UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN INGENIERIA

FACULTAD DE INGENIERIA

UN ANALISIS COMPARATIVO DE DIVERSAS METODOLOGIAS PARA LA VALUACION DE OPCIONES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRA EN INGENIERIA

INGENIERIA DE SISTEMAS – INVESTIGACION DE OPERACIONES

P R E S E N T A :

MARIA TERESA VERONICA MARTINEZ PALACIOS

DIRECTOR DE TESIS:
DR. FRANCISCO VENEGAS MARTINEZ

2008

Agradecimientos

GRACIAS AL ARQUITECTO DEL UNIVERSO, POR SU AMOR Y BONDAD INFINITOS, POR LLENAR DE ESTRELLAS MI VIDA, POR ESTAR SIEMPRE CONMIGO. POR TODAS TUS BENDICIONES: GRACIAS PADRE.

MI PROFUNDO AGRADECIMIENTO, ADMIRCIÓN Y RESPETO A ESTA MÁXIMA CASA DE ESTUDIOS: UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO, a la cual debo mi formación profesional.

GRACIAS MAMÁ por amarme y apoyarme para lograr mis sueños. Te admiro, eres una gran mujer y una maestra de la vida.

GRACIAS PAPÁ por tu amor, paciencia y LUZ.

MAESTRO Lorenzo Vaquero: GRACIAS SIEMPRE por hacer mi vida diferente con la LUZ de sus enseñanzas, por guiarme en los estudios y en todo, por su ejemplo, apoyo y ayuda en todo. Maestro mucho de lo que soy es lo que usted me formo, con mi admiración y respeto GRACIAS AQUÍ, AHORA Y PARA SIEMPRE.

Ali MUCHAS GRACIAS por tu apoyo, oraciones y LUZ, en verdad han sido un faro para mi.

Maestra Maru, GRACIAS por la LUZ de todo lo que me has dado. Ya me habías enseñado a ser fuerte antes de ausentarte de México.

GRACIAS HERMOSA Soco, por tu alegría, amor y LUZ. Te amo bebe.

Vicky, GRACIAS por la LUZ de tu gran amor.

GRACIAS Katy por iluminar muchos momentos de mi vida: en los estudios, en la alegría, y en muchos otros, pero siempre en la amistad.

David y Vanesa, GRACIAS por sus sonrisas y paciencia.

A todos MIS HERMANOS, GRACIAS POR SUS BENDICIONES.

Dr. Francisco Vengas Martínez, MUCHAS MUCHAS MUCHAS GRACIAS doctor, por dirigirme esta tesis y compartir sus tan valiosos conocimientos.

Agradezco profundamente a todos y a cada uno de los sinodales: Dra. Idalia Flores De La Mota , Dra. Patricia Balderas Cañas, M. en I. Isabel Patricia Aguilar Juárez, Dr. Francisco Venegas Martínez y Dr. Juan Manuel Estrada Medina, por su profesionalismo en la revisión, correcciones y comentarios hechos a este rabajo de tesis. MUCHAS GRACIAS.

Agradezco a todos mis maestros de la UNAM, a los que me dieron clase y a los que de una u otra forma me compartieron de su sabiduría y/o me apoyaron para estudiar y lograr mis metas, MUCHAS, MUCHAS GRACIAS por influenciar mi vida tan positivamente.

Agradezco al CONACyT por la beca que me otorgo para realizar mis estudios de maestría.

Agradezco a la Sociedad Matemática Mexicana y a su presidente Dr. Fernando Brambila Paz, por el apoyo brindado en proporcionarme una PC para realizar el presente trabajo de tesis. Muchas gracias.

Gracias Ambrosio y Dr. Venegas por lo que me enseñaron de PC TEX para realizar mi trabajo de tesis.

La selectividad de la gran obra de muchos trabajadores para analizar el proceso del avance en el conocimiento fundamental en la UNAM (Posgrado de Ingeniería de Sistemas), hace que dicho proceso sea sumamente enriquecedor, debo reconocer la autenticidad de los juicios de quienes eligieron tan selectivamente la documentación formadora del principio profesional de mi maestría; los resultados de tal selección, son los párrafos que conforman el siguiente análisis comparativo de diversas metodologías para la valuación de opciones, en donde sigo la temática ejemplar del profesionalismo de los autores citados.

ÍNDICE

Página

Introducción

Dado el gran crecimiento de los mercados financieros de productos derivados en el mundo en las últimas décadas y recientemente en México, aunado a la utilidad de estos instrumentos para cubrirse contra riesgos de mercado o de crédito y además por la relevancia[1] que representa para nuestro país el contar con productos derivados, cotizados en una bolsa, para promover esquemas de estabilidad macro económica y facilitar el control de riesgos en intermediarios financieros y entidades económicas, es de mi particular interés desarrollar el presente trabajo de Tesis "Un análisis comparativo de diversas metodologías para la valuación de opciones". Trabajo que tiene como objetivo central establecer un análisis comparativo de las diversas metodologías para valuar opciones, las cuales se analizan de manera individual en el capítulo cuatro. Tal análisis pretende mostrar los supuestos sobre los que subyace cada metodología, presentar tanto los elementos teóricos comunes, como las diferencias no sólo contextuales teóricas predominantes de cada una de las metodologías analizadas, sino también dado el enfoque teórico particular y las herramientas multidisciplinarias de las cuales se hace uso para su modelación, establecer el grado de complejidad en la obtención de cada una de ellas y mostrar los datos de los que se dispone para su modelado y/o su solución.

Las empresas usan opciones y otros instrumentos derivados para reducir sus propios riesgos. Los bancos y otras instituciones financieras apelan a métodos teóricos, bien fundamentados para desarrollar y determinar el valor de nuevos productos o vender soluciones financieras a la medida a sus clientes. Pero también lo aprovechan para reducir los riesgos que surgen de su propia actuación en los mercados financieros. Es así como las finanzas en la actualidad son una de las áreas de mayor desarrollo en el mundo corporativo y en la banca moderna; esto aunado a la sofisticación de modernos productos financieros

[1] Importancia que ha sido destacada por organismos financieros internacionales como el *International Monetary Fund (IMF)* y la *International Finance Corporation (IFC)*, los cuales han recomendado el establecimiento de mercados de productos derivados listados para promover esquemas de estabilidad macroeconómica y facilitar el control de riesgos en intermediarios financieros y entidades económicas.

(derivados) hace imperante y absolutamente esencial que los profesionales de las finanzas entiendan no sólo cómo funcionan estos mercados, como pueden ser utilizados y qué determina sus precios, sino también, cómo se determinan esos precios teóricos y además requieren de desarrollar su capacidad de análisis para interpretar los cambios y la evolución de las variables que interactúan en cada uno de los modelos teóricos de los productos derivados, junto con el desarrollo teórico que a ellos conlleva.

Por lo antes dicho, otro de los objetivos de este trabajo de investigación es que el análisis desarrollado de cada una de las metodologías de valuación, que es motivado y sustentado en los capítulos uno a tres, sea una herramienta poderosa y muy valiosa para las instituciones financieras, empresas nacionales e internacionales y profesionales de las finanzas con visión del mundo globalizado en que vivimos; se espera que estas herramientas permitan una mejor comprensión y den lugar a un panorama más claro, no sólo del modelo de valuación y su solución, también de un entendimiento más claro de las hipótesis que subyacen en cada metodología y con ello se busca lograr una mejor comprensión de la interacción multidisciplinaria de los distintos campos del conocimiento que en cada metodología convergen, es decir, se se busca obtener una mejor comprensión de las aplicaciones de los campos disciplinarios económico, financiero, físico y matemático y su conjugación para modelar la realidad del mundo operativo internacional de las finanzas, de lo que a su vez se espera de la sensibilidad necesaria para comprender los cambios en las variables y su operación en cada metodología de valuación.

Dada la complejidad matemática del tema en cuestión, la presente tesis también tiene como objetivo, mostrar de la manera más sencilla posible, la teoría con que se establece el modelo de valuación de opciones, la cual abarca ecuaciones diferenciales estocásticas y los contextos teóricos: probabilístico, ecuaciones diferenciales parciales, ecuación de difusión de calor y de estrategias de portafolios replicantes y autofinanciables. Además, el logro de una claridad en la exposición del trabajo, hace accesible el tema a los estudiosos. El objetivo de simplificar la exposición exigió a su vez, durante el desarrollo de la tesis, ligar los conceptos en orden creciente de dificultad, teóricamente hablando, tratando de hacer constructivos los temas de mayor dificultad teórica y de las aplicaciones; logrando así que la aplicación de la teoría desarrollada en cada una de las metodologías fuera lo más natural posible; por lo que, esta tesis se pensó como una herramienta didáctica para el lector.

Uno de estos modelos matemáticos a los que apelan las instituciones bancarias y financieras y quizá el más importante hoy en día para la valuación de instrumentos derivados es el modelo desarrollado por Fischer Black, Mayron Scholes y Robert C. Merton, que por sus excepcionales aportaciones a lo que hoy se conoce como matemáticas financieras en tiempo continuo, los hizo merecedores a Merton y Scholes, en 1997, del Premio Nobel de Ciencias Económicas. Black que había fallecido dos años antes, también fue mencionado.

Black y Scholes (1970), haciendo uso de las técnicas de análisis de cálculo estocástico, también llamado Cálculo de Itô, obtuvieron el modelo perfecto para valuar una opción europea sobre una acción que no paga dividendos y cuyo precio del activo subyacente es modelado por el movimiento geométrico Browniano. Este modelo es una ecuación diferencial parcial de segundo orden, cuyas soluciones dependen de las condiciones íniciales y de frontera. Las soluciones corresponden a los posibles instrumentos derivados financieros disponibles en el mercado; dicho modelo fue publicado finalmente[2] en mayo de 1973.

El modelo toma el nombre de Black y Scholes porque fueron ellos los primeros en deducirlo, pero fueron influenciados grandemente por Merton, quien también trabajaba en la valuación de opciones. Merton publicó en 1973 un artículo en el que incluyó la fórmula de Black-Scholes generalizada a otras cuestiones, por ejemplo, usouna tasa de interés estocástica. La importancia práctica de la labor científica desarrollada por Black, Merton y Scholes se reflejó, en que el *Chicago Board Options Exchange* introdujo el negocio de opciones un mes antes de la publicación del modelo.

[2] Es importante destacar la controversia que tuvo el trabajo teórico de Black y Scholes. Quienes en 1970, Black y Scholes intentaron publicar su modelo durante dos ocasiones. Primero en el artículo *"A Theoretical Valuation Formula for Options, Warrants and Other Securities"* en el *Journal of Political Economy*, de la Universidad de Chicago y posteriormente en *Review of Economics and Statistics*, de Harvard. En ambas ocasiones el artículo fue rechazado por ser excesivamente especializado; luego en 1971 reescribieron el artículo con el nombre de *"Capital Market Equilibrium and the Pricing of Corporate Liabilities"*, pero nuevamente fue rechazado. Sin embargo, cesaron en su intento de publicación. Luego de revisar el primer trabajo y después de recibir los comentarios de los catedráticos Merton Miller y Eugene Fama, de la Universidad de Chicago, publicaron (1972), un artículo que probaó el modelo empíricamente en *The Journal of Finance.*

El modelo de Black-Scholes-Merton (B-S-M), ha tenido una enorme influencia en la forma en la que los operadores del mercado valoran y realizan coberturas con opciones, para protegerse contra los riesgos financieros o para especular con ellos en los mercados de derivados. Ese modelo ha sido una pieza fundamental en el crecimiento y éxito de la economía financiera y también ha sido reconocido como la herramienta matemática capaz de generar millones de dólares de rendimientos en pequeños periodos de tiempo; pero también, se le ha hecho responsable de pérdidas financieras astronómicas, en pequeños periodos de tiempo, también.

El contenido de esta tesis es desarrolló en cinco capítulos de la siguiente manera.

En el capítulo 1, de manera introductoria se presentan los instrumentos derivados las opciones financieras de forma generalizada. Estas se definen y clasifican. Luego se analiza su comercialización para el caso de México, en el contexto teórico general (internacional), así como quienes las operan y cuáles son sus propiedades, cuando estas son emitidas sobre acciones, los límites de sus precios, la condición de paridad entre las opciones de compra y de venta y los tipos de estrategias más comunes en los mercados financieros para los que las opciones son utilizadas, ya sea para controlar riesgos con el objeto de cobertura o para especular.

En el capítulo 2, se presentan las herramientas teóricas de probabilidad, los procesos estocásticos y el cálculo estocástico, necesarios que permiten sustentar la interacción tanto de variables como de procesos teóricos conceptuales y operacionales; así como, el desarrollo de los modelos y soluciones de las metodologías de valuación de opciones del capítulo cuatro. Este capítulo, es basto en cuanto a material teórico, no obstante, cada herramienta teórica se presenta de forma introductoria y/o analítica, según se requiera, pero de forma tal que permita la clara apreciación de su utilización en los modelos. El orden de enunciación de dichas herramientas se hizo en orden creciente de dificultad, desde la definición de espacio y medida de probabilidad hasta la construcción de la integral de Itô, por supuesto que con movimiento Browniano y algunas de sus propiedades como piedra angular que es de la modelización de mercados financieros en tiempo continuo, así como la derivación de la fórmula diferencial de Itô que son herramientas esenciales en las metodologías de evaluación del capítulo cuatro.

El capítulo 3, al igual que el capítulo 2, también conforma el marco teórico del presente trabajo y está dedicado al Problema de Cauchy, que es la ecuación de difusión de calor homogénea y no homogénea con valores iníciales. El caso homogéneo de dicha ecuación y su solución se tornan sumamente importantes para los capítulos cuatro y cinco, ya que como se verá, el modelo y la solución de la fórmula de valuación de opciones de Black y Scholes se modela y resuelve mediante esta ecuación diferencial parcial de segundo orden parabólica. Por tal motivo es que en este capítulo se da su interpretación física, se hace el planteamiento del problema de Cauchy para la ecuación de calor homogénea y no homogénea y se busca una solución clásica de dicha ecuación, tal solución se representa mediante el núcleo integral de Gauss, por último, se da la solución del problema de Cauchy homogéneo en el espacio n-dimensional.

El capítulo 4 presenta el análisis de las metodologías de valuación de opciones europeas con cuatro enfoques, a saber: valuación con enfoque probabilista, valuación con enfoque de ecuaciones diferenciales parciales, valuación con enfoque de ecuación de difusión de calor y el modelo de Black y Scholes con estrategias de portafolios replicantes y autofinanciables. En cada uno de los primeros tres apartados de este capítulo se obtiene la ecuación que es el precio teórico con que se evalúa la opción europea de compra y en el caso probabilista, la opción europea de venta, en las secciones dos y cuatro de este capítulo, se presentan dos formas alternativas de obtener la ecuación de Black y Scholes, cuya solución es el precio teórico de las opciones.

En el capítulo 5 se hace un análisis comparativo de las metodologías mencionadas y analizadas en el capítulo cuarto, se establecen tanto los supuestos y los elementos teóricos comunes a las cuatro metodologías, como las diferencias, no sólo contextuales teóricas predominantes de cada una de las metodologías analizadas; también, dado su enfoque de valuación y las herramientas multidisciplinarias de las cuales se hace uso para su modelación, se establece el grado en la complejidad en la obtención de cada una de ellas.

Adicionalmente, se hacen patentes las hipótesis de las que cada metodología hace uso para su desarrollo, así como el uso y aplicación de las mismas en los diferentes enfoques y los datos de los que se dispone para su modelo y solución.

Por último, el capítulo 6, corresponde a las conclusiones de este trabajo, en este, dados los análisis realizados en los capítulos cuatro y cinco, se recomienda el uso de los diferentes enfoques para los diferentes operadores de opciones, según su sencillez y su rapidez. Adicionalmente se enuncian las direcciones abiertas de investigación en torno del tema de la valuación de opciones.

Capítulo 1
Opciones financieras

1.1 Introducción

Un producto derivado es un instrumento financiero cuyo valor depende de otro activo, llamado el activo subyacente o simplemente el subyacente; algunos ejemplos de subyacentes comunes son: una acción, una divisa, un bono o una materia prima (trigo, petróleo, etc.). Entre los derivados más negociados en el mercado se encuentran los contratos *forwards*, los futuros y las opciones.

Un contrato *forward* es un acuerdo entre dos partes, una de las cuales se obliga a vender y la otra se obliga a comprar un activo en una fecha específica a un precio predeterminado. Si al vencimiento del contrato el precio del activo es mayor que el pactado, el comprador tendrá una ganancia (y el vendedor tendrá una pérdida) y si el precio es menor, el comprador tendrá una pérdida (y el vendedor tendrá una ganancia). Las cláusulas de los contratos se establecen de acuerdo a las necesidades específicas de las partes, esta situación es conocida como mercado *over-the-counter* o mercado sobre mostrador.

Los futuros son similares a los contratos *forward*, pero se negocian en una bolsa de derivados, la cual es un mercado organizado y estandarizado. El término estandarizado significa que el tamaño de los contratos y las fechas de vencimiento son fijas. A diferencia de los contratos *forward*, los futuros tienen liquidaciones diarias[1].

El concepto de opción que es de uso común y no exclusivo del mundo financiero, consiste en tener la posibilidad u oportunidad de realizar algo o aceptar algo si así conviene

[1] Liquidaciones Diarias: Sumas de dinero que deban solicitarse, recibirse y entregarse diariamente, según corresponda, y que resulten de la valuación diaria que realice la Cámara de Compensación por aportaciones iniciales mínimas, fondo de compensación y por variaciones en el precio de cierre de cada contrato abierto, con respecto al precio de cierre del día hábil inmediato anterior o, en su caso, con respecto al precio de concertación.

a los intereses propios del decisor. La característica principal de una opción es que si bien uno puede aprovechar la oportunidad, no se tiene la obligación de hacerlo; desde este punto de vista una opción es siempre algo favorable y debe tener algún valor.

La valuación de opciones se ha venido estudiando en esta división de estudios de posgrado en otros trabajos de tesis, como lo es la tesis llamada “Valuación de contratos forward, futuros y opciones” del M. en I. Marco Antonio Esquivel en 2002. A diferencia del trabajo realizado por este autor, el cual esta dirigido a la valuación de derivados financieros; este trabajo esta enfocado a realizar un análisis comparativo de diversas metodologías para valuar opciones; y no de la valuación en si misma, de dichos derivados financieros.

Pese a que en ambos trabajos se aborda el problema de la valuación de opciones, en este trabajo se hace de forma genérica, ya que es necesario situar el problema de la valuación como antecedente del estudio analítico, descriptivo y comparativo de los diferentes enfoques metodológicos. El M. en I. Esquivel, en su trabajo de tesis describió y mostró de manera analítica el ejercicio de la valuación; específicamente, la valuación de opciones la realizó por el método binomial, que en este trabajo en particular no aparece; y aunque ciertamente describe el modelo de de Black y Scholes con enfoque de ecuaciones diferenciales parciales, lo utilizo para describir la valuación de contratos futuros. Como puede apreciarse el trabajo de este autor, es profundo en el campo de la valuación de instrumentos derivados; por lo que se recomienda como complementario a esta tesis.

1.2 ¿Qué son las opciones financieras?

