $m = (l + 1)(w + 1)$ .

Bajo estas condiciones, se asegura la existencia de correlación entre las señales involucradas en el grafo redundante, por lo tanto, la generación de residuos para cada subsistema (5.2) puede llevarse a cabo con DPCA, tomando en cuenta las auto e intercorrelaciones de las señales involucradas.

Dado que cada relación de redundancia (5.2) es un subsistema independiente para DPCA y que el vector de variables pseudoexógenas  $\mathbf{u}_{si}(t)$  puede contener variables de salida, entonces las variaciones en  $\mathbf{u}_{si}(t)$ , inducidas por cambios en el punto de operación o por fallas en otros subsistemas, pueden generar falsas alarmas. Este problema es el caso de las no estacionariedades discutidas en el capítulo anterior, por lo tanto, cada generador de residuos se lleva a cabo con el mecanismo de estandarización adaptable propuesto.

En este capítulo se presenta la integración del algoritmo de detección robusta basado en DPCA con análisis estructural para el aislamiento de fallas y se evalúa, también en el sistema hidráulico de tres tanques interconectados, la capacidad de aislamiento.

## 5.1. Algoritmo para el aislamiento de fallas

### Requerimientos:

- Modelo genérico-funcional del proceso.
- Datos históricos nominales del proceso en condiciones estacionarias.

### Análisis de la estructura y modelado DPCA

1. Seleccionar el conjunto de fallas de interés.
2. Obtener los grafos redundantes,  $\mathcal{GR}'s$ , mediante el análisis de la estructura del modelo genérico del proceso. Ver sección 2.2.
3. Construir la matriz de firmas de falla asociada a los  $\mathcal{GR}'s$ .
4. Examinar la matriz de firmas de falla y seleccionar los  $\mathcal{GR}'s$  que en conjunto determinen la máxima capacidad de aislamiento.

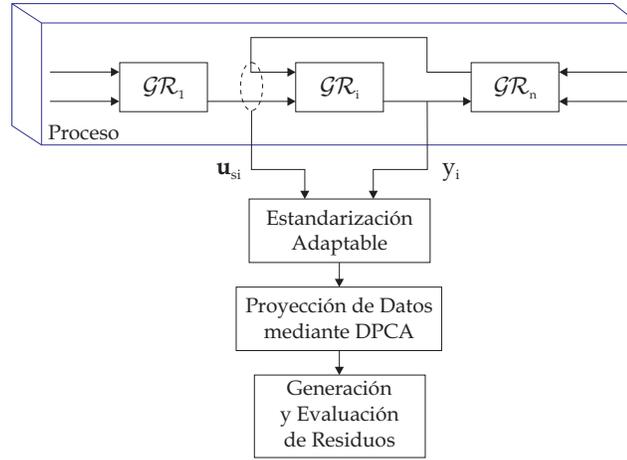


Figura 5.1: FDI basado en modelos estructurados DPCA con estandarización adaptable

5. Obtener los modelos DPCA a partir de los datos nominales del subconjunto de variables  $\mathcal{Z}_i = \mathcal{U}_{si} \cup y_i$ , asociadas a cada grafo  $\mathcal{GR}_i(\mathcal{C}_i, \mathcal{U}_{si}, y_i)$  seleccionado. Ver secciones 3.2 y 3.4.
6. Identificar, a partir de las covarianzas usadas en el modelado DPCA, las relaciones entrada-salida o pseudoexógenas-salida,  $y_i = f(\mathcal{U}_{si})$ , necesarias para la obtención de los parámetros estadísticos de la salida en el mecanismo de estandarización adaptable. Ver sección 4.3.

### Detección y aislamiento de fallas

Sea un vector de observación actual de las variables pseudoexógenas y de la variable de salida, asociadas a cada  $\mathcal{GR}_i$  y expresadas en  $w$  retardos de tiempo

$$\mathbf{z}_{i(w)}^a(t) = [\mathbf{u}_{si}^a(t) \quad \mathbf{u}_{si}^a(t-1) \quad \dots \quad \mathbf{u}_{si}^a(t-w) \quad y_i^a(t) \quad y_i^a(t-1) \quad \dots \quad y_i^a(t-w)] \quad (5.4)$$

La detección y aislamiento se lleva a cabo en los siguientes pasos. Ver el esquema de la figura 5.1.

1. Estandarizar la observación actual  $\mathbf{z}_{i(w)}^a(t)$  y evaluar su consistencia con respecto a su modelo DPCA correspondiente. Tarea de detección de fallas. Ver la sección 4.4.
2. Comparar la respuesta residual con respecto a la matriz de firma de fallas. Tarea de aislamiento.

En la siguiente sección se muestra el desempeño del algoritmo propuesto de FDI mediante simulaciones en el sistema hidráulico de tres tanques interconectados.

### 5.1.1. Aislamiento de fallas para el sistema de tres tanques

Aquí se evalúa la capacidad de aislamiento del algoritmo de FDI basado en modelos estructurados DPCA. El monitoreo se lleva a cabo en el subespacio de componentes residuales.

En el sistema de tres tanques se consideran once fallas: tres asociadas con los sensores  $\{f_{y_1}, f_{y_2}, f_{y_3}\}$ ; dos asociadas con los actuadores  $\{f_{u_1}, f_{u_2}\}$ ; tres asociadas a obstrucción en las tuberías de interconexión entre tanques  $\{f_{\alpha_{13}}, f_{\alpha_{32}}, f_{\alpha_{20}}\}$  y tres asociadas a fugas en los tanques  $\{f_{f_1}, f_{f_2}, f_{f_3}\}$ .

#### Obtención de los grafos redundantes

Para el análisis de la estructura del sistema de tres tanques no se requiere el modelo de ecuaciones matemáticas explícitas, ni el valor de los parámetros. Por lo tanto, en lugar del sistema (4.98), se trabajará con el modelo genérico, esto es

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_3, u_1, \alpha_{f_1}, \alpha_{13}) \quad (\text{t1})$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_3, x_2, u_2, \alpha_{f_2}, \alpha_{32}, \alpha_{20}) \quad (\text{t2})$$

$$\dot{x}_3 = f_3(x_1, x_3, x_2, \alpha_{f_3}, \alpha_{13}, \alpha_{32}) \quad (\text{t3})$$

$$x_4 = dx_1 \quad (\text{t4})$$

$$x_5 = dx_2 \quad (\text{t5})$$

$$x_6 = dx_3 \quad (\text{t6})$$

$$y_1 = x_1 \quad (\text{t7})$$

$$y_2 = x_2 \quad (\text{t8})$$

$$y_3 = x_3 \quad (\text{t9})$$

donde:  $y_1 = h_1$ ,  $y_2 = h_2$ ,  $y_3 = h_3$ ,  $u_1 = Q_1$  y  $u_2 = Q_2$ . Y su correspondiente grafo bipartita está representado en la figura 5.2.

