



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

**“ANÁLISIS DE ALTERNATIVAS PARA LA ESTIMACIÓN DE LA
CARGA HIDRÁULICA UTILIZANDO MÉTODOS
GEOESTADÍSTICOS EN ESPACIO Y ESPACIO-TIEMPO”**

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

DOCTOR EN INGENIERÍA

INGENIERÍA CIVIL-APROVECHAMIENTOS HIDRÁULICOS

P R E S E N T A :

EDGAR YURI MENDOZA CÁZARES

TUTOR:

GRACIELA HERRERA ZAMARRÓN

CAMPUS MORELOS, MÉXICO,

2008

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Carlos Cruickshank Villanueva

Secretario: Dr. Jaime Collado Moctezuma

1er. Vocal: Dra. Graciela Herrera Zamarrón

2do. Vocal Dr. Carlos Fuentes Ruíz.

3er. Vocal: Dr. Felipe I. Arreguín Cortés

1er. Suplente Dr. Martín A. Díaz Viera.

2do. Suplente: Dr. Abel Felipe Hernández Ochoa.

Lugar o lugares donde se realizó la tesis:

Jiutepec, Morelos.

TUTOR DE TESIS

Dra. Graciela Herrera Zamarrón

FIRMA

Amar, amar, amar, amar siempre, con todo
el ser y con la tierra y con el cielo,
con lo claro del sol y lo oscuro del lodo:
amar por toda ciencia y amar por todo anhelo.

Y cuando la montaña de la vida
Nos sea dura y larga y alta y llena de abismos,
Amar la inmensidad que es de amor encendida.

Rubén Darío (1905)

Dedicatoria

A Silvia, Edgar Omar y Dacia Valeria, con su compañía el camino ha sido más emocionante.

Agradecimientos

A mi asesora, bajo su supervisión me hizo ver que la perseverancia obsequia frutos. Para mí ha representado a una líder a quien seguir;

De manera especial al Dr. Martín Díaz quien me inició en el campo de la geoestadística;

A los integrantes del jurado quienes se mostraron siempre críticos y con el ánimo de ayudar a que siguiera creciendo en este proceso de aprendizaje;

A la Comisión Nacional del Agua quien me dio su apoyo para seguir mi meta;

Al CONACYT quien otorgó la beca para efectuar mis estudios de Doctorado;

Al la DEGEP quien otorgó una beca complemento en mi estancia en la DEPFI;

A la DEPFI quien otorgó el apoyo para que asistiera a los congresos internacionales que fueron parte motivante en mi formación;

A mis amigos y colegas del IMTA con quienes conviví en franca camaradería;

Mis padres, Ramón y María, y hermanas, Adriana y Olivia, que siempre han estado presentes en los momentos de encanto.

CONTENIDO

1.	INTRODUCCIÓN.....	1
1.1	OBJETIVO Y LINEA DE INVESTIGACIÓN EN EL PROYECTO DOCTORAL.....	6
2.	ESTADO DEL ARTE.....	8
2.1.	DESCRIPCIÓN DE PATRONES ESPACIALES UNIVARIADOS.....	11
2.2	DESCRIPCIÓN DE PATRONES ESPACIALES MULTIVARIADOS....	18
2.3.	VARIACIÓN TEMPORAL.....	22
2.3.1.	Análisis de series de tiempo.....	23
2.4.	ESPACIO-TIEMPO.....	24
2.5.	LINEAS DE INVESTIGACIÓN.....	25
3.	GEOESTADISTICA.....	29
3.1.	CONCEPTO DE FUNCIÓN ALEATORIA.....	29
3.1.1.	Función aleatoria estacionaria.....	31
3.1.2.	Función aleatoria intrínseca.....	32
3.1.1.	Función aleatoria no intrínseca.....	32
3.2.	FUNCION ALEATORIA ESPACIO-TIEMPO.....	32
3.3.	DETRMINACIÓN DE LA ESTRUCTURA DE LOS DATOS.....	34
3.3.1.	Semivariograma muestral univariado.....	34
3.3.2.	Semivariograma cruzado muestral.....	36
3.3.3.	Semivariograma espacio-tiempo muestral.....	36
3.3.4.	Tipos de semivariogramas espacio-tiempo teóricos.....	37
3.4	AJUSTE DEL SEMIVARIOGRAMA MUESTRAL.....	43
3.4.1.	Método de ajuste del semivariograma muestral espacial.....	43
3.4.2.	Ajuste semivariograma muestral bivariado.....	44
3.4.3.	Ajuste semivariograma muestral espacio-tiempo.....	45
3.5	MÉTODO DE KRIGEADO.....	45
3.5.1.	Krigeado ordinario.....	46
3.5.2.	Cokrigeado ordinario.....	48
3.5.3	Multivariada de la variable aleatoria.....	50
3.5.4.	Vectores de series de tiempo (ST).....	51
3.5.5.	Krigeado espacio-tiempo.....	51
3.6.	ANÁLISI DE VALIDACIÓN CRUZADA.....	54
3.6.1.	Error medio.....	54
3.6.2.	Error cuadrático medio.....	55
3.6.3	Error medio estándar.....	55
4.	BOSQUEJO DE LA HIDROGEOLOGÍA DEL VALLE QUERÉTARO-OBRAJUELO.....	57
4.1.	HIDROLOGÍA.....	57
4.2.	INTEGRACIÓN GEOLOGICA Y GEOFÍSICA.....	58
4.3.	MODELO CONCEPTUAL.....	61
5.	ANÁLISI DE LA CARGA HIDRÁULICA, UNIVARIADO.....	66
5.1.	CARGA HIDRÁULICA, 1993.....	66
5.1.1.	Análisis preliminar.....	66
5.1.2.	Análisis exploratorio.....	67

5.1.3.	Análisis estructural.....	72
5.1.4.	Validación cruzada.....	74
5.1.5.	Estimación de la carga hidráulica.....	75
5.2.	CARGA HIDRÁULICA, 1995.....	79
5.2.1.	Análisis preliminar.....	79
5.2.2.	Análisis exploratorio.....	79
5.2.3.	Análisis estructural.....	83
5.2.4.	Validación cruzada.....	84
5.2.5.	Estimación espacial.....	85
5.3.	CARGA HIDRÁULICA, 1999.....	88
5.3.1.	Análisis preliminar.....	88
5.3.2.	Análisis exploratorio.....	88
5.3.3.	Análisis estructural.....	92
5.3.4.	Validación cruzada.....	93
5.3.5.	Estimación espacial.....	94
5.4.	DATOS DEL MDE.....	97
5.4.1.	Análisis preliminar.....	97
5.4.2.	Análisis exploratorio.....	98
5.4.3.	Análisis estructural.....	102
5.4.4.	Validación cruzada.....	103
6.	ANÁLISIS MULTIVARIADO ESPACIAL DE LA CARGA HIDRÁILICA, UTILIZANDO UN MODELO DIGITAL DE ELEVACIÓN COMO VARIABLE SECUNDARIA.....	105
6.1.	ANÁLISIS DE DISPERSIÓN.....	105
6.1.1.	Coeficiente de codispersión.....	107
6.1.2.	Coeficiente de autokrigeabilidad.....	110
6.2.	ANÁLISIS ESTRUCTURAL.....	111
6.3.	VALIDACIÓN CRUZADA.....	113
6.4.	ESTIMACIÓN ESPACILA.....	114
6.5.	DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS.....	119
6.6.	CONCLUSIÓN.....	119
7.	ANÁLISI MULTIVARIADO ESPACIO-TIEMPO, EN BASE A LECTURAS ESPACIALES TEMPORALMENTE CORRELACIONADAS.....	121
7.1.	ANÁLISIS ESTRUCTURAL.....	122
7.2.	VALIDACIÓN CRUZADA.....	126
7.3.	ESTIMACIÓN ESPACILA.....	128
7.4.	DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS.....	135
7.5.	CONCLUSIÓN.....	141
8.	ANÁLISIS ESPACIO-TIEMPO DE LA CARGA HIDRÁULICA, CONCEPTO DE FUNCIÓN ALEATORIA ESPACIO-TIEMPO.....	143
8.1.	ESTADÍGRAFOS EN ESPACIO.....	144
8.2.	ESTADÍGRAFOS EN EL TIEMPO.....	149
8.3.	ESTIMACIÓN DE LA DERIVA.....	152
8.4.	ANÁLISIS ESTRUCTURAL.....	155
8.4.4.	Espacio-temporal.....	155
8.5.	VALIDACIÓN CRUZADA.....	160
8.6.	ESTIMACIÓN ESPACIO-TEMPORAL.....	164

8.7.	ESTIMACIÓN EN TIEMPO.....	171
8.8	DISCUSIÓN DE RESULTADOS.....	174
8.9	CONCLUSIÓN.....	180
9.	COMPARACIÓN DE LAS TÉCNICAS DE KRIGEADO ESPACIO- TEMPORALES.....	183
9.1.	FUNCIÓN DE SEMIVARIOGRAMA ESPACIO-TIEMPO.....	183
9.2.	EL MODELO SEPARABLE Y EL MODELO LINEAL DE CORREGIONALIZACIÓN.....	184
9.3.	RELACIÓN ENTRE LAS TÉCNICAS DE KRIGEADO ESPACIO- TIEMPO Y MULTIVARIADO DE FUNCIONES ALEATORIAS “COKRIGEADO”.....	185
9.4.	COMPARACIÓN DE LAS TÉCNICAS ESPACIO-TEMPORALES UTILIZANDO LA VALIDACIÓN CRUZADA.....	188
9.5.	COMENTARIOS GENERALES DE LOS SISTEMAS DE KRIGEADO ESPACIO-TIEMPO.....	191
9.6	CONCLUSIONES.....	194
10.	CONCLUSIONES, COMENTARIOS Y CONTINUACIÓN DEL TRABAJO.....	196
11.	BIBLIOGRAFIA.....	201

Resumen

El tema central de este trabajo es la aplicación y análisis de metodologías para determinar la carga hidráulica conceptualizándola como una variable regionalizada. Las técnicas aquí tratadas se conocen como técnicas geostatísticas.

Las técnicas propuestas se aplican para los casos espacial univariado, bivariado, así como para los casos espacio-tiempo en sus dos componentes multivariado y funciones aleatorias espacio-temporales.

Las técnicas son aplicadas a las cargas del acuífero de Querétaro-Obrajuelo y los resultados son comparados bajo el criterio de validación cruzada. Cada técnica es tratada con la misma metodología para después comparar sus resultados de manera cuantitativa y cualitativa. En cada caso se explican las limitaciones de las técnicas así como sus beneficios y posibles aplicaciones prácticas.

La contribución de este trabajo radica para el caso espacial en la utilización de un modelo digital de elevación (MDE) para la estimación de la carga hidráulica en zonas donde el nivel freático es una réplica de la topografía del terreno. Aunque existen limitaciones conceptuales para la buena aplicación de esta técnica se considera que es ventajosa al aplicarse en acuíferos que cuentan con poca información.

En el caso espacio-tiempo la contribución radica en la manera como se integra la información espacial y temporal, ya sea para el caso multivariado donde se utilizan diversos planos, que se consideran temporalmente correlacionados, así como las series que están espacialmente correlacionadas.

En el caso de funciones aleatorias que integran la información espacio-tiempo, al considerar el tiempo como un eje coordenado más, la función de semivariograma de superficie es modelada con un modelo producto suma y el semivariograma muestral o de superficie es ajustado en los diferentes espacios y tiempos. Los resultados son validados con el método de validación cruzada y la estimación se hace utilizando un algoritmo de krigado con la función de semivariograma producto suma.

Los resultados espacio-temporales son comentados y comparados sugiriendo las ventajas y desventajas y comentando bajo qué condiciones cada método debe ser aplicado.

Las técnicas son aplicadas a un mismo caso con la finalidad de ilustrar sus bondades.

Abstract

The objective of this work is the application and the analysis of some methodologies to determine the hydraulic head, conceptualized like a random variable. The techniques are known geostatistics.

The technique can be applied for univariate, bivariate case, or in space-time in the conceptual viewpoint of spatiotemporal random function or the multiple Random Function approach.

All the technique has been applied to determine the hydraulic head of Queretaro - Obrajuelo aquifer. The results are compared with the cross validation method. Each technique follows the same methodology with the idea of comparing the results by quantitative and qualitative object. In each case, we discuss the advantages and disadvantages and future applications.

The contribution of this work focuses, in the spatial case, in the application using collateral information from a digital elevation model (DEM) to estimate the water table in areas where phreatic surface is a subdued replica of the land surface. We detected limitations in this technique but recommend it in cases there isn't much information.

In the space-time, the contribution is in the way that we applied in integrated manner the information we have in space and time, either in the case multivariate where the spatiotemporal RF is modeled as a collection of a finite number of temporally correlated space RFs, or a set of spatially correlated Time Series (TS), depending on which domain (space or time) is more densely informed.

In the joint space-time framework, we consider the time like another axes, the spatial-temporal variogram surface are modeled with one product-sum model and fixed in the differences space and time lags. The results are validated with a cross validation method and the estimation we used is a space-time kriging.

All the space time results were compared and we comment the advantages and disadvantages. The techniques are applied at the same case with the purpose of showing the benefits.

1. INTRODUCCIÓN.

El desarrollo de los modelos y métodos estadísticos ha ido ligado al deseo de estudiar aplicaciones específicas dentro de diversos ámbitos científicos. El presente trabajo también surgió con el objetivo de resolver diversos problemas que se plantean dentro del ámbito de la hidrología subterránea, todos ellos ligados con un conjunto de datos y con una aplicación muy concreta: la estimación de la carga hidráulica. La estimación de la carga hidráulica es uno de los problemas que enfrenta todo hidrogeólogo, el contar con metodologías capaces de representar de mejor manera el fenómeno. Particularmente el tipo de técnicas comentadas en este trabajo basan su teoría en las variables regionalizadas que en su conjunto son genéricamente reconocidas con el nombre de geoestadística.

La aplicación de técnicas geoestadísticas para la determinación de la carga hidráulica es un campo que se ha explorado desde los años setentas, sin embargo, aunque se han propuesto, validado y corregido varios tipos de técnicas, su aplicación e implementación no ha sido agotada.

La motivación de este trabajo de investigación radica en la inquietud de trabajar con una herramienta que analice de forma estadística los datos colectados en las campañas piezométricas pero no solo trabajar con la variabilidad espacial que presentan, también con la integración de las componentes espacial y temporal; así mismo, con el auxilio de modelos digitales que proporcionen información secundaria, con la que se logre de manera integrada una mejor estimación.

Es común que los hidrogeólogos analicen la información piezométrica de forma separada, ya sea bajo el punto de vista espacial o temporal; Sin embargo pocos son los trabajos que integran esta información rica en espacio y tiempo, lo que hace que estos análisis sean

limitados y que no se explote toda la información que contienen los datos que por lo general son caros en su generación, mantenimiento, pre-procesamiento y post-procesamiento.

Los motivos anteriores son los que impulsan a proponer en esta tesis el uso de una metodología que de forma integrada explote al máximo la información disponible y como resultado, de faltar más información, se tengan criterios cuantitativos para proceder a realizar los planteamientos de diseño para obtenerla.

Se seleccionó la carga hidráulica debido a que es una variable que con mayor número y frecuencia se muestrea, sin que esto limite la técnica ya que la teoría de las variables regionalizadas contempla todas las variables o parámetros que tengan una estructura espacial y tengan una representación en el espacio, por lo que las técnicas que se analizan se podrían aplicar a otras variables que de forma frecuente el hidrogeólogo necesita estimar (*e.i.* permeabilidad, transmisividad, coeficiente de almacenamiento, lluvia, porosidad, concentración de un contaminante etc.).

Retomando la importancia de contar con técnicas que estimen la distribución de la carga hidráulica, puedo decir que este trabajo no solo toma los preceptos planteados por Matheron (1963) o los aplicados en el campo de la geología por Journel y Huijbregts (1978) o en el caso de la hidrología subterránea por Delhomme (1978), si no que los toma como base y los amplía llevándolos hasta el límite del campo del conocimiento al aplicar las técnicas multivariadas en espacio y espacio-tiempo, por lo que las aportaciones de este trabajo radican en la metodología planteada. La utilidad de estas herramientas, como la misma geoestadística, es práctica partiendo del análisis de los datos, su distribución espacial, espacio-temporal, su correlación y estimación. Estas técnicas son en esencia los instrumentos de análisis para obtener criterios que el hidrogeólogo evalúa bajo su óptica,

conocimiento y experiencia del fenómeno, con la finalidad de tener un punto de vista cuantitativo y cualitativo para efectuar su decisión.

Ya he mencionado que el conjunto de las técnicas expuestas, en este trabajo, conforman una metodología que no debemos ver como herramientas separadas, si no como técnicas que serán de utilidad para casos específicos, por ejemplo cuando se tiene la necesidad de estimar de mejor manera la carga hidráulica en zonas donde contamos con una buena definición de la superficie del terreno, o donde se cuenta con una base piezométrica con lecturas mensuales o anuales, también donde se tiene un amplio monitoreo en el tiempo y una pobre representación en el espacio.

Las técnicas multivariadas en el espacio son útiles para los primeros casos y las técnicas espacio-tiempo para los subsecuentes. Todo está en la decisión de qué tipo de información se tiene y en qué dominio está mejor monitoreada, en el espacio o el tiempo.

Como he mencionado mi interés por desarrollar e implementar esta metodología es para resolver problemas prácticos, por lo que los casos expuestos en los subsecuentes capítulos corresponden a un sistema acuífero real, donde la variabilidad espacial y temporal representan las limitaciones con que los hidrogeólogos se enfrentan, poca información espacial, o temporal, bases de datos que contienen muestreos agrupados o con información que refleja un sistema multicapa con diferentes niveles de la carga hidráulica, bases de datos con datos anómalos o puntos de interés que no son muestreados de forma sistemática y periódica. Así mismo bases de datos que reflejan una tendencia en el espacio o ciclicidad en el tiempo.

Por esta razón el interés es mostrar la aplicación de estas técnicas en casos de sistemas reales, así también las herramientas están basadas en programas que ya han sido probados, en otros campos del conocimiento, y en el caso espacio-temporal su implementación en este

trabajo. Por lo que se utilizo y complemento los programas que de forma continua se citan en la literatura, siendo las de mayor distribución y aplicación las librerías del GSLIB, pero no dejando a un lado programas relevantes y prácticos de estimación de semivariograma, espacial, espacio-temporal, y de cokrigado, como son GEOESTAD, G+, GSTAD, aplicaciones en MATLAB o en el mismo Surfer, en su sección de geoestadística.

El presente trabajo está conformado de la siguiente forma, en el capítulo 2 se reseña el estado del arte en las técnicas geoestadísticas aplicadas en el campo de la hidrogeología subterránea, y en otros campos de las ciencias de la tierra, y cuya concepción ha marcado la vanguardia en la investigación sobre todo en el contexto espacio-tiempo.

El capítulo 3 trata de los conceptos básicos, de geostadística, que serán aplicados durante esta tesis por lo que los lectores enterados en temas geoestadísticos pueden dejar de leer. Mi interés en éste es proporcionar una visión personal de las diferentes ideas que han postulado los investigadores en los diversos campos del conocimiento. Con esto quiero resaltar que el lector al consultar la literatura especializada en geoestadística clásica, encontrará que son las mismas ideas, principalmente las que plantean las técnicas univarida y multivariada, sin embargo, el desarrollo espacio-tiempo es nuevo para la hidrogeología, así como en la misma geoestadística, que ha planteado como una nueva línea de investigación que ha despertado el interés de los investigadores. Por lo que uno de los mejores impulsores “Andre Journel” la ha denominado como geoestadística moderna. En este contexto el capítulo 3 “geoestadística” pretende resumir las bases teóricas que el lector no encontrará de forma integrada en los libros clásicos de geoestadística. Así mismo el capítulo se refuerza con las citas más relevantes y que están relacionadas con la reseña histórica que muestro en el estado del arte (capítulo 2).

El capítulo 4 tiene como finalidad presentar el modelo conceptual del acuífero Querétaro-Obrajuelo, en él se define la geología, morfología, la estructural, y la hidrogeología que en conjunto definen el modelo conceptual. Este capítulo es importante debido a que dependiendo del marco conceptual se hacen las hipótesis necesarias para sustentar la aplicación de las técnicas geoestadísticas.

En los capítulos subsecuentes se presentan las técnicas que son útiles en el caso espacial multivariado, multivariado de funciones aleatorias y funciones aleatorias espacio-temporales. Por motivos del desarrollo de estas técnicas en los diversos campos del conocimiento se decidió comentar las técnicas en orden de aparición. Por lo que el capítulo 5 trata el desarrollo univariado desglosando punto a punto la metodología aplicada, análisis preliminar, exploratorio y estructural.

En el capítulo 6 se comenta la técnica multivariada espacial, la cual es útil en los casos donde se tiene poca información espacial de la variable carga hidráulica, o primaria, y se cuenta con una segunda fuente de información que presenta una buena correlación espacial. La variable auxiliar o secundaria está bien muestreada en el espacio. La variable primaria cumple con la hipótesis de que el nivel piezométrico es una réplica de subsuelo.

En el capítulo 7, se comenta la técnica multivariada espacio-temporal, en base a lecturas espaciales temporalmente correlacionadas, la cual es útil para aquellos casos donde se cuenta con información del nivel de la carga hidráulica rica en el espacio, en diferentes tiempos.

En el capítulo 8 se trata la técnica espacio-tiempo en similitud al término empleado en la literatura geoestadística “space-time”, siendo esta técnica útil para representar los sistemas que tienen una dinámica donde existen cambios en el espacio y el tiempo.

En el capítulo 9 se presenta la comparación de los resultados que se obtienen de las dos técnicas espacio-temporales, sus diferencias y similitudes. Este capítulo representa en sí una de las necesidades de exploración detectadas en el estado del arte es la aplicación y comparación de las técnicas espacio-tiempo son nuevas en el campo de la hidrogeología.

Por último, en el capítulo 10 se presentan las conclusiones del trabajo así como las líneas de investigación en el futuro.

El lector debe tener en mente que las técnicas expuestas son opciones para el manejo de su información donde se tiene alternativas para enriquecer sus estimaciones y que de forma integrada utilice la información contenida en el espacio o el tiempo. Los comentarios, experimentos y sugerencias son para que tome en cuenta la forma de procesar los datos y una vez que defina qué técnica es la conveniente proceda a realizar sus estimaciones.

1.1. OBJETIVO Y LÍNEA DE INVESTIGACIÓN EN EL PROYECTO DOCTORAL.

El objetivo de esta tesis es la aplicación de las técnicas geoestadísticas para la determinación de la carga hidráulica. La línea de investigación se centra en la estimación multivariada espacial, multivariada espacio-temporal y de las funciones aleatorias espacio-tiempo.

En el caso de la estimación de la carga hidráulica no se tiene referencia de la utilización de la técnica multivariada utilizando modelos digitales de elevación (MDE). La propuesta inicial de Hoeksema et al. (1989) está limitada al número de puntos que cuentan con la elevación del nivel del terreno natural, el utilizar el MDE en lugar del valor del terreno natural, en principio, nos proporciona un mayor número de información que es útil para

estimar el nivel freático. Es importante hacer notar que la aplicación de esta técnica se encuentra restringida a zonas donde el nivel freático es una réplica del nivel topográfico.

Como se documenta en esta tesis la estimación espacio-tiempo tiene dos concepciones, respecto al punto de vista multivariado, no se cuenta con investigación aplicada en la hidrogeología, las aplicaciones documentadas se encuentran en los campos de la edafología y meteorología. Por lo que hace falta documentar esta concepción en el marco geohidrológico.

La investigación multivariada, en la hidrogeología es incipiente por lo que además de documentar éste punto de vista es necesario comparar los resultados con otras técnicas con la finalidad de ver sus ventajas y desventajas así mismo los criterios de aplicación.

En el caso particular de la estimación espacio-tiempo de la carga hidráulica, se tiene que la propuesta original de Rouhani y Hall (1989) no es suficiente para resolver el problema ya que el modelo anisotrópico zonal, no cumple con la condición necesaria de ser positivo definido.

Por lo que propongo efectuar un análisis espacio-tiempo donde la estructura de la variable, carga hidráulica, se estime mediante el análisis por separado de las componentes, espacio y tiempo, de forma similar como se propone en el campo de la meteorología.

El analizar la estimación espacio-temporal, de forma separada en cada una de sus componentes hace posible determinar la contribución de cada una de ellas y partiendo de ésto se proponga el semivariograma espacio-tiempo que lo caracterice. Esta manera de conceptualizar el espacio-tiempo aporta un avance en la estimación que originalmente propuso Rouhani y Hall (1989), y documentaron Myers, y Juornel (1990), Rouhani y Myers (1990).

Las técnicas para estimar el semivariograma espacio-tiempo son de vanguardia como esta documentado en artículos de Bogaert, y Christakos (1997); De Cesare, Myers y Posa (2001

a; 2002); De Iaco, Myers y Posa (2001, 2002, 2003). Técnicas que se han desarrollado en el campo de la meteorología de forma exitosa y en el ámbito de la hidrogeología no se encuentra propuesta alguna.

Por esta razón la línea de investigación se centra en los modelos, separables, que son de mayor utilidad para representar la función de semivariograma espacio-temporal, que caracteriza la carga hidráulica, la investigación contempla la forma de analizar las componentes, los criterios de selección y la conformación del semivariograma espacio-tiempo.

Una ventaja de efectuar la estimación espacial (univariada, multivariada) y espacio-tiempo (en cualquiera de sus componentes) de la carga hidráulica es que el estimador es insesgado y de mínima varianza. La aplicación de estas técnicas nos lleva a realizar una mejor discretización de los parámetros analizados que llevados a un esquema de modelos de flujo subterráneo, hace de ellas una herramienta útil para los interesados en modelación de sistemas de flujo.

2. ESTADO DEL ARTE.

El término “geoestadística” fue acuñado por Matheron en los años 60, ya que describe una serie de herramientas estadísticas, que aplican la teoría de las variables regionalizadas a la estimación de procesos o fenómenos geológicos en el espacio.

Debido al éxito presentado en el área de las ciencias de la tierra, las técnicas geoestadísticas fueron adoptándose en diversos campos del conocimiento por lo que trabajos como los de Neuman (1982), Journel (1986), Goovaerts (1997), Kyriakidis y Journel (1999), y Heuvelink y Webster, (2001), son estados del arte que muestran detalladamente la

evolución de estas técnicas. En la figura 2.1 se muestra las dos grandes ramas en que dividiremos las técnicas geostatísticas.

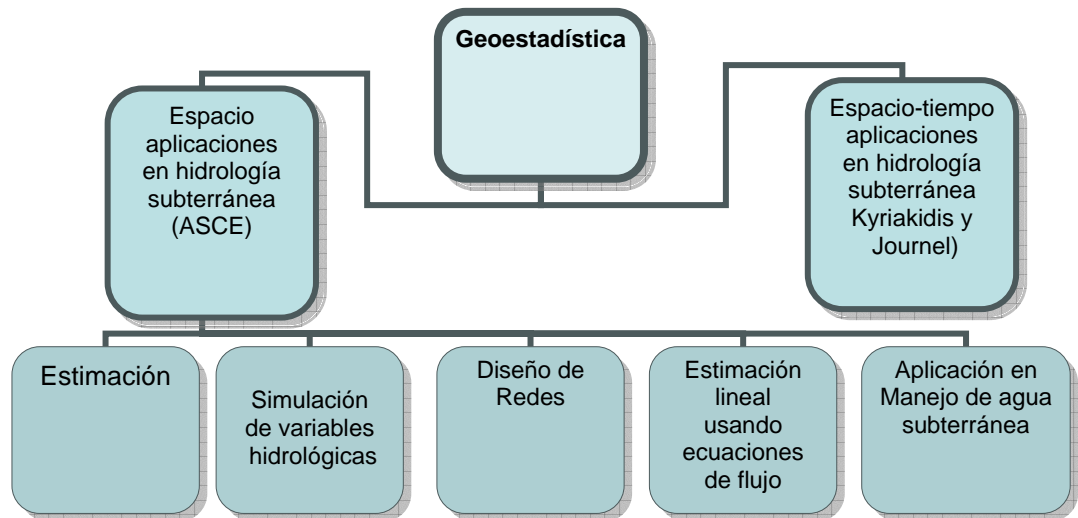


Figura 2.1. La geostatística espacial y espacio-temporal.

Adoptando la clasificación propuesta por el Comité Americano Científico de Ingenieros Civiles (ASCE, 1992 a y 1992 b), los trabajos de geostatística, aplicada en la hidrogeología, se dividen en cinco grandes grupos que son:

1. Estimación
2. Simulación de variables
3. Diseño de redes
4. Estimación multivariada de parámetros
5. Aplicación geostatística en modelos de manejo.

El mantener las categorías que el ASCE propone, para analizar la evolución de las técnicas geostatísticas, representaría una actualización del mismo y conforme el objetivo de este

capítulo es describir los trabajos que aplican las técnicas, geoestadísticas, específicamente para la estimación de la carga hidráulica, sin dejar de mencionar aquellos trabajos clásicos que estimen otros parámetros (i.e., transmisividad, la conductividad hidráulica, la porosidad, el coeficiente de almacenamiento y lluvia), pero que su planteamiento, teórico, muestre una novedad en su concepción geoestadística.

Sin embargo, la clasificación, anterior, enmarca solo las técnicas geoestadísticas empleadas en el marco espacial. La geoestadística ha evolucionado al integrar las variaciones temporales, por lo que la geoestadística moderna conceptualiza la estimación conjunta espacio-tiempo. Una visión más moderna de la interpretación espacio-temporal es expuesta por Kyriakidis y Journel, (1999), aunque su planteamiento no es específico a la hidrogeología sí es más general, por lo que retomando la figura 2.1, en su punto espacio-tiempo, en su parte multivariada se tiene:

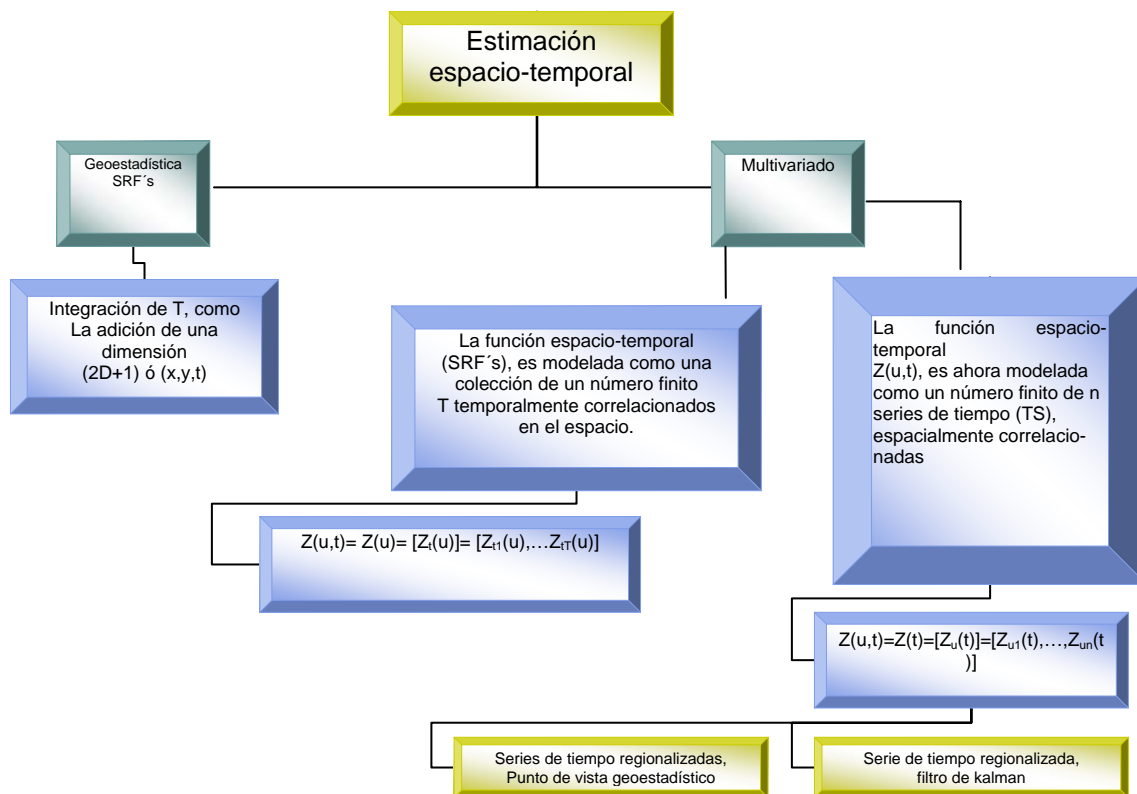


Figura 2.2. Esquema general del concepto espacio-temporal multivariado.

Y respecto a las funciones aleatorias se tiene:

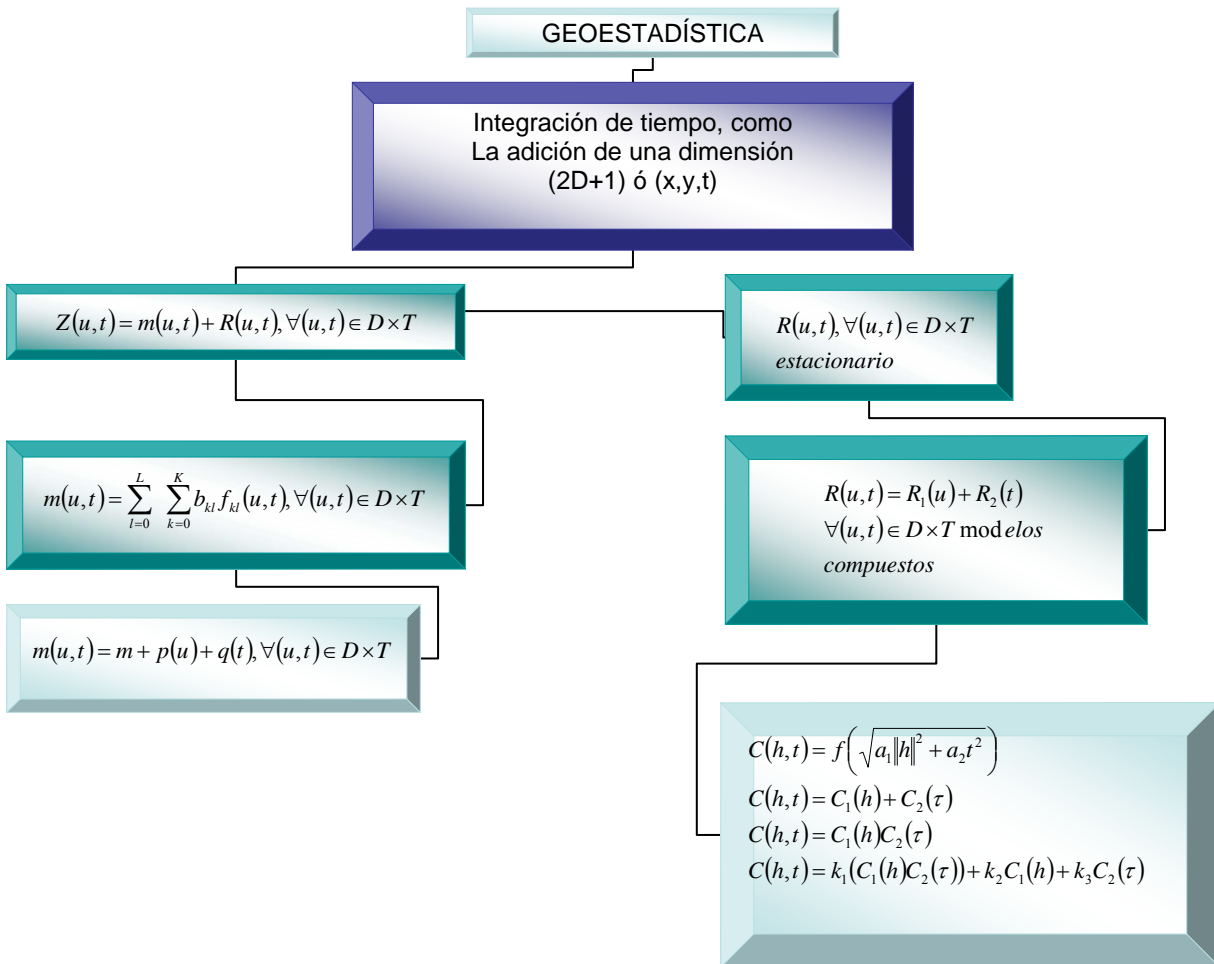


Figura 2.3. Esquema espacio-tiempo de funciones aleatorias.

Para entender en detalle los diagramas, anteriormente presentados, es necesario describir de manera evolutiva la forma en que fueron abordándose los problemas, desde la concepción univariada hasta la más compleja que representa el espacio y tiempo.

2.1. DESCRIPCIÓN DE PATRONES ESPACIALES UNIVARIADOS.

El análisis de los patrones espaciales, típicamente, se inicia con muestreos en un área, estos muestreos presentan un arreglo en una malla de muestreo o un muestreo aleatorio. Cada

observación representa una medida de la variable analizada. Las mediciones de la carga hidráulica representa una medida de la carga hidráulica en una posición (normalmente la posición es representada en un sistema de coordenadas cartesianas que representan el plano o el espacio).

La información continua consiste de valores de la variable z en n posiciones, \mathbf{x}_α , $z(\mathbf{x}_\alpha)$, $\alpha = 1, 2, \dots, n$. El arreglo espacial es representado por la función de semivariograma muestral, $\gamma(h)$, que mide la no semejanza entre los datos conforme se separan por un vector \mathbf{h} (Matheron, 1963).

Webster y Oliver (1992) muestran que para obtener un buen semivariograma se requiere de por lo menos 150 datos y una mayor cantidad de datos cuando se describe una variación de anisotropía (dependiente de la dirección). Lo anterior no significa que las técnicas geoestadísticas no puedan ser aplicadas en pequeños grupos de datos, como es el caso de la hidrogeología, donde se cuenta con un número limitado de mediciones que por lo general no se encuentran uniformemente distribuidos en el espacio.

Las técnicas geoestadísticas basan su análisis en dos fases primordiales que son: la primera es definir de la estructura que presentan los datos y ésta es representada por la función de semivariograma. Los trabajos que se comentan enfocan su investigación a determinar la estructura de los datos aplicados en los sistemas acuíferos y que particularmente tratan con la carga hidráulica. De esta forma destaca el trabajo de Delhomme (1978), que publicó con el nombre de “El Krigado en Hidrociencias”, con el cual se plantea la aplicación de las técnicas univariada, bivariada y de simulación que de forma tradicional se aplicaban en la geología.

Delhomme op. cit., discute que el método de krigeado es poderoso debido a que propone un valor de peso que está en función de la posición que guardan los puntos de medición, con respecto al punto estimado, por lo que se asignan pesos altos a los datos más cercanos al punto medido, siendo congruente con la medición de dos valores cercanos que presentan valores similares. Así mismo hace evidente que es necesario reconocer la varianza espacial del fenómeno.

Los italianos Volpi y Gambolati (1978) presentan una innovación en las técnicas de krigeado, aplicando la técnica de krigeado universal, donde la función de deriva es estimada como una función analítica. Los autores concluyen que la determinación de la tendencia debe ser detectada partiendo de las observaciones de la carga hidráulica y el conocimiento de la física del fenómeno. Este método se aplicó para determinar la carga hidráulica de los sistemas acuíferos de Venecia; los resultados muestran un buen ajuste para la carga piezométrica de la primer capa y concluyen que el método es flexible y poderoso considerando los pocos registros de medición (véase Gambolati y Volpi, 1979 a y b; Volpi y Gambolati, 1979).

A diferencia de la técnica anterior, Aboufirassi y Mariño (1983) aplican la técnica de krigeado universal en el acuífero de Souss. Sus resultados describen que el semivariograma se incrementa rápidamente, de igual manera que se incrementa la ínter distancia (**h**), por lo que proponen eliminar el efecto de la deriva, calculando el semivariograma en la dirección perpendicular al flujo, que es la dirección con menor efecto de la deriva. Este criterio ha sido muy criticado, por los expertos, debido a que la hipótesis fundamental del krigeado universal es que se conoce el semivariograma de la componente estocástica, que en la práctica no sólo no se conoce sino que no puede ser estimado directamente a partir de los

datos pues ello requeriría conocer la deriva. La única alternativa es calcularlo indirectamente (Samper y Carrera, 1990).

La propuesta de Aboufirassi y Mariño de calcular el semivariograma en la dirección en que la variable regionalizada sea estacionaria restringe el método sólo al alcance donde se considera estacionario, es decir, si en una dirección la deriva es nula en todo el medio, se puede calcular el semivariograma a lo largo de dicha dirección y luego es utilizado en todas las direcciones, suponiendo que el semivariograma es isotrópico. Obviamente este enfoque está limitado a los casos en que sea cierta la hipótesis, de deriva nula en una dirección, y que además se disponga de datos suficientes para poder estimar el semivariograma empleando solo parejas de puntos orientados paralelamente a la dirección estacionaria (Samper y Carrera, 1990, página 163).

Una alternativa de obtener el semivariograma, cuando existe presencia de deriva, es trabajar con los residuales. La propuesta de Neuman y Jacobson (1984), se basa en aplicar la técnica de krigeado residual, proponiendo que el semivariograma sea calculado por un proceso iterativo de regresión. El método propone ajustar una deriva por mínimos cuadrados, al calcular el semivariograma de los residuos, de forma iterativa se obtiene un semivariograma acotado.

La novedad de este método radica en una primer fase que realiza una búsqueda sistemática del modelo de tendencia que produzca residuos estacionarios, es decir, supone conocido el orden de la deriva, ajusta mediante mínimos cuadrados la deriva, calcula los residuos y se estima el modelo del semivariograma de los residuos; estos pasos los realiza de forma cíclica incrementando el orden del modelo de tendencia hasta que el semivariograma de los residuos sea estacionario (Díaz, 2002).

Los autores confirman que es más seguro utilizar su metodología en vez de obtenerlo de la manera heurística, prueba y error, que se utiliza de forma tradicional. Sin embargo, Gambolati y Galeati (1987) discuten la técnica iterativa de Neuman y Jacobson, puntualizando que la técnica no mejora las estimaciones de krigado, ya que la decisión final al seleccionar el semivariograma es después de hacer la validación cruzada seleccionando aquel modelo que presente un menor error. Para ejemplificar lo anterior el autor, aplica la técnica en el acuífero de Avra, mismo donde aplica Neuman y Jacobson su método iterativo, obteniendo resultados similares.

Los investigadores Samper y Carrera (1990), comparan la metodología propuesta por Neuman y Jacobson en la estimación del semivariograma, concluyendo que los resultados de krigado, son parecidos por lo que no se justifica el adoptar este proceso, debido a que es más costoso en tiempo de cómputo.

Las citas anteriores versan en la manera más eficiente de determinar el semivariograma muestral. En forma práctica puedo comentar que el método utilizado por Volpi y Gambolati es eficiente, sin embargo, la forma en que determinan la deriva, $m(x)$, está particularizada al caso en cuestión, Acuífero de Venecia, por lo que el ajuste por mínimos cuadrados es eficiente para después trabajar con los residuales y calcular de éstos el semivariograma muestral de los residuales.

El método consiste en suponer conocida la forma de la deriva en base a razonamientos físicos, ajustar por mínimos cuadrados ordinarios la deriva de los datos medidos, calcular los residuales, calcular el semivariograma experimental de los residuos y proceder a ajustar el semivariograma teórico, realizar el krigado ordinario de los residuos utilizando el semivariograma muestral de los residuales y obtener el valor de krigado de la variable en el punto no muestreado, $Z^*(x_0)$, como la suma de los valores de la deriva, $m(x)$, calculada

por el método de mínimos cuadrados ordinarios más el valor de krigeado residual; como lo sugiere Samper y Carrera (1990, página 198), siendo este método el que es adoptado en esta tesis.

De manera comparativa Rohuani (1986), discute los métodos de interpolación definiendo sus ventajas y desventajas. El autor compara los métodos simples (vecino más cercano, media aritmética e inverso de la distancia), el método de mínimos cuadrados (mínimos cuadrados ordinarios y generalizados), y métodos Gauss-Markov (análisis objetivo, krigeado, funciones aleatorias intrínsecas). Concluye que el método de inverso de la distancia es el que produce los planos menos realistas, así mismo, es muy sensible a los arreglos muy esparcidos. El krigeado es más robusto y proporciona un valor del error de varianza. La recomendación general del autor es que el modelador deberá seleccionar el método dependiendo del número de datos disponibles y el nivel de precisión deseado.

Pucci y Murashge (1987) aplican la técnica de krigeado universal, en el acuífero de Potomac- Raritan-Mogothy, con el objeto de estimar la carga hidráulica y la conductividad hidráulica. Analizando los planos de la varianza determinan zonas donde requieren mayor muestreo. Con estos resultados proponen utilizar la información, detectada en su primer análisis, agregando mayor número de pozos en las áreas identificadas con más incertidumbre, lo que tiene como consecuencia una mejoría en las estimaciones. Su conclusión es que al utilizar la técnica, se obtiene información para definir áreas donde se requiere información adicional.

Philip y Kitanidis (1989) aplican una técnica que estima los gradientes y cargas hidráulicas con mediciones escasas. En el artículo se describe la forma de obtener el gradiente hidráulico de una zona. En la estimación espacial usa krigeado con tendencia, KT,

utilizando el mismo método de Aboufurassi op.cit., para describir el semivariograma experimental.

Respecto a las estimaciones, éstas son restringidas a los puntos vecinos que se ubican en un radio de 50 millas, Wackernagel (1995) le llama a este proceso krigado suavizado.

Los métodos anteriores tratan de representar la deriva, $m(x)$, a partir de suponerla o estimarla, ya sea por mínimos cuadrados o una función determinista que esté acorde a el proceso físico. Por otro lado las mediciones de la carga hidráulica pueden no sólo estar afectadas por el efecto de deriva. Tonkin y Larson (2002), consideran que en sistemas donde se mide la carga hidráulica y existen pozos en operación, el efecto puntual en el pozo de operación y su periferia es suavizado cuando se utiliza el krigado, por lo que los resultados de estimación no son consistentes en zonas donde convergen flujos, en el caso de los pozos en operación o en áreas locales de descarga y recarga, la explicación es que no se conoce con exactitud la deriva.

Los autores proponen que se ajuste este efecto mediante la combinación del método de regresión lineal (krigado simple) y de forma puntual utilizar una función logarítmica similar a la ecuación de Theis. El método propuesto calcula la deriva sumando al modelo lineal la componente de descenso del nivel provocado en el pozo que está bombeando. Los resultados muestran que las estimaciones con este método son mejores en las zonas donde se encuentra un pozo de bombeo.

No debemos pensar que el krigado es utilizado sólo para la estimación de la carga hidráulica, aunque esta fue la primera variable hidrogeológica para la que se utilizó esta metodología. Por lo que es de resaltar, dentro de la estimación univariada, trabajos como los de Hoeksema y Kitanidis (1985), Pucci y Murashige (1987) y Woodbury y Sudicky, (1991) que están encaminados a identificar la estructura espacial de parámetros como

transmisividad, conductividad hidráulica, coeficiente de almacenamiento, siendo pioneros en el planteamiento geoestadístico del análisis espacial. No está de más indicar el trabajo de Goovaerts (1999) que resume el estado del arte en las técnicas geoestadísticas.

2.2. DESCRIPCIÓN DE PATRONES ESPACIALES MULTIVARIADOS.

La información con que cuenta un hidrogeólogo es generalmente multivariada, y en la geoestadística clásica es de interés el estudiar dos a más variables correlacionadas, que varían en el espacio.

Tomando en cuenta lo anterior esta sección está encaminada a comentar los trabajos que utilizan la estimación multivariada, tanto en la estructura como la estimación de la variable, específicamente para el caso de la carga hidráulica, sin dejar de comentar aquellos que se distinguen por la innovación en la técnica.

De forma general, dentro de la geoestadística, a este tipo de técnica se le conoce como cokrigado y también es referida como análisis geoestadístico multivariado.

Myers (1982) presenta la forma matricial del planteamiento general de cokrigado. Para el caso multivariado en variables aleatorias estacionarias se desarrolla el sistema de ecuaciones de cokrigado, así mismo se presenta el caso para las variables aleatorias intrínsecas de orden cero y el sistema de cokrigado universal. Es de resaltar que se proponen métodos para obtener la función cruzada de covarianza y semivariograma.

Una primera aplicación es la propuesta por Hoeksema, et al. (1989), en donde los investigadores analizan la elevación del nivel freático, basados en los puntos de observación del mismo y la elevación del terreno natural. Los resultados confirman que el cokrigado es una herramienta poderosa para estimar el nivel freático, siendo eficiente

debido a que no es necesario aplicar un modelo de flujo; un análisis preliminar de los datos es suficiente para observar anisotropías y posible deriva. El cokrigado estima los valores de elevación del nivel estático, consistentes con la variación topográfica.

Tanto en las propuestas de Hoeksema *et al. op. cit.* la determinación de la estructura, de los datos, se utiliza la función de semivariograma cruzado.

Clark, et al. (1989), propone utilizar una función alternativa que define como pseudo semivariograma. En la parte práctica esta función es aplicada en el caso del acuífero Pennsylvania, compuesto por dos capas, para estimar de forma conjunta la elevación del nivel piezométrico en las dos capas que lo componen. Sus resultados muestran una mejoría en la estimación en las zonas donde no se cuenta con información.

Papritz et al. (1993), concluye que el pseudo semivariograma muestral es doblemente atractivo para describir la correlación cruzada entre dos variables donde la medición en cada una no tiene o no pudo ser efectuada en la misma posición, este hecho hace de la función pseudo semivariograma interesante ya que no es indispensable que las dos variables estén ubicadas en la misma posición, lo que limita en ocasiones la utilidad de los datos. Respecto al sistema de cokrigado, la función de pseudo semivariograma se modela como un modelo autorizado univariado, a diferencia de la función de semivariograma cruzado que es modelado con un modelo lineal de correogionalización (MLC).

Retomando la función de semivariograma y el método de cokrigado, Ahamed y De Ahmed y De Marsily (1993) muestran como es posible utilizar los niveles piezométricos y la transmisividad para estimar un campo de transmisividades mediante el cokrigado. En este caso la carga hidráulica es la que se utiliza como variable secundaria y la intención es mejorar la estimación de la transmisividad.

Wackernagel (1994) trata el caso multivariado isotrópico, cuando las variables primaria y secundaria concuerdan en la posición. El cokrigado y el krigado son comparados en el caso isotrópico. El autor plantea que el método es útil siempre y cuando las variables involucradas sean autokrigeables, solamente indica que la estimación obtenida con cokrigado es equivalente a la obtenida con krigado, y proponen estadígrafos para medir esta propiedad.

El avance en el campo digital y la implementación de las técnicas multivariadas utilizando modelos digitales de elevación (MDE), originan una serie de trabajos pioneros en la hidrología. Ejemplo de ello están los trabajos de Hevesi et al. (1992 a y b) y Goovaerts, 2000 que utilizan la elevación del nivel del terreno natural, topografía, como variable secundaria, para obtener mejores planos de distribución de lluvia. En esta misma línea, de investigación.

Seo et al. (1990 a y b) utilizan como fuente de información secundaria los datos de radar y datos de lluvia en estaciones pluviométricas como variable primaria. La estimación de la precipitación es por medio del método de cokrigado ordinario. Los resultados son comparados con las estimaciones obtenidas con los métodos de Brandes, estimación de radar, krigado ordinario, krigado disyuntivo, cokrigado universal y cokrigado ordinario. Lo destacado, en estos trabajos, es la propuesta misma de las fuentes alternas de información ya que el método no cambia en cuanto a las ecuaciones de cokrigado.

En el campo de la hidrogeología Desbarats et al. (2002) utiliza un modelo digital de elevación (MDE) y estima la carga hidráulica. La metodología es distinta a la propuesta por Hoeksema op.cip, ya que utiliza la técnica de deriva externa conocida como krigado con deriva externa conocido como KED “Krigin External Drift”.

En cuanto a la estimación multivariada de otros parámetros, de interés en la geohidrología, destacan los trabajos de Aboufiass y Mariño (1984), quienes realizan un cokrigado ordinario para estimar transmisividades utilizando como variable secundaria la capacidad específica. Es conocido que zonas con baja transmisividad tienden a incrementar el gradiente hidráulico o es posible observar cargas hidráulicas más elevadas con respecto a un entorno a zonas de mayor recarga. Estas asociaciones o relaciones pueden ser útiles para estimar una variable menos muestreada con otra mayormente muestreada. Para realizar estas estimaciones es necesario que cumpla que las variables regionalizadas son modeladas como realizaciones conjuntas, que la estructura de correlación de las variables esté descrita por sus momentos cruzados de segundo orden, función de covarianza cruzada, y que la estimación de la variable cumpla con el marco de cokrigado, como es estimación lineal con mínima varianza e insesgo.

Ahmed y De Marsily (1987) realizan un estudio multivariado donde comparan varias técnicas con la finalidad de formar un criterio entre sus bondades. Los métodos utilizados son krigado combinado con regresión lineal, krigado con deriva externa, krigado con un campo huésped y cokrigado. Los autores concluyen que el cokrigado es un método más riguroso que requiere menos suposiciones. Puede ser útil si las variables utilizadas presentan un coeficiente de correlación alto, pero debe considerarse que es necesario un número elevado de variables que tengan en común el mismo punto de medición. Respecto al krigado combinado con regresión lineal, puede ser útil solo en el caso de dos variables que estén altamente correlacionadas. Es necesario que ambas tengan un número considerable de puntos en común y como ventaja es que es un método de bajo costo computacional. La desventaja es que estima la variable principal con forme al punto de medición de la variable secundaria y no toma en cuenta los valores que la circundan. El

krigeado con deriva externa puede ser útil con un número ilimitado de variables, como el cokrigeado, su ventaja es que no requiere calcular el semivariograma cruzado

Doyen (1988) explora la utilidad del cokrigeado para definir la distribución de la porosidad utilizando datos de reflexión sísmica y porosidad. Concluye que los resultados son 20 % más precisos que utilizando el método de krigado.

Dentro del campo de estimación de parámetros existe un área donde aplican métodos geoestadísticos para resolver el problema inverso. Algunos de los artículos más citados en la literatura se comentan en el trabajo de la ASCE (1990 a y 1990 b), aunque no se comentan en esta reseña, los considero relevantes dentro de la geoestadística multivariada. Toda esta información es aplicable a los casos donde se trata de estimar la carga hidráulica.

2.3. VARIACIÓN TEMPORAL.

Hasta el punto anterior se han comentado los trabajos que mantienen un punto de vista puramente espacial, sin embargo, los hidrogeólogos han tratado la variación de la carga hidráulica también desde el punto de vista temporal. Muchas propiedades varían en el tiempo. Por ejemplo la elevación del nivel estático que medimos en un pozo nunca es constante, sin tomar en cuenta la incertidumbre de la medición, el nivel estático en el pozo varía debido a la extracción en el pozo o en pozos vecinos una disminución de la recarga a nivel regional, que está íntimamente relacionado con el ciclo de lluvias que prevalece en la zona.

Los modelos que analizan la variación temporal difieren de aquellos que varían en el espacio, sin embargo, son similares como veremos a continuación.

Una de las principales razones por las que los modelos espaciales y temporales han sido tratados de diferente manera, es debido a que la dimensión del tiempo es distinta a la dimensión espacial. Es más frecuente tratar las variables espaciales en una, dos o tres dimensiones, por lo contrario el tiempo siempre se mueve hacia adelante, los procesos tienen efecto en secuencia y la predicción de ellos sólo tiene sentido en el futuro, pero ocasionalmente deseamos interpolar, si perdemos observaciones o si tenemos pocos datos. Con la finalidad de tener un panorama general se comentarán los modelos que sólo utilizan el tiempo y posteriormente regresaremos a los análisis espacio-tiempo.

2.3.1. Análisis de series de tiempo.

Una aplicación directa para determinar la carga hidráulica es la efectuada por Angelini (1997), quien al realizar un análisis de correlación y análisis espectral en dos acuíferos cársticos, encuentra que los sistemas presentan un efecto de retención que modula la señal. Larocque et al. (1998), al analizar el acuífero cárstico La Rochefoucauld, reportan que el acuífero se drena lentamente y presenta una capacidad alta de almacenamiento de agua subterránea. Long y Derickson (1999) al aplicar un análisis espectral logra definir el período de recesión en el nivel piezométrico bajo condiciones de sequía.

Un punto de vista geoestadístico para analizar las series de tiempo es aportado por Rouhani y Wackernagel (1990) quienes proponen analizar las series de dos pozos de observación utilizando la función de semivariograma, de la misma manera que en geoestadística, sólo que en una dimensión. El modelo ajustado es tipo agujero el cual ajusta de manera aceptable las periodicidades que refleja el fenómeno. Resaltando que el pozo de superficie libre existe una mayor periodicidad que está asociada a la recarga directa del sistema

acuífero. Por otro lado el pozo que está controlado por un sistema confinado no es afectado, de manera significativa, por este efecto local.

De los trabajos publicados es de resaltar que existe un panorama en donde las técnicas de análisis espectral y series de tiempo han demostrado su efectividad para identificar características de los acuíferos, como zonas de recarga, tiempo de viaje en las partículas, zonificación y efectos de la recarga.

2.4. ESPACIO-TIEMPO.

En esta sección se comentan los trabajos que analizan de forma conjunta el espacio y el tiempo, debido a que el tema es de reciente investigación, en el caso de la hidrogeología, se comentan algunas aportaciones en otros campos que representan un avance en el conocimiento.

La modelación espacio-tiempo (E/T) es resultado de la investigación de procesos dinámicos que involucran tanto la variabilidad espacial como temporal (Stein, 1986; Comegna y Basile, 1994; Bogaert, 1996; Christakos 2000; Bierkens *et al.*, 2001; De Iaco, et al. 2002, Ibáñez, 2003). En el campo de la hidrogeología, los primeros en plantear el problema fueron Rouhani y Hall (1989). En su investigación suponen que el espacio y tiempo puede ser caracterizados por una función aleatoria que trata de forma conjunta el espacio y el tiempo, al integrarse éste último como una dimensión adicional a la bidimensionalidad de la componente espacial (Christakos, 1998). Este mismo procedimiento fue aplicado por vez primera por Bilonick (1983; 1985), obteniendo resultados interesantes en el cálculo de depósitos de sulfato en el noreste de los Estados Unidos.

La geoestadística presenta técnicas para analizar de forma conjunta el espacio y el tiempo, sin embargo, los cambios espaciales y temporales de los procesos están en diferentes escalas, en el tiempo o el espacio, por lo tanto cualquier promedio altera la correlación E/T original (Rouhani y Myers, 1990; Hoosbeek, 1998).

Es necesario recalcar que existen diferencias fundamentales entre los ejes coordenados. Por ejemplo, para el tiempo es claro que existe un orden, podemos ubicar con facilidad el pasado, presente, y futuro, ésto no puede hacerse en el espacio. En el tiempo, las mediciones son, con frecuencia, tomadas en un solo sentido, aquí la estimación es con frecuencia una predicción. En contraste en el espacio no contamos con esa referencia, pasado presente, futuro, y con frecuencia la estimación es enfocada a una interpolación de los datos.

Las unidades de escala y distancia son distintas en el espacio y el tiempo, y no pueden ser comparadas en un sentido físico (Rouhani y Myers, 1990).

2.5. LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN.

Se ha documentado el desarrollo de las técnicas geoestadísticas en el campo de la hidrogeología, enfocando los esfuerzos logrados en la estimación de la carga hidráulica en un sistema acuífero.

En el caso del análisis univariado los trabajos se enfocan a estimar principalmente la carga hidráulica, aunque se encuentran casos para la estimación de la transmisividad, conductividad hidráulica y coeficiente de almacenamiento.

Independiente de la aplicación, que se haga referencia, el análisis geoestadístico se ve estructurado en seis pasos esenciales

Análisis preliminar

Análisis exploratorio

Estimación de la estructura

Modelación de la función de semivariograma o covarianza

Validación cruzada

Estimación espacial.

Respecto al análisis espacial multivariado los esfuerzos se han encaminado en la estimación de propiedades partiendo de la correlación cruzada que existe entre una variable principal, pobremente muestreada y una variable secundaria, con mayor número de puntos observados.

La técnica de cokrigado se ha aplicado tanto a la estimación de la carga hidráulica como la estimación de transmisividades, en este caso tenemos varios ejemplos como son: la transmisividad *vs.* caudal específico, transmisividad *vs.* resistividad específica, y transmisividad *vs.* carga hidráulica, también se documenta los métodos para calcular porosidad *vs.* velocidad sísmica. En todos ellos lo principal es obtener una mejor estimación utilizando la correlación entre variables.

En el caso multivariado para la estimación del nivel freático se documenta la utilización de los modelos digitales de elevación (MDE) aprovechando que éstos cuentan con una información detallada del nivel topográfico. Sin embargo no se reporta investigación alguna encaminada a estimar el nivel freático, bajo el esquema de cokrigado, utilizando el MDE.

Propuesta que conceptualmente es igual al esquema planteado por Hoeksema et al., 1989. Desde luego que para tener resultados interesantes las variables deben cumplir con la propiedad de coherencia y autokrigeabilidad que describen Wackernagel, 1994; y Goovaerts, 1994.

La misma exploración de la técnica multivariada para la estimación de la transmisividad, conductividad hidráulica, coeficiente de almacenamiento, porosidad es en sí importante en la estimación de parámetros que a futuro pueden ser empleados en la integración de los modelos matemáticos de simulación de flujo como lo proponen Yeh (1986).

Respecto al análisis conjunto espacio-tiempo se ha documentado, en los diferentes campos del conocimiento, las propuestas de los modelos espacio-tiempo, para la función de covarianza, cada una de éstas resuelven un caso en particular. Por lo que se hace interesante efectuar una línea de investigación en la que se documente los diversos modelos, espacio-tiempo, sus ventajas y desventajas, la forma de obtenerlos y calcularlos. Teniendo como mayor aporte la forma de construirlos y su estructuración en un sistema de krigado.

El realizar este tipo de comparativos permitirá obtener una visión, en lo general, que los caracteriza y con ello proponer criterios para decidir al momento de seleccionarlos.

Es importante efectuar investigaciones donde se comparen los resultados obtenidos por la estimación espacio-tiempo y la multivariada, en cualquiera de sus dos vertientes, vectores de la función aleatoria y vectores de series de tiempo. Aunque se documenta la diferencia entre la estimación espacio-tiempo utilizando el esquema de krigado, la función de covarianza es a partir de la estructura espacio-tiempo; en contraparte el punto de vista multivariado de la función aleatoria, la función es estimada a partir de un modelo de correogionalización.