Una opción (financiera) de compra, o contrato de opción de compra, es un acuerdo entre dos partes que obliga (legalmente) a una de ellas a vender un activo financiero, mientras que a la contraparte le otorga el derecho, mas no la obligación, de comprar dicho activo a un precio preestablecido en una fecha futura. Así pues, se entiende por una opción de compra un contrato que garantiza a su comprador una remuneración no negativa en una fecha futura. En el peor de los casos, el comprador podría no obtener ganancia alguna y la única pérdida (limitada) sería el precio o prima del contrato de opción; en caso contrario la remuneración sería estrictamente positiva aunque no predeterminada. En el caso de una opción de venta, el comprador adquiere a cambio de una prima el derecho de vender. En las opciones se hace la distinción entre opciones europeas y opciones americanas. Las **opciones europeas** son aquellas que sólo pueden ser ejercidas en la fecha de vencimiento; mientras que las **opciones americanas** son aquellas que se pueden ejercer en cualquier momento hasta la fecha de expiración del contrato de opción.

1.3 Opciones financieras de compra y de venta

Como ya se mencionó antes, hay dos tipos de opciones: de compra y de venta. La **opción de compra** llamada *call* otorga a su propietario el derecho de comprar un activo en una fecha determinada, T, por un cierto precio, K. La **opción de venta** llamada *put* da al propietario el derecho de vender un activo en una fecha dada, T, a un precio determinado, K. El precio de compra o de venta, K, en la opción es llamado precio de ejercicio (también es llamado *strike*) y la fecha T es la fecha de expiración de la opción o fecha de vencimiento del contrato. El valor de la opción es usualmente llamado la prima de la opción.

Existen diversas metodologías y modelos teóricos que determinan el precio, c, de una opción de compra en función de los parámetros y del valor intrínseco de la misma. El **valor intrínseco** de la opción se define como el máximo entre cero y el pago que proporcionaría si se ejerciese, y el **valor extrínseco** se define como el valor temporal que tiene la opción y refleja la incertidumbre de si la opción será ejercida o no. Como en los contratos *forward* y futuros, al hecho de comprar una opción se le conoce como tomar la posición larga en la negociación y el hecho de vender o emitir la opción se le conoce como posición corta.

1.3.1 Posiciones en las opciones financieras

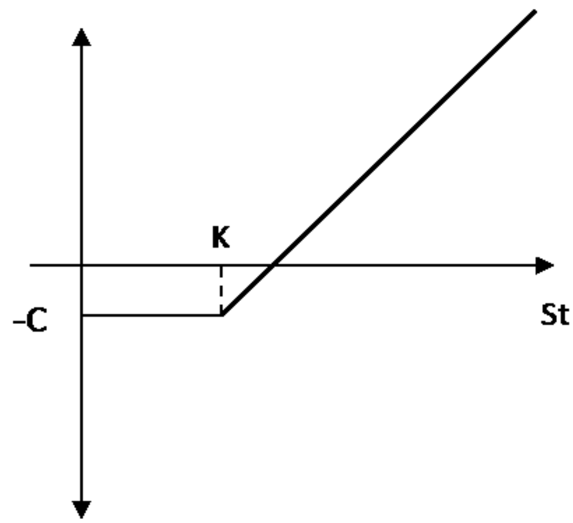
Existen cuatro tipos de posiciones en las opciones:

1) Posición larga en una opción de compra: derecho a comprar acciones a un precio fijo, en una fecha establecida con antelación.

2) Posición larga en una opción de venta: derecho a vender acciones a un precio fijo, en una fecha fija establecida con antelación.

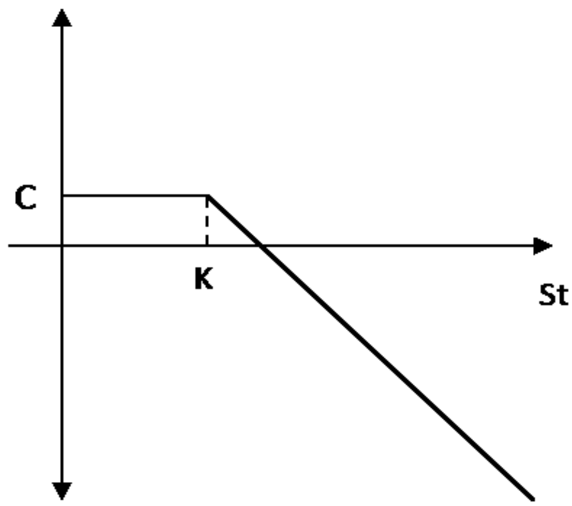
3) Posición corta en una opción de compra: obligación de entregar las acciones al precio establecido en caso de que la opción sea ejercida.

4) Posición corta en una opción de venta: obligación de recibir las acciones al precio establecido cuando se ejerza la opción.



Gráfica 1.1 Posición larga en una opción de compra.

La Gráfica 1.1 representa la posición larga de una opción de compra, es decir, es el pago que podría obtener el dueño de la opción; observe que el propietario de una opción *call* (la posición larga) ejercerá su derecho de adquirir la acción al precio de ejercicio K en el momento T, si el precio S_T de la acción es mayor que el precio de ejercicio K; después el podría vender en el mercado su acción al precio S_T y así hacer uso de su opción y obtener una ganancia de $S_T - K$. Pero si el precio S_T de la acción es menor que K, entonces el dueño del *call* no hará uso de su derecho ya que si él quisiera la acción, le resultaría más barato conseguirla en el mercado, obteniendo así una ganancia nula. El pago de la contraparte negociadora del contrato o posición corta de la opción, está representada en la Gráfica 1.2.



Gráfica 1.2 Posición corta en una opción de compra.

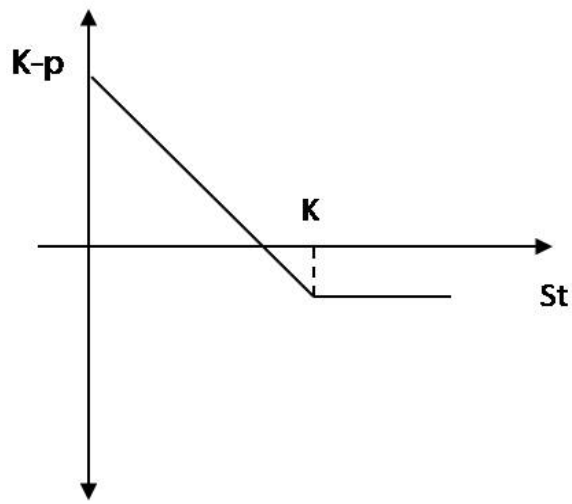
El pago al vencimiento de la opción *call* europea para la posición larga está dado por

$$\max\{S_T - K, 0\},$$

y para la posición corta está dado por

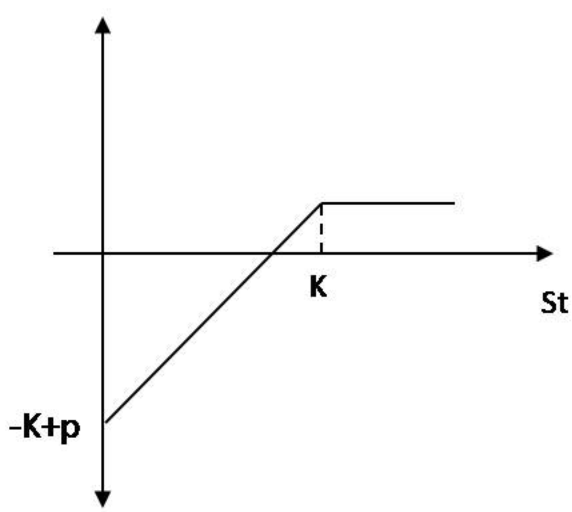
$$-\max\{S_T - K, 0\} = \min\{K - S_T, 0\}.$$

Análogamente, el dueño de una opción *put* tomará la posición larga, es decir aprovechará el derecho de vender la acción al precio K cuando el precio S_T sea menor que K, por lo que él obtendrá por ejercer la opción, la ganancia $K - S_T$. Pero si el precio S_T en la fecha T es mayor que K, entonces el dueño del *put* seguramente no ejercerá su derecho ya que le conviene más vender su acción en el mercado. La Gráfica 1.3 ilusta la utilidad de la posición larga de una opción de venta.



Gráfica 1.3 Posición larga en una opción de venta.

El pago que recibirá la contraparte, es decir la posición corta de la opción de venta, se ilustra en la Gráfica 1.4.



Gráfica 1.4 Posición corta en una opción de venta.

Por lo tanto, el pago de una opción *put* europea para la posición larga está dado por

$$\max\{K - S_T, 0\},$$

y para la posición corta está dado por

$$-\max\{K - S_t, 0\} = \min\{S_T - K, 0\}.$$

1.4 Tipos y mercados de opciones financieras

Las opciones se emiten sobre diversos activos subyacentes ya sea como *calls* o *puts*. En el mercado se encuentran: opciones sobre acciones, opciones sobre índices bursátiles, opciones sobre divisas, opciones sobre contratos de futuros, opciones sobre tasas de interés y opciones sobre commodities (físicos), entre otras. En una bolsa de opciones sobre acciones, el número de unidades del activo subyacente que ampara un contrato de opción, es decir, el tamaño del contrato, es de 100 unidades.

Las opciones pueden ser negociadas en dos tipos diferentes de mercados, los mercados *over-the-counter* (*OTC*) y los mercados listados. En los mercados *OTC* las operaciones no se realizan en un mismo recinto físico. El ejemplo más concreto es el Mercado Extrabursatil (MAE) en el que los agentes (*broker dealers*) se conectan a un sistema por internet en el que cada uno ingresa sus requerimientos de activos financieros y al precio a que los quiere comprar o vender, cuando el sistema detecta la coincidencia se cierra la operación. Una de las ventajas de las opciones intercambiadas en el mercado *over-the-counter* es que pueden ser diseñadas para satisfacer las necesidades concretas de una empresa o de un gestor de fondos y la mayor desventaja es que el emisor de la opción puede no responder a su compromiso por lo que el comprador esta sujeto a cierto riesgo de crédito[2]. Los mercados organizados son aquellos que están regulados y en donde los contratos son estandarizados en términos de su fecha de vencimiento, precio de ejercicio y el tipo de opción: *call* o *put*. Por ejemplo, el *Chicago Board Options Exchange* (*CBOE*) de el *Chicago Board of Trade*

[2] Riesgo Crédito: se refiere al incumplimiento de la obligación adquirida con el comprador en un contrato de opción.

comenzó transacciones con *calls* en 1973 y cuatro años después introdujo también los *puts*. El *CBOE* es la bolsa de futuros más grande del mundo, pero lo que lo hace realmente famoso es que fue el primer mercado financiero organizado que introdujo las operaciones de opciones poco antes de que la fórmula de Black-Scholes fuera publicada. Otro mercado de reciente creación es el Mercado de Opciones Financieras en México (el MexDer) que fue inaugurado en marzo de 2004.

Los mercados regulados en el mundo tienen especificaciones generales mínimas que rigen la emisión de los contratos de opción sobre acciones, tales como; fecha de vencimiento, precio de ejercicio, terminología, escisiones de acciones y dividendos y límites de posición y de ejercicio. Y especificaciones generales de cotización, negociación, garantías, compensación, regulación y fiscalización que varían dependiendo de las políticas, calendarios y horarios de servicio de las instituciones financieras de operación de productos derivados y de las instituciones reguladoras de cada país y de cada estado.

1.4.1 Comercialización de opciones en México en el MexDer

En un marco general se describen aquí las especificaciones de los contratos de opción sobre acciones (liquidación en especie) en el MexDer en México, en un estilo de contrato de opción americano (en todo momento MexDer mantiene la posibilidad de cotizar contratos de opción de compra *call* y de venta *put*).

1) **Definición del activo subyacente.** Constituirán activo subyacente las siguientes acciones:

   a) Acciones representativas del capital social de: Grupo Carso S. A. de C. V., serie A1, (GCarso A1), América Móvil, S. A. de C. V., serie L, (AMX L), Grupo Modelo, S. A. de C. V., serie C, (GModelo C), Wal-Mart de México, S. A. de C. V., serie V, (Walmex V) y Teléfonos de México, S. A. de C. V., serie L, (Telmex L).

   b) Unidades vinculadas de acciones representativas del capital social de: Fomento Económico Mexicano S. A. de C. V., serie UBD, (Femsa UBD).

c) Certificados de participación ordinarios emitidos sobre acciones representativas del capital social de: Cementos Mexicanos S. A. de C. V., serie CPO, (Cemex CPO) y Grupo Televisa, S. A., serie CPO, (Televisa CPO).

d) Certificados de participación ordinarios que representan una parte de las acciones fideicomitidas y efectivo que pretenden reproducir el rendimiento del IPC, en adelante Naftrac 02.

2) **Vencimiento del contrato.** El último día en que se negocian opciones es el tercer viernes del mes de vencimiento o el día hábil anterior si dicho viernes es inhábil. El horario de negociación será en días hábiles de las 7:30 horas a las 15:00 horas tiempo de la Ciudad de México; sin perjuicio de la facultad de MexDer para establecer algún horario distinto, mismo que será publicado en el Boletín de indicadores de mercado de productos derivados (en adelante será referido, sólo como Boletín), con tres días hábiles de anticipación a su entrada en vigor.

3) **Precios de ejercicio.** Para cada vencimiento MexDer listará distintas Series de la siguiente forma:

a) Un precio de ejercicio equivalente al último precio de cierre de la acción el día hábil inmediato anterior, siendo este el precio más cercano conforme a la tabla de variación en precio de ejercicio que se muestra más adelante.

b) Adicionalmente se emitirán al menos dos precios de ejercicio superiores y otros dos inferiores al anteriormente descrito.

Se podrán listar nuevas series en cada vencimiento durante la vida de los contratos de opción, cuando el precio de cierre de la acción al final de una sesión haya sido superior al segundo precio de ejercicio más alto, o inferior al segundo precio de ejercicio más bajo. Cuando las condiciones de mercado lo requieran, MexDer podrá listar una mayor cantidad de precios de ejercicio para proveer los contratos adecuados en esas condiciones. Los precios de ejercicio distarán uno del otro dependiendo del precio de la acción que sea el activo subyacente y siempre serán múltiplos del intervalo especificado en la siguiente tabla:

Precio inf. Subyacente	Precio sup. Subyacente	Intervalo en Precio de Ejercicio
\$0	\$ 5	\$.20
\$5.5	\$ 10	\$.50
\$11	\$ 20	\$1
\$22	\$ 50	\$2
\$55	\$ 200	\$5
\$210	en adelante	\$20

4) **Terminología: Series.** Una serie de opciones consiste en todas las opciones de una misma clase[3] con igual fecha de vencimiento y mismo precio de ejercicio. De manera permanente en términos de su reglamento interior, MexDer tiene y tendrá disponibles listados contratos de opción sobre acciones, tanto de compra (*call*) como de venta (*put*), para su negociación, en los precios de ejercicio especificados y sobre una base trimestral con fechas de vencimiento en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre.

   Las opciones de compra reciben el nombre de en dinero si $S_T > K$, a dinero si $S_T = K$ y fuera del dinero si $S_T < K$; análogamente, las opciones de venta reciben el nombre de en dinero si $S_T < K$, a dinero si $S_T = K$ y fuera del dinero si $S_T > K$. Evidentemente una opción, sólo será ejercida si esta en dinero. Un contrato de opción de compra, tendrá valor intrínseco cuando el precio de ejercicio sea inferior al precio de cierre de la acción que de a conocer la BMV, en la fecha de vencimiento; y el contrato de opción de venta, tendrá valor intrínseco cuando el precio de ejercicio sea superior. En los casos contrarios el valor intrínseco en la fecha de vencimiento será de cero.

5) **Ajustes por ejercicios de derechos.**

   a) En el caso de que la emisora del activo subyacente de un contrato de opción accionario decrete dividendos[4] en efectivo, la cámara de compensación no realizará ningún ajuste en los contratos de opción.

[3] Clase: todos los contratos de futuros y opciones que tienen como referencia a un mismo activo subyacente.

[4] Dividendo: pago de una empresa a sus propietarios por concepto de distribución de utilidades generadas.

b) En el caso de que la emisora del activo subyacente de un contrato de opción decrete algún derecho patrimonial diferente al señalado en el inciso anterior o se produzcan en la emisora del activo subyacente cualquiera de las siguientes situaciones: ampliaciones de capital, transformación de las acciones representativas del capital a razón de varias acciones por cada una existente, consolidación de las acciones representativas del capital a razón de una acción por varias existentes y otras que puedan dar lugar a la necesidad de realizar ajustes, MexDer conjuntamente con la Cámara de Compensación, harán saber a los socios liquidadores, operadores y clientes a través de el Boletín:

b.1) Los cambios en el precio de ejercicio, el tamaño del contrato o en ambos.

b.2) La forma de realizar los ajustes en el activo subyacente a que da origen el derecho, por parte de la bolsa en la que esté listado el activo subyacente correspondiente;

b.3) La forma en que se realizarán las modificaciones pertinentes a los precios de liquidación[5] de las series correspondientes del día hábil inmediato anterior a la entrada en vigor del ajuste; en su caso, a los precios de referencia para efectos de liquidación, cuando el ajuste esté dando origen a más de un activo subyacente y contratos de opción correspondientes; las posiciones a las que tendría derecho la posición abierta previa a la entrada en vigor del ajuste; y, los nuevos requerimientos de aportaciones iniciales mínimas[6].

b.4) La forma de realizar los ajustes en los contratos en proceso de liquidación del ejercicio/asignación.

c) Los socios liquidadores tendrán que ajustar las posiciones abiertas de sus cuentas de clientes, de operadores, de formadores de mercado, de grupo y las propias conforme

[5] Precio de liquidación al vencimiento: precio de referencia que da a conocer MexDer y con base al cual Asigna realiza la liquidación de los contratos de futuros y/o contratos de opciones en la fecha de liquidación. El precio de liquidación al vencimiento se determina por unidad de activo subyacente.

Precio de liquidación diaria o precio de cierre: precio de referencia por unidad de activo subyacente que MexDer da a conocer a la cámara de compensación, para efectos del cálculo de aportaciones y la liquidación diaria de los contratos de futuros y/o contratos de opciones.

[6] Aportación inicial mínima: efectivo, valores o cualquier otro bien aprobado por las autoridades financieras, que deberán entregar los socios liquidadores a la cámara de compensación por cada contrato abierto.

al reporte de posiciones que la cámara de compensación les entregue, con motivo del ajuste de derechos.

6) **Posiciones cortas, largas y de cobertura.**

a) Posiciones límite en posiciones cortas o largas. Las posiciones límite establecidas para el contrato de opción sobre acciones, es el número máximo de contratos abiertos de una misma clase que podrá tener un cliente. Las posiciones límite serán establecidas conjuntamente por MexDer y la Cámara de Compensación y serán dadas a conocer a través de el Boletín.

b) Posiciones límite para las posiciones de cobertura. Los clientes podrán abrir posiciones largas y posiciones cortas que excedan las posiciones límite establecidas en el inciso anterior, con el único fin de crear una posición de cobertura de riesgo.