De acuerdo con el algoritmo descrito en la sección 5.1, mediante el procedimiento de aparejamiento entre combinaciones de variables del grafo bipartita de la figura 5.2, se obtienen los siguientes diez grafos redundantes:

- $\mathcal{GR}_1(\mathcal{C}_1, \mathcal{U}_{s_1}, y_1)$  que relaciona el conjunto pseudo-exógeno  $\mathcal{U}_{s_1} = \{u_1, y_3\}$  con la variable objetivo  $y_1$ , mediante el conjunto de restricciones  $\mathcal{C}_1 = \{t1, t4, t7, t9\}$ , ver figura 5.3.

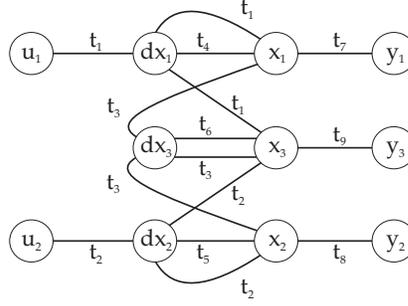
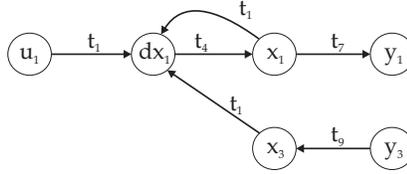


Figura 5.2: Grafo bipartita del sistema (t1-t9)

- $\mathcal{GR}_2(\mathcal{C}_2, \mathcal{U}_{s2}, y_2)$  que relaciona el conjunto pseudo-exógeno  $\mathcal{U}_{s2} = \{u_2, y_3\}$  con la variable objetivo  $y_2$ , mediante el conjunto de restricciones  $\mathcal{C}_2 = \{t_2, t_5, t_8, t_9\}$ , ver figura 5.4.
- $\mathcal{GR}_3(\mathcal{C}_3, \mathcal{U}_{s3}, y_3)$  que relaciona el conjunto pseudo-exógeno  $\mathcal{U}_{s3} = \{y_1, y_2\}$  con la variable objetivo  $y_3$ , mediante el conjunto de restricciones  $\mathcal{C}_3 = \{t_3, t_6, t_7, t_8, t_9\}$ , ver figura 5.5.
- $\mathcal{GR}_4(\mathcal{C}_4, \mathcal{U}_{s4}, y_1)$  que relaciona el conjunto pseudo-exógeno  $\mathcal{U}_{s4} = \{u_1, y_2\}$  con la variable objetivo  $y_1$ , mediante el conjunto de restricciones  $\mathcal{C}_4 = \{t_1, t_3, t_4, t_6, t_7, t_8\}$ .
- $\mathcal{GR}_5(\mathcal{C}_5, \mathcal{U}_{s5}, y_2)$  que relaciona el conjunto pseudo-exógeno  $\mathcal{U}_{s5} = \{u_2, y_1\}$  con la variable objetivo  $y_2$ , mediante el conjunto de restricciones  $\mathcal{C}_5 = \{t_2, t_3, t_5, t_6, t_7, t_8\}$ .
- $\mathcal{GR}_6(\mathcal{C}_6, \mathcal{U}_{s6}, y_3)$  que relaciona el conjunto pseudo-exógeno  $\mathcal{U}_{s6} = \{u_2, y_1\}$  con la variable objetivo  $y_3$ , mediante el conjunto de restricciones  $\mathcal{C}_6 = \{t_2, t_3, t_5, t_6, t_7, t_9\}$ .
- $\mathcal{GR}_7(\mathcal{C}_7, \mathcal{U}_{s7}, y_3)$  que relaciona el conjunto pseudo-exógeno  $\mathcal{U}_{s7} = \{u_1, y_2\}$  con la variable objetivo  $y_3$ , mediante el conjunto de restricciones  $\mathcal{C}_7 = \{t_1, t_3, t_4, t_6, t_8, t_9\}$ .
- $\mathcal{GR}_8(\mathcal{C}_8, \mathcal{U}_{s8}, y_1)$  que relaciona el conjunto exógeno  $\mathcal{U}_{s8} = \{u_1, u_2\}$  con la variable objetivo  $y_1$ , mediante el conjunto de restricciones  $\mathcal{C}_8 = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7\}$ .
- $\mathcal{GR}_9(\mathcal{C}_9, \mathcal{U}_{s9}, y_2)$  que relaciona el conjunto exógeno  $\mathcal{U}_{s9} = \{u_1, u_2\}$  con la variable objetivo  $y_2$ , mediante el conjunto de restricciones  $\mathcal{C}_9 = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_8\}$ .
- $\mathcal{GR}_{10}(\mathcal{C}_{10}, \mathcal{U}_{s10}, y_3)$  que relaciona el conjunto exógeno  $\mathcal{U}_{s10} = \{u_1, u_2\}$  con la variable objetivo  $y_3$ , mediante el conjunto de restricciones  $\mathcal{C}_{10} = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_9\}$ .

Tabla 5.1: Firmas de falla con  $\mathcal{GR}_1$ - $\mathcal{GR}_{10}$ 

\	$Z_i$	$ C_i $	$f_{y1}$	$f_{y3}$	$f_{y2}$	$f_{u1}$	$f_{u2}$	$f_{f1}$	$f_{f3}$	$f_{f2}$	$f_{\alpha_{13}}$	$f_{\alpha_{32}}$	$f_{\alpha_{20}}$
$\mathcal{GR}_1$	$U_{s1}, y_1$	4	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0
$\mathcal{GR}_2$	$U_{s2}, y_2$	4	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1
$\mathcal{GR}_3$	$U_{s3}, y_3$	5	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0
$\mathcal{GR}_4$	$U_{s4}, y_1$	6	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0
$\mathcal{GR}_5$	$U_{s5}, y_2$	6	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1
$\mathcal{GR}_6$	$U_{s6}, y_3$	6	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1
$\mathcal{GR}_7$	$U_{s7}, y_3$	6	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0
$\mathcal{GR}_8$	$U_{s8}, y_1$	7	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mathcal{GR}_9$	$U_{s9}, y_2$	7	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mathcal{GR}_{10}$	$U_{s10}, y_3$	7	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Figura 5.3: Grafo aparejado con el conjunto  $\{u_1, y_3\}$  como variables pseudo-exógenas

De acuerdo con las variables y restricciones involucradas en cada grafo, se identifican las fallas correspondientes a las cuales son sensibles los grafos. Integrando, las firmas de falla de  $\mathcal{GR}_1$  a  $\mathcal{GR}_{10}$ , se obtiene la matriz de firmas de falla de la Tabla 5.1.