Las desventajas de usar uno u otro se ha comentado, sin embargo, no cuenta con un análisis comparativo entre los resultados de ambas técnicas.

En el caso multivariado hace falta realizar la estimación espacio-tiempo con variables diferentes. Donde una de ellas esté mayormente muestreada en el espacio, lo anterior es similar al análisis multivariado espacial, sólo que ahora se deben analizar las variables que cambian en el tiempo y que se encuentran correlacionadas entre sí.

No se ha tratado el análisis espacio-tiempo de la incertidumbre, e.g., la probabilidad de varios atributos en cualquier punto que no sobrepase un valor límite, en este campo se tiene una propuesta de Bilonick (1988), quien por medio de un krigeado indicativo realiza estimaciones de la depositación mensual de iones hidrógeno.

3. GEOESTADÍSTICA.

Una variable distribuida en el espacio de forma que presenta una estructura espacial de correlación se dice que está regionalizada. Desde un punto de vista matemático, una variable regionalizada es simplemente una función $z(x)$ que adopta un valor para cada punto x en el espacio.

Matheron (1963) propone el método basado en la teoría de las funciones aleatorias que introduce una interpretación probabilística de la variable regionalizada y requiere una serie de hipótesis acerca de la función aleatoria.

En el siguiente capítulo se plantean los conceptos básicos de la geoestadística que serán utilizados en el desarrollo de esta tesis, por lo que inicialmente abordaremos el concepto de función aleatoria desde el punto de vista espacial y espacio-tiempo. Se describe la forma conceptual de determinar la deriva y la determinación de la estructura de los datos, haciendo énfasis en los tipos modelos teóricos espacio-tiempo, la forma de ajustar los semivariogramas. Por último, se plantea de forma general los sistemas de krigado y el método de validación cruzada.

3.1. CONCEPTO DE FUNCIÓN ALEATORIA.

En la teoría de probabilidad una serie de k variables aleatorias dependientes define un vector aleatorio $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_k)$ con k componentes. Análogamente, cuando el valor de una función $Z(x)$ es una variable aleatoria, al variar x en el espacio R^n de n dimensiones, $Z(x)$ define una familia de variables aleatorias. A cada punto x_0 del espacio le corresponde una variable aleatoria $Z(x_0)$. La función aleatoria $Z(x)$ puede también interpretarse como una función de puntos x , cuyo valor en x_0 no es un número sino una variable aleatoria.

De la misma manera que al tomar una muestra aleatoria ω de una variable aleatoria Y se obtiene un valor numérico $Y(\omega)$, al tomar una muestra aleatoria de una función aleatoria $Z(x)$ se obtiene una función $Z(x, \omega)$ que coincide con lo que se ha definido como variable aleatoria regionalizada. La función $Z(x, \omega)$ se denomina realización de la función aleatoria (Samper y Carrera, 1990).

La interpretación probabilística de una variable regionalizada como realización de una función aleatoria $Z(x)$ tiene sentido sólo si es posible inferir la función de distribución. Para hacer posible la inferencia estadística, es necesario introducir hipótesis adicionales acerca de $Z(x)$ para poder reducir el número de parámetros de los que depende la función de distribución. Estas hipótesis tienen que ver con la homogeneidad espacial de la función aleatoria.

En geoestadística son suficientes los dos primeros momentos de la distribución de $Z(x)$, siendo el momento de primer orden la esperanza matemática definida como:

$$E[Z(x)] = m(x), \dots \dots \dots (3.1)$$

Y los tres momentos de segundo orden son:

La varianza

$$\sigma^2 = Var[Z(x)] = E\{[Z(x) - m(x)]^2\}, \dots \dots \dots (3.2)$$

La covarianza

$$C(x_i, x_j) = E\{[Z(x_i) - m(x_i)][Z(x_j) - m(x_j)]\}, \dots \dots \dots (3.3)$$

Y el semivariograma

$$\gamma(x_i, x_j) = \frac{1}{2} E\{[Z(x_i) - Z(x_j)]^2\} \dots \dots \dots (3.4)$$

Una vez definidos el concepto de los momentos de segundo orden es necesario hacer un paréntesis para definir el momento cruzado de segundo orden que más adelante se discutirá su importancia:

Por el momento basta decir que bajo la hipótesis de estacionariedad de segundo orden, se puede definir para cada par de variables $Z_i(x)$ y $Z_j(x)$ la covarianza cruzada como:

$$C_{ij}(h) = E\{[Z_i(x+h) - m_i][Z_j(x+h) - m_j]\}, \dots\dots\dots(3.5)$$

y el semivariograma cruzado se define como:

$$\gamma_{ij}(h) = \frac{1}{2} E\{[Z_i(x+h) - Z_i(x)][Z_j(x+h) - Z_j(x)]\}, \dots\dots\dots(3.6)$$

dónde $m_i = E[Z_i(x)]$ y $m_j = E[Z_j(x)]$ son los valores esperados de las variables $Z_i(x)$ y $Z_j(x)$ respectivamente.

3.1.1. Función aleatoria estacionaria.

Una función aleatoria estrictamente estacionaria es aquella cuya función de distribución es invariante respecto a cualquier traslación del vector \mathbf{h} . Sin embargo, puesto que la geoestadística lineal se basa en los dos primeros momentos de la función aleatoria, es suficiente suponer que estos dos momentos existen y limitar la hipótesis de estacionariedad a los dos primeros momentos. Una función aleatoria $Z(x)$ estacionaria de segundo orden es cuando la esperanza matemática existe y no depende de x ; y para toda pareja de variables aleatorias su covarianza existe y sólo depende del vector de separación \mathbf{h} .

Así mismo bajo esta hipótesis el semivariograma también es estacionario.

3.1.2. Función aleatoria intrínseca.

Es una función aleatoria cuya varianza no existe y sin embargo sus incrementos $[Z(x+h) - Z(x)]$ tienen una varianza finita, es decir son aquellas cuyos incrementos $[Z(x+h) - Z(x)]$ tienen esperanza matemática y varianza definidas e independientes de x para todo vector \mathbf{h} .

3.1.3. Función aleatoria no intrínseca.

Cuando una función aleatoria presenta una deriva, es decir, cuando su esperanza matemática no es constante se dice que la función aleatoria no es estacionaria. Si además sus incrementos de primer orden $[Z(x+h) - Z(x)]$ tampoco son estacionarios entonces corresponde a una función aleatoria no intrínseca.

3.2. FUNCIÓN ALEATORIA ESPACIO-TIEMPO.

Considere un dominio D en el espacio, y un dominio T en el tiempo, $D \subseteq R^d$ y $T \subseteq R^1$, asumiendo que $d = 2$; aquí R^2 es bidimensional.

Una variable aleatoria espacio-temporal (VA) $Z(\mathbf{x}, t)$ es una variable que puede tomar una serie de valores, realizaciones, en cualquier localización en el espacio $\mathbf{x} \in D$ en un instante de tiempo $t \in T$. La VA $Z(\mathbf{x}, t)$ será totalmente caracterizada al conocer su función de distribución que nos dará la probabilidad de la variable Z en la posición x en el espacio en el instante t

$$F(\mathbf{x}, t; z) = \text{Pr ob}\{Z(\mathbf{x}, t) \leq z\}, \forall z, (\mathbf{x}, t) \in D \times T, \quad (3.7)$$

Una función aleatoria espacio-temporal (FA) $\{Z(\mathbf{x}, t), (\mathbf{x}, t) \in D \times T\}$ es definida como un grupo usualmente dependiente de VA $Z(\mathbf{x}, t)$, Una realización de la FA $Z(\mathbf{x}, t)$ es una colección de realizaciones de las VA.

Es fácil observar que la concepción de la variable aleatoria en el espacio es igual a la concepción espacio-temporal, por lo que aplican las hipótesis estacionaria, intrínseca y no intrínseca.

De esta forma Kyriakidis y Journel (1999), han definido tres puntos de vista para la modelación espacio-temporal.

- Función aleatoria espacio-tiempo

Típicamente descompuesta en una componente de deriva que modela una variabilidad suave de la variable aleatoria $Z(\mathbf{x}, t)$ y una componente estocástica, la cual denota altas frecuencias, alrededor de la deriva, ambas, en espacio y tiempo (Bilonick, 1988; Bilonick y Nichols, 1983; Bogaert y Christakos, 1997; De Iaco et al. 2001).

- Multivariada de la variable aleatoria.

En este marco se conceptualiza la variable aleatoria $Z(\mathbf{x}, t)$ como una colección de finitas observaciones, temporalmente correlacionada.

- Multivariada de serie de tiempo (S/T)

Modelos de series de tiempo, S/T, son conceptualizados como una colección finita espacialmente correlacionadas $Z(t)$ (Nowak et al., 1994; Knotters y Bierkens *et al.*, 2001; Kyriakidis y Journel, 2001 a, 2001 b).

3.3. DETERMINACIÓN DE LA ESTRUCTURA DE LOS DATOS.

El análisis estructural implica especificar el tipo de hipótesis que se van a hacer sobre la variabilidad del fenómeno en estudio. Es decir, implica definir si la variable se puede considerar estacionaria, o no; si requiere la estimación de una tendencia y, en caso de requerirla, la forma que tendrá dicha tendencia; si es suficiente suponer que la variable es intrínseca, etc. Además de lo anterior, se incluye dentro del análisis estructural la estimación del semivariograma. De hecho, con frecuencia el término análisis estructural se reserva para esta tarea. Sin embargo, la estimación del semivariograma está ligada a las hipótesis sobre el tipo de variable (estacionaria, intrínseca, no intrínseca), que la separación entre ambos procesos resulta un tanto artificial (Journel, 1986, 1989; Samper y Carrera, 1990).

3.3.1. Semivariograma muestral univariado.

El semivariograma muestral se estima en base a los datos y a la estructura del fenómeno.

En principio, el semivariograma muestral se estima directamente como:

$$\hat{\gamma}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_{k=1}^{N(\mathbf{h})} [Z(x_k) - Z(x_k + \mathbf{h})]^2, \quad (3.8)$$

dónde $\hat{\gamma}(h)$ es el semivariograma muestral $Z(x_k)$ son los valores experimentales de los puntos x_k , en los que se dispone de datos tanto en x_k como $x_k + \mathbf{h}$; separados a una distancia \mathbf{h} . $N(h)$ es el número de pares de puntos separados por una distancia \mathbf{h} .

En la sección ajuste del semivariograma se explicará la forma en que se procede ajustar al semivariograma un modelo teórico, por lo que es necesario mencionar que los modelos

teóricos, también conocidos como autorizados, más utilizados son: lineal, agujero, esférico, exponencial y potencia. Debido a que son modelos muy conocidos no serán descritos por lo que se recomienda se consulte el artículo de Christakos (1984) para verificar las condiciones que cumplen estos modelos que de manera general deben cumplir:

Un modelos autorizado, para 1D, 2D o 3D, de covarianza deben satisfacer la condición de ser positivo definido

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j C(x_i - x_j) \geq 0, \quad (3.8)$$

o en el caso de la semivariograma condicionalmente negativo definido, para que puedan ser una función válida.

$$-\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \gamma(x_i - x_j) \geq 0 \quad \text{si} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0, \quad (3.9)$$

Estos modelos cumplen con tres condiciones.

- La función debe ser real, simétrica y continua, a excepción, posiblemente, en el origen.
- La covarianza $C(h)$ siempre tiene un límite superior
- Las funciones se comportan en el infinito de acuerdo a:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{C^0(h)}{h^{l-d/2}} = 0 \quad |h| \rightarrow \infty, \quad (3.10)$$

En el artículo de Chirlin y Dagan (1980), se presenta una discusión amplia de la forma que caracteriza estos tipos de semivariogramas en un acuífero estadísticamente homogéneo para los acuíferos porosos, fracturados y cársticos.

3.3.2. Semivariograma cruzado muestral.

De la misma forma que el semivariograma muestral univariado, el semivariograma cruzado muestral es la función que tradicionalmente se utiliza, en geoestadística, para describir la continuidad cruzada entre dos o más variables.

El semivariograma cruzado muestral se define como:

$$\hat{\gamma}_{ij}(\mathbf{h}) = \frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_{k=1}^{N(\mathbf{h})} \left[\{Z^i(x_k + \mathbf{h}) - Z^i(x_k)\} \{Z^j(x_k + \mathbf{h}) - Z^j(x_k)\} \right], \quad (3.11)$$

dónde $\hat{\gamma}_{ij}$ ó $\hat{\gamma}_{ji}$ son el semivariograma muestral cruzado de la variable principal “i” con las variables secundarias “j”; $N(\mathbf{h})$ es el número de pares $\{Z^i(x_k + \mathbf{h}) - Z^i(x_k)\}$ y $\{Z^j(x_k + \mathbf{h}) - Z^j(x_k)\}$ separados por una distancia \mathbf{h} .

El semivariograma cruzado puede tomar valores negativos a diferencia del semivariograma univariado que siempre es positivo. Valores negativos del semivariograma cruzado pueden presentarse cuando el aumento de una de las variables se corresponde en promedio con una disminución de la otra.

De acuerdo a su definición, el semivariograma cruzado es simétrico es decir:

$$\gamma_{ij}(\mathbf{h}) = \gamma_{ij}(-\mathbf{h}) \quad \text{y} \quad \gamma_{ij}(\mathbf{h}) = \gamma_{ji}(\mathbf{h}). \quad (3.12)$$

3.3.3. Semivariograma espacio-tiempo muestral.

Sea $Z(\mathbf{x}, t)$, la variable aleatoria $Z(\cdot)$ en la posición $\mathbf{x} = (x, y)$, al tiempo t .

Entonces, el semivariograma muestral para los incrementos $\Delta\mathbf{x} = (\Delta x, \Delta y,)$ y Δt se basa en la siguiente expresión:

$$\gamma_{st}(\Delta\mathbf{x}, \Delta t) = \frac{1}{2(N(\mathbf{x}, t))} \sum_{i=1}^T \sum_{k=1}^{N(\mathbf{x})} (Z((\mathbf{x}_k + \Delta\mathbf{x}, t_i + \Delta t) - Z(\mathbf{x}, t))^2), \quad (3.13)$$

dónde $\frac{1}{2(N(\mathbf{x}, t))}$ son el número de pares separados por los incrementos $\Delta\mathbf{x}$ y Δt , note que

por definición $\gamma(\Delta\mathbf{x} = 0, \Delta t = 0) = 0$.

3.3.4. Tipos de semivariogramas espacio-tiempo teóricos.

A diferencia de la sección semivariograma muestral, donde no se comentaron a detalle los modelos teóricos, en la parte espacio-temporal si se realiza una descripción más detallada debido a que es una fase que aun se encuentra en experimentación y propuesta.

3.3.4.1. Modelos separables.

Los modelos separables reciben su nombre debido partiendo de la concepción espacio-tiempo, como la composición de una tridimensionalidad compuesta de dos componentes espaciales (x,y) más la unidimensionalidad del tiempo (t).

Por lo que al sumarlos o multiplicarlos nos dan como resultado un modelo positivo definido. Se recomienda referirse a Cressie (1991) y Armstrong y Jabin (1981), para verificar estas condiciones en la función de semivariograma y en este mismo caso se cumple que su adición o multiplicación da como resultado un modelo positivo definido.

Bajo la decisión de un modelo espacio-tiempo, estacionario, la función de covarianza $C_R(h, t)$ de los residuales $R(\mathbf{x}, t)$ puede ser identificada como la función estacionaria $C(h, \tau)$ de la variable aleatoria $Z(h, t)$:

$$\begin{aligned}
C_R(h, t) &= E\{R(\cdot, t) \cdot R(\cdot + h, t + \tau)\} \\
&= E\{[R(\cdot, t) - m] \cdot [R(\cdot + h, t + \tau) - m]\} = C(h, \tau)
\end{aligned}
\tag{3.14}$$

Debido a las ya comentadas diferencias, fundamentales, entre los fenómenos en el espacio y el tiempo, la función de covarianza espacio-tiempo $C(h, \tau)$ generalmente se descompone en modelos denominados separables de covarianza y que han sido clasificados como de las siguiente manera.

3.3.4.2. Modelo métrico.

Fue propuesto por Dimitrakopoulos y Luo (1994) como:

$$C_{st}(h_s, h_t) = C(a^2 |h_s|^2 + b^2 h_t^2). \tag{3.15}$$

Dónde los coeficientes a,b son reales. Note que el modelo métrico supone el mismo tipo de modelo en la parte espacial y temporal con posibles cambios en el alcance.

3.3.4.3. Modelo producto.

Una forma sencilla de modelar la covarianza en espacio-tiempo es separar la dependencia de cada una (Rodríguez –Iturbe y Mejía, 1974)

$$C_{st}(h_s, h_t) = C_s(h_s)C_t(h_t). \tag{3.16}$$

Donde la dependencia espacial es separada de la temporal, este modelo se puede asumir un alcance independiente del tiempo.

El modelo producto en la parte espacial C_s , es positivo definido en el espacio \mathfrak{R}^d y C_t es positivo definido en \mathfrak{R} ; modelos de covarianza, espaciales, que son permitidos y modelos,

de covarianza, temporales permitidos pueden ser combinados en forma de productos para dar modelos, de covarianza, espacio-temporales (Cressie, 1991, p. 85).

3.3.4.4. Modelo lineal.

Esta descomposición de la función de covarianza espacio-tiempo es escrita de la forma (Journel y Huijbregts, 1978):

$$C(h, t) = C_1(h) + C_2(\tau). \quad (3.17)$$

Dónde $C_1(h)$ es la función de covarianza puramente espacial y $C_2(\tau)$ es la función de covarianza puramente temporal (Rouhani y Hall, 1989).

Estos modelos, separables, descomponen el modelo espacio-tiempo $Z(x, t)$ en todas o algunas de las siguientes componentes ó combinaciones de ellas.

$$Z(x, t) = m(x, t) + R_1(x) + R_2(t) + R_3(x, t), \forall (x, t) \in D \times T. \quad (3.18)$$

Dónde $R_1(x)$ es la componente espacial, $R_2(t)$ es la componente temporal y $R_3(x, t)$ es la componente espacio-temporal. Los modelos lineales, mezclados, tienen una componente subjetiva en la descomposición de la función de covarianza espacio-tiempo de las estructuras anidadas, ya que no se cuenta con datos en $R_1(x)$, $R_2(t)$ y $R_3(x, t)$; su descomposición debería estar guiada por interpretaciones físicas.

Los comentarios más importantes acerca de utilizar modelos donde se separan cada una de las componentes son: en el caso de la técnica de anisotropía zonal, implica que el comportamiento espacial de la $Z(x, t)$ es considerado el mismo en cualquier instante. Similarmente no hay cambios en la componente temporal de $Z(x, t)$ de localización a localización.

No existen reglas o guías para inferir (separar) las dos componentes, $C_1(h)$ y $C_2(t)$, de la función experimental espacial $C(h,0)$, y temporal $C(0, \tau)$, calculado en el eje espacial es inevitablemente influenciado por la variación temporal provenientes de usar los pares de datos $\{z(\alpha, t_i), z(\alpha + h, t_i)\}$ y $\{z(\beta, t_j), z(\beta + h, t_j)\}$ tomadas a diferentes instantes de tiempo t_i, t_j y esto no puede ser identificado directamente por el modelo de covarianza espacial $C_1(h)$. Note también, que cuando la periodicidad está incluida en el modelo temporal $C_2(t)$ vía modelo agujero, existe una pérdida de información. Los comportamientos periódicos son modelados mejor vía modelos de tendencia periódica.

La técnica de anisotropía zonal puede invalidar el sistema de ecuaciones de krigado a partir de ciertas configuraciones de los datos, como lo indica la investigación de Rouhani y Myers, (1990), Myers y Journel (1990), que confirman un número de problemas asociados con la técnica, por ejemplo, existe singularidad en el sistema de krigado debido a configuraciones rectangulares. e.g., cuando las cargas hidráulicas son leídas en dos diferentes localizaciones al mismo tiempo. Problemas similares son identificados cuando los datos son tomados en la misma localización en pequeños intervalos de tiempo.

Rouhani y Myers (1990), ejemplifican lo anterior de la siguiente forma:

Considere cuatro puntos en (x,t) espacio. (x representa una dimensión) con coordenadas punto 1:(0,0), punto 2:(0,t), punto 3:(α ,0), punto 4:(α ,t) y el modelo del semivariograma es construido con la técnica de anisotropía zonal de la siguiente forma:

$$\gamma(h,t) = \gamma_h(h) + \gamma_t(t) \dots \dots \dots (3.19)$$

Suponga que $\gamma_h(0) = 0$, $\gamma_h(\alpha) = \mu$, $\gamma_t(0) = 0$, $\gamma_t(t) = \nu$, y considerando que la matriz de Krigado utilizando estos cuatro puntos es:

$$\begin{bmatrix} 0 & \mu & \nu & \mu + \nu & 1 \\ \mu & 0 & \mu + \nu & \nu & 1 \\ \nu & \mu + \nu & 0 & \mu & 1 \\ \mu + \nu & \nu & \mu & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(3.20)$$

Es fácil observar que la matriz es singular y este sistema de kriging no tiene una solución única.

3.3.4.5. Modelo producto-suma.

Estos modelos son propuestos por De Iaco et al., 2003, y De Cesare et al., 2001, no corresponden a los modelos métricos utilizados en la modelación de la función de covarianza espacio-tiempo y son definidos como:

$$C_{s,t}(h_s, h_t) = k_1 C_s(h_s) C_t(h_t) + k_2 C_s(h_s) + k_3 C_t(h_t), \quad (3.21)$$

dónde C_t y C_s son modelos de covarianza en tiempo y espacio válidos. Para que cumplan con la condición de ser positivo definido es suficiente que el valor de $k_1 > 0$, $k_2 \geq 0, k_3 \geq 0$ (De Cesare et al., 2001).

3.3.4.6. Defectos de los modelos separables.

En el caso del modelo métrico la variabilidad de la función de covarianza supone que tiene la misma forma, en sus parámetros, en espacio y tiempo, puede adoptarse una anisotropía geometría, como ejemplifica Dimitrakopoulos y Lou (1994), donde las distancias en espacio están referidas a una norma Euclidiana del vector interdistancia, “lag”, así como en el tiempo. En este caso la métrica está definida en el dominio del espacio y tiempo, es decir

que la métrica es calculada en una dimensión mayor a uno, por ejemplo, el vector definido por la posición $x = 3$ metros, en la dirección este; $y = 4$ metros, en la dirección norte y $t = 1$ hora, en el tiempo, es representado por la distancia $|h| = \sqrt{x^2 + y^2 + t^2} = 5.1$ m-hr.

El modelo lineal, propuesto por Rouhani y Hall (1989), implica que el comportamiento espacial de la variable aleatoria es considerado igual en todos los tiempos, de forma similar, no existen cambios en el arreglo temporal de posición en posición. Las funciones de covarianza, son matemáticamente compatibles, sin embargo, presentan limitaciones similares con los modelos de anisotropía zonal, en la variabilidad espacio-tiempo.

En la selección del tipo de modelo no existe una guía para inferir (separar) las dos componentes espacio y tiempo que representan de mejor manera a las variables experimentales. Por ejemplo la covarianza $C(h,0)$ calculada a lo largo del eje espacial es influenciada por la variabilidad temporal de los pares $\{z(\alpha, t_i, z(\alpha, h, t_i))\}$ y $\{z(\beta, t_j, z(\beta, h, t_j))\}$, tomados en diferentes instantes de tiempo, t_i, t_j , y esto no puede ser identificado directamente del modelo espacial de covarianza. Note también que cuando existe periodicidad y se incluye en el modelo temporal vía efecto agujero, como en los casos que tratan Bilonick (1985) y Buxton y Plate (1994), se pierde información. El comportamiento periódico es modelado de mejor manera vía modelos de tendencia periódicos.

Los modelos de anisotropía zonal pueden invalidar el sistema de krigado debido a ciertos arreglos de los datos como se hace notar en el ejemplo expuesto anteriormente y lo discuten Myers y Jorunel (1990).

En el artículo de Rouhani y Myers (1990), se analizan el número de problemas asociados con la anisotropía zonal cuando es conformado el sistema de ecuaciones de krigado. Los

autores detectan que en muestreos regulares la singularidad se presenta cuando se tienen lecturas de elevaciones del nivel piezométrico en dos posiciones distintas al mismo tiempo.

3.4. AJUSTE DEL SEMIVARIOGRAMA MUESTRAL.

Una vez que se obtiene el semivariograma muestral, es necesario ajustarle un modelo válido (Christakos, 1984). Algunos ejemplos de los modelos autorizados para el caso espacial son: Lineal, lineal con meseta, cuadrático, cúbico, esférico, exponencial, gaussiano y agujero; y en el caso espacio-tiempo los modelos métrico, lineal, producto, producto suma.

El procedimiento de ajuste es el siguiente, se propone el semivariograma muestral, de acuerdo a su comportamiento, se compara con un modelo autorizado, en este paso se puede comparar con todos los modelos teóricos con la finalidad de observar cuál da el mejor ajuste. Entendiéndose por ajuste el proceso mediante el cual se compara el modelo teórico con el muestral, modificando los parámetros del primero hasta que reproduzca de mejor manera el comportamiento del semivariograma muestral.

3.4.1. Método de ajuste del semivariograma muestral espacial.

En este caso, se ha seleccionado el procedimiento manual auxiliado del método de mínimos cuadrados ponderados (MCP). Se seleccionó aquel modelo que dé el mejor ajuste conforme al criterio de información de Akaike (AIC), que se calcula como:

$$(AIC) = \left\{ n \ln \left(\frac{2\pi}{n} \right) + n + 2 \right\} + n \ln(R) + 2p, \quad (3.22)$$

dónde

n es el número de valores estimados del semivariograma muestral, R es la suma residual de los cuadrados de las diferencias entre los valores experimentales y los del modelo ajustado, es decir $R = \sum_{i=1}^n (\gamma(h_i) - \gamma^*(h_i))^2$, mientras que p es el número de parámetros del modelo del semivariograma ajustado.

Para el ajuste del semivariograma muestral, espacial, se utilizó este criterio con la intención de obtener una idea rápida del mismo, sin embargo, el modelo final se realizó ajustando de acuerdo al criterio del modelador, que toma en cuenta el comportamiento del semivariograma en el origen y el número de pares obtenidos. La decisión del ajuste es pragmática pero es importante resaltar que en la literatura se muestran una amplia gama de métodos automáticos para llegar a un ajuste óptimo, como lo documentan Kitanidis (1987); Webster y Oliver (1992); Shafer y Varijen, (1990); Russo y Jury (1987).

Tomando lo anterior es necesario justificar que el método de ajuste manual es preferible ya que el modelador ajusta en base a su criterio.

3.4.2. Ajuste semivariograma muestral bivariado.

Debido a que un análisis multivariado es más complejo, no existen semivariogramas para éstos, por lo que el semivariograma propuesto deberá cumplir con la desigualdad de Cauchy – Schwartz (Journel y Huijbregts, 1978, Goular y Voltz, 1992).

$$\gamma_{ij}(h) \leq (\gamma_{ii}(h)\gamma_{jj}(h))^{\frac{1}{2}} \quad \forall h \quad (3.23)$$

dónde $\gamma_{ii}(h)$ y $\gamma_{jj}(h)$ son los semivariogramas de Z_i y Z_j respectivamente.

3.4.3. Ajuste semivariograma muestral espacio-tiempo.

Los modelos espacio-tiempo se clasifican en los denominados como separables y lo no separables o “compuestos” (Christakos, 2000, páginas 42 y 50). Los modelos aplicados en esta tesis corresponden a los separables, mismos que han sido aplicados en la hidrogeología y otros campos de las ciencias de la tierra con éxito, como se comenta en el capítulo 2.

La manera de ajustar este modelo espacio-tiempo, es de forma visual y con mínimos cuadrados.

En resumen, la manera de modelar el semivariograma teórico espacio-temporal es la siguiente.

- Se calcula el semivariograma muestral espacial
- Se calcula el semivariograma muestral temporal
- Se modela el semivariograma espacial, con un modelo autorizado
- Se modela el semivariograma temporal, con un modelo autorizado
- Se calcula la superficie espacio-temporal
- Se estima, de forma gráfica la cima, del semivariograma espacio-tiempo
- Se calcula el semivariograma teórico espacio-temporal

3.5. MÉTODOS DE KRIGEADO.

Dentro del contexto de la geoestadística, se conoce con el nombre de krigado a una familia de algoritmos de regresión por mínimos cuadrados generalizados que, a partir de un

conjunto de observaciones proporcionan el estimador lineal óptimo para la variable $Z(\mathbf{x})$ en una posición (\mathbf{x}_0) , en el caso espacial y $Z(\mathbf{x}, t)$ en una posición (\mathbf{x}_0, t_0) en el espacio-tiempo. Estos algoritmos reciben el nombre de krigado en reconocimiento del trabajo realizado en este campo por Danie Krige.

Existen varios métodos de krigado, pero todos comparten la misma filosofía, minimizar la varianza del error de la estimación, con la restricción de que el estimador sea insesgado.

Los métodos de krigado han sido ampliamente estudiados y aplicados en el contexto de la estadística espacial, aplicada a la hidrogeología (Samper y Carrera 1989; Kitanidis, 1997). Pero no es el caso en espacio-tiempo en donde la propuesta de Rouani y Hall, (1989), para el caso de la hidrogeología, es el único caso.

En general, se tienen varios tipos de krigado que son aplicados dependiendo de las suposiciones que se lleven a cabo. Por esta razón, se describen los métodos de krigado que son aplicados en cada uno de los casos que se presentan en los capítulos subsecuentes iniciando con los casos espaciales y posteriormente con el espacio-temporal.

3.5.1. Krigado ordinario.

El krigado ordinario (KO) supone constante el valor de la deriva, sin embargo, se desconoce su valor por lo que es requerido que los pesos de krigado sumen uno. Es decir, hay que imponer que el estimador sea lineal, insesgado y con varianza mínima. Matemáticamente se indica que el estimador sea lineal se describe de la siguiente manera:

$$Z^* = \sum_{k=1}^n \lambda_k Z(x_k), \quad (3.24)$$

que sea insesgado

$$E(Z^*) = E(Z), \quad \text{lo que equivale a} \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1, \quad (3.25)$$

y de mínima varianza

$$E[(Z^* - Z)^2] \text{ es mínimo.} \quad (3.26)$$

El resultado del estimador lineal planteado es:

$$Z_{KO}^* = \sum_{k=1}^n \lambda_k^{KO} Z^i, \quad (3.27)$$

y el sistema de ecuaciones de krigeado es

$$\sum_{\beta=1}^n \lambda_{\beta}^{KO} \gamma(k - \beta) + \mu_k^{KO} = \gamma(k - 0), \quad k = 1, \dots, n \quad (3.28)$$

$$\sum_{\beta=1}^n \lambda_{\beta}^{KO} = 1,$$

De forma matricial, este sistema tiene la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} 0 & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \cdots & \gamma_{1n} & 1 \\ \gamma_{21} & 0 & \gamma_{23} & \cdots & \gamma_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \gamma_{n3} & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_{k1}^{KO} \\ \lambda_{k2}^{KO} \\ \vdots \\ \lambda_{kn}^{KO} \\ \mu_{kn}^{KO} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{k1} \\ \gamma_{k2} \\ \vdots \\ \gamma_{kn} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

dónde

$$\gamma_{nm} = \gamma(k_n - \beta_n) \quad y \quad \gamma_{kn} = \gamma(k - 0) \quad (3.30)$$

Sí $-\gamma(h)$ es condicionalmente definida positiva, la matriz del sistema es siempre regular y siempre tiene solución.

La varianza del kriging, se obtiene de:

$$Var(Z^* - Z) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^{ko} \gamma(x_k - x_0) + \mu_k^{ko}, \quad (3.31)$$

3.5.2. Cokriging ordinario.

El método de cokriging es el utilizado en el contexto espacial y espacio-temporal que se ha planteado en el capítulo 2. De forma práctica, será la misma técnica la que se utiliza para cada caso y su planteamiento se lleva a cabo tomando en cuenta dos variables.

Supongamos que tenemos las mediciones de la variable primaria $\{z_i(x_k), k_i = 1, \dots, n_i\}$ en n_i posiciones. Para aligerar la notación se considera la situación donde sólo existe una variable secundaria $\{z_j(x_{\beta_j})\}$ que cuenta con medición en la posición x_{β_j} para $\beta_j = 1, \dots, n_j$.

El estimador de cokriging ordinario es:

$$Z_{cok}^*(h) - m_i = \sum_{ki=1}^{n_i(h)} \lambda_{ki} [Z_{ki}(x_{ki}) - m_i] + \sum_{\beta j=1}^{n_j(h)} \lambda_{\beta j} [Z_{\beta j}(x_{\beta j}) - m_j], \quad (3.32)$$

dónde λ_{ki} es el peso asignado a la variable del dato primario z_{ki} , $\lambda_{\beta j}$ es el peso asignado a la variable de secundaria $z_{\beta j}$, y m_i y m_j son los valores medios de las variables primaria y secundaria, donde se supone que son desconocidas y constantes.

El estimador es insesgado bajo las siguientes condiciones:

$$\sum_{ki=1}^{n_i} \lambda_{ki}^{cok} = 1, \quad \sum_{\beta j=1}^{n_j} \lambda_{\beta j}^{cok} = 0, \quad (3.33)$$

3.5.3. Multivariada de la variable aleatoria.

En el caso de modelos espacio-tiempo supone el proceso $Z(\mathbf{x}, t)$ como un grupo temporalmente correlacionados de las variables aleatorias, o como un grupo espacial correlacionado con una serie de tiempo (ST), dependiendo de qué dominio (espacio o tiempo) está más densamente muestreado (Aboufirassi y Mariño, 1984; Goovaerts, 1994; Wakernagel, 1994).

La función aleatoria espacio-temporal $Z(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}, t \in D \times T$ es modelada como una colección de un número finito temporalmente correlacionados en el espacio (Egbert y Lettenmaier, 1986; Papritz y Flühler, 1994; Bogaert y Christakos, 1997; Or y Hanks, 1992). La siguiente representación es adoptada para el proceso espacio-tiempo $Z(\mathbf{x}, t)$, (veáse figura 3.1 a):

$$\begin{aligned} Z(\mathbf{x}, t) &= Z(\mathbf{x}) = [Z_t(\mathbf{x})] = [Z_{t_1}(\mathbf{x}), \dots, Z_{t_T}(\mathbf{x})] \\ &= [Z_1(\mathbf{x}), \dots, Z_T(\mathbf{x})] \end{aligned} \quad (3.37)$$

i.e., T variables aleatorias son consideradas, una a la vez en cada instante $t_i, i = 1, \dots, T$. Sólo se podrán generar mapas espaciales para el instante T, $\{t_1, \dots, t_i, \dots, t_T\}$, y no será posible realizar interpolaciones sin una modelación adicional.

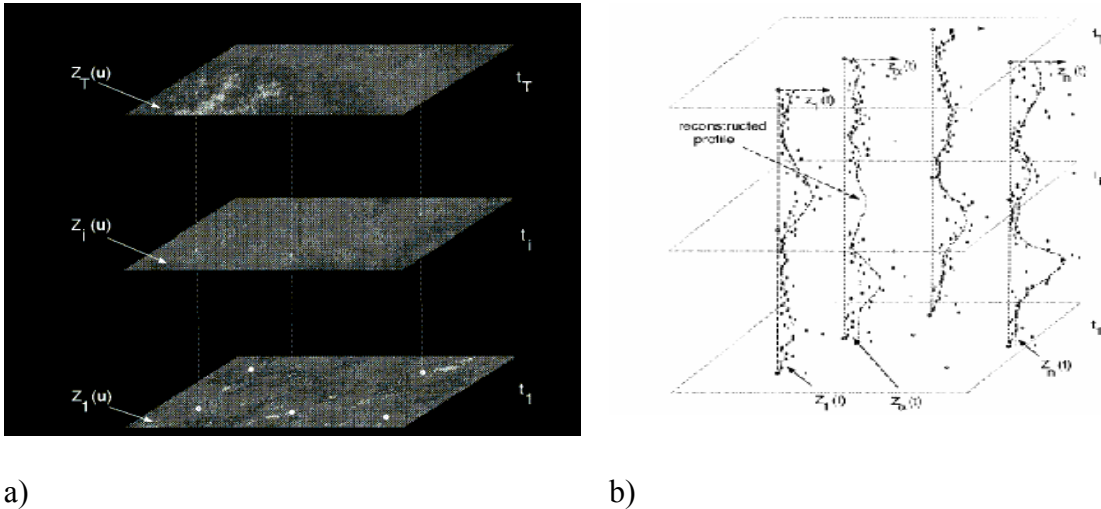


Figura 3.1, a) Modelo conceptual para los vectores de la función aleatoria $Z_i(\mu)$, $i=1, \dots, T$,
 b) Modelo conceptual para los vectores de una serie de tiempo (TS) $Z_\alpha(t)$, $\alpha=1, \dots, n$.
 (reproducido de Kyriakidis y Journal, 1999).

3.5.4. Vectores de series de tiempo (ST).

La función aleatoria espacio-temporal $Z(\mathbf{x}, t)$ es ahora modelada como un número finito de n observaciones espacialmente correlacionadas en la serie de tiempo (Fig 1,b) con la siguiente representación (Slow y Gorelick, 1986; Rouhani y Wackernagel, 1990; Rouhani et al., 1992):

$$\begin{aligned}
 Z(\mathbf{x}, t) = Z(t) &= [Z_u(t)] = [Z_{u_1}(t), \dots, Z_{u_T}(t)] \\
 &= [Z_{n_1}(t), \dots, Z_n(t)] \dots\dots\dots(3.39)
 \end{aligned}$$

i.e., n series de tiempo son consideradas, una en cada localización \mathbf{x}_α . La serie de tiempo, ST, es posible reconstruirlas solo en la n localizaciones $\{ \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_\alpha, \dots, \mathbf{x}_n \}$.

3.5.5. Krigado espacio-tiempo.

Dentro del mismo contexto de sistemas de krigado que se han descrito en las secciones anteriores el sistema de krigado espacio-tiempo, no marca diferencias significativas, pero

es conveniente mantener una continuidad en nuestra descripción, para ello es necesario hacer algunas modificaciones en la forma de notación, por lo demás las ecuaciones y condiciones son similares.

El krigado ordinario espacio-tiempo es útil cuando se desconoce el valor de la media, sabemos que no es constante en toda el área de estudio, pero podemos considerarla constante localmente, i.e. considerarla constante en una vecindad centrada en el punto en el que deseamos estimar. El dominio de estacionalidad de la media se restringe en este caso a una vecindad local, centrada en la localización, (x_0, t_0) , que queremos predecir.

Sea $N(x_0, t_0)$, el conjunto de puntos vecinos a (x_0, t_0) , en el que consideramos la media constante.

El estimador lineal se expresa como sigue:

$$\begin{aligned} Z^*(x_0, t_0) &= \mu_0 + \sum_{i=n_0}^{n_1} \lambda_i (Z(x_i, t_i) - \mu_0) \\ &= \sum_{i=n_0}^{n_1} \lambda_i Z(x_i, t_i) + \left(1 - \sum_{i=n_0}^{n_1} \lambda_i\right) \mu_0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

Para que el estimador sea insesgado se condiciona a que $\sum_{i=n_0}^{n_1} \lambda_i = 1$ por lo que el estimador quedará

$$Z^*(x_0, t_0) = \sum_{i=n_0}^{n_1} \lambda_i Z(x_i, t_i) \quad (3.43)$$

Observe que es igual al del krigado ordinario en espacio, la diferencia es que se considera un t_0 , que en el espacio es siempre el mismo o simplemente no se considera (ecuación 3.27).

La condición de mínima varianza se expresa

$$\begin{aligned}
&= \text{Var}\{Z^*(x_0, t_0) - Z(x_0, t_0)\} - 2m \left(\sum_{i=n_0}^{n_1} \lambda_i - 1 \right) \\
&= \text{Var}\left(\sum_{i=n_0}^{n_1} \lambda_i Z(x_i, t_i) - Z(x_0, t_0) \right) - 2m \left(\sum_{i=n_0}^{n_1} \lambda_i - 1 \right) \\
&\quad \sum_{i=n_0}^{n_1} \sum_{j=n_0}^{n_1} \lambda_i \lambda_j \text{Cov}(Z(x_i, t_i) - \mu_0, Z(x_j, t_j) - \mu_0) - \\
&\quad - 2 \sum_{i=n_0}^{n_1} \lambda_i \text{Cov}(Z(x_i, t_i) - \mu_0, Z(x_0, t_0) - \mu_0) + \\
&\quad + \text{Var}(Z(x_0, t_0) - \mu_0) - 2m \left(\sum_{i=n_0}^{n_1} \lambda_i - 1 \right)
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Si llamamos $C_{ij} = \text{Cov}(Z(x_i, t_i), Z(x_j, t_j))$ la ecuación a minimizar quedará

$$\sum_{i=n_0}^{n_1} \sum_{j=n_0}^{n_1} \lambda_i \lambda_j C_{ij} - 2 \sum_{i=n_0}^{n_1} \lambda_i C_{i0} + \text{Var}(Z(x_0, t_0) - \mu_0) - 2m \left(\sum_{i=n_0}^{n_1} \lambda_i - 1 \right). \tag{3.45}$$

El sistema de ecuaciones de kriging ordinario espacio-tiempo es

$$\begin{aligned}
\sum_{j=n_0}^{n_1} \lambda_j C_{ij} - C_{0i} - m &= 0 \\
\sum_{i=n_0}^{n_1} \lambda_i &= 1
\end{aligned} \tag{3.46}$$

en forma matricial

$$\sum = \begin{bmatrix} \text{Var}(Z(x_{n_0}, t_{n_0})) & C_{n_0, n_0+1} & \cdots & C_{n_0, n_1} & 1 \\ C_{n_0+1, n_0} & \text{Var}(Z(x_{n_0+1}, t_{n_0+1})) & \cdots & C_{n_0+1, n_1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ C_{n_1, n_0} & C_{n_1, n_0+1} & \cdots & \text{Var}(Z(x_{n_1}, t_{n_1})) & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.47}$$

El sistema de kriging tiene solución única, y la varianza del error es

$$\sigma^2(x_0, t_0) = \sum_{i=n_0}^{n_1} \lambda_i C_{0i} - C_{00} - m \tag{3.48}$$

3.6. ANÁLISIS DE VALIDACIÓN CRUZADA.

El análisis de validación cruzada es un método que nos permite comprobar las suposiciones que hemos hecho tanto sobre el modelo (i.e. el tipo de función que hemos ajustado al semivariograma, sus parámetros, el tamaño de la vecindad al momento del krigado, etc.), como sobre los datos.

Existen varios métodos para verificar la validez de un modelo ajustado (ver Díaz, 2002 y Davis, 1987). En este trabajo, el método empleado es conocido como validación cruzada ó covalidación y consiste en retirar un elemento de la muestra y estimar el valor en ese punto usando krigado con el modelo de semivariograma obtenido. De forma similar se repite el proceso en cada uno de los elementos de la muestra. Como resultado se obtienen las diferencias entre el valor real y el estimado para todos los puntos y una serie de estadígrafos auxiliares para determinar el grado de ajuste.

3.6.1. Error medio.

Es definido como el valor promedio de la diferencia entre los valores estimados y medidos. Se seleccionará aquel valor medio que esté cercano a cero,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{Z(x_i) - Z^*(x_i)\}, \quad (3.52)$$

dónde $Z(x_i)$ es el valor medido de la variable y $Z^*(x_i)$ es el valor estimado, n es el número de datos (Ahmed y De Marsily, 1987). Si la media de los errores de validación cruzada está próxima a 0, podemos decir que no hay sesgo aparente. Valores positivos de esta medida podrían indicar que sistemáticamente estamos subestimando, y valores negativos de la media indicarán que estamos sobreestimando.

3.6.2. Error cuadrático medio.

Es definido como el valor promedio del cuadrado de las diferencias entre los valores estimados y medidos. Se seleccionará aquel valor cuadrático medio que sea menor.

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{ [Z(x_i) - Z^*(x_i)]^2 \} \quad (3.53)$$

Donde $Z(x_i)$ es el valor medido de la variable y $Z^*(x_i)$ es el valor estimado, n es el número de datos.

3.6.3. Error medio estándar.

Se define como el valor promedio del cuadrado de las diferencias de los valores estimados y los medidos entre la varianza del punto estimado, en el punto de observación. Se seleccionará aquel valor que sea cercano a uno,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{(Z(x_i) - Z^*(x_i))^2}{\sigma_i^2} \right\}, \quad (3.54)$$

dónde n es el número de observaciones, $Z(x_i)$ los valores muestrales de la propiedad en el punto (x_i) , $Z^*(x_i)$ es el valor estimado y σ_i es la desviación estándar del valor estimado. Por otra parte, la varianza del error de predicción (la varianza del krigeado) representa el error de predicción del modelo en la posición, (x_0, t_0) , a partir de las observaciones recogidas en

el resto de posiciones. Dividiendo el error de validación cruzada por, $\sigma(x_i, t_i)_{-i}$, podremos comparar la magnitud del error real y del error de predicción,

$$\frac{Z(x_i, t_i) - Z^*(x_i, t_i)_{-i}}{\sigma(x_i, t_i)_{-i}} . \quad (3.55)$$

Si el modelo que hemos adoptado y las estimaciones obtenidas para los parámetros son las adecuadas, deberá verificar que sea cercano a 1. La media del error de estimación tiende a ser, igual al error predicho por el modelo.

4. BOSQUEJO DE LA HIDROGEOLOGÍA DEL VALLE QUERÉTARO-OBRAJUELO.

Este capítulo tiene la intención de presentar las condiciones geohidrológicas que presenta el acuífero del Valle de Querétaro-Obrajuelo y enmarcar un modelo conceptual de acuífero, los comentarios expresados sólo representan la concepción del acuífero apoyado en la información de los reportes de GUYSA (1996) e IMTA (2005).

Fisiográficamente el acuífero se ubica dentro del eje neovolcánico, en la subprovincia de llanuras y sierras de Querétaro e Hidalgo. Las topofomas que lo caracterizan se clasifican en tres clases: pequeños llanos aislados, sierras de laderas y lomerios con colinas redondeadas (Guysa, 1996).

4.1. HIDROLOGÍA.

La hidrografía indica que el acuífero se sitúa en la subcuenca hidrológica Río Laja, que pertenece a la cuenca hidrológica Río Lerma-Salamanca de la región hidrológica No. 12, sin embargo, la corriente principal -Río Laja- no surca esta porción, pues tiene su origen en el estado de Guanajuato, donde realiza la mayor parte de su recorrido. Dentro del área de estudio se presentan las corrientes poco caudalosas de los Ríos Querétaro y El Pueblito, que recogen volúmenes en una cuenca cuya característica esencial es la de pertenecer a una zona semiárida ya que los factores climáticos son quienes controlan los recursos hidráulicos superficiales. La corriente principal es el Río Querétaro, a este cauce lo forma el tributario principal o río Chichimequillas, que recoge volúmenes de la cuenca situada al noreste del Valle de Querétaro. Fluye en dirección E-W, desde la Cañada hasta Santa María Magdalena donde se intercepta con el río El Pueblito, existen numerosas escorrentías que descienden

del Cerro El Penal, hasta llegar a las partes más bajas del Valle de Querétaro. Este río es el colector público de aguas residuales e industriales de las poblaciones Villa Corregidora, El Pueblito y por supuesto de la ciudad de Querétaro y Zona Industrial Benito Juárez.

El drenaje superficial de las partes altas es denso, del tipo subparalelo y arborescente, cuya disección en las rocas es profunda y de fuerte pendiente; en la zona de lomeríos predomina el tipo radial, menos denso y con poca disección en las rocas. En la zona plana del valle el drenaje es escaso, subdendrítico y paralelo, con cauces de poca disección debido esto último a la poca pendiente y a la reducida capacidad de infiltración, lo que genera graves problemas de inundación sobre todo en la zona urbana.

En el área de estudio existían en condiciones iniciales, cuatro manantiales en las localidades Tlacote El bajo, La Cañada, El Batán y El Salitre. De éstos sólo el del Salitre aflora actualmente pero únicamente en épocas de lluvias. Existen una serie de presas, bordos y vasos de almacenamiento con fines de uso agrícola, control de avenidas y desvío, siendo las presas más importantes El Batán localizada al sur de Valle Querétaro y El Cajón situada al norte de Juríca. Los bordos tales como Benito Juárez, Britania, Azteca y Bolaños. El cuerpo de mayor capacidad es la presa El Batán, (localizado al sur, fuera del área de estudio), seguido de la presa El Cajón (Guysa, 1996).

4.2. INTEGRACIÓN GEOLÓGICA Y GEOFÍSICA.

La información geológica y estructural indican que el valle de Querétaro-Obrajuelo se aloja en una secuencia de fosas tectónicas (originada por el tectonismo ocurrido en el Terciario), por lo que el acuífero está limitado por un sistema de fallas destacando las de Querétaro, al de rumbo noroeste-sureste situadas al oriente, justo en la zona de la Cañada, la falla El Tlacote, al oeste, en los límites con el estado de Guanajuato; Las evidencias geológicas y

geofísicas indican que el valle de Querétaro se aloja en una gran fosa tectónica (originada por el tectonismo ocurrido en el Terciario) limitada por las fallas Querétaro y Obrajuelo de rumbo noroeste-sureste situadas al oriente y poniente respectivamente; a profundidad, el graben se divide en un sistema de fosas escalonadas sepultadas por sedimentos aluviales, flujos de lava y depósitos volcanoclásticos lacustres potentes.

Estos materiales están parcialmente saturados de agua y forman los acuíferos del valle de Querétaro y del valle de Obrajuelo.

Dentro de este graben existen otra serie de estructuras también originadas por el tectonismo ocurrido en el Terciario, dentro de las cuáles están, además de las fallas mencionadas, la falla La cañada en la parte este y la falla Menchaca en la parte noreste. La parte central de la zona de estudio comprende una planicie en donde se asienta la ciudad de Querétaro con elevaciones del relieve considerables hacia la parte norte y sur del valle.

La geología superficial describe las unidades estratigráficas siguientes: 1) Calizas y lutitas del Cretácico Superior, ubicadas en la zona noroccidental en el poblado Juriquilla. 2) Andesitas, con afloramientos en toda el área estudiada. Esta unidad se considera como el basamento del acuífero en el presente estudio. 3) La ignimbrita, de poca extensión aflora en las localidades El Nabo, sobre el arroyo Mompani y en La Cañada. 4) Basalto lajeado que aflora en diversos lugares y diversas dimensiones en toda el área de estudio. 5) Tobas líticas que afloran en mínima área en las localidades de Menchaca, en La Cañada sobre el cauce del río Querétaro, al suroeste de El Nabo sobre el arroyo Mompani. 6) Sedimentos volcanolacustres, existen prácticamente en toda el área de estudio y rellenan el graben de Querétaro hasta formar la planicie, formando el acuífero granular del valle. 7) Basalto, esta

unidad conjuntamente con los depósitos aluviales conforman la mayor parte de los afloramientos presentes en la zona de estudio, se observan en los cerros: La Cruz, Las Campanas, Gordo y El Tambor entre otros. 8) Brecha volcánica, esta unidad se observa sobre la cima del cerro Cimatorio, el cerro El Nabo, sobre las márgenes del río Querétaro, sobre el corte de la carretera al Penal, en el extremo noroccidental del área estudiada entre otros lugares. 9) Aluvión y/o suelo residual que constituyen propiamente los valles de Querétaro y Obrajuelo formando la planicie del centro. 10) Rocas ígneas intrusivas, localizadas en las inmediaciones del poblado Juriquilla al norte de la ciudad de Querétaro.

De acuerdo con los cortes litológicos de pozos, la geología del subsuelo por los que el agua circula está constituida por los medios poroso y fracturado, los materiales de estos medios se encuentran intercalados e interdigitados entre sí y son los siguientes:

Medio poroso: Gravas, arenas, arcillas, tepetate arenoso, material aluvial de gravas y arcillas, aglomerado volcánico, toba lacustre, boleos inestables, conglomerados de clásticos medios y finos, arcilla, tobas arcillo arenosas, arena arcillosa, arcilla arenosa, gravas con arcilla, limo y tezontle.

Medio fracturado: andesitas, andesitas alteradas, ignimbritas, riolitas del Terciario y basaltos, brechas volcánicas, tobas líticas y vítreas del Cuaternario.

Cabe además mencionar que de los materiales anteriores se tiene la presencia considerable de arcillas y andesitas en toda el área de estudio. Las arcillas se encuentran principalmente en la zona de la ciudad de Querétaro y la zona industrial Benito Juárez. Los estratos de arcilla y andesita se encuentran intercalados con otros materiales de propiedades hidráulicas más favorables para la aportación de agua subterránea.

La disposición natural de las unidades litológicas agrupadas en los medios poroso y fracturado, conforman el sistema que define el flujo del agua subterránea en la zona de estudio, lo que constituye un acuífero del tipo libre, comportándose como confinado localmente en algunas localidades como el centro de la ciudad de Querétaro, la zona industrial Benito Juárez y San Pedro Mártir por la presencia de arcilla.

El acuífero es heterogéneo ya que está integrado por variaciones litológicas importantes, que se presentan en sentido horizontal y vertical.

Entre los efectos del sistema tectónico de las fallas Tlacote, Obrajuelo y Querétaro, se manifiesta a profundidad y localmente, la elevación de la temperatura del agua subterránea, a 29 °C en la mayor parte del valle pero es posible encontrar algunas captaciones de hasta 43 °C y en la zona de la laguna El Salitre de 90 °C.

4.3. *MODELO CONCEPTUAL.*

El modelo conceptual más actualizado lo presenta el reporte del IMTA (2005), en el cual se infiere que las principales zonas de recarga al acuífero se presentan al Este por La Cañada; al Noreste, proveniente de las montañas, al Norte, en la zona de Jurica, al Sur se tiene una entrada en el lineamiento del río El Pueblito, al suroeste, y otra más en el lado norte de Obrajuelo. Por otro lado, en la zona entre los límites del estado de Querétaro y Guanajuato se tiene la presencia de abatimientos importantes, además de que no es posible definir la presencia de un parteaguas subterráneo o alguna frontera física que permita separar a ambos acuíferos. Por lo anterior, no hay evidencias de algún elemento que permita estudiar

y en específico separar a ambos acuíferos, a pesar de que en estudios anteriores esto se ha hecho.

En condiciones iniciales la fuente principal de recarga del agua al acuífero del valle de Querétaro es la infiltración de la lluvia en las superficies permeables, por fracturamiento local de las sierras periféricas, en los lineamientos estructurales mayores. Otro mecanismo de recarga se realizaba por la infiltración en los cauces de las principales corrientes superficiales como son el río Querétaro, el arroyo El Pueblito y los arroyos La Gallina y Jurica.

Las recargas por entradas subterráneas horizontales, eran las siguientes: La Cañada, Jurica, Tlacote, El Pueblito e Ixtla (al norte del valle de Obrajuelo) más la proveniente de la periferia semipermeable, los niveles del agua subterránea eran someros y el flujo se comportaba prácticamente siguiendo las pendientes de la cuenca superficial. Estas zonas de recarga estaban controladas por las variaciones estacionales y del nivel del río Querétaro que funcionaba como efluente natural.

La descarga superficial del acuífero tenía lugar a través de la evapotranspiración debido al nivel somero que tenía el acuífero.

Por otra parte se tenía un drenado subterráneo hacia el acuífero de Los Apaseos como respuesta a cargas hidráulicas definidas por un sistema de flujo intermedio en un acuífero preponderantemente libre. El sentido del flujo en el acuífero era preferencialmente de oriente a poniente. En esas condiciones originales, la recarga de agua total era igual a la descarga del sistema. En la figura 4.1 se esquematizan las direcciones del flujo en las condiciones originales del acuífero.

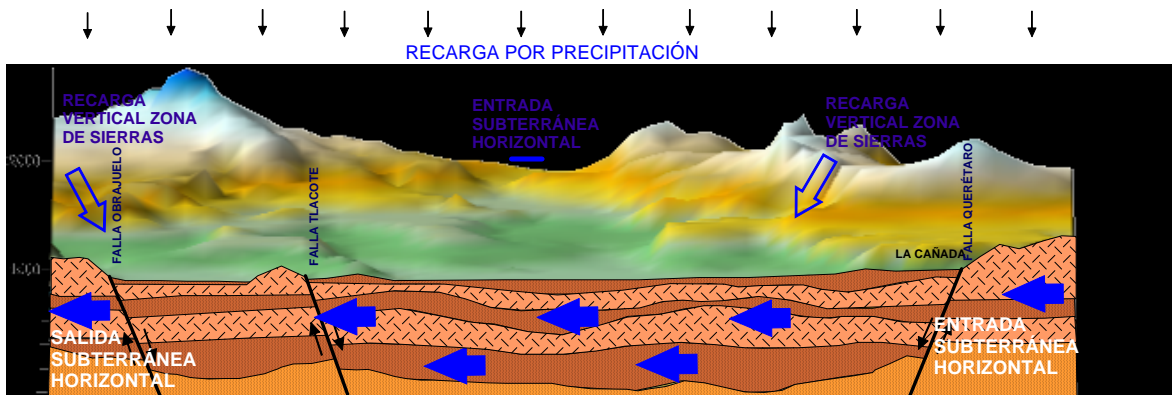


Figura 4.1 Esquema conceptual del flujo en el estado original del acuífero, (tomado de Simuta, 2005).

En la década de los 70's el estado de equilibrio del acuífero empezó a modificarse debido al incremento en la explotación del acuífero. El incremento de pozos y la continua explotación del acuífero hicieron que los niveles del acuífero disminuyeran de forma considerable. La continua disminución de los niveles de saturación originó en primer lugar la cancelación de los volúmenes descargados a través de manantiales y poco después el cambio de régimen de escurrimiento permanente en los cauces. Los cuerpos de agua disminuyeron su tirante, por lo que la tasa de recarga procedente del escurrimiento disminuyó. Estos fenómenos incidieron también en la evapotranspiración por lo que la humedad relativa del ambiente también decreció considerablemente.

Cuando el nivel freático disminuyó de tal forma que alcanzó las capas de baja conductividad hidráulica, el acuífero varió en algunas localidades de confinado a libre y se definieron dos sistemas de flujo subterráneo: un sistema de flujo local y otro sistema de flujo intermedio, los cuales se describen a continuación.

El sistema de flujo local está formado por zonas con elevaciones del nivel freático que presentan un comportamiento local de poca profundidad en la zona central del valle y se presenta principalmente a lo largo del cauce del río Querétaro. En la actualidad se infiere que está limitado en su parte inferior por una capa semiconfinante. Éste se presenta en algunas localidades en medios porosos y en otras en fracturado.

En el sistema de flujo intermedio las líneas de flujo responden a cargas hidráulicas menores respecto del flujo local. Cabe destacar que este sistema sustenta casi el total de extracción en el valle y que está formado también por medio poroso y fracturado. Actualmente el nivel del agua subterránea en este sistema varía entre 100 y 120 metros de profundidad en la mayor parte del valle y localmente se tienen profundidades de 134 m en la parte central de la Ciudad de Querétaro, 160 m en San Pedro Mártir y de 244 m en Villa Corregidora, debido al volumen de extracción en esas zonas.

En la zona de descarga horizontal del acuífero hacia el acuífero de Los Apaseos los gradientes del agua subterránea se han invertido modificando el sistema de flujo, de tal forma que se ha formado un parteaguas subterráneo, producto de la explotación que se tienen tanto en el acuífero de Los Apaseos como en el de Obrajuelo. En las figuras 4.2 se muestra el esquema del modelo conceptual de la dinámica actual del acuífero.

De acuerdo con la temperatura del agua subterránea se tienen registros que indican la presencia de termalismo principalmente en las localidades de San Bartolo Agua Caliente y la laguna El Salitre; ambas alineadas con la falla El Salitre. En el estudio del IMTA (2005) se comenta que para ésta zona sugieren la existencia de dos flujos, uno correspondiente a

una recarga local caracterizada por presentar agua fría y otro perteneciente a un flujo regional que adquiere temperatura al pasar cerca de un foco geotérmico y ascender hacia la superficie facilitado por la falla de El Salitre.

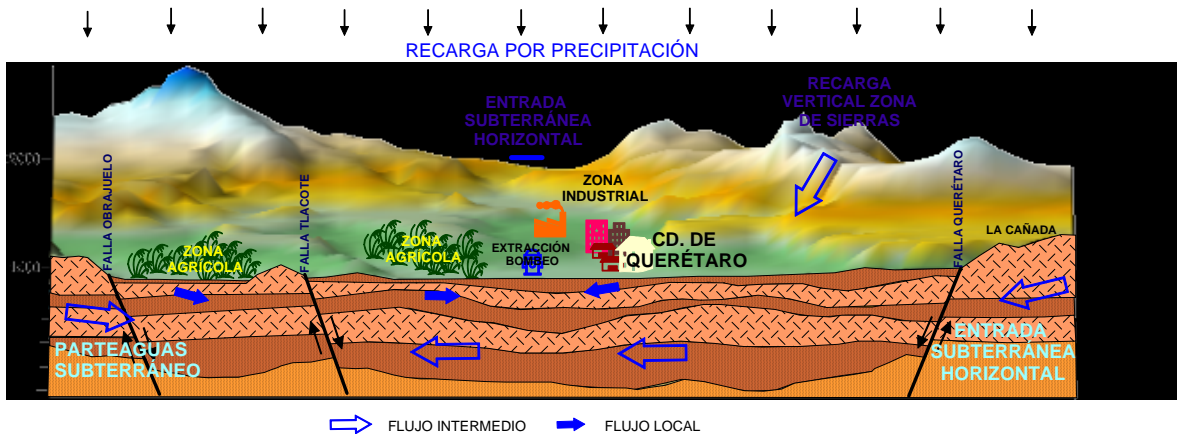


Figura 4.2. Modelo conceptual del funcionamiento hidrodinámico del acuífero, (tomado de Simuta, 2005).

5. ANÁLISIS DE LA CARGA HIDRÁULICA, UNIVARIADO.

Los pasos que constituyen el análisis geoestadístico se resumen en cinco puntos que son: análisis preliminar, análisis exploratorio de los datos, análisis estructural, validación cruzada y estimación espacial. En este capítulo, se describen los resultados sin hacer énfasis en la teoría que ya fue descrita en el capítulo 3. En las secciones siguientes, se presentan dichos análisis para la carga hidráulica en los años 1993, 1995 y 1999. Estos años se seleccionaron debido a que cuentan con un número importante de lecturas lo que favorece en la estimación del semivariograma.