7) **Cotizaciones.** Las distintas series de los contratos de opción sobre acciones serán identificadas con un símbolo o clave de pizarra de hasta ocho posiciones, que MexDer publicará en el Boletín; las dos primeras posiciones son letras características del nombre del activo subyacente, a las que se agregarán hasta cinco dígitos para especificar el precio de ejercicio (tres enteros y dos decimales) y por último un dígito más que especifica el tipo de contrato de opción y el mes de vencimiento. Por ejemplo TX2400M que corresponde a una opción put con vencimiento en enero, en donde el último dígito se elige de acuerdo a la siguiente tabla:

Vencimiento	Call	Put
Enero	A	M
Febrero	B	N
Marzo	C	O
Abril	D	P
Mayo	E	Q
Junio	F	R
Julio	G	S
Agosto	H	T
Septiembre	I	U
Octubre	J	V
Noviembre	K	W
Diciembre	L	X

8) **Negociación de opciones.**

a) Medios de Negociación. La celebración de contratos de opción sobre acciones se realizará mediante procedimientos electrónicos a través del sistema electrónico de negociación de MexDer, *S/MART* (*System for Markets Automatic Real Time*) de acuerdo a las normas y procedimientos establecidos en su reglamento interior, sin perjuicio de la facultad de MexDer para establecer alguna mecánica distinta. Las principales características del *S/MART* son: negociación automática por medio de terminales inteligentes conectados con los servidores centrales y existencia de mecanismos de reconexión en caso de fallas de las líneas de comunicación, permitiendo vías alternas de comunicación.

b) Unidad de Cotización. La unidad de cotización estará expresada en pesos y centavos de peso por unidad de activo subyacente.

c) Puja[7]. La presentación de posturas para la celebración de contratos de opción se reflejará en fluctuaciones mínimas de la prima de 0.01 pesos.

d) Los participantes en MexDer pueden ser operadores o socios liquidadores. Los operadores son personas morales facultadas para operar contratos en el sistema electrónico de negociación de MexDer, en calidad de comisionistas de uno o más socios liquidadores. Los socios liquidadores son fideicomisos[8] que participan como accionistas de MexDer y aportan el patrimonio de Asigna; teniendo como finalidad liquidar y, en su caso, celebrar por cuenta de clientes, contratos de futuros y opciones operados en MexDer. Y los formadores de mercado, son operadores que han obtenido la aprobación por parte de MexDer, para actuar con tal carácter y que deberán mantener en forma permanente y por cuenta propia, cotizaciones de compra o venta de contratos de futuros y opciones, respecto de la clase en que se encuentran registrados, con el fin de promover su negociación.

[7] Puja: variación mínima permitida en el movimiento del precio de una serie de contratos de futuros o contratos de opciones.

[8] Fideicomiso: figura jurídica que ampara la entrega de determinados bienes por parte de una persona física o moral (el fideicomitente) a una institución que garantice su adecuada administración y conservación (el fiduciario) y cuyos beneficios serán recibidos por la persona que se designe (el fideicomisario) en las condiciones y términos establecidos en el contrato de fideicomiso.

9) **Comisiones.**

Contratos de Opciones	Tipo de Operador	Tarifa en pesos
Acciones: América Móvil	Operador Formador	\$.50 \$.35
Acciones: NAFTRAC 02	Operador Formador	\$.50 \$.35

10) **Garantías.** Estas operaciones siempre se realizan mediante intermediarios financieros que requieren de un depósito o garantía[9] de mantenimiento. Esta garantía no es fija, varía según el subyacente de modo que se mantenga el margen que garantice un buen fin de la operación y se conserven las cantidades necesarias para pagar las diferencias al ganador. Asigna es el que garantiza el pago por lo que pide cierta aportación en efectivo, valores o cualquier otro bien que aprueben la autoridades financieras como depósito de garantía. En las opciones sólo se requiere del depósito de garantía del vendedor, el que deposita un margen inicial y tiene que ir reponiendo los valores cada vez que varíe el precio del subyacente. Y el comprador sólo paga el precio o la prima de la opción.

11) **Cámara de compensación de opciones.** La cámara de compensación garantiza que el emisor de la opción cumpla con sus obligaciones bajo las condiciones del contrato de opción. ASIGNA es un fideicomiso de administración y pago que se constituyó en 1998 en BBVA Bancomer y es la cámara de compensación y liquidación del mercado mexicano de derivados (MexDer), su función central es ser la contraparte y por tanto garante de todas las obligaciones financieras que se derivan de la operación de los contratos negociados, para ello deberá observar la normatividad emitida por las autoridades reguladoras. Sus fideicomitentes[10] son los principales grupos financieros del país: Banamex Citigroup, BBVA Bancomer, Scotiabank Inverlat, Santander-Serfin, así como el Instituto para el depósito de valores S.D. Indeval.

12) **Regulación.** El mercado de opciones esta regulado por el reglamento interior del MexDer y su manual operativo, por el reglamento interior de ASIGNA y su ma-

[9] Garantía: valor que protege contra pérdidas a una persona o entidad legal que ha dado un préstamo, en caso de falta de pago de la obligación contraída.

[10] Fideicomitente: persona que ordena la creación de un fideicomiso.

nual operativo y por las autoridades financieras[11]: Secretaría de Hacienda y Crédito Público (SHCP), Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNBV) y Banco de México, así como por las reglas del propio Mercado Mexicano de Derivados.

13) **Fiscalización.** Para acciones nacionales y extranjeras liquidables en especie: en personas físicas y morales residentes no hay retención (Art 109 frac XXVI); para acciones nacionales y extranjeras en personas físicas residentes hay retención del 25% sobre ganancia neta del mes, en operaciones con la misma institución en personas morales no hay retención.

1.4.2 Operadores de opciones

Uno de los motivos por los que los mercados de derivados financieros han tenido tanto éxito, es por que atraen operadores diversos y mantienen un alto grado de liquidez, hay tres categorías de operadores:

1) **Los coberturistas.** Son los que hacen operaciones de cobertura con futuros, contratos a plazo y de opciones para reducir el riesgo que afrontan ante movimientos potenciales en el mercado variable. Los contratos de opciones, proveen una manera de proteger a los inversores contra los futuros movimientos de precios adversos y permiten un beneficio si hay movimientos favorables de precio.

2) **Los especuladores.** Son los que utilizan los instrumentos financieros para apostar a cerca de la dirección futura del mercado, bien de que el precio irá a la alza o irá a la baja. Las opciones financieras aportan para los especuladores, una vía para obtener cierto apalancamiento[12]; en el contraste sus pérdidas estan limitadas al pago de la prima de las opciones.

[11] Autoridades financieras: en México, como en cualquier país que tenga un orden constitucional vigente, la estructura y funcionamiento del sistema financiero son determinados en primera instancia por la legislación que emana del Congreso de la Unión. Las principales dependencias gubernamentales que regulan el sistema financiero son: Secretaría de Hacienda y Crédito Público, Comisión Nacional Bancaria y de Valores, Comisión Nacional de Seguros y Fianzas, Comisión Nacional de Ahorro para el Retiro y el Banco de México.

[12] Apalancamiento financiero: operación con productos derivados a través de la cual el inversionista busca beneficiarse íntegramente de la totalidad de la apreciación (en los *calls*) o de la depreciación (en los *puts*) de los títulos de referencia con una inversión inferior al precio de mercado de dichos títulos.

3) **Los arbitrajistas.** Son los que toman posiciones compensadoras en dos o más instrumentos asegurándose un beneficio, al aprovecharse de las posibles discrepancias de precios entre dos mercados distintos. La existencia de operadores especializados en arbitraje[13], implica que en la práctica se observen oportunidades muy pequeñas de arbitraje en los precios ofrecidos en la mayoría de los mercados bursátiles.

1.5 Propiedades de las opciones sobre acciones

Los factores que determinan el precio de una opción son:

1. El precio de los acciones (activo subyacente) S_t en el tiempo t;
2. el precio de ejercicio K;
3. el tiempo hasta el vencimiento, T;
4. la volatilidad del precio de las acciones, σ;
5. el tipo de interés libre de riesgo r, y;
6. los dividendos esperados durante la vida de la opción.

Las aseveraciones respecto de cada uno de los parámetros que determinan el precio de una opción son hechos bajo el supesto de que los demás parámetros permanecen constantes.

1.5.1 Precio de las acciones y precio de ejercicio

Si una opción de compra se ejerce en el futuro, el pago obtenido será la cantidad a la que el precio de la acción excede al precio de ejercicio, por lo que su valor es mayor si el precio de las acciones aumenta y menor si es el precio de ejercicio el que aumenta; pero si se trata de una opción de venta, el pago obtenido es la cantidad en la que el precio de ejerccio excede al precio de las acciones, por lo que tendrá mayor valor si el precio de ejercico aumenta y y valdrá menos si es el precio de la acción el que aumenta.

[13] Arbitraje: en el mercado de opciones y otros productos derivados, el arbitraje implica una estrategia que combina la compra de un contrato que se considera subyacente y la venta de otro considerado sobrevaluado, ambos vinculados a dos activos subyacentes relacionados; esperando obtener un beneficio libre de riesgo sin que medie una inversión.

1.5.2 Tiempo hasta el vencimiento

La fecha hasta el vencimiento en las opciones americanas, implica que tengan un valor mayor. Suponga por ejemplo, dos opciones las cuales difieren solo en su vencimiento, el dueño de la opción de mayor vencimiento tiene todas las oportunidades de ejercicio abiertas, al propietario de la opción de menor vencimiento y más; por lo que la opción de mayor vencimiento vale almenos tanto como la opción de menor vencimiento. Las opciones europeas frecuentemente valen más, cuando el tiempo al vencimiento crece, pero no es una generalidad; piense en dos opciones europeas sobre acciones con vencimiento una a un mes y otra a dos meses y suponga que se espera un dividendo grande dentro de seis semanas, el dividendo hará que el precio de las acciones baje, por lo que la opción con menor vencimiento tendrá mayor valor.

1.5.3 Volatilidad

La volatilidad es la desviación estándar del cambio en el valor de una acción con un horizonte temporal específico; se usa con frecuencia para cuantificar el riesgo de los movimientos futuros del precio de la acción a lo largo de dicho período temporal, cuando la volatilidad aumenta, la posibilidad de que las acciones vayan muy bien o muy mal tambien aumenta. El propietario de una opción de compra se beneficia de los incrementos de precio pero tiene limitado el riesgo a la baja en el caso de una disminución del precio; analogamente el dueño de una opción de venta se beneficia de las disminuciones de precio pero tiene limitado el riesgo a la baja si se produce una subida en el precio. El valor de ambas opciones de compra y de venta aumenta cuando la volatilidad aumenta. La volatilidad es vista con frecuencia como negativa en tanto que representa incertidumbre y riesgo.

1.5.4 Tasa de interés libre de riesgo

El cambio o la sensibilidad del precio de una opción respecto de la tasa de interés libre de riesgo, se mide a partir del parámetro ρ que es la derivada parcial respecto del tipo de interés r de la formula para valuar una opción, que se da en el capítulo cuarto de este trabajo de tesis; dicha derivada para opciones de compra esta dada por

$$\rho_c = \frac{\partial c}{\partial r} = Ke^{-r(T-t)} (T-t) \Phi (d_2) \rangle 0,$$

y para opciones de venta

$$\rho_p = \frac{\partial p}{\partial r} = Ke^{-r(T-t)} (T-t) (-\Phi (-d_2)) \langle 0.$$

Este parámetro adopta un signo positivo para las opciones de compra y uno negativo para las opciones de venta. Por lo tanto subidas de tasas de interés afectan negativamente el valor de las posiciones largas y afectan positivamente las posiciones cortas.

1.5.5 Dividendos

Los dividendos tienen el efecto de reducir el precio de las acciones en la fecha siguiente al pago de dividendos; por lo que el precio de las opciones de compra disminuye si hay dividendos anticipados y el valor de las opciones de venta aumenta si hay dividendos anticipados.

1.6 Límites superior e inferior para los precios de las opciones

Dado que en general una opción de compra europea da su propietario el derecho de comprar una acción a un cierto precio K; una opción nunca podrá valer más que la acción sobre la que es emitida ya que si asi sucediera, alguien podría aprovechar esta oportunidad de arbitraje comprando la acción y vendiendo la opción de compra. Por otra parte lo peor que podría suceder es que la opción venza sin ser ejercida, en cuyo caso su valor es menor o igual a su valor intrínseco, es decir:

$$\max \left\{ S_t - Ke^{-rT}, 0 \right\} \leq c \leq S_t$$

En el caso de las opciones de venta, que dan a su propietario el derecho a vender una acción al precio establecido K; la opción nunca podrá valer más que K, ya qe si fuera posible, habría oportunidad de arbitraje sin riesgo, emitiendo una opción e invirtiendo los ingresos de la venta a la tasa de interés libre de riesgo. Nuevamente, lo peor que puede suceder es que la opción venza sin ser ejercida, en cuyo caso su precio debe de ser positivo, es decir:

$$\max\left\{Ke^{-rT} - S_t, 0\right\} \leq p \leq Ke^{-rT}.$$

El límite superior también aplica si se trata de una opción americana, tanto de compra como de venta.

1.7 Paridad Put-Call

El siguiente argumento muestra como las opciones de venta (*put*) y de compra (*call*), pueden ser correlacionadas. Suponga que se tiene una posición larga de una acción, una posición larga de una opción de venta (*put*) y una posición corta de una opción de compra (*call*), ambas opciones tienen el mismo precio de ejercicio K y la misma fecha T de expiración del contrato; se denota por Π_t el valor del portafolio, en donde P y C son los valores del *put* y del *call* respectivamente, esto es,

$$\Pi_t = S_t + P - C,$$

el pago de este portafolio en la fecha de expiración del contrato es:

$$S_t + \max\{K - S_t, 0\} - \max\{S_t - K, 0\} = \begin{cases} S_t + (K - S_t) - 0 = K & \text{si} \quad S_t \leq K \\ S_t + 0 - (S_t - K) = K & \text{si} \quad S_t \geq K. \end{cases}$$

Observe, que si S_t es mayor o menor que K en la fecha de expiración, el pago es siempre el mismo, entonces el pago por el portafolio que garantiza K, es el valor final del portafolio pero descontado, es decir, $Ke^{-r(T-t)}$.Por lo que se concluye que:

$$S_t + P - C = Ke^{-r(T-t)},$$

esta relación entre el activo subyacente y sus opciones es llamada paridad *Put-Call*.

1.8 Tipos de estrategias para especular y controlar riesgos usando opciones

Los derivados financieros son instrumentos que pueden ser utilizados para cubrirse, especular y controlar riesgos, para ello se requiere de generar estrategias, lo que es una de las grandes virtudes de las opciones financieras ya que es posible crear una amplia gama de estrategias que las involucren, y así generar sustanciosos beneficios, reducir riesgos y limitar pérdidas. Entre otras cosas, las opciones son usadas por que: pueden ofrecer un modelo de retorno que podría no ser obtenido con acciones, al estar estandarizadas pueden operar con costos de transacciones mas bajos que las acciones, permiten una forma de cobertura contra cambios no anticipados en la volatilidad de la acción, es una forma de financiamiento y es una forma de especulación.

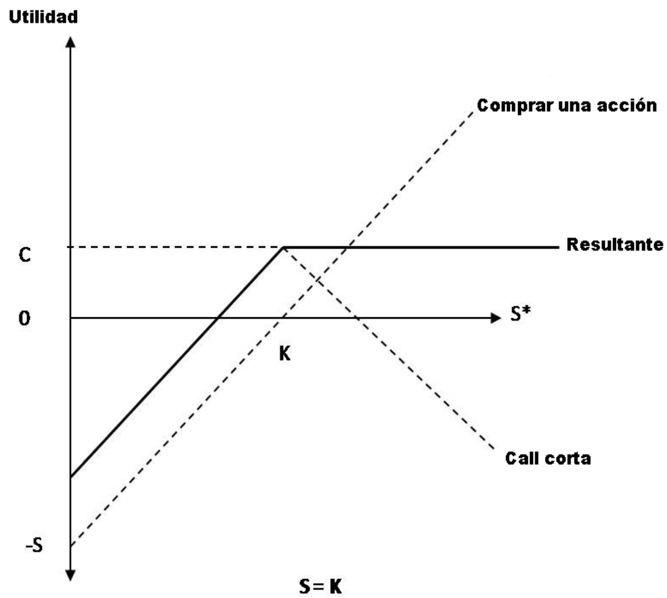
Para mostrar las diversas estrategias existentes, se supondrá para efectos de simplificar, que el activo subyacente es una acción, que las opciones utilizadas en las estrategias son europeas y se ignorará el valor del dinero en el tiempo.

1.8.1 Estrategias de posición descubierta

Son las estretegias de mayor riesgo ya que no están cubiertas con otro instrumento, estas son las posiciones corta y larga para acciones y opciones europeas de venta y compra.

1.8.2 Opciones sintéticas

Estas estrategias se forman mediante una estrategia simple más la posición del activo subyacente, dando como resultado otra estrategia simple distinta. Por ejemplo, la cobertura que consiste en tomar una posición corta sobre una opción de compra y la adquisición de la acción subyacente resultando así la opción *put* corta, tal estrategia se muestra en la Gráfica 1.5, la línea de la posición combinada (línea continua) o resultante se determina como la suma de cualesquiera dos funciones en el plano cartesiano, es decir, sumando verticalmente las distancias de las dos posiciones (líneas punteadas) con respecto al eje horizontal. La cobertura consiste a partir del precio de ejercicio ya que si el precio de la ación es mayor, el propietario de la opción puede ejercer su derecho de comprarla con lo que se cubrirán las pérdidas con el valor incremental del precio del bien subyacente, resultando como ganancia el precio de la opción vendida.



Gráfica 1.5 *Hedge.*

1.8.3 Estrategias especulativas

Las estrategias especulativas son estrategias combinadas que se forman con distintas opciones sobre el mismo subyacente:

a) *Top straddle*, consiste en vender una opción de compra *call* y una opción de venta *put*, tales que $K = S_t = T$,

b) *Botton straddle*, consiste en comprar una opción de compra *call* y una opción de venta *put*, tales que $K = S_t = T$,

c) *Top strip*, consiste en vender dos opciones de venta *put* y una opción de compra *call*, tales que $K = S_t = T$,

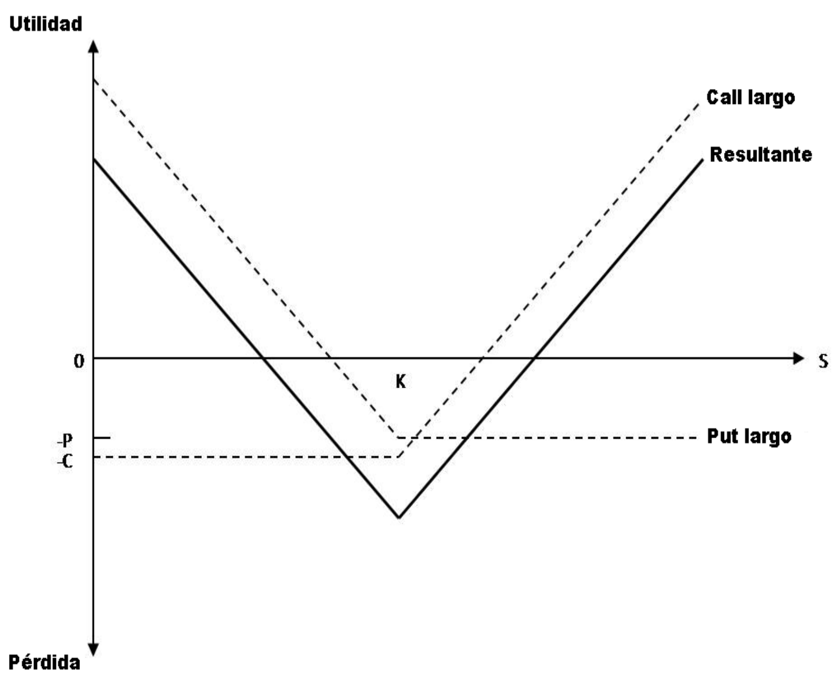
d) *Botton strip*, consiste en comprar dos opciones de venta *put* y una opción de compra *call*, tales que $K = S_t = T$, *e*) *Top strap*, consiste en vender dos opciones de compra *call* y una opción de venta *put*, tales que $K = S_t = T$,

f) *Botton strap*, consiste en comprar dos opciones de compra *call* y una opción de venta *put*, tales que $K = S_t = T$,

g) *Top strangle*, consiste en vender una opción de compra *call* y una opción de venta *put*, tales que $K \neq \text{y} S_t = T$,

h) *Botton strangle*, consiste en comprar una opción de compra *call* y una opción de venta *put*, tales que $K \neq \text{y} S_t = T$.