De la Tabla 5.1 se observa que con  $\mathcal{GR}_1$ - $\mathcal{GR}_3$  los subconjuntos de fallas aislables son:  $\{f_{y1}, f_{\alpha_{13}}\}$ ,  $\{f_{y3}\}$ ,  $\{f_{y2}, f_{\alpha_{32}}\}$ ,  $\{f_{u1}, f_{f1}\}$ ,  $\{f_{u2}, f_{f2}, f_{\alpha_{20}}\}$ ,  $\{f_{f3}\}$ . Por otro lado, tanto  $\mathcal{GR}_4$  como  $\mathcal{GR}_5$  no mejoran la aislabilidad.  $\mathcal{GR}_6$  y  $\mathcal{GR}_8$  tienen la misma capacidad de aislamiento, es decir, aíslan  $f_{y2}$  de  $f_{\alpha_{32}}$ .  $\mathcal{GR}_7$  y  $\mathcal{GR}_9$  también tienen la misma capacidad de aislamiento, en este caso, ambas logran aislar  $f_{y1}$  de  $f_{\alpha_{13}}$ . Por su parte,  $\mathcal{GR}_{10}$  por sí sólo logra aislar  $f_{y2}$  de  $f_{\alpha_{32}}$  y  $f_{y1}$  de  $f_{\alpha_{13}}$ .

Como resultado, la máxima posibilidad de aislabilidad del sistema de tres tanques se logrará con la selección de los grafos redundantes:  $\mathcal{GR}_1$ ,  $\mathcal{GR}_2$ ,  $\mathcal{GR}_3$  y  $\mathcal{GR}_{10}$ , cuyos grafos aparejados se muestran en las figuras 5.3 - 5.6.

De acuerdo con los grafos redundantes seleccionados se obtiene la matriz de firmas de falla de la Tabla 5.2. Los conjuntos de fallas aislables son:  $\{f_{y1}\}$ ,  $\{f_{y3}\}$ ,  $\{f_{y2}\}$ ,  $\{f_{u1}, f_{f1}\}$ ,  $\{f_{u2}, f_{f2}, f_{\alpha_{20}}\}$ ,  $\{f_{f3}\}$ ,  $\{f_{\alpha_{13}}\}$ ,  $\{f_{\alpha_{32}}\}$ .



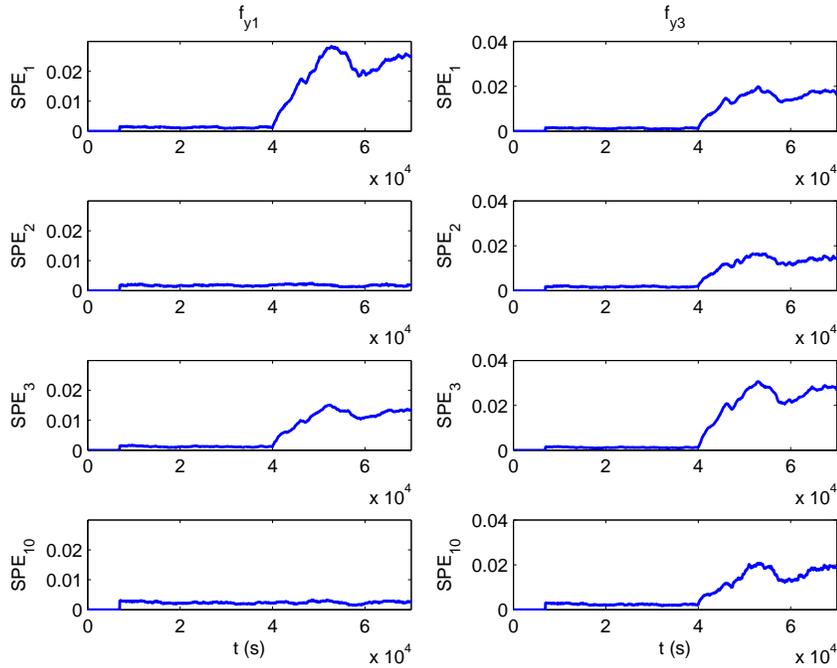


Figura 5.7: Resposta residual para:  $f_{y_1}$ ,  $f_{y_3}$

Los correspondientes subconjuntos de variables correlacionadas están dados por

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_1 &= \{u_1, y_3, y_1\}; & \mathcal{U}_{s1} &= \{u_1, y_3\} \\ \mathcal{Z}_2 &= \{u_2, y_3, y_2\}; & \mathcal{U}_{s2} &= \{u_2, y_3\} \\ \mathcal{Z}_3 &= \{y_1, y_2, y_3\}; & \mathcal{U}_{s3} &= \{y_1, y_2\} \\ \mathcal{Z}_{10} &= \{u_1, u_2, y_3\}; & \mathcal{U}_{s10} &= \{u_1, u_2\} \end{aligned}$$

a partir de los cuales se generan cuatro residuos  $SPE_i$  usando DPCA con estandarización adaptable.

### Aislamiento de fallas

Para probar el sistema de diagnóstico, se simulan ocho fallas por separado activadas a los  $40 \times 10^3$  s. La respuesta de los residuos para las fallas  $f_{y_1}$ ,  $f_{y_2}$ ,  $f_{y_3}$ ,  $f_{u_1}$ ,  $f_{u_2}$ ,  $f_{f_3}$ ,  $f_{\alpha_{13}}$ ,  $f_{\alpha_{32}}$  se muestra en las figuras 5.7-5.10. De estas figuras, se verifica que las firmas de falla corresponden con las indicadas en la Tabla 5.2. Resultados similares se obtienen con el resto de las fallas no aislables.

Como se mencionó, cada generador de residuo se ha implementado usando DPCA con el mecanismo de estandarización adaptable. La necesidad de la estandarización adaptable es con