5.1. CARGA HIDRÁULICA ,1993.

A continuación se describe cada uno de los cinco puntos que componen el análisis geoestadístico univariado para la carga hidráulica del año 1993.

5.1.1. Análisis preliminar.

Este proceso consta de la colección de los datos, verificación de los mismos y la generación de las bases correspondientes. Debido a que se está trabajando con la carga hidráulica del sistema acuífero, es necesario conocer tanto la profundidad del nivel estático del pozo como la elevación del brocal. La resta de ambas lecturas nos arroja el dato correspondiente a la elevación de la carga hidráulica. Como el resultado de este proceso es la base de datos depurada que comprende un total de 85 pozos, los cuales cuentan con nivel de brocal y el valor de elevación del nivel.

Respecto a la ubicación de los puntos de medición su referencia está dada en unidades transversa de mercator conocidas como UTM, referidas al datum NAT27 , que son fáciles

de trabajar ya que reflejan unidades en metros que se pueden manipular para obtener resultados en unidades de kilómetros o metros según convenga.

Los estadígrafos que caracterizan a cada uno de las muestras son presentados en el apartado siguiente.

5.1.2. Análisis exploratorio.

El análisis exploratorio se basa en técnicas estadísticas convencionales que nos permiten caracterizar los datos. Éste es fundamental para que el análisis geoestadístico sea válido.

Se realizó un análisis exploratorio de los datos. Éste inició con la determinación de la posición y magnitud son los valores. Para ello, se graficaron los puntos de medición con su respectivos valores.

En la figura 5.1 se muestra la distribución espacial de los mismos así como el valor de medición. En ella, se observa que la distribución de los pozos concentra una mayor medición de las lecturas en el valle de Querétaro y Obrajuelo, siendo mucho menor en la zona de los Apaseos, principalmente en el área de la Laguna el Salitre y zonas altas. Aunque es posible observar algunos puntos que se encuentran muy cercanos, uno del otro, no consideramos que el muestreo esté afectado por agrupamiento por lo que se trabajó con la totalidad de las observaciones.

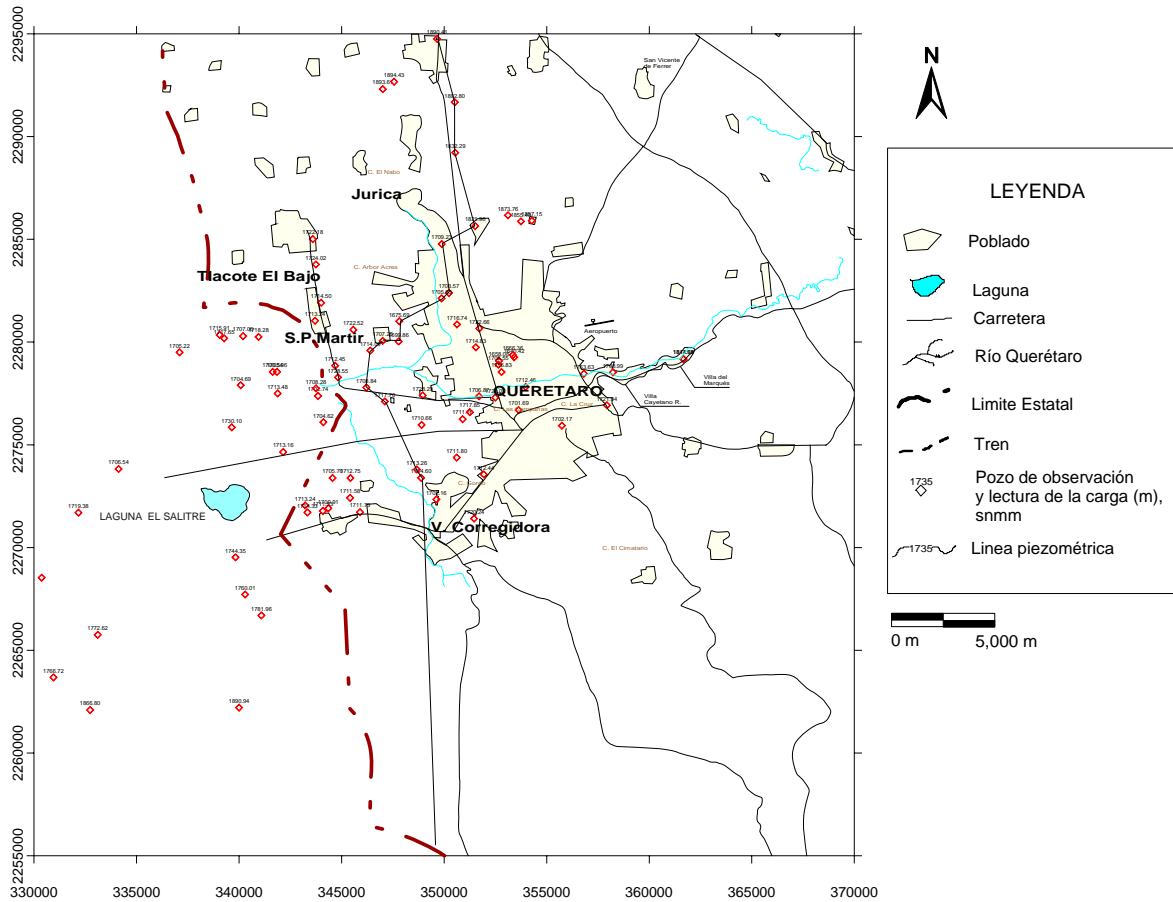


Figura 5.1. Pozos con medición de la carga hidráulica, para el año de 1993.

Una vez que hemos visto la distribución espacial de los datos se procede a realizar una análisis estadístico de los mismos, donde se obtiene la lectura de la elevación de la carga hidráulica, la media, la varianza, la desviación estándar, el coeficiente de asimetría y el coeficiente de variación de cada parámetro, así mismo se verificó que la distribución de la muestra fuera simétrica. Los resultados se muestran en la tabla 5.1.

Tabla 5.1 Estadígrafos datos del nivel freático para el año 1993 y residuales.

Año	1993	1993 residual
número de pozos	85	85
media	1737.35	-2.0E-6
mediana	1713.48	2.82
desviación estándar	58.12	28.64
mínimo	1640.42	-90.29
máximo	1894.43	79.13
curtosis	1.64	1.57
coeficiente de simetría	1.60	-0.39

De los datos anteriores, específicamente en los estadígrafos de curtosis a simetría se observa que la distribución no presenta una distribución normal, esto es mejor representado en el histograma de la figura 5.2.

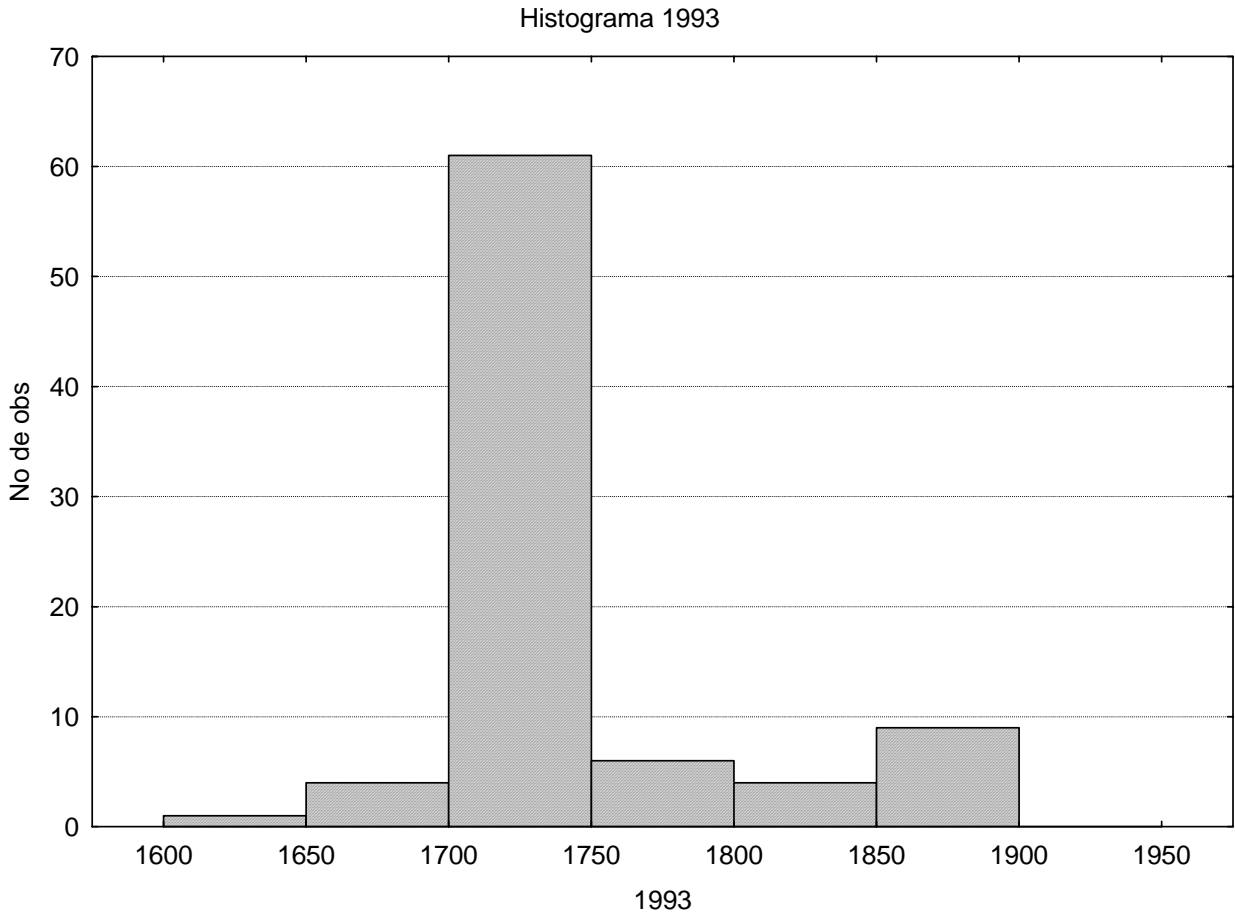


Figura 5.2. Histograma de la carga hidráulica, 1993. Valores medidos.

5.1.2.1. Estimación de la deriva.

Debido a que la distribución, anterior no es simétrica, se procedió a hacer una transformación de los datos que consistió en restarles el valor de la tendencia, misma que se calculó a partir de un análisis de regresión por mínimos cuadrados ordinarios, ajustando a un polinomio de segundo orden.

Para tratar el efecto de deriva, se considera que la variable aleatoria se compone de dos términos:

$$Z(\) = Z_R(\) + m(\) \quad (5.1)$$

Donde $Z_R(\)$ es la componente estocástica y $m(\)$ es la deriva, y se modela como una función determinística suavizada que depende de la posición, cuyos parámetros son obtenidos de los datos mediante:

$$m(\) = \sum_{l=0}^L a_l f_l(\), \quad (5.2)$$

dónde $f_l(\)$ es la función de la localización de la medición y a_l es un parámetro desconocido (Samper y Carrera, 1990).

Como se mencionó antes en el caso particular los coeficientes a_l se calcularon por medio del método de mínimos cuadrados en un polígono de segundo orden.

Los estadígrafos de los residuales, que se definen como el valor del dato menos la tendencia estimada, se muestran en la tabla 5.1. Es de destacar que las muestras de los residuales presentan curtosis positivas y simétricas, que representan de mejor manera una distribución normal (véase figura 5.3.)

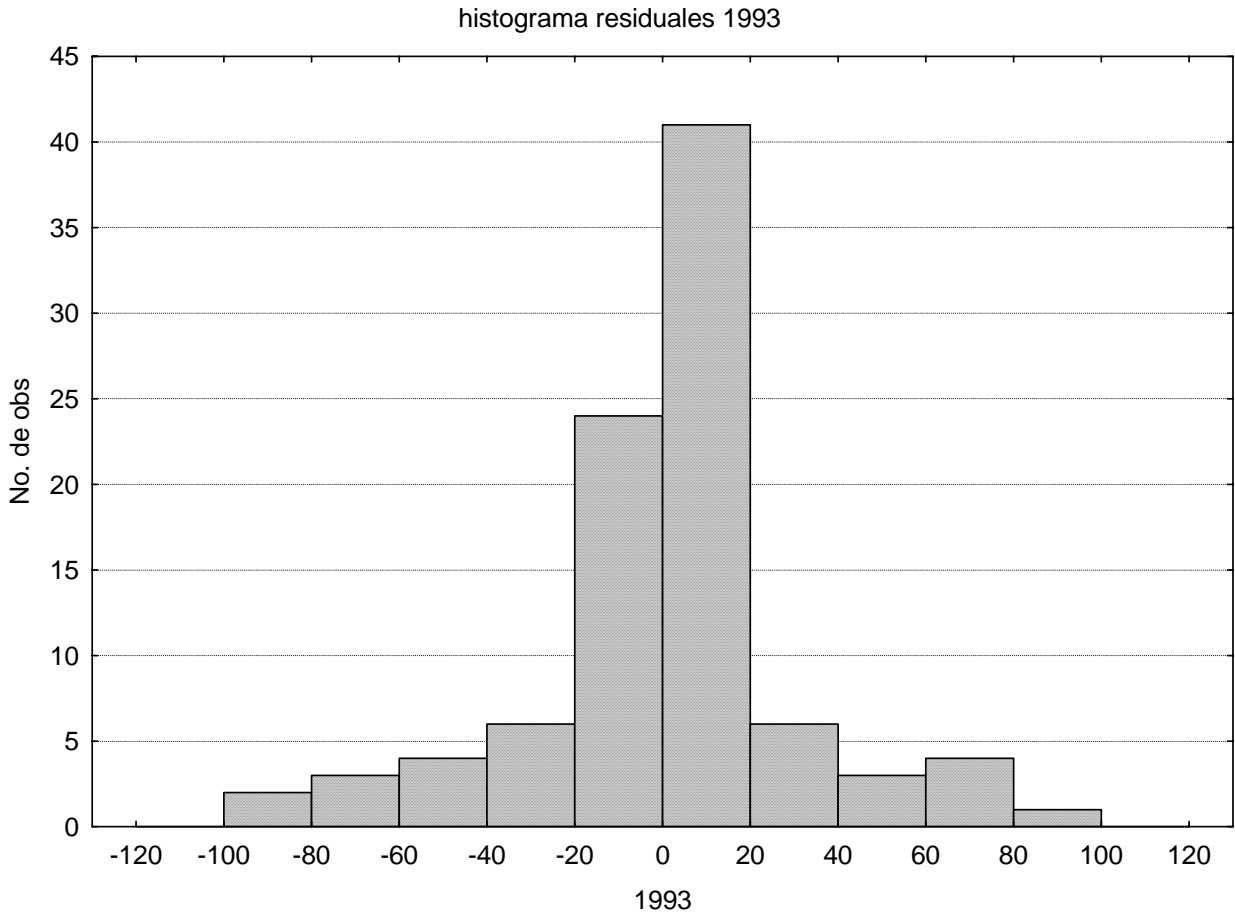


Figura 5.3. Histograma de los residuales de la carga hidráulica, para 1993.

5.1.3. Análisis estructural.

El propósito de este paso es determinar la estructura espacial de los datos, para este fin se determinará el semivariograma muestral y posteriormente se ajustará un modelo autorizado para el semivariograma. Como parte de la determinación del modelo se obtienen los parámetros característicos del mismo, que son la pepita, el alcance y la cima.

El semivariograma se calculó con intervalos de 10 clases y un vector de separación h igual a un medio la distancia máxima de las observaciones, utilizando el algoritmo GAMV.exe de GSLIB (Deutsch y Journel, 1998).

Una vez propuesto el semivariograma muestral, es necesario comprobar si éste cumple con las condiciones necesarias para ser un modelo válido, para este fin y de acuerdo con la práctica se procede a ajustarlo, teniendo como referencia los modelos autorizados, *e.g.*, lineal, lineal con meseta, cuadrático, cúbico, esférico, exponencial, gaussiano ó agujero, que son modelos positivos definidos (Cressie, 1991). Entendiéndose por ajuste el proceso mediante el cual se compara el modelo teórico con el muestral, modificando los parámetros del primero hasta que reproduzca de mejor manera el comportamiento del semivariograma muestral. En el proceso del ajuste se tienen varias metodologías, que van desde el ajuste visual, que es meramente cualitativo, utilizando el método de validación cruzada (Gambolati y Volpi, 1979; Volpi y Gambolati, 1979) o los ajustes por aproximación de mínimos cuadrados (Cressie, 1985; Tough y Leyshon, 1985).

En la figura 5.4 se muestra el semivariograma muestral, en línea continua, y el semivariograma teórico, que corresponde a un modelo esférico con pepita , cima, y alcance.

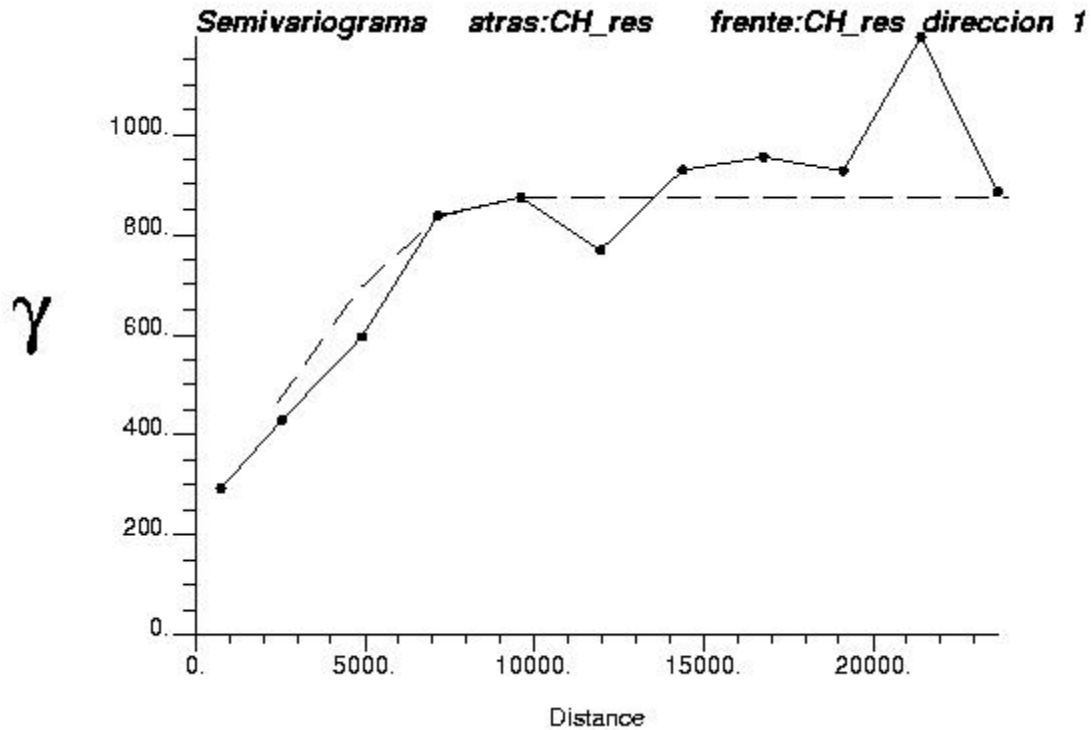


Figura 5.4. Semivariograma muestral de los datos de carga hidráulica, año 1993.

5.1.4. Validación cruzada.

Como se indicó en la sección 3.5 el análisis de validación cruzada es un método que nos permite comprobar las suposiciones que hemos hecho tanto sobre el modelo (i.e. el tipo de función que hemos ajustado al semivariograma, sus parámetros, el tamaño de la vecindad al momento del krigado, etc.) como sobre los datos. El procedimiento se basa en retirar el punto de observación uno a la vez y estimar con krigado el valor en esa posición. Los resultados de validación cruzada son:

Tabla 5.2 Resultados de validación cruzada, 1993.

EM	ECM	ECME	Parámetros del modelo			Tipo de modelo	AIC
			C ₀	C	a		
-0.19	390.55	0.82	200	650	9000	Esférico.	65

EM = Error cuadrático, ECM = Error cuadrático medio, ECME = error cuadrático medio estándar, C₀= pepita, C = cima, a = alcance, AIC = índice de Alcaike.

5.1.5. Estimación de la carga hidráulica.

A continuación se presentan las configuraciones de la carga hidráulica y los valores del error de varianza para los años 1993 utilizando krigeado residual.

La elevación de la carga hidráulica en el año de 1993, presenta un marcado descenso en la porción central del valle, con una elevación mínima de 1640.42 m. Los valores que indican una mayor carga hidráulica se distribuyen en los márgenes del acuífero con un valor máximo de 1894.43 m, como era de esperarse ya que la mayor concentración de pozos se ubica en el centro del valle.

La estimación en este año de 1993, muestra un gradiente de nivel freático de forma casi concéntrica, alargándose en dirección E-W.

El grafico de la estimación de la varianza, en el año de 1993, nos indica que los pozos ubicados en la porción central presentan un valor similar de varianza (400). En contra parte

los pozos ubicados en el área del Salitre los valores son mayores. Esto es debido a que existe un número menor de puntos de observación y estos están distantes entre sí.

De forma general el esquema de flujo indica una confluencia de las líneas hacia la parte central del valle.

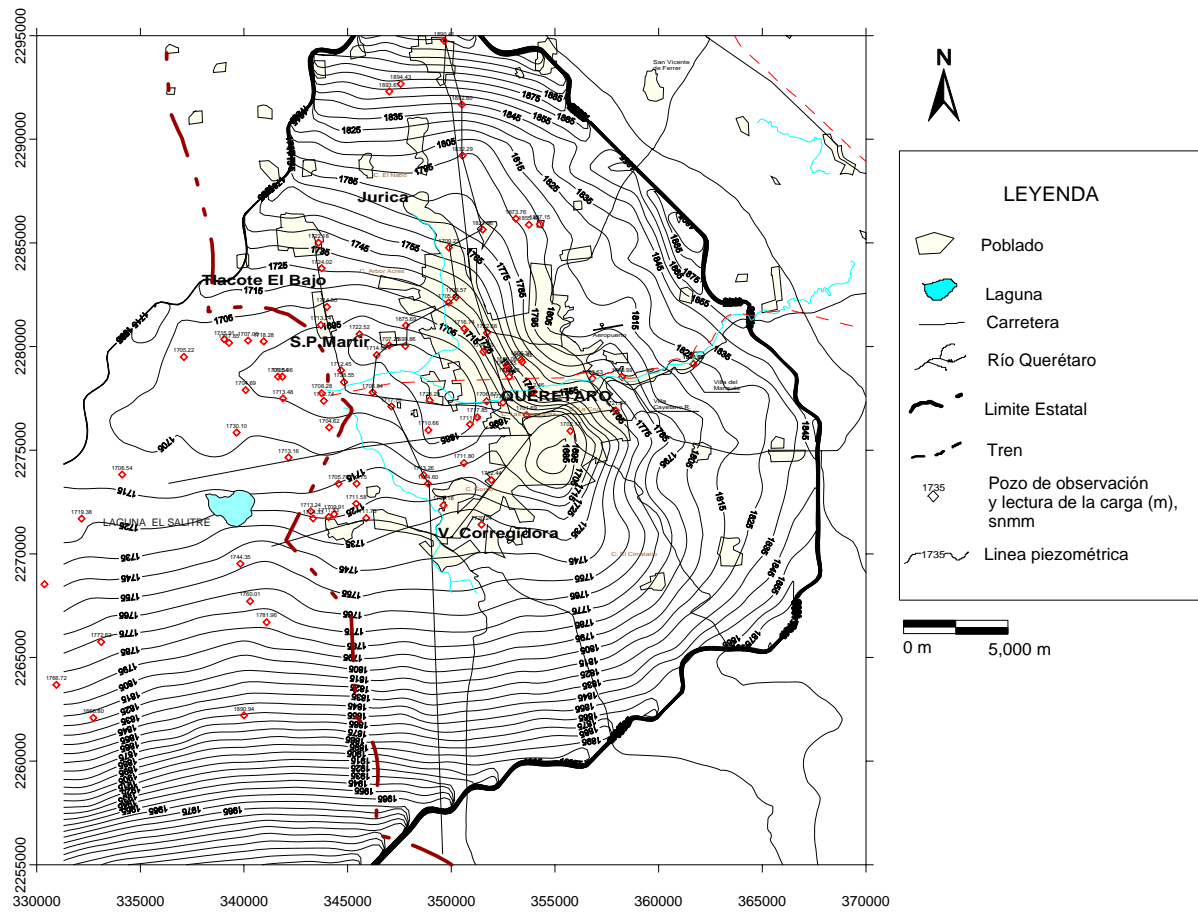


Figura 5.5. Krigeado residual para el año de 1993, valores de la carga hidráulica.

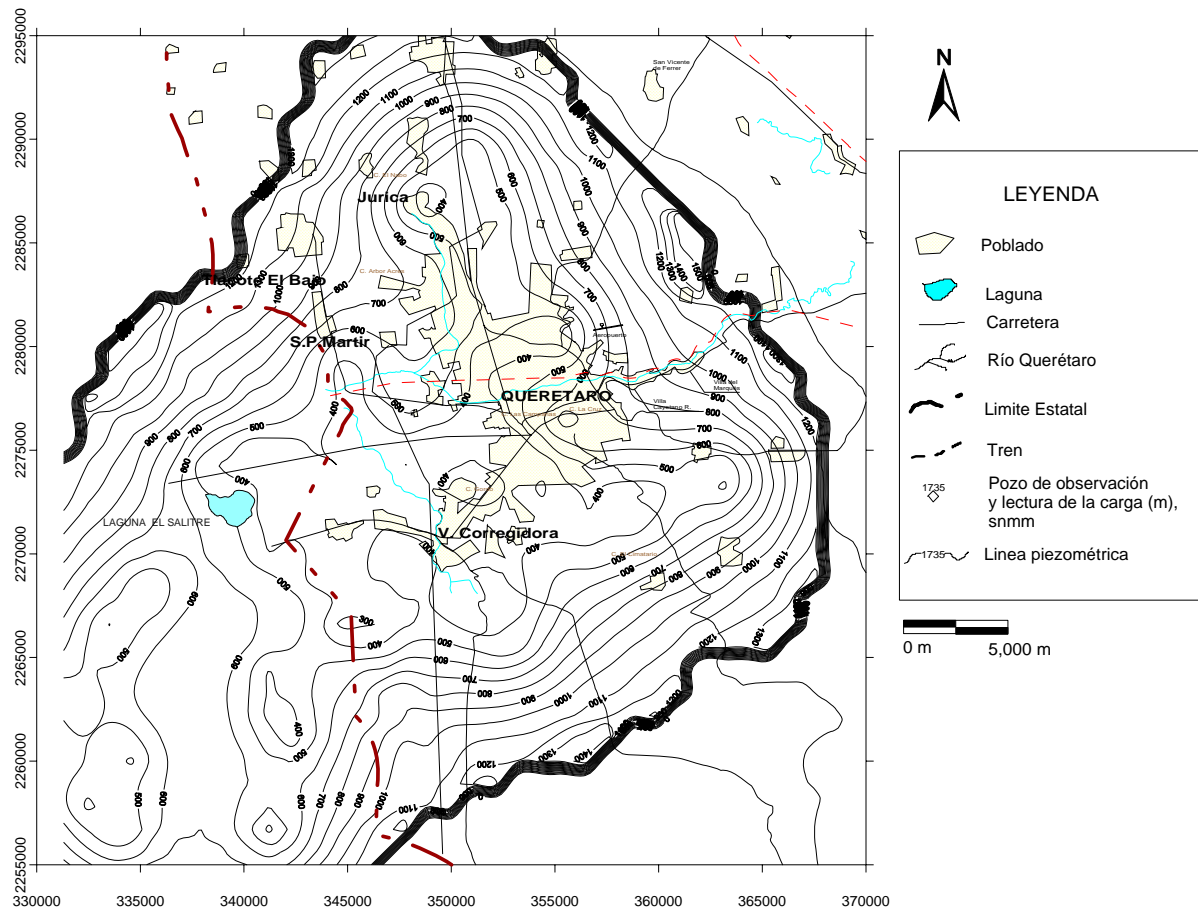


Figura 5.6. Krigado residual para el año de 1993, varianza del error de la estimación.

5.2. CARGA HIDRÁULICA ,1995.

De la misma manera del punto 5.1 se procede a describir cada uno de los cinco puntos que componen el análisis geoestadístico univariado para la carga hidráulica del año 1995. Con objeto de no hacer repetitiva la descripción se sigue la misma secuencia presentando sólo los resultados.

5.2.1. Análisis preliminar.

En este caso la base de datos depurada que comprende un total de 112 pozos, los cuales cuentan con nivel de brocal y el valor de elevación del nivel.

Los estadígrafos que caracterizan a cada uno de las muestras se presentan en el apartado siguiente.

5.2.2. Análisis exploratorio.

En la figura 5.5 se muestra la distribución espacial de los mismos así como el valor de medición. En ella se observa que la distribución de los pozos concentra una mayor medición de las lecturas en el valle de Querétaro y Obrajuelo, pero a diferencia del año 1993, se cuenta con un número mayor de pozos en el área de los Apaseos, principalmente en el área de la Laguna el Salitre y zonas altas. Aunque es posible observar algunos puntos que se encuentran muy cercanos, uno del otro, no consideramos que el muestreo esté afectado por agrupamiento por lo que se trabajará con la totalidad de las observaciones.

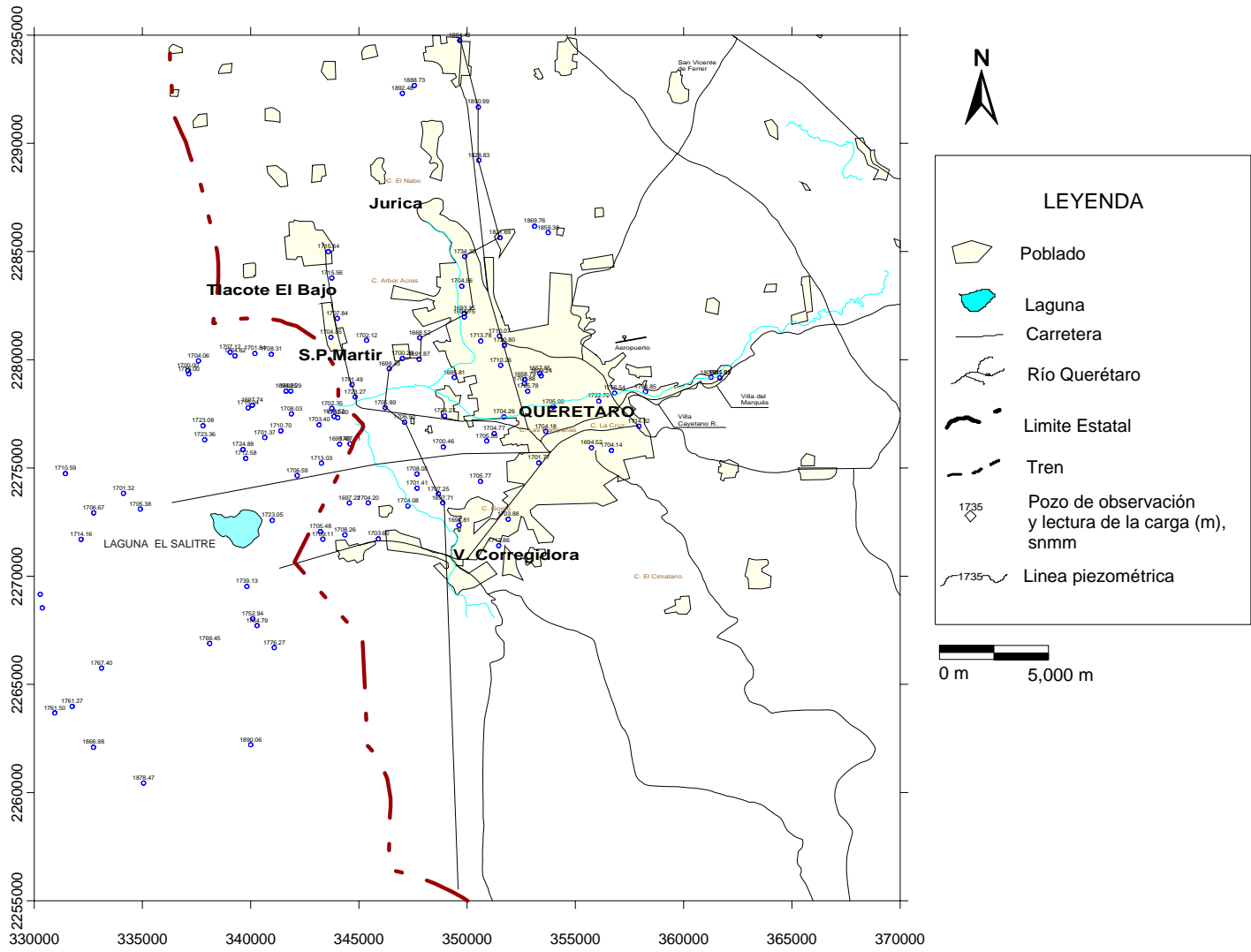


Figura 5.7. Pozos con medición de la carga hidráulica, para el año de 1995.

Los resultados del análisis estadístico se muestran en la tabla siguiente.

Tabla 5.3. Estadígrafos de la carga hidráulica para el año 1995 y residuales.

Año	1995	1995 residual
número de pozos	112	112
media	1728.37	-3.0E-6
mediana	1706.89	0.54
desviación estándar	54.46	27.42
mínimo	1629.24	-92.66
máximo	1892.48	89.45
curtosis	2.72	2.02
coeficiente de simetría	1.84	-0.05
	asimetría grave	hay simetría

De los datos anteriores, específicamente en los estadígrafos de curtosis a simetría se observa que la distribución no es simétrica, esto se ve claramente en el histograma de la figura 5.8.

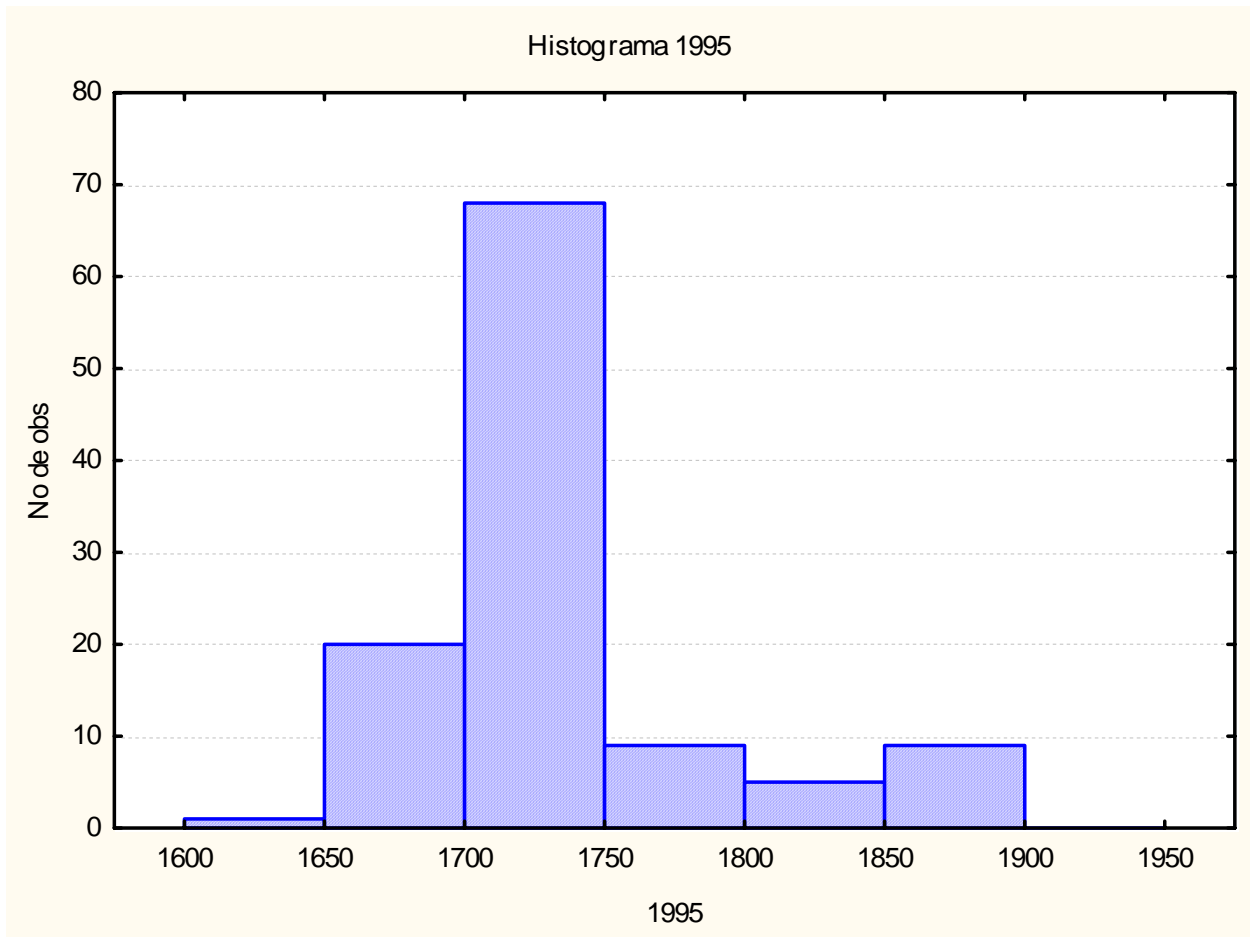


Figura 5.8 Histograma de la carga hidráulica, 1995. Valores medidos.

5.2.2.1. Estimación de la deriva.

Debido a que las distribuciones, anteriores no son simétricas, se procedió a hacer una transformación de los datos de la misma forma como se describe en la sección anterior.

Los estadígrafos de los residuales, se muestran en la tabla 5.3. Es de destacar que las muestras de los residuales presentan curtosis positivas y simétricas, que representan de mejor manera una distribución normal (véase figura 5.9).

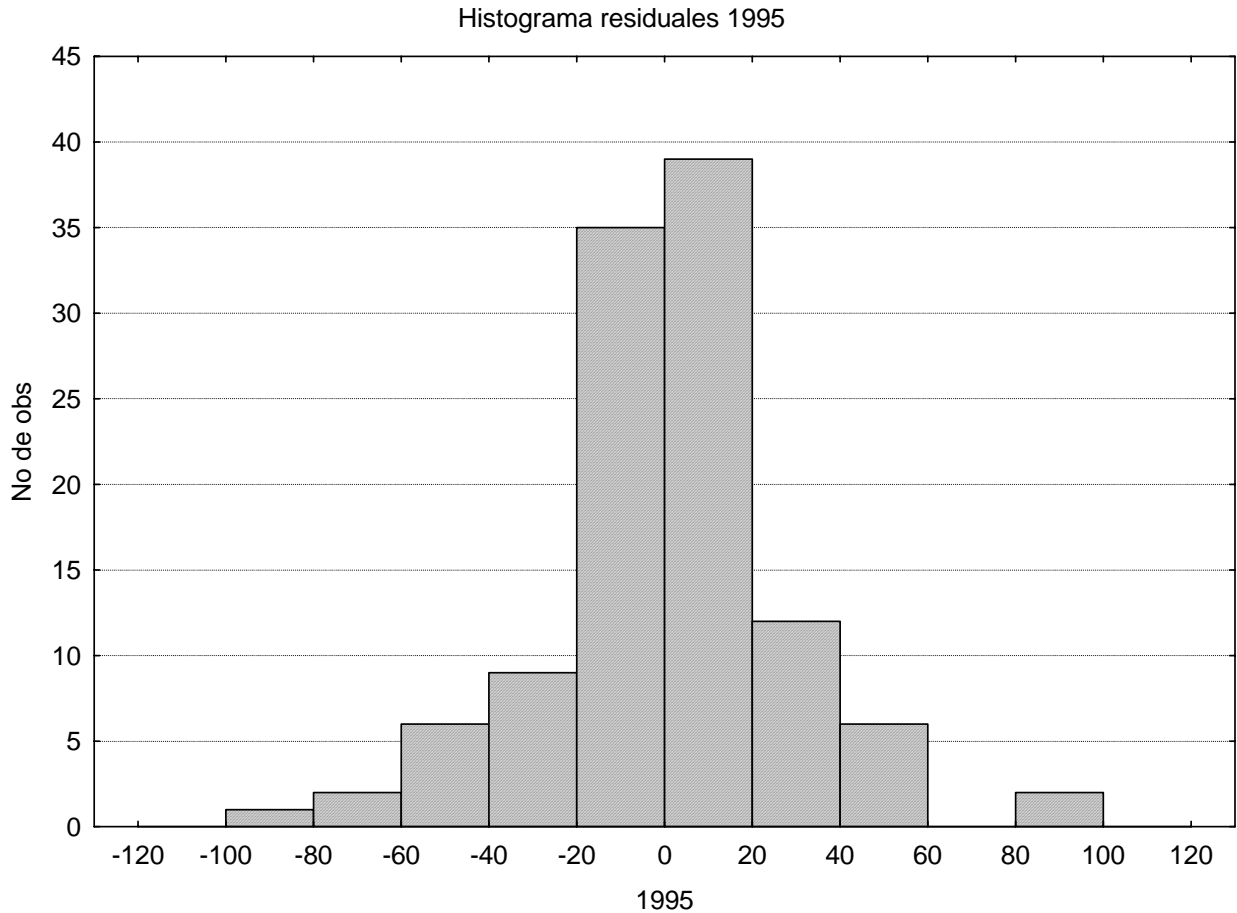


Figura 5.9 Histograma de la carga hidráulica, 1995. Valores de los residuales.

5.2.3. Análisis estructural.

El cálculo del semivariograma muestral se hizo igual que en la sección 5.1.3.

En la figura 5.10 se muestra el semivariograma muestral, en línea continua, y el semivariograma teórico, que corresponde a un modelo esférico con pepita, cima, y alcance.

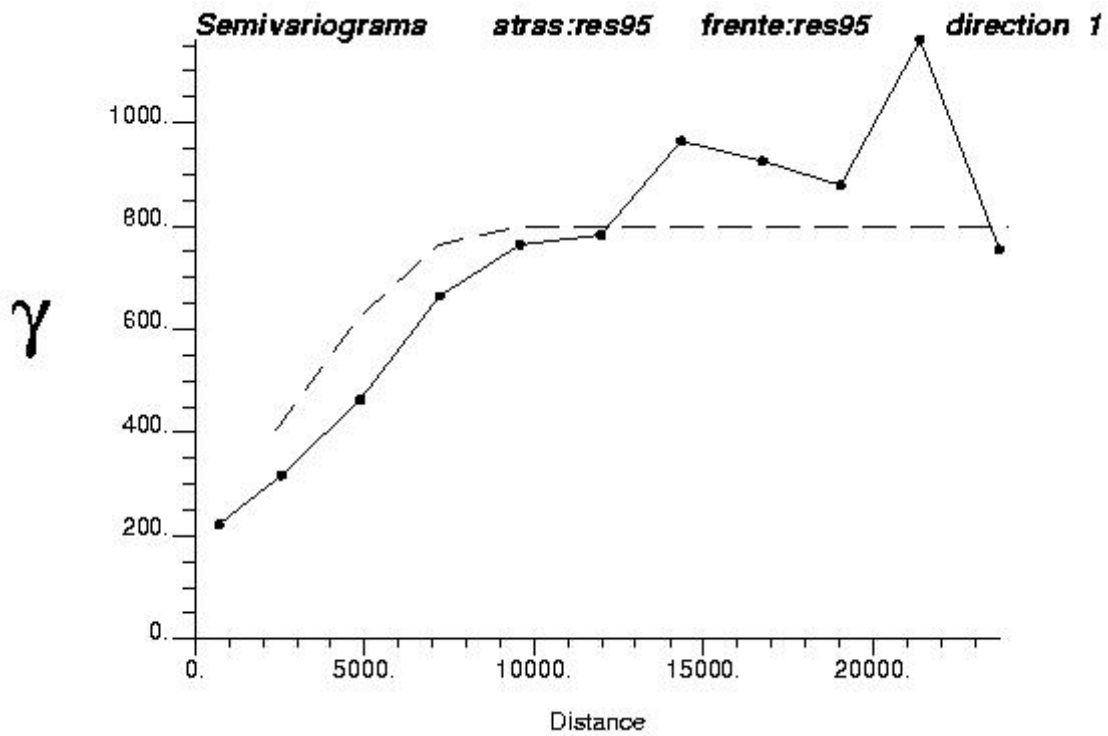


Figura 5.10 Semivariograma muestral de los datos de carga hidráulica, año 1995.

5.2.4. Validación cruzada.

Utilizando los mismos criterios establecidos en la sección 3.4, se presentan los resultados de la validación cruzada:

Tabla 5.4. Resultados de validación cruzada, 1995.

EM	ECM	ECME	Parámetros del modelo			Tipo de modelo	AIC
			C ₀	C	a		
-0.10	252.34	0.8	150	650	9000	Esférico.	74

EM = Error cuadrático, ECM = Error cuadrático medio, ECME = error cuadrático medio estándar, C0= pepita, C = cima, a = alcance, AIC = índice de Alcaike.

5.2.5. Estimación espacial.

La estimación en este año, 1995, muestra el mismo gradiente de nivel freático, que el año 1993, de forma casi concéntrica, alargándose en dirección E-W.

El gráfico de la estimación de la varianza, se observa una disminución en la zona del Salitre y una extensión de la cota mínima de 400 localizados en la zona central. Esto es originado por el incremento de puntos de observación tanto en el área del Salitre como centro, manteniéndose la incertidumbre alta en las márgenes del acuífero. Lo anterior es de esperarse ya que no se incrementan los puntos de observación en esas zonas.

El esquema de flujo se mantiene igual a los años anteriores.

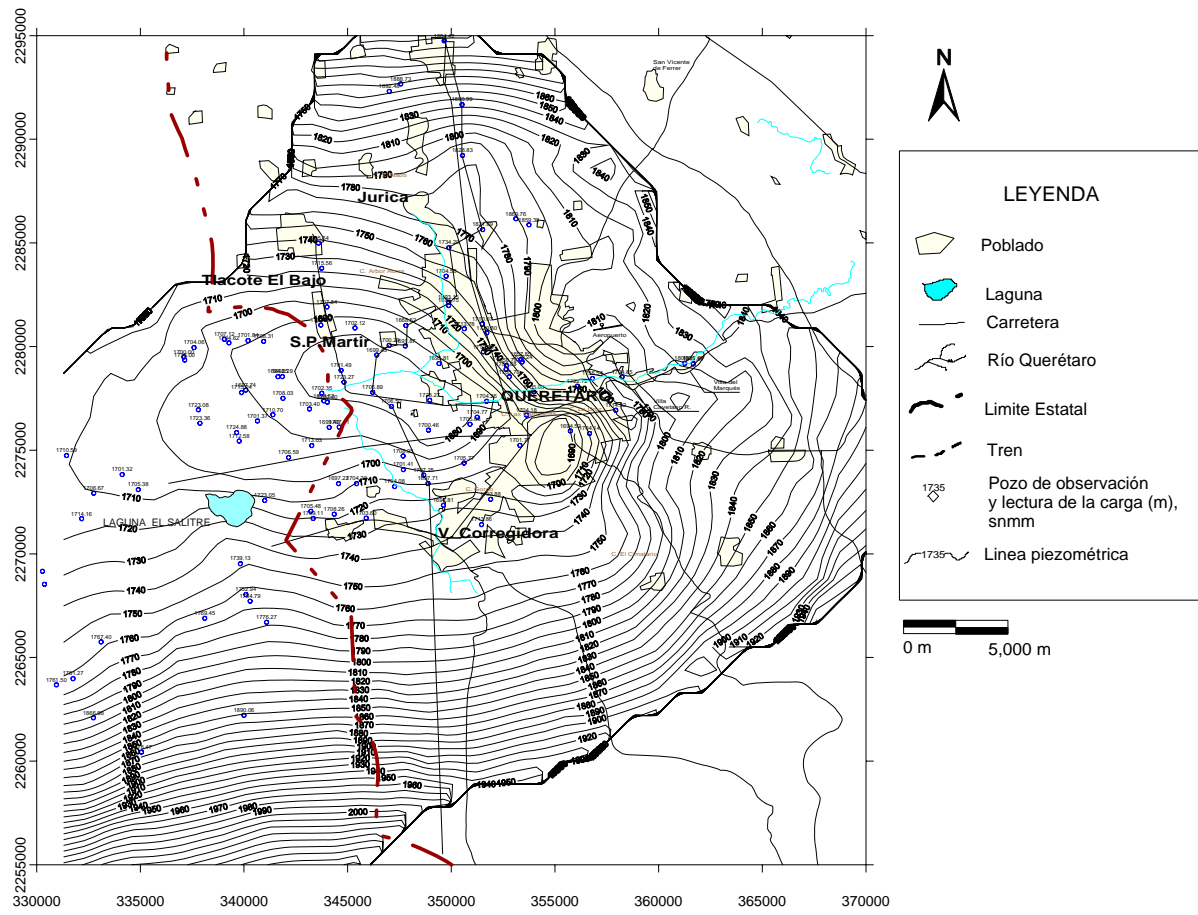


Figura 5.11. Krigeado residual para el año de 1995, valores de la carga hidráulica.

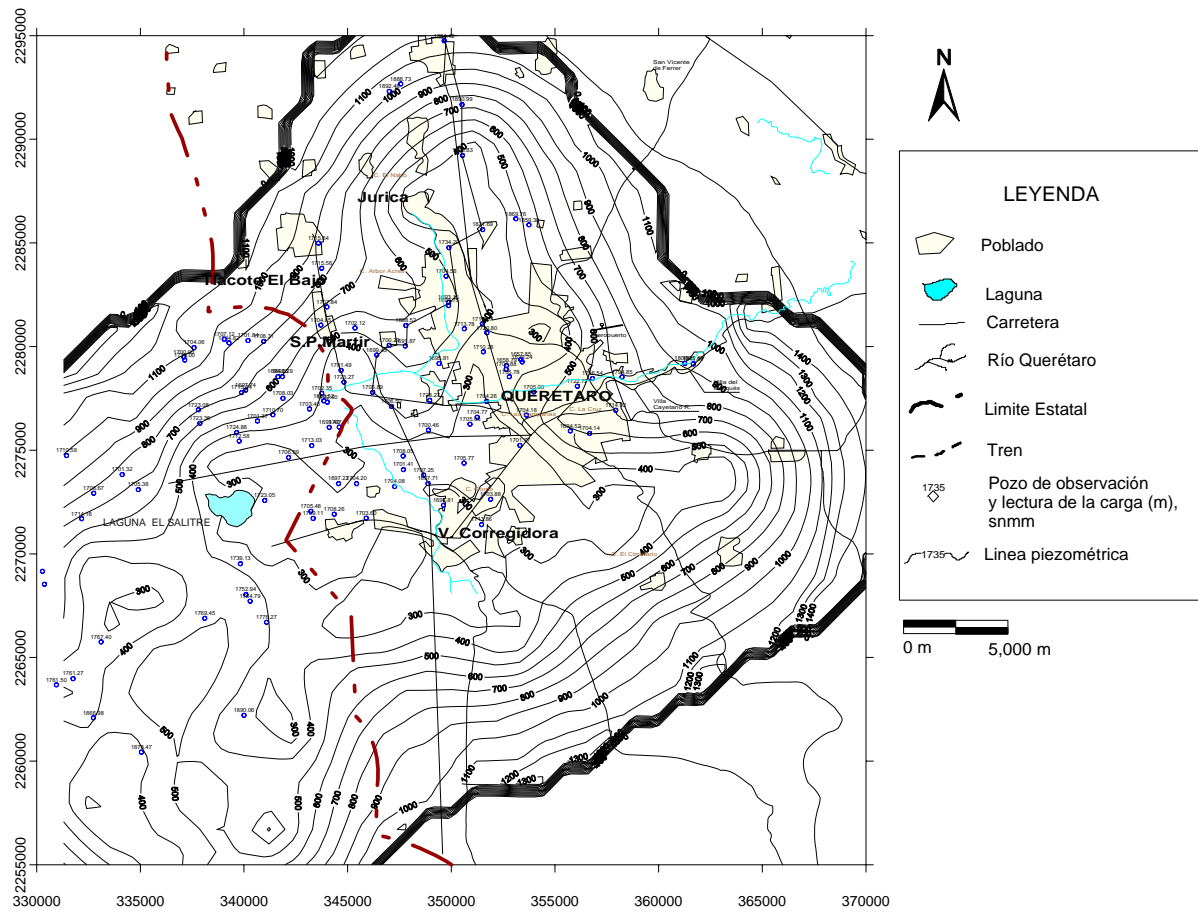


Figura 5.12. Krigiado residual para el año de 1995, valores de varianza.

5.3. CARGA HIDRÁULICA 1999.

De la misma manera del punto 5.1 se procede a describir cada uno de los cinco puntos que componen el análisis geoestadístico univariado para la carga hidráulica del año 1999.

5.3.1. Análisis preliminar.

En este caso, la base de datos depurada comprende un total de 75 pozos, los cuales cuentan con nivel de brocal y el valor de elevación del nivel.

Los estadígrafos que caracterizan a cada uno de las muestras se presentan en el apartado siguiente.

5.3.2. Análisis exploratorio.

En la figura 5.13 se muestra la distribución espacial de los mismos así como el valor de medición. En ella, observa que la distribución de los pozos concentra una mayor medición de las lecturas en el valle de Querétaro y Obrajuelo, siendo mucho menor en la zona de los Apaseos, principalmente en el área de la Laguna el Salitre y zonas altas, siendo muy parecido el muestreo al del año de 1993. Aunque es posible observar algunos puntos que se encuentran muy cercanos, uno del otro, no consideramos que el muestreo esté afectado por agrupamiento por lo que se trabajará con la totalidad de las observaciones.

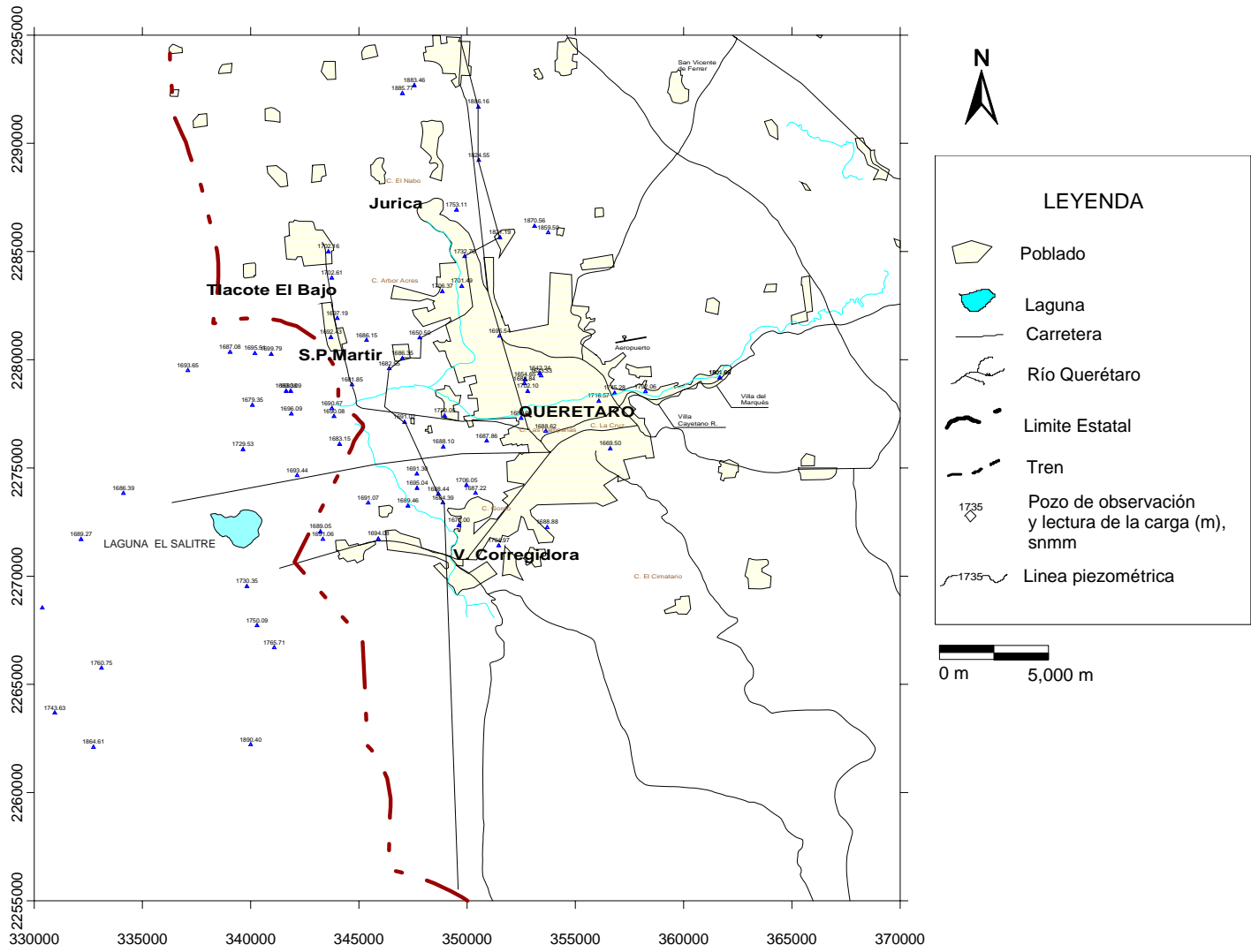


Figura 5.13. Pozos con medición de la carga hidráulica, para el año de 1999.

Los resultados del análisis estadístico se muestran en la tabla siguiente.

Tabla 5.5. Estadígrafos datos de la carga hidráulica para el año 1999 y residuales.

Año	1999	1999 residual
número de pozos	75	75
media	1720.65	4.74E-17
mediana	1693.65	0.75
desviación estándar	62.15	30.71
mínimo	1623.33	-89.44
máximo	1890.40	83.74
curtosis	1.55	1.37
coeficiente de simetría	1.55	-0.11
	asimetría grave	hay simetría

De los datos anteriores, específicamente en los estadígrafos de curtosis a simetría se observa que la distribución no presenta una simetría, esto se ve claramente en el histograma de la figura 5.14.

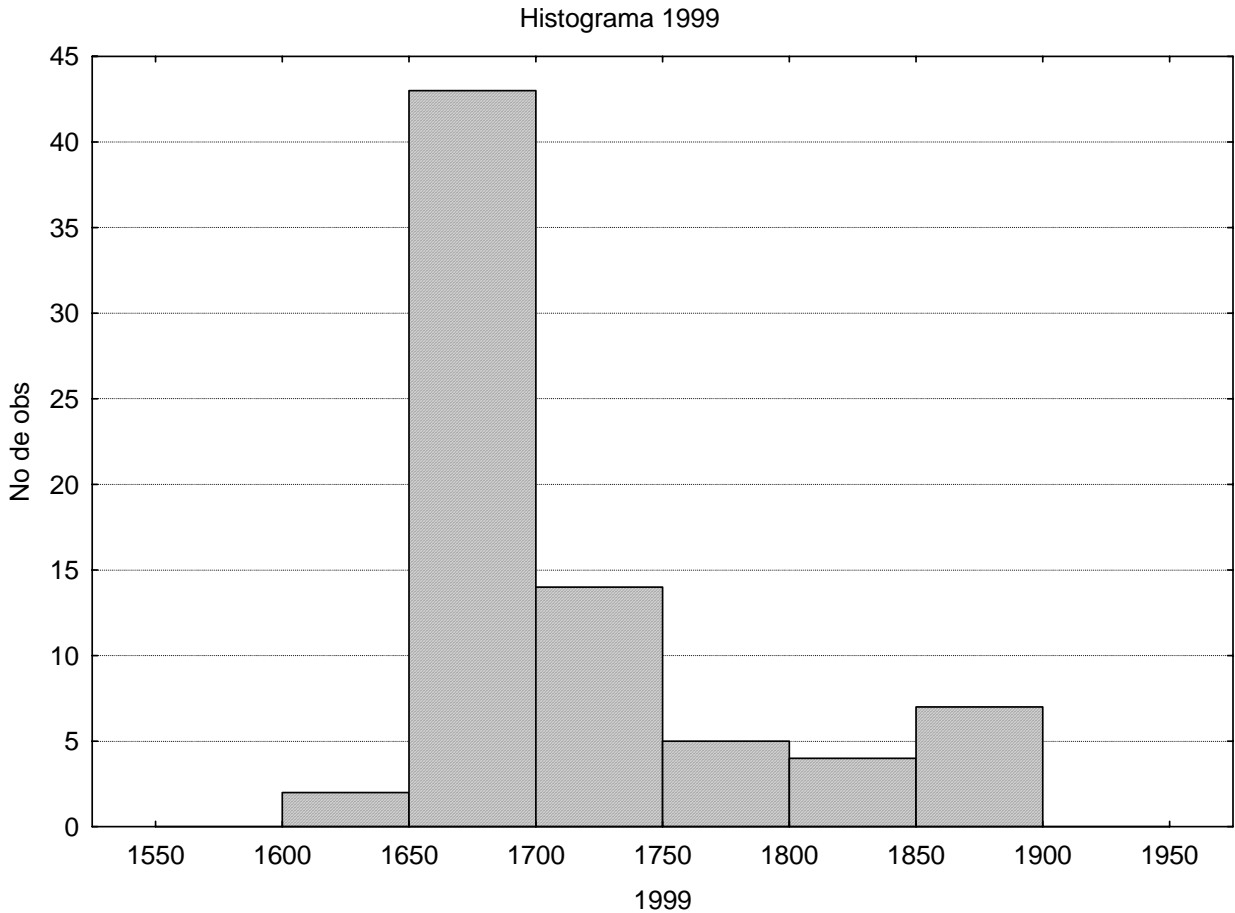


Figura 5.14. Histograma de la carga hidráulica, 1999. Valores medidos.

5.3.2.1. Estimación de la deriva.

Debido a que las distribuciones, no son simétricas, se procedió a hacer una transformación de los datos como se describió en la sección 5.1.2.1

Los estadígrafos de los residuales, se muestran en la tabla 5.5. Es de destacar que las muestras de los residuales presentan curtosis positivas y simétricas, que representan de mejor manera una distribución normal (véase figura 5.15).