Por ejemplo la estrategia *bottom straddle* que se muestra a continuación en la Gráfica 1.6.



Gráfica 1.6 *Botton Straddle.*

Esta estretegia consiste en comprar simultáneamente una opción de venta y una opción de compra con el mismo precio de ejercicio, es una estrategia empleada por aquellos que esperan cambios significativos en los precios, pero de dirección incierta. Sus riesgos se encuentran limitados a la totalidad de la prima pagada, sus beneficios si los precios suben son de potencial ilimitado al ejercer la opción de compra, pero si los precios bajan se puede ejercer la opción de venta con beneficio ilimitado también.

1.8.4 Estrategias diferenciales

Las estretegias diferenciales, también llamadas *spreads*, son una combinación de dos o más posiciones con diferentes precios de ejercicio o con diferentes fechas de vencimiento, pero con la misma clase (compra o venta).

a) diferenciales de tipo vertical:

• Diferencial alcista o *bull spread*, se crea comprando una opción *call* con precio de ejercicio K_1 y vendiendo otra opción *call* con precio de ejercicio K_2, ambas con mismo t y tales que $K_1 \rangle K_2$,

• diferencial bajista o *bear spread*, esta se forma con la venta de una opción *call* con precio de ejercicio K_1 y comprando una opción de compra call con precio de ejercicio K_2, ambas con mismo t y tales que $K_1 \rangle K_2$,

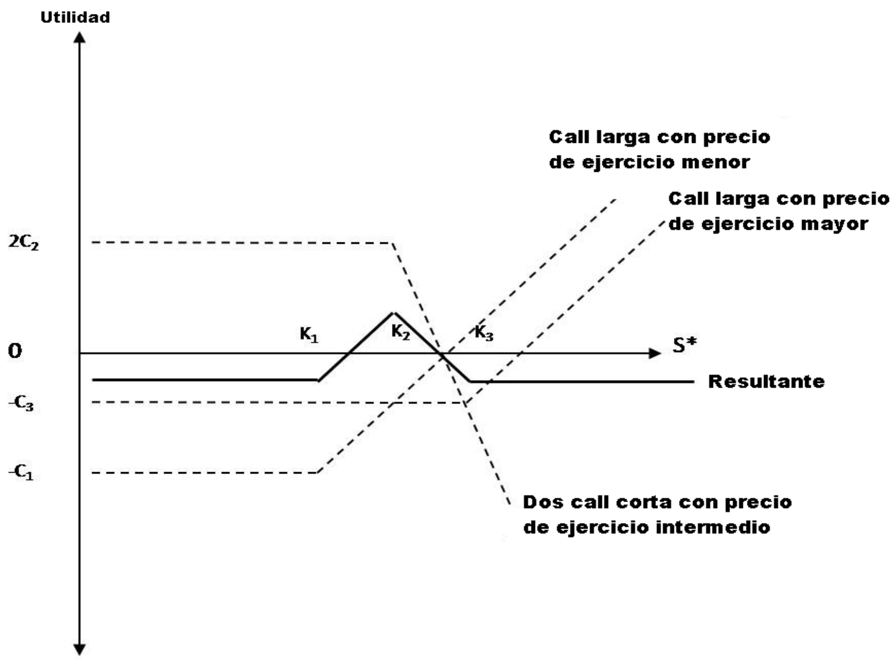
• *butterfly spread*, esta estrategia combina el *bull spread* y el *bear spread*.

• diferencial cóndor.

b) Diferenciales de tipo horizontal: diferencial temporal, consiste en la venta de una opción y la adquisición simultánea de otra más lejana en el tiempo con el mismo precio de ejercicio.

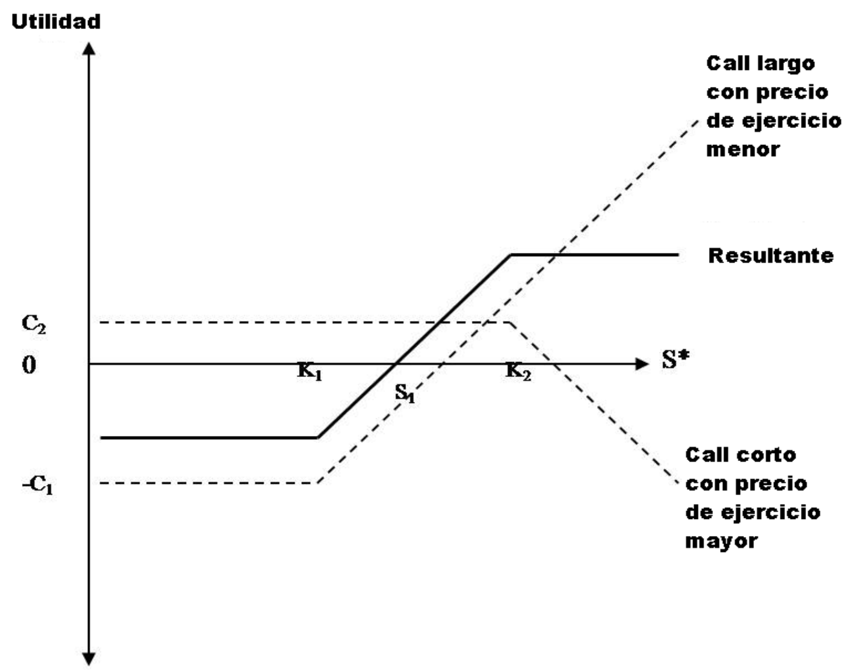
c) Diferenciales tipo diagonal: consisten de una opción comprada y otra emitida siempre y cuando sean de la misma clase pero con precios de ejercicio y fechas de vencimiento diferentes.

Por ejemplo la famosa estrategia *butterfly spread* que se muestra en la Gráfica 1.7; esta estrategia se elabora con dos opciones de mismo precio de ejercicio, que se encuentran en medio de otras dos opciones con precios de ejercicio diferentes; un ejemplo común es emitir las dos opciones de compra de en medio y adquirir las opciones de compra de los extremos. En la gráfica se observa que la pequeña ganancia será posible sólo si el precio de la acción permanece en la vecindad inmediata al precio de ejercicio de las opciones de en medio.



Gráfica 1.7 *Butterfly Spread* .

Un segundo ejemplo es el *bull spread* que se muestra en la Gráfica 1.8; esta estrategia se forma con dos opciones, una en posición larga y otra en posición corta, ambas sobre las mismas acciones y con la misma fecha de vencimiento pero diferentes precios de ejercicio. Los beneficios por separado de las dos posiciones son las líneas punteadas y el beneficio que es la estrategia integrada es la línea continua. En la estrategia, el precio K_1 de ejercicio es el precio de la opción de compra adquirida y el precio $K_2 > K_1$ es el precio de ejercicio de la opción de compra vendida. Obsérvese que al vencimiento, si el precio de las acciones sube hasta el precio de ejercicio, entonces el beneficio esta dado por $K_2 - K_1$, si el precio de las acciones se encontrase entre los precios de ejercicio, entonces el beneficio esta dado por $S_T - K$, pero si el precio de las acciones esta por debajo del precio de ejercicio mas bajo, entonces el beneficio es cero.



Gráfica 1.8 *Bull Spread.*

Capítulo 2

Herramientas teóricas de probabilidad y cálculo estocástico

2.1 Introducción

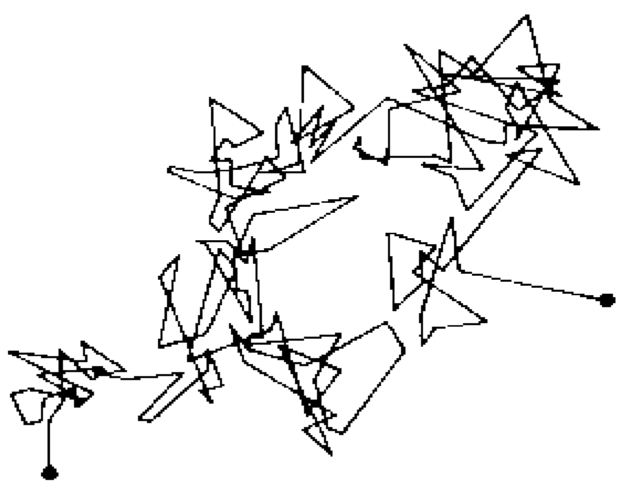
El objetivo en este capítulo es presentar de manera introductoria los conceptos teóricos probabilísticos, los procesos estocásticos y los elementos de cálculo estocástico, de los cuales se hace uso para modelar y operar en el capítulo cuatro de la presente tesis; comenzando con la siguiente motivación historica, que da lugar al desarrollo de las herramientas de cálculo estocásatico.

El movimiento Browniano tiene sus origenes en el trabajo del Robert Brown, quien estudió medicina en las universidades de Aberdeen y Edimburgo, y Drogeria y Plántica en la Universidad de Oxford; Brown en su informe de observaciones microscópicas realizado en julio de 1827 y publicado en 1828, describe su descubrimiento y trabajo de observación del movimiento desordenado que presentan las partículas ultramicroscópicas que se encuentran en suspensión en un líquido, tal descubrimiento fue llamado el Movimiento Browniano.

En 1900, en específico en el trabajo del matemático francés Louis Bachelier, quien es su tesis doctoral *"Théorie de la Spéculation"* comparó la conducta de la dinámica de los precios de la bolsa de París con los movimientos azarosos de partículas suspendidas en los fluidos, anticipándose con esto cinco años a Einstein y a las matemáticas de la probabilidad, en la formulación matemática del Movimiento Browniano. Sin embargo a pesar de la teoría desarrollada por Bachelier sobre el movimiento Browniano, las ideas, método y trabajo de este genio permanecieron en el anonimato, posiblemente por la influencia que en el campo del conocimiento tenía Albert Einstein.

Einstein en 1905, obtuvo el grado de doctor por la Universidad de Zurich y publicó cuatro trabajos en los Annalen der Physik, con los cuales impuso un cambio radical en la imagen que la ciencia ofrece del universo; de éstos, el primero *"Über die con der molekularischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen/* Sobre el movimiento requerido por la teoría cinética molecular del calor de pequeñas partículas suspendidas en un líquido estacionario", el cual proporcionaba una explicación teórica, en términos estadísticos, del movimiento browniano y cuya presentación fue una forma indirecta de confirmar la existencia de átomos y moleculas, las hipótesis básicas de ese modelo, fueron que el desplazamiento de la partícula entre dos instantes es independiente de las posiciones anteriores que haya tenido, y que la ley de probabilidad que rige el movimiento de la partícula sólo depende de la distancia temporal; el segundo daba una interpretación del efecto fotoeléctrico basada en la hipótesis de que la luz está integrada por cuantos individuales, denominados posteriormente fotones, trabajos por los cuales obtuviera el Premio Novel de física en 1921; los dos trabajos restantes establecieron las bases de la Teoría de la Relatividad.

A continuación se presenta en la Gráfica 2.1 un movimiento Browniano.



Gráfica 2.1 Movimiento Bowniano unidimensional.

Otra formulación matemática rigurosa del trabajo de Brown, fue dada una década más tarde por el matemático estadounidense Norbert Wiener también conocido como el fundador de la cibernética, Wiener en sus trabajos de 1920 a 1923 logró dar un modelo preciso y riguroso para la trayectorias de las partículas, por lo que el proceso estocástico es conocido como el proceso de Wiener o movimiento browniano.

El matemático japonés Kiyoshi Itô desde 1940, se inspiro en el trabajo de Bachelier para introducir su cálculo estocástico, dentro de este, destaca su resultado conocido como lema de Itô; también creo la teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas, la cual describe el movimiento debido a los eventos aleatorios. Pero fue su cálculo estocástico el que le diera la denominación de padre del análisis estocástico moderno desarrollado durante el siglo XX.

Paul Samuelson en 1960, premio Novel de economía en 1970 supero algunas de los inconvenientes del modelo de Bachelier, él asumió la existencia de tasas de interés y una distribución de probabilidad más realista para los precios de las acciones; además tuvo en cuenta que los inversores son aversos al riesgo, y que posiblemente estén dispuestos a asumirlo, pero a cambio de algún premio. En particular Samuelson propuso el movimiento browniano geométrico como modelo para los precios que están sujetos a incertidumbre.

2.2 Herramientas de teoría de probabilidad y de procesos estocásticos

Dado que la teoría de procesos estocásticos tiene en cuenta la dimensión temporal en el análisis de los fenómenos aleatorios, son procesos adecuados para expresar la evolución de un sistema dinámico, cuando esta evolución no puede ser prevista con certidumbre y es el motivo por el cual se revela tan importante en la modelación de tiempo continuo de fenómenos financieros y económicos, entre otros.

2.2.1 Espacio y medida de probabilidad, espacio medible y variable aleatoria

Definiciones 2.1. Un **espacio probabilístico** es conformado por la terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, donde Ω llamado **espacio muestral** es el conjunto de resultados para un experimento aleatorio, $\mathcal{F}$ llamada $\sigma-$**álgebra** es un conjunto de subconjuntos de Ω diferente del vacio, la cual es cerrada bajo las operaciones de complementos y uniones numerables y cuyos elementos reciben el nombre de **conjuntos medibles**, y $\mathbb{P}$ es la **medida de probabilidad** $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$, que satisface los siguientes axiomas, introducidos por Kolmogorov (1933):

1. $\mathbb{P}(A) \geq 0 \qquad \forall\ A\ \in\ \mathcal{F}$
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
3. Sean $A_1, \ldots, A_n$ una colección de conjuntos disjuntos en $\mathcal{F}$, entonces

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Adicionalmente, una medida de probabilidad satisface las sigientes propiedades:

1. $\mathbb{P}(\Phi) = 0$
2. Si n es un entero positivo y $A_1, \ldots, A_n$ una colección de conjuntos disjuntos en $\mathcal{F}$, entonces

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \cdots + \mathbb{P}(A_n).$$

3. Si A y B son conjuntos en $\mathcal{F}$ y $A \subseteq B$, entonces

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A)$$

en particular,

$$\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$$

4. Si $A_1, A_2, \ldots$ es una colección de conjuntos en $\mathcal{F}$ con $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$, entonces

$$\mathbb{P}\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

5. Si $A_1, A_2, \ldots$ es una colección de conjuntos en $\mathcal{F}$ con $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$, entonces

$$\mathbb{P}\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right\} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Definición 2.2. A la pareja $(\Omega, \mathcal{F})$, se le llama espacio medible, en particular existe el espacio medible $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$, donde $B(\mathbb{R})$ es la $\sigma-$álgebra de Borel, la cual es generada por los intevalos $(a, b]$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

Definición 2.3. Una variable aleatoria es una función $X : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $\omega \in \Omega \to a \in \mathbb{R}$ y además es $\mathcal{F}-$medible.

Las variables aleatorias representan el mecanismo mediante el cual se observa el experimento. Recuérdese que las operaciones de suma, producto, diferencia y cociente (cuando existen) de variables aleatorias, produce variables aleatorias. Dada una variable aleatoria X sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ se puede definir una nueva probabilidad en $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ a través de la medida e integral de Lebesgue.

2.2.2 Medida e Integral de Lebesgue

Considere el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$; la medida de Lebesgue de intervalos en $\mathbb{R}$, se define como la longitud de su intervalo; esta definición y las propiedades de medida determinan la medida de Lebesgue de muchos subconjuntos de $\mathbb{R}$, pero no de todos. A partir de la medida de Lebesgue se construye la integral de Lebesgue, que es una generalización de la integral de Riemann. La necesidad de usar la integral de Lebesgue es por que esta puede ser definida en espacios abstractos, tales como el espacio de trayectorias de movimiento Browniano, el cual, junto con sus propiedades y el cálculo estocástico se tornan escenciales para la modelación de diversos fenómenos aleatorios.

Definición 2.4. Sea $B(\mathbb{R})$ la $\sigma-$álgebra de Borel, de subconjuntos en los $\mathbb{R}$. Una medida en $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$, es una función μ que mapea B en $[0, \infty)$ con las siguientes propiedades:

1. $\mu(A) \geq 0 \qquad \forall\ A\ \in\ B(\mathbb{R})$
2. Sean $A_1, A_2, \ldots$ una colección de conjuntos disjuntos en $B(\mathbb{R})$, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Definición 2.5. La medida de Lebesgue es definida como la medida en $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$, la cual asigna como medida de cada intervalo, la longitud del mismo. La medida de Lebesgue se denota por μ_0 y tiene todas las propiedades de medida de probabilidad enunciadas arriba, excepto que la medida del espacio total no es 1, ya que $\mu_0(\mathbb{R}) = \infty$. Y la propiedad 5 requiere ser modificada de la siguiente manera

5. Si $A_1, A_2, \ldots$ es una colección de conjuntos disjuntos en $B(\mathbb{R})$ con $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ y $\mu(A_1) < \infty$, entonces
$$\mu \left\{ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right\} = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n).$$

Para ver el requerimiento adicional $\mu(A_1) < \infty$, es necesario considerar

$$A_1 = [1, \infty), A_2 = [2, \infty), A_3 = [3, \infty), \ldots$$

Entonces, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \Phi$, así $\mu_0 \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \right) = 0$, pero $\lim\limits_{n \to \infty} \mu_0(A_n) = \infty$.

Definición 2.6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, decimos que f es Borel-medible si: $\{x \in \mathbb{R}; f(x) \in A\}$ esta en $B(\mathbb{R})$ para caulquier A en $B(\mathbb{R})$.

Definición 2.7. Se define la función indicadora $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mediante

$$g_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A_k \\ 0 & \text{si} \quad x \notin A_k \end{cases}$$

donde,

$$A \triangleq \{x \in \mathbb{R}; g(x) = 1\}$$

Definición 2.8. Se define la integral de Lebesge de g como

$$\int\limits_{\mathbb{R}} g \mathrm{d}\mu_0 \triangleq \mu_0(A).$$

Definición 2.9. Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una combinación lineal de funciones indicadoras, cuya expresión algebraica esta dada por

$$h(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k g_k(x), \qquad c_k \in \mathbb{R}.$$

Se define la integral de Lebesgue de h como

$$\int_{\mathbb{R}} h \mathrm{d}\mu_0 \triangleq \sum_{k=1}^{n} c_k \int_{\mathbb{R}} g_k \mathrm{d}\mu_0 = \sum_{k=1}^{n} c_k \mu_0 \left(A_k\right).$$

Definición 2.10. Sea f definida en $\mathbb{R}$, una función no negativa, que puede o no tomar valor ∞, en algunos puntos; se define la integral de Lebesgue de f como

$$\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\mu_0 \triangleq sup \left\{ \int_{\mathbb{R}} h \mathrm{d}\mu_0 ; h\left(x\right) \leq f\left(x\right), \ \forall x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Es posible que esta integral sea infinita, si es finita, decimos que f es integrable.