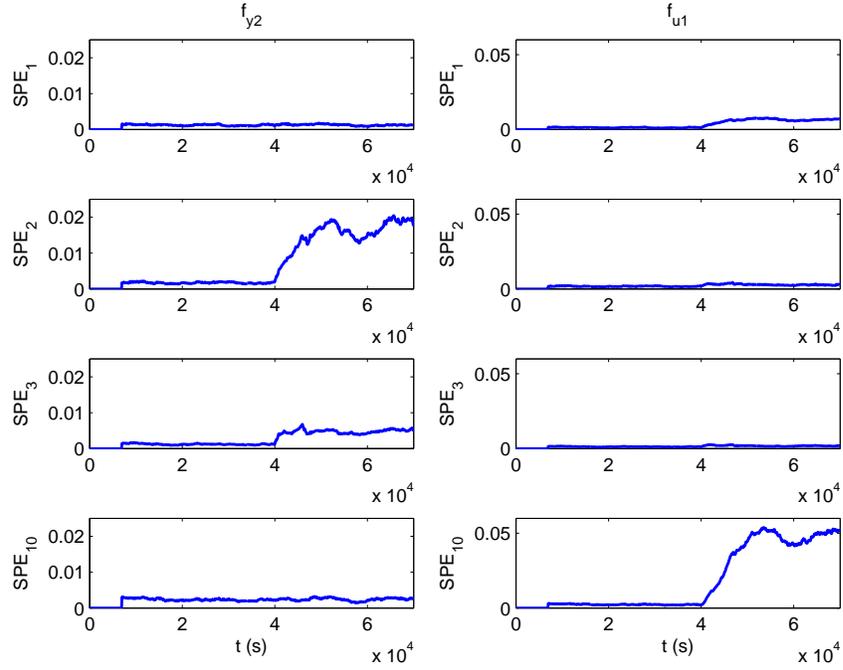


Figura 5.8: Resposta residual para:  $f_{y_2}$  ,  $f_{u_1}$

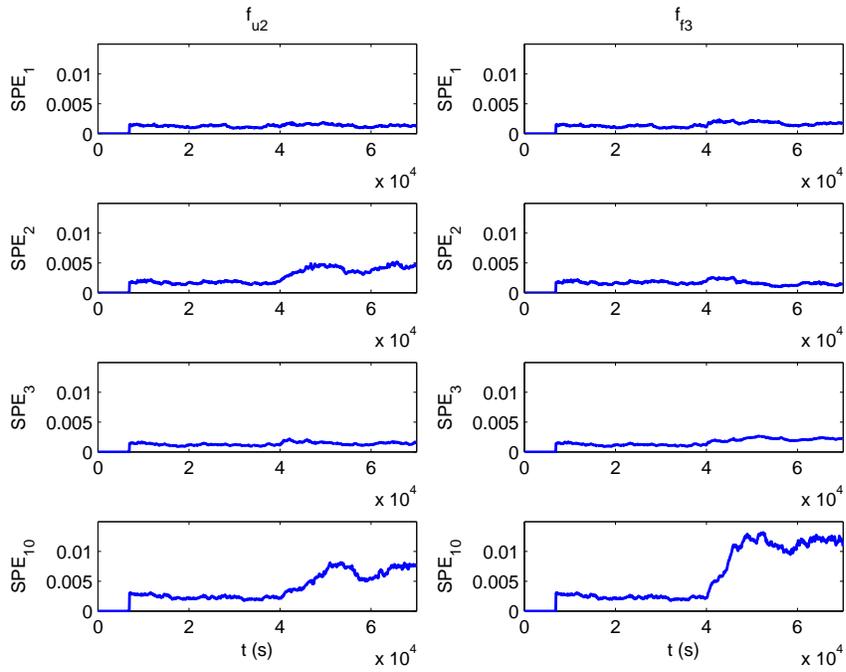


Figura 5.9: Resposta residual para:  $f_{u_2}$  ,  $f_{f_3}$

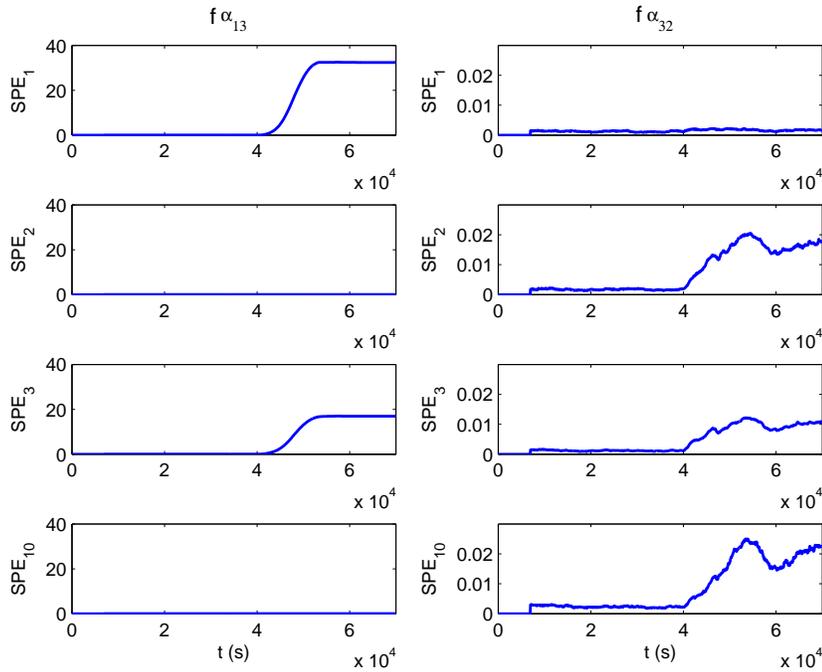


Figura 5.10: Respuesta residual para:  $f_{\alpha_{13}}$  ,  $f_{\alpha_{32}}$

el propósito de evitar falsas alarmas en la detección y aislamiento de fallas, debido a no estacionariedades en las señales  $Z_i$  involucradas en cada  $\mathcal{GR}_i$ . Las no estacionariedades en  $Z_i$  pueden ser provocadas por cambios de punto de operación en el proceso o por fallas externas a  $\mathcal{GR}_i$ . A continuación se presentan una comparación de la generación de residuos basada en DPCA con y sin estandarización.

Para la comparación se simulan por separado las fallas  $f_{u_2}$  y  $f_{\alpha_{32}}$ . La respuesta de los residuos se muestran en las figuras 5.11 y 5.12.

De acuerdo con la Tabla 5.2 la firma de la falla  $f_{u_2}$  es  $\{0 \ 1 \ 0 \ 1\}$ . De la figura 5.11(a) se observa que la generación de residuos con estandarización adaptable coincide con la firma esperada, sin embargo, la generación de residuos sin estandarización adaptable produce una firma falsa,  $\{SPE_1 = 1, SPE_3 = 1\}$ , ver figura 5.11(b). Este fenómeno se debe a que  $f_{u_2}$  induce cambios en las variables de salida  $\{y_1, y_2, y_3\}$ , por lo tanto, dado que  $y_3$  e  $y_2$  se consideran como pseudoentradas en  $\mathcal{GR}_1$  y  $\mathcal{GR}_2$ , respectivamente, sus variaciones deben ser vistas como normales para estos subsistemas.

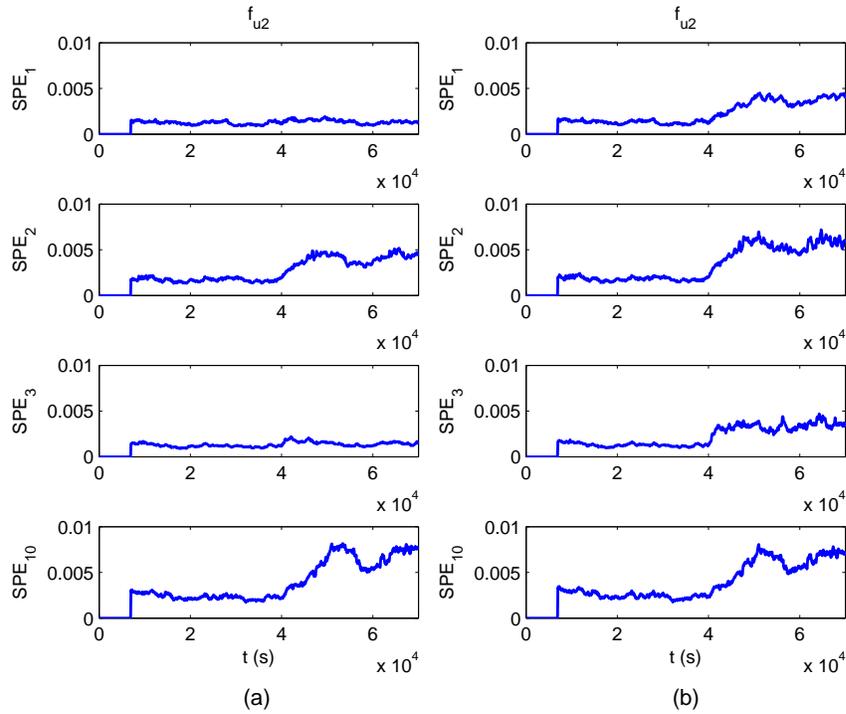


Figura 5.11: Respuesta residual para  $f_{u_2}$ . (a) FDI-DPCA con estandarización adaptable. (b) FDI-DPCA sin estandarización adaptable.