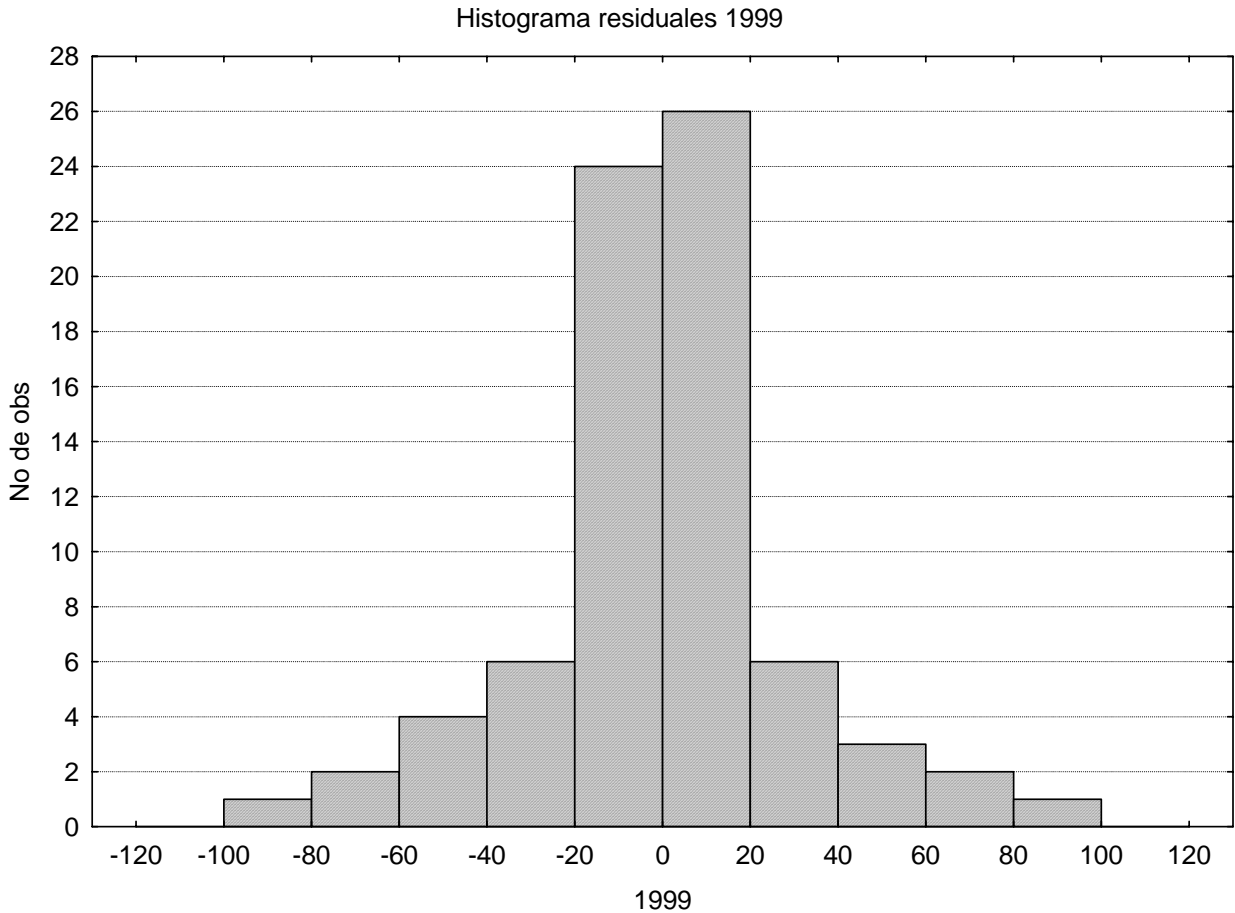


Figura 5.15. Histograma de la carga hidráulica, 1999. Valores de los residuales.

5.3.3. Análisis estructural.

El calculo del semivariograma muestral se hizo igual que la sección 5.1.3. En la figura 5.16 se muestra el semivariograma muestral, en línea continua, y el semivariograma teórico, que corresponde a un modelo esférico con pepita , cima, y alcance.

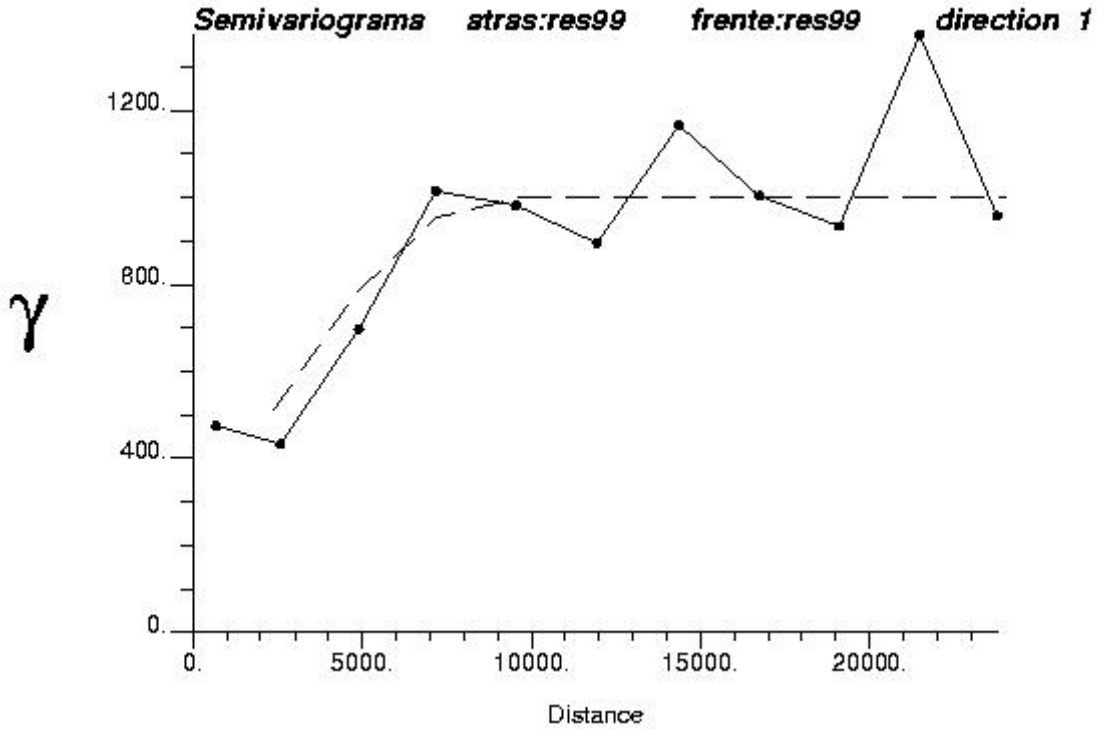


Figura 5.16. Semivariograma muestra de los datos de carga hidráulica, año 1999.

5.3.4. Validación cruzada.

Utilizando los mismos criterios establecidos en la sección 3.4, se presentan los resultados de la validación cruzada:

Tabla 5.6. Resultados de validación cruzada, 1999.

EM	ECM	ECME	Parámetros del modelo			Tipo de modelo	AIC
			C ₀	C	a		
-0.4	426.3	0.8	200	800	9000	Esférico.	125

EM = Error cuadrático, ECM = Error cuadrático medio, ECME = error cuadrático medio estándar, C0= pepita, C = cima, a = alcance, AIC = índice de Alcaike

5.3.5. Estimación espacial.

Para el año de 1999 se mantiene, en forma general, el esquema de flujo. Indica una confluencia de las líneas potenciales hacia la parte central del valle, con una elevación mínima de 1623.33 m y un valor máximo de 1890.4 m.

El gráfico de la estimación de la varianza, se asemeja más al del año de 1993, debido a que el número de pozos de observación se distribuyen de manera similar.

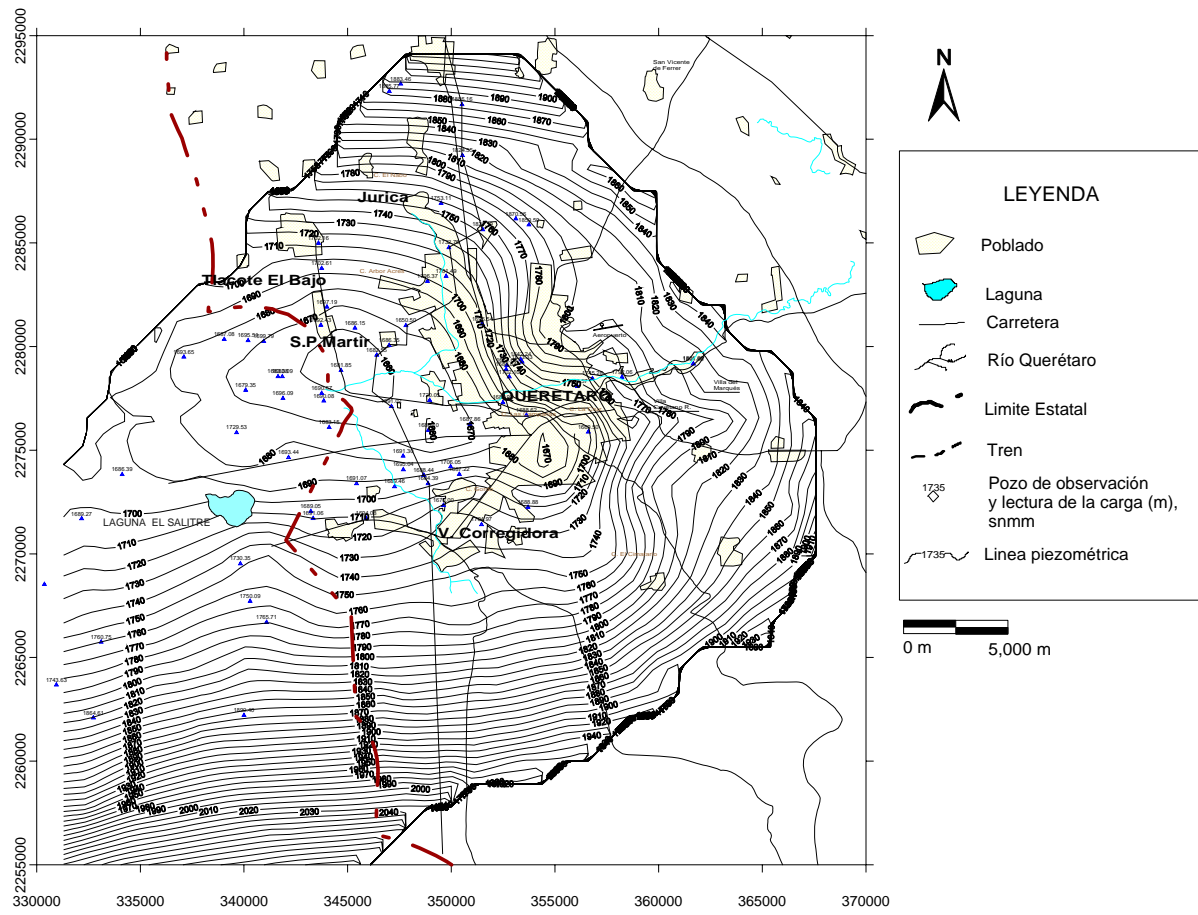


Figura 5.17. Krigeado residual para el año de 1999, valores de la carga hidráulica.

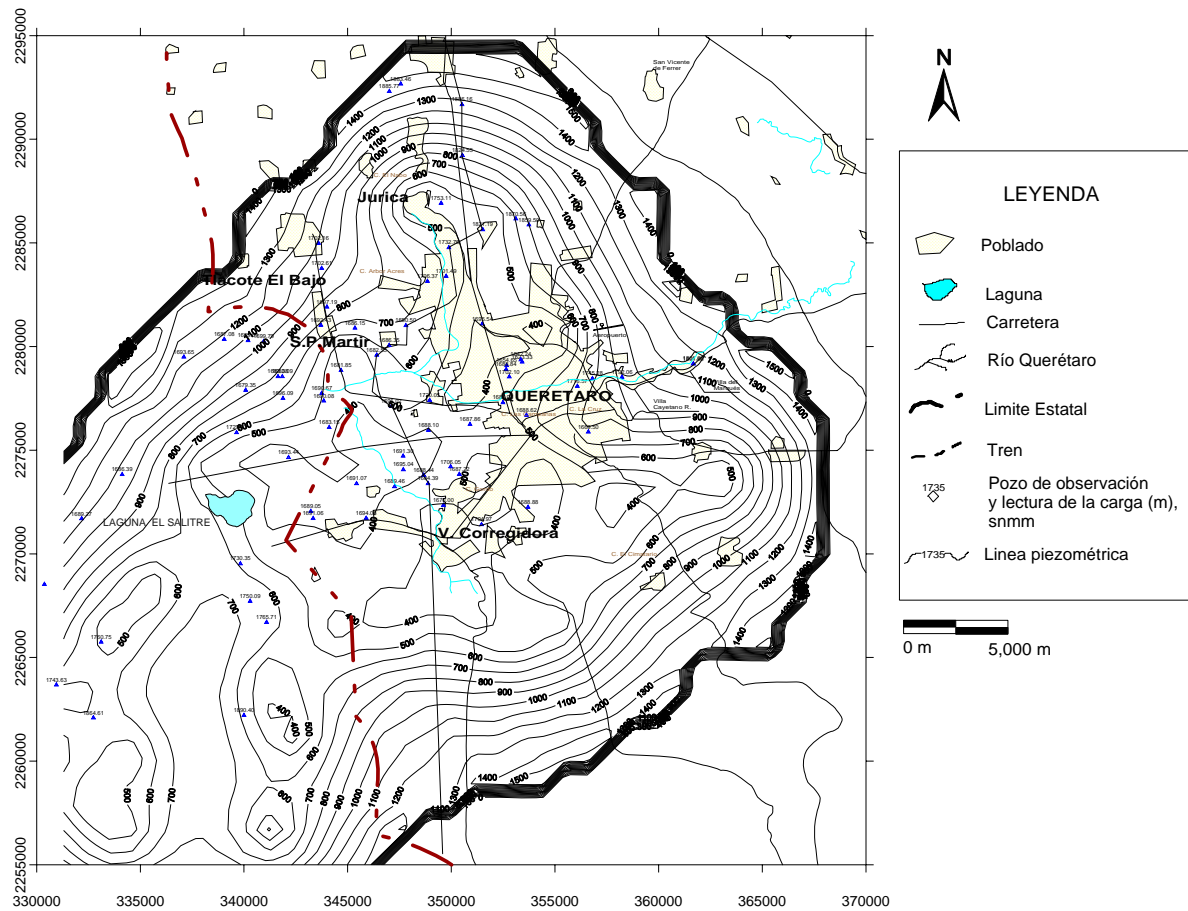


Figura 5.18. Krigiado residual para el año de 1999, valores de varianza.

5.4. DATOS DEL MDE.

En esta sección se analizan los datos del modelo digital de elevación, MDE, esta variable es la información auxiliar que será útil en el análisis de cokrigado espacial.

El MDE tiene como fuente las curvas de nivel de la cartas topográficas F14C65, escala 1:50,000, proyección Universal Transversa de Mercator (UTM), datum: ITRF92, elipsoide: GRS 80, unidades en metros. Las dimensiones del modelo son: 721 columnas, 580 renglones; coordenadas de la esquina noroeste, Este 325650, Norte 2266750; coordenadas de la esquina sureste Este 361700, Norte 2295800, intervalos entre elevaciones de 50 m.

Del MDE se utiliza la información de 185 lecturas, que tienen como referencia los 185 puntos que corresponden a la posición de pozos de explotación de agua subterránea que están dentro del acuífero de Querétaro-Obrajuelo. Tomando en cuenta que la posición del MDE no corresponde con la posición del pozo, se toma la decisión de seleccionar aquel punto más próximo y considerarlo como la posición del pozo deseado. Una segunda fuente de información que proporciona el MDE son las lecturas de elevación del terreno en el área de la Cañada, que corresponde a una submuestra del total del MDE. Aclarado lo anterior sólo resta describir las características de los datos.

5.4.1. Análisis preliminar.

Este proceso consta de la colección de los datos, verificación de los mismos y la generación de las bases correspondientes. Debido a que se está trabajando con datos del MDE se procede a seleccionar las 185 lecturas que ubican los pozos de explotación. Para este fin, se seleccionaron 185 puntos de elevación del MDE que se ubican más próximos a la posición original de los pozos.

Los estadígrafos que caracterizan a cada uno de las muestras son presentados en el apartado siguiente.

5.4.2. Análisis exploratorio.

La ubicación de los puntos seleccionados se muestra en la figura 5.13, en ella se observa la distribución espacial, en todo el valle, de las lecturas del MDE y sus valores. Se observa que la distribución de los pozos concentra una mayor medición de las lecturas en el valle de Querétaro y Obrajuelo, dejando fuera las lecturas de los pozos de los Apaseos. Aunque es posible observar algunos puntos que se encuentran muy cercanos, uno de otro, no consideramos que el muestreo esté afectado por agrupamiento por lo que se decidió trabajar con la totalidad de las observaciones.

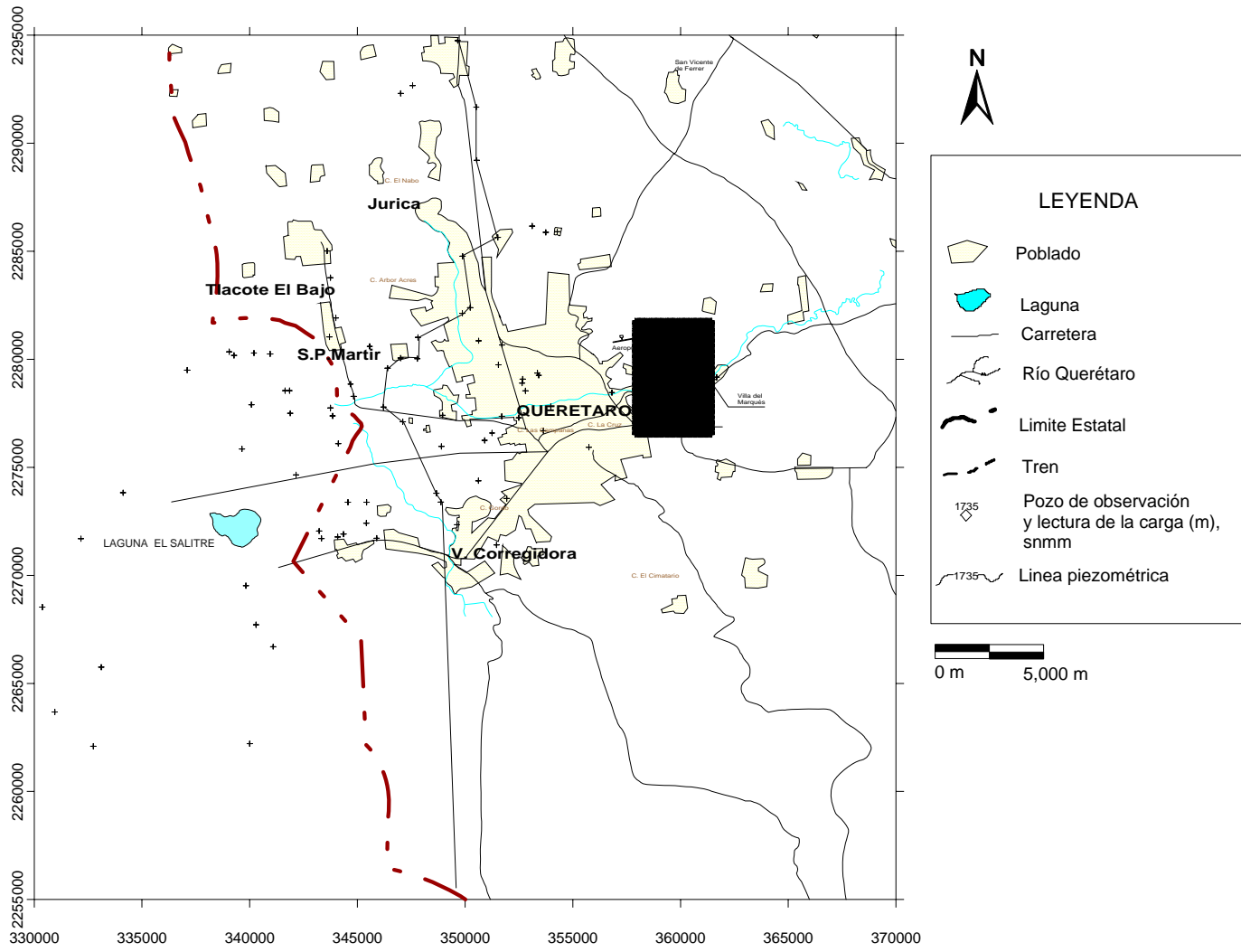


Figura 5.19. Pozos y malla con lectura de MDE.

Una vez verificada la distribución espacial de los datos se procede a realizar una análisis estadístico, de los mismos, donde se obtiene la lectura de la elevación, la media, la varianza, la desviación estándar, el coeficiente de asimetría y el coeficiente de variación de cada parámetro, así mismo se verificó que la distribución de la muestra fuera aproximadamente normal.

Los resultados se muestran en la tabla siguiente.

Tabla 5.7. Estadígrafos datos del nivel freático y residuales.

Año	MDE	MDE residual
número de pozos	185	185
media	1677.89	-1.0E-6
mediana	1811.58	-5.37
desviación estándar	40.96	18.95
mínimo	1764.18	-40.27
máximo	2043.70	64.39
curtosis	6.42	0.86
coeficiente de simetría	2.29	0.82

De la tabla anterior, para el acaso MDE, específicamente en los estadígrafos de curtosis y simetría se observa que la distribución no presenta una distribución normal, esto es mejor representado en el histograma de la figura 5.20.

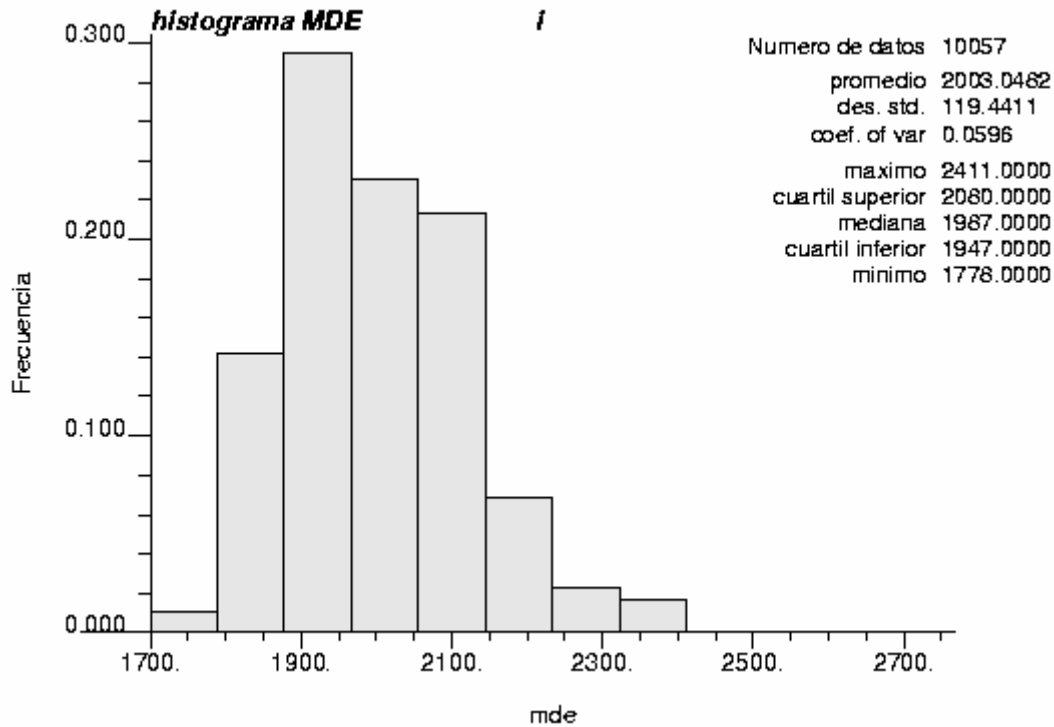


Figura 5.20. Histograma de los valores del MDE.

5.4.2.1. Estimación de la deriva.

Debido a que las distribuciones, anteriores no son normales, se procedió a hacer una transformación de los datos que consistió en restarles el valor de la tendencia, misma que se calculó a partir de un análisis de regresión por mínimos cuadrados ordinarios, ajustando a un polinomio de segundo orden.

Los estadígrafos de los residuales, que se definen como el valor del dato menos la tendencia estimada, se muestran en la tabla 5.7. Es de destacar que las muestras de los residuales presentan curtosis positivas y simétricas, que representan de mejor manera una distribución normal, véase figura 5.21.

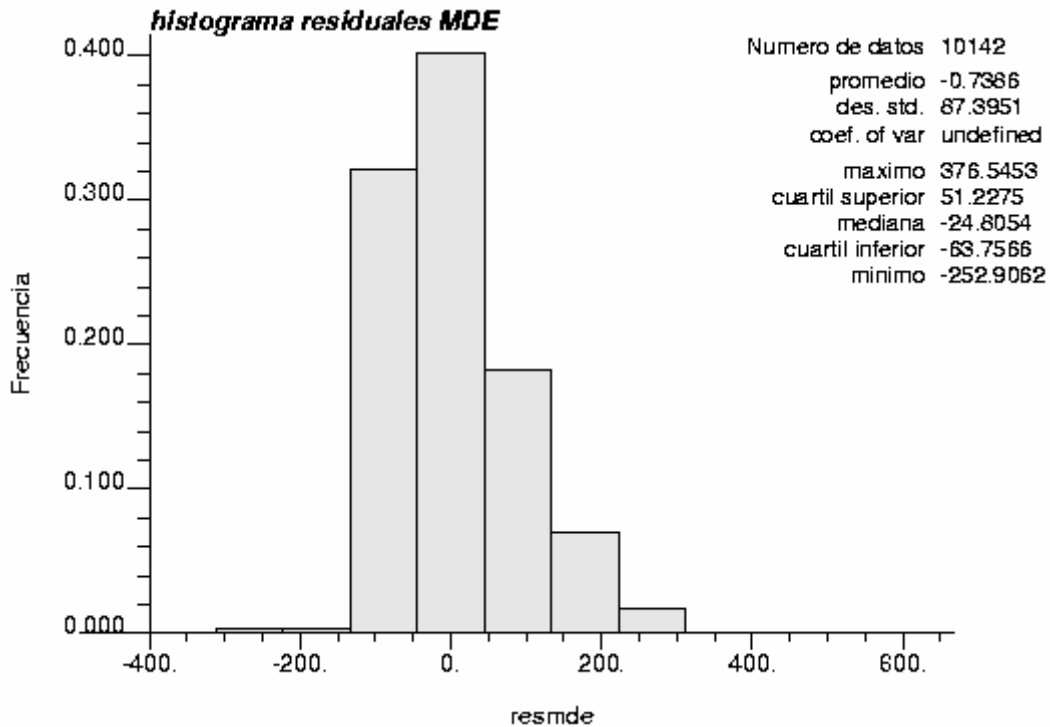


Figura 5.21. Histograma de los valores del MDE residuales.

De esta forma se da por entendido que el semivariograma calculado corresponde a los residuales.

5.4.3. Análisis estructural.

Este proceso ya ha sido efectuado por lo que deberá entenderse que los semivariogramas muestrales corresponden a los valores de los residuales.

El semivariograma se calculó con intervalos de 10 clases y un vector de separación h igual a un medio la distancia máxima de las observaciones, utilizando el algoritmo GAMV.exe de GSLIB (Deutsch y Journel, 1998).

5.4.3.1. Ajuste de un modelo teórico al semivariograma muestral.

En la figura 5.22 se muestra el semivariograma muestral, en línea continua, y el semivariograma teórico, que corresponde a un modelo esférico con pepita, cima, y alcance.

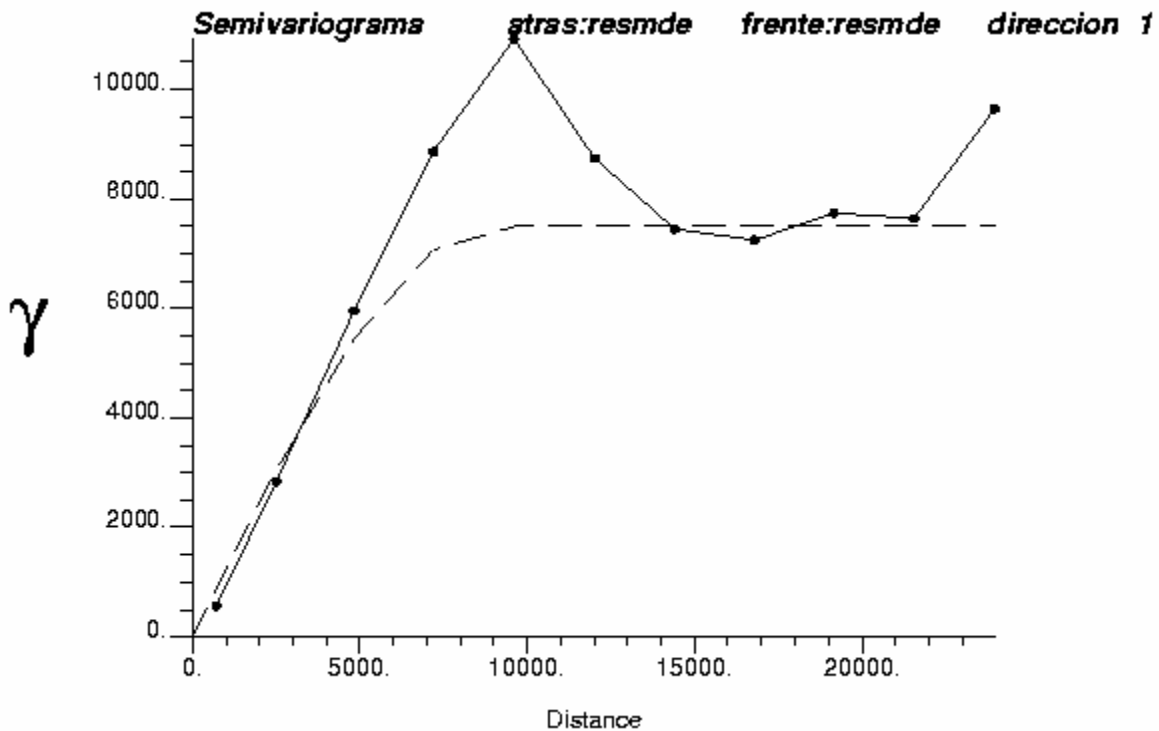


Figura 5.22. Semivariograma muestral de los datos del MDE.

5.4.4. Validación cruzada.

De acuerdo al procedimiento descrito en la sección 3.5, denominado como “one point out” se ejecutó la validación cruzada de los datos. Los resultados se muestran en la tabla 5.8. basta resaltar que los valores del EM indican una subestimación de los valores y el ECME muestra que el modelo utilizado no es muy congruente en términos de las varianzas y los errores.

Aún observando estos resultados se considera que el modelo es el mejor ajuste.

Tabla 5.8. Resultados de la validación cruzada, MDE.

EM	ECM	ECME	Parámetros del modelo			Tipo de modelo	AIC
			C ₀	C	a		
-0.21	522.42	0.57	1.0	7500	9000	Esférico.	66

EM = Error cuadrático, ECM = Error cuadrático medio, ECME = error cuadrático medio estándar, C₀= pepita, C = cima, a = alcance, AIC = índice de Alcaike

6. ANÁLISIS MULTIVARIADO ESPACIAL DE LA CARGA HIDRÁULICA, UTILIZANDO UN MODELO DIGITAL DE ELEVACIÓN COMO VARIABLE SECUNDARIA.

En esta sección se presentan los resultados del análisis geoestadísticos multivariado, para la determinación de la carga hidráulica en el Valle de Querétaro-Obrajuelo, utilizando como información primaria la elevación carga hidráulica en el año de 1993 y como variable auxiliar, o secundaria, la elevación del terreno natural, obtenida a partir de un modelo digital de elevación (MDE).

6.1. ANÁLISIS DE DISPERSIÓN.

Recordando que tenemos como objetivo estimar la carga hidráulica del acuífero de Querétaro utilizando de forma conjunta la información de la variable primaria, carga hidráulica, y la variable secundaria, MDE. Para este fin, ambas las variables deben tener una buena correlación.

En la figura 6.1, se muestra el diagrama de dispersión entre las variables carga hidráulica, para el año 1993, y MDE. Observe que los valores solo se reportan en los 85 puntos donde se cuenta con información de la carga hidráulica.

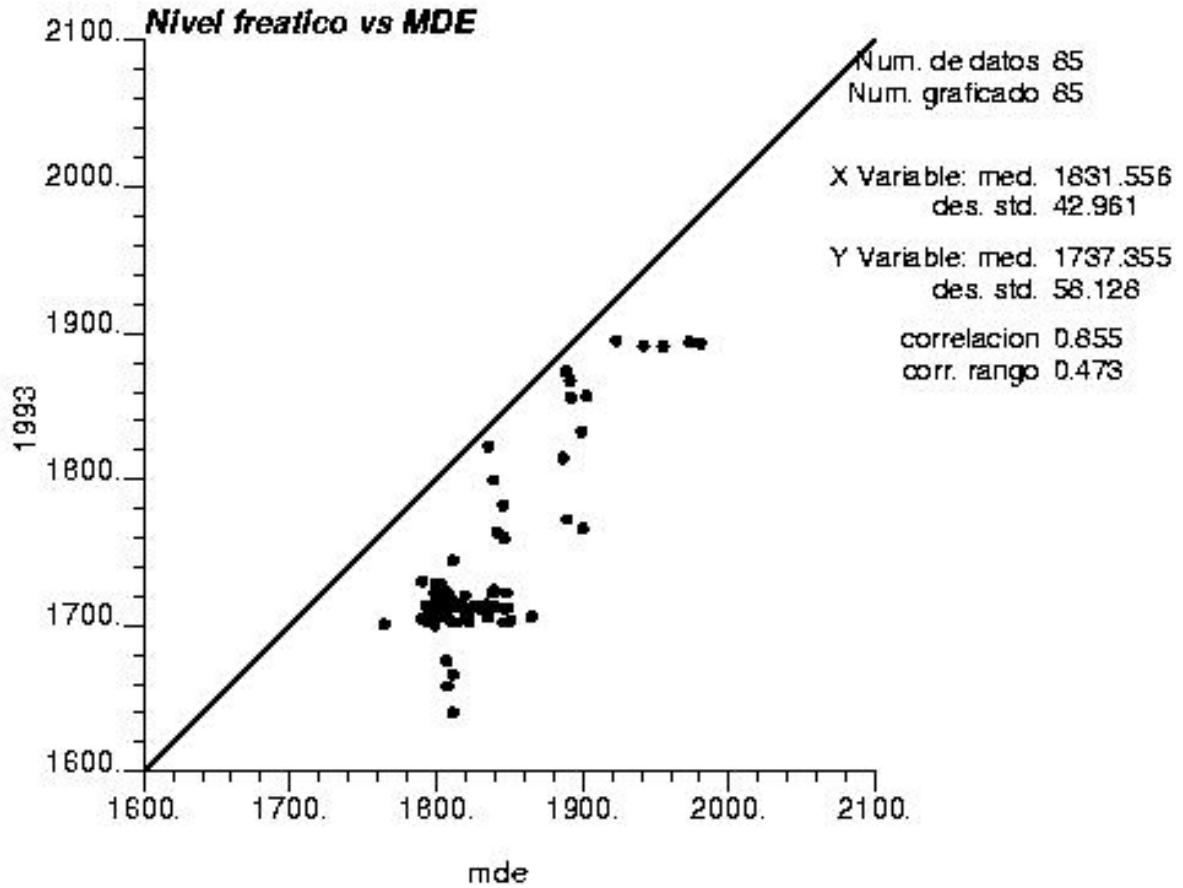


Figura 6.1. Diagrama de dispersión del nivel freático y valores de MDE.

Con el objeto de tener una medida de la correlación que existe entre las dos variables se procede a calcular el coeficiente de correlación que está definido como:

$$\rho = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)(y_i - m_y)}{\sigma_x \sigma_y} \quad (6.3)$$

donde x es el valor de la carga hidráulica, y el valor del MDE, m el valor medio de las correspondientes variables y σ el valor de la desviación estándar y los subíndices indican que corresponde a la variable x e y (primaria y secundaria, respectivamente). De la

definición anterior podemos decir que el coeficiente de correlación es la covarianza entre la varianza de las variables. Los valores del coeficiente de correlación son interpretados como buenos cuando el valor obtenido es cercano a la unidad, moderados cuando son cercanos al 0.75 y malos con valores menores a 0.4 (Asli y Marcotte, 1995, página 652). Observando la figura 6.1 podemos decir que el coeficiente de correlación es alto, 0.85, por lo que podemos justificar que el utilizar la variable secundaria nos ayudará a obtener una mejor estimación de la carga hidráulica.

6.1.1. Coeficiente de codispersión.

Por otro lado, el obtener una buena correlación entre las variables no es al único estadígrafo que exploramos para garantizar una mejor estimación. Wackernagel (1994) al plantearse la utilidad del cokrigado versus krigado, concluye que si las variables de interés son autokrigeables respecto al conjunto de variables auxiliares entonces el cokrigado es equivalente al krigado. De lo anterior, se explica que una variable es autokrigeable cuando su semivariograma cruzado es proporcional a su semivariograma.

$$\gamma_{ij} = a_{ij}\gamma_{ii} \quad (6.4)$$

donde a_{ij} es un coeficiente de proporcionalidad. Vale la pena decir que cuando se esta hablando de covarianza se aplica el mismo tipo de relación.

Por lo que se define que una correlación intrínseca es aquella donde las funciones de semivariograma y semivariograma cruzado son proporcionales por un coeficiente a_{ij} teniendo una estructura básica de semivariograma.

Un criterio para cuantificar si la variable es intrínseca es propuesto por Goovaerts (1994) indicando que es factible calcular el coeficiente de codispersión, que se describe como la correlación entre los incrementos espaciales de z_i y z_j que cambian en función de la distancia y la dirección. En el caso donde el coeficiente de codispersión es constante para toda h significa que la relación entre las dos variables no cambia con la escala espacial, lo que es llamado como correlación intrínseca. La forma de calcular el coeficiente de codispersión es:

$$cc_{ij} = \frac{\gamma_{ij}(h)}{\sqrt{\gamma_{ii}(h)\gamma_{jj}(h)}} \quad (6.5)$$

donde cc_{ij} es el coeficiente de codispersión, γ_{ij} es el semivariograma cruzado a la distancia h , y γ_{ii} , γ_{jj} corresponden a los semivariogramas de la variable primaria y secundaria respectivamente.

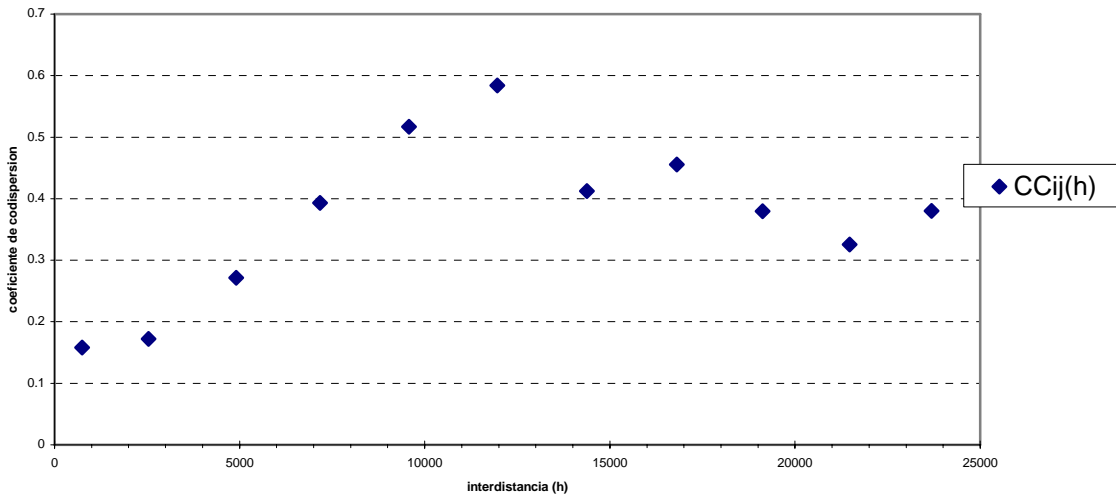


Figura 6.2. Coeficiente de codispersión.

En la figura 6.2 se observa el gráfico de codispersión, calculado de acuerdo a la formula 6.5, donde muestra que en las primeras distancias (h), las variables no se alinean en un intervalo definido, por lo contrario, presentan un cambio ascendente hasta una distancia de 12,000 m, lo que interpretaremos como la distancia máxima hasta donde no existe correlación intrínseca entre las variables analizadas. Una vez pasando el alcance de los 12,000 m, los puntos que indican el coeficiente de codispersión se alinean en un valor constante (0.38 aproximadamente) lo que indica que las variables presentan una correlación intrínseca. Es decir, después del alcance mencionado, las variables analizadas presentan una correlación intrínseca, que de acuerdo a las conclusiones de Wackernagel, la estimación que haga el krigado es igual a la del cokrigado.

6.1.2. Coeficiente de autokrigeabilidad.

Se ha comentado que para tener una mejora en la estimación utilizando el algoritmo de cokrigado es necesario que las variables no presenten una correlación intrínseca. Si fuera el caso, la variable de interés se considera que es autokrigeable con respecto a la variable secundaria. El concepto de autokrigeabilidad solamente indica que la estimación obtenida con cokrigado es equivalente a la obtenida con krigado y la razón de esto ha sido explicada en la sección anterior.

El mismo Wackernagel (1994) comenta que el coeficiente de codispersión no es el único criterio para determinar si las variables son autokrigeables, por lo que propone otro índice que es el coeficiente de autokrigeabilidad y está definido de la siguiente manera:

$$ac_{i_0j}(h) = \frac{\gamma_{i_0j}(h)}{\gamma_{i_0i}(h)} \quad (6.6)$$

La interpretación del coeficiente de autokrigeabilidad es similar al coeficiente de codispersión, es decir, si el coeficiente de autokrigeabilidad presenta un comportamiento constante, entonces la variable de interés es autokrigeable con respecto a la variable auxiliar.

En el caso particular, se procedió a calcular el coeficiente de autokrigeabilidad y los resultados presentan el mismo comportamiento que el coeficiente de codispersión, por lo que se considera redundante mostrar la gráfica.

Lo importante de calcular ambos coeficientes radica en que los datos de la carga hidráulica no son autokrigeables y no presentan una correlación intrínseca, con respecto a los valores del MDE utilizados, lo que implica que las estimaciones efectuadas con el algoritmo de cokrigado no serán igual a las obtenidas con krigado, en principio. Por otro lado al aumentar el número de observaciones se espera que la estimación de cokrigado represente de mejor forma el comportamiento de la carga hidráulica, en este entendido se asume una mejoría en la estimación de la variable.

6.2. ANÁLISIS ESTRUCTURAL.

Recordando del capítulo 3, donde se define el semivariograma muestral cruzado y la forma de calcularlo, solo comentaremos los resultados del semivariograma que finalmente representa los datos de la carga hidráulica y el MDE. En la figura 6.3 se muestran el respectivo semivariograma para el caso del Valle de Querétaro y el MDE.

El procedimiento para corroborar que se cumple con la inequidad de Cauchy - Schwartz (ecuación 6.7) y garantizar que el modelo propuesto cumple con la condición de ser condicionalmente negativo positivo es el siguiente.

Debido a que un análisis multivariado es más complejo, no existen semivariogramas autorizados para éstos, por lo que el semivariograma propuesto deberá cumplir con la

$$\gamma_{ij}(h) \leq \left(\gamma_i(h) \gamma_j(h) \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall h \quad (6.7)$$

Que en el caso particular es un modelo esférico, así como en los casos de la carga hidráulica y MDE lo que implica:

$$\begin{aligned}
 Co_{ij} &\leq (Co^1 Co^2)^{\frac{1}{2}} \\
 C_{ji} &\leq (C^1 C^2)^{\frac{1}{2}} \\
 a_{ij} &\leq (a^1 a^2)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}
 \tag{6.8}$$

Donde Co , C , y a son los valores de pepita, cima y rango, respectivamente. Para que sea válido el semivariograma propuesto se debe demostrar que las matrices de correogionalización sean positivas semidefinidas.

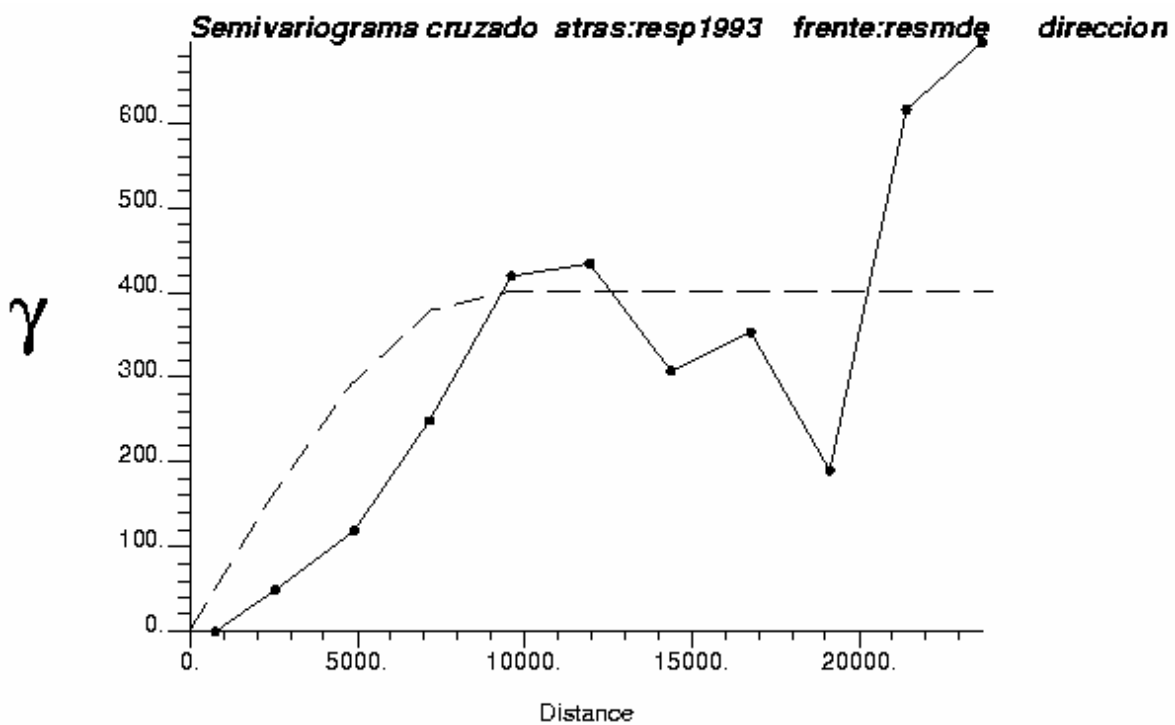


Figura 6.3. Semivariogramas muestral cruzado y teórico para el año 1993, MDE y semivariograma cruzado.

Se comentó, anteriormente, que para validar el semivariograma cruzado es necesario que el determinante sea positivo por lo que se procedió a verificar esta propiedad en esta aplicación.

$$= \begin{pmatrix} 200 & 10 \\ 10 & 11 \end{pmatrix} \gamma_0(h) + \begin{pmatrix} 675 & 215 \\ 215 & 216 \end{pmatrix} \gamma_1(h) \quad (6.9)$$

$$\begin{pmatrix} 200 & 10 \\ 10 & 11 \end{pmatrix} = 2200 - 100 > 0 \quad (6.10)$$

$$\begin{pmatrix} 675 & 215 \\ 215 & 216 \end{pmatrix} = 1.5 \times 10^5 - 4.6 \times 10^4 > 0 \quad (6.11)$$

Como se puede observar las relaciones de la desigualdad se satisfacen.

6.3. VALIDACIÓN CRUZADA.

Como se explicó en el capítulo 3, el procedimiento de validación cruzada tiene como objetivo mediar las diferencias entre los valores estimados y los medidos. Para ello se utiliza el método de covalidación y de los resultados obtenidos se calculan los índices de error medio (EM), error cuadrático medio (ECM) y error cuadrático medio estándar (ECME). En esta sección sólo se comentan los resultados obtenidos. Los modelos y sus respectivos estadígrafos son presentados en la tabla 6.1.

Tabla 6.1. Modelos ajustados y valores de EM, ECM y ECME.

Modelo 1993 200+675 esf. (9000) ME = 0.17, MSE = 403.005, ECME = 0.82	
Modelo MDE-1993 10+390 esf. (9000) ME =0.03, MSE =362.559, ECME = 0.87	Modelo MDE 1+7500 esf. (9000) ME =-021, MSE = 522.42, ECME = 0.57

6.4. ESTIMACIÓN ESPACIAL.

En esta sección se muestran los resultados de estimación utilizando cokrigado. La estimación del nivel freático para el año 1993, utilizando los valores del MDE, se muestra en la figura 6.4.

Vale la pena destacar que la forma matricial de cokrigado (ecuación 3.35) queda seccionado de la siguiente manera:

La submatriz $\gamma_{ii}(x_{ki}, x_{\beta i})$, describe la distribución espacial de la variable principal;

La submatriz $\gamma_{jj}(x_{kj}, x_{\beta j})$ describe la distribución espacial de las variables secundarias;

Las submatrices $\gamma_{ij}(x_{ki}, x_{\beta i})$ y $\gamma_{ji}(x_{kj}, x_{\beta j})$ que describe la función cruzada de las variables primaria y secundarias, consideradas de manera conjunta y;

Los términos 1 y 0 que corresponden a la condición de insesgo.

La matriz [A], no contiene información del punto de medición, x_0 , donde se desea realizar la estimación. Toda la información está contenida en el segundo miembro del sistema, vector [B], el cual está subdividido en tres componentes.

El subvector $\gamma_{ii}(x_0, x_{ki})$, que depende del arreglo geométrico del punto x_0 , con respecto a los x_{ki} puntos, donde la variable primaria es observada;

El subvector $\gamma_{ij}(x_0, x_{\beta j})$, que depende del arreglo geométrico del punto x_0 , con respecto a los $y_{\beta j}$ puntos, donde la variable secundaria es observada;

Los elementos 1 y 0 que corresponden a la condición de insesgo.

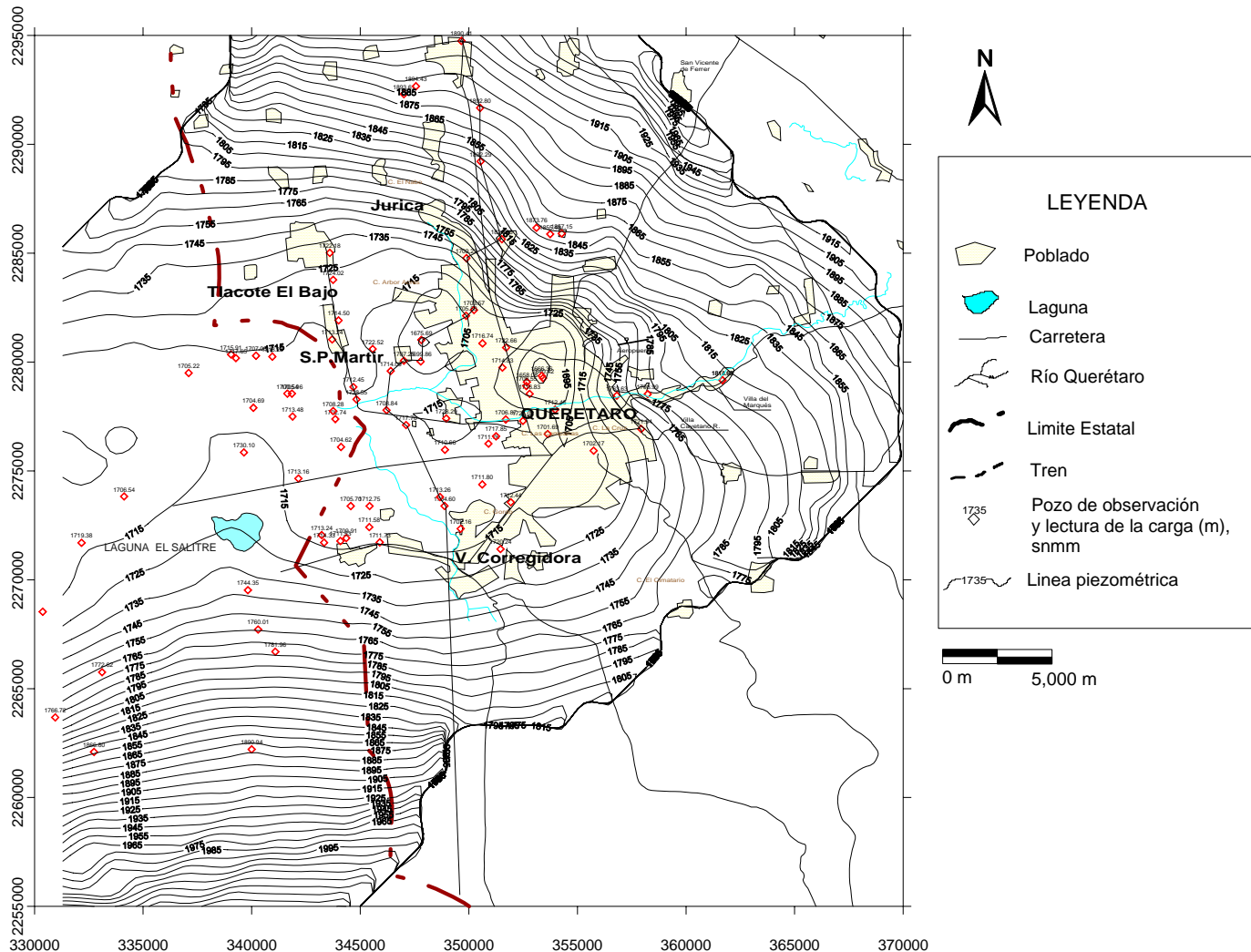


Figura 6.4. Estimación multivariada para el año 1993, valores de la carga hidráulica.

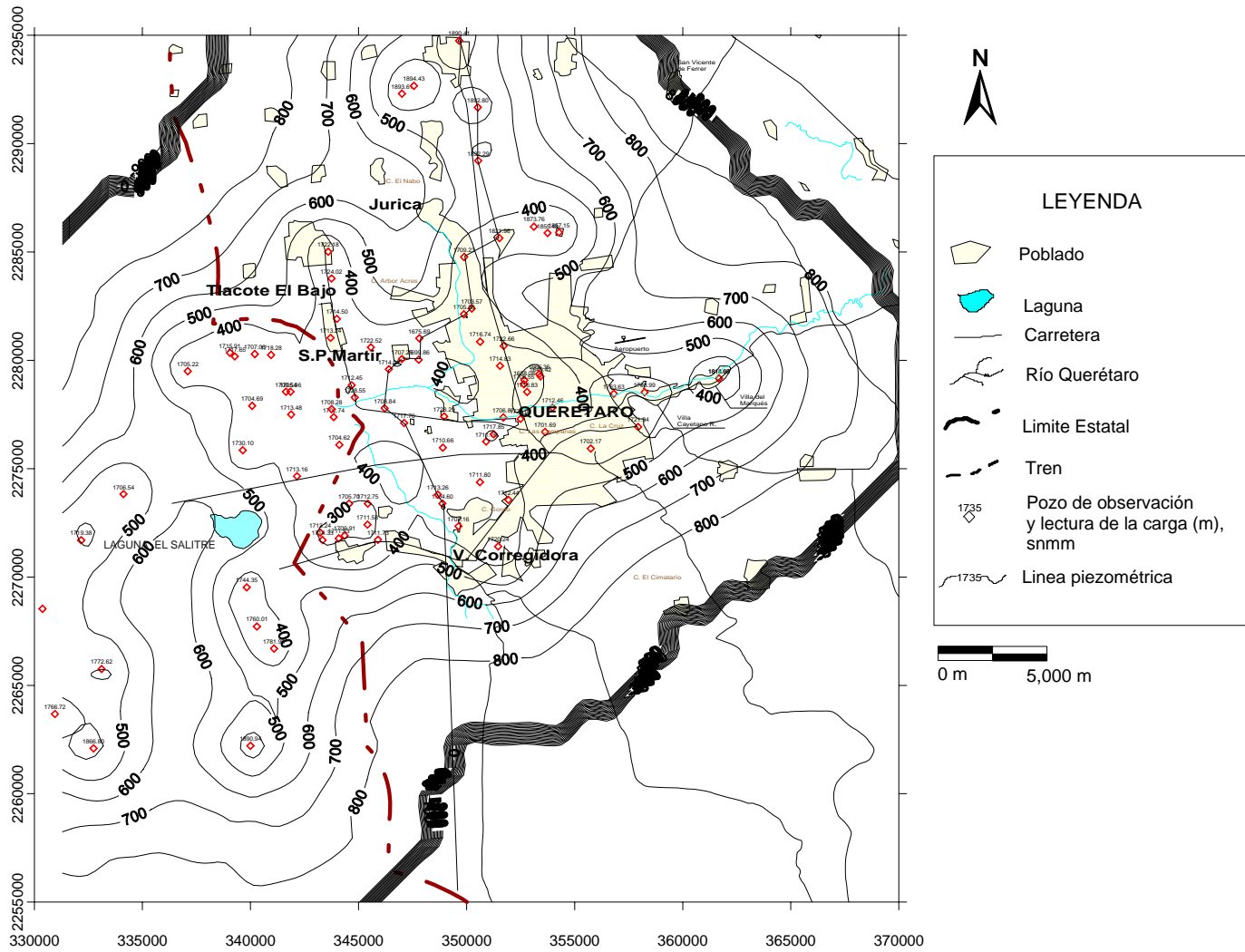


Figura 6.5. Estimación multivariada para el año 1993, varianza del error de la estimación.

6.5. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS.

La estimación de la carga hidráulica en el acuífero de Querétaro se efectuó en una malla de 41 columnas y 51 renglones, con una distancia entre renglón y columna de 1,100 m, para el caso univariado y el bivariado.

En la figura 6.4 se muestra la estimación para el año de 1993 utilizando la información del MDE, solo en las zonas de Obrajuelo y Salitre. Observando que los valores estimados en el área de Obrajuelos identifican un parteaguas subterráneo, que concuerda con el superficial, y limita el acuífero de Obrajuelos con el de Los Apaseos.

Es importante destacar que esta conformación de las líneas de potencial se modifican, con respecto a la estimación univariada, debido a que los pesos que asigna el cokrigado a la variable secundaria son mayores, por lo que la estimación se ve influenciada por el valor puntual del MDE. La configuración tiene sentido si el planteamiento de que las líneas de potencial son una réplica de la configuración topográfica. Por esta razón, solo la técnica de cokrigado es aplicada en las áreas con menor influencia de bombeo como las partes altas y el límite entre los acuíferos Obrajuelos y Los Apaseos. La configuración en la zona de Querétaro se mantiene de forma similar con el krigado y el cokrigado.

Respecto al valor de la varianza en la zona de Obrajuelos se reduce de 1000 a 500, esto debido a que se incrementó el número de observaciones en el área.

6.6. CONCLUSIÓN.

Del análisis anterior se concluye que en el caso del acuífero de Querétaro el utilizar la información del MDE es útil solo en las áreas donde se cumple la hipótesis de réplica entre

la carga hidráulica y el nivel del terreno natural. Los resultados muestran la existencia de un parteaguas subterráneo, sin embargo, esto puede estar a discusión ya que bajo condiciones estables, en el área del valle, la dirección del flujo subterráneo se espera sea franco Este a Oeste.

Una desventaja es que el aumento del número de variables correlacionadas en el tiempo requiere de calcular $n(n+1)/2$ semivariogramas simples y cruzados, lo que hace que la técnica se torne tediosa y por el número de variables consideradas en algunos casos será poco práctica. Así mismo al agregar variables, el sistema de cokrigado se hace más grande, lo que implica un costo en el tiempo de cómputo.

Es importante hacer notar que el utilizar la autocorrelación y de forma conjunta la correlación cruzada beneficia a la estimación en aquellos puntos donde no se tiene información de la variable principal, ya que la variable secundaria o variables secundarias ejercerá su correlación en el momento de la estimación.

La aplicación de la técnica es solo útil en las zonas elevadas donde no existe influencia del bombeo, por lo que es limitado su uso.

Es interesante ver como los dos sistemas de krigado residual y multivariado son similares, diferenciándose en los elementos que conforman la matriz, como se explicó en el apartado de estimación espacial multivariado y se retoma en el capítulo 9.

7. ANÁLISIS MULTIVARIADO ESPACIO-TIEMPO, EN BASE A LECTURAS ESPACIALES TEMPORALMENTE CORRELACIONADAS.

En el apartado 3 se ha planteado que un proceso espacio-tiempo, $Z(x,t)$, se considera como un grupo espacial, temporalmente correlacionado (Papritz y Flühler, 1994; Kyriakidis y Journel, 1999) o un grupo de observaciones de series de tiempo espacialmente correlacionadas (Solow y Gorelick; Wackernagel, 1995).

En nuestro caso el analizar las diferentes observaciones, espaciales, y considerándolas temporalmente correlacionadas, es una técnica que no ha sido implementada en el campo de la hidrogeología. Papritz y Flühler (1994), implementa esta técnica en el campo de la edafología, teniendo las diferencias de incluir dentro de la formulación de cokrigado la función de pseudo semivariograma, orillado principalmente por el tipo de métodos, destructivos, que utilizan los edafólogos, y la estimación de cokrigado en bloques. En el presente capítulo se utiliza este punto de vista y se aplica la técnica multivariada de funciones aleatorias para estimar la carga hidráulica en diferentes fechas en el acuífero del Valle de Querétaro-Obrajuelo, México. Es importante destacar que la correlación entre las variables y sus respectivos elementos cruzados, que utilizamos, es la función de semivariograma y semivariograma cruzado, utilizando un modelo lineal de correogionalización (MLC) para modelarlos. La estimación se efectúa mediante el algoritmo de cokrigado. Los resultados se comparan, mediante el método de validación cruzada, con el método de krigado ordinario que refleja el punto de vista univariado.

La manera de describir y analizar los datos conforma los cinco puntos principales de la metodología geoestadística que en el capítulo 3 se ha indicado y son: el análisis preliminar,

análisis exploratorio de los datos, análisis estructural, la validación cruzada y la estimación espacio-temporal.

7.1. ANÁLISIS ESTRUCTURAL.

El semivariograma cruzado se cálculo conforme a lo especificado en el apartado 3.3, aquí sólo se muestra el semivariograma cruzado muestral y teórico. Con el objeto de recordar el procedimiento de ajuste del semivariograma cruzado muestral se menciona que se llevó a cabo con el algoritmo GAM del GSLIB (Deutsch y Journel, 1998), con 10 clases y un vector de separación h igual a un medio la distancia máxima de las observaciones, de la misma forma que se procedió con el semivariograma muestral.