Definición 2.11. Sea f una función definida en $\mathbb{R}$, que posiblemente tome valor ∞ en algunos puntos y valor $-\infty$ en algunos otros; se definen las partes positiva y negativa de f como:

$$f^{+}\left(x\right) \triangleq \max\left\{f\left(x\right), 0\right\} \quad \text{y} \quad f^{-}\left(x\right) \triangleq \max\left\{-f\left(x\right), 0\right\},$$

respectivamente, y se define la integral de Lebesgue de f como

$$\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\mu_0 \triangleq \int_{\mathbb{R}} f^{+} \mathrm{d}\mu_0 - - \int_{\mathbb{R}} f^{-} \mathrm{d}\mu_0,$$

con tal que el lado derecho no sea de la forma $\infty - \infty$. Si ambos $\int_{\mathbb{R}} f^{+}\mathrm{d}\mu_0$ y $\int_{\mathbb{R}} f^{-}\mathrm{d}\mu_0$ son finitos, se dice que f es integrable.

Definición 2.12. Sea f una función definida en $\mathbb{R}$, que posiblemente tome el valor ∞ en algunos puntos y el valor $-\infty$ en otros puntos. Sea $A \subset \mathbb{R}$, se define

$$\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\mu_0 \triangleq \int_{\mathbb{R}} I_A f \mathrm{d}\mu_0,$$

donde,

$$I_A\left(x\right) \triangleq \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x \in A, \\ 0, & \text{si} \quad x \notin A, \end{cases}$$

es la función indicadora de A.

La integral de Lebesgue arriba definida, satisface las siguentes propiedades :

1) Linealidad. Para cualesquiera dos funciones f y g y $c \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} (f+g)\, \mathrm{d}\mu_0 = \int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\mu_0 + \int_{\mathbb{R}} g \mathrm{d}\mu_0$$

$$\int_{\mathbb{R}} c f \mathrm{d}\mu_0 = c \int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\mu_0.$$

2) Comparación. Siempre que $f(x) \leq g(x)\, \text{paratoda} x \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\mu_0 \leq \int_{\mathbb{R}} g \mathrm{d}\mu_0.$$

3) Aditividad del dominio. Si $A \cap B = \Phi$, entonces

$$\int_{A \cup B} f \mathrm{d}\mu_0 = \int_{A} f \mathrm{d}\mu_0 + \int_{B} f \mathrm{d}\mu_0.$$

2.2.3 Integral de un espacio de probabilidad general

La integral de un espacio de probabilidad general es totalmente análoga a la integral de Lebesgue, como se verá a continuación.

Considere el espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, y X una variable aleatoria en este espacio, que posiblemente tome valores de $\pm\infty$.

Definición 2.13. Si I_A es la función indicadora

$$I_A(\omega) \triangleq \begin{cases} 1, & \text{si} \quad \omega \in A, \\ 0, & \text{si} \quad \omega \in A^c, \end{cases}$$

para algún $A \in \mathcal{F}$ se define

$$\int_{\Omega} I_A \mathrm{d}\mathbb{P} \triangleq \mathbb{P}(A).$$

Definición 2.14. Sea X una función que es combinación lineal de funciones indicadoras, es decir,

$$X(\omega) = \sum_{k=1}^{n} c_k I_{A_k}(\omega)$$

donde $c_k \in \mathbb{R}$, $A_k \in \mathcal{F}$ e I_{A_k} es función indicadora. Se define

$$\int_{\Omega} X \mathrm{d}\mathbb{P} \triangleq \sum_{k=1}^{n} c_k \int_{\Omega} I_{A_k} \mathrm{d}\mathbb{P} = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbb{P}\left(A_k\right).$$

Definición 2.15. Sea X no negativa, pero por lo demás general; se define

$$\int_{\Omega} X \mathrm{d}\mathbb{P} \triangleq \sup \left\{ \int_{\Omega} Y \mathrm{d}\mathbb{P}; Y(\omega) \leq X(\omega)\, \forall \omega \in \Omega \right\}.$$

Definición 2.16. Sea X es una función definida en Ω, que posiblemente tome valor ∞ en algunos puntos y y valor $-\infty$ en algunos otros, se definen las partes positiva y negativa de X como

$$X^{+}(\omega) \triangleq \max\left\{X(\omega), 0\right\} \quad \text{y} \quad X^{-}(\omega) \triangleq \max\left\{-X(\omega), 0\right\},$$

respectivamente, y se define la integral de Lebesgue de X por

$$\int_{\Omega} X \mathrm{d}\mathbb{P} \triangleq \int_{\Omega} X^{+} \mathrm{d}\mathbb{P} - - \int_{\Omega} X^{-} \mathrm{d}\mathbb{P},$$

con tal que el lado derecho no sea de la forma $\infty - \infty$. Si ambos $\int_{\Omega} X^{+} \mathrm{d}\mathbb{P}$ y $\int_{\Omega} X^{-} \mathrm{d}\mathbb{P}$ son finitos, se dice que X es integrable.

Definición 2.17. Si X es una variable aleatoria y $A \subset \mathcal{F}$, se define

$$\int_{A} X \mathrm{d}\mathbb{P} \triangleq \int_{\Omega} I_A X \mathrm{d}\mathbb{P}$$

Definición 2.18. La esperanza de una variable aleatoria X esta definida por

$$\mathbb{E}X \triangleq \int_{\Omega} X \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Las integrales arriba definidas satisfacen las propiedades siguientes:

1) Linealidad. Si X y Y son dos variables aleatorias y $c \in \mathbb{R}$

$$\int_\Omega (X+Y)\, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_\Omega X \mathrm{d}\mathbb{P} + \int_\Omega Y \mathrm{d}\mathbb{P}$$

$$\int_\Omega cX \mathrm{d}\mathbb{P} = c \int_\Omega X \ d\mathbb{P}.$$

2) Comparación. Si $X(\omega) \leq Y(\omega)$ para toda $\omega \in \Omega$, entonces

$$\int_\Omega X \mathrm{d}\mathbb{P} \leq \int_\Omega Y \mathrm{d}\mathbb{P},$$

de hecho no es necesario que se satisfaga $X(\omega) \leq Y(\omega)$ para cada $\omega \in \Omega$, es suficiente si el conjunto de ω para los cuales $X(\omega) \leq Y(\omega)$ tiene probabilidad uno.

3) Aditividad del domonio. Si A y B son conjuntos disjuntos de Ω, entonces

$$\int_{A \cup B} X \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A X \mathrm{d}\mathbb{P} + \int_B X \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Siempre que φ sea no negativa, este definida en $\mathbb{R}$ y satisfaga que $\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi \mathrm{d}\mu_0 = 1$; se dice que φ es una densidad, y se puede definir una medida de probabilidad asociada por:

Definición 2.19.

$$\int\limits_A \varphi \mathrm{d}\mu_0 \triangleq \mathbb{P}(A) \quad \text{para cada} \ \ A \in B(\mathbb{R}).$$

Frecuentemente existe la situación en que dos medidas están relacionadas por una ecuación como la anterior, por ejemplo la medida de riesgo neutral en mercados financieros es relacionada de esta forma. Se dice que φ es la derivada de Radon-Nicodym de $\mathrm{d}\mathbb{P}$ con respecto a μ_0 y se escribe

$$\varphi = \frac{\mathrm{d}\mathbb{P}}{\mathrm{d}\mu_0}.$$

Considere ahora, una función f en $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \mathbb{P})$, que como se vió anteriormente se puede escribir por definición como

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\mathbb{P},$$

y también se puede evaluar como

$$\int_{\mathbb{R}} f\varphi \mathrm{d}\mu_0,$$

la cual es la integral respecto de la medida de Lebesgue sobre la recta de $\mathbb{R}$.

Siempre que se establezca una medida de probabilidad $\mathbb{P}$ en el espacio $(\Omega, \mathcal{F})$ se tiene una medida inducida correspondiente $\mathbb{P}_{\mathrm{x}}$, la cual resulta ser la misma que la medida de Lebesgue para el intervalo en $\mathbb{R}$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Por lo que si X es una variable aleatoria, la medida inducida para $A \subseteq \mathbb{R}$ esta dada por

$$\mathbb{P}_{\mathrm{x}}(A) \triangleq \mathbb{P}\{X \in A\} = \int_A f_X(x) \mathrm{d}x,$$

es decir, esta medida inducida es la función de distribución.

Definición 2.20. Si X es una variable aleatoria continua, entonces

$$\mathbb{P}_{\mathrm{x}}(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) \mathrm{d}t,$$

donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ es la función de densidad.

Un ejemplo que se torna muy importante en las aplicaciones financieras es el de una variable aleatoria X, que esta normalmente distribuida y cuya función de distribución esta dada por

$$\mathbb{P}_{\mathrm{x}}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}} \mathrm{d}x.$$

Se dice entonces que X se dstribuye normal con parámetros $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$ y se escribe $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$.

2.2.4 Esperanza, varianza y esperanza condicional

Otros conceptos de mucha importancia en teoría de probabilidad son los de valor esperado de una variable aleatoria continua X y su varianza, valor esperado de una función de una variable aleatoria y la esperanza condicional; conceptos que se enuncian a continuación.

Definición 2.21. El valor esperado de una variable aleatoria continua X es definido por la siguiente integral, cuando esta existe

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, \mathrm{d}x,$$

y más generalmente el concepto de valor esperado de una función de una variable aleatoria $Y = \Phi(X)$, esta dado por

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(X) f(x)\, \mathrm{d}x,$$

cuando este existe.

Definición 2.22. La varianza Var(X) esta definida por la siguiente integral, cuando esta existe

$$\operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) f(x) \mathrm{d}x.$$

Para definir el valor esperado condicional de una variable aleatoria integrable X, será necesario dar algunas otras definiciones sobre las que se sostiene, y se enuncian a continuación.

Definición 2.23. Decimos que dos conjuntos A y B en $\mathcal{F}$ son independientes si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\, \mathbb{P}(B).$$

Definición 2.24. La probabilidad de que ocurra el evento A una vez que ha ocurrido el evento B se define por:

$$\mathbb{P}(A|\, B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Definición 2.25. Sean $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ subálgebras de $\mathcal{F}$. Decimos que $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ son independientes si cada conjunto en $\mathcal{G}$ es independiente de cada conjunto en $\mathcal{H}$; es decir para cada $A \in \mathcal{H}$ y para cada $B \in \mathcal{G}$, se tiene

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\, \mathbb{P}(B)$$

Teorema 2.1. Sean X y Y dos variables aleatorias indpendientes, y sean $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de X y Y respectivamente, entonces

$$\mathbb{E}\left[g\left(X\right)h\left(Y\right)\right] = \mathbb{E}\left[g\left(X\right)\right]\mathbb{E}\left[h\left(Y\right)\right].$$

Si una variable aleatoria X es independiente de una $\sigma-$álgebra $\mathcal{H}$. Entonces

$$\mathbb{E}\left[\,X|\,\mathcal{H}\right] = \mathbb{E}\left[X\right],$$

lo que significa que si X es independiente de $\mathcal{H}$, entonces la mejor estimación de X dada la información de $\mathcal{H}$, es la misma de estimar X sin basarse en información alguna.

Definición 2.26. Esperanza Condicional. Sea el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y $\mathcal{G}$ una sub $\sigma-$álgebra de $\mathcal{F}$. Sea X una variable aleatoria en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Entonces $\mathbb{E}\left[\,X|\,\mathcal{G}\right]$, es definida como la variable aleatoria Y que satisface

a) Y es $\mathcal{G}-$medible

b) Para cada A en $\mathcal{G}$ se tiene la propiedad de promedio parcial

$$\int_A Y \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A X \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Existencia. Siempre existe una variable aleatoria Y que satisface las propiedades enunciadas (con tal que $\mathbb{E}\left|X\right| < \infty$).

Unicidad. Puede haber más de una variable aleatoria Y que satisfaga las propiedades enunciadas; si Y' es alguna otra que las satisface, entonces $Y = Y'$ casi seguramente, es decir, $\mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega; Y\left(\omega\right) = Y'\left(\omega\right)\right\} = 1$.

2.2.5 Proceso estocástico

Para cerrar esta sección de herramientas teóricas de probabilidad y procesos estocásticos se tiene la siguiente definición.

Definición 2.27. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y sea $T = (0, \infty]$ un intervalo de tiempo. Un proceso estocástico unidimensional es una función de dos variables $X : (0, \infty] \times \Omega \to \mathbb{R}$, tal que para cada $t \in T$, la función

$$X(t) : \omega \to X(\omega, t) \equiv X_t(\omega) : \Omega \to \mathbb{R}$$

$X_t^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{F},\ \forall x \in \mathbb{R}$, es decir, X_t es una función $\mathcal{F}-$medible. Si X_t es un proceso estocástico, entonces para cada $\omega \in \Omega$, la función $t \to X(\omega, t) : T \to \mathbb{R}$ es llamada una taryectoria del proceso. Por último se dice que un proceso es continuo si cada trayectoria es continua en cada punto de T.

2.3 Caminata Aleatoria

En matemáticas se tiene el hábito de analizar todo lo analizable, y los paseos sin rumbo no fueron la excepción. Los paseos aleatorios son una de las principales ramas de la teoría de Cadenas de Markov, por lo que se interpreta un paseo aleatorio como un sistema de estados discretos más un sistema de probabilidades que son independientes de la evolución del sistema en el pasado. Se analiza ahora el ejemplo más sencillo de caminata aleatoria. Suponga una persona que camina a o largo de la recta real y comienza su paseo en el origen; en cada instante, antes de dar el siguiente paso de longitud 1 (siempre), la persona lanza una moneda al aire y si sale sol da un paso hacia la derecha o sobre los positivos, con probabilidad $p = \frac{1}{2}$, pero si sale águila, entonces da un paso hacia la izquierda o sobre los negativos, con probabilidad $q = 1 - p = \frac{1}{2}$, esta caminata se llama simétrica por ser iguales las probabilidades de ir a la derecha y a la izquierda. Se puede entonces definir al proceso $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ como

$$X_n \equiv \text{ Posición de la persona después de } n \text{ movimientos.}$$

Como ya se menciono, la posición de la persona para el instante $n + 1$ depende sólo de la posición en la que se encuentre en el instante anterior n, por lo que el proceso markoviano esta dado por

$$\mathbb{P}(X_n = j | X_{n-1} = j - 1) = p$$

$$\mathbb{P}\left(X_n = j \mid X_{n-1} = j-1\right) = 1 - p = q.$$

Si se denota al paso efectuado por la persona en el momento n como

$$W_n = \begin{cases} 1, & p \\ -1, & q \end{cases}$$

entonces,

$$X_n = X_0 + \sum_{i=1}^{n} W_i = X_{n-1} + W_n \quad \text{con} \quad n = 1, 2, ...$$

Como los W_i son independientes, entonces

$$\mathbb{E}\left(X_n\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} W_i\right) = n\mathbb{E}\left(W\right)$$

y

$$\operatorname{Var}\left(X_n\right) = \operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} W_i\right) = n\operatorname{Var}\left(W\right)$$

es decir,

$$\mathbb{E}\left(W\right) = 1p + \left(-1\right)q = p - q$$

y

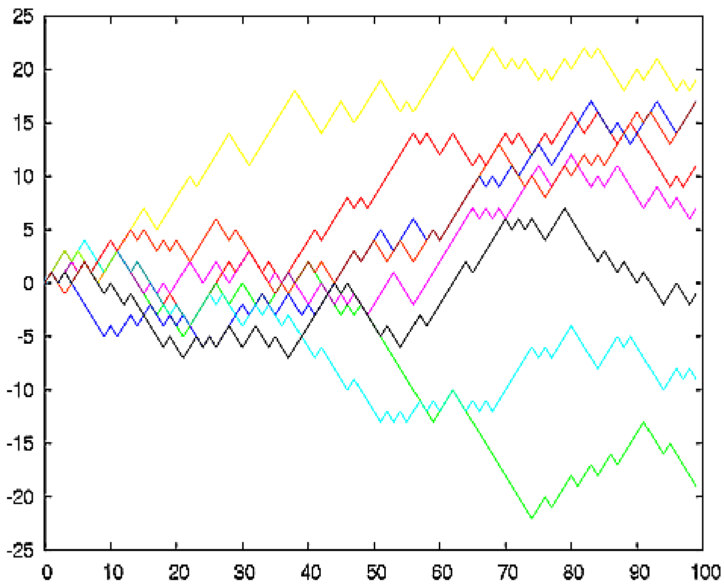
$$\begin{aligned}\operatorname{Var}\left(W\right) = \mathbb{E}\left(W^2\right) - \mathbb{E}^2\left(W\right) &= 1^2 p + \left(-1\right)^2 q - \left(p - q\right)^2 \\ &= p + q - \left(p - \left(1 - p\right)\right)^2 \\ &= 1 - \left(2p - 1\right)^2 \\ &= 1 - \left(4p^2 - 4p + 1\right) \\ &= 4p\left(1 - p\right) \\ &= 4pq.\end{aligned}$$

Así la distribución de probabilidad del paseo aleatorio en el estado n tiene como media y varianza

$$\mathbb{E}\left(X_n\right) = n\left(p - q\right) \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Var}\left(X_n\right) = n4pq.$$

Ahora bien, cuando $p > \frac{1}{2}$, la persona camina en dirección positiva y cuando $p < \frac{1}{2}$ la persona camina en dirección negativa, pero cuando $p = \frac{1}{2}$, la varianza es n, que es el máximo de la varianza; por lo que a medida que el número de pasos crece la posición de la persona es incierta. Cuando n es muy grande se puede aplicar el Teorema del Límite Central para conocer la función de distribución de la caminata que siguió la persona y esta es:

$$Z_n = \frac{X_n - n\,(p-q)}{\sqrt{n4pq}} \sim N\,(0,1)\,.$$



Gráfica 2.2 Ejemplo de ocho caminatas aleatorias en una dimensión, camenzando en cero[1].

2.4 Movimiento Browniano estándar

El movimiento browniano y sus transformaciones y generalizaciones para lo que es necesaria la herramienta matemática del cálculo estocástico, es la piedra angular en la modelación de la matemática financiera moderna.

Definición 2.28. Definición formal. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad fijo, el movimiento browniano estándar unidimensional, es una función

$$W : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$$

[1] Gráfica tomada de la página de Wikipedia

tal que para todo $t \geq 0$, la función

$$W(t, \cdot) : \Omega \to \mathbb{R}$$

es una variable aleatoria definida en $(\Omega, \mathcal{F})$. Mientras que para cada $\omega \in \Omega$, la función

$$W(\cdot, \omega) : [0, \infty) \to \mathbb{R}$$

es continua en $[0, \infty)$. La familia de variables aleatorias $W(t, \cdot)$, es denotada por $\{W_t\}_{t \geq 0}$. Las funciones $W(\cdot, \omega)$ son llamdas trayectorias y se definen por $\omega(t)$. La familia $\{W_t\}_{t \geq 0}$ satisface adicionalmente las siguientes condiciones:

1) El proceso empieza en $t = 0$ con probabilidad 1, es decir

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega | W_0(\omega) = 0\} = 1$$

2) W_t es una función continua en t;

3) Para cualquier conjunto de tiempos $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, los incrementos

$$W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$

son estocásticamente independientes;

4) Para cualquier par de tiempos t y s con $0 \leq s < t$, $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$.