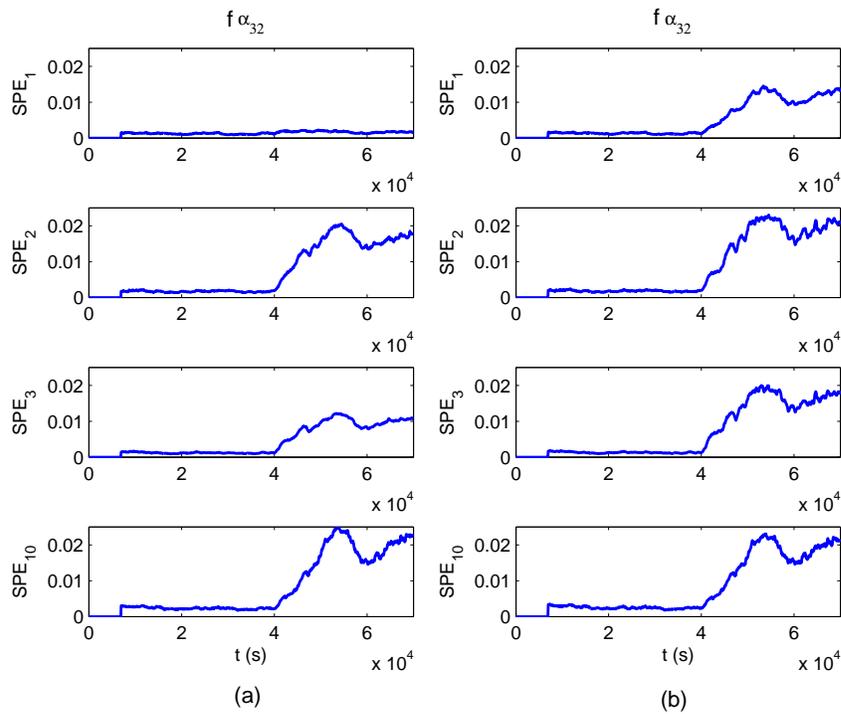


Figura 5.12: Respuesta residual para  $f_{\alpha_{32}}$ . (a) FDI-DPCA con estandarización adaptable. (b) FDI-DPCA sin estandarización adaptable.

El mismo problema de falsas alarmas sucede para el caso de la falla  $f_{\alpha_{32}}$ . De acuerdo con la Tabla 5.2 la firma de esta falla es  $\{0 \ 1 \ 1 \ 1\}$ , sin embargo, la generación de residuos sin estandarización adaptable produce la firma  $\{SPE_1 = 1, SPE_2 = 1, SPE_3 = 1, SPE_{10} = 1\}$ , ver figura 5.12(b). En este caso, el subsistema asociado a  $\mathcal{GR}_1$  es insensible a  $f_{\alpha_{32}}$ , sin embargo, en el sistema físico  $f_{\alpha_{32}}$  provoca cambios en las variables de salida, y dado que  $y_3$  se considera como pseudoentrada en  $\mathcal{GR}_1$ , el generador de residuo correspondiente, sin estandarización adaptable, produce residuos sensibles a los cambios de  $y_3$ .

Los casos anteriores ilustran la necesidad y efectividad de la estandarización adaptable en el algoritmo propuesto de FDI basado en modelos estructurados DPCA.

Como resultado, se observa que esta propuesta permite resolver la tarea de detección y aislamiento de fallas. Los resultados de simulación para el sistema de tres tanques muestran resultados similares a los que se obtienen usando observadores estructurados (Alcorta y Frank, 1999), sin embargo, el esfuerzo de diseño es menor. Las ventajas de la propuesta son que el análisis de las posibilidades de aislamiento del proceso se obtiene con herramientas de teoría de grafos, y sin el conocimiento explícito de las relaciones numéricas que describen el proceso; y por otro lado, la implementación de los generadores de residuos sólo requiere de la disponibilidad de datos históricos del proceso.

## Capítulo 6

# Conclusiones

Este trabajo propone una solución al problema de detección y aislamiento de fallas, de sistemas estables cuyos modelos explícitos no son disponibles, como es el caso en la mayoría de los sistemas de gran escala, y donde consecuentemente los esquemas convencionales de detección y aislamiento basados en modelos analíticos no son viables. En particular se hace uso de análisis de componentes principales, que es una herramienta del análisis estadístico multivariado, la cual es capaz de caracterizar de manera implícita a un proceso únicamente a partir del análisis de correlación de un conjunto de datos del mismo. Este tratamiento de las correlaciones de las variables permite evitar los problemas de falsas alarmas que se presentan en el monitoreo univariado. Específicamente se trabaja con DPCA, que es una extensión para el tratamiento de la autocorrelación inherente en las series de tiempo de sistemas dinámicos.

Para la implementación de un esquema de FDI basado en DPCA primero se lleva a cabo el modelado implícito a partir de datos nominales de las variables medibles del proceso, los cuales son previamente estandarizados con respecto a sus medias y desviaciones estándar. En el modelado se asume linealidad en las relaciones que asocian a las variables involucradas. Por otro lado, el monitoreo consiste en la evaluación de la consistencia de nuevas observaciones estandarizadas con respecto al modelo implícito.

Es importante observar que para el modelado, los datos son tomados del proceso operando alrededor de un punto de operación, es decir, que los datos de las series de tiempo son estacionarios. Sin embargo, en el funcionamiento del proceso se pueden presentar condiciones de no estacionariedad debidas no sólo a fallas, sino también a cambios de punto de operación, lo cual implica que en la etapa de monitoreo se generen falsas alarmas. Este fenómeno de no

estacionariedad no se toma en cuenta en los esquemas de detección de fallas basados en DPCA que se reportan en la literatura.

En este trabajo, se llevó a cabo un análisis de sensibilidad del generador de residuos basado en DPCA, para condiciones de falla y cambios de punto de operación, de donde se concluyó que las falsas alarmas ante cambios de punto de operación se debe a una inapropiada estandarización de los datos, ya que ésta se lleva a cabo con parámetros estadísticos fijos. Una apropiada estandarización se logra si se conocen los parámetros estadísticos nominales actuales. Por lo tanto, se propuso un mecanismo denominado de *estandarización adaptable*, con el cual se logra un esquema de detección robusto basado en DPCA capaz de distinguir entre cambios debido a fallas y los asociados a cambios de punto de operación.