En el caso del semivariograma cruzado el análisis es más complejo, debido a que no existen semivariogramas cruzados autorizados, por lo que el semivariograma cruzado muestral se modela ajustando un modelo lineal de correogionalización (MLC) de la forma:

$$\gamma_{ij}(h) = \sum_{u=0}^{N_s} b_{ij}^u g_u(h), \quad (7.1)$$

dónde

u es el indicador de las diferentes estructuras espaciales

N_s es el número total de estructuras espaciales

$g_u(h)$ es un semivariograma con un alcance (a) específico

b_{ij}^u es una matriz positiva definida que contiene los coeficientes del semivariograma.

Journel y Huijbregts (1979) proponen que para el caso de tres variables, el MLC necesariamente se debe comprobar que las estructuras de cada semivariograma cumpla con:

$$b_{ii}'' > 0; \quad |b_{ij}''| = |b_{ji}''| \leq \sqrt{b_{ii}'' b_{jj}''} \text{ desigualdad "Cauchy - Schwartz";} \quad |b_{kk}''| \geq 0 \quad (7.2)$$

Wackernagel (1989), propone resolver estas mismas condiciones mediante un algoritmo denominado LINMOD que de forma automática comprueba que las matrices de los coeficientes cumplen con las desigualdades comentadas.

El modelo de cokrigado del GSLIB, comprueba de forma interna que la matriz del MLC sea positiva definida, de no serlo envía una advertencia comentando que la matriz de cokrigado es singular.

Goulard y Voltz (1992), proponen un método distinto donde el MLC se ajusta por un método automático utilizando la técnica de mínimos cuadrados. En nuestro caso, se procedió con el criterio establecido por Journel y Huijbregts (1979), seleccionando aquel modelo que mejor ajustara el proceso y fuera más sencillo (principio de parsimonia). Los resultados del análisis se resumen en la figura 7.1

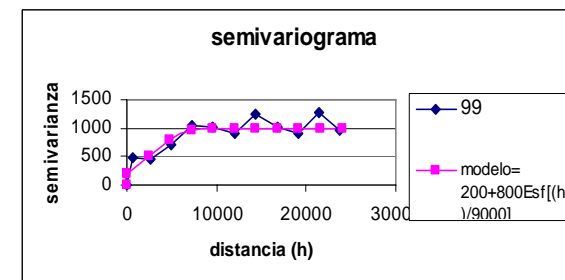
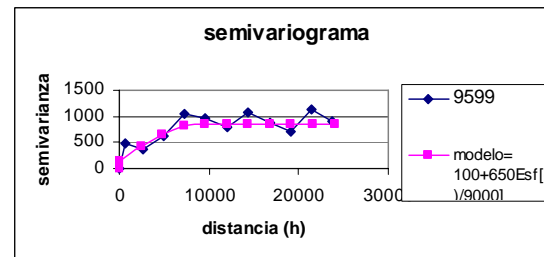
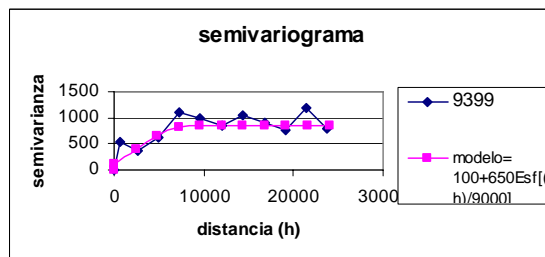
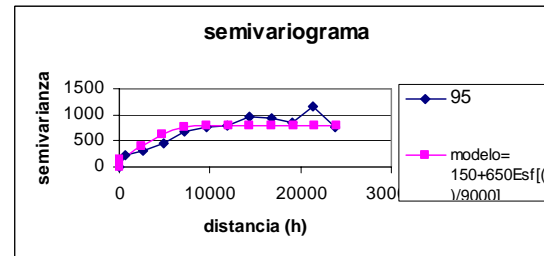
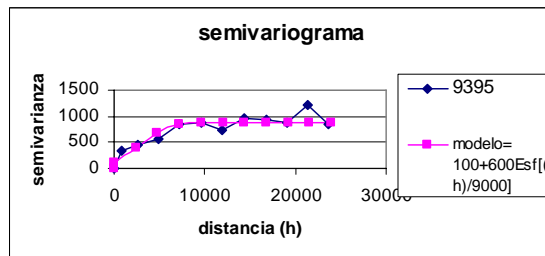
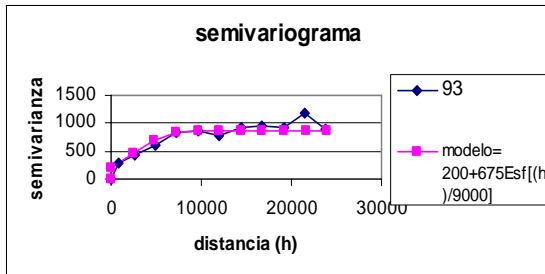


Figura 7.1. Semivariogramas muestral y teórico para los años 1993, 1995 y 1999 con sus respectivos semivariogramas cruzados.

Se comentó, anteriormente, que para validar el semivariograma cruzado es necesario que el determinante sea positivo por lo que se procedió a verificar esta propiedad en esta aplicación.

Para la primera condición

$$b_{ii}^u > 0,$$

se tiene que para la estructura de pepita y cima los valores son positivos.

Observando la segunda condición

$$|b_{ij}^u| = |b_{ji}^u| \leq \sqrt{b_{ii}^u b_{jj}^u},$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 & 100 \\ 100 & 150 \end{bmatrix} \gamma_0(h) + \begin{bmatrix} 675 & 600 \\ 600 & 650 \end{bmatrix} \gamma_1(h) \quad (7.3)$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{13} \\ \gamma_{31} & \gamma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 & 100 \\ 100 & 200 \end{bmatrix} \gamma_0(h) + \begin{bmatrix} 675 & 650 \\ 650 & 650 \end{bmatrix} \gamma_1(h) \quad (7.4)$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 & 100 \\ 100 & 200 \end{bmatrix} \gamma_0(h) + \begin{bmatrix} 650 & 650 \\ 650 & 800 \end{bmatrix} \gamma_1(h) \quad (7.5)$$

y por último

$$|b_{kk}^u| \geq 0,$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 & 100 & 100 \\ 100 & 150 & 100 \\ 100 & 100 & 200 \end{pmatrix} \gamma_0(h) + \begin{pmatrix} 675 & 600 & 650 \\ 600 & 650 & 650 \\ 650 & 650 & 800 \end{pmatrix} \gamma_1(h) \quad (7.6)$$

Como se puede observar las relaciones de la desigualdad 7.2 se satisfacen (Journel y Huijbregts , 1978, p.173).

7.2. VALIDACIÓN CRUZADA.

Con el objetivo de comparar los resultados obtenidos en la estimación univariada y multivariada, se procedió a realizar el método de validación cruzada o covalidación, para calcular los errores medio (EM); cuadrático medio (ECM); y cuadrático medio estándar (ECME) como propone Ahmed y De Marsily (1987).

El procedimiento de validación cruzada se describe en la sección 3.5 y los criterios para seleccionar el mejor modelo son que el EM sea cercano a cero; el ECM sea el menor y el ECME sea cercano a uno. Los resultados se muestran en la tabla 7.1 y se discuten más adelante.

Tabla 7.1. Resultados de la validación cruzada.

Método y año	Valores estimados de los residuales, con el método de validación cruzada.				<i>Error</i>		
	Min.	Max.	μ	σ^2	EM	ECM	<i>ECME</i>
KO, 1993	60.192	60.829	-0.192	418.36	-0.19	390.55	0.82
KO, 1995	-66.762	72.764	-0.098	463.75	-0.10	252.34	0.80
KO, 1999	-57.691	59.654	-0.396	446.104	-0.40	426.3	0.80
Cok., 1993	-89.733	69.223	-0.815	599.513	-0.79	349.51	0.92
Cok., 1995	-89.081	78.396	-0.620	611.010	-1.63	284.31	0.99
<i>Cok., 1999</i>	<i>-85.555</i>	<i>71.300</i>	<i>0.071</i>	<i>723.890</i>	<i>-1.96</i>	<i>309.03</i>	<i>0.95</i>

KO = krigeado ordinario; Cok = cokrigeado; Min. =mínimo; Max.= máximo; μ =media;

σ^2 = desviación estándar;

7.3. ESTIMACIÓN ESPACIAL.

La estimación de la carga hidráulica en el acuífero de Querétaro-Obrajuelo se efectuó en una malla de 41 columnas y 51 renglones, con una distancia entre renglón y columna de 1,100 m.

En la figura 7.2 se muestra la estimación para el año de 1993 utilizando la correlación cruzada entre los años 1993, 1995 y 1999, es notable como cambia la estimación, principalmente en el área del Salitre donde se define un parte aguas subterráneo cuyas componentes fluyen uno al centro del valle y el otro en dirección contraria.

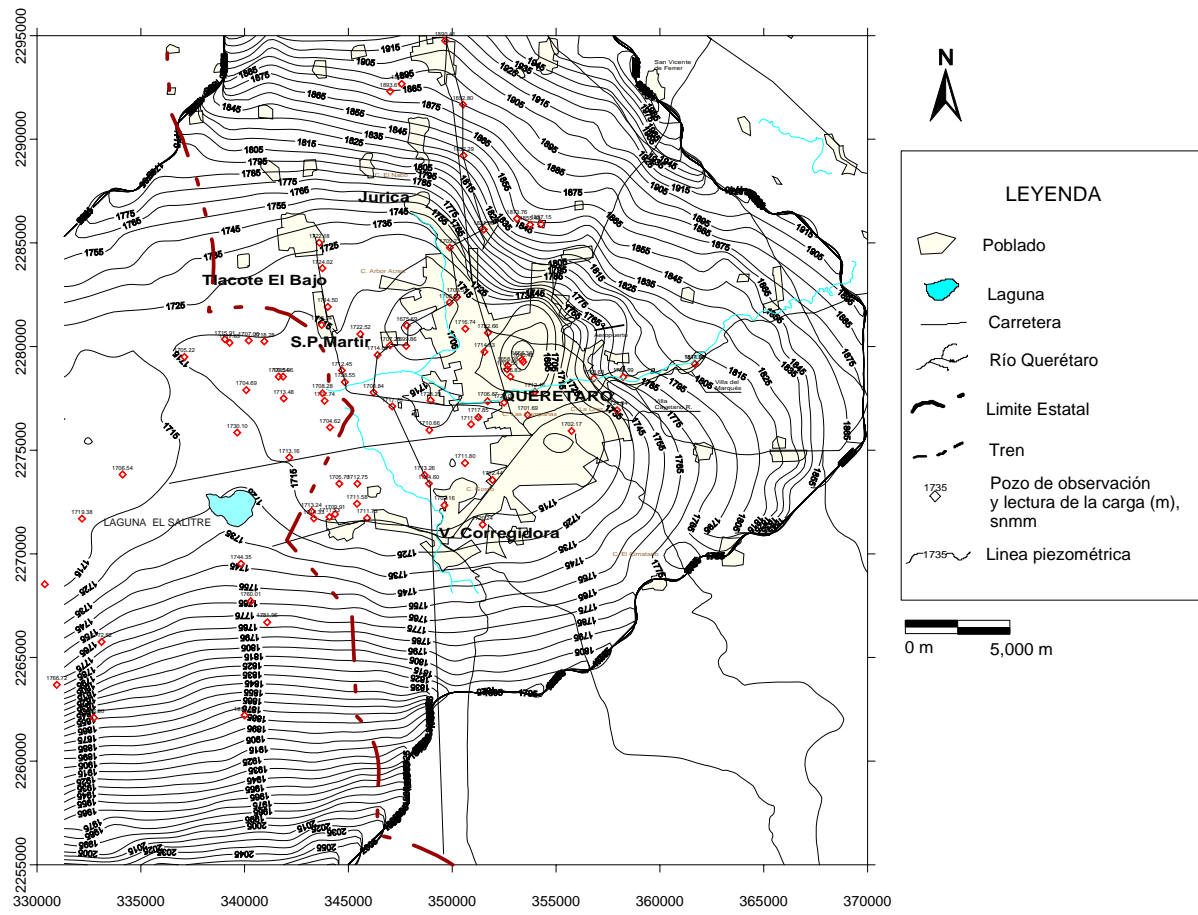


Figura 7.2. Krigeado residual para el año de 1993, valores de la carga hidráulica.

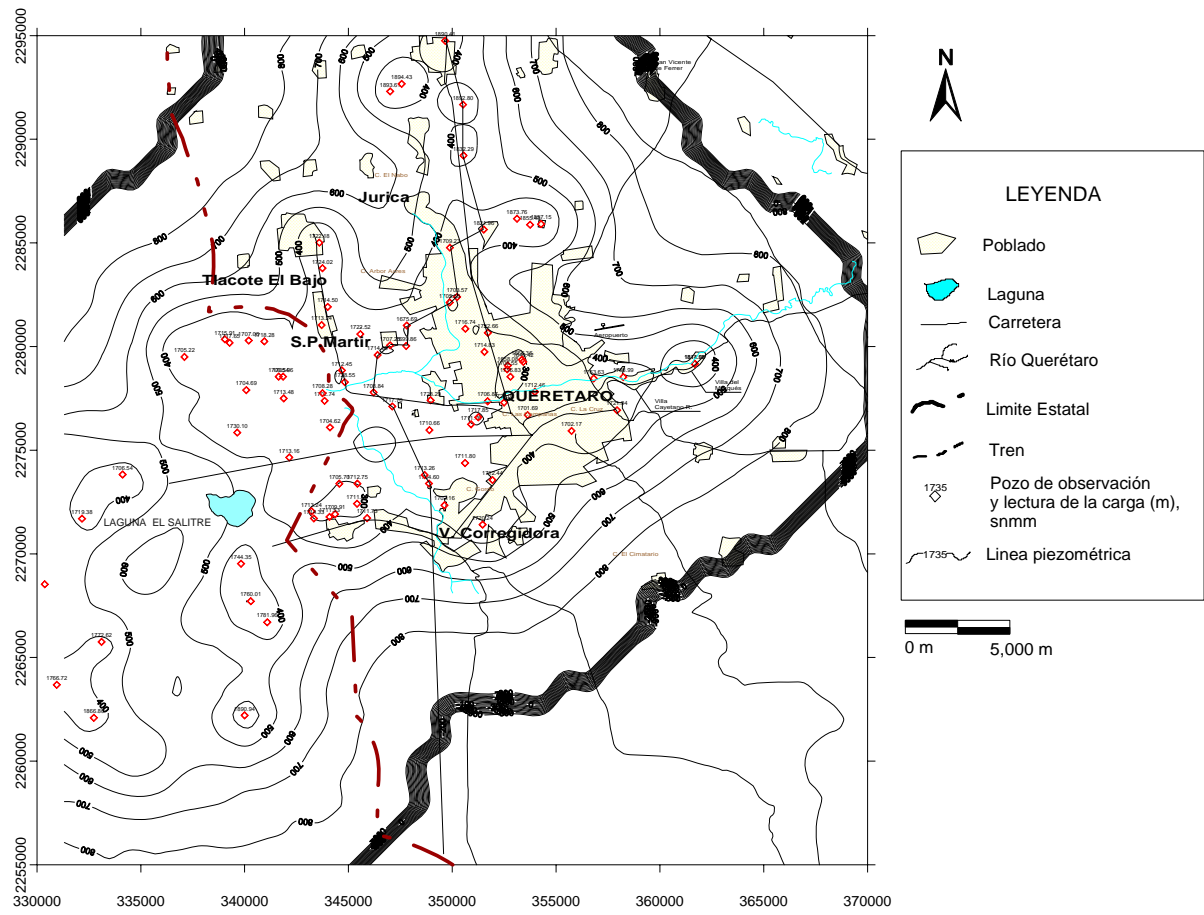


Figura 7.3. Krigado residual para el año de 1993, valores de varianza.

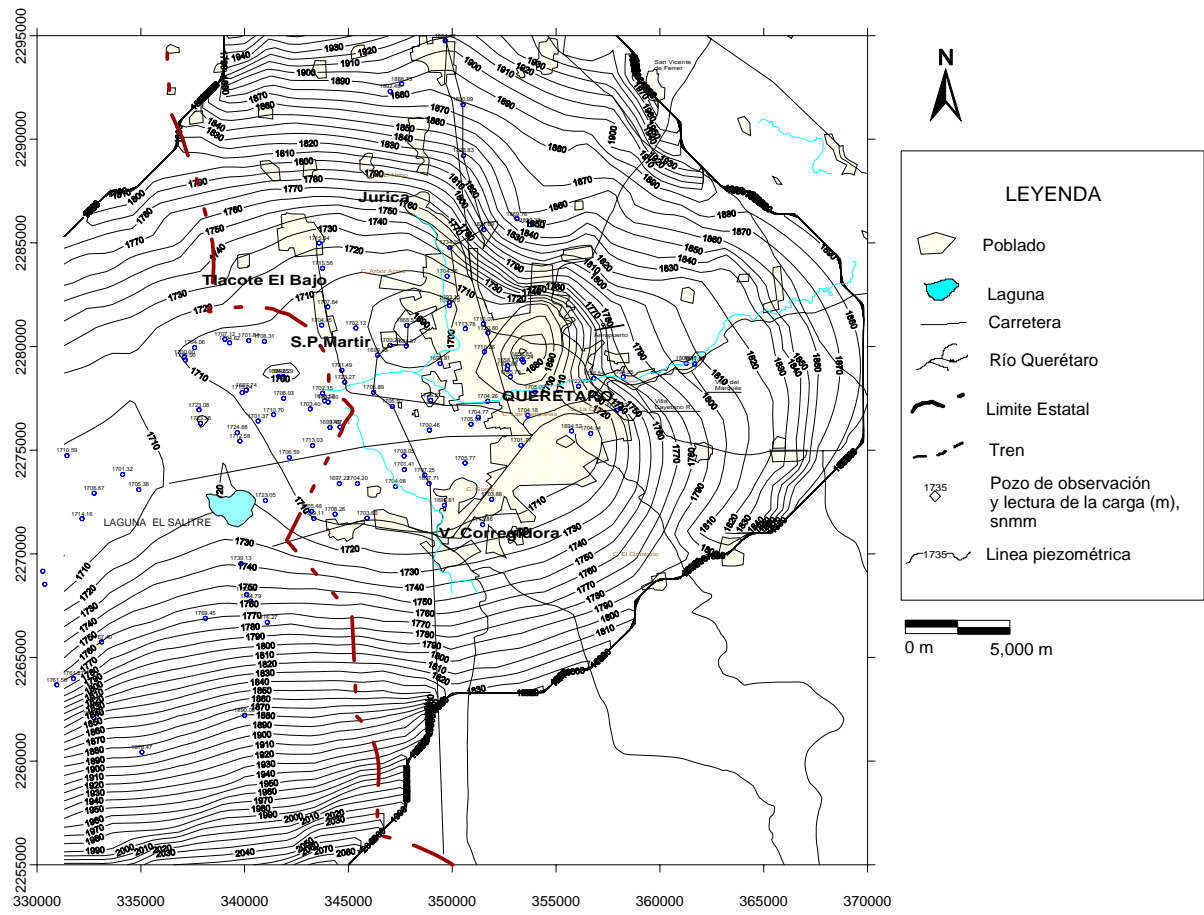


Figura 7.4. Krigeado residual para el año de 1995, valores de la carga hidráulica.

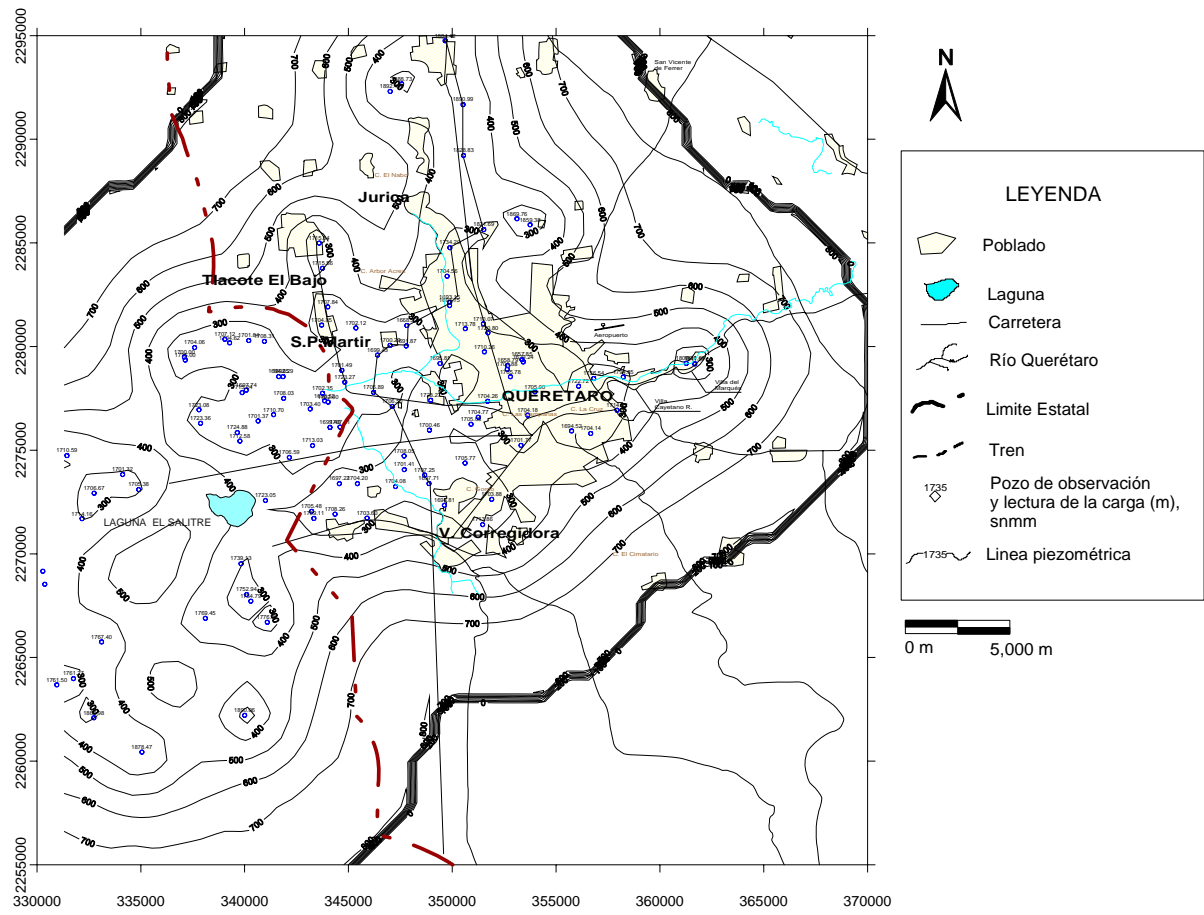


Figura 7.5. Krigeado residual para el año de 1995, valores de varianza.

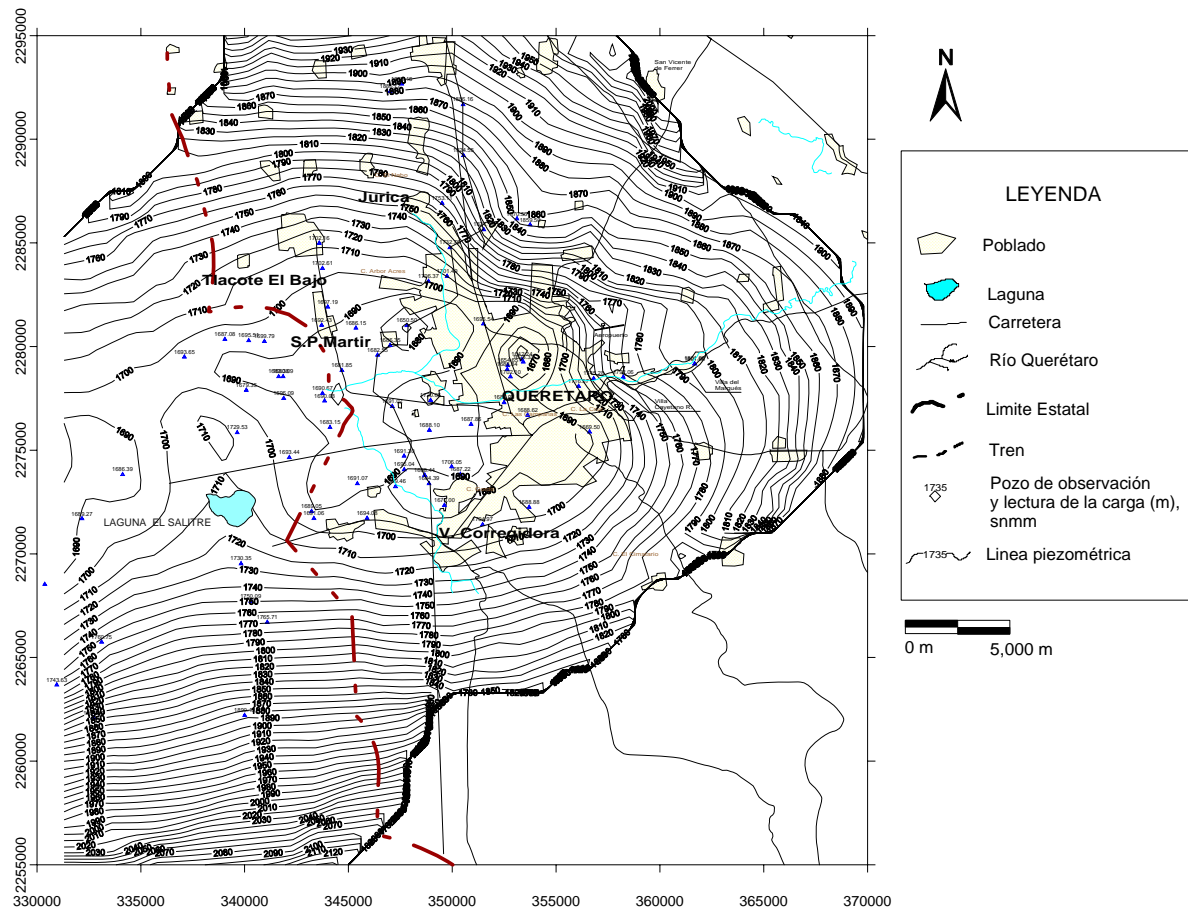


Figura 7.6. Krigeado residual para el año de 1999, valores de la carga hidráulica.

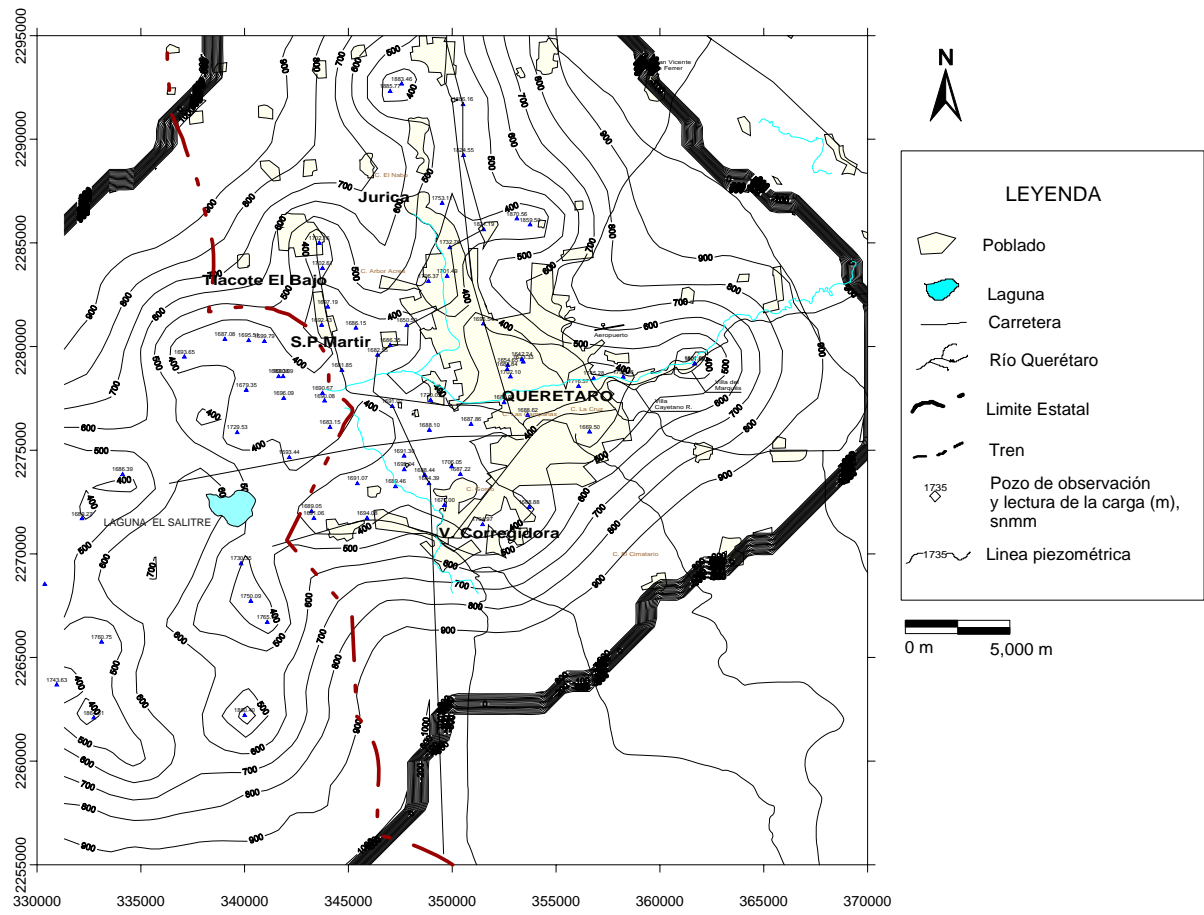


Figura 7.7. Krigeado residual para el año de 1999, valores de varianza.

7.4. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS.

Existen diferencias significativas en la estimación de la carga hidráulica y el error de estimación utilizando ambas técnicas. De forma gráfica (figuras, 7.2, a, 7.7) se observa una mejor relación entre las curvas equipotenciales y el valor observado en las gráficas del cokrigado que en las gráficas del krigado. Así mismo el auxiliarse de información en diferentes tiempos permite una representación más suavizada en aquellas áreas donde se carece de información. Las diferencias son notables sobre todo en la zona Laguna el Salitre, donde se presenta un parteaguas subterráneo que se mantiene en los diferentes años.

Observando los resultados de la Tabla 7.1, se muestran los resultados de la validación cruzada con los métodos de krigado y cokrigado. Respecto a los valores estimados de los residuales utilizando el método de krigado, los valores estimados se ubican en un rango más pequeño, basta con observar los valores máximos y mínimos para cada caso, así mismo el valor medio es cercano a cero y la varianza de los datos no es tan grande como la varianza de los datos utilizando cokrigado.

Observando los valores de los residuales estimados con el método de cokrigado, se muestra que las estimaciones se ubican en un rango más amplio y sus varianzas son mayores, comparados con los resultados obtenidos con el método de krigado. Esto indica que los valores estimados con krigado son más suavizados, lo cual está relacionado con los pesos que se asignan a cada observación. Para este método los pesos asignados a cada observación son parecidos por lo que el efecto es una estimación suavizada.

Respecto a la estimación con cokrigado se tiene que las estimaciones presentan una mayor variación por lo que inferimos que los pesos asignados a cada observación son diferentes, reflejándose en la estimación que en su conjunto representa de mejor manera el fenómeno.

Tomando en cuenta los anteriores comentarios se considera pertinente verificar el valor asignado a los pesos. Para llevar esto a efecto se seleccionó el área donde de forma visual se observa un cambio, esta área corresponde a la Laguna El Salitre y se seleccionaron tres puntos de estimación correspondientes a la malla, a los que nos referiremos como nodo (4,17), (2,17) y (1,18), que están próximos a puntos de observación. El ejemplo lo llevamos a cabo en ambos métodos, krigado y cokrigado, para el año de 1993.

En la figura 7.8, se muestra el número de puntos de observación que se toman en cuenta al momento de hacer la estimación en los nodos mencionados. El símbolo cuadrado muestra los puntos utilizados con el método de krigado. Observe que estos son 7 y el valor del peso asignado está indicado en su costado izquierdo. Como es de suponer el valor de mayor peso se encuentra en el punto de observación más cercano (0.447) y disminuye conforme la distancia se incrementa (recordemos que el alcance de la estimación es de 9000 m). Es fácil notar que los mayores pesos se asignan a los tres puntos más cercanos al punto que se está estimando (al nodo 4,17).

Para el caso del cokrigado, observando la figura 7.8, se tiene que el número de puntos de observación es mayor (círculos). De la misma forma que en el krigado el valor de mayor peso es asignado a los puntos más cercanos (los pesos para el cokrigado se pueden observar del lado derecho del punto). En la figura 7.8 se nota, como los pesos se han modificado, tanto en valor como en número.

En la figura 7.9a se muestra el número de observaciones utilizadas para estimar el valor en los nodos (4,17), (2,17) y (1,18) utilizando el método de krigado y cokrigado. Observe como el krigado utiliza menor cantidad de puntos para hacer la estimación y respecto a cokrigado se duplican los puntos de observación.

Considerando solo la información de los pesos se generó la figura 7.9b, en donde se muestra el valor mínimo, máximo y media. Aquí es de destacar que los pesos asignados con el método de krigado se presentan en un menor rango y los pesos asignados con cokrigado son mayores. En todos los casos, el valor de la desviación estándar es siempre mayor en el caso de cokrigado. Con lo anterior de forma gráfica se muestra cómo el método de cokrigado mejora la estimación ya que toma en cuenta la información en los diferentes tiempos lo que se refleja en un mayor número de puntos al momento de efectuar la estimación. Por otro lado, al incrementar las observaciones los pesos son reasignados manteniendo el hecho que el mayor peso es asignado a los puntos más cercanos.

En cuanto al criterio para verificar qué modelo es mejor, se observa en la Tabla 7.1, en la columna de error, que los estadígrafos indican, para ambos casos que los residuos en promedio se subestiman ligeramente, ya que los valores de EM son negativos y cercanos a cero, aunque el cokrigado los subestima un poco más que el krigado para los tres años. Sin embargo, el valor de ECM es menor para el método de cokrigado excepto para el año 1995, para el que el ECM aumenta ligeramente, lo que indica que las magnitudes de los residuos tienden a ser menores utilizando cokrigado. El índice ECME mide la razón entre errores de medición cuadráticos y la varianza del modelo, por lo que un valor cercano a la unidad indica que la varianza obtenida por el modelo proporciona una buena medida de los errores de la estimación. De esta forma, en el caso del krigado la varianza del modelo tiende a sobreestimar a los errores y en el caso del cokrigado existe una buena correspondencia entre ambos, por lo que en este último caso, la medida del error en la estimación proporcionada por la varianza es confiable.

De los estadígrafos mostrados en la Tabla 7.1, es claro que los resultados de cokrigado indican que los modelos están mejor ajustados en términos de error y la varianza del

modelo. El uso de la información de la carga hidráulica en los diferentes tiempos ayuda en la mejora de la estimación de la carga hidráulica. Esto es explicado desde el punto de vista de un aumento del número de observaciones, ya que de forma integrada se toma en cuenta la información obtenida en todos los años. Como referencia se comenta que el número de observaciones utilizadas con el método de krigado, específicamente para la zona Laguna Salitre, es de 7 puntos, utilizando el método de cokrigado el número de puntos para la estimación se duplica (16), como se muestra en la figura 7.8, desde luego que el número de observaciones varía conforme cambia la posición de la estimación.

En aquellas zonas donde se carece de información, como es el caso de la Laguna el Salitre, el cokrigado incrementa el número de puntos al momento de hacer la estimación ya que integra la información de los diferentes tiempos.

Estos resultados indican claramente que el método multivariado ofrece los mejores resultados. También es importante destacar que al estimar la carga hidráulica utilizando toda la información, la estimación es vista como un proceso espacio-temporal que marca estos cambios, por lo que se considera como un beneficio estimar de forma conjunta las observaciones para los tres años, lo que se observa en aquellas áreas donde se tiene menor número de pozos de observación, como son el año de 1993 y 1999.

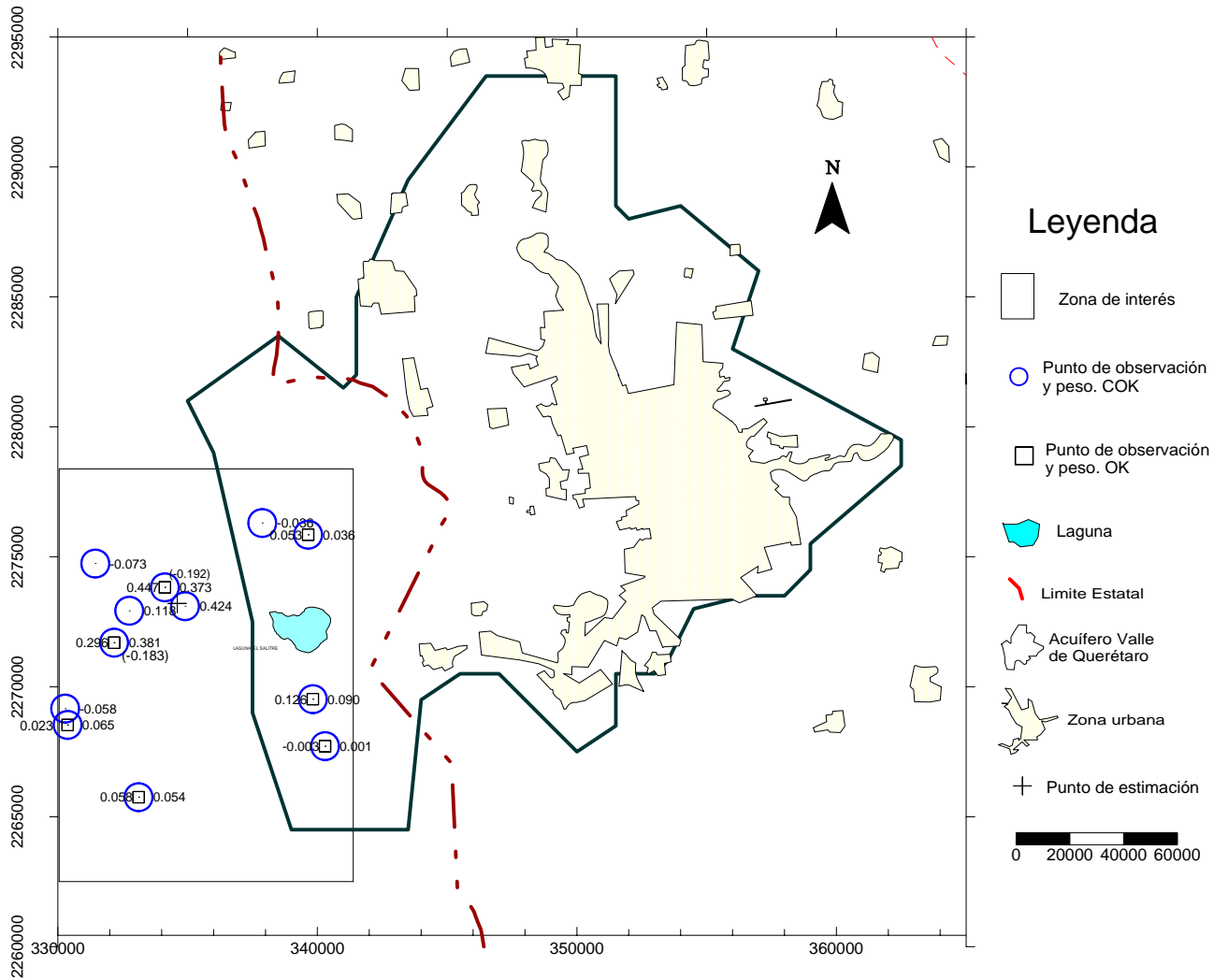


Figura 7.8. Pesos de estimación.

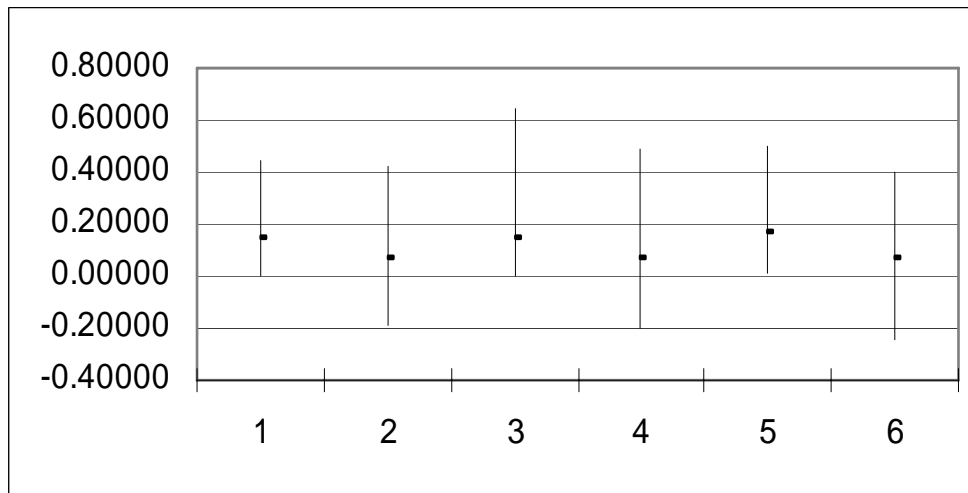
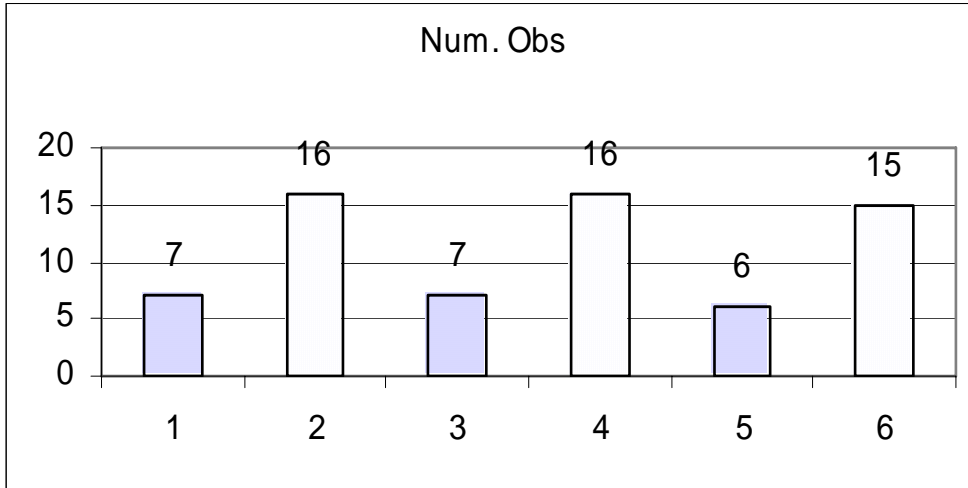


Figura 7.9. a) Histograma puntos de observación, el orden corresponde a los nodos (4,17), (2,17) y (1,18), las columnas con textura cuadrículada corresponden al método de krigeado; b) Gráfico de caja “Box-whisker” valores mínimo, máximo y media de los pesos para los nodos (4,17), (2,17) y (1,18).

7.5. CONCLUSIÓN.

Del análisis anterior se concluye que en el caso del acuífero Valle de Querétaro-Obrajuelo puede ser muy útil estimar la carga hidráulica en un año dado, utilizando como variables auxiliares los niveles del agua de los años más cercanos en tiempo que se estén analizando, lo cual ha sido posible al considerar a las cargas hidráulicas como variables espaciales que están correlacionadas en el tiempo. Este punto de vista es potencialmente útil para realizar las estimaciones en diferentes tiempos.

Una desventaja es que el aumento del número de variables correlacionadas en el tiempo requiere de calcular $n(n+1)/2$ semivariogramas simples y cruzados, lo que hace que la técnica se torne tediosa y por el número de variables consideradas en algunos casos será poco práctica.

Es importante hacer notar que al utilizar el punto de vista multivariado, la continuidad espacio-tiempo es modelada vía un modelo lineal de correogionalización (MLC) y solo se modelizan planos en tiempo determinados. Sin embargo, a pesar de que este puntos de vista no proporciona la posibilidad de utilizar los datos disponibles en todos los tiempos, los resultados presentados muestran claramente cómo el utilizar la autocorrelación en forma conjunta con la correlación cruzada beneficia a la estimación en aquellos puntos donde no se tiene información de la variable principal, ya que la variable secundaria ó variables secundarias aportan la información que no es aportada por la variable principal.

Este tipo de métodos pueden ser muy útiles en aplicaciones prácticas, sin embargo el juicio del especialista es indispensable al analizar la pertinencia de los resultados, ya que aunque los datos en los diferentes años presenten una buena

correlación las condiciones hidrodinámicas del acuífero pudieran haber sido modificadas en el tiempo en algunas zonas por lo que las estimaciones en las mismas pudieran no corresponder con la realidad.

8. ANÁLISIS ESPACIO-TIEMPO DE LA CARGA HIDRÁULICA, CONCEPTO DE FUNCIÓN ALEATORIA ESPACIO-TIEMPO.

Los métodos geoestadísticos de krigado, han sido ampliamente utilizados en la hidrogeología subterránea, numerosos investigadores utilizan los métodos geoestadísticos para estimar campos de transmisividad (Ahmed y De Marsigli, 1987), la carga hidrostática de un acuífero (Delhomme, 1978; Rouhani, 1986) o la precipitación (Hevesi et al., 1992).

La constante en estos trabajos, es que la variable se estima en el dominio del espacio, sin embargo, se sabe que las variables son dinámicas lo que indica que tienen una componente temporal de importancia, en algunos casos estos cambios son lentos (e.g., transmisividad), pero en otros son más rápidos (e.g., carga hidráulica).

De forma tradicional se ha realizado el análisis bajo dos concepciones, el punto de vista espacial y el punto de vista temporal. Sin embargo, la conceptualización conjunta, a la que nos referiremos como espacio-temporal, ha sido ámbito de estudio de los últimos 15 años y poco estudiada en el caso particular de la hidrogeología subterránea.

Rouhani y Hall, 1989, son los primeros investigadores que plantean determinar la carga hidráulica utilizando información conjunta en el dominio del espacio y el tiempo. Los autores muestran como calcular esta estimación utilizando un modelo del tipo lineal:

$$C_{st}(h_s, h_t) = C_s(h_s) + C_t(h_t) \quad (8.1)$$

donde $C_{st}(h_s, h_t)$ es la función de covarianza espacio-temporal, $C_s(h_s)$, $C_t(h_t)$ son las funciones de covarianza espacial, y covarianza temporal, respectivamente. El modelo lineal

presenta problemas ya que la matriz de covarianza, para ciertas configuraciones, es singular (Myers y Journel, 1990; Rouhani y Myers, 1990, Dimitrakopoulos y Lou, 1994).

En esta sección se presenta la metodología para estimar la carga hidráulica desde el punto de vista espacio-temporal, utilizando un modelo espacio-temporal tipo generalizado producto suma (De Iaco, 2001, De Cesare, 2000). En la metodología se hace énfasis en la determinación de la deriva, el cálculo del semivariograma muestral, el modelo espacio-temporal y la forma de ajustarlo, mediante un proceso visual, y por último en la validación del modelo mediante el método cruzado (validación cruzada).

La propuesta es diferente a la de Rouhani y Hall en el tipo de modelo utilizado, producto-suma, pero en la estimación se utiliza el mismo sistema de krigeado (krigeado ordinario espacio-temporal).

8.1. ESTADÍGRAFOS EN ESPACIO.

Como un primer paso analizaremos de forma separada la información espacial de la temporal, de esta manera iniciaremos con describir los estadígrafos que caracterizan a la carga hidráulica para cada año.

Como una primer estrategia se integró la base de datos que describe la posición de los pozos de observación (x,y) en unidades UTM, seguidas de la lectura de elevación de la carga hidráulica.

En el histograma de la figura 8.1, se muestra el número de lecturas, de pozos de observación, en cada año. Es de destacar que se cuenta con información que es rica en el espacio, pero en diferentes tiempos se cuenta con pocas observaciones. Para todo el período que comprende del año de 1970 al 2004, se cuentan información que va desde cero lecturas, para el año 2000 y máximo de 170 pozos para 2001.

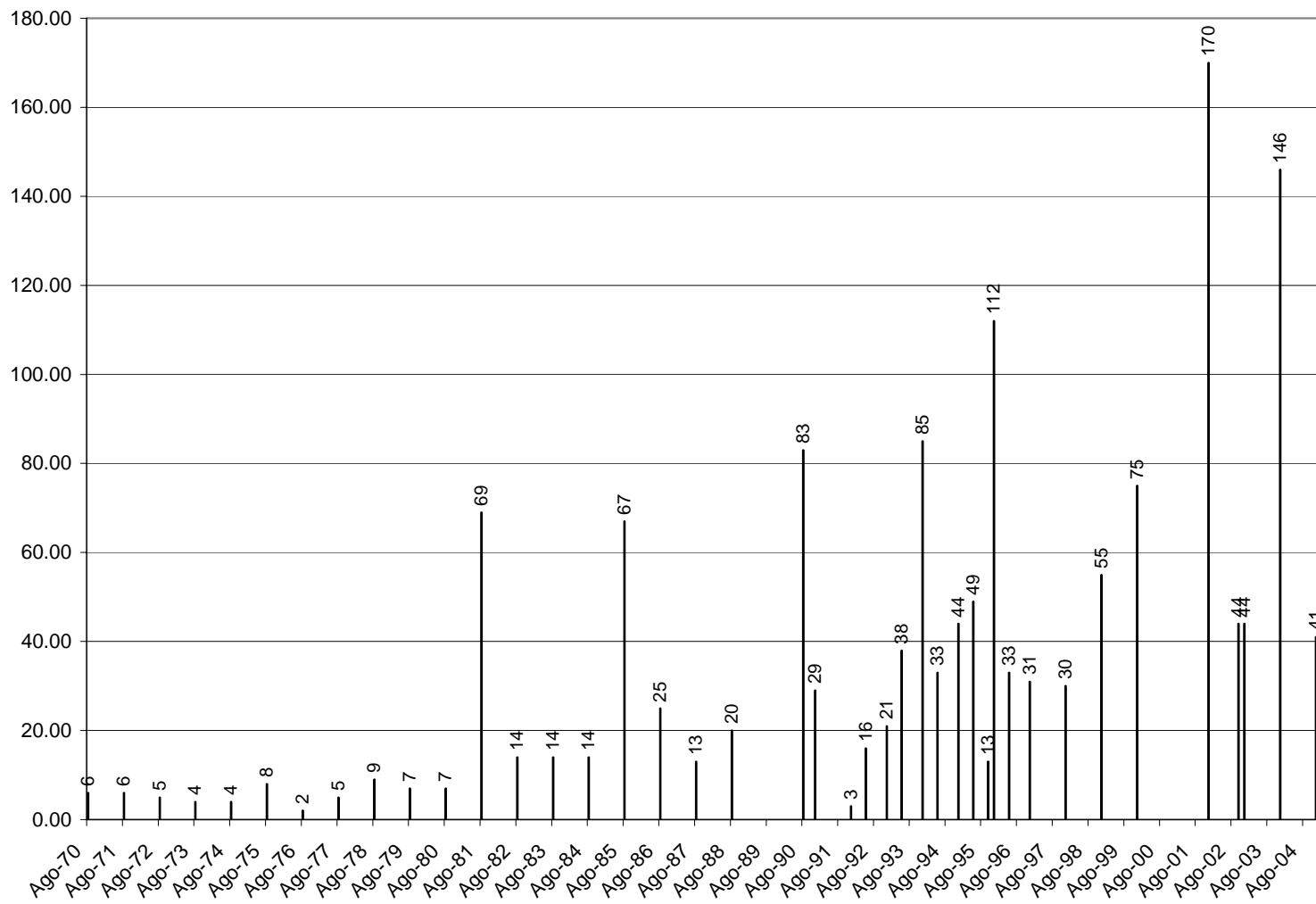


Figura 8.1. Histograma número de pozos muestreados en el período 1970-2004.

Debido a que la base de datos en ocasiones rica en espacio y en otras muy pobre, afecta directamente en el cálculo de la estructura, por lo que se procede a trabajar con aquellos años que presentan 30 o más observaciones, mismas que se muestra en la figura 8.2.

Observe como la muestra se redujo a 20 columnas, que representan los años de muestreo, que cubren desde el año de 1981 al año 2004, teniendo como número mínimo de lecturas 30, para el 1997 y máximo de 173 para 2001.

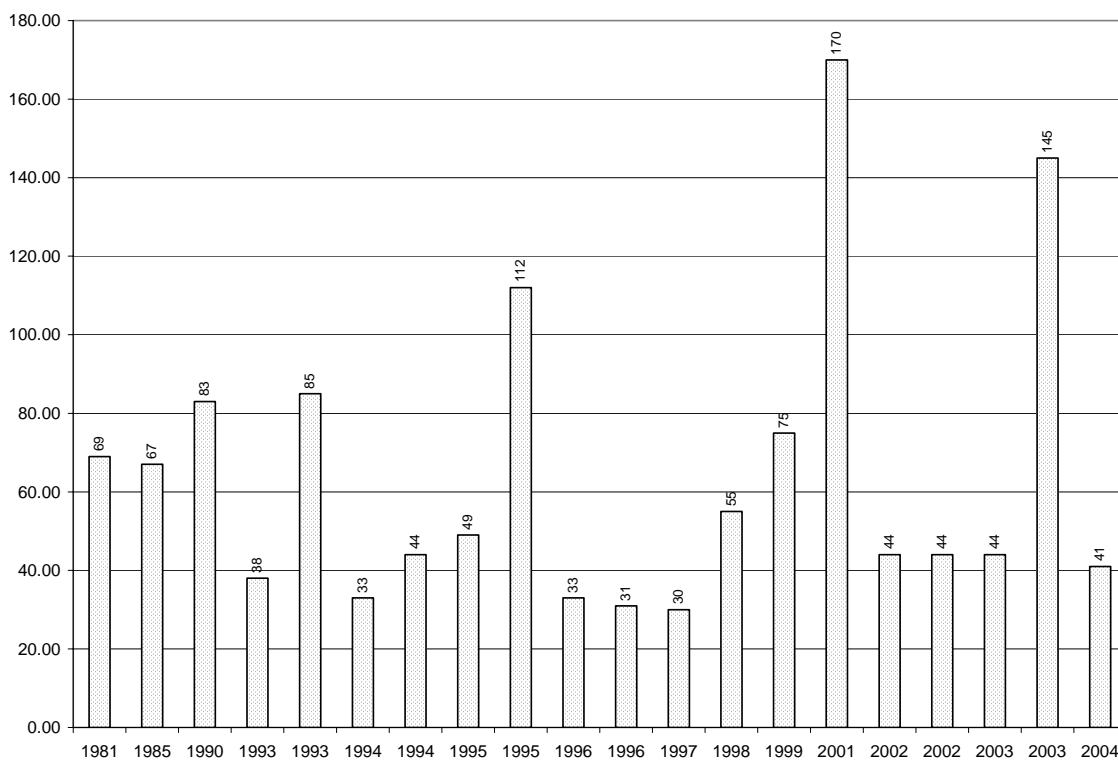


Figura 8.2. Histograma, pozos con 30 observaciones.

Los estadígrafos que caracterizan a las lecturas de la carga hidráulica se resumen en la tabla 8.1. De forma general se comenta que los estadígrafos indican que en todos los años los valores de la media y mediana están separados, y se reportan valores de desviaciones altas, con valores de simetría que indican que la muestra presenta sesgo y una forma platicurtica.

Por lo antes comentado, será necesario realizar una transformación a los datos con el objeto de trabajar con muestras cuyos valores asemejen una distribución simétrica.

Tabla 8.1. Estadígrafos de la carga hidráulica.

Núm. Obs.	media	mediana	varianza	Des. est.	mínimo	máximo	simetría	curtosis	fecha
69.00	1767.91	1752.68	1998.79	44.71	1690.95	1913.70	1.91	3.38	01/08/1981
67.00	1754.22	1740.13	2124.79	46.10	1678.06	1903.44	2.06	3.99	01/08/1985
83.00	1731.84	1720.70	2498.33	49.98	1654.49	1897.99	1.82	3.53	01/08/1990
38.00	1745.19	1716.31	4680.44	68.41	1642.32	1920.48	1.36	0.90	01/05/1993
85.00	1737.35	1713.48	3377.93	58.12	1640.42	1894.43	1.60	1.64	01/12/1993
33.00	1724.72	1711.25	2338.95	48.36	1635.99	1891.99	1.64	4.09	01/05/1994
44.00	1748.38	1713.01	5109.31	71.48	1632.49	1907.93	1.07	-0.07	01/12/1994
49.00	1732.41	1708.35	3934.71	62.73	1654.57	1907.73	1.73	1.95	01/05/1995
112.00	1728.37	1706.89	2965.89	54.46	1629.24	1892.48	1.84	2.72	01/12/1995
33.00	1738.13	1705.61	4669.56	68.33	1656.41	1907.30	1.51	0.86	01/05/1996
31.00	1725.83	1701.88	3853.44	62.08	1654.79	1890.48	1.97	2.77	01/12/1996
30.00	1730.73	1705.16	3733.14	61.10	1658.75	1888.70	1.61	1.49	01/12/1997
40.00	1722.49	1700.56	2554.13	50.54	1655.65	1888.08	2.02	4.15	01/12/1998
75.00	1720.65	1693.65	3862.62	62.15	1623.33	1890.40	1.55	1.55	01/12/1999
145.00	1704.16	1686.73	4554.91	67.49	1466.44	1910.58	1.14	2.49	03/12/2003

8.2. ESTADÍGRAFOS EN TIEMPO.

Ahora consideramos solo el aspecto temporal de la carga hidráulica, para efectuarlo es necesario tener una idea de la forma en cómo está muestreada la carga hidráulica en el tiempo.

A diferencia del análisis exploratorio espacial, el temporal toma en cuenta la variación de la variable aleatoria, carga hidráulica, en una misma posición, es decir que analiza la serie de tiempo de la carga hidráulica que se presenta en un pozo de observación.

Observando la base de datos, es evidente que la información temporal no se encuentra densamente muestreada, basta considerar que de los 322 pozos existentes, para un mismo pozo existe un máximo de 31 lecturas y como mínimo una. La figura 8.3, muestra el histograma del número de observaciones en el período 1970-2004.

"frecuencía de muestreo"

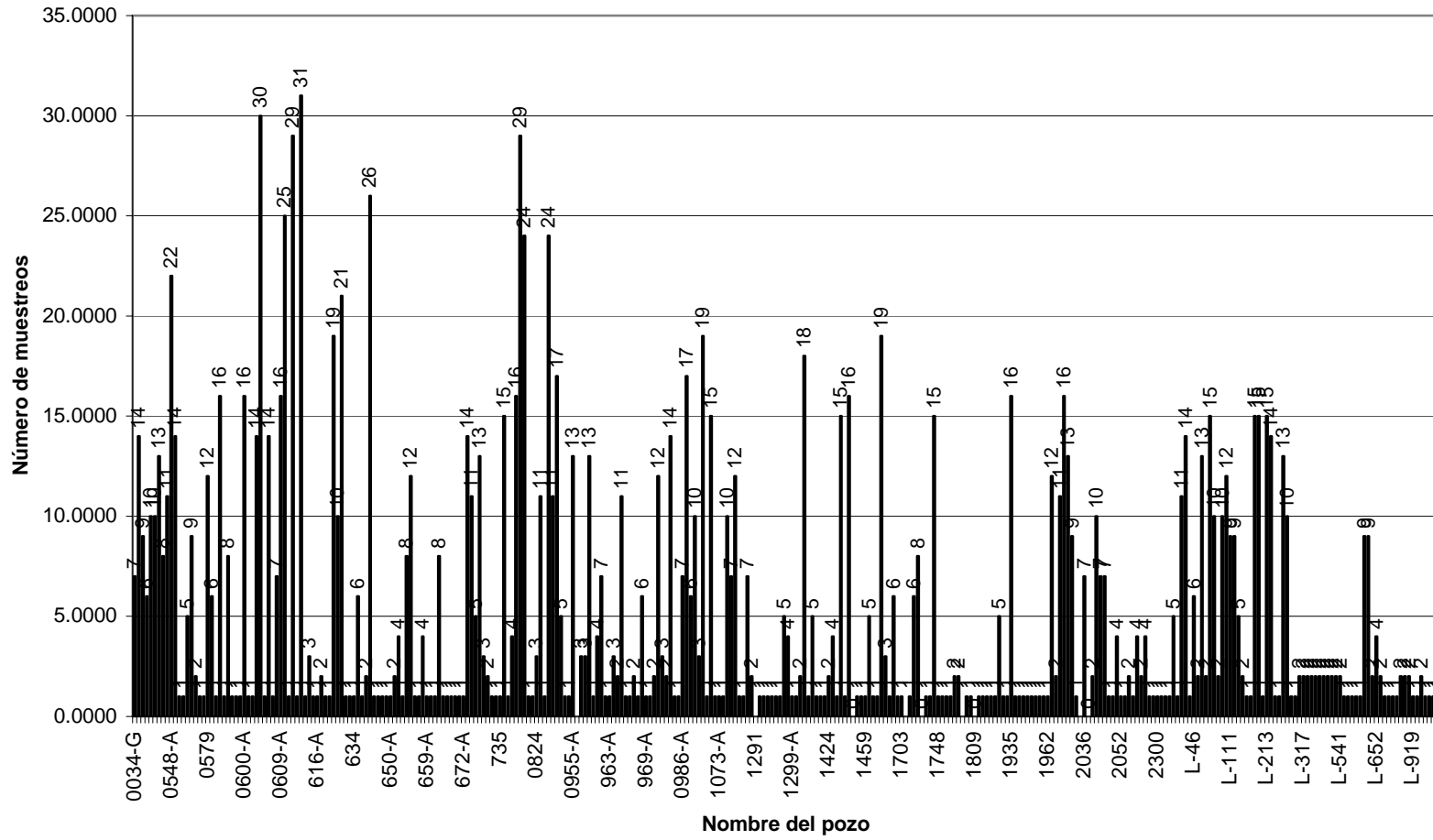


Figura 8.3. Histograma número de observaciones por pozo en el período 1970-2004.