Las trayectorias del mivimiento Browniano estándar son continuas pues el movimiento Browniano es el límite en tiempo continuo de una caminata aleatoria discreta, lo que se observa a partir de la sección 2.3. Suponga un paseo aleatorio simétrico, que se observa durante un intervalo $(0, t]$, espaciado igualmente en instantes $0, 2d, ...$ y cuya longitud de los pasos se supone sin perder generalidad es de $\sqrt{d}$, por lo que en el $n-$ésimo paso, se tiene que

$$\mathbb{P}\left(W_{nd} = \sqrt{d}\right) = \mathbb{P}\left(W_{nd} = -\sqrt{d}\right) = \frac{1}{2}.$$

Entonces,

$$\mathbb{E}(W_{nd}) = 0$$

y

$$\operatorname{Var}(W_{nd}) = \mathbb{E}\left(W_{nd}^2\right) - \mathbb{E}^2(W_{nd}) = d;$$

al asumir $X_0 = 0$, se tiene que

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} W_i\right) = n\mathbb{E}(W) = 0$$

y

$$\operatorname{Var}(X_n) = \operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} W_i\right) = n\operatorname{Var}(W) = nd = t.$$

Si ahora la partición del intervalo de tiempo se hace tan pequeña como se pueda, es decir cuando $d \to 0$, el efecto es de aproximación en un tiempo continuo con pasos de longitud infinitésimamente pequeña. Al aplicar el Teorema Central de Límite, se obtiene la distribución:

$$Z_n = \frac{X_n - 0}{\sqrt{t}} = \frac{0}{\sqrt{t}} \sim N(0, t),$$

que es normal con media cero y varianza t.

2.5 Filtraciones y movimiento Browniano

Usualmente en los modelos financieros se requiere de conocer los precios de los activos en el tiempo, con el objeto de hacer pronósticos. En la teoría de procesos estocásticos, el concepto de filtración es el que guarda la memoria de la información en el tiempo que ha trascurrido. A continuación se define matemáticamente el concepto de filtración.

Definición 2.29. Una filtración es una familia $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ de $\sigma-$álgebras tales que $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$. La familia es creciente si para cada par de tiempos $0 \leq s < t, \quad \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$. La interpretación es que cada $\sigma-$álgebra de la familia representa la información disponible en el mercado sobre los precios de un activo en el instante t correspondiente.

Definición 2.30. Filtración del movimiento browniano. Para $t \geq 0$ fija, considere la familia

$$\mathcal{A}_t = \{\, A_{x,t} | \, x \in R\} \subset \Omega,$$

con

$$A_{x,t} = \{\omega \in \Omega | \, \omega(s) \leq x, \quad 0 \leq s \leq t\}.$$

La $\sigma-$álgebra generada por $\mathcal{A}_t$(mínima), que hace que las funciones W_s con $0 \leq s \leq t$, sean variables aleatorias, se denota por

$$\mathcal{F}_t^W = \sigma(\mathcal{A}_t) = \sigma(W_s, 0 \leq s \leq t).$$

En este caso $\mathcal{F}_0^W$ contiene sólo conjuntos de probabilidad cero o uno. Si $t \leq u \Rightarrow \mathcal{F}_t^W \subseteq \mathcal{F}_u^W$. La familia creciente de $\sigma-$álgebras $\{\mathcal{F}_t^W\}_{t\geq 0}$ es llamada la filtración natural generada por $\{W_t\}_{t\geq 0}$. Si $\mathcal{N}$ es el conjunto de eventos $B \in \mathcal{F}$ tales que $\mathbb{P}(B) = 0$, se define la filtración aumentada de $\{\mathcal{F}_t^W\}_{t\geq 0}$ mediante la familia de $\sigma-$álgebras

$$\mathcal{F}_t = \sigma\left(\mathcal{F}_t^W \cup \mathcal{N}\right).$$

De hecho basta que este procedimiento se efectúe únicamente para $t = 0$, ya que si $\mathcal{F}_0 = \sigma\left(\mathcal{F}_0^W \cup \mathcal{N}\right)$, entonces $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_t$, $\forall t \geq 0$. Adicionalmente se dice que la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ es continua por la derecha, es decir,

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{t\leq u} \mathcal{F}_u$$

y continua por la izquierda,

$$\mathcal{F}_t = \sigma\left(\bigcup_{0\leq s\leq t} \mathcal{F}_s\right).$$

Dado que los procesos estocásticos se usan para modelar situaciones reales, en la práctica es necesario definirlos en periodos de tiempo finitos, por lo que al movimiento browniano se le define también en el intervalo de tiempo $[0, T]$; se define así mismo la filtación $\{W_t\}_{t\in[0,T]}$ y como antes se considera su filtración pero en el periodo finito.

Definición 2.31. Un proceso estocástico $\{X_t\}_{t\geq 0}$ se dice que es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si $\forall t \geq 0$, X_t es medible con respecto a $\mathcal{F}_t$.

Definición 2.32. Procesos equivalentes. Dos procesos X_t y Y_t son equivalentes o uno es una versión modificada del otro, si $P(X_t = Y_t, \forall t \geq 0) = 1$. Y si es una familia $\{Y_t\}_{t\geq 0}$

adaptada a una filtracion $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ la que es equivalente a otra familia $\{X_t\}_{t\geq 0}$, entonces la familia $\{Y_t\}_{t\geq 0}$, también es adaptada a la afiltración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

2.6 Proceso de Wiener

Definición 2.33. El Proceso de Wiener también llamado movimiento Browniano, definido en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es un proceso estocástico relativo a la filtración $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, si cumple:

1) $W_0 = 0$; técnicamente

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega | \, W_0(\omega) = 0\} = 1$$

2) W_t es continuo en t;

3) W_t es adaptado a la filtración $\mathbb{F}$;

4) Para cualquier par de tiempos t y s con $0 \leq s < t$, $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$ y es independiente de su historia, es decir, es independiente de $\mathcal{F}_s$.

Observe que a diferencia del movimiento Browniano, el proceso de Wiener esta definido sobre un espacio de probabilidad equipado con filtración; y no requiere que los incrementos sean independientes.

2.7 Movimiento geométrico Browniano

El modelo del movimiento geométrico Browniano describe la distribución de probabilidad de los precios futuros de un activo, al relacionar el precio actual del mismo y sus precios futuros; tal distribución se obtiene de suponer que un proceso X_t sigue un movimiento modelado por la ecuación diferencial estocástica:

$$\mathrm{d}X_t = \mu X_t \mathrm{d}t + \sigma X_t \mathrm{d}W_t,$$

la cual tiene condición inicial $X_0 = x_0 > 0$, μ y σ contantes.

Definición 2.34. El movimiento geométrico Browniano esta dado por la ecuación:

$$X_t = X_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t}$$

don de μ y σ son contantes.

2.8 Martingalas

Requerimientos:

a) Un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

b) Una sucesión de $\sigma-$álgebras $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \ldots \mathcal{F}_n$, con la propiedad que $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$, es decir, una filtración.

c) Una sucesión de variables aleatorias $M_0, M_1, \ldots, M_n$, llamada proceso estocástico.

Condiciones para una martingala:

a) Cada M_k es $\mathcal{F}_k-$medible. Si se conoce el valor de $\mathcal{F}_k$, entonces se conoce el valor de M_k. Decimos que el proceso $\{M_k\}$ es adaptado ala filtración $\{\mathcal{F}_k\}$.

b) Para cada k, $\mathbb{E}\left[M_{k+1} | \mathcal{F}_k\right] = \mathbb{E}\left[M_k\right]$. Las martingalas no tienden a ir hacia arriba ni hacia abajo.

Una super martingala tiende a ir hacia abajo, es decir, $\mathbb{E}\left[M_{k+1} | \mathcal{F}_k\right] \leq \mathbb{E}\left[M_k\right]$; una submartingala tiende a ir hacia arriba, esto es, $\mathbb{E}\left[M_{k+1} | \mathcal{F}_k\right] \geq \mathbb{E}\left[M_k\right]$.

Teorema 2.2. El movimiento Browniano es una Martingala.

Demostración. Sean $0 \leq s \leq t$, dados. Entonces,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[W_t | \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[(W_t - W_s) + W_s | \mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(W_t - W_s)\right] + W_s \\
&= W_s.
\end{aligned}
$$

2.9 La integral de Itô

En esta sección se presenta la definición de la integral de Itô y algunas de sus propiedades; la cual es utilizada en el capítulo cuatro de este trabajo de tesis, en particular cuando el integrando es un movimiento Browniano.

2.9.1 La variación cuadrática del movimiento Browniano

Para presentar la variación cuadrática del movimiento Browniano, que es una medida de la volatilidad, se requiere tener presente la defnición del movimiento Browniano que se dió en la sección 2.4, y las definiciones de primera y segunda variaciones de una función diferenciable $f(t)$, por lo que se presentan acontinuación.

Definición formal de Movimiento Browniano. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad fijo, el Movimiento Browniano estándar unidimensional, es una función

$$W : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$$

tal que para todo $t \geq 0$, la función

$$W(t, \cdot) : \Omega \to \mathbb{R}$$

es una variable aleatoria definida en $(\Omega, \mathcal{F})$. Mientras que para cada $\omega \in \Omega$, la función

$$W(\cdot, \omega) : [0, \infty) \to \mathbb{R}$$

es continua en $[0, \infty)$. La familia de variables aleatorias $W(t, \cdot)$, es denotada por $\{W_t\}_{t \geq 0}$. Las funciones $W(\cdot, \omega)$ son llamadas trayectorias y se definen por $\omega(t)$. La familia $\{W_t\}_{t \geq 0}$ satisface adicionalmente las siguientes condiciones:

1) $W_0 = 0$; técnicamente
$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega |\, W_0(\omega) = 0\} = 1$$

2) W_t es una función continua en t;

3) Para cualquier conjunto de tiempos $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, los incrementos
$$W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$
son estocásticamente independientes;

4) Para cualquier par de tiempos t y s con $0 \leq s < t$, $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$.

Definición 2.35. Primera Variación. Sea $\Pi = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$, una partición de $[0, T]$, es decir,

$$0 = t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n = T.$$

La norma de la partición se define como

$$\|\Pi\| = \max_{K=0,\ldots,n-1} \left(t_{k-1} - t_k\right).$$

Se define entonces

$$PV_{[0,T]}\left(f\right) = \lim_{\|\Pi\| \to 0} \sum_{K=0}^{n-1} |f\left(t_{k-1}\right) - f\left(t_k\right)|.$$

Suponga que f es diferenciable. Entonces el Teorema del Valor Medio implica que en cada subintervalo $[t_k, t_{k+1}]$, existe un punto t_k^* tal que

$$f\left(t_{k+1}\right) - f\left(t_k\right) = f'\left(t_k^*\right)\left(t_{k+1} - t_k\right);$$

entonces,

$$\sum_{K=0}^{n-1} |f\left(t_{k+1}\right) - f\left(t_k\right)| = \sum_{K=0}^{n-1} |f'\left(t_k^*\right)| \left(t_{k+1} - t_k\right)$$

y

$$PV_{[0,T]}\left(f\right) = \lim_{\|\Pi\| \to 0} \sum_{K=0}^{n-1} |f'\left(t_k^*\right)| \left(t_{k+1} - t_k\right) = \int_0^T |f'\left(t\right)| \mathrm{d}t.$$

Definición 2.36. Variación cuadrática. La variación cuadrática de una función f en un intervalo $[0, T]$, es

$$\langle f \rangle \left(T\right) = \lim_{\|\Pi\| \to 0} \sum_{K=0}^{n-1} |f\left(t_{k+1}\right) - f\left(t_k\right)|^2.$$

Observación. Si f es diferenciable, entonces $\langle f \rangle \left(T\right) = 0$.

Teorema 2.3.

$$\langle W \rangle \left(T\right) = T,$$

o más precisamente,

$$\mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega; \langle W\left(\cdot, \omega\right) \rangle \left(T\right) = T\right\} = 1.$$

En particular las trayectorias de movimiento Browniano no son diferenciables.

Demostración. Sea $\Pi = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición del intervalo $[0, T]$ y sea $D_k = W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$. La variación cuadrática, se define como

$$Q_\Pi = \sum_{K=0}^{n-1} D_k^2.$$

Entonces,

$$Q_\Pi - T = \sum_{K=0}^{n-1} \left[D_k^2 - (t_{k+1} - t_k)\right].$$

Se quiere mostrar que

$$\lim_{\|\Pi\| \to 0} (Q_\Pi - T) = 0.$$

Para tal efecto, considere un elemento de la suma

$$D_k^2 - (t_{k+1} - t_k) = \left[W_{t_{k+1}} - W_{t_k}\right]^2 - (t_{k+1} - t_k),$$

el cual tiene esperanza 0, así

$$\mathbb{E}\left(Q_\Pi - T\right) = \mathbb{E} \sum_{K=0}^{n-1} \left[D_k^2 - (t_{k+1} - t_k)\right] = 0,$$

para j diferente de k, los términos

$$D_j^2 - (t_{j+1} - t_j) \quad \text{y} \quad D_k^2 - (t_{k+1} - t_k)$$

son independientes, así

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}\left(Q_\Pi - T\right) &= \sum_{K=0}^{n-1} \operatorname{var}\left[D_k^2 - (t_{k+1} - t_k)\right] \\
&= \sum_{K=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[D_k^4 - 2\left(t_{k+1} - t_k\right) D_k^2 + \left(t_{k+1} - t_k\right)^2\right] \\
&= \sum_{K=0}^{n-1} \left[3\left(t_{k+1} - t_k\right)^2 - 2\left(t_{k+1} - t_k\right)^2 + \left(t_{k+1} - t_k\right)^2\right] \\
&\quad \text{Si } X \sim N\left(0, \sigma^2\right), \text{ entonces } \mathbb{E}\left(X^4\right) = 3\sigma^4 \\
&= 2\sum_{K=0}^{n-1} \mathbb{E}\left(t_{k+1} - t_k\right)^2 \\
&\leq 2\|\Pi\| \sum_{k=0}^{n-1} \left(t_{k+1} - t_k\right) \\
&= 2\|\Pi\| T.
\end{aligned}$$

Así se tiene

$$\mathbb{E}\left(Q_{\Pi}-T\right)=0$$

$$\operatorname{var}\left(Q_{\Pi}-T\right)\leq 2\left\|\Pi\right\|T.$$

Cuando $\|\Pi\|\to 0,\ \operatorname{var}\left(Q_{\Pi}-T\right)\to 0$, así

$$\lim_{\|\Pi\|\to 0}\left(Q_{\Pi}-T\right)=0.$$

Observación (Representación diferencial). Se sabe que

$$\mathbb{E}\left[\left[W_{t_{k+1}}-W_{t_k}\right]^2-\left(t_{k+1}-t_k\right)\right]=0;$$

y en la demostración anterior se mostro que

$$\operatorname{var}\left[\left[W_{t_{k+1}}-W_{t_k}\right]^2-\left(t_{k+1}-t_k\right)\right]=2\left(t_{k+1}-t_k\right)^2.$$

Cuando $(t_{k+1}-t_k)$ es pequeña, $(t_{k+1}-t_k)^2$ es bastante más pequeña, por lo que se tiene la ecuación aproximada

$$\left(W_{t_{k+1}}-W_{t_k}\right)^2\simeq t_{k+1}-t_k,$$

la cual se puede escribir informalmente como

$$\mathrm{d}W_t\mathrm{d}W_t=\mathrm{d}t.$$

2.9.2 Construcción de la Integral de Itô

El integrando es un movimiento Browniano W_t, $t\geq 0$ con la filtración asociada $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ y las siguientes propiedades:

1. $s\leq t\Rightarrow$ cada conjunto en $\mathcal{F}_s$ es un conjunto de $\mathcal{F}_t$,
2. W_t es $\mathcal{F}_t-$medible para toda t,
3. Para $t_0\leq t_1\leq t_2\leq\cdots\leq t_n$, los incrementos $W_{t_1}-W_{t_0},W_{t_2}-W_{t_1},\ldots,W_{t_n}-W_{t_{n-1}}$ son independientes de $\mathcal{F}_t$.

El integrando es $\delta(t)$ para $t \geq 0$, donde

1. $\delta(t)$ es $\mathcal{F}_t-$medible $\forall t$, es decir, δ es adaptado
2. δ es cuadrado integrable:
$$\mathbb{E}\int_0^T \delta^2(t)\mathrm{d}t < \infty, \quad \forall T.$$

Definición 2.37. Se define la integral de Itô como

$$I(t) = \int_0^t \delta(u)\,\mathrm{d}W_u, \quad t \geq 0.$$

Observación. Si $f(t)$ es una función diferenciable, entonces se puede definir

$$\int_0^t \delta(u)\,\mathrm{d}f(u) = \int_0^t \delta(u)\,f'(u)\,\mathrm{d}u.$$

aunque esta no trabajará con movimientos Brownianios, ya que estos son no diferenciables.

2.9.2.1 Integral de Itô y sus propiedades para un integrando elemental

Definición 2.38. Sea $\Pi = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ un apartición de $[0, T]$ es decir,

$$0 = t \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n = T.$$

Suponga que $\delta(t)$ es constante en cada subintervalo $[t_k, t_{k+1}]$, se nombra a $\delta(t)$ un proceso elemental. Entonces la integral de Itô $I(t)$, esta dada por

$$I(t) = \begin{cases} \delta(t_0)\left[W_t - W_{t_0}\right], & 0 \leq t \leq t_1 \\ \delta(t_0)\left[W_{t_1} - W_{t_0}\right] + \delta(t_1)\left[W_t - W_{t_1}\right], & t_1 \leq t \leq t_2 \\ \delta(t_0)\left[W_{t_1} - W_{t_0}\right] + \delta(t_1)\left[W_{t_2} - W_{t_1}\right] + \delta(t_2)\left[W_t - W_{t_2}\right], & t_2 \leq t \leq t_3. \end{cases}$$

en general, si $t_k \leq t \leq t_{k+1}$,

$$I(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \delta(t_j)\left[W_{t_{j+1}} - W_{t_j}\right] + \delta(t_k)\left[W_t - W_{t_k}\right].$$

Propiedades de la integral de Itô para un integrando elemental.

1. Adaptabilidad. Para cada t, $I(t)$ es $\mathcal{F}_t-$medible.
2. Linealidad. Si

$$I(t) = \int_0^t \delta(t)\,\mathrm{d}W_u, \qquad J(u) = \int_0^t \gamma(u)\,\mathrm{d}W_u$$

entonces

$$I(t) \pm J(t) = \int_0^t (\delta(u) \pm \gamma(u))\mathrm{d}W_u$$

y

$$cI(t) = \int_0^t c\delta(u)\,\mathrm{d}W_u$$

Teorema 2.4. Propiedad de martingala.

$$I(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \delta(t_j)\left[W_{t_{j+1}} - W_{t_j}\right] + \delta(t_k)[W_t - W_{t_k}], \qquad t_k \leq t \leq t_{k+1}$$

es una martingala.