Aun cuando en los esquemas convencionales de FDI basados en DPCA no se hace diferencia entre variables de entrada y salida, aquí, para la implementación del mecanismo de estandarización adaptable, se debe hacer tal distinción tomando en cuenta que las entradas son variables independientes y las salidas son variables que dependen de las entradas. Así, para la estandarización, los parámetros estadísticos de las variables de entrada se obtienen mediante promediado y covarianza móvil con ponderación exponencial (EWMA y EWMC respectivamente, por sus siglas en inglés), mientras que los parámetros estadísticos de las variables de salida se estiman a partir de los parámetros estadísticos de las entradas vía un modelo nominal entrada-salida.

Se propone el uso de modelos de respuesta finita al impulso para cada salida con respecto a las entradas. Dado que el modelado implícito así como la identificación de los modelos de respuesta finita al impulso están basados en análisis de correlación, es posible la estimación de las secuencias de ponderación a partir de la información de la matriz de covarianza utilizada en el modelado implícito, lo cual permite la identificación de manera paralela y sin necesidad de cálculos mayores adicionales.

El trabajo presenta un análisis de las propiedades estadísticas de las secuencias de ponderación estimadas de los modelos FIR, en términos de funciones de auto e intercovarianzas. Esta información es utilizada en el procedimiento propuesto para la selección del orden de los modelos FIR que toma en cuenta la incertidumbre en los parámetros estimados y la suma de los cuadrados de los errores de predicción.

Por otro lado, se señaló que a pesar de las capacidades de DPCA para la detección de fallas, éste está limitado para la tarea de aislamiento. Para resolver este problema, en este trabajo se propuso la integración de análisis estructural con modelos DPCA, lo cual se ha denominado como *modelos estructurados DPCA*. Esta integración consiste en dos etapas: en primer lugar, analizar *a priori* la estructura del proceso con herramientas de teoría de grafos, a partir del cual se generen los denominados *grafos redundantes* que determinan las posibilidades de aislabilidad de fallas del proceso; y en segundo lugar, implementar los generadores de residuos para cada grafo redundante, mediante DPCA con estandarización adaptable, a partir de datos de los subconjuntos de variables asociadas a cada grafo.

Es importante resaltar la necesidad de incorporar el mecanismo de estandarización adaptable en la implementación de cada generador de residuos basado en DPCA, con lo cual se evitan falsas alarmas y falsas firmas para la detección y aislamiento de fallas.

En general, con la integración de análisis estructural, DPCA e identificación de sistemas, se logra un algoritmo de FDI que es capaz de llevar a cabo una detección robusta y con maximización de la aislabilidad de fallas. Y que por otro lado, tiene las siguientes ventajas:

- Es útil para sistemas de gran escala donde no se dispone de modelos precisos del proceso.
- Los modelos estructurados y generadores de residuos basados en DPCA, se obtienen considerando subconjuntos de variables, no con las decenas o cientos de variables que existen en un sistema de gran escala.
- La implementación del algoritmo sólo requiere del modelo genérico del proceso y la disponibilidad de datos históricos.

La propuesta de detección de fallas basada en DPCA con estandarización adaptable se evaluó a nivel simulación en una válvula de control de flujo (Mina y Verde, 2005*b*), (Mina y Verde, 2005*a*), así como en el sistema de tres tanques interconectados (Mina y Verde, 2007*a*), (?), (Mina y Verde, 2007*c*). Por su parte, el algoritmo completo de FDI basado en modelos estructurados se evaluó, también mediante simulaciones, en el sistema de tres tanques (Verde y Mina 2007), y en la turbina de gas de un generador de ciclo combinado (Mina *et al.*, 2007).

Como conclusión general, se resalta la importancia de analizar *a priori*, las capacidades de aislabilidad de un proceso, y desde luego, la necesidad de contar con herramientas que permitan llevar a cabo tal análisis. Por otro lado, la generación de residuos se puede implementar de acuerdo al tipo y grado de conocimiento de información que se tenga del proceso, de aquí que si se cuenta con modelos explícitos del sistema se puedan implementar generadores de residuos basados en métodos clásicos como observadores, estimación de parámetros, etc.; y en la ausencia de modelos analíticos, la implementación de los generadores de residuos se puede realizar, por ejemplo, usando métodos basados en manejo de datos como se propuso en este trabajo.

Finalmente, como tareas adicionales derivadas de esta investigación se sugiere:

- Validar experimentalmente el algoritmo propuesto de FDI.
- Establecer un criterio que permita llevar a cabo una apropiada selección del orden de retardos  $w$  considerado en la construcción de la matriz de trayectoria para el modelado DPCA.
- Implementar un mecanismo que permita mejorar la sensibilidad de los residuos.
- Extender la propuesta al caso de sistemas no lineales.
- Extender la propuesta de modelos estructurados en complemento con otras herramientas similares a PCA como lo es mínimos cuadrados parciales (PLS, por sus siglas en inglés).
- Desarrollar un algoritmo de optimización de búsqueda de los grafos redundantes que determinan las máximas posibilidades de aislabilidad de un proceso.

# Apéndice A

## Nomenclatura

$\mathbf{A}$	: Matriz
$\mathbf{A}^T$	: Transpuesta de la matriz $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^{-1}$	: Inversa de la matriz $\mathbf{A}$ , siempre que $\mathbf{A}$ sea cuadrada
$\mathbf{A}^\dagger$	: Pseudoinversa de la matriz $\mathbf{A}$
$\mathbf{a}(i)$	: $i$ -ésimo vector fila de la matriz $\mathbf{A}$
$\mathbf{a}_j$	: $j$ -ésimo vector columna de la matriz $\mathbf{A}$
$a_{ij}$	: Parámetro, valor o entrada, de la $i$ -ésima fila, $j$ -ésima columna de la matriz $\mathbf{A}$
$\mathbf{I}_n$	: Matriz identidad de dimensión $n$
$\hat{a}$	: Valor estimado de $a$
$\mu$	: Vector de medias
$\sigma$	: Vector de desviaciones estándar
$\mathbf{D}$	: Matriz diagonal de desviaciones estándar
$\mathbf{\Gamma}$	: Matriz de covarianzas
$\bar{\mathbf{a}}$	: Vector de datos centrados con respecto a sus medias
$\tilde{\mathbf{a}}$	: Vector de datos estandarizados con respecto a sus medias y desviaciones estándar
$\mathbf{\Sigma}$	: Matriz de correlación
$\mathbf{Q}$	: Matriz de vectores propios
$\mathbf{\Lambda}$	: Matriz de valores propios
$\mathbf{Q}_p$	: Subespacio de las componentes principales
$\mathbf{Q}_r$	: Subespacio de las componentes residuales
$\mathbf{p}$	: Vector descrito en el subespacio de las componentes principales
$\mathbf{r}$	: Vector descrito en el subespacio de las componentes residuales
$\mathbf{\Lambda}_p$	: Matriz de covarianza de los datos en el subespacio de las componentes principales