Por esta razón, se toma la decisión de trabajar con aquellos pozos que reportan, en el tiempo, 19 o más lecturas, por lo que trabajaremos con una submuestra que contabiliza un total de 13 pozos, como se observa en la figura 8.4. Basta comentar que la decisión anterior obedece a que al calcular el semivariograma muestral, en tiempo, se requiere de un número mínimo de observaciones para evitar que el semivariograma tenga un comportamiento errático.

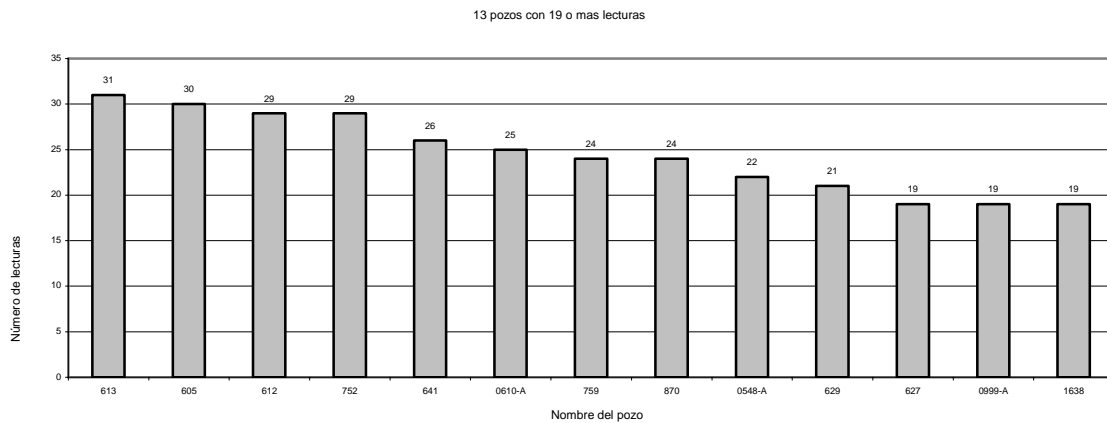


Figura 8.4. Histograma de 13 pozos con 19 o más lecturas anuales.

Los estadígrafos de estas lecturas se muestran en la tabla 8.2.

Tabla 8.2. Estadígrafos de la lectura de la carga hidráulica por pozo.

media	mediana	varianza	desviación	mínimo	máximo	simetría	curtosis	pozo
1740.13	1747.87	721.01	26.85	1698.59	1775.12	-0.183	-1.561	613
1733.21	1744.06	1008.98	31.76	1683.23	1801.13	-0.050	-1.056	605
1736.31	1740.77	570.89	23.89	1691.15	1769.08	-0.212	-1.300	612
1802.63	1798.99	163.58	12.79	1780.13	1827.29	0.397	-0.511	752
1735.56	1734.91	535.23	23.14	1689.01	1769.79	-0.158	-0.992	641
1743.29	1750.11	590.28	24.30	1690.75	1770.8	-0.663	-0.822	0610-A
1891.61	1892.85	135.64	11.65	1858.03	1910.92	-0.748	1.686	759
1718.47	1717.13	268.92	16.40	1700.88	1765.85	1.140	1.512	870
1900.33	1899.14	86.55	9.30	1886.82	1912.29	0.078	-1.545	0548-A
1709.27	1710.74	529.00	23.00	1677.69	1753.12	0.349	-0.830	629
1741.17	1743.61	493.91	22.22	1688.07	1769.17	-0.824	0.284	627
1700.39	1702.40	174.19	13.20	1679.35	1724.11	-0.108	-0.964	0999-A
1705.10	1706.85	182.01	13.49	1679.12	1730.42	0.034	-0.722	1638

8.3. ESTIMACIÓN DE LA DERIVA.

La variable que analizamos, carga hidráulica, la hemos considerado como estacionaria, pero al observar los estadígrafos de la tabla 8.1, se interpreta que la muestra no se tiene un comportamiento de una distribución simétrica. Este tipo de comportamientos es común, por lo que suponemos que el valor que toma la variable sí está afectado por la posición que guarda en el espacio y el tiempo.

Para quitar el efecto de deriva procederemos a tratarla como en el caso espacial. Una vez determinada la deriva, ésta es restada de la observación inicial y trabajamos con los residuos. De forma individual se calculó un polinomio de segundo orden, reportándose los valores de los residuales que consideramos son aleatorios y se comportan bajo la hipótesis de segundo orden. Los estadígrafos de los residuales se muestran en la tabla 8.3 y en el tiempo en la tabla 8.4.

Tabla 8.3. Estadígrafos de los valores residuales de la carga hidráulica.

Núm. Obs.	Media	Mediana	Varianza	Des. Est.	Mínimo	Máximo	Simetría	Curtosis	Fecha
69.00	4.83	2.12	846.05	29.09	-70.22	78.20	0.22	1.14	Oct-81
67.00	3.57	-0.61	987.37	31.42	-61.36	130.28	1.30	3.91	Ago-85
83.00	-5.18	-8.62	1162.79	34.10	-73.89	98.95	0.89	1.80	Ago-90
38.00	-4.30	-4.09	1028.02	32.06	-79.91	62.54	-0.06	0.38	May-93
85.00	2.14	-2.58	1190.12	34.50	-80.52	106.37	0.83	1.57	Dic-93
33.00	-6.79	-4.55	873.93	29.56	-84.02	62.71	-0.11	1.25	May-94
44.00	-2.09	-5.48	1432.86	37.85	-86.24	110.36	0.62	1.29	Dic-94
49.00	-5.87	-6.49	989.02	31.45	-61.47	98.65	1.17	2.31	May-95
112.00	1.83	-3.07	1071.28	32.73	-87.28	108.59	0.59	1.58	Dic-95
33.00	3.25	-4.64	1088.46	32.99	-59.10	103.34	1.68	3.82	May-96
31.00	-8.34	-13.89	1321.18	36.35	-57.75	112.40	2.19	5.86	Dic-96
30.00	-0.33	-11.39	1931.63	43.95	-55.34	112.89	1.60	1.92	Dic-97
55.00	0.31	-6.29	777.00	27.87	-56.04	78.89	0.68	1.01	Dic-98
75.00	-1.46	-9.25	1473.56	38.39	-84.33	118.24	0.99	1.63	Dic-99
170.00	5.21	-1.67	1324.63	36.40	-107.68	114.31	0.41	2.03	Dic-01
44.00	2.64	3.36	1511.36	38.88	-109.71	95.39	-0.41	1.63	May-02
44.00	6.92	8.83	1462.39	38.24	-106.87	97.88	-0.50	1.99	Oct-02
44.00	12.05	15.69	1474.57	38.40	-104.98	87.38	-0.74	1.86	Nov-03
145.00	-10.94	-14.89	2270.32	47.65	-243.50	147.52	-0.11	1.49	Dic-03
41.00	14.69	15.90	1652.92	40.66	-105.14	112.17	-0.26	1.39	May-04

Tabla 8.4. Estadígrafos de los residuales de la carga hidráulica por pozo.

media	mediana	varianza	desviación	mínimo	máximo	simetría	curtosis	pozo
-31.38	-31.82	25.95	5.09	-37.94	-19.88	0.94	0.74	613
-2.81	-2.36	81.39	9.02	-14.10	15.81	0.94	0.42	605
2.81	4.04	35.57	5.96	-7.98	14.45	0.07	1.42	612
59.84	62.66	81.87	9.05	36.23	71.35	-1.45	2.60	752
-27.00	-24.53	79.53	8.92	-38.06	-13.70	-0.01	-1.51	641
-9.24	-9.22	40.57	6.37	-16.90	2.99	1.15	2.08	0610-A
-9.82	-8.95	26.81	5.18	-22.37	-2.57	-1.15	1.84	759
-4.20	-4.32	38.10	6.17	-11.88	13.85	1.92	5.62	870
-21.20	-19.55	13.68	3.70	-27.89	-17.63	-1.10	-0.32	0548-A
-11.79	-13.17	44.41	6.66	-20.10	3.86	0.97	1.10	629
-13.88	-14.27	47.11	6.86	-23.37	-4.10	0.10	1.73	627
-4.75	-5.44	20.73	4.55	-11.09	5.05	0.48	-0.11	0999-A
-6.18	-4.47	9.67	3.11	-11.14	-2.55	-0.39	-1.76	1638

Nota: debido a la decisión que se hizo en el espacio, tomar en cuenta los años donde se tienen 30 o más mediciones, el número de observaciones en el tiempo se ve afectada, ya que se eliminaron datos que van de 1971 a 1981, por lo que el número de observaciones para un mismo pozo se ven reducidas. Por el momento los estadígrafos corresponden al mismo pozo que se muestran en la tabla 8.2.

En resumen, desde el punto de vista espacial se tiene que la variable, carga hidráulica, presenta un comportamiento no simétrico y se postula que esta afectada por una deriva. Los valores residuales se consideran que son estacionarios de segundo orden, de esta forma trabajaremos con ellos para determinar su estructura y posteriormente calcular los parámetros que los caractericen.

8.4. ANÁLISIS ESTRUCTURAL.

El objetivo de esta sección es determinar la estructura de los datos en espacio-tiempo por lo que se procederá a calcular el semivariograma muestral, de los años identificados en la tabla 8.1. Se calcula el semivariograma espacio-temporal y finalmente se realiza la validación cruzada del modelo.

Las propuestas de Bilonik (1983), Cameron y Hunter (2000), y Gardner y Sullivan (2004) se basan en calcular un semivariograma promedio partiendo de cada semivariograma individual, en una distancia “lag” común. Este tipo de semivariograma es denominado como compuesto. En este trabajo se propone analizar un semivariograma que de forma conjunta que integre la información espacial y la temporal, tal como se indica en la siguiente sección.

8.4.1. Espacio-temporal.

En la siguiente sección se analiza la estructura espacio-tiempo y el ajuste de un modelo teórico producto suma, en ésta se presenta la forma en como se ajusta el modelo, visto

desde diferentes secciones del semivariograma espacio-tiempo, que se denomina como semivariograma de superficie.

8.4.1.1. Semivariograma muestral.

Se procedió a calcular el semivariograma muestral, utilizando el algoritmo propuesto por De Cesare, et al. (2001). El semivariograma espacio-temporal se muestra en la figura 8.5.

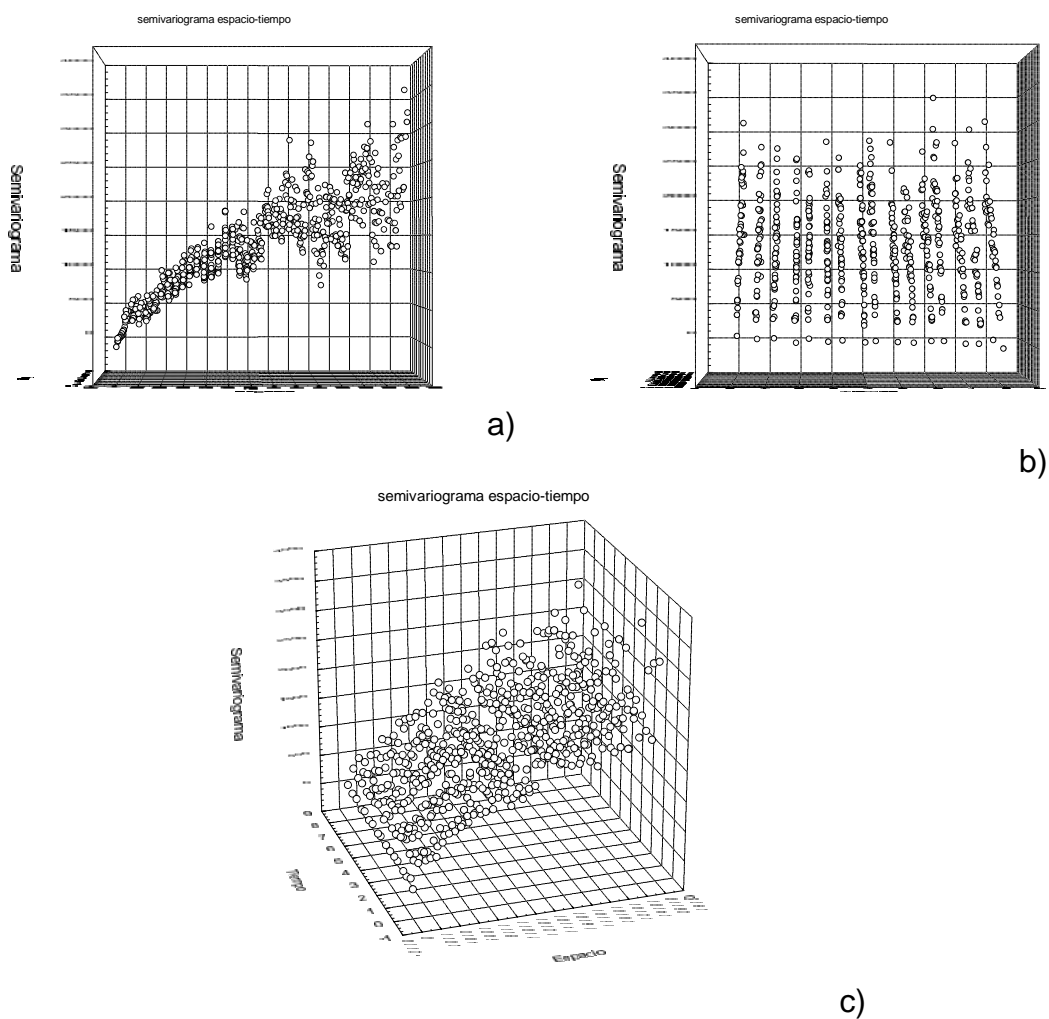


Figura 8.5. Semivariograma de superficie espacio-temporal. a) Vista en la escala del espacio, b) vista desde la escala del tiempo, c) vista 3D.

8.4.1.2. Modelo teórico producto suma.

De Cesare et al. (2001) propone el modelo que combina el producto y suma de la siguiente manera:

$$C_{st}(h_s, h_t) = k_1 C_s(h_s) C_t(h_t) + k_2 C_s(h_s) + k_3 C_t(h_t), \quad (8.2)$$

o de forma equivalente en semivariograma

$$\gamma_{st}(h_s, h_t) = [k_2 + k_1 C_t C_t(0)] \gamma_s(h_s) + [k_3 + k_1 C_s C_s(0)] \gamma_t(h_t) - k_1 \gamma_s(h_s) \gamma_t(h_t), \quad (8.3).$$

dónde C_s y C_t son la función de covarianza en espacio y tiempo, respectivamente, γ_s y γ_t son las correspondientes funciones de semivariograma, en espacio y tiempo. Es de remarcar que $C_{st}(0)$ es la cima de γ_{st} , $C_s(0)$ es la cima de γ_s y $C_t(0)$ es la cima de γ_t y por definición $\gamma_{st}(0,0) = \gamma_s(0) = \gamma_t(0) = 0$

El análisis espacio-temporal se analiza en los valores de elevación de la carga hidráulica, del acuífero Valle de Querétaro-Obrajuelo, utilizando mediciones anuales, en una distribución irregular, de pozos de observación donde varían en número según el año de muestreo. Las mediciones, una vez restado la componente de deriva, se consideran como realizaciones espacio-temporales de un campo aleatorio de segundo orden.

Para ajustar el modelo teórico al semivariograma muestral se requiere estimar la cima global, espacio-tiempo, misma que puede ser definida de manera subjetiva a través de un procedimiento de ajuste visual o como se indica en la siguiente sección.

8.4.1.3. Ajuste del modelo espacio-temporal.

El procedimiento para el ajuste del semivariograma espacio-temporal se puede hacer valiéndose de los semivariogramas teóricos en espacio y tiempo, y la selección de la cima global por medio de un ajuste visual que reproduzca el semivariograma muestral. Este proceso depende del analista por lo que el valor obtenido varía dependiendo de quien lo proponga. Este proceso no es ajeno a la metodología que aplican los geoestadísticos en el caso de análisis univariados.

Para el caso particular que se analiza aquí, el proceso de ajuste y selección del modelo producto suma que mejor ajusta a la función de semivariograma espacio-tiempo se hizo como se describe a continuación.

Como primer paso se graficó el semivariograma muestral para diferentes incrementos de distancia en el eje del espacio y lo mismo para el tiempo. Una vez efectuado lo anterior, se propuso un semivariograma, producto suma, donde se conoce la cima de la componente espacial y la temporal.

Para ello se propusieron diferentes valores hasta ajustar el semivariograma teórico al muestral, buscando que las diferencias entre el valor del semivariograma teórico y el muestra sea mínimo. Se selecciona aquel modelo, que presente un valor menor de las diferencias que denominaré como errores.

Siguiendo los pasos anteriores se llegó al semivariograma teórico que se muestra en la figura 8.6, el valor de error es de 12.59 unidades.

Semivariograma espacio-tiempo

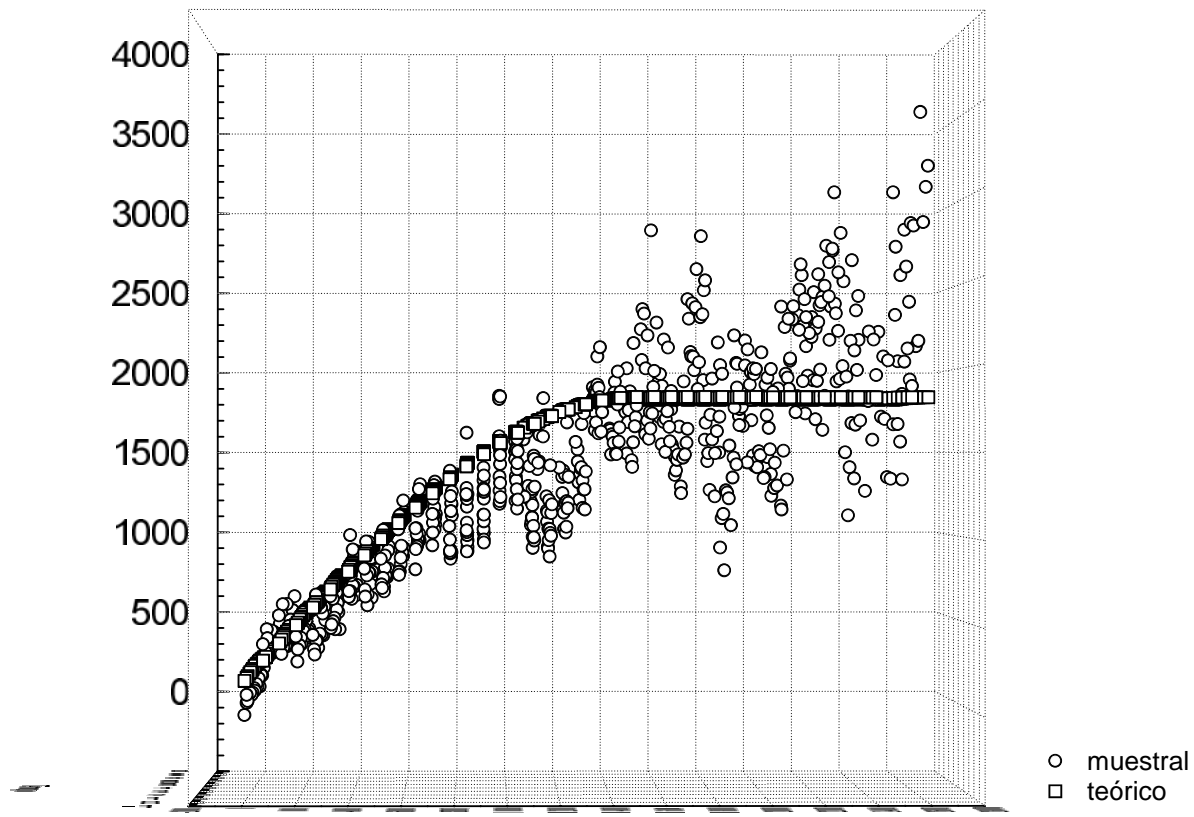


Figura 8.6. Semivariograma muestral y teórico espacio-tiempo.

Al cuantificar el error de las mediciones entre la función de semivariograma y el respectivo modelo teórico se obtiene una forma cuantitativa para seleccionar el mejor modelo, lo que da como resultado un valor de la cima, $C_{st}(0,0)$, igual a 1840.

Es importante remarcar que este criterio no es totalmente automático ya que en el proceso de ajuste del semivariograma espacio-tiempo, se van proponiendo diferentes valores hasta llegar a un valor que de acuerdo a los errores sea el menor. Sin embargo, este proceso permite al modelador ajustar de acuerdo a un criterio, permitiéndole ajustar de mejor manera en las interdistancias, de espacio o tiempo, que muestren un mayor número de pares y desechando aquellas que no sean congruentes, lo que no pasa con un proceso que ajuste de forma automática, sea por mínimos cuadrados o mínimos cuadrados ponderados.

8.5. VALIDACIÓN CRUZADA.

Para verificar qué tan bien ajusta el semivariograma teórico, se procede a utilizar el método de validación cruzada para después calcular el error medio, el error cuadrático medio y error cuadrático medio estándar.

El proceso de validación cruzada es realizado utilizando el algoritmo propuesto por De Iaco *et al.* (2001). Con el objetivo de evaluar los resultados se seleccionaron los años 1993, 1995 y 1999 que corresponden a los mismos años que se estimaron con el método multivariado de funciones aleatorias. La comparación entre los resultados obtenidos para los métodos de funciones aleatorias y multivariado se discuten en detalle en el capítulo 9.

Los resultados de validación cruzada para el año de 1993 muestran que los valores de error son: **EM**= -1.045, **ECM**= 195.53, **EME**= 0.408 y el valor promedio de desviación estándar es de 31.60. La figura 8.7 muestra el diagrama de dispersión entre los valores observados de la carga hidráulica para el año de 1993 y los estimados, por el método de validación cruzada.

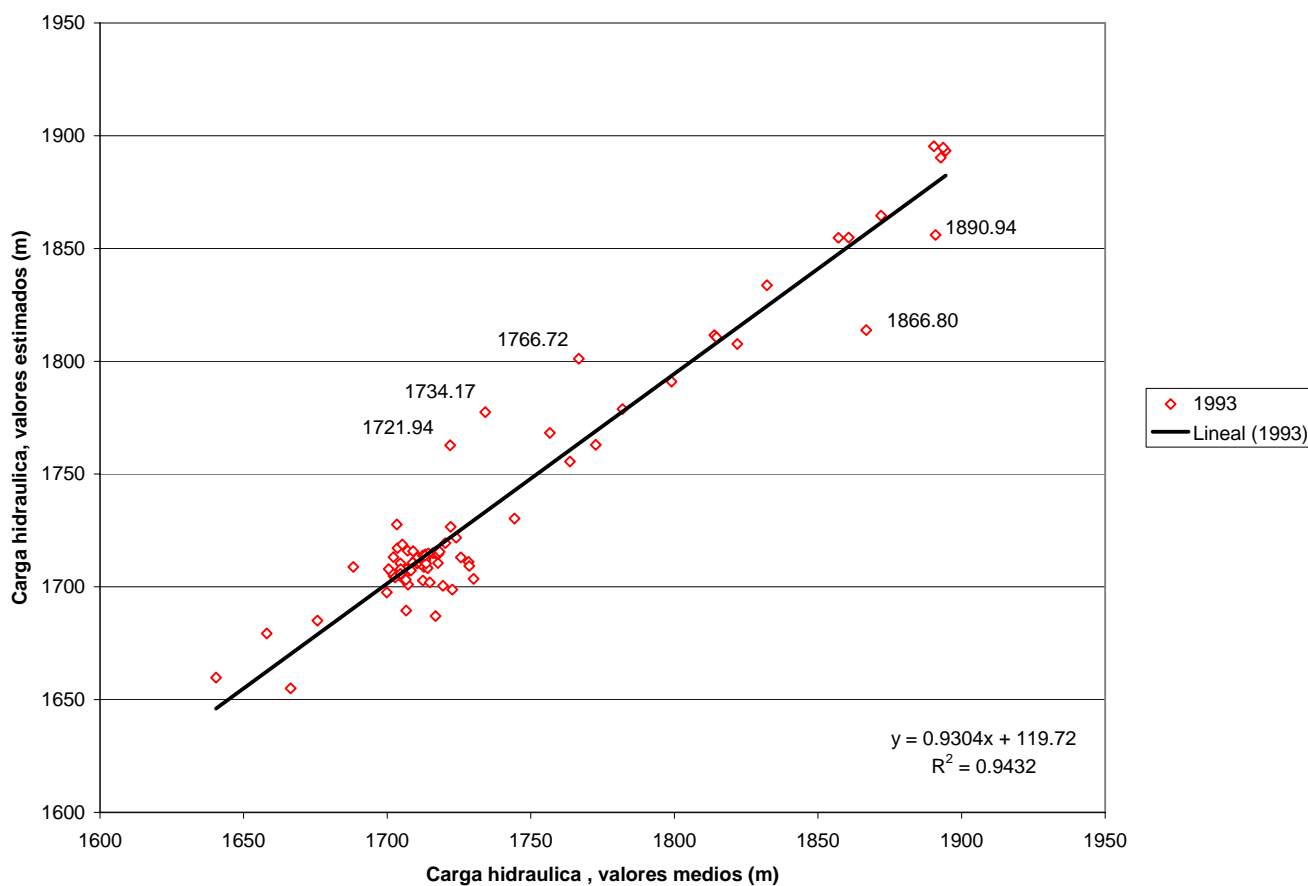


Figura 8.7. Diagrama de dispersión de la carga hidráulica del año 1993.

En el caso de los resultados de validación cruzada para el año de 1995 muestran que los valores de error son: **EM**=-0.131, **ECM**=137.64, **EME**=0.361 y el valor promedio de desviación estándar es de 18.0328.24. La figura 8.8 muestra el diagrama de dispersión entre los valores observados de la carga hidráulica para el año de 1995 y los estimados, por el método de validación cruzada.

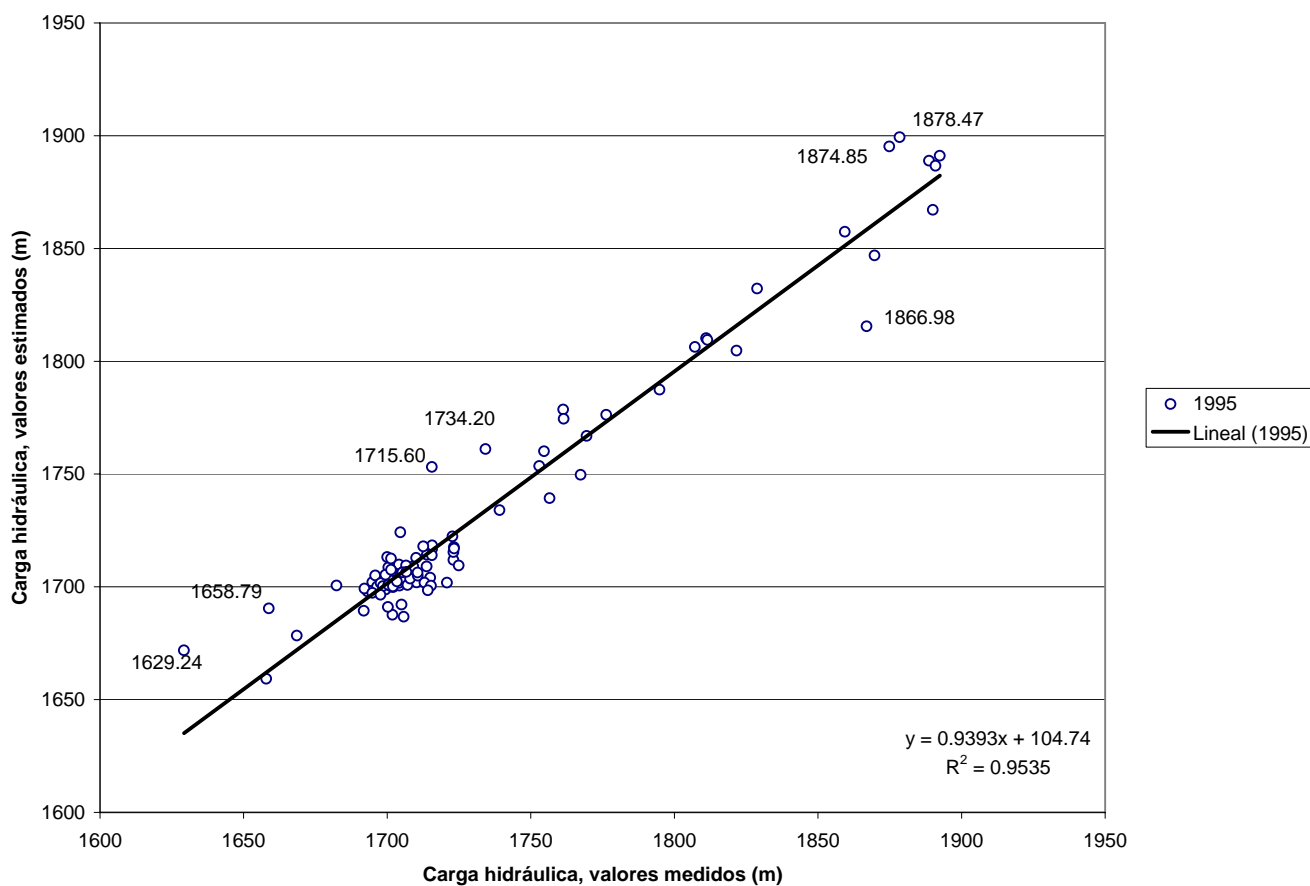


Figura 8.8. Diagrama de dispersión de la carga hidráulica del año 1995.

Por último, los resultados de validación cruzada para el año de 1999 muestran que los valores de error son: **EM**=-0.967, **ECM**=339.706, **EME**=0.683 y el valor promedio de desviación estándar es de 29.61. La figura 8.9 muestra el diagrama de dispersión entre los valores observados de la carga hidráulica para el año de 1999 y los estimados, por el método de validación cruzada.

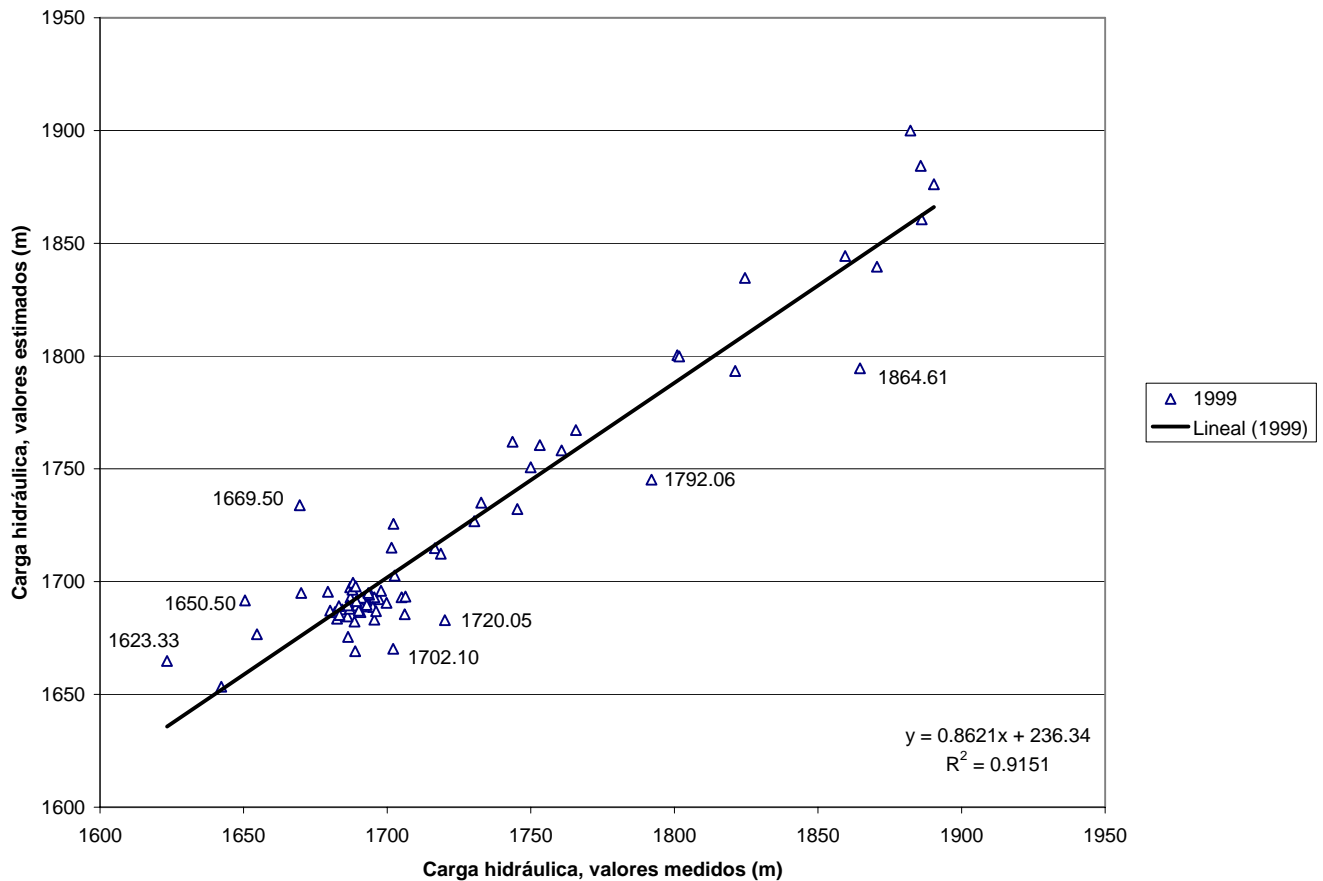


Figura 8.9. Diagrama de dispersión de la carga hidráulica del año 1999.

8.6. ESTIMACIÓN ESPACIO-TEMPORAL.

Los resultados de la estimación de la carga hidráulica en el acuífero de Querétaro-Obrajuelo se efectuaron en una malla de 41 columnas y 51 renglones, con una distancia entre renglón y columna de 1,100 m. y un delta de tiempo de una unidad. Sólo se reportan los planos de la carga hidráulica de los años 1993, 1995 y 1999 dejando de lado los años intermedios y la predicción, que corresponden a los años después del 2003 que es el último año que cuenta con lecturas.

Las figuras 8.10 a 8.15 muestran los mapas de la carga hidráulica y la desviación estándar para los años comentados.

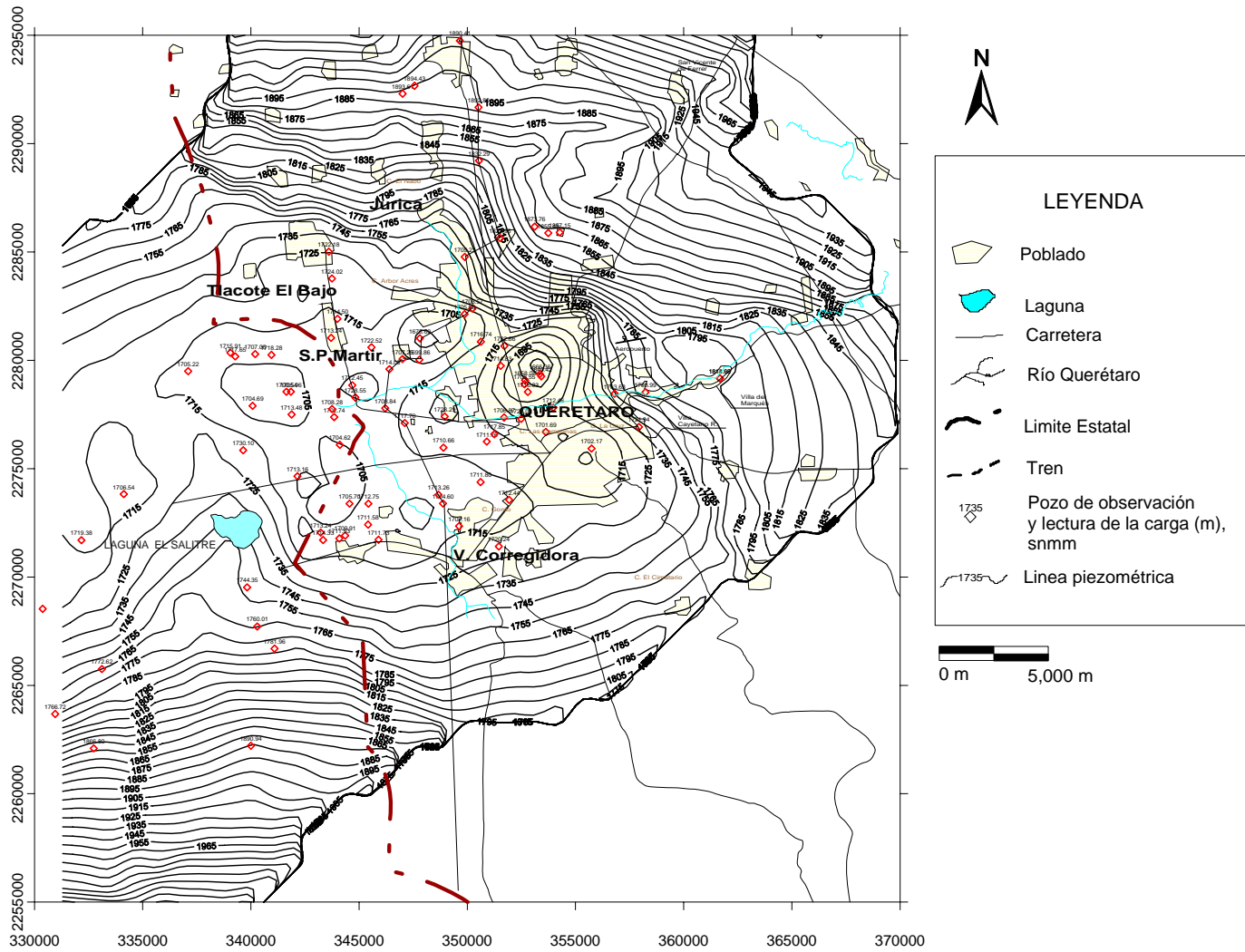


Figura 8.10. Krigedado espacio-tiempo para el año de 1993, estimación de la carga hidráulica.

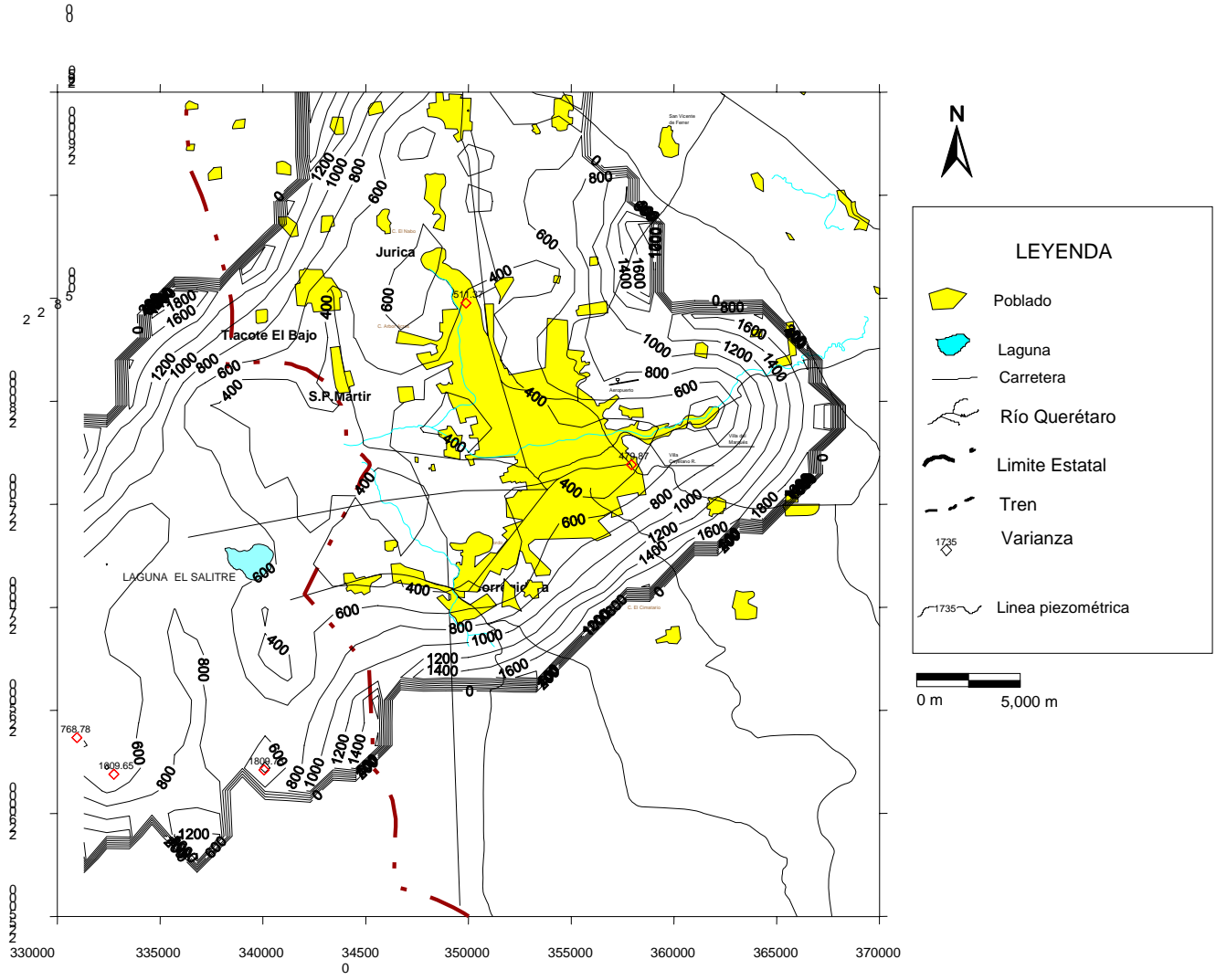


Figura 8.11. Krigado espacio-tiempo para el año de 1993, valores de la varianza.

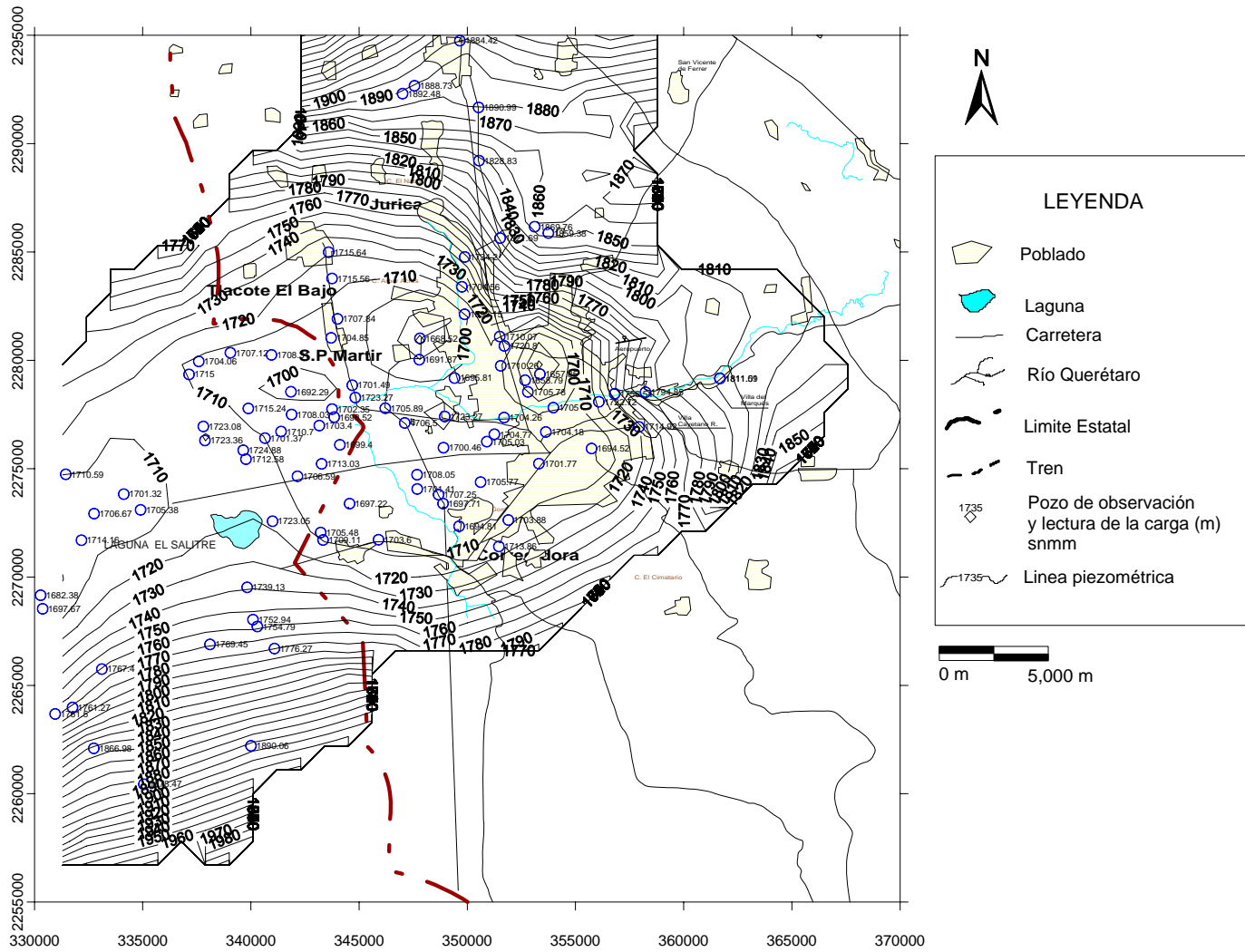


Figura 8.12. Krigedado espacio-tiempo para el año de 1995, estimación de la carga hidráulica.

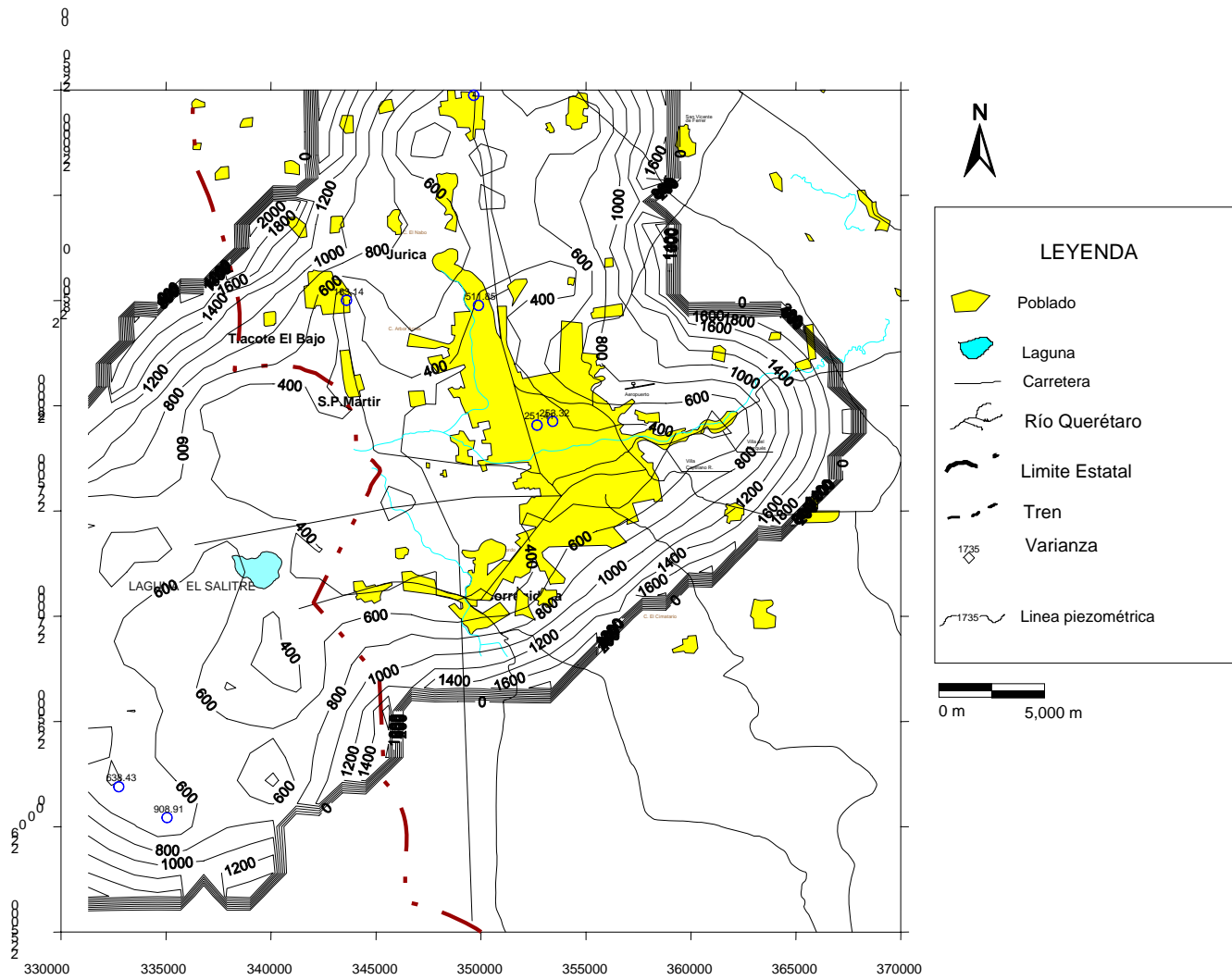


Figura 8.13. Krigado espacio-tiempo para el año de 1995, valores de la varianza.

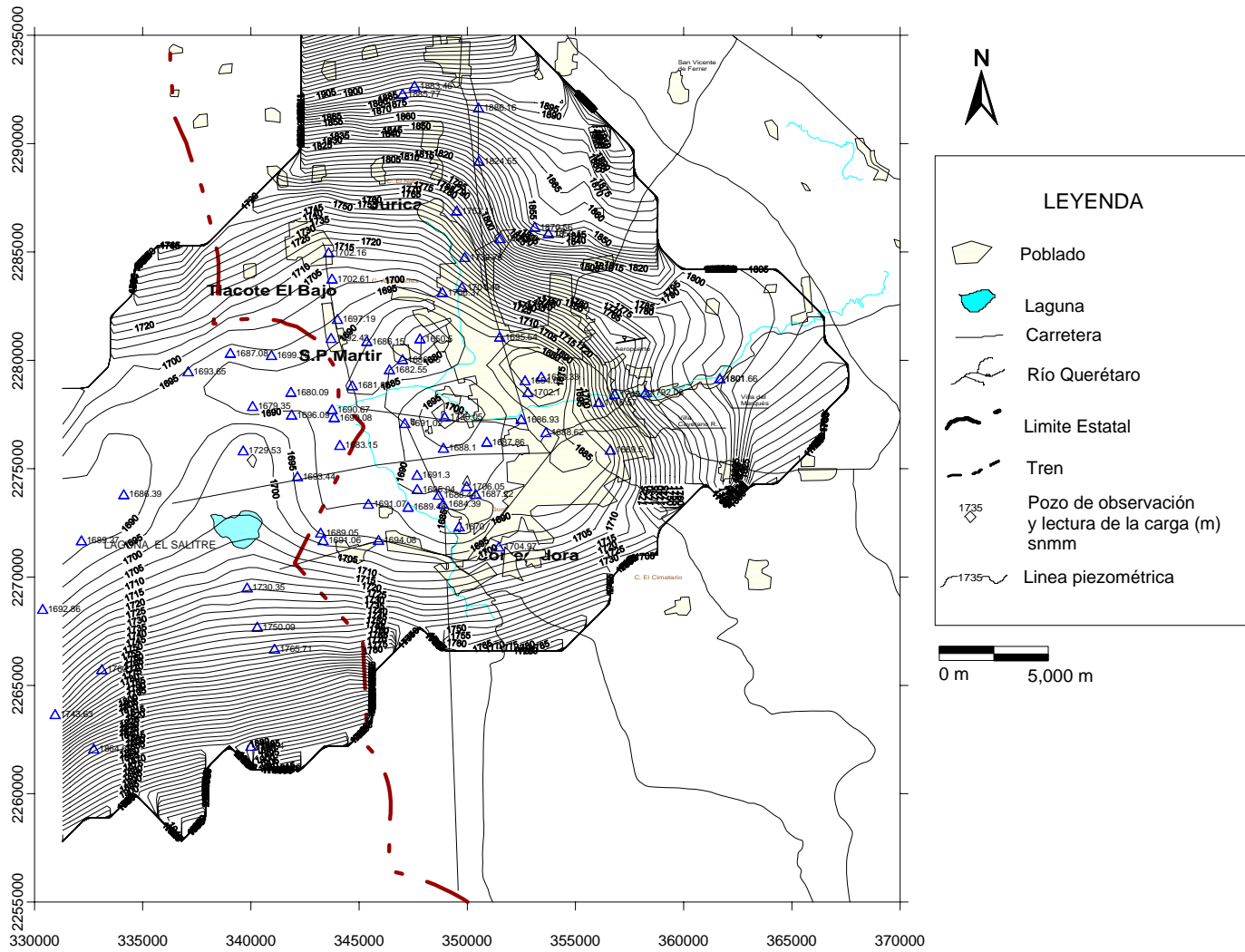


Figura 8.14. Krigedado espacio-tiempo para el año de 1999, estimación de la carga hidráulica.

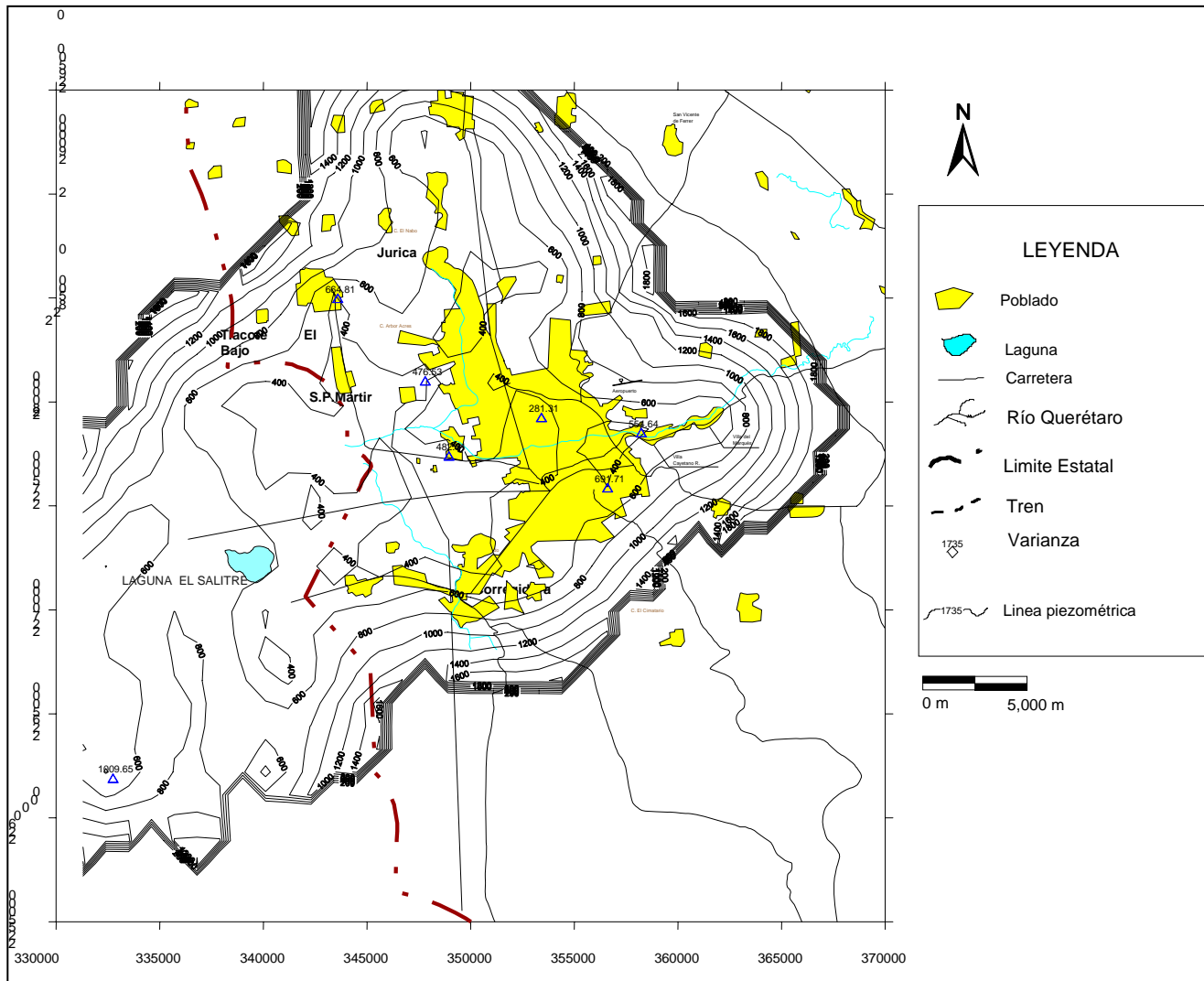


Figura 8.15. Krigeado espacio-tiempo para el año de 1999, valores de la varianza.

8.7. ESTIMACIÓN EN TIEMPO.

En este punto se muestran los resultados obtenidos con el método de validación cruzada en los pozos que cuentan con 19 o más observaciones de la carga hidráulica, mismos que se listan en la tabla 8.2. La intención es mostrar las lecturas de estimación de la carga hidráulica comparadas con los valores observados. De esta forma, solo se procederá a mostrar los resultados para posteriormente discutirlos.

La figura 8.16 muestra tres hidrogramas de los pozos 759, 752 y 629.

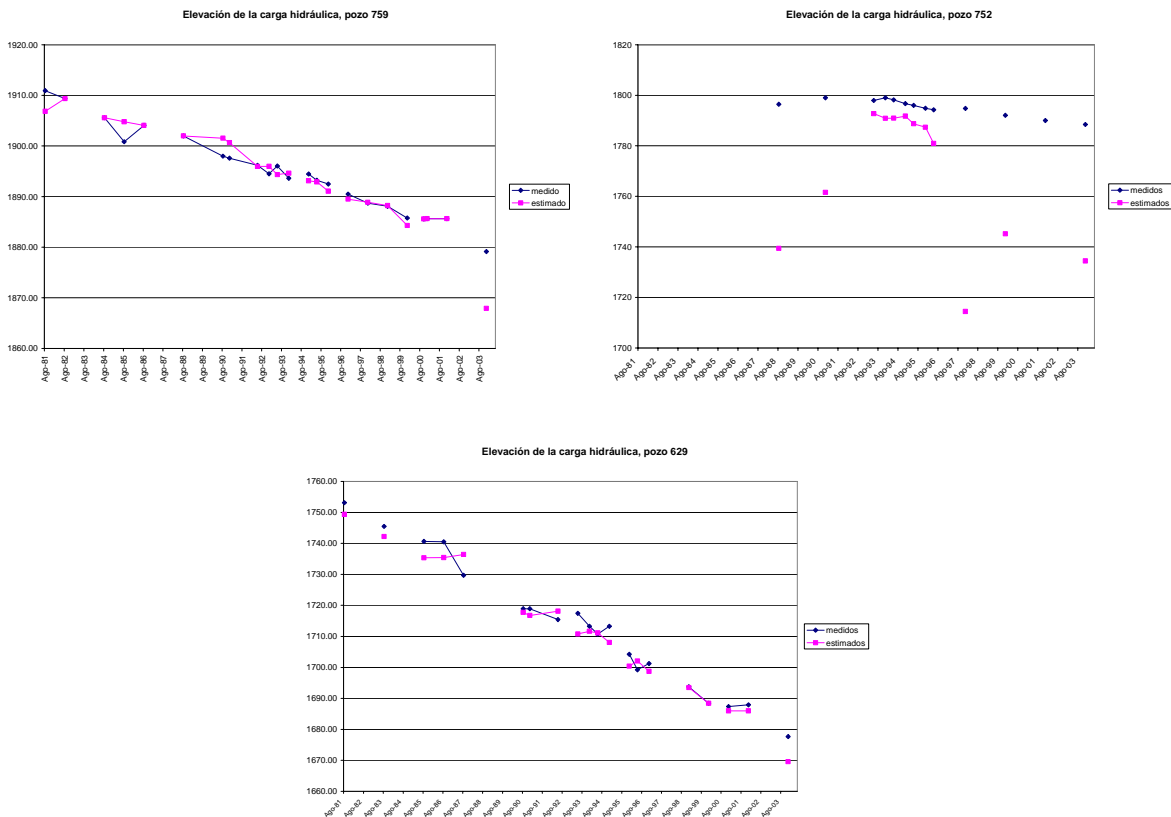


Figura 8.16. Higrógrafos pozos 759, 752 y 629.

La posición espacial de los pozos, seleccionados, se muestra en la figura 8.17. Es fácil identificar que los aprovechamientos no se encuentran en una zona restringida, por el contrario se ubican en todo el acuífero. De forma particular, el pozo 752, se ubica en la zona de recarga; el pozo 629, en la porción central del acuífero Querétaro y el pozo 759 en la parte alta del acuífero. La falta de información histórica en la porción del acuífero Obrajuelo obedece a que el mínimo de observaciones, 19 lecturas desde el año 1981 al 2004, no se cumplió. Esta imposición obedece a que es necesario contar con un número mínimo de observaciones para generar los semivariogramas en el tiempo.

Aclarado el punto anterior se comentan los resultados de los hidrogramas. El pozo 759 se ubica en la porción alta del acuífero, de manera general describe un descenso progresivo de la carga hidráulica. Para el año de 1981 se reporta una elevación de la carga hidráulica de 1910.92 m y para el año del 2003 se reportan 1879.14 m. la diferencia en estos 23 años es de 31.78 m.

El descenso de la carga hidráulica es constante, de de forma gradual, existiendo algunos puntos de recuperación como se distingue en el año de 1990 donde el nivel se recupera 3.0 m, tomando en cuenta la tendencia general, para después descender de manera gradual. Es de resaltar que en el tiempo entre los años 1999 al 2001 se mantiene constante para después descender 6.51 m.

Respecto a los valores estimados se observa que de manera general se ajustan a la tendencia, presentando las mayores diferencias en las series donde no existen observaciones en el año inmediato anterior y posterior, observe el período de 1981 a 1990, pero en los períodos donde si existen observaciones las estimaciones presentan un mejor ajuste, de hecho las diferencias entre ambas no sobre pasan el 1.5 m.