Teorema 2.5. Isometría de la Integral de Itô.

$$\mathbb{E}I^2(t) = \mathbb{E}\int_0^t \delta^2(u)\,\mathrm{d}u.$$

2.9.2.2 Integral de Itô y sus propiedades para un integrando general

Sea $T > 0$, y sea δ un proceso no necesariamente elemental tal que

1. $\delta(t)$ es $\mathcal{F}_t-$medible $\forall t \in [0, T]$
2. δ es cuadrado integrable:

$$\mathbb{E}\int_0^T \delta^2(t)\mathrm{d}t < \infty.$$

Teorema 2.6. Hay una sucesión de procesos elementales $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\int_0^T |\delta_n(t) - \delta(t)|^2\,\mathrm{d}t = 0.$$

Demostración. Idea central de la demostración. Arriba se definió

$$I_n\,(T) = \int_0^T \delta_n\,(t)\mathrm{d}W_t, \quad \forall n.$$

Ahora se define

$$\int_0^T \delta\,(t)\mathrm{d}W_t = \lim_{n\to\infty} \int_0^T \delta_n\,(t)\mathrm{d}W_t.$$

Lo que ahora se requiere es asegurarse de que el límite exista. Por lo que se supone que m y n son enteros positivos, entonces

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}\left(I_n\,(T) - I_m\,(T)\right) &= E\left(\int_0^T \left[\delta_n\,(t) - \delta_m\,(t)\right] dW_t\right)^2 \\
&\text{por isometría de Itô} \\
&= \mathbb{E}\int_0^T \left[\delta_n\,(t) - \delta_m\,(t)\right]^2 dt \\
&= \mathbb{E}\int_0^T \left[\left|\delta_n\,(t) - \delta\,(t)\right| + \left|\delta\,(t) - \delta_m\,(t)\right|\right]^2 \mathrm{d}t \\
&\text{pero}\left((a+b)^2 \le 2a^2 + 2b^2 :\right) \\
&\le 2\mathbb{E}\int_0^T \left|\delta_n\,(t) - \delta\,(t)\right|^2 dt + 2\mathbb{E}\int_0^T \left|\delta\,(t) - \delta_m\,(t)\right|^2 \mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

lo cual es muy pequeño y garantiza que la sucesión $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene límite.

Propiedades de la integral de Itô para un integrando general.

$$I\,(t) = \int_0^t \delta\,(u)\,\mathrm{d}W_u,$$

donde δ es adaptada y cuadrado integrable.

1. Adaptabilidad. Para cada t, $I\,(t)$ es $\mathcal{F}_t$−medible.

2. Linealidad. Si

   $$I\,(t) = \int_0^t \delta\,(t)\,\mathrm{d}W_u, \qquad J\,(u) = \int_0^t \gamma\,(u)\,\mathrm{d}W_u$$

   entonces

   $$I\,(t) \pm J\,(t) = \int_0^t (\delta\,(u) \pm \gamma\,(u))\mathrm{d}W_u$$

y

$$cI(t) = \int_0^t c\delta(u)\,\mathrm{d}W_u$$

3. $I(t)$ es una martingala.

4. $I(t)$ es una función continua en el límite superior de integración.

5. Propiedad de Isometrtría.

$$\mathbb{E}I^2(t) = \mathbb{E}\int_0^t \delta^2(u)\,\mathrm{d}u.$$

Ejemplo. Considere la integral de Itô

$$\int_0^T W_u dW_u$$

y considere también, una partición uniforme del intervalo $[0,T]$, en la cual se usa para definir $\delta_u(u)$ como

$$\delta_u(u) = \begin{cases} W_0 = 0 & \text{si} \quad 0 \le u < T/n \\ W_{T/n} & \text{si} \quad T/n \le u < 2T/n \\ \cdots & \\ W_{T(n-1)/n} & \text{si} \quad T(n-1)/n \le u < T. \end{cases}$$

Por definición

$$\int_0^T W_u dW_u = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} W_{kT/n}\left[W_{(k+1)T/n} - W_{kT/n}\right].$$

Se denota

$$W_{kT/n} \triangleq W_k,$$

así

$$\int_0^T \delta(t) dW_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} W_k\left[W_{(k+1)} - W_k\right].$$

Ahora se calcula

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(W_{(k+1)} - W_k\right)^2 &= \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} W_{(k+1)}^2 - \sum_{k=0}^{n-1} W_{(k+1)}W_k + \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} W_k^2 \\
&= \tfrac{1}{2}W_n^2 + \tfrac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} W_j^2 - \sum_{k=0}^{n-1} W_{(k+1)}W_k + \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} W_k^2 \\
&= \tfrac{1}{2}W_n^2 + \sum_{k=0}^{n-1} W_k^2 - \sum_{k=0}^{n-1} W_{(k+1)}W_k \\
&= \tfrac{1}{2}W_n^2 - \sum_{k=0}^{n-1} W_k\left(W_{(k+1)} - W_k\right),
\end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$\sum_{k=0}^{n-1} W_k \left(W_{(k+1)} - W_k\right) = \tfrac{1}{2}W_n^2 - \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \left(W_{(k+1)} - W_k\right)^2,$$

es decir,

$$\sum_{k=0}^{n-1} W_{Tk/n} \left(W_{T(k+1)/n} - W_{Tk/n}\right) = \tfrac{1}{2}W_T^2 - \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \left(W_{T(k+1)/n}\left(\tfrac{k}{T}\right)\right)^2.$$

Al refinar la partición, es decir, cuando $n \to \infty$ y mediante el uso de la definición de variación cuadrática y del teorema 2.3, se obtiene

$$\int_0^T W_u dW_u = \tfrac{1}{2}B^2\left(T\right) - \tfrac{1}{2}T.$$

2.10 Derivación de la fórmula diferencial de Itô

En esta sección se deriva la fórmula diferencial de Itô a partir de la expansión de Taylor, por lo que primero se escribe la expansión de Taylor en términos de un pequeño orden y se enuncian las reglas básicas de diferenciación estocástica, para poder entonces deducir el teorema fundamental del cálculo estocástico, también llamado lema de Itô.

2.10.1 Expansión de Taylor

Definición 2.39. Un pequeño orden $o(h)$ de h es una función de h que satisface

$$\lim_{h\to 0} \frac{o\left(h\right)}{h} = 0,$$

es decir, $o(h)$ converge a cero más rápido que h, cuando $h \to 0$.

La definición de derivada como límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f\left(x+h\right) - f\left(x\right)}{h}, \qquad x \in I$$

se puede establecer en términos del pequeño orden, suponiendo que $f(x)$ es diferenciable, de donde se obtiene

$$f\left(x+\Delta x\right) - f\left(x\right) = \Delta y = f'\left(x\right)\Delta x + o\left(\Delta x\right)$$

donde $\frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$.

Supónga que una función es diferenciable $n+1$ veces, con derivadas $f^{(k)}(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n+1$. Se quiere aproximar $f(x)$ en términos del polinomio

$$g(x) = \sum_{K=0}^{n} \gamma_k (x-a)^k.$$

Los coeficientes γ_k, están determinados de forma tal que

$$f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

donde $f^{(0)}(a) = f(a)$ y $g^{(0)}(a) = g(a)$.

Al repetir n veces la regla de l' Hôpital se tiene:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^n} &= \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - g'(x)}{n(x-a)^{n-1}} \\ &\vdots \\ &= \lim_{x \to a} \frac{f^{(n)}(x) - g^{(n)}(x)}{n!}. \end{aligned}$$

Se sigue que

$$f(x) = g(x) + o((x-a)^n),$$

donde $o((x-a)^n)$ denota el pequeño orden de $(x-a)^n$.

Por otra parte de la aproximación de $f(x)$ por el polinomio, se tiene

$$g^{(k)}(a) = \gamma_k k!, k = 0, 1, \ldots, n.$$

Por tanto, se obtiene

$$\gamma_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Proposición 2.1. Cualquier función $f(x)$ puede ser expandida como

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R,$$

con tal que la derivada de orden $f^{(n+1)}(x)$ exista en $a \in (c, d)$ y $R = o((x-a)^n)$.

En particular, cuando $a = 0$, se tiene

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n + R.$$

En ingeniería financiera es frecuentemente usado considerar diferencias de variables. Que es tomar $(x-a) = \Delta x$ y $a = x$ en la expansión de Taylor, por lo que se tiene

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(\Delta x)^n + o((\Delta x)^n).$$

Cuando $\Delta x \to 0$, la diferencia es remplazada por la diferencial $\mathrm{d}x$.

2.10.2 Reglas básicas de diferenciación estocástica

1. Se vio hace unos renglones atrás, que $\mathrm{d}x$ es una cantidad infinitésimal y el cuadrado de esta es bastante más pequeño, por lo que se conviene que

   $$(dt)^2 = 0,$$

   de hecho para cualquier potencia $a > 1$, se tiene $(\mathrm{d}t)^a = 0$.

2. Constrastantemente, la regla principal de cálculo estocástico en diferenciación, es que el cuadrado de cantidades infinitésimales es significativo. En específico, si W_t es un movimiento Brownino estandar, se tiene de la sección de integración estocástica que

   $$\mathrm{d}W_t \cdot \mathrm{d}W_t = \mathrm{d}t.$$

3. La tercer regla es la del producto de cantidades infinitésimales de reales y estocásticas, es decir,

   $$\mathrm{d}W_t \cdot \mathrm{d}t = \sqrt{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}t = (\mathrm{d}t)^{\frac{3}{2}} = 0.$$

2.10.3 Lema de Itô

En esta sección mediante una aplicación estádar de la expansión de Taylor se obtiene la formula de Itô. Considere la función $y = f(S_t, t)$, caya expansión de Taylor esta dada por

$$\mathrm{d}y = \frac{\partial f}{\partial S_t}\mathrm{d}S_t + \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2}(\mathrm{d}S_t)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial S_t \partial t}(\mathrm{d}S_t)(\mathrm{d}t) + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\mathrm{d}t)^2\right),$$

donde debido a la segunda regla de diferenciación estocástica que se dió en la sección anterior se calcula la diferencial hasta los términos de segundo orden.

Al sustituir la ecuación del movimiento Browniano geométrico en su forma diferencial $\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t$, y después de aplicar las reglas de diferenciación estocástica enunciadas, se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}y &= \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial S_t}\left[\mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t\right] \\
&+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2}\left[\mu^2 S_t^2 \mathrm{d}t^2 + 2\mu S_t \sigma S_t \mathrm{d}t\mathrm{d}W_t + \sigma^2 S_t^2 \mathrm{d}W_t^2\right]\right. \\
&\left. + 2\frac{\partial^2 f}{\partial S_t \partial t}\left[\mu S_t \mathrm{d}t^2 + \sigma S_t \mathrm{d}t\mathrm{d}W_t\right] + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\mathrm{d}t^2\right] \\
&= \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial S_t}\mu S_t \mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial S_t}\sigma S_t \mathrm{d}W_t + \frac{1}{2}\frac{\partial f^2}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2 \mathrm{d}W^2 \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S_t}\mu S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2\right)\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial S_t}\sigma S_t \mathrm{d}W_t.
\end{aligned}$$

Tal resultado es llamado Lema de Itô.

2.11 Ecuación diferencial del movimiento geométrico Browniano

En finanzas es usual simular la evolución del precio de una acción u otro activo subyacente en el tiempo, mediante la ecuación diferencial que conduce al movimiento Browniano geométrico.

De la sección 2.7 se tiene por definición de movimiento geométrico browniano

$$S_t = S_0 e^{\left\{\sigma W_t + t\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\right\}}$$

donde μ y $\sigma > 0$ son constantes.

Se define

$$f(t,x) = S_0 e^{\left\{\sigma x + t\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\right\}},$$

por lo que

$$S_t = f(t, W_t)$$

entonces

$$f_t = \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right) f, \quad f_x = \sigma f \quad \text{y} \quad f_{xx} = \sigma^2 f$$

de acuerdo a la fórmula de Itô

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}S_t &= \mathrm{d}f(t, W_t) \\
&= f_t \mathrm{d}t + f_x \mathrm{d}W_t + \tfrac{1}{2} f_{xx} \underbrace{\mathrm{d}W_t \mathrm{d}W_t}_{\mathrm{d}t} \\
&= \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right) f \mathrm{d}t + \sigma f \mathrm{d}W_t + \tfrac{1}{2}\sigma^2 f \mathrm{d}t \\
&= \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t.
\end{aligned}$$

Por tanto, el movimiento geométrico Browniano en su forma diferencial es

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t.$$

Y el movimiento geométrico Browniano en su forma integral es:

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu S_t \mathrm{d}t + \int_0^t \sigma S_t \mathrm{d}W_t.$$

2.12 Estrategias: portafolios autofinanciados y portafolios replicantes

Un modelo financiero discreto es construido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Se supone que el mercado consiste de $d+1$ activos financieros, de los cuales los precios al tiempo n son dados por las variables aleatorias no negativas $S_n^0, S_n^1, \ldots, S_n^d$, medibles respecto a $\mathcal{F}_n$. Se nombra al vector $S_n = \left(S_n^0, S_n^1, \ldots, S_n^d\right)$, el vector de precios al tiempo

n, el activo indexado por 0 es el activo sin riesgo y se tiene que $S_0^0 = 1$. Si el retorno de un activo sin riesgo en un periodo es constante e igual a r, se obtiene $S_n^0 = (1+r)^n$, el coeficiente $\beta_n = \frac{1}{S_n^0}$ es interpretado como el factor de de descuento. Los activos indexados por $i = 1, 2, \ldots, d$ son llamados activos riesgosos.

2.12.1 Estrategias en tiempo discreto

Definición 2.40. Una estrategia de negocios es definida como un proceso estocástico (en el caso discreto, es una sucesión) $\phi = \left(\left(\phi_n^0, \phi_n^1, \ldots, \phi_n^d\right)\right)_{0 \leq n \leq N} \in \mathbb{R}^{d+1}$ donde ϕ_n^i denota el número de acciones de un activo i en el portafolio al tiempo n. ϕ es previsible , es decir

$$\forall i \in \{0, 1, 2, \ldots, d\} \begin{cases} \phi_0^i & \text{es} \quad \mathcal{F}_0 - \text{medible} \\ \phi_0^i & \text{es } \mathcal{F}_{n-1} - \text{medible, para} n \geq 1 \end{cases}.$$

Este supuesto significa que la posición en el portafolio en el tiempo n es decidida con respecto a la información disponible al timepo $n-1$ y guardada hasta el tiempo n.

El valor del portafolio al tiempo n, es el producto escalar:

$$V_n(\phi) = \phi_n \cdot S_n = \sum_{i=1}^{d} \phi_n^i S_n^i.$$

Su valor descontado es

$$\tilde{V}_n(\phi) = \beta_n(\phi_n \cdot S_n) = \phi_n \cdot \tilde{S}_n,$$

donde $\beta_n = \frac{1}{S_n^0}$ y $\tilde{S}_n = \left(1, \beta_n S_n^1, \ldots, \beta_n S_n^d\right)$,es el vector de precios descontados.

Definición 2.41. Una estrategia es llamada autofinanciable si la siguiente ecuación es satisfecha para todo $n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$

$$\phi_n \cdot S_n = \phi_{n+1} \cdot S_n$$

esto significa que en el tiempo n, una vez que los nuevos precios $S_n^0, S_n^1, \ldots, S_n^d$ son cotizados, el inversor reajusta su posición de ϕ_n a ϕ_{n+1} sin consumir nada mas.

Observación. La igualdad $\phi_n \cdot S_n = \phi_{n+1} \cdot S_n$ es equivalente a

$$\phi_{n+1} \cdot (S_{n+1} - S_n) = \phi_{n+1} \cdot S_{n+1} - \phi_n S_n$$

o a

$$V_{n+1}(\phi) - V_n(\phi) = \phi_{n+1}(S_{n+1} - S_n).$$

Significa que al tiempo $n+1$ el valor del portafolio es $\phi_{n+1} \cdot S_{n+1}$ y $\phi_{n+1} \cdot S_{n+1} - \phi_n S_n$, es la ganancia neta causada por el cambio de precio entre los tiempos n y $n+1$. Por lo tanto el beneficio o la pérdida realizada por seguir una estrategia autofinanciable, es solamente debida al movimiento de los precios. Se tiene ahora la siguiente proposición

Proposición 2.2. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

1) La estrategia ϕ es autofinanciable.

2) Para cualquier $n \in \{1, \ldots, N\}$

$$V_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \phi_j \cdot \Delta S_j,$$

donde ΔS_j es el vector $S_j - S_{j-1}$.

3) Para cualquier $n \in \{1, \ldots, N\}$

$$\widetilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \phi_j \cdot \Delta \widetilde{S}_j,$$

donde $\Delta \tilde{S}_j$ es el vector $\tilde{S}_j - \tilde{S}_{j-1} = \beta_j S_j - \beta_{j-1} S_{j-1}$.

Definición 2.42. Una estretegia ϕ es admisible, si esta es autofinanciable y si $V_n(\phi) \geq 0, \ \forall n \in \{1, \ldots, N\}$.

2.12.2 Estrategias en tiempo continuo

En el modelo de Black-Scholes que se describe en la sección cuarta del capítulo cuarto de este trabajo de tesis, se describe el comportamiento de los precios en tiempo continuo de una opción europea de compra, mediante una estrategia replicante y autofinanciable. Para tal efecto, se utiliza un activo con riesgo S_t del cual se asume, que el comportamiento de sus precios esta determinado por la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$\mathrm{d}S_t = S_t(\mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t);$$

y un activo sin riesgo con precio S_t^0, cuyo comportamiento se supone es modelado por la ecuación diferencial ordinaria

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt,$$

con $r > 0$ una tasa de interés instantánea.

Para establecer los conceptos de estrategias en tiempo continuo se considera que $S_0^0 = 1$, por lo que $S_t^0 = e^{rt}$, para $t > 0$.

Definición 2.43. Una estrategia es definida como un proceso $\phi = \{\phi\}_{0\leq t\leq T} = \left(\left(H_t^0, H_t\right)\right)$ con valores en $\mathbb{R}^2$, adaptado a la filtración natural del movimiento browniano $\mathcal{F}_n$; los componentes H_t^0 y H_t son las cantidades de un activo con riesgo y de un activo sin riesgo respectivamente, en un portafolio en el tiempo t. El valor del portafolio en el tiempo t esta dado por

$$V_t\left(\phi\right) = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t,$$

En en el caso discreto se tenía que $V_{n+1}\left(\phi\right) - V_n\left(\phi\right) = \phi_{n+1}\left(S_{n+1} - S_n\right)$, esta igualdad es extendida para dar la condición de autofinanciamiento en el caso continuo, por lo que se tiene

$$\mathrm{d}V_t\left(\phi\right) = H_t^0 \mathrm{d}S_t^0 + H_t \mathrm{d}S_t.$$

Se establece la condición

$$\int_0^T \left|H_t^0\right| \mathrm{d}t < +\infty \qquad \text{y} \qquad \int_0^T H_t^2 \mathrm{d}t < +\infty.$$

Entonces la integral,

$$\int_0^T H_t^0 \mathrm{d}S_t^0 = \int_0^T H_t^0 r e^{rt} \mathrm{d}t$$

esta bien definida, asi como integral estocástica

$$\int_0^T H_t \mathrm{d}S_t = \int_0^T \mu H_t S_t \mathrm{d}t + \int_0^T \sigma H_t S_t \mathrm{d}W_t$$

Definición 2.44. Una estrategia autofinanciada es definida por un par ϕ de procesos adaptados $\left\{H_t^0\right\}_{0\leq t\leq T}$ y $\left\{H_t\right\}_{0\leq t\leq T}$ que satisfacen:

1.
$$\int_0^T \left|H_0^T\right| \mathrm{d}t + \int_0^T H_0^2 \mathrm{d}t \langle +\infty$$

2.
$$H_t^0 S_t^0 + H_t S_t = H_0^0 S_0^0 + H_0 S_0 + \int_0^t H_u^0 \mathrm{d}S_u^0 + \int_0^t H_u \mathrm{d}S_u \qquad \forall t \in [0, T].$$

Proposición 2.3. Sea $\phi = \{\phi\}_{0\leq t\leq T} = \left(\left(H_t^0, H_t\right)\right)$ un proceso adaptado con valores en $\mathbb{R}^2$, que satisface $\int_0^T \left|H_t^0\right| \mathrm{d}t + \int_0^T H_t^2 \mathrm{d}t < +\infty$. Se establece $V_t(\phi) = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t$ y $\tilde{V}_t(\phi) = e^{-rt} V_t(\phi)$. Entonces ϕ define un aestrategia autofinanciada si y sólo si

$$\tilde{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t H_u \mathrm{d}\tilde{S}_u \qquad \forall t \in [0, T].$$

Donde $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$ denota el precio descontado del activo con riesgo.

Definición 2.45. Una estrategia $\phi = \{\phi\}_{0\leq t\leq T} = \left(\left(H_t^0, H_t\right)\right)$ es admisible si esta es autofinanciada y si el valor descontado $\tilde{V}_t(\phi) = H_t^0 + H_t \tilde{S}_t$ del portafolio correspondiente es para toda t no negativo y tal que $\sup_{t\in[0,T]} \tilde{V}_t$ es cuadrado integrable bajo $\mathbb{P}_X$.

Definición 2.46. Una opción se dice que es replicable si su pago en la madurez es igual al valor final de un aestrategia admisible.

Capítulo 3

Ecuación de difusión de calor: el problema de Cauchy

3.1 Introducción

En esta sección se hace una breve revisión de la llamada ecuación de difusión de calor, también llamada ecuación de calor homogénea

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad -\infty\langle x \langle \infty \qquad \text{y} \qquad \tau\rangle 0 \tag{3.1}$$

con condición inicial,

$$u\left(x,0\right) = u_{0}\left(x\right).$$

La aplicación de esta ecuación y su solución son muy importantes para este trabajo de tesis; específicamente, en el capítulo cuarto, ya que mediante cambios de variables se transforma la ecuación diferencial parcial de Black y Scholes en la ecuación de difusión de calor, y mediante su solución se obtiene la solución de la ecuación de B-S, que es el precio teórico de una opción europea de compra. Más aun, se ve en el análisis de tres de los enfoques metodológicos de valuación del mismo capítulo y en el análisis comparativo del capítulo quinto, que dichos enfoques recurren a la solución de la ecuación del problema de Cauchy homogéneo, para obtener el precio teórico del instrumento derivado en cuestión, desde tres diferentes contextos teóricos.

El análisis se centra en el llamado problema de Cauchy (o de valores inicales) para la ecuación de calor en un marco clásico, para el problema homegéneo y no homegéneo. Para tal efecto, se considera el siguiente teorema

Teorema 3.1. Sean las ecuaciones de calor homogénea y no homogénea

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \Delta u = 0 \qquad\qquad y \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial \tau} - \Delta u = f,$$

ecuaciones a las que se añadirán las condiciones apropiadas de contorno e iniciales más adelante. Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ y $0 < T < \infty$, suponga que la función u esta definida por $u : (x, \tau) \in \Omega \times (0, T) \mapsto u(x, \tau) \in \mathbb{R}$. El operador Δ de Laplace esta calculado respecto a la variable x por:

$$\Delta u(x, \tau) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x, \tau),$$

y la función $f : \Omega \times (0, T) \to \mathbb{R}$ esta dada.

3.2 Interpretación Física

La ecuación de difusión de calor describe la evolución en el tiempo de densidades $u(x, \tau)$ de ciertas cantidades como la temperatura, concentración química de ciertas sustancias, entre otras. La ley física que rige la función de densidad u se expresa diciendo que la razón de cambio de la concentración total dentro de cada abierto O ($\mathrm{O} \subset \Omega$ es un abierto regular) es igual al negativo del flujo normal neto a través de la frontera $\partial\mathrm{O}$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \int_{\mathrm{O}} u(x, \tau) \mathrm{d}x = - \int_{\partial\mathrm{O}} F(x, \tau) \cdot n(x) \mathrm{d}S(x), \qquad \forall \tau > 0,$$

donde F es el flujo total sobre la frontera y n es el vector normal unitario exterior a $\partial\mathrm{O}$ en cada punto $x \in \partial\mathrm{O}$.

Al aplicar el teorema de la divergencia se tiene,

$$\int_{\mathrm{O}} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} u(x, \tau) + \nabla \cdot F(x, \tau) \right) \mathrm{d}x = 0, \qquad \forall \tau > 0,$$

donde el operador divergencia esta dado por:

$$\nabla \cdot F = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

Por ser $\mathrm{O} \subset \Omega$ arbitrario, se sigue que

$$\frac{\partial}{\partial \tau} u(x, \tau) + \nabla \cdot F(x, \tau) = 0 \qquad \text{en} \qquad \Omega \times (0, \infty).$$

En muchas situaciones F es una función del gradiente de u y en muchas otras F es proporcional al gradiente de u, pero con signo cambiado. Por lo que

$$F = -a\nabla u \qquad \text{con} \qquad a > 0,$$

cuando $a = 1$ se obtiene la ecuación de calor.

3.3 El problema de Cauchy

El problema de Cauchy también llamado probema de valores iniciales para la ecuación de calor homogénea y no homogenéa esta dado por:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau} - \Delta u = f & \text{en } \mathbb{R}^N \times (0,T)\,, \text{ donde } \ 0 < T \leq \infty \ \text{ y } \ f : \mathbb{R}^N \times (0,T) \to \mathbb{R} \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{en } \mathbb{R}^N \ \text{ con } \ u_0 : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.2}$$

Para este problema se busca una solución clásica, es decir, una solución regular que verifique la ecuación diferencial parcial, y las condiciones inicial y de contorno; por lo cual se define

$$C^{2,1}(\Omega \times (0,T)) = \left\{ u : u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial u}{\partial \tau} \in C^0(\Omega \times (0,T)), \forall i,j \right\}.$$

Definición 3.1. Se dice que u es solución clásica de la ecuación (3.2) si para $u \in C^{2,1}\left(\mathbb{R}^N \times (0,T)\right) \cap C^0\left(\mathbb{R}^N \times [0,T)\right)$ satisface

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \tau} u(x,\tau) - \Delta u(x,\tau) = f(x,\tau) & \forall (x,\tau) \in \mathbb{R}^N \times (0,T)\,, \\ u(x,0) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

3.4 Solución fundamental. Núcleo de Gauss

El objetivo ahora, es dar un resultado de solución clásica de la ecuación (3.2) cuando u_0 y f son continuas. Para ello se tratará de dar una fórmula de representación de la solución mediante el núcleo integral de Gauss. En concreto se buscan soluciones $u(x,\tau)$

que sean invariantes[1] respecto dilataciones en la forma $u(x,\tau) \to \lambda^{\alpha} u\left(\lambda^{\beta} x, \lambda\tau\right)$ con $\lambda > 0$ y α y $\beta \in \mathbb{R}$. Este tipo de soluciones, tienen la forma

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\tau^{\alpha}} v\left(\frac{x}{\tau^{\beta}}\right), \qquad (x,\tau) \in \mathbb{R}^N \times (0,T) \tag{3.3}$$

donde α y $\beta \in \mathbb{R}$ y $v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es función a determinar.

A partir de (3.3) se tiene que,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial\tau} u(x,\tau) = -\alpha\tau^{-(\alpha+1)} v\left(\frac{x}{\tau^{\beta}}\right) - \beta\tau^{-(\alpha+1)}\tau^{-\beta}\nabla v\left(\frac{x}{\tau^{\beta}}\right)\cdot x, \\ \Delta u(x,\tau) = \tau^{-(\alpha+\beta)}\tau^{-\beta}\Delta v\left(\frac{x}{\tau^{\beta}}\right). \end{cases}$$

si ahora se reemplaza $y = \frac{x}{\tau^{\beta}}$ y acto seguido se sustituye $\beta = \frac{1}{2}$, y se divide entre $t^{-(\alpha+1)}$, se obtiene

$$\alpha v + \frac{1}{2} y \cdot \nabla v + \Delta v = 0 \qquad \text{en } \mathbb{R}^N,$$

por lo que ahora se tiene una ecuación diferencial parcial, donde sólo interviene la variable x, la cual se trata de resolver con soluciones radiales, que son de la forma

$$v(y) = w(|y|) \qquad \text{con } w : \mathbb{R} \to \mathbb{R};$$

si se nombra a $|y| = r$ y se sustituye en la ecuación anterior, se obtiene

$$\alpha w + \frac{1}{2} r w' + w'' + \frac{N-1}{r} w' = 0,$$

si ahora se multiplica esta expresión por r^{N-1}, se obtiene

$$r^{N-1} w'' + (N-1) r^{N-2} w' + \alpha r^{N-1} w + \frac{1}{2} r^N w' = 0,$$

al tomar $\alpha = \frac{N}{2}$ se tiene

$$\left(r^{N-1} w' + \frac{1}{2} r^N w\right)' = 0.$$

Esta ecuación, es una ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden, la cual tiene solución general

$$w(r) = b e^{\frac{-r^2}{4}} + a \int_0^r \frac{1}{s^{N-1}} e^{\frac{\left(\frac{s^2}{4-r^2}\right)}{4}} \mathrm{d}s,$$

[1] **Invariancia.** Una función de puntos φ se dice que es invariante con respecto a un operador l, si tiene el mismo valor en todos los puntos imágenes del operador l. Osea, φ es invariante respecto a τ $\Leftrightarrow \varphi(\tau x) = \varphi(\tau x)\ \forall x$.

con a y b constantes genéricas. Si se toma $a \equiv 0$ y se regresa a $u(x,\tau)$ en la ecuación (3.3), se obtiene una solución de la ecuación de calor dada por

$$u(x,\tau) = b\frac{1}{\tau^{\frac{N}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4\tau}}, \qquad (x,\tau) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty).$$

Por último, se considera $b = (4\pi)^{-\frac{N}{2}}$, de lo que se tiene

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} u(x,\tau)\,\mathrm{d}x = 1 \qquad\qquad \forall \tau > 0.$$

Dado lo anterior, se tiene la siguiente definición:

Definición 3.2. La función $E(x,\tau)$, que se decribe a continuación es la solución fundamental de la ecuación de calor o núcleo de Gauss

$$E(x,\tau) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi\tau)^{\frac{N}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4\tau}} & si \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad \tau > 0 \\ 0 & si \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad \tau \leq 0. \end{cases}$$

Observación 3.1. La función E es una función regular, salvo en el origen, es decir,

$$E \in C^\infty\left(\mathbb{R}^{N-1} - \{(0,0)\}\right).$$

Por otro lado también es comprobable que si se fija $y \in \mathbb{R}^N$ y $s > 0$, la función de las variables (x,τ), $E(x-y,\tau-s)$, es también solución de la ecuación de calor en $\mathbb{R}^N \times (s,\infty)$:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}E(x-y,\tau-s) - \Delta_x E(x-y,\tau-s) = 0 \qquad \forall\ (x,\tau) \in \mathbb{R}^N \times (s,\infty).$$

3.5 Solución al problema de Cauchy homogéneo

Ahora se uiliza E para determinar una solución del problema de Cauchy de la ecuación (3.2). A partir de la observación 3.1, se utiliza el hecho de que la función $E(x-y,\tau)$ es solución de la ecuación de calor en $\mathbb{R}^N \times (0,\infty)$. Por lo que una posible solución para el problema de la ecuación (3.2) es el producto de convolución[2] de E y u_0: $u(x,\tau) = (E(\cdot,\tau) * u_0)(x)$; por lo que se define

$$\begin{aligned} u(x,\tau) &= \int_{\mathbb{R}^N} E(x-y,\tau)\, u_0(y)\, \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{(4\pi\tau)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x-y|^2}{4\tau}} u_0(y)\, \mathrm{d}y, \quad (x,\tau) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Se tiene:

Teorema 3.2. Solución clásica del problema de Cauchy. Supóngase que u_0 pertenece a $C^0(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Entonces, la función u dada por (3.4) esta bien definida en $\mathbb{R}^N \times (0,\infty)$ y satisface

1. $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times (0,\infty))$,
2. $\frac{\partial}{\partial\tau} u(x,\tau) - \Delta u(x,\tau) = 0, \qquad \forall (x,\tau) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty)$,
3. $\lim\limits_{(x,\tau)\to(x_0,0^+)} u(x,\tau) = u_0(x_0), \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}^N$
4. $|u(x,\tau)| \leq \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^N} |u_0(x)| = \|u_0\|_{\infty,\mathbb{R}^N}, \forall (x,\tau) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty)$.

[2] En matemáticas y en particular en análisis funcional, una convolución es un operador matemático que transforma dos funciones f y g en una tercera función que en cierto sentido representa la magnitud en la que se superponen, f y una versión trasladada e invertida de g.

La convolución de f y g se denota $f \times g$. Se define como la integral del producto de ambas funciones después de que a una se le da una especie de vuelta y se le traslada.

$$(f \times g)(t) = \int f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau.$$

El rango de integración dependerá del dominio sobre el que estén definidas las funciones. En el caso de un rango de integración finito, f y g se consideran a menudo como extendidas, periódicamente en ambas direcciones, tal que el término $g(\tau - t)$ no implique una violación en el rango. Cuando se usan estos dominios periódicos la convolución a veces se llama cíclica. Desde luego que también es posible extender con ceros los dominios. El nombre usado cuando se ponen en juego estos dominios "cero-extendidos" o bien los infinitos, es el de convolución lineal.

Capítulo 4

Diversas metodologías para la valuación de opciones

4.1 Valuación con enfoque probabilista Modelo de Black y Scholes

4.1.1 Introducción

Con teoría de probabilidad como herramienta principal se obtiene la fórmula que es solución al modelo de Black-Scholes, con la que se calcula el precio de una opción europea de compra. Bajo las hipótesis de que el activo subyacente es una acción que no paga dividendos durante la vida del contrato, que el comportamiento de los precios del activo subyacente es descrito por el movimiento geométrico browniano y por neutralidad al riesgo, es posible calcular la función de densidad del activo subyacente y entonces calcular el valor presente del valor esperado del intrínseco, descontado al tipo de interés libre de riesgo; obteniendo así por integración el valor presente de la prima de la opción europea de compra. Y la opción europea de venta con características similares, se obtiene mediante la condición de paridad para opciones europeas de compra y de venta.

4.1.2 Expresión analítica de hipótesis

4.1.2.1 Distribución lognormal del subyacente

Considere un proceso de Wiener $(W_t)_{t\in[0,T]}$ definido sobre un espacio fijo de probabilidad con una filtración $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$. Se supone que el precio del activo subyacente S_t en el tiempo t, tiene una distribución lognormal, es decir, su comportamiento es modelado por el movimiento geométrico Browniano en su forma diferecial

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t. \qquad (4.1.1),$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0 \in \mathbb{R}$ son costantes que se interpretan como el rendimiento medio esperado de S_t y su volatilidad instantánea.

Una variable que se distribuye lognormal tiene la propiedad de que el logaritmo neperiano de la misma variable se distribuye normalmente; para verlo, se aplica el lema de Itô al logaritmo natural de S_t, por lo que se tiene

$$\mathrm{d}\left(\ln S_t\right) = \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t, \tag{4.1.2}$$

al discretizar la ecuación anterior con $\Delta t = T - t$, se obtiene

$$\ln S_T - \ln S_t = \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t) + \sigma\sqrt{T - t}\mathcal{E},$$

donde $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0,1)$. Lo cual implica que el rendimiento logarítmico se distribuye normalmente,

$$\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) \sim \mathcal{N}\left(\left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t), \sigma^2(T - t)\right). \tag{4.1.3}$$

4.1.2.2 Mercado de crédito

Se supone que existe un mercado de crédito libre de riesgo de incumplimiento, en el que los inversionistas hacen transacciones a una tasa de interés constante r a todos los plazos, que se aplica de forma continuamente capitalizable. Esto implica que si un inversionista deposita B_0 unidades monetarias, entonces en el tiempo t su saldo esta dado por $B_t = B_0 e^{rt}$; y el rendimiento en el instante $\mathrm{d}t$ satisface la ecuación diferencial $\mathrm{d}B_t = B_t r_t \mathrm{d}t$, con la condición inicial B_0.

4.1.2.3 Valuación neutral al riesgo

El principio de valuación neutral al riesgo establece que cualqier valor financiero dependiente de otro activo financiero puede valorarse bajo el supuesto de que el mundo es neutral al riesgo, en este, el rendimiento esperado de todos los activos financieros es el tipo de interés libre de riesgo y el tipo de descuento correcto para los flujos de caja esperados es también, el tipo de interés libre de riesgo, por lo que en (4.1.1) deberá de sustituirse $\mu = r$;

así el valor de una opción depende unicamente de la desviacón estandar del conjunto de los precios; lo cual se aprecia en el modelo ya que en la ecuación diferencial no aparece μ.

4.1.3 Función de densidad del precio del activo subyacente

Dada la distribución normal del rendimiento logarítmico de la ecuación (4.1.3) y dada la sección anterior 4.1.2, en que se muestra que el movimiento geométrico Browniano esta definido sobre una medida de probabilidad neutral al riesgo y considerando a $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0,1)$ con su respectiva función de densidad dada por

$$\phi(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2}, \qquad \epsilon \in \mathbb{R}. \tag{4.1.4}$$

Se define como $g(\mathcal{E})$ a la transformación exponencial de $\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right)$

$$g(\mathcal{E}) := S_T = S_t e^{\left\{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}\ \mathcal{E}\right\}}, \tag{4.1.5}$$

lo cual implica que

$$\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) = r - \tfrac{1}{2}\sigma^2\,(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}\mathcal{E}$$

o

$$\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) - \left(r - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) = \sigma\sqrt{T-t}\mathcal{E},$$

de donde,

$$g^{-1}(S_T) = \frac{\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = \mathcal{E}. \tag{4.1.6}$$

Ahora para describir la función de densidad, se considera el siguiente teorema para funciones de variables aleatorias.

Teorema 4.1. Sea X una variable aleatoria continua con función de probabilidad f, donde $f(x) > 0$ para $a < x < b$; suponga que $y = H(x)$ es una función de x estrictamente monótona (creciente o decreciente); suponga también que esta función es derivable y por tanto continua para toda x. Entonces, la variable aleatoria Y definida como $Y = H(X)$ tiene una función de probabilidad g dada por

$$g(y) = f(x)\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|,$$

donde x se expresa en términos de y. Si H es creciente, entonces $g \neq 0$, para los valores de y que satisfacen $H(a) < y < H(b)$. Si H es decreciente, entonces $g \neq 0$, para los valores de y que satisfacen $H(b) < y < H(a)$.

Dado el teorema anterior se calcula la función de densidad de S_T dado S_t

$$f_{S_T|S_t}(s|S_t) = \phi(g^{-1}(s))\left|\frac{\mathrm{d}g^{-1}(s)}{\mathrm{d}s}\right| \tag{4.1.7}$$

esto es,

$$f_{S_T|S_t}(s|S_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}\sigma s} e^{\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\left(\frac{S}{S_t}\right)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)^2\right\}}. \tag{4.1.8}$$

Se puede probar que esta función de densidad tiene valor medio de S_T dado el valor actual S_t:

$$E[S_T|\, S_t] = S_t e^{r(T-t)};$$

y varianza:

$$\mathrm{Var}[S_T|\, S_t] = E\left[S_T^2\middle|\, S_t\right] - (E[S_T|\, S_t])^2 = S_t^2 e^{2r(T-t)}\left(e^{\sigma^2(T-t)} - 1\right).$$

4.1.4 Obtención de la fórmula para valuar una opción europea de compra

El precio $c = c(S_t, t; T, K, r, \sigma)$ de una opción de compra europea sobre el activo S_t, en el tiempo t, con precio de ejercicio K y fecha de vencimiento en T, y que puede ser expresado sólo como función de S_t y t, $c = c(S_t, t)$, ya que