---

<b>F</b>	: Matriz de transformación para obtener $T^2$
$T^2$	: Residuo, parámetro de Hotelling
$UCL_p$	: Umbral de condición normal para los residuos $T^2$
<b>G</b>	: Matriz de transformación para obtener $SPE$
$SPE$	: Residuo, error cuadrático de predicción
$UCL_r$	: Umbral de condición normal para los residuos $SPE$
$F(., ., .)$	: Distribución de probabilidad tipo $F$
<b>u</b>	: Vector de variables de entrada
$\eta$	: Vector de ruido adicionado a la entrada
<b>y</b>	: Vector de variables de salida
$\nu$	: Vector de ruido adicionado a la salida
$w$	: Orden de retardos de tiempo en la matriz de trayectoria
$b_{ij\tau}$	: Valor de ponderación del modelo de respuesta al impulso
$E[.]$	: Operador valor esperado
$cov(.)$	: Covarianza de (.)
$sqrt(.)$	: Raiz cuadrada de (.)
$tr(.)$	: Traza de (.)
$diag(.)$	: Elementos de la diagonal de (.)
$dim(.)$	: Dimensión de (.)
$rank(.)$	: Rango de (.)
$\beta$	: Factor de olvido

# Bibliografía

- Alcorta, E. y P. M. Frank (1999). A Novel Design of Structured Observer-Based Residuals for FDI. En: *Proceedings of the American Control Conference, ACC'99*. San Diego, CA, USA. pp. 1341–1345.
- Berdjag, D., C. Christophe y V. Cocquempot (2006). Nonlinear Model Decomposition for Fault Detection and Isolation System Design. En: *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control, CDC'06*. San Diego, CA, USA. pp. 3321–3326.
- Blanke, M., M. Kinnaert, J. Lunze y M. Staroswiecki (2003). *Diagnosis and Fault Tolerant Control*. Springer Verlag. Berlin.
- Box, G. E. P., G. M. Jenkins y G. C. Reinsei (1994). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Prentice Hall. New Jersey.
- Chen, J. y K.-Ch. Liu (2002). On-Line Batch Process Monitoring using Dynamic PCA and Dynamic PLS Models. *Chemical Engineering Science* **57**(1), 63–75.
- Chiang, L. H., E. L. Russell y R. D. Braatz (2001). *Fault Detection and Diagnosis in Industrial Systems*. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing, Springer-Verlag. London.
- Choi, S. W., E. B. Martin, A. J. Morris y I.-B. Lee (2006). Adaptive Multivariate Statistical Process Control for Monitoring Time-Varying Process. *Industrial and Engineering Chemistry Research* **45**(9), 3108–3118.
- Chow, E. Y. y A. S. Willsky (1984). Analytical Redundancy and the Design of Robust Failure Detection Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* **7**, 603–614.
- Commault, C., J.-M. Dion, O. Sename y R. Motyein (2002). Observer-Based Fault Detection and Isolation for Structured Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* **47**(12), 2074–2079.
- De Persis, C. y A. Isidori (2001). A Geometric Approach to Nonlinear Fault Detection and Isolation. *IEEE Transactions on Automatic Control* **46**(6), 853–865.

- Dillon, W. y M. Goldstein (1984). *Multivariate Analysis, Methods and Applications*. Jhon Wiley. New York.
- Frank, P. M. y X. Ding (1994). Frequency Domain Approach to Optimally Robust Residual Generation and Evaluation for Model Based Fault Diagnosis. *Automatica* **30**(5), 789–804.
- Frisk, E. y J. Åslund (2005). Lowering Orders of Derivatives in Non-Linear Residual Generation using Realization Theory. *Automatica* **41**(10), 1799–1807.
- Gallagher, N. B., B. M. Wise, S. W. Butler, D. D. White y G. G. Barna (1997). Development and Benchmarking of Multivariate Statistical Process Control Tools for a Semiconductor Etch Process: Improving Robustness Through Model Updating. En: *Proceedings of the International Symposium on Advanced Control of Chemical Processes, ADCHEM'97*. Banff, Canada. pp. 78–83.
- Gentil, S., J. Montmain y C. Combastel (2004). Combining FDI and AI Approches within Causal Model Based Diagnosis. *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics* **34**(5), 2207–2221.
- Gentil, S. *et al.* (2007). *Supervision des Procédés Complexes*. Lavoisier. Paris, France.
- Gertler, J. (1998). *Fault Detection and Diagnosis in Engineering Systems*. Marcel Dekker. New York.
- Gertler, J., W. Li, Y. Huang y T. J. McAvoy (1999). Isolation Enhanced Principal Component Analysis. *AIChE Journal* **45**(2), 323–334.
- Gertler, J. y J. Cao (2005). Design of Optimal Structured Residuals from Partial Principal Component Models for Fault Diagnosis in Linear Systems. *Journal of Process Control* **15**(5), 585–603.
- Gertler, J. y T. McAvoy (1997). Principal Component Analysis and Parity Relations - A Strong Duality. En: *Proceedings of the 3th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes, SAFEPROCESS'97*. Hull, UK. pp. 837–842.
- Hair, J. F., A. Rolph, T. Tonald y B. William (1999). *Análisis Multivariante*. Prentice Hall. España.
- Hoskins, J. C., K. M. Kaliyur y D. M. Himmelblau (1997). Fault Diagnosis in Complex Chemical Plants using Artificial Neural Networks. *AIChE Journal* **37**(1), 137–141.

- Isermann, R. (1994). Integration of Fault Detection and Diagnosis Methods. En: *Proceedings of the 2nd IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes, SAFEPROCESS'94*. pp. 597–612.
- Isermann, R. (2006). *Fault Diagnosis Systems - An Introduction from Fault Detection to Fault Tolerance*. Springer Verlag. Germany.
- Isermann, R. y P. Ballé (1996). Trends in the Application of Model Based Fault Detection and Diagnosis of Technical Processes. En: *Proceedings of the IFAC 13th Triennial World Congress*. San Francisco, USA. pp. 1–12.
- Jackson, J. E. (1991). *A Users Guide to Principal Components*. John Wiley. New york.
- Johnson, R. A. y D. W. Wichan (1982). *Applied Multivariate Statistical Analysis*. Prentice Hall. New Jersey.
- Kailath, T., A. H. Sayed y B. Hassibi (2000). *Linear Estimation*. Prentice Hall. New Jersey.
- Kourti, T. (2002). Process Analysis and Abnormal Situation Detection: From Theory to Practice. *IEEE Control Systems Magazine* **22**(5), 10–25.
- Kourti, T. y J. F. MacGregor (1996). Multivariate SPC Methods for Process and Product Monitoring. *Journal of Quality Technology* **28**(4), 409–427.
- Kresta, J. V., J. F. MacGregor y T. E. Marlin (1991). Multivariate Statistical Monitoring of Process Operating Performance. *The Canadian Journal of Chemical Engineering* **69**, 35–47.
- Krysander, M. y M. Nyberg (2002). Structural Analysis Utilizing MSS Sets with Application to a Paper Plant. En: *Proceedings of 13th International Workshop on Principles of Diagnosis, DX'02*. Semmering, Austria.
- Krzanowski, W. J. (1990). *Principles of Multivariate Analysis: A User's Perspective*. Oxford Science Publications. New york.
- Ku, W., R. H. Storer y Ch. Georgakis (1995). Disturbance Detection and Isolation by Dynamic Principal Component Analysis. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems* **30**(1), 179–196.
- Li, W., H. H. Yue, S. Valle-Cervantes y S. J. Qin (2000). Recursive PCA for Adaptive Process Monitoring. *Journal of Process Control* **10**(5), 471–486.