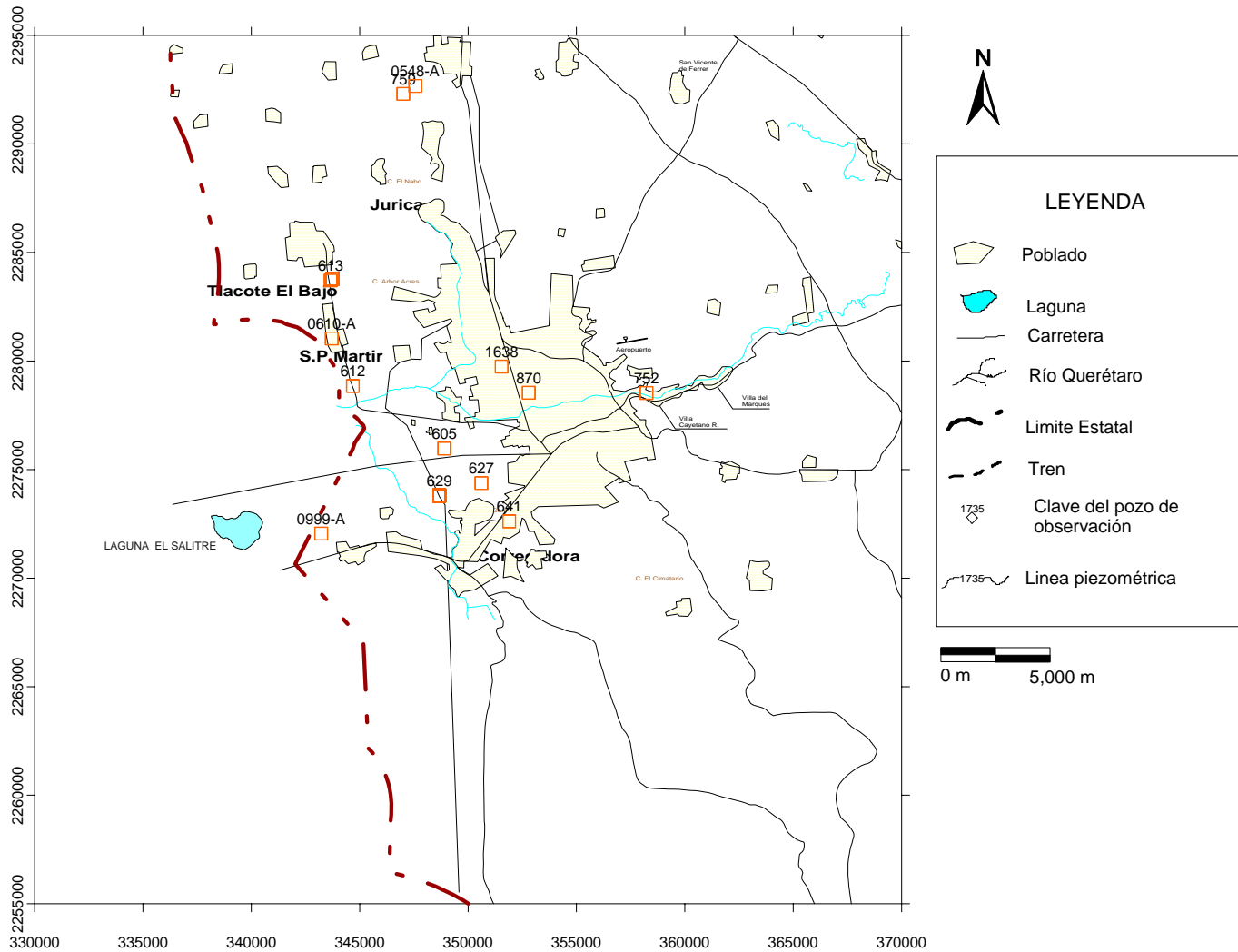


Figura 8.17. Pozos de observación con más de 19 lecturas, en tiempo, de la carga hidráulica.

El pozo 752 se ubica zona de recarga del acuífero, de manera general describe un descenso progresivo de la carga hidráulica. Para el año de 1988 se reporta una elevación de la carga hidráulica de 1796.45 m y para el año del 2003 se reportan 1788.43 m. la diferencia en estos 16 años es de 8.02 m. El descenso de la carga hidráulica es de forma gradual.

Respecto a los valores estimados es evidente que la estimación de la carga hidráulica no se ajusta a las mediciones, las causas de esto serán discutidas en la siguiente sección.

El pozo 629 se ubica en la porción central del acuífero Querétaro, de forma general describe un descenso progresivo de la carga hidráulica. Para el año de 1981 se reporta una elevación de la carga hidráulica de 1753.12 m y para el año del 2003 se reportan 1677.69 m. la diferencia en estos 23 años es de 75.43 m. El descenso de la carga hidráulica es de forma gradual.

Respecto a los valores estimados se observa que de manera general se ajustan a la tendencia, que en lo general es lo que se busca cuando no se cuenta con observaciones. Esta ventaja será discutida en la siguiente sección.

8.8. DISCUSIÓN DE RESULTADOS.

Recapitulando, tenemos que en el aspecto espacial se seleccionaron 23 años, ver tabla 8.1, los cuales cumplen con 30 o más observaciones, pozos, en cada muestreo. Este criterio se tomó en cuenta considerando que al determinar la estructura de la variable, se requiere de un número mínimo para efectuarlo. En lo general, para realizar el cálculo del semivariograma se recomienda utilizar un número mayor de puntos de observación, 100 observaciones, sin embargo para efectos prácticos se trabaja con lo que se tiene, siempre manteniendo en mente que las decisiones que se realicen siempre tiene un costo. En el

aspecto temporal se seleccionaron los pozos que presentan 19 o más observaciones, 13 pozos.

De esta forma se procedió a efectuar el análisis exploratorio de los datos y el análisis estructural espacio-tiempo y la validación del modelo propuesto por lo que los comentarios de la discusión se enfocan a la validación y la estimación.

Es importante destacar que la validación cruzada se llevó a cabo tomando en cuenta el modelo espacio-temporal, por lo que los resultados comprenden desde el año de 1981 al 2004. De este período se seleccionaron los correspondientes a los años de 1993, 1995 y 1999 para mostrar el grado de ajuste que tienen las estimaciones con las observaciones, por lo que el lector debe tener en cuenta que la estimación con este método no solo muestra resultados en espacio, también los obtenemos en el tiempo.

Se optó por seleccionar estos años debido a que cuentan con un número importante de lecturas, 85, 112 y 75, respectivamente, lo que favorece en la estimación del semivariograma, así mismo para efectos de comparar los resultados, con la técnica multivariada de funciones aleatorias.

El gráfico 8.7 muestra el diagrama de dispersión entre los valores medidos de la carga hidráulica, para el año de 1993 versus los estimados. Los valores de la carga hidráulica medidos vs. estimados presentan un índice de regresión de $R^2 = 0.94$ lo que indica que los valores medidos vs. estimados presentan una buena correlación.

Tomando en cuenta los resultados de la validación el valor del error medio indica que las estimaciones presentan una subestimación ya que el valor es negativo, el cuadrático medio es de 195.53 unidades y el valor del error medio cuadrático estándar indica que la relación entre las diferencias de las estimaciones y el valor medido, y el valor de varianza teórica no ajusta del todo bien ya que su valor está cercano a cero (0.408).

El valor cuadrático medio estándar directamente indica que el modelo del semivariograma espacio-tiempo no es el mejor, sin embargo al considerar los mismos estadígrafos en la validación cruzada, utilizando todos los años, se observa una diferencia es significativa ya que todos son menores y el valor cuadrático medio estándar es cercano a la unidad, 0.804, lo que indica que el modelo propuesto ajusta muy bien en el contexto espacio-tiempo, pero al ser específicamente utilizado para el año de 1993 el buen ajuste se pierde.

En la estimación proyectada en el plano, dejando al tiempo invariante, se tiene que de manera gráfica se observa una estimación acorde a las mediciones reportadas para cada pozo de observación. Es de destacar que se marca un parte aguas en la zona de la Laguna El Salitre y en el área del acuífero de Querétaro se tiene una mejor definición de las zonas con mayor abatimiento. Esta definición es observada en el mapa como áreas concéntricas de una influencia local que difieren del entorno. Al verificar estos puntos corroboramos que efectivamente corresponden a pozos donde existe una carga hidráulica menor al entorno.

En el caso de la zona de la Cañada y zonas altas de la cuenca se observa que el valor subestimado de la carga hidráulica, sin embargo de forma general se mantiene el mismo patrón de las líneas de flujo, en dirección al centro del Valle de Querétaro.

Ahora bien, verificando los puntos que de acuerdo a los diagramas de dispersión se alejan de la línea de 45 grados, es el caso donde la estimación es igual a la medición, tenemos que existen cinco valores, (1721.94, 1734.17, 1766.72, 1866.80 y 1890.94) que al ser ubicados en el plano se observa que se ubican en las márgenes del acuífero, véase figura 8.11, por lo que se caracterizan por tener pocos puntos de estimación. Por la posición al realizar la estimación se identifica que no corresponden a puntos de interpolación por el contrario son puntos extrapolados.

Verificando el valor de varianza que se obtiene para cada punto, véase figura 8.11, es posible corroborar que la varianza es alta.

En el caso la piezometría para el año de 1995 se tiene que los valores de la carga hidráulica medidos vs. estimados presentan un índice de regresión de $R^2 = 0.95$ (ver figura 8.8) considerándola como una buena correlación.

Tomando en cuenta los resultados de la validación, el valor del error medio indica que las estimaciones presentan una subestimación ya que el valor es negativo, el cuadrático medio es de 137.64 unidades y el valor del error medio cuadrático estándar indica que la relación entre las diferencias de las estimaciones y el valor medido, no ajusta del todo bien ya que su valor es de 0.361.

El valor cuadrático medio estándar directamente indica que el modelo de semivariograma espacio-tiempo no es el mejor, sin embargo, al considerar los mismos estadígrafos en la validación cruzada, utilizando todos los años, se tiene la misma consideración que se hizo resaltar para el año de 1993.

De la estimación proyectada en el plano, para el año 1995, se tiene que de manera gráfica se observa una estimación acorde a las mediciones reportadas para cada pozo de

observación. Es de destacar, que se mantienen un parteaguas en la zona de la Laguna El Salitre y en el área del acuífero de Querétaro se tiene una definición de las zonas con mayor abatimiento. Esta definición es observada en el mapa como áreas concéntricas de una influencia local que difieren del entorno. En el caso de la zona de la Cañada y zonas altas de la cuenca se observa que el valor de la carga hidráulica es subestimado, sin embargo de forma general, se mantiene el mismo patrón de las líneas de flujo, en dirección al centro del Valle de Querétaro.

Verificando los puntos que se resaltan en el diagrama de dispersión, véase figura 8.8, tenemos que existen siete valores, (1629.24, 1658.79, 1715.60, 1734.20, 1866.98, 1874.85 y 1878.47) que al ser ubicados en el plano se observa que se ubican en las márgenes del acuífero, véase figura 8.12, así como se caracterizan por que por tener pocos datos cercanos. Por la posición al realizar la estimación se identifica que no corresponde a un punto de interpolación por el contrario es un punto que es extrapolado.

Verificando el valor de varianza que se obtiene para cada punto, véase figura 8.12, es posible corroborar que la varianza es alta.

Por último, en el caso de la piezometría para el año de 1999 se tiene que los valores de la carga hidráulica medidos vs. estimados presentan un índice de regresión de $R^2 = 0.91$ (ver figura 8.9).

Realizando la verificación de los puntos que se resaltan en el diagrama de dispersión, véase figura 8.9, tenemos que existen siete valores, (1623.33, 1650.5, 1669.5, 1702.1, 1720.05, 1792.06 y 1864.61) que al ser ubicados en el plano se observa que se ubican en los márgenes del acuífero, así como se caracterizan por tener pocos datos para la estimación. Por la posición al realizar la estimación se identifica que no corresponde a un punto de interpolación por el contrario es un punto que es extrapolado.

Verificando el valor de varianza que se obtiene para cada punto, véase figura 8.15, es posible corroborar que la varianza es alta.

Tomando en cuenta los resultados de la validación, el valor del error medio indica que las estimaciones presentan una subestimación ya que el valor es negativo, el cuadrático medio es de 339.706 unidades y el valor del error medio cuadrático estándar indica que la relación entre las diferencias de las estimaciones y el valor medido, y el valor de varianza teórica no ajusta nada bien ya que su valor es de 0.683.

La estimación proyectada en el plano, para el año 1999, se tiene que de manera gráfica se observa una estimación acorde a las mediciones reportadas para cada pozo de observación. Es de destacar que para este año no se marca un parteaguas en la zona de la Laguna El Salitre dando la apariencia los acuíferos de Los Apaseos, Obrajuelo y Querétaro han sido afectados en su dinámica original, ya que se ha invertido la dirección de flujo, sobretodo en Los Apaseos, que ahora es al centro del acuífero del Valle de Querétaro.

Sin tener más argumentos de la sola hipótesis de que el parteaguas delimitado para los años 1993 y 1995 se ha recorrido hacia el Oeste, esto deberá ser corroborado con la información que se tenga para esta zona que está representada y analizada en nuestros datos.

Este esquema es acorde con el modelo conceptual comentado en la sección 4.3, para el caso no estacionario, pero la posición del mismo no es del todo bien definida y mucho menos confirmada.

Siendo más, el hecho de que el valor del error cuadrático medio estándar sea elevado, de hecho el más elevado, nos indica de forma tácita que el modelo del semivariograma espacio-tiempo no es bueno para estimar este año en particular. Por lo que es de esperar que en los puntos donde se está estimando, dentro de la malla indicada, no sean del todo acordes con la realidad.

Respecto a la varianza es necesario resaltar que para todos los casos los planos de varianza son menores a los que se tienen con el método de krigeado. Esto es congruente con la teoría ya que al aumentar el número de observaciones se reduce la varianza de la estimación.

En los planos de varianza se observa que en el acuífero Querétaro Obrajuelo ésta es del orden de 300 unidades que al comparar con lo obtenido con krigeado ordinario se ha reducido en 300 unidades así como en la extensión del área de influencia.

8.9. CONCLUSIÓN.

La estimación espacio-tiempo es una herramienta útil que puede ser tomada como alternativa para efectuar estimaciones de la carga hidráulica en un contexto espacial o en tiempo.

La aplicación de esta técnica, para determinar la carga hidráulica es innovadora ya que resuelve el problema de los modelos lineales. La metodología desarrollada ofrece una alternativa para tratar las variables que presentan una deriva espacio-tiempo, así como se indica la forma de ajustar el modelo producto suma propuesto por De Iaco, *et al. op.cit.*

Para realizar la verificación del modelo se utilizó el método de validación cruzada, que permite evaluar la certidumbre del modelo propuesto. Los valores de EM, ECM y ECME indican que el modelo producto suma se ajusta de manera adecuada a la información espacio-tiempo, sin embargo, al evaluar de forma individual los resultados de validación cruzada para los años seleccionados se reportan valores que indican lo contrario.

Las estimaciones de la carga hidráulica para los años 1993, 1995 y 1999 son congruentes con los valores observados en campo, así como la definición del parteaguas entre los acuíferos.

Una ventaja del método espacio-tiempo es el incremento de observaciones para realizar la estimación, esta característica permite realizar estimaciones en zonas donde no se cuenta con información.

El método es poderoso ya que también realiza estimaciones en diversos tiempos, esto se ilustra en la figura 8.16, donde se observa que el método permite realizar interpolaciones entre años donde se carece de información. Las estimaciones se ajustan a un valor de tendencia, es de destacar que las estimaciones se ajustan a las observaciones en tiempos donde hay información antes y después, el intervalo en el tiempo está relacionado con la interdistancia de correlación que reflejen los datos.

El método espacio-tiempo requiere de un análisis estructural adecuado ya que a partir de éste se seleccionan los parámetros que lo caracterizan, en nuestro caso se aplica una metodología que contempla la selección de los parámetros tomando en cuenta diferentes secciones de tiempo y espacio y se refuerzan con el índice de error. Esta propuesta es diferente a la propuesta de De Cesare *et al. op. cit.* ya que de manera gráfica se determina la cima del semivariograma de superficie. Así también ellos al proponer un modelo producto suma garantizan que el modelo es positivo definido y que éste no afecta en el sistema de krigado, estas dos innovaciones superan la propuesta inicial de Rouhani y Hall (1989).

Finalmente, en términos de varianza el método espacio-tiempo reduce el valor del error en la estimación, esto se puede observar comparando los resultados de varianza obtenidos con los métodos de krigado univariado y krigado multivariado, sin embargo, aún aumentando el número de puntos para hacer la estimación se tienen zonas donde la estimación no corresponde con las observaciones, éstas se ubican en la periferia del acuífero. Lo anterior obedece a que en la periferia las estimaciones son producto de la extrapolación, que aunado a los resultados de la validación cruzada son las áreas con mayor incertidumbre. Podría

decirse que esta es una ventaja más, del método, ya que proporciona información con la cual se pueda hacer decisiones en términos de confiabilidad de la estimación y zonas de mayor incertidumbre.

9. COMPARACIÓN DE LAS TÉCNICAS DE KRIGEADO ESPACIO-TEMPORALES.

En los capítulos anteriores se ha mostrado la aplicación de las técnicas de krigado en el espacio y espacio-tiempo comentando los resultados para cada caso específico y sus limitaciones e hipótesis de aplicación, ahora queda ver como están relacionados los sistemas de krigado para los casos espacio-temporales, sus similitudes y por ende ventajas y desventajas. Para redondear las ideas se presenta una comparación de los resultados obtenidos en los capítulos 7 y 8, con el método de validación cruzada, con el objetivo de tener un marco objetivo de la mejoría en la estimación, para cada uno de los casos.

Por lo anterior, este capítulo está estructurado de la siguiente forma en la primer parte se retoman los conceptos de función de semivarianza espacio-temporal para el caso multivariado de funciones aleatorias y el de funciones aleatorias espacio-tempo para después relacionarlos. Una vez definidas estas funciones se procederá a plantear las similitudes que poseen los sistemas de krigado, discutiendo los sistemas de krigado. Por último se presenta los resultados de validación cruzada para cada técnica.

9.1. FUNCIÓN DE SEMIVARIOGRAMA ESPACIO-TIEMPO.

Definiendo un campo aleatorio multicomponente en la posición (x, t) , $x \in D \subseteq R^D$, $t \in T \subseteq R^1$, se tiene

$$Z(x, t) = \sum_{u=1}^N Z^u(x, t) \quad (9.1)$$

El incremento en espacio y tiempo están definidos como $h_{ij} = x_i - x_j$ y $\tau_{ij} = t_i - t_j$.

El semivariograma espacio-tiempo de cada componente se define bajo la hipótesis intrínseca como:

$$\gamma^u(h, \tau) = \frac{1}{2} \text{Var}[Z^u(x+h, t+\tau) - Z^u(x, t)] \quad (9.2)$$

y de forma similar la función de covarianza se define como:

$$C^u(h, \tau) = \text{Cov}[Z^u(x+h, t+\tau) - Z^u(x, t)] \quad (9.3)$$

dónde la función de covarianza existe y se relaciona con la función de semivarianza de la forma:

$$\gamma^u(h, \tau) = C^u(0,0) - C^u(h, \tau) \quad (9.4)$$

con

$$C(0,0) = \sum_{u=1}^N \sigma_u^2 \quad (9.5)$$

9.2. EL MODELO SEPARABLE Y EL MODELO LINEAL DE CORREGIONALIZACIÓN.

Bajo el concepto de modelo lineal de corregionalización (Wackernagel, 1994) el semivariograma cruzado entre las funciones correlacionadas en el tiempo se puede escribir como:

$$\gamma_\tau^u(h) = b_\tau^u g^u(h) \quad (9.6)$$

de forma matricial esta relación se expresa

$$\Gamma(h) = \sum_{u=1}^N B^u g^u(h) \quad \text{con} \quad B^u = \begin{bmatrix} b_{\tau 11}^u & \cdots & b_{\tau 1p}^u \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1}^u & \cdots & b_{pp}^u \end{bmatrix} \quad (9.7)$$

dónde B^u es una matriz positiva definida.

Utilizando la relación entre semivariograma cruzado y covarianza cruzada

$$\gamma_{\tau}^u(h) = C_{\tau}^u(0) - C_{\tau}^u(h) \quad (9.8)$$

La equivalencia entre la función espacio-tiempo de covarianza y el modelo lineal de correogionalización es:

$$C_{\tau}^u(h) = b_{\tau}^u \rho^u(h) \quad (9.9)$$

que conduce

$$C(h) = \sum_{u=1}^N B^u \rho^u(h) \quad (9.10)$$

ésto es de resaltar $C_{\tau}^u(h) = C^u(h, \tau)$ para valores fijos del τ .

9.3. RELACIÓN ENTRE LAS TÉCNICAS DE KRIGEADO ESPACIO-TIEMPO Y MULTIVARIADO DE FUNCIONES ALEATORIAS "COKRIGEADO".

Una vez definido lo anterior se puede hacer la comparación entre el punto de vista multivariado de funciones aleatorias, donde la función de semivariograma se modela con un MLC, y el punto de vista espacio-tiempo, donde se modela la función de semivariograma con un modelo separable. Estas comparaciones han sido investigadas, de

forma parcial, por Bogaert (1996) para el caso de modelos separables tipo producto propuestos por Rodríguez –Iturbe y Mejia (1974).

Consideremos, entonces, que existen T funciones aleatorias espaciales correlacionadas a través del tiempo, como se indica en la figura 1.1 a. En el caso no isotópico, donde las mediciones son efectuadas en un tiempo determinado en distintas posiciones dentro del espacio de muestreo.

Entonces el problema se reduce a estimar el valor de la función aleatoria en la posición, dentro del área de muestreo, y un instante de tiempo, deseado. El sistema de cokrigado simple se escribe como

$$Z_k^*(x) - m_k = \sum_{i=1}^T \sum_{\alpha_i=1}^{n_i} \lambda_{\alpha_i}(x, t_k) [Z_i(x_{\alpha_i}) - m_i] \quad (9.11)$$

dónde m_i es el valor de la deriva de la función aleatoria $Z_i(x)$ definida en el instante t_i . sólo los valores más cercanos al punto $(x, t_k) \in D \times T$ son utilizados para la estimación, en este caso n_i es sustituido por $n_i(x, t)$ donde $n_i(x, t) < n_i$. El número de datos considerados y el tamaño del radio de búsqueda puede no ser el mismo para cada instante t_i .

Los pesos del sistema de cokrigado simple se obtienen de la solución del sistema de cokrigado que expresado de forma matricial es:

$$\begin{bmatrix} C_{\tau 11} & \cdots & C_{\tau 1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{\tau p1} & \cdots & C_{\tau pp} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{\tau 01} \\ \vdots \\ C_{\tau 0n} \end{bmatrix} \quad (9.12)$$

dónde C_{α_j} es $n_i \times n_j$ matriz de auto y covarianza cruzada y $\lambda_j, C_{\tau 0j}$ es una matriz de $n_i \times 1$ vectores de datos desconocidos, conocida como auto y covarianza cruzada.

Bajo la hipótesis estacionaria de segundo orden, la covarianza cruzada entre las mediciones en cualquier par de tiempos, no depende del instante específico de tiempo sólo del *lag*

$\tau = t_i - t_j$ de tiempo que los separa. Aquí la relación $C_\tau^u(h) = C^u(h, \tau)$ para valores fijos del τ se mantiene. Este tipo de modelos son relevantes en casos donde los datos de muestreo son pocos en el tiempo y abundantes en el espacio. En este caso es necesario modelar $n(n+1)/2$ semivariogramas y semivariogramas cruzados.

En la misma manera la representación espacio-tiempo es

$$\begin{bmatrix} C(h_{11}, \tau_{ij}) & \cdots & C(h_{1n_j}, \tau_{ij}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C(h_{n_1}, \tau_{ij}) & \cdots & C(h_{n_m}, \tau_{ij}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(h_{11}, \tau_{0j}) \\ \vdots \\ C(h_{n_1}, \tau_{0j}) \end{bmatrix} \quad (9.13)$$

dónde $C(h_{mn}, \tau_{ij})$ es $n_i \times n_j$ matriz de auto y covarianza cruzada y $\lambda_n, C(h_{n_1}, \tau_{0j})$ es una matriz de $n_i \times 1$ vectores de datos desconocidos, denominada como auto y covarianza cruzada.

La expresión anterior corresponde al sistema de krigeado simple espacio-tiempo y la ecuación 9.12, corresponde a un sistema de cokrigeado, por lo que se puede ver son equivalentes.

En la forma clásica de cokrigeado ordinario se tiene múltiples condiciones que requieren que la suma de los pesos, con el valor de predicción es igual a 1, y la suma de los pesos en otros tiempos es igual a cero.

$$\sum_{j=1}^{n_{i_0}} \lambda_{i_0j} = 1; \quad \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{ij} = 0 \quad \forall i \neq i_0, i = 1, \dots, p \quad (9.14)$$

Una variante del cokrigeado ordinario utiliza una sola condición para los pesos (Isaaks y Srivastava, 1989, p. 409) que requiere que la suma de todos los pesos sea igual a uno.

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{ij} = 1, \quad (9.15)$$

Es claro que el sistema de cokrigado ordinario, bajo la condición anterior, es equivalente al sistema espacio-tiempo de krigado ordinario (Bogaert, 1996).

Existen diferencias fundamentales entre los sistemas de cokrigado ordinario con una o múltiples condiciones de insesgo. Como se ha comentado, la condición múltiple de insesgo es necesaria para permitir el uso del semivariograma y semivariograma cruzado, en el sistema. El cokrigado ordinario con una condición requiere de la igualdad de las medias para las p variables correogionalizadas. Sin embargo, una ventaja de esta condición única es que se tiene un mejor balance. De acuerdo a las observaciones que hace Isaaks y Srivastava (1989) en el contexto espacial. Ellos observan que el error de predicción obtenido con cokrigado ordinario, con una condición de insesgo, tiende a ser menor que los obtenidos con la técnica clásica de cokrigado. La variable auxiliar representada por un valor único no será tomando en cuenta bajo la condición múltiple de insesgo, debido a que su peso será igual a cero. Si es representada por dos valores, su peso será igual pero de signo negativo.

La definición de un semivariograma espacio-tiempo permite una caracterización completa de la variabilidad espacio-tiempo con pocos parámetros, lo que no sucede al utilizar un MLC. La predicción en cualquier punto del espacio o tiempo es posible utilizando el concepto espacio-tiempo, pero es necesario adicionar la hipótesis de que la media y la varianza es homogénea en el campo aleatorio.

9.4. COMPARACIÓN DE LAS TÉCNICAS ESPACIO-TEMPORALES UTILIZANDO LA VALIDACIÓN CRUZADA.

Con la finalidad de evaluar los resultados de estimación de la carga hidráulica con las técnicas espacio-temporales se presenta aquí un análisis de los resultados de la validación cruzada para cada caso.

Partiendo de que en cada capítulo se ha mencionado el procedimiento de validación y se han calculado los errores de estimación se tienen los siguientes resultados:

Tabla 9.1 Distribución de errores utilizando el método de validación cruzada con kigeado ordinario (KO), con estimación espacio-temporal cokrigado (Cok) y espacio-temporal de variables aleatorias (ET). Min=

mínimo, Max= máximo, μ =media, σ^2 =varianza, EM= error medio= $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{Z(x_i) - Z^*(x_i)\}$, ECM= error

cuadrático medio = $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{[Z(x_i) - Z^*(x_i)]^2\}$, y ECME= error cuadrático medio estándar=

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{(Z(x_i) - Z^*(x_i))^2}{\sigma_i^2} \right\}.$$

Tabla 9.1. Resultados de la validación cruzada de los diferentes métodos de krigiado.

Método y año	Valores estimados de los residuales, con el método de validación cruzada.				Error		
	Min.	Max.	μ	σ^2	EM	ECM	ECME
KO, 1993	-60.192	60.829	-0.192	418.360	-0.190	390.550	0.820
KO, 1995	-66.762	72.764	-0.098	463.750	-0.100	252.340	0.800
KO, 1999	-57.691	59.654	-0.396	446.104	-0.400	426.300	0.800
Cok., 1993	-89.733	69.223	-0.815	599.513	-0.790	349.510	0.920
Cok., 1995	-89.081	78.396	-0.620	611.010	-1.630	284.310	0.990
Cok., 1999	-85.555	71.300	0.071	723.890	-1.960	309.030	0.950
ET, 1993	-65.868	98.995	1.018	998.881	-1.045	195.533	0.408
ET, 1995	-57.191	100.489	1.699	797.711	-0.131	137.643	0.361
ET, 1999	-54.158	96.339	-2.426	877.105	-0.967	339.706	0.683
ET 1981-2004	-131.265	122.227	-2.014	878.985	-0.621	318.731	0.804

Describiendo los resultados de la tabla, es necesario aclarar para el caso espacio-tiempo de las variables aleatorias se utiliza la anotación ET para distinguirla de la técnica de cokrigado (Cok), así también es importante explicar que cuando en la tabla el método ET

refiere a un año específico se reportan los resultados de este método para el tiempo señalado (1993, 1995, 1999), es decir, la técnica realiza estimaciones en el espacio y también en el tiempo utilizando los datos de todo el periodo pero la validación cruzada se hace únicamente utilizando los datos para el año especificado. En contraste, lo que se reporta en la cuarta línea, con la anotación ET 19981-2004, indica los estadígrafos de la validación cruzada utilizando toda la información, es decir, tomando en cuenta los registros de la carga hidráulica desde el año 1981 al 2004.

Aclarado lo anterior y retomando los resultados que muestra la tabla, se identifica que los valores estimados de los residuales, con el método de validación cruzada, para todos los casos, presentan un comportamiento simétrico.

Analizando los valores del error (EM) para el caso de KO, el valor es reducido cercanos a cero y todos ellos negativos, lo que indica una subestimación de los valores de la carga hidráulica.

En el caso del Cok, la magnitud del EM es mayor que la del KO y en todos los casos es negativo, de la misma forma que para el KO.

Para el ET, solo en el caso donde se consideran todas las observaciones el valor del EM es bajo pero para cada año en particular, el error se incrementa un poco.

En términos generales, el EM indica que para cada técnica las estimaciones están siendo subestimadas.

Para el caso del ECM, pensando en éste como un valor de dispersión, ya que es el cuadrado de los errores, se observa que tanto el KO y Cok los valores son similares, sin embargo al compararlos con el ET el ECM se reduce drásticamente, para los años 93 y 95, y en el 99 se mantiene. El promedio del error cuadrático medio para los tres años en el ET es de 224.29 m, mientras que en el KO es de 356.4 y en el Cok es de 314.27. Esta reducción en el

promedio del ECM para el ET se debe a que la estimación se realiza tomando en cuenta un número mayor de puntos de observación, no solo en el espacio, sino también en el tiempo.

Con respecto al ECME los valores se interpretan como el ajuste que presenta la varianza del modelo del semivariograma, espacial y espacio-temporal, con los errores de estimación.

Por esta razón, cuando el valor del ECME es cercano a la unidad se interpreta como que la varianza del modelo teórico y el error cuadrático de la estimación en promedio son cercanos. De esta forma, el ECME indica que el mejor ajuste entre el error cuadrático y la varianza lo ofrece el método de Cok, seguido del KO, el ET para el periodo 1981-2004 y por último el ET para cada año. El hecho de que el ECME del ET para todo el periodo tenga un valor de 0.804, mucho más cercano que los valores para cada año por separado, indica que la varianza del modelo teórico representa de mejor forma el error cuadrático para todo el periodo que para los años por separado.

Es importante, hacer notar que el ECM del ET indica que este método proporciona la representación de la carga hidráulica que mejor ajusta los valores observados y esto obedece a que el ET utiliza mayor número de puntos en la estimación. De la misma forma que el Cok, solo que el ET estima en los valores espaciales que se tienen en un año dado y utiliza la información temporal de todo el periodo, por esta razón el ECM es menor.

9.5. COMENTARIOS GENERALES DE LOS SISTEMAS DE KRIGEADO ESPACIO-TIEMPO.

Se ha documentado que el análisis espacio-tiempo tiene dos puntos de vista, multivariado y espacio-tiempo de funciones aleatorias (ET). En el caso multivariado, que a su vez se

subdividirse en técnicas donde el tiempo está correlacionado espacialmente, o cuando las observaciones en el espacio están correlacionadas en el tiempo.

Los modelos del tipo multivariado con n observaciones espacialmente correlacionados, son relevantes en casos donde se tiene un muestreo pobre en el tiempo y abundante en el espacio, *e.g.*, investigaciones de contaminación en el agua subterránea donde se tiene un muestreo numeroso en varios pozos de observación pero pocas observaciones en el tiempo (Knotters y Bierkens, 2000, 2001).

Por otro lado los modelos multivariados donde las T observaciones están espacialmente correlacionadas con la serie de tiempo (Show y Gorelick, 1986; Rouhani y Wackernagel, 1990), son útiles en casos donde los datos son abundantes en el tiempo y pobres en el espacio, *e.g.*, datos tomados en algunos pozos o estaciones meteorológicas, en muchos instantes de tiempo.

En ambos puntos de vista es requerido estimar y modelar los $T(T+1)/2$ ó $n(n+1)/2$ semivariogramas directos y cruzados (Wackernagel, 1995), esto hace que el procedimiento sea tedioso cuando T o n es abundante.

Por lo que una ventaja de esta metodología radica en el hecho de poder utilizar un mayor número de observaciones para realizar las estimaciones, es importante destacar que al utilizar el punto de vista multivariado la continuidad espacio-tiempo es modelada vía un modelo lineal de correogionalización (MLC), (Journel y Huijbregts, 1978).

La desventaja radica en que las estimaciones solo representan tiempos específicos, donde se cuenta con información y se tenga la necesidad de estimar, con ello se puede decir que solo tenemos estimaciones en algunos instantes, como si tuviéramos algunos cuadros que componen una película.

Una limitación del método, que puede considerarse como desventaja, es al momento de modelar el semivariograma cruzado ya que es necesario se cumpla con la desigualdad de Cauchy-Schwartz, Como se indicó, anteriormente, es también necesario estimar y modelar los $T(T+1)/2$ ó $n(n+1)/2$ semivariogramas directos y cruzados.

Ahora bien, respecto al método de funciones aleatorias espacio-tiempo (ET), es útil al considerar de forma integrada la información espacial y temporal, el método utiliza toda la información disponible por lo que la continuidad espacio-tiempo es modelada por una función de covarianza o semivariograma que une el espacio y el tiempo.

La función de covarianza o semivariograma espacio-tiempo, permite estimar (utilizando krigeado espacio-tiempo) en cualquier localización en el espacio y en cualquier tiempo, esta es una ventaja que hace poderoso el método ya que al utilizarlo podemos tener estimaciones en todos los tiempos que estemos analizando y también en cualquier posición que ocupe el espacio analizado. Haciendo una analogía con una cinta filmica, el método nos ofrece una representación continua del fenómeno, como si tuviéramos una película completa del fenómeno que ha sido reproducida al modelar la función de semivariograma espacio-tiempo, a diferencia del método multivariado que utiliza un modelo lineal de corregeonalización. Bajo un MLC, la estimación es posible sólo en los puntos T temporalmente correlacionados o en los puntos n espacialmente correlacionados con la serie de tiempo.

La desventaja del método ET radica al ajustar el modelo espacio-tiempo, la inferencia del semivariograma espacio-temporal no es posible cuando existen pocos datos en el mismo instante o en el mismo lugar.

El proceso de selección del semivariograma espacio-tiempo adquiere mayor importancia ya que, de la misma forma que sucede en el caso espacial, cuando el semivariograma de la

muestra es acotado la varianza de la estimación tiende a la real. Por lo que si el semivariograma teórico no es adecuado la varianza del error de estimación no convergerá a su valor verdadero, en estos casos resulta que la varianza del error de estimación calculada por el método de krigado no es consistente con la del modelo. Por otro lado, no se puede demostrar que la estimación del semivariograma pueda hacerse adecuadamente, incluso aunque el número de datos tienda a infinito.

Consideramos que esto es precisamente lo que explica por qué el ECME para el caso analizado es menor en el método ET, ya que la varianza teórica tiende a ser mayor al ECM para cada punto. El valor de la varianza no es el óptimo. Al tener error en la varianza del modelo ET, el valor estimado no se ve afectado de manera significativa, sin embargo, las medidas de incertidumbre obtenidas en el krigado pueden ser muy sensibles a los mismos. Aunque en este trabajo se avanza al proponer el semivariograma producto suma y en el proceso de selección, aun se refleja que el semivariograma no es el óptimo por lo que una línea de investigación puede ser direccionada en este sentido. Así como también en la proposición de nuevos semivariogramas, que no sean separables, como los propuestos por Cressie y Huang (1999).

9.6. CONCLUSIONES.

Cuando se utiliza un modelo de variable aleatoria espacio-temporal se modela la continuidad espacio-temporal por medio de la función de semivariograma espacio-tiempo, por otro lado cuando se utiliza el concepto multivariado de funciones aleatorias, la continuidad espacio-temporal es modelada vía un modelo lineal de correogionalización (MLC).

El concepto de variable aleatoria espacio-temporal permite la estimación (utilizando el krigado espacio-tiempo) en cualquier posición en el espacio y cualquier instante.

Bajo el concepto multivariado de funciones aleatorias utilizando un modelo lineal de correionalización (bajo un esquema de cokrigado) es posible estimar sólo en los tiempos conocidos.

La inferencia del semivariograma espacio-tiempo no es posible cuando existen pocos datos disponibles en la misma posición o en el mismo instante de tiempo teniendo como consecuencia que al tener error en el modelo ET, el valor estimado no varía de manera significativa, sin embargo las medidas de incertidumbre pueden ser muy sensibles a los mismos, lo que representa una limitación del método.

En este mismo sentido, en el caso multivariado al estar ajustar el modelo lineal de correionalización, es necesario obtener $T(T+1)/2$ o $n(n+1)/2$ auto y semivariograma cruzado.

Una desventaja del método multivariado respecto al ET es que aún teniendo la posibilidad de contar con un número considerable de observaciones en el espacio y el tiempo, no es posible utilizarlas todas en una sola modelación ya que el modelar $T(T+1)/2$ o $n(n+1)/2$ auto y semivariograma cruzado se torna un proceso poco práctico, siendo recomendable un ajuste máximo de tres variables, correlacionadas en el tiempo o el espacio, a la vez.

10. CONCLUSIONES, COMENTARIOS Y CONTINUACIÓN DEL TRABAJO

En todo el documento se describe la metodología para analizar la carga hidráulica, desde el punto de vista univariado, multivariado y espacio-temporal, este último se desarrolló bajo el punto de vista de observaciones espaciales temporalmente correlacionadas, o el de observaciones espacio-temporales, que denominamos simplemente como modelos espacio-temporales.

La técnica espacial multivariada fue propuesta, para ser utilizada en el campo de la hidrogeología, inicialmente utilizando solo información topográfica que de forma discreta y uniforme cubre una zona de interés. La ventaja de contar con las medidas topográficas, nivel del brocal, radica en la abundancia y relativa sencillez con la que se pueden levantar estos datos. Contar con elevaciones de brocal no es una limitante para el hidrogeólogo, sin embargo, la hipótesis de considerar que la información de topografía es una representación del nivel estático es una limitante que debe ser siempre considerada.

La técnica es de utilidad sólo en zonas en las que se trate de un acuífero libre que está en condiciones iniciales, donde no existe una afectación importante por efecto de extracción, de bombeo, u otro factor como la recarga. El hidrogeólogo deberá tener en mente esta limitante ya que su buena aplicación se refleja en el sentido físico del problema. Así mismo el utilizar los modelos de elevación digital abre una posibilidad más amplia y detallada para poder utilizar la técnica.

No debemos olvidar que la cantidad de información que proporciona un modelo digital de elevación es determinante para adquirir más información. La correlación entre las dos variables, medidas del modelo digital de elevación y del nivel de la carga hidráulica es la manera que determina si será útil el auxiliarnos del MDE. Es necesario que las dos

variables presenten un índice de correlación alto, mayor del 0.7, sin embargo, esta correlación alta, no es el único factor a determinar ya que debemos corroborar que no existe autokrigeabilidad entre las variables.

Una vez verificados estos cuatro puntos podemos esperar que la técnica sea de utilidad.

En conclusión, la aplicación de la técnica espacial multivariada es de utilidad solo en los casos donde el nivel de la carga hidráulica, es una réplica del nivel topográfico y este tipo de casos se presenta en zonas en las que se tiene un acuífero libre en un estado parecido al original.

Del análisis anterior se concluye que en el caso del acuífero de Querétaro el utilizar la información del MDE es útil solo en las áreas donde se cumple la hipótesis de replica entre la carga hidráulica y el nivel del terreno natural, por lo que la técnica es limitada a esta hipótesis.

La aplicación de la técnica es solo útil en las zonas elevadas donde no existe influencia del bombeo, por lo que es limitado su uso.

Una desventaja es que el aumento del número de variables correlacionadas requiere de calcular $n(n+1)/2$ semivariogramas simples y cruzados, lo que hace que la técnica se torne poco práctica.

Es importante hacer notar que el utilizar la autocorrelación y de forma conjunta la correlación cruzada beneficia a la estimación en aquellos puntos donde no se tiene información de la variable principal, ya que la variable secundaria o variables secundarias ejercerá su correlación en el momento de la estimación.

Respecto al esquema de solución es interesante ver cómo los dos sistemas de krigado residual y multivariado son similares, diferenciándose en los elementos que conforman la matriz, como se explicó en el apartado de estimación espacial multivariado.

Ahora bien enfocándose en las técnicas espacio-tiempo ya sea en las técnicas espaciales multivariadas o las técnicas espacio-temporales de variables aleatorias podemos comentar que en ambos casos es necesario reflexionar en la utilidad de las técnicas así como las limitaciones de las mismas.

En el caso multivariado espacio-tiempo es importante hacer notar que la técnica es poderosa y ayuda a obtener información en puntos importantes, es decir al tratar a los diferentes planos espaciales que mantienen correlación, temporal, al incrementar el número de puntos en la estimación, como ya se comentó en el capítulo 8. La técnica ayuda en los casos donde los intervalos de tiempo no son demasiado grandes ya que se está suponiendo que el proceso es el mismo y no varía en el tiempo, cosa que no siempre se cumple, pero al implementar esta técnica en intervalos de tiempo cercanos, la hipótesis funciona. En este punto entonces es necesario preguntarse ¿Cuál es el delta de tiempo correcto, a tomar en cuenta?. A esta pregunta solo deberemos considerar que las condiciones que se están comparando no sean muy distintas, así mismo parte de la respuesta se obtendrá cuando se realice el análisis de correlación al calcular la dispersión y la autokreagibilidad y coeficiente de codispersión.

Una desventaja de este método es el hecho de calcular los distintos semivariogramas cruzados y que en la literatura se ha recomendado su uso con únicamente hasta tres variables.

La aplicación de la técnica no se restringe al caso espacial, por lo contrario, es de igual utilidad cuando se está interesado en estimar en series de tiempo que por supuesto están correlacionadas en el espacio. La aplicabilidad de este caso particular es para estimación de series de tiempo donde existen intervalos sin muestreo. Como por ejemplo, en una serie de tiempo que esté registrando la variación de la carga hidráulica y por algún motivo se dejó de muestrear en un intervalo de tiempo o también extrapolación pero para este caso se recomienda se utilicen otras técnicas.

En el caso de la técnica espacio-temporal de variables aleatorias es uno de los campos con mayor potencialidad ya que aún hoy día es un campo de experimentación, siendo por un lado la propuesta de los modelos espacio-temporales una de las áreas de mayor demanda.

Con respecto al tipo de modelos que mejor ajustan están los separables, sin embargo se han propuesto nuevos modelos que reciben el nombre no separables que aún están comparándose unos con otros. De hecho Kyriakidis y Jornal, (1999) identifican esta área proponiendo sea de interés para futuras investigaciones.

Dentro del análisis estructural también interesante desarrollar técnicas que ajusten de manera automática el semivariograma de superficie, de la misma manera como se ha propuesto en el análisis estructural univariado, ya que al contar con un estimador automático el modelador podrá obtener el mejor ajuste y posteriormente por medio de la observación podrá decidir si es el más conveniente. La propuesta que hemos presentado tiene como finalidad analizar el comportamiento del semivariograma de superficie que se apoya en la observación y experiencia del modelador para decidir si el ajuste y el tipo de modelo es el que más conviene.

La propuesta es perfectible al considerar que no deja de ser una técnica de prueba y error, por lo que se confirma que una línea de investigación es el ajuste automático del semivariograma de superficie.

Respecto a los sistemas de krigado espacio-tiempo, la propuesta utilizada en esta tesis reduce el error cuadrático medio más que las anteriores, lo que indica que en promedio reduce el error más que los otros métodos, sin embargo el error cuadrático medio estándar no tiene el mismo efecto ya que el valor de la varianza tiende a ser mayor que el error cuadrático en cada punto. El motivo principal de esto es la selección del semivariograma espacio-tiempo ya que, de la misma forma que sucede en el caso espacial, la varianza de la estimación tiende a la real si se tiene un semivariograma correcto, por lo que si el semivariograma no lo es, la varianza del error de estimación no convergerá a su valor verdadero.

La estimación del krigado tiende al valor verdadero al aumentar el número de datos. No es lo mismo respecto a la varianza de estimación. Sin embargo, el error cometido en el cálculo de ésta queda acotado por el error cometido en la estimación del semivariograma.

Finalmente, la aplicación de las técnicas las he enfocado en la estimación de la carga hidráulica pero en el campo de la hidrogeología éstas pueden ser aplicadas a toda variable regionalizada.

POZO	PROPIETARIO	VALLE	LONGITUD	LATITUD
L-259			330280	2269160
L-260	JESÚS PAREDES HERNÁNDEZ	OBRAJUELO	330412	2268530
L-631-1	Trinidad Mendoza Alba	OBRAJUELO	330952	2263680
L-141			331442	2274740
L-626			331755	2263980
L-132	Comunidad El Nacimiento	Apaseo el Gra	331977	2271515
L-131	Ejido El Nacimiento	OBRAJUELO	332167	2271698
L-106			332750	2272925
L-642	Establo Apaseo El Alto	OBRAJUELO	332750	2261905
L-622	SOCIEDAD DE EJIDATARIOS	OBRAJUELO	333113	2265742
L-94	EJIDO SANTA MARÍA NATIVITAS	OBRAJUELO	334175	2273800
L-93			334900	2273100
L-620	COMUNIDAD MANDUJANO	OBRAJUELO	335053	2260437
L-606	BACHOCO	OBRAJUELO	335904	2268024
L-62		OBRAJUELO	337099	2279500
L-63	MIGUEL ANGEL GONZÁLEZ DE C	OBRAJUELO	337140	2279350
L-60			337590	2279950
L-67			337800	2276950
L-69			337875	2276300
L-219			338107	2266890
0062-G	ESTADO DE GUANAJUATO	GUANAJUAT	339050	2280350
L-206	HERMANOS PÉREZ ROJAS	OBRAJUELO	339100	2270985
0064-G	ESTADO DE GUANAJUATO	GUANAJUAT	339275	2280180
L-234	ALTAGRACIA MIRANDA	OBRAJUELO	339451	2261785
L-205	COMUNIDAD SAN JUÁN DEL LLA	OBRAJUELO	339710	2269746
L-80			339770	2275440
L-109-B		OBRAJUELO	339850	2279800
L-74			339880	2277780
L-83	EJIDO CALERA DE AMEXHE	OBRAJUELO	339900	2276040
L-225	SOCIEDAD SAN AGUSTÍN	OBRAJUELO	340059	2262117
0034-G	ESTADO DE GUANAJUATO	GUANAJUAT	340080	2277900
L-214			340094	2268033
L-109	ANDRÉS URQUIZA	OBRAJUELO	340275	2280260
L-213	Antonio Loarca Gutierrez	OBRAJUELO	340296	2267716
L-84			340650	2276410
0070-AG	ESTADO DE GUANAJUATO	GUANAJUAT	340950	2280250
L-603			341000	2272575
L-246	SOCIEDAD DE EJIDATARIOS (RE	OBRAJUELO	341335	2266912
L-34			341393	2276714
L-211-BIS	COMUNIDAD SAN ANTONIO CAL	OBRAJUELO	341629	2267485
L-46	Punta de Obrajuelo	OBRAJUELO	341640	2278550
L-47	FRACCIONAMIENTO LA PUNTA	OBRAJUELO	341811	2278378
0069-AG	ESTADO DE GUANAJUATO	GUANAJUAT	341850	2278550
0099-G	ESTADO DE GUANAJUATO	GUANAJUAT	341880	2277500
L-15	COMUNIDAD LA NORITA	OBRAJUELO	342108	2273364
0102-G	ESTADO DE GUANAJUATO	GUANAJUAT	342150	2274650
L-27			343160	2276990
0999-A	EJIDO EL ROMERAL	QUERETARC	343223.075	2272053.1
L-31			343268	2275223
L-13		OBRAJUELO	343335	2271708
1228-A	EJIDO TLACOTE # 1		343592.059	2284990.57

POZO	PROPIETARIO	VALLE	LONGITUD	LATITUD
611	HUERTAS LA JOYA		343595.905	2281869.39
1228	EJIDO TLACOTE	QUERETARC	343597.118	2285012.22
1748		QUERETARC	343645	2271950
0610-A	FRACCIONAMIENTO LA JOYA	QUERETARC	343706.154	2281037.05
0613-A	EJIDO TLACOTE		343747.634	2283777.68
0060-G	ESTADO DE GUANAJUATO	GUANAJUAT	343750	2277750
1785	HACIENDA SAN MIGUELITO	QUERETARC	343763.329	2293091.6
0773	EJIDO MOMPANI	QUERETARC	343827.288	2285374.02
0051-G	ESTADO DE GUANAJUATO	GUANAJUAT	343850	2277380
0615-A	RANCHO JOSE SALVADOR	QUERETARC	344001.13	2281913.19
L-26			344021	2277320
1290	RANCHO MIGALDI	QUERETARC	344085.733	2271781.44
L-3	ExHda del Castillo	OBRAJUELO	344110	2276100
0689	EJIDO ROMERAL #1	QUERETARC	344353.292	2271911.42
2036	EJIDO EL CASTILLO	GUANAJUAT	344559.576	2273385.79
L-2			344593	2276115
0612	RANCHO LA COLMENA	QUERETARC	344682.438	2278850.98
0982	RANCHO LAS ADJUNTAS	QUERETARC	344823.344	2278283.85
0609-A	RANCHO EL RINCON	QUERETARC	345355.376	2280897.86
1291	RANCHO EL ROMERAL	QUERETARC	345413.423	2272418.4
1935	EJIDO LOS ANGELES	QUERETARC	345429.42	2273385.79
2041	(CEA) EL NABO #2	QUERETARC	345539.099	2288162.6
0608	GRANJA LUCHIS	QUERETARC	345571.536	2280599
1709	(CEA) EL NABO		345728	2288229
0688	RANCHO EL ROMERAL	QUERETARC	345896.563	2271720.79
1315	AGROGEM #2	QUERETARC	346208.615	2277790.31
1313-A	GRANJA EL ROSARIO	QUERETARC	346400.985	2279589.92
657		QUERETARC	346442	2273124
0607	EX-HACIENDA SAN PEDRO MAR	QUERETARC	346487.54	2280056.63
0563	(CEA) SAN PEDRO MARTIR #1	QUERETARC	347004.907	2280058.56
0602	AGROGEN #1	QUERETARC	347007.08	2277644.72
0759	EJIDO EL NABO	QUERETARC	347008.514	2292307.8
1977	RANCHO JAN	QUERETARC	347109.183	2277110.43
0560	(CEA) GARAMBULLO	QUERETARC	347123.8	2282752.19
1459	EX-HACIENDA BALVANERA (EL	QUERETARC	347225	2273291
0658-A	RANCHO CAPERUCITA	QUERETARC	347301.675	2271399.15
2038	BALVANERA ZONA INDUSTRIAL	QUERETARC	347435.593	2271792.73
601-A		QUERETARC	347491	2277137
1962	(CEA) JURICA PUEBLO	QUERETARC	347556.317	2286169.24
0548-A	EL SALTO JURICA	QUERETARC	347560.432	2292670.01
0652	EJIDO EL CERRITO #4	QUERETARC	347678.005	2274721.55
0651-A	EJIDO EL CERRITO	QUERETARC	347686.708	2274063.18
2427		QUERETARC	347765	2281950
0650	EJIDO EL PUEBLITO #5		347769.355	2273095.67
2081	(CEA) SAN PEDRO MARTIR VI	QUERETARC	347781.09	2280029
1973	(CEA) SAN PEDRO MARTIR	QUERETARC	347810.489	2281015.54
0748	GRANJA JOSEFINA		347900	2277880
552		QUERETARC	348246	2287187
662	RANCHO DON JOSE	QUERETARC	348473.441	2270867.23
0629	EL CERRITO FRACCIONAMIENTOC	QUERETARC	348669.683	2273800.62
668	RANCHO EL CERRITO	QUERETARC	348794	2273457

POZO	PROPIETARIO	VALLE	LONGITUD	LATITUD
663		QUERETARO	348805	2272070
1707	(CEA) GARAMBULLO #2	QUERETARO	348851.88	2283152.82
0744	GRANJAS JOSEFINA		348874.359	2278258.58
0605	RANCHO SANTA MARIA DEL REI	QUERETARO	348898.897	2275968.32
0600-A	RANCHO JAN	QUERETARO	348956.973	2277407.64
597	RANCHO SANTA MARIA MAGDALENA		349253.369	2277252.28
2079	(CEA) INDUSTRIAL #3	QUERETARO	349409.681	2279182.13
0541	(CEA) SANTA ROSA DE JAUREGUI		349456.422	2294487.6
1634		QUERETARO	349510	2286920
1746-A	(CEA) PUEBLITO 2A	QUERETARO	349621.285	2272343.73
0577-A	(CEA) UNIDAD DEPORTIVA TINTERO		349651.924	2278944.14
1211-A	(CEA) SANTA ROSA DE JAUREGUI	QUERETARO	349656.108	2294751.34
0649	A.P. EL PUEBLITO		349676.659	2271749.97
1428-A	BLACK AND DECKER, S.A.	QUERETARO	349750.913	2283293.98
1298-A	CELANESE MEXICANA	QUERETARO	349869.594	2281976.67
1297	CELANESE MEXICANA	QUERETARO	349874.124	2282126.88
1978	(CEA) LOMA BONITA	QUERETARO	349883.827	2284770.73
0653	EJIDO EL PUEBLITO #1	QUERETARO	349887.918	2274146.77
0653-A	EJIDO SANTA VIRGINIA	QUERETARO	349969	2274204
0593	RANCHO SAN JUANICO	QUERETARO	350024.189	2277158.92
1299-A		QUERETARO	350120	2282210
1300	AUTOFORJAS		350225.365	2281421.43
0628	RANCHO VANEGAS	QUERETARO	350387.284	2273836.93
0967-A	CARDANES	QUERETARO	350420.7	2280837.58
0998	ACEROS CAMESA	QUERETARO	350490.565	2281979.86
2044	EJIDO SANTA ROSA	QUERETARO	350518.241	2291672.15
0550	HOTEL AZTECA	QUERETARO	350539.913	2289214.86
1232-A		QUERETARO	350562	2285172
1636	TURBORREACTORES, S.A. DE C.V.		350573.718	2282427.69
0627	RANCHO VANEGAS	QUERETARO	350614.747	2274379.35
0967	CARDANES	QUERETARO	350628.102	2280860.03
0914	(CEA) CAPILLA	QUERETARO	350902.692	2276249.77
0968	PEMEX	QUERETARO	350910.307	2280626.98
0970	PROMOTORA PANORAMA	QUERETARO	350991.436	2280335.74
0966-A	AGROMAK	QUERETARO	351003.739	2282424.04
1434	BACHOCO	QUERETARO	351114.99	2282977.75
2080	(CEA) CAPILLA #6	QUERETARO	351251.33	2276588.86
0962	TREMEC	QUERETARO	351278.859	2281478.74
1289	GRANJA LA GAVIA	QUERETARO	351458.859	2271409.77
0581	VIDRIERA QUERETARO	QUERETARO	351489.434	2279842.16
1010	UNIROYAL # 2	QUERETARO	351497.301	2281097.79
1232	(CEA) EL SALITRE	QUERETARO	351515.921	2285642.03
1638	VIDRIERA QUERETARO (NORTE)	QUERETARO	351546.769	2279745.58
1701	BIOQUIMEX	QUERETARO	351701.399	2277361.05
0579	(CEA) PUEBLA	QUERETARO	351714.417	2280664.5
0641-A	EX-HACIENDA TEJEDA		351896.727	2272630.16
0641	EX HACIENDA TEJEDA	QUERETARO	351896.927	2272614.79
0977-A	TECNOLOGICO	QUERETARO	351910.44	2278340.06
0978	(CEA) UNIDAD DEPORTIVA	QUERETARO	351934.353	2273559.45
1790	KELLOG'S	QUERETARO	351950	2277861
0969	U.DE PROD. DE LECHE DE QRO.	QUERETARO	352026.284	2279625

POZO	PROPIETARIO	VALLE	LONGITUD	LATITUD
0630	EJIDO MODELO	QUERETARC	352182.003	2275392.17
0956-A	CARNATION		352334.647	2279042.72
956	CARNATION	QUERETARC	352344.725	2279051.82
0592	INDUSTRIA EMBASADORA QRO.	QUERETARC	352363.236	2278314.18
0965	PILGRIM'S PRIDE	QUERETARC	352389.855	2279894.1
0960	TELEMERCADO ALAMEDA	QUERETARC	352390.651	2279244.61
1979	(CEA) MENCHACA	QUERETARC	352492.436	2277297.49
0957	CARNATION	QUERETARC	352524.044	2278983.8
0953	SINGER MEXICANA	QUERETARC	352644.945	2278899.61
0958	CARNATION	QUERETARC	352671.873	2279083.17
0824	CLEMENTE JAQUES	QUERETARC	352688.571	2280271.41
0870	FABRICA STA.MARIA DE GUADA	QUERETARC	352798.702	2278543
0639	EJIDO EL RETABLO		352819.461	2274299.11
0624	(CEA) CAPILLA #2	QUERETARC	352847.266	2276572.1
0631	HACIENDA CAPILLA		352886.383	2276014.09
1708	RANCHO SAN PEDRITO	QUERETARC	353113.148	2286167.7
1980	(CEA) VIRREYES	QUERETARC	353114.31	2276128.63
0734	(CEA) ISSSTE	QUERETARC	353205.43	2278237.23
0750	RANCHO CARAMBADA		353228.394	2276862.95
0636	(CEA) JARDINES DE LA HACIEND	QUERETARC	353309.484	2275233.26
1420	(CEA) ALCANFORES #2		353309.783	2278543.54
0954-A	GERBER	QUERETARC	353353.855	2279369.14
0954	GERBER	QUERETARC	353355.163	2279366.6
0635	CLUB CAMPESTRE DE QUERETA	QUERETARC	353375.98	2275020.22
0955-A	GERBER	QUERETARC	353419.003	2279259.85
634		QUERETARC	353561	2274061
0745	COLEGIO FRAY LUIS DE LEON	QUERETARC	353629.517	2276694.18
0736	FERROCARRILES NACIONALES	QUERETARC	353673.977	2278470.34
1905		QUERETARC	353700	2272250
1963	RANCHO SAN PEDRITO	QUERETARC	353745.165	2285875.04
2050	(CEA) UNIVERSIDAD	QUERETARC	353976.885	2277817.26
0730	(CEA) CASA BLANCA	QUERETARC	354062.088	2276067.2
1321	HOTEL FLAMINGO		354238.41	2276229.73
0976	HACIENDA SAN PEDRITO	QUERETARC	354275.732	2285906.88
1964	RANCHO LA PROVIDENCIA	QUERETARC	354677.113	2292763.14
1793	EX-RANCHO EL LLANO	QUERETARC	354734.748	2283139.56
2046	RANCHO LA PROVIDENCIA	QUERETARC	354741.482	2293505.89
0828	EX HACIENDA CASA BLANCA		355060.74	2276210.15
0826	EX RANCHO LA GARITA	QUERETARC	355398.864	2279318.77
0725-A	(CEA) ALAMEDA # 2	QUERETARC	355420.649	2276956.78
1639	INSTITUTO QUERETANO	QUERETARC	355520	2278477
740		QUERETARC	355614	2276967
2085	(CEA) ESTRELLA	QUERETARC	355743.71	2275929.9
0987	INSTITUTO SAN JAVIER	QUERETARC	356080.189	2278086.66
827		QUERETARC	356168	2276397
0988-A	(CEA) CENTRO EXPOSITOR #2	QUERETARC	356609.732	2275882.74
0988	(CEA) CENTRO EXPOSITOR #2	QUERETARC	356665.527	2275806.63
0720	(CEA) ALAMOS	QUERETARC	356810.753	2278459.13
0722	(CEA) CARRETAS	QUERETARC	357685.439	2277059.27
0553	(CEA) LOMA LINDA (BRITANIA)	QUERETARC	357933.146	2276926.84
0752	ALBERCA LETICIA	QUERETARC	358234.782	2278528.43

POZO	PROPIETARIO	VALLE	LONGITUD	LATITUD
1828	(CEA) ESTADIO #3	QUERETARO	358400.387	2275691.83
0742	RANCHO EL POZO	QUERETARO	360638.423	2284750.73
1705	RANCHO FELIPE DE VILLA	QUERETARO	360678.485	2281611.75
1418	(CEA) CAÑADA #3	QUERETARO	361264.694	2279188.32
1102	(CEA) CAÑADA #2	QUERETARO	361672.79	2279169.53
0986-A	(CEA) CAÑADA #1-B	QUERETARO	361672.806	2279168.25
2071	GRANJA SANTA MARTHA	QUERETARO	361939.665	2279817.53
L-671	San Juan de Partidas	San Juan de I	311286	2263292
L-972	Celaya, Gto.	Celaya, Gto.	312460	2265225
L-328	San Agustín	San Agustín	313113	2258420
L-378	Rancho San Joaquín	Rancho San J	313140	2260800
L-377	Los González	Los González	313849	2259200
L-385	ExHda Sta. Ma. del Refugio	ExHda Sta. M	314202	2260382
L-317	Cerro Blanco, Celaya	Cerro Blanco,	314320	2255055
L-335			314600	2255747
L-1592	La Mora	La Mora	314937	2271840
L-494	Trojes, Celaya	Trojes, Celaya	315145	2266929
L-798	Rcho. Jacarandas	Rcho. Jacara	315355	2269800
L-347	Rincón de Tamayo	Rincón de Ta	316526	2258434
L-508	Juan Martín	Juan Martín	316576	2264581
L-785	Gja. Los Eucaliptos	Apaseo el Gra	316788	2271494
L-467	El Ciuje	El Ciuje	317090	2265270
L-919	Gja. El Sauz	Gja. El Sauz	317169	2275672
L-541	Rcho. Fernando	Rcho. Fernan	317793	2268765
L-714	Apaseo el Grande	Apaseo el Gra	318210	2272845
L-932	San Miguel Octopan	San Miguel O	318222	2277224
L-712	Granja Pollo #4	Granja Pollo #	319110	2272998
L-1084	Juan Martín	Juan Martín	319141	2266188
L-582	Apaseo el Grande	Apaseo el Gra	319562	2269599
L-718	La Bomba del Mezquital	Rcho. De Bar	320935	2271398
L-298	Salinas	Salinas	321863	2274664
L-599	La Palma	La Palma	322500	2269540
L-596	Apaseo el Grande	Apaseo el Gra	323170	2269940
L-652	Rcho. De Barajas	Rcho. De Bar	331786	2258468
1638-A		QUERETARO		