- Ljung, L. (1999). *System Identification: Theory for the User*. Prentice Hall. New Jersey.
- Lorentzen, T., M. Blanke y H. Niemann (2003). Structural Analysis. A Case Study of the Romer Satellite. En: *Proceedings of the 5th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes, SAFEPROCESS'03*. Washington, USA. pp. 187–192.
- Lunze, J. y F. Schiller (1999). An Example of Fault Diagnosis by Means of Probabilistic Logic Reasoning. *Control Engineering Practice* **7**, 271–278.
- MacGregor, J. F. (2003). Multivariate Statistical Approaches to Fault Detection and Isolation. En: *Proceedings of the 5th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes, SAFEPROCESS'03*. Washington, USA. pp. 579–584.
- Martin, E., J. Morri y S. Lane (2002). Monitoring Process Manufacturing Performance. *IEEE Control Systems Magazine* **22**(5), 26–39.
- Massoumnia, M., G. Verghese y A. Willsky (1989). Fault Detection and Identification. *IEEE Transactions on Automatic Control* **34**(3), 316–321.
- Mina, J., C. Verde, M. Sanchez-Parra y F. Ortega (2007). Gas Turbine Faults Isolation using Principal Components Structured Models. En: *Proceedings of the 5th Workshop on Advanced Control and Diagnosis, ACD'07*. Grenoble, France.
- Mina, J. y C. Verde (2005a). Fault Detection Using Dynamic Principal Component Analysis and Statistical Parameters Estimation. En: *Proceedings of the Congreso Anual de la Asociación de México de Control Automático, AMCA'05*. Morelos, México.
- Mina, J. y C. Verde (2005b). Fault Detection Using Dynamic Principal Component Analysis by Average Estimation. En: *Proceedings of the 2nd International Conference on Electrical and Electronics Engineering and XI Conference on Electrical Engineering, ICEEE-CIE'05*. D.F., México. pp. 374–377.
- Mina, J. y C. Verde (2006). Proceso de Estandarización Adaptable para Detección de Fallas en Sistemas MIMO. En: *Proceedings of the Congreso Anual de la Asociación de México de Control Automático, AMCA'06*. D.F., México. pp. 298–303.
- Mina, J. y C. Verde (2007a). Dynamic Principal Component Analysis with Adaptive Standardization for Fault Detection in MIMO Systems. En: *Advances in Dynamics, Instrumentation and Control Vol. II - Limited Edition*. World Scientific Publishing Co.. pp. 165–174.

- Mina, J. y C. Verde (2007b). Fault Detection for Large Scale Systems using Dynamic Principal Component Analysis with Adaptation. *International Journal of Computers, Communication and Control* **II**(2), 185–194.
- Mina, J. y C. Verde (2007c). Fault Detection for MIMO Systems Integrating Multivariate Statistical Analysis and Identification Methods. En: *Proceedings of the American Control Conference, ACC'07*. New York, USA. pp. 3234–3239.
- Negiz, A. y A. Çinar (1997). Statistical Monitoring of Multivariate Dynamic Processes with State-Space Models. *AIChE Journal* **43**(8), 2002–2020.
- Norvilas, A., A. Negiz, J. DeCicco y A. Çinar (2000). Intelligent Process Monitoring by Interfacing Knowledge-based Systems and Multivariate Statistical Monitoring. *Journal of Process Control* **10**(4), 341–350.
- Nyberg, M. (2006). A Generalization of the GDE Minimal Hittings-Set Algorithm to Handle Behavioral Modes. En: *Proceedings of the 14th International Workshop on Principles of Diagnosis, DX'2006*. Spain.
- Patton, R. J., y J. Chen (1991). Detection of Faulty Sensors in Aero Jet Engine Systems using Robust Model-Based Methods. En: *IEE Colloquium on Condition Monitoring for Fault Diagnosis*. pp. 2/1–2/22.
- Patton, R. J., P. M. Frank y R.-N. Clark (2000). *Issues of Fault Diagnosis for Dynamic Systems*. Springer-Verlag. London.
- Pioviso, M. (2002). Award-Winning Control Applications - Industrial Process Monitoring. *IEEE Control Systems Magazine* **22**(6), 12–16.
- Raich, A. y A. Çinar (1996). Statistical Process Monitoring and Disturbance Diagnosis in Multivariable Continuous Processes. *AIChE Journal* **42**(4), 995–1009.
- Russell, E. L., L. H. Chiang y R. D. Braatz (2000). Fault Detection in Industrial Processes using Canonical Variate Analysis and Dynamic Principal Component Analysis. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems* **51**(1), 81–93.
- Simani, S. y R. J. Patton (2002). Model Based Data Driven Approach to Robust Fault Diagnosis in Chemical Processes. En: *Proceedings of the IFAC 15th Triennial World Congress*. Barcelona, Spain.

- Soderstrom, T. y P. Stoica (1989). *System Identification*. Prentice Hall. UK.
- Staroswiecki, M. y G. Comtet-Varga (2001). Analytical Redundancy Relations for Fault Detection and Isolation in Algebraic Dynamic Systems. *Automatica* **37**(5), 687–699.
- Tracy, N. D., J. C. Young y R. L. Mason (1992). Multivariate Control Charts for Individual Observations. *Journal of Quality Technology* **24**(2), 88–95.
- Venkatasubramanian, V., R. Rengaswamy, K. Yin y S.-N. Kavuri (2003a). A Review of Process Fault Detection and Diagnosis Part I: Quantitative Model-Based Methods. *Computers and Chemical Engineering* **27**(3), 293–311.
- Venkatasubramanian, V., R. Rengaswamy, S.-N. Kavuri y K. Yin (2003b). A Review of Process Fault Detection and Diagnosis Part III: Process History Based Methods. *Computers and Chemical Engineering* **27**(3), 327–346.
- Venkatasubramanian, V., R. Rengaswamy y S.-N. Kavuri (2003c). A Review of Process Fault Detection and Diagnosis Part II: Qualitative Models and Search Strategies. *Computers and Chemical Engineering* **27**(3), 313–326.
- Verde, C., S. Gentil y M. Sanchez-Parra (2007). Causality of the Residual Structure. En: *Proceedings of the 3rd IFAC Symposium on System, Structure and Control, SSSC'07*. Foz do Iguassu, Brazil.
- Verde, C. y J. Mina (2007). Aislamiento de Fallas con Modelos Estructurados de Componentes Principales. En: *Proceedings of the Congreso Anual de la Asociación de México de Control Automático, AMCA '07*. Monterrey, N. L., México.
- Yoon, S. y J. F. MacGregor (2000). Statistical and Causal Model-Based Approaches to Fault Detection and Isolation. *AIChE Journal* **46**(9), 1813–1824.