POZO	BROCAL	Ago-81	Ago-82	Ago-83	Ago-84
L-259	1784.052				
L-260	1784.92	1738.5			
L-631-1	1830	1801.86			
L-141	1786.6				
L-626	1843.172				
L-132	1780				
L-131	1787	1754.52			
L-106	1782.33				
L-642	1945	1871.3			
L-622	1830	1807.76			
L-94	1787.17	1741.68			
L-93	1790.38				
L-620	1944				
L-606	1898				
L-62	1810	1740.36			
L-63	1810				
L-60	1798				
L-67	1797				
L-69	1793.96				
L-219	1796				
0062-G	1798.54				
L-206	1806.53				
0064-G	1799.04				
L-234	1904				
L-205	1807.03	1779.49			
L-80	1788.575				
L-109-B	1798				
L-74	1787.394				
L-83	1790.38				
L-225	1920				
0034-G	1787.647				
L-214	1797				
L-109	1798	1742.2			
L-213	1800.29				
L-84	1787.171				
0070-AG	1799.72		1739.33	1737.07	
L-603	1793.053				
L-246	1848.78				
L-34	1790.7				
L-211-BIS	1841				
L-46	1798	1735.68			
L-47	1800				
0069-AG	1792.2	1743.4			
0099-G	1797.138				
L-15	1810				
0102-G	1791.731	1753.391	1751.921	1747.211	1745.231
L-27	1792				
0999-A	1829.11				
L-31	1794.566				
L-13	1836.42	1749.47			
1228-A	1833.503				

POZO	BROCAL	Ago-81	Ago-82	Ago-83	Ago-84
611	1812	1759.4			
1228	1833.503	1759.503			
1748	1842				
0610-A	1812.75				
0613-A	1821.19				
0060-G	1798.02				
1785	2087.138				
0773	1836.35				
0051-G	1789.86	1732.93	1730.78	1729.46	1725.2
0615-A	1811.199	1750.08			
L-26	1792				
1290	1831.258				
L-3	1798	1739.76			
0689	1833.333				
2036	1824.518				
L-2	1811				
0612	1803.72				
0982	1798.972				
0609-A	1806.281				
1291	1847.37	1744.06			
1935	1837.7				
2041	1899.901				
0608	1804.281	1747.281			
1709	1893	1776.2			
0688	1847.42	1741.63			
1315	1798.41				
1313-A	1799.245				
657	1819	1739			
0607	1808.02	1750.66	1748.1	1745.66	1743.12
0563	1807.685	1763.885			
0602	1798.98	1753.76	1741.77	1739.09	1741.09
0759	1950.33	1910.92	1909.36		1905.58
1977	1799.435				
0560	1859.67				
1459	1807.239				
0658-A	1823.18				
2038	1810.49				
601-A	1816				
1962	1842.69				
0548-A	1912.99				
0652	1804.394				
0651-A	1806.242				
2427	1970				
0650	1802	1749.65			
2081	1794.67				
1973	1800.358	1727.15			
0748	1800	1742.35			
552	1858				
662	1836.386	1795.136			
0629	1807.54	1753.12		1745.48	
668	1823	1750			

POZO	BROCAL	Ago-81	Ago-82	Ago-83	Ago-84
663	1847	1762.4			
1707	1850				
0744	1801	1751.75			
0605	1801.133		1749.793		
0600-A	1803.387				
597	1801	1759			
2079	1797.568				
0541	1958	1913.7			
1634	1850				
1746-A	1805				
0577-A	1800				
1211-A	1953.48				
0649	1809	1754.8			
1428-A	1812.771				
1298-A	1808.25				
1297	1806.647				
1978	1816.517	1733.39			
0653	1803.483	1754.113	1749.043	1746.083	1743.793
0653-A	1803.541				
0593	1801.678				
1299-A	1856				
1300	1804.63				
0628	1805.251				
0967-A	1804.988				
0998	1805.876				
2044	1981.472	1908.26			
0550	1907.27				
1232-A	1825				
1636	1808.35				
0627	1804.07	1749.41	1748	1743.61	1741.47
0967	1803.45				
0914	1803.06	1757.46			
0968	1803.406				
0970	1802.947				
0966-A	1806.741				
1434	1813.726				
2080	1805				
0962	1805.453				1734.263
1289	1815				
0581	1807.25				
1010	1805.065				
1232	1830.86	1823.56			
1638	1804.32	1740.55			
1701	1804.57				
0579	1808.14				
0641-A	1809.01				
0641	1809.01	1752.52	1746.78	1743.96	
0977-A	1803.107				
0978	1807.37				
1790	1804.911				
0969	1806.655				1738.975

POZO	BROCAL	Ago-81	Ago-82	Ago-83	Ago-84
0630	1807.54				
0956-A	1806.905				
956	1806.905				
0592	1808.83	1743.72	1739.41	1736.23	1736.03
0965	1807.945	1690.945			
0960	1807.624				
1979	1808.616				
0957	1807.69				
0953	1807.691				
0958	1807.852				
0824	1815.641	1750.641			
0870	1809.9				
0639	1807	1745.35			
0624	1811.29	1754.29			
0631	1810	1765			
1708	1896.057				
1980	1811.331				
0734	1812.72	1725.32			
0750	1814	1752.68			
0636	1808.998				
1420	1812				
0954-A	1810.488				
0954	1810.488				
0635	1810.92	1749.52		1742.77	1740.73
0955-A	1810.486				
634	1836	1734.65			
0745	1813.831	1749.831			
0736	1814.78			1704.51	1704.02
1905	1900				
1963	1882.01				
2050	1813.703				
0730	1816.28	1762.83			
1321	1817	1752.4			
0976	1897.272	1860.96	1860.642		1859.412
1964	2041.475				
1793		1842			
2046	2012.559				
0828	1818	1770.6			
0826	1817.67	1752.49	1751.69	1749.52	1746.85
0725-A	1816.53				
1639	1823.36				
740	1844				
2085	1818				
0987	1824.622				
827	1846				
0988-A	1818.003				
0988	1838.69	1755.49			
0720	1833.636	1801.036			
0722	1842.95	1753.04			
0553	1848.03	1774.65			
0752	1840.13				

POZO	BROCAL	Ago-81	Ago-82	Ago-83	Ago-84
1828	1867.497				
0742	2035.846		1904.426	1901.386	
1705	1950				
1418	1851.231				
1102	1853.9	1845.8			
0986-A	1854.804	1845.8			
2071	1850.972				
L-671	1760				
L-972	1751				
L-328	1772.81				
L-378	1764				
L-377	1766				
L-385	1764.82				
L-317	1780				
L-335	1785				
L-1592	1758				
L-494	1755				
L-798	1764.5				
L-347	1800				
L-508	1760				
L-785	1759				
L-467	1755				
L-919	1761.87				
L-541	1758				
L-714	1761				
L-932	1763.99				
L-712	1760.76				
L-1084	1765				
L-582	1766.88				
L-718	1765				
L-298	1767.07				
L-599	1770				
L-596	1769				
L-652	2032				
1638-A	1803.86				

POZO	Ago-85	Ago-86	Ago-87	Ago-88	Ago-90
L-259					
L-260	1727.11				1712.86
L-631-1	1790.46				1776.22
L-141					
L-626					
L-132					
L-131	1743.12				1728.88
L-106					
L-642	1869.84				1868.01
L-622	1796.36				1782.12
L-94	1730.28				1716.04
L-93					
L-620					
L-606					
L-62	1728.96				1714.72
L-63					
L-60					
L-67					
L-69					
L-219					
0062-G					1720.61
L-206					
0064-G					
L-234					
L-205	1768.09				1753.85
L-80					
L-109-B					
L-74					
L-83					
L-225					
0034-G					1715.67
L-214					
L-109	1730.8				1716.56
L-213					
L-84					
0070-AG	1729.72				
L-603					
L-246					
L-34					
L-211-BIS					
L-46	1724.29				1710.04
L-47					
0069-AG	1727.52				1707.67
0099-G					
L-15					
0102-G	1741.731				1721.831
L-27					
0999-A	1743.32				1724.11
L-31					
L-13	1738.07				1723.83
1228-A					

POZO	Ago-85	Ago-86	Ago-87	Ago-88	Ago-90
611					
1228	1746.82				
1748					
0610-A			1739.15		1720.57
0613-A		1747.87		1740.84	
0060-G					
1785					
0773				1738.25	
0051-G	1721.86				1704.9
0615-A	1738.55				1724.12
L-26					
1290					
L-3	1728.36				1714.12
0689					
2036					
L-2					
0612					
0982					
0609-A				1730.081	1716.281
1291	1740.13				1723.57
1935					1720.7
2041					
0608	1733.08				1715.281
1709	1776.2				
0688	1731.25				1718.29
1315					
1313-A					
657	1739.48				
0607	1743.57	1741.89			
0563	1743.37				1717.685
0602	1739.89	1736.06		1729.8	1721.48
0759	1900.83	1904.07		1901.98	1897.99
1977					
0560					
1459					
0658-A			1735.84	1725.16	1717.88
2038					
601-A					1727.48
1962					1738.72
0548-A					
0652					
0651-A					
2427					
0650	1733.06				1710.82
2081					
1973	1710.79				1690.33
0748					
552					
662					
0629	1740.62	1740.49	1729.71		1718.94
668	1733.34				1716.09

POZO	Ago-85	Ago-86	Ago-87	Ago-88	Ago-90
663	1744.15				1735
1707					1732.6
0744	1746.27				
0605	1739.12				1721.33
0600-A					
597					
2079					
0541					
1634					
1746-A					1709
0577-A	1734.48				
1211-A					
0649					
1428-A		1780.531			
1298-A					1702.25
1297					
1978	1733.39				1733.387
0653	1742.523	1741.123	1740.103	1731.913	
0653-A					
0593					
1299-A					1701.44
1300					1724.63
0628					
0967-A					1719.688
0998	1732.09	1728.846			1715.876
2044	1903.44				1897.42
0550					
1232-A					
1636	1738.04				1725.39
0627	1739.84	1738.44	1736.31	1729.13	1723.34
0967		1730.05			1721.05
0914	1740.71				1720.01
0968		1730.276			1723.406
0970		1730.807			
0966-A		1736.741			
1434					
2080					
0962	1733.373	1731.333	1730.603	1727.453	1719.463
1289	1746.66			1736.1	1729.06
0581			1733.03	1728.65	1718.05
1010		1729.055			1722.065
1232	1823.04				1822.39
1638	1732.44	1730.42			1722.32
1701		1734.88			
0579				1727.42	1725.64
0641-A					
0641	1739.85	1736.31	1733.51	1728.96	
0977-A					1715.707
0978					1727.47
1790					1718.411
0969	1736.355		1735.235	1732.715	1727.655

POZO	Ago-85	Ago-86	Ago-87	Ago-88	Ago-90
0630				1729.71	
0956-A					1655.395
956		1717.725			1655.395
0592			1731.78	1725.56	
0965	1678.06				1661.945
0960		1677.744		1674.824	1661.624
1979					
0957		1687.13			1677.69
0953		1723.601			1710.691
0958					
0824	1733.04	1728.641			1717.511
0870					
0639					
0624	1744.29				
0631					
1708	1874.36				1872.057
1980					1721.331
0734					
0750					
0636					
1420					1680.71
0954-A					1654.488
0954	1699.84	1696.168			1679.75
0635	1739.28		1733.32		
0955-A					
634					
0745				1730.231	
0736	1704.18				
1905					
1963					1861.71
2050					
0730	1741.98				
1321					
0976					1858.11
1964					
1793					
2046					
0828	1748				
0826					
0725-A					
1639	1757.02				
740	1743.88				
2085					
0987			1742.522	1738.142	
827					1720.3
0988-A					
0988	1745.69				1723.49
0720	1778.886				1767.296
0722	1745.35		1744.95		
0553	1757.53				1736.19
0752				1796.45	

POZO	Ago-85	Ago-86	Ago-87	Ago-88	Ago-90
1828					1726.897
0742	1900.286	1898.716			
1705	1808.2				
1418					
1102	1835.9				1817.35
0986-A					1820.404
2071					
L-671					
L-972					
L-328					
L-378					
L-377					
L-385					
L-317					
L-335					
L-1592					
L-494					
L-798					
L-347					
L-508					
L-785					
L-467					
L-919					
L-541					
L-714					
L-932					
L-712					
L-1084					
L-582					
L-718					
L-298					
L-599					
L-596					
L-652					
1638-A					

POZO	Dic-90	May-92	Dic-92	May-93	Dic-93
L-259					
L-260					1703.36
L-631-1					1766.72
L-141					
L-626					
L-132					
L-131					1719.38
L-106					
L-642					1866.8
L-622					1772.62
L-94					1706.54
L-93					
L-620					
L-606					
L-62					1705.22
L-63					
L-60					
L-67					
L-69					
L-219					
0062-G				1716.07	1715.91
L-206					
0064-G					1709.02
L-234					
L-205					1744.35
L-80					
L-109-B					
L-74					
L-83					1730.1
L-225					1890.94
0034-G		1707.367	1709.317	1707.477	1704.69
L-214					
L-109					1707.06
L-213					1756.65
L-84					
0070-AG			1719.39	1718.52	1718.28
L-603					
L-246					1781.96
L-34					
L-211-BIS					
L-46					1700.54
L-47					
0069-AG	1707	1704.02	1707.22	1706.27	1705.96
0099-G		1716.428	1719.098	1714.378	1713.48
L-15					
0102-G	1718.731	1717.701	1720.711	1716.551	1713.16
L-27					
0999-A	1724.11	1716.82	1715.36		1713.24
L-31					
L-13					1714.33
1228-A					

POZO	Dic-90	May-92	Dic-92	May-93	Dic-93
611					
1228	1733.5	1726.753	1725.703	1724.963	1722.09
1748					
0610-A	1720.56	1718.61	1718.53	1716.55	1713.24
0613-A	1736.19			1724.47	1724.02
0060-G		1708.98	1711.83	1708.55	1708.28
1785					
0773					
0051-G		1704.55	1704.24	1703.09	1702.74
0615-A					1714.5
L-26					
1290					1711.528
L-3					1704.62
0689					1709.91
2036				1706.098	1705.698
L-2					
0612					1712.45
0982					1728.55
0609-A	1716.28		1712.981		
1291					1711.58
1935	1720.7				1712.75
2041				1855.311	
0608				1713.161	1710.46
1709					
0688	1714.85		1714.85	1713.32	1711.73
1315				1709.27	1708.84
1313-A					1714.09
657					
0607					
0563					1707.25
0602					
0759	1897.58	1896.17	1894.49	1896.03	1893.61
1977					1717.7
0560					
1459					
0658-A					
2038				1701.11	
601-A					
1962					
0548-A			1895.1		1894.43
0652					
0651-A					
2427					
0650					
2081					1699.86
1973					1675.688
0748					
552					
662					
0629	1718.94	1715.43		1717.44	1713.26
668					1704.6

POZO	Dic-90	May-92	Dic-92	May-93	Dic-93
663					
1707					
0744					
0605	1717.13	1714.223	1714.683	1713.843	1710.663
0600-A					1728.29
597					
2079					
0541					
1634					
1746-A	1709			1702.95	1702.16
0577-A					
1211-A				1893.1	1890.41
0649					
1428-A	1769.954	1762.291	1762.154		
1298-A					
1297					1705.53
1978					1734.17
0653					
0653-A					
0593		1722.888	1712.238		
1299-A					1703.57
1300					
0628	1724.07				
0967-A					
0998					
2044				1893.422	1892.802
0550				1832.72	1832.29
1232-A					
1636					
0627				1714.65	1711.8
0967	1721.05			1718.04	1716.74
0914	1720.01				1725.69
0968					
0970					
0966-A					
1434				1771.356	
2080					1717.85
0962					
1289				1719.38	1720.24
0581					
1010	1722.07				
1232					1821.96
1638	1722.32		1715.83	1715.22	1714.83
1701					1706.87
0579					1722.66
0641-A					
0641		1715.85		1711.51	
0977-A	1715.71				
0978					1712.44
1790					
0969					

POZO	Dic-90	May-92	Dic-92	May-93	Dic-93
0630					
0956-A					
956					
0592					
0965					
0960					
1979					1688.21
0957					
0953	1710.69		1705.931	1706.851	1706.551
0958	1677.69	1664.482	1660.022	1658.732	1658.082
0824					
0870					1716.83
0639					
0624					
0631					
1708	1872.06				1871.97
1980					
0734					
0750					
0636					
1420					
0954-A					
0954			1640.488		1666.36
0635					
0955-A				1642.316	1640.416
634					
0745					1701.69
0736					
1905					
1963	1861.71				1860.71
2050					1712.463
0730					
1321					
0976					1857.15
1964	1922.735			1920.475	
1793					
2046					
0828					
0826					
0725-A					
1639					
740					
2085					1702.17
0987	1732.62			1727.922	
827					
0988-A	1723.49				
0988					
0720					1763.626
0722					
0553					1721.94
0752	1798.99			1797.92	1798.99

POZO	Dic-90	May-92	Dic-92	May-93	Dic-93
1828					
0742					
1705					
1418				1809.861	
1102	1817.35				1813.95
0986-A					1814.684
2071				1798.472	
L-671					
L-972					
L-328					
L-378					
L-377					
L-385					
L-317					
L-335					
L-1592					
L-494					
L-798					
L-347					
L-508					
L-785					
L-467					
L-919					
L-541					
L-714					
L-932					
L-712					
L-1084					
L-582					
L-718					
L-298					
L-599					
L-596					
L-652					
1638-A					

POZO	May-94	Dic-94	May-95	Dic-95	May-96
L-259				1682.382	
L-260				1697.67	
L-631-1				1761.5	
L-141				1710.59	
L-626				1761.272	
L-132					
L-131				1714.16	
L-106				1706.67	
L-642				1866.98	
L-622				1767.4	
L-94				1701.32	
L-93				1705.38	
L-620				1878.47	
L-606					
L-62				1700	
L-63				1715	
L-60				1704.06	
L-67				1723.08	
L-69				1723.36	
L-219				1769.45	
0062-G	1714.42	1712.13	1708.35	1707.12	
L-206					
0064-G	1717.89		1705.51	1704.56	1703.98
L-234					
L-205				1739.13	
L-80				1712.575	
L-109-B					
L-74				1715.244	
L-83				1724.88	
L-225				1890.06	
0034-G		1700.057	1696.737	1697.737	1692.637
L-214				1752.94	
L-109				1701.84	
L-213				1754.62	
L-84				1701.371	
0070-AG	1716.62	1710.44	1710.01	1708.31	1705.61
L-603				1723.053	
L-246				1776.27	
L-34				1710.7	
L-211-BIS					
L-46				1694.85	
L-47					
0069-AG			1696.27	1692.13	
0099-G		1711.928	1708.348	1708.028	1704.818
L-15					
0102-G				1706.59	
L-27				1703.4	
0999-A	1710.21		1706.88	1705.48	1704.36
L-31				1713.026	
L-13				1709.11	
1228-A				1715.643	

POZO	May-94	Dic-94	May-95	Dic-95	May-96
611					
1228		1718.653	1716.673	1715.643	
1748					
0610-A		1707.96		1704.85	
0613-A	1721.36	1718.82	1717.06	1715.56	
0060-G	1706.35		1704.05	1700.45	1701.13
1785					
0773					
0051-G	1701.1		1699.84	1698.52	1696.99
0615-A				1707.839	
L-26				1702	
1290			1705.968		
L-3				1699.4	
0689	1712.013	1709.91	1708.903	1708.263	1706.953
2036	1702.828	1701.458	1698.598	1696.518	
L-2				1707.11	
0612	1711.25	1711.67	1703.15	1701.49	
0982					
0609-A		1704.691	1702.991	1702.121	1697.441
1291					
1935	1709.96	1712.75	1705.84	1704.2	
2041		1854.78			
0608					
1709					
0688	1708.94		1703.2	1703.6	
1315			1704.35	1705.89	1703.52
1313-A				1699.43	
657					
0607					
0563				1700.29	
0602					
0759		1894.45	1893.22	1892.48	
1977				1706.5	
0560					
1459				1704.08	
0658-A					
2038					
601-A					
1962					
0548-A		1890.3	1889.01	1888.73	1887.86
0652				1708.054	1705.894
0651-A				1701.41	1700.742
2427		1692.4			
0650					
2081				1691.87	
1973	1672.288		1669.978	1668.52	
0748					
552					
662	1715.766		1711.336		
0629	1710.74	1713.26		1704.23	1699.22
668				1697.71	

POZO	May-94	Dic-94	May-95	Dic-95	May-96
663					
1707					
0744					
0605	1709.963	1710.66		1700.46	
0600-A		1726.037	1722.417	1723.267	1723.707
597					
2079				1695.808	
0541					
1634					
1746-A		1708.2	1701.43	1694.81	
0577-A					
1211-A		1885.36		1874.85	
0649					
1428-A	1745.531	1733.4		1704.56	
1298-A				1694.75	
1297	1693.727		1693.147	1693.15	
1978				1734.197	
0653					
0653-A					1708.401
0593			1707.878		1699.328
1299-A					
1300					
0628					
0967-A					
0998					
2044	1891.992	1891.752	1891.442	1890.992	1889.112
0550	1831.96	1828.43	1830.26	1828.83	1828.5
1232-A					
1636					
0627	1710.21			1705.77	
0967	1714.95	1715.17	1715.75	1713.78	1711.97
0914		1709.02		1705.03	
0968					
0970					
0966-A					
1434	1771.756	1770.286	1769.886		1767.696
2080		1717.29		1704.77	
0962					
1289	1718.9	1717.37	1715.15	1713.86	1712.93
0581					
1010			1715.065	1710.065	1708.395
1232				1821.69	
1638		1711.72	1710.5	1710.26	1701.54
1701		1705.88		1704.26	1701.79
0579				1720.8	
0641-A				1703.88	
0641			1709.16		
0977-A					
0978					
1790					
0969					

POZO	May-94	Dic-94	May-95	Dic-95	May-96
0630					
0956-A					
956					
0592					
0965					
0960					
1979		1692.81			
0957					
0953	1705.351	1702.661	1701.441	1701.881	1698.401
0958	1655.382	1659.752	1654.572	1658.792	
0824					
0870				1705.78	
0639					
0624					
0631					
1708		1873.75		1869.757	
1980					
0734					
0750					
0636			1708.738	1701.768	
1420					
0954-A					
0954			1660.738	1657.848	1656.408
0635					
0955-A	1635.986	1632.486		1629.24	
634					
0745			1705.171	1704.181	1700.951
0736					
1905		1709			
1963				1859.38	1859.3
2050	1707.683		1706.193	1705.003	
0730					
1321					
0976			1856.652		1856.202
1964					
1793					
2046		1907.929	1907.729		1907.299
0828					
0826					
0725-A					
1639					
740					
2085		1697.14	1696.63	1694.52	
0987	1724.842	1724.672	1722.022	1722.722	1720.882
827					
0988-A					
0988	1708.95		1705.3	1704.14	
0720	1762.056			1756.54	
0722					
0553				1715.6	
0752	1798.17	1796.66	1795.98	1794.85	1794.26

POZO	May-94	Dic-94	May-95	Dic-95	May-96
1828					
0742					
1705					
1418		1808.601	1807.461	1807.201	
1102		1814.45	1811.35	1811.09	
0986-A		1812.574		1811.514	
2071	1796.612				
L-671					
L-972					
L-328					
L-378					
L-377					
L-385					
L-317					
L-335					
L-1592					
L-494					
L-798					
L-347					
L-508					
L-785					
L-467					
L-919					
L-541					
L-714					
L-932					
L-712					
L-1084					
L-582					
L-718					
L-298					
L-599					
L-596					
L-652					
1638-A					

POZO	Dic-96	Dic-97	Dic-98	Dic-99	Abr-00
L-259					
L-260			1689.12	1692.86	1691.29
L-631-1			1756.62	1743.63	1742.2
L-141					
L-626					
L-132					
L-131			1695	1689.27	1687.01
L-106					
L-642				1864.61	
L-622			1761.92	1760.75	1759.95
L-94			1691.42	1686.39	1687.87
L-93					
L-620					
L-606					
L-62			1696.15	1693.65	1691.71
L-63					1692.25
L-60					
L-67					
L-69					
L-219					
0062-G				1687.08	
L-206			1767.98		1767.08
0064-G					
L-234					
L-205			1731.18	1730.35	1726.73
L-80					
L-109-B			1697.13		1694.5
L-74					
L-83			1724.38	1718.67	1716.08
L-225			1881.25	1890.4	1889.9
0034-G				1679.35	
L-214					
L-109			1697.13	1695.51	1694.95
L-213			1751.57	1750.01	1749.86
L-84					
0070-AG				1699.79	
L-603					
L-246			1767.72	1765.71	1764.48
L-34					
L-211-BIS					
L-46			1686.3	1683.38	1682.4
L-47					1688.1
0069-AG				1680.09	
0099-G				1696.09	
L-15					
0102-G				1693.44	
L-27					
0999-A	1701.81	1697.74	1694.86	1689.05	
L-31					
L-13			1703.25	1697.88	1695.87
1228-A				1702.16	

POZO	Dic-96	Dic-97	Dic-98	Dic-99	Abr-00
611					
1228	1712.27				
1748					
0610-A	1701.75			1692.43	
0613-A	1711.99	1708.53	1705.74	1702.61	
0060-G				1690.67	
1785					
0773					
0051-G				1690.08	
0615-A				1697.19	
L-26					
1290					
L-3				1683.15	1683.15
0689	1704.88				
2036					
L-2					
0612	1698.65	1691.15		1681.85	
0982					
0609-A	1697.31	1694.22	1692.65	1686.151	
1291					
1935	1701.39	1696.85	1693.96	1691.07	
2041			1836.781		
0608					
1709					
0688	1697.96	1697.48		1694.08	
1315					
1313-A			1687.36	1682.545	
657					
0607					
0563				1686.35	
0602					
0759	1890.48	1888.7	1888.08	1885.77	
1977				1691.015	
0560					
1459				1689.46	
0658-A					
2038					
601-A					
1962					
0548-A	1886.82			1882.22	
0652				1691.3	
0651-A				1695.04	
2427		1686.54	1684.28		
0650					
2081					
1973	1664.118	1658.75	1655.65	1650.5	
0748					
552					
662					
0629	1701.25		1693.72	1688.44	
668				1684.39	

POZO	Dic-96	Dic-97	Dic-98	Dic-99	Abr-00
663					
1707		1710.7	1709.9	1706.37	
0744					
0605	1696.15		1692.65	1688.103	
0600-A		1722.53		1720.05	
597					
2079					
0541					
1634		1754.47	1754.47	1753.11	
1746-A	1692.31	1686.83		1670	
0577-A					
1211-A					
0649					
1428-A	1733.72	1729.55	1700.93	1701.49	
1298-A					
1297					
1978		1734.71	1732.337	1732.757	
0653					
0653-A	1708.76	1707.301	1707.241	1706.051	
0593					
1299-A					
1300					
0628	1699.21			1687.221	
0967-A					
0998					
2044				1886.16	
0550				1824.55	
1232-A					
1636					
0627					
0967	1709.78				
0914		1697.06		1687.86	
0968					
0970					
0966-A					
1434	1769.146	1770.9	1768.976		
2080					
0962					
1289				1704.97	
0581					
1010	1707.67	1703.295	1700.19	1695.535	
1232				1821.19	
1638	1706.85		1698.32		
1701					
0579					
0641-A					
0641	1701.88				
0977-A	1695.11				
0978					
1790					
0969					

POZO	Dic-96	Dic-97	Dic-98	Dic-99	Abr-00
0630					
0956-A					
956					
0592					
0965					
0960					
1979		1692.816		1686.926	
0957					
0953	1695.55	1693.81	1691.44	1688.841	
0958	1654.79			1654.652	
0824					
0870			1703.06	1702.1	
0639					
0624					
0631					
1708	1871.36	1869.64		1870.557	
1980					
0734					
0750					
0636					
1420					
0954-A					
0954				1642.24	
0635					
0955-A				1623.33	
634					
0745	1700.65	1700.66	1697.58	1688.621	
0736					
1905		1696.41	1693.5	1688.88	
1963	1858.89	1859.28		1859.5	
2050					
0730					
1321					
0976		1856.01			
1964					
1793					
2046					
0828					
0826					
0725-A		1696.38			
1639					
740					
2085					
0987	1721.07	1717.7	1717.882	1716.572	
827					
0988-A	1707.02	1707.02		1669.5	
0988					
0720				1745.28	
0722					
0553					
0752		1794.78		1792.06	

POZO	Dic-96	Dic-97	Dic-98	Dic-99	Abr-00
1828					
0742					
1705					
1418					
1102				1801	
0986-A				1801.664	
2071					
L-671					
L-972					
L-328			1685.92		1680.76
L-378					1675.45
L-377			1681.35		1675.7
L-385			1681.91		1674.67
L-317					
L-335					1684.68
L-1592					1678.9
L-494					
L-798			1687.35		1678.1
L-347					
L-508					
L-785			1689.45		1680.93
L-467			1755		1660.72
L-919			1724.32		1716.5
L-541			1674.93		1679.75
L-714			1707.85		1716.33
L-932			1724.09		1725.51
L-712					1716.46
L-1084					
L-582			1675.68		1683.43
L-718			1668.87		1655.9
L-298			1714.63		1714.44
L-599			1663.43		1656.98
L-596			1672.9		1655.01
L-652					
1638-A		1702.72	1697.86		

POZO	May-00	Ago-00	Oct-00	Dic-00	Dic-01
L-259					
L-260	1692.12		1691.97		
L-631-1			1741.25		
L-141					
L-626					
L-132			1681.6		
L-131			1685.61		
L-106					
L-642					
L-622	1760.29		1759.14		
L-94	1687.87		1683.71		
L-93					
L-620	1875.48				
L-606	1730.37				
L-62			1690.9		
L-63	1692.25				
L-60					
L-67					
L-69					
L-219					
0062-G					
L-206	1768.23		1766.83		
0064-G					
L-234	1887.68				
L-205	1727.49		1726.02		
L-80					
L-109-B			1694.25		
L-74					
L-83	1716.08		1715.68		
L-225			1889.15		
0034-G					
L-214					
L-109	1694.95		1694.25		
L-213	1749.6		1749.42		
L-84					
0070-AG					
L-603					
L-246			1765.13		
L-34					
L-211-BIS	1766.09				
L-46			1680.84		
L-47	1688.1				
0069-AG					
0099-G					
L-15	1684.3				
0102-G					
L-27					
0999-A		1687.54		1685.63	1685.01
L-31					
L-13			1694.64		
1228-A					

POZO	May-00	Ago-00	Oct-00	Dic-00	Dic-01
611					
1228					
1748		1702			
0610-A		1690.75			
0613-A		1699.77		1698.59	
0060-G					
1785		1837.138			
0773					
0051-G					
0615-A					
L-26					
1290					
L-3			1681.75		
0689					
2036					
L-2					
0612					
0982				1686.272	1685.902
0609-A					1680.421
1291					
1935		1692.74		1692.74	1692.9
2041				1831.501	1830.721
0608					
1709					
0688					
1315					
1313-A				1680.845	1681.195
657		1754			
0607					
0563					
0602					
0759		1885.65		1885.65	1885.58
1977		1689.435		1689.425	1690.315
0560					
1459					
0658-A					
2038					
601-A		1719			
1962					
0548-A					
0652				1698.91	1697.29
0651-A					1697.22
2427					
0650					
2081					
1973				1645.978	
0748					
552					
662					
0629				1687.37	1687.94
668					

POZO	May-00	Ago-00	Oct-00	Dic-00	Dic-01
663		1707			
1707				1704.85	
0744					
0605				1683.233	1685.933
0600-A				1722	1726.06
597					
2079					
0541					
1634					
1746-A		1675			1673.07
0577-A					
1211-A					
0649					
1428-A				1699.691	1701.401
1298-A					
1297					
1978				1731.177	1733.017
0653					
0653-A		1706.541			
0593					
1299-A					
1300					
0628		1684.621		1684.621	1681.101
0967-A					
0998					
2044					
0550					
1232-A		1722.6			
1636					
0627		1688.07			
0967					
0914				1685.68	
0968					
0970					
0966-A					
1434				1769.246	1766.716
2080					
0962					
1289					
0581					
1010				1696.42	1696.135
1232					
1638				1692.726	1692.3
1701					
0579					
0641-A					
0641					
0977-A					
0978					
1790					
0969					

POZO	May-00	Ago-00	Oct-00	Dic-00	Dic-01
0630					
0956-A					
956					
0592					
0965					
0960					
1979				1687.216	
0957					
0953				1684.551	
0958				1620.2	
0824					
0870				1701.4	1701.17
0639					
0624					
0631					
1708					
1980					
0734					
0750					
0636					
1420					
0954-A					
0954					
0635					
0955-A					
634					
0745				1683.031	
0736					
1905					
1963				1857.91	1857.91
2050					
0730					
1321					
0976		1854.642		1854.64	1855.17
1964					
1793					
2046					
0828					
0826					
0725-A					1695.9
1639					
740					
2085					
0987				1715.27	1714.972
827					
0988-A					
0988					
0720					
0722					
0553					
0752					1790.03

POZO	May-00	Ago-00	Oct-00	Dic-00	Dic-01
1828					
0742					
1705					
1418					
1102					
0986-A					
2071					
L-671			1695.4		
L-972			1651.54		
L-328			1679.83		
L-378			1674.91		
L-377			1674.5		
L-385			1673.93		
L-317			1680		
L-335			1684.25		
L-1592			1679.98		
L-494			1671.03		
L-798			1675.8		
L-347			1682.53		
L-508			1662.5		
L-785			1683.2		
L-467			1658.3		
L-919			1716.07		
L-541			1677.54		
L-714			1715.7		
L-932			1724.09		
L-712			1714.46		
L-1084			1653.37		
L-582			1686.56		
L-718			1653.6		
L-298			1714.85		
L-599			1656.34		
L-596			1654.1		
L-652			1874.24		
1638-A					

POZO	May-02	Oct-02	Nov-03	Dic-03	May-04
L-259					
L-260	1690.17	1689.96	1707.52		1689.37
L-631-1	1739.1	1742.7	1751.9		1739.42
L-141					
L-626					
L-132	1675.51	1675.25	1674.94		1672.64
L-131	1680.04	1681.4	1689		1676.05
L-106					
L-642	1861.87	1863.41	1848.97		1847.57
L-622	1755.7	1756.87	1755.33		1753.51
L-94	1678.92	1679.56	1683.85	1677.4	1676.63
L-93					
L-620				1873.04	
L-606					
L-62	1686.24	1687	1683	1682.82	
L-63				1673.4	
L-60					
L-67					
L-69					
L-219					
0062-G				1667.04	
L-206	1762.42	1765.3	1770.44	1759.12	1766.2
0064-G				1686.73	
L-234					
L-205	1721.68	1721.24	1718.6	1718.47	1717.81
L-80					
L-109-B	1693.72	1692	1697.47		1686.9
L-74					
L-83	1713.89	1713.27	1715.33	1711.54	1714.21
L-225	1889.51	1890.4	1890.36	1890.31	1890.08
0034-G				1660.96	
L-214					
L-109				1688.24	
L-213	1747.53	1745.92	1746.71	1741.44	1746.59
L-84					
0070-AG				1693.29	
L-603					
L-246	1762.74	1764.39	1762.15	1762.09	1761.78
L-34					
L-211-BIS					
L-46					
L-47					
0069-AG				1668.05	
0099-G				1686.24	
L-15					
0102-G				1680.29	
L-27					
0999-A				1679.41	
L-31					
L-13	1687.69	1690.46	1686.73	1686.3	1684.11
1228-A				1688.66	

POZO	May-02	Oct-02	Nov-03	Dic-03	May-04
611					
1228				1691.43	
1748					
0610-A				1682.38	
0613-A				1688.06	
0060-G				1680.89	
1785					
0773					
0051-G				1682.37	
0615-A				1686.54	
L-26					
1290				1672.2	
L-3	1680.61	1681.15	1677.96	1677.44	1674.83
0689				1687.38	
2036				1660.52	
L-2					
0612				1663.25	
0982				1684.172	
0609-A				1682.48	
1291				1675.63	
1935				1692.56	
2041				1829.16	
0608				1664.48	
1709				1776.2	
0688				1687.28	
1315				1666.27	
1313-A				1679.14	
657					
0607				1706.22	
0563				1672.43	
0602				1673.55	
0759				1879.14	
1977				1689.46	
0560				1701.08	
1459				1674.84	
0658-A				1669.29	
2038				1466.44	
601-A				1716.19	
1962					
0548-A				1875.23	
0652				1674.71	
0651-A				1693.93	
2427				1668.4	
0650				1653.42	
2081				1659.91	
1973				1640.558	
0748					
552					
662				1656.78	
0629				1677.69	
668				1671.07	

POZO	May-02	Oct-02	Nov-03	Dic-03	May-04
663				1697.67	
1707				1695.73	
0744				1721.15	
0605				1686	
0600-A				1720.61	
597					
2079					
0541					
1634				1747.67	
1746-A				1668.85	
0577-A					
1211-A				1820.78	
0649					
1428-A				1700.23	
1298-A				1683.5	
1297				1689.97	
1978				1733.317	
0653				1606.6	
0653-A				1702.81	
0593				1678.75	
1299-A				1701.17	
1300					
0628				1676.79	
0967-A					
0998				1666.55	
2044				1880.45	
0550				1820.14	
1232-A					
1636				1691.64	
0627				1675.46	
0967				1681.78	
0914				1678.56	
0968				1700.52	
0970					
0966-A				1702.9	
1434				1771.526	
2080				1603.84	
0962				1679.24	
1289				1696.09	
0581				1688.95	
1010				1687.265	
1232				1821.69	
1638				1692.12	
1701				1676.4	
0579				1713.36	
0641-A					
0641				1689.01	
0977-A				1671.81	
0978				1667.37	
1790				1674.97	
0969				1705.35	

POZO	May-02	Oct-02	Nov-03	Dic-03	May-04
0630					
0956-A					
956					
0592				1630.15	
0965				1618.97	
0960				1609.61	
1979				1686.466	
0957				1646.24	
0953				1681.691	
0958				1650.51	
0824				1666.77	
0870				1700.22	
0639					
0624				1698.44	
0631					
1708				1869.22	
1980					
0734					
0750					
0636				1606.6	
1420					
0954-A					
0954					
0635				1690.75	
0955-A				1617.32	
634				1701.85	
0745				1660.68	
0736				1701.05	
1905				1655.8	
1963				1857.91	
2050				1691.73	
0730				1646.46	
1321					
0976				1854.04	
1964				1910.58	
1793					
2046				1904.05	
0828				1644.35	
0826				1700.19	
0725-A				1695.66	
1639					
740				1705.14	
2085				1663.91	
0987				1713.65	
827				1645.32	
0988-A				1662.37	
0988				1673.61	
0720				1732.34	
0722				1720.6	
0553				1678.92	
0752				1788.43	

POZO	May-02	Oct-02	Nov-03	Dic-03	May-04
1828					
0742				1877.01	
1705					
1418				1798.61	
1102				1794.68	
0986-A				1795.904	
2071				1782.51	
L-671	1693.5	1693.51	1692.4		1691.58
L-972	1650.59	1655.7	1661.13		1652
L-328	1675.14	1679.23	1680.03		1659.11
L-378	1670.72	1674.46	1676.52		1672.48
L-377	1669.87	1675	1680.15		1670.68
L-385	1671.59	1675.82	1676.16		1670.79
L-317	1677.06	1678.954	1678.69		1677.18
L-335	1680.6	1682.04	1682.6		
L-1592	1672.85	1682.2	1681.08		1675.76
L-494	1669.02	1674.33	1676.08		1674.71
L-798	1670.1	1680.5	1681.69		1677.16
L-347	1679.34	1683.98	1684.08		1680.76
L-508	1657.65	1663.91	1670.18		1655.8
L-785	1678.35	1682.18	1685.39		1694.7
L-467	1655.15	1665.89	1715.56		1700.75
L-919	1712.93	1716.76	1725.31		1717.93
L-541	1682.69	1686.58	1690.53		1690.5
L-714	1714.97	1715.54	1719.06		1719.36
L-932	1720.23	1721.74	1720.34		1710.03
L-712	1714.06	1728.55	1736.57		1734.76
L-1084	1649.84	1654.29	1656.6		1653
L-582	1688.68	1688.31	1689.69		1688.28
L-718	1645.61	1656.07	1656.94		1653.26
L-298	1716.67	1716.99	1717.91		1718.07
L-599	1643.54	1654.2	1661.37		1770
L-596	1647.29	1652.66	1657.5		
L-652	1873.57	1875.82	1872.98		1871.5
1638-A					

11. BIBLIOGRAFÍA.

ABOUFIRASSI, M. y MARIÑO, M.A., Kriging of water levels in the Souss aquifer, Morocco, *Mathematical Geology*, 1983, Vol. 15, Núm. 4, 537-551.

ABOUFIRASSI, M. y MARIÑO, M.A., Cokriging of aquifer transmissivity and specific capacity, *Mathematical Geology*, 1984, Vol. 16, Núm.1, 19-35.

AHMED, S., DE MARSILY, G., Comparison of geostatistical methods for estimating transmissivity using data on transmissivity and specific capacity, *Water Resources Research*, 1987, Vol. 23, Núm. 9, 1717-1737.

AHMED, S., DE MARSILY, G., Cokriged estimation of aquifer transmissivity as an indirect solution of the inverse problem: A practical approach, *Water Resources Research*, 1993, Vol. 29, Núm. 2, 521-530.

ANGELINI P., Correlation and spectral analysis of two hydrogeological systems in central Italy, *Hydrological Sciences Journal*, 1997, Vol. 42, Núm. 3, 425-438.

ARMSTRONG, M. y JABIN, R., Variogram models must be positive-definite, *Mathematical Geology*, 1981, Vol. 13, Núm, 5, 455-459.

ASCE, Review of geostatistics in geohydrology I: Basic concepts, *Journal of Hydraulic Engineering*, 1992 a, Vol. 116, Núm. 5, 612-632.

ASCE, Review of geostatistics in geohydrology II: Applications; *Journal of Hydraulic Engineering*, 1992 b, Vol. 116, Núm. 5, 633-658.

ASLI, M. y MARCOTTE, Comparison of approaches to spatial estimation in a bivariate context, *Mathematical Geology*, 1995, Vol. 27, Núm, 5, 641-658.

BIERKENS, M., KNOTTERS, M. y HOOGLAND, T., Space-time modeling of water table depth using a regionalized time series model and the kalman filter, *Water Resources Research*, 2001, Vol. 37, Núm 5, 1277-1290.

BILONICK, R. A., y NICHOLS D. G., Temporal variations in acid precipitation over New York State What the 1965-1979 USGS data reveal, *Atmospheric Environment*, 1983, Vol. 17, Núm 6, 1063-1072.

BILONICK, R. A., Risk qualifies maps of hydrogen ion concentration for the New York State area for 1966-1978, *Atmospheric Environment*, 1983, Vol. 17, Núm 12, 2513-2524.

BILONICK, R. A., The space-time distribution of sulfates deposition in the northeastern United States, *Atmospheric Environment*, 1985, Vol. 19, Núm 11 1829-1985.

BILONICK, R. A., Monthly hydrogen ion deposition maps for the northeastern U.S. from july 1982 to September 1984, *Atmospheric Environment*, 1988, Vol. 22, Núm 9, 1909-1924.

BOGAERT, P., Comparison of kriging techniques in a space-time context, *Mathematical Geology*, 1996, Vol. 28, Núm. 1, 73-86.

BOGAERT, P. y CHRISTAKOS G., Sapatiotemporal analysis and processing of thermometric data over Belgium, *Journal of Geophysical Research*, 1997, Vol. 102, Núm. 22, 25,831-25,846.

BUXTON, B. E. y PATE A. D., Joint Temporal-spatial modeling of concentrations of hazardous pollutants in urban air, en R. Dimitrakopoulos, ed., *Geostatistics for the next century*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1994, 75-87.

CAMERON, K., Y HUNTER, P., Optimization of LTM networks using GTS: statistical approaches to spatial and temporal redundancy, Air Force Center for Environmental Excellence, Brooks AFB, TX, [en línea] Disponible para World Wide Web:

<http://www.afcee.brooks.af.mil/products/rpol/docs/GTSSOptPaper.pdf>, acceso libre, [consulta agosto 2006].

CHIRLIN, G. R. y DAGAN, G., Theoretical head variograms for steady flow in statistically homogeneous aquifers, *Water Resources Research*, 1980, Vol 16, Núm. 6, 1001-1015.

CHRISTAKOS, G., On the problem of permissible covariance and variogram models, *Water Resources Research*, 1984, Vol. 20, Núm 2, 251-265.

CHRISTAKOS, G., Spatiotemporal information systems in soil and environmental sciences, *Geoderma*, 1998, Vol. 85, 141-179.

CHRISTAKOS, G., *Modern Spatiotemporal Geostatistics*, Oxford, 2000, 288 pp.

CLARK, I., Basinger, K.L., y Harper W.V., MUCK,- A novel approach to cokriging. En B.E. Buxton, editor, Proceedings of the Conference on Geostatistical, Sensitivity, and Uncertainty Methods for Ground-water Flow and Radionuclide transport modeling, 473-493 Battelle Press. 1989.

COMEGNA, V. y BASILE, A., Temporal stability of spatial patterns of soil water storage in a cultivated Vesuvian soil, *Geoderma*, 1994, Vol. 62, 299-310.

CRESSIE, N., When are relative variograms useful in geostatistics?, *Mathematical Geology*, 1985, Vol. 17, 693-702.

CRESSIE, N. A., *Statistics for spatial data*, Wiley, New York, 1991, 900.

CRESSIE, N., y Huang, H., Classes of nonseparable, spatiotemporal stationary covariance functions, *J. Amer. Statist. Assoc.*, 1999, Vol. 94, 1330-1340.

DALY, C., NEILSON, R.P., PHILLIPS, D.L., A Statistical topographic model for mapping climatological precipitation over mountainous terrain, *Journal of Applied Meteorology*, 1994, Vol. 33, 140-158.

DAVIS, B., Uses and abuses of cross-validation in geostatistics, *Mathematical Geology*, Vol. 19, 1987, 241-248.

DE CESARE, MYERS, D.E., y POSA, D., Estimating and modeling space-time correlation structures, *Statistics & Probability Letters*, 2001, Vol. 51, 9-14.

DE CESARE, MYERS, D.E., y POSA D., FORTRAN Programs for space-time modeling, *Computers Geosciences*, 2002, Vol. 28, 205-212.

DE IACO, S., MYERS D.E., y POSA D., Space-time analysis using a general product-sum model, *Statistics & Probability Letters*, 2001, Vol. 52, 21-28.

DE IACO, S., MYERS, D.E., y POSA, D., Space-time variograms and a functional form for total air pollution measurements, *Computational Statistics & Data Analysis*, 2002, Vol. 41, 311-328.

DE IACO, S., MYERS, D.E., y POSA, D., Nonseparable space-time covariance models: some parametric families, *Mathematical Geology*, 2002, Vol. 34, 1, 23-42.

DE IACO, S., MYERS, D.E., y POSA, D., The linear coregionalization model and the product-sum space-time variogram, *Mathematical Geology*, 2003, Vol. 35, Núm. 1, 25-38.

DELHOMME, J.P., Kriging in the hydrosiences, *Advances in Water Resources*, 1978, Vol. 1, Núm. 5, 251-266.

DELHOMME, J.P., Spatial variability and uncertainty in groundwater flow parameters: A geostatistical approach, *Water Resource. Research*, 1979, Vol. 15, Núm 2, 269-280.

DESBARATS ,A.J., LOGAN, C.E., HINTON, M.,J. y SHARPE, D.R., On the kriging of water table elevations using collateral information from a Digital Elevation Model, *Journal of Hydrology*, 2002, Vol. 255, 25-38.

DEUTSCH y JOURNAL, GSLIB Geostatistical software library and User's guide, Applied geostatistics series, second edition, 1998, 369.

DIMITRAKOPOULOS, R. y LUO, X., Spatiotemporal modeling: covariances and ordinary kriging systems en R. Dimitrakopoulos, ed., *Geostatistics for the next century*: Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1994, 88-93.

DÍAZ, V. M., *Geoestadística Aplicada*, inédito, 2002, 122 pp.

DOYEN, P. M., Porosity from seismic data: A geostatistical approach, *Geophysics*, 1988, Vol. 53, Núm. 10, 1263-1275.

EGBERT, G. D., LETTENMAIER D. P., Stochastic modeling of the space-time structure of atmospheric chemical deposition, *Water Resources Research*, 1986, Vol. 22, Núm 2, 165-179.

GAMBOLATI, G. y VOLPI, G., A Conceptual deterministic analysis of the kriging technique in hidrology, *Water Resources Research*, 1979 a , Vol. 15, Núm. 3, 625- 629.

GAMBOLATI, G. y VOLPI G., Groundwater contour mapping in Venice by stochastic interpolators, Part 1, Teory, *Water Resources Research*, 1979 b ,Vol. 15, Núm. 2, 281-297.

GAMBOLATI, G. y GALEATI, G., Comment on analysis of non intrinsic spatial variability by residual kriging whit application to regional groundwater levels by S.P. neuman and E.A. Jacobson , *Mathematical Geology*, 1987, 19(3), 249-257.

GARDNER, B., y SULLIVAN, P., Spatial and temporal stream temperature prediction: Modeling nonstationary temporal covariance structures, *Water resources Research*, Vol. 40, 2004, W01102.

GEOFÍSICA DE EXPLORACIONES GUYSA, S.A. de C.V, Estudio de simulación hidrodinámica y diseño óptimo de la red de observación en los acuíferos de Aguascalientes y Querétaro, tomo III, Comisión Nacional del Agua, Gerencia de Aguas Subterráneas, Querétaro, GAS-008-PR-96, 1996.

- GOOVAERTS, P., Study of spatial relationships between two sets of variables using multivariate geostatistics, *Geoderma*, 1994, Vol. 62, 93-107.
- GOOVAERTS, Pierre, *Geostatistics Natural Resources Evaluation*, Oxford University Press, USA, 1997, 483 pp.
- GOOVAERTS, P., Ordinary cokriging revisited, *Mathematical Geology*, 1998, Vol. 30, Núm. 1, 21-42.
- GOOVAERTS, P., Geostatistics in soil science: State of the art and perspectives, *Water Resources Research*, 1999, Vol. 22, Núm. 2, 95-108.
- GOOVAERTS, P., Geostatistical approaches for incorporating elevation into the spatial interpolation of rainfall, *Journal of Hydrology*, 2000, Vol. 228, 113-129.
- GOULARD, M., y VOLTZ, M., Linear coregionalization model: tools for estimation and choice of cross-variogram matrix, *Mathematical Geology*, 1992, Vol. 24, Núm 3, 269-286.
- HEUVELINK, G.B.M. y WEBSTER, R., Modelling soil variation: Past, present, and future, *Geoderma*, 2001, Vol. 100, 269-301.
- HEVESI, J.A., ISTOK, J.D. y FLINT A.L., Precipitation estimation in mountainous terrain using multivariate geostatistics. Part I: Structural analysis, *Journal of Applied Meteorology*, 1992 a, Vol 31, 661-676.
- HEVESI, J.A., ISTOK, J.D. y FLINT, A.L., Precipitation estimation in mountainous terrain using multivariate geostatistics. Part II: Isohyetal maps, *Journal of Applied Meteorology*, 1992 b, Vol 31, 677-688.
- HOEKSEMA, R.J. y KITANIDIS, P.K., Analysis of the spatial structure of properties of selected aquifers, *Water Resources Research*, 1985, Vol. 21, Núm. 4, 563-572.

HOEKSEMA, R.J, CLAPP, R.B., THOMAS, A.L., HUNLEY, A.E., FARROW, D. y DEARSTONE, K.C., Cokriging model for estimation of water table elevation, *Water Resources Research*, 1989, Vol. 25, Núm. 3, 429-438.

HOOSBEEK, M.R., Incorporating scale into spatio-temporal variability: applications to soil quality and yield data, *Geoderma*, 1998, Vol. 85, 113-131.

IBÁÑEZ G.M.V., *Modelos estadísticos espacio-temporales en perimetría*, Tesis Doctoral, Departamento de Matemáticas, Escuela Superior de Tecnología y Ciencias Experimentales, 2003.

INSTITUTO MEXICANO DE TECNOLOGÍA DEL AGUA (IMTA), Evaluación del impacto regional en los niveles del agua del acuífero del valle de Querétaro debido a la puesta en marcha de la presa Extóraz, inédito, 2005.

ISSAKS, E., y SRIVASTAVA R.,M., *Applied Geostatistics*, 1989, Oxford University Press, USA, 561 pp.

JOURNEL, A.G. y HUIJBREGTS Ch.J., *Mining Geostatistics*, Academic Press, London, seventh printing, 1978, 600 pp.

JOURNEL A.G., Geostatistics: models and tools for the earth Sciences, *Mathematical Geology*, 1986, Vol. 18, Núm. 1, 119-140.

JOURNEL A.G., *Fundamentals of geostatistics in five lessons*, American Geophysical Union, 1989, 40 pp.

KITANIDIS, P. K., Parametric estimation of covariances of regionalized variables, *Water Resources Bulletin*, 1987, Vol. 23, Núm. 4, 557-567.

KITANIDIS, P. K., *Introduction to geostatistics application in hydrogeology*, Cambridge University Press, UK, 1997, 249 pp.

KNOTTERS, M. y BIERKENS, M.F.P., Physical basis of time series models for water table depths, *Water Resources Research*, 2000, Vol. 36, Núm. 1, 181-188.

KNOTTERS, M. y BIERKENS, M.F.P., Predicting water table depths in space and time using a regionalized time series model, *Geoderma*, 2001, Vol. 103, 51-77.

KYRIAKIDIS, P. C. y JOURNEL, A. G., Geostatistical space-time models: A review, *Mathematical Geology*, 1999, Vol 31, Núm. 6, 651-684.

KYRIAKIDIS, P. C. y JOURNEL, A.G., Stochastic modeling of atmospheric pollution: a spatial time-series framework. Part I: methodology, *Atmospheric Environment*, 2001 a, Vol. 35, 2331-2337.

KYRIAKIDIS, P. C. y JOURNEL A. G., Stochastic modeling of atmospheric pollution: a spatial time-series framework. Part II: application to monitoring monthly sulfate deposition over Europe, *Atmospheric Environment*, 2001 b, Vol. 35, 2339-2348.

LAROCQUE, M., MANGIN, A., RAZACK, M., BANTON, O., Contribution of correlation and spectral analyses to the regional study of a large karst aquifer (Charente, France), *Journal of Hydrology*, 1998, Vol. 205, 217-231.

LEE, J. Y., LEE, K., Use of hydrologic time series data for identification of recharge mechanism in a fractured bedrock aquifer system, *Journal of Hydrology*, 2000, Vol. 229, 190-201.

LONG, A.J. y DERICKSON, R.G., Linear systems analysis in a karst aquifer, *Journal of Hydrology*, 1999, Vol. 129, 206-217.

MATHERON, G, The intrinsic random function and their applications, *Advances in Applied Probability*, 1963, Vol. 5, 439-468.

MYERS, D. E., Matrix formulation of co-kriging, *Mathematical Geology*, 1982, Vol. 14, Núm. 3, 249-257.

- MYERS, D. E., JUORNEL A., Variograms whit zonal anisotropies and noninvertible kriging systems, *Mathematical Geology*, 1990, Vol. 22, 7, 779-785.
- NEUMAN, S. P., Statistical characterization of aquifer heterogeneities: An overview, Geological Society of America, Special Paper, 1982, Vol. 189, 81-102.
- NEUMAN, S.P. y JACOBSON, E.A., Analysis of nonintrinsic spatial variability by residual kriging whit application to regional groundwater levels, *Mathematical Geology*, 1984, Vol. 16, Núm. 5, 499-521.
- NOWAK, M.S., SINCLAIR, A.J., y RANDALL, A., Multiple indicator kriging of precious metals at Silbak Premier Mine, British Columbia, en R. Dimitrakopoulos, (ed.), *Geostatistics for the next century*: Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1994, 55-63.
- OR, D. y HANKS, R.J., Spatial and temporal soil water estimation considering soil variability and evapotranspiration uncertainty, *Water Resources Research*, 1992, Vol. 28, Núm. 3, 803-804.
- PAPRITZ, A., KÜNSCH, H., WEBSTER, R., On the pseudo cross-variogram, *Mathematical geology*, Vol. 25, 1993, 1015-1026.
- PAPRITZ, A., y FLÜHLER, H., Temporal change of spatial auto correlated soil properties: optimal estimation by cokriging, *Geoderma*, 1994, Vol. 62, 29-43.
- PHILIP, R., y KITANIDIS, P., Geostatistical estimation of hydraulic head gradients, *Ground Water*, Vol. 27, 1989, 855-865.
- PUCCI, A. A. y MURASHIGE, A. E., Applications of universal kriging to an aquifer study in New Jersey, *Ground Water*, 1987, Vol. 25, Núm. 6, 672-678.
- RODRÍGUEZ-ITURBE, I. y MEJÍA J. M., The design of rainfall networks in time and space, *Water Resouces Research*, 1974, Vol. 10, Núm. 4, 713-728.

- ROUHANI, S., Comparative study of ground water mapping techniques, *Journal of Ground Water*, Vol. 24, 1986, 207-216.
- ROUHANI, S. y HALL, T., Space-time kriging of groundwater data, en M. Armstrong, ed., *Geostatistics*, Vol. 2: Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1989, 639-650.
- ROUHANI, S. y MYERS D.E., Problems in space-time kriging of geohydrological data, *Mathematical Geology*, 1990, Vol. 22, Núm. 5, 611-623.
- ROUHANI, S. y WACKERNAGEL, H., Multivariate geostatistical approach to space-time data analysis, *Water Resources research*, 1990, Vol. 26, Núm. 4, 585-591.
- ROUHANI, S., EBRAHIMPOUR, M. R., YAQUB I. y GIANELLA E., Multivariate geostatistical trend detection and network evaluation of space-time acid deposition data I. Methodology, *Atmospheric Environment*, 1992, Vol. 14, 2603-2614.
- RUSSO, D. y JURY, W., A theoretical study of the estimation of the correlation scale in spatially variable fields 2. Nonstationary fields, *Water Resources Research*, 1987, Vol. 22, Núm. 7, 1269-1279.
- SAMPER, C. F. J. y CARRERA R. J., *Geoestadística, Aplicaciones a la Hidrogeología Subterránea*, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, 1990, 484 pp.
- SEO, DONG-JUN, KRAJEWSKI, K., Y BOWLES, D., Stochastic interpolation of rainfall data from rain gages and radar using cokriging 1. Design of experiments, *Water Resources Research*, Vol. 26, 1990, 469-477.
- SEO, DONG-JUN, KRAJEWSKI, W., AZIMI-ZONOOZ, A., BOWLES, D., Stochastic interpolation of rainfall data from rain gages and radar using cokriging, *Water resources Research*, Vol. 26, 1990, 915-924.

SHAFER, J.,M. y VARIJEN, M. D., Approximation of confidence limits on sample semivariogram from single realization of spatially correlated random fields, *Water Resources Research*, 1990, Vol. 26, Núm. 8, 1797-1802.

SIMUTA, C. R., Modelo en elemento finito para el flujo del acuífero del valle de Querétaro, Tesis de maestría, Universidad Nacional Autónoma de México, 2005.

SLOW, A. R. y GORELICK. S. M., Estimating monthly stream flow values by cokriging, *Mathematical Geology*, 1986, Vol. 18, Núm. 8, 785-809.

STEIN, M., A simple model for spatial-temporal processes, *Water Resources Research*, 1986, Vol. 22, Núm. 13, 2107-2110.

TONKIN, M.J. y LARSON, S.P., Kriging water levels with a regional linear and point logarithmic drift, *Ground Water*, 2002, Vol. 40, Núm. 2, 185-193.

TONKIN, M.J. y LARSON, S.P., *Documentation for KT3D_L: A program for kriging water level data with a linear-log drift*, [en línea]. Disponible para World Wide Web: [Http://www.sspa.com/software/linear-log%20kriger.html](http://www.sspa.com/software/linear-log%20kriger.html), acceso libre, [consulta 16 marzo 2005].

TOUGH, J., y LEYSHON, P., “SPHINX” A program to fit spherical and exponential models to experimental semivariograms, *Computer and Geosciences*, Vol. 11, 1985, 95-99.

TUNG, Y.K., Groundwater management by change constrained model, *J. Water Resources Planninug and Mgmt.*, ASCE, 1990, Vol. 112, Núm 1, 1-19.

VOLPI, G. y GAMBOLATI G., On the use of a main trend for the kriging technique in hydrology, *Advances in Water Resources*, 1978, Vol 1, 345-349.

VOLPI, G. y GAMBOLATI G., Groundwater contour mapping in Venice by stochastic interpolators 2. Results, *Water Resources Research*, 1979, Vol. 15, Núm. 2, 291-297.

WACKERNAGEL, Description of a computer program for analyzing multivariate spatially distributed data., *Computer and Geosciences*, Vol. 15 1989, 593-598.

WACKERNAGEL, H., Cokriging versus kriging in regionalized multivariate data analysis, *Geoderma*, 1994, Vol. 62, 83-92.

WACKERNAGEL, H., *Multivariate Geostatistics*, Springer, 1995, 257 pp.

WEBSTER, R. y OLIVER, M.A., Simple adequately to estimate variograms of soil properties, *Juornal of Soil Science*, 1992, Vol. 43, 177-192.

WOODBURY, A. D. y SUDICKY, E.A., The geostatistical characteristics of the borden aquifer, *Water Resources Research*, 1991, Vol. 27, Núm. 4, 533-546.

YEH, W. W-G, Review of parameter identification procedures in groundwater hydrology: The inverse problem, *Water Resources Research*, 1986, Vol. 22, Núm. 2, 95-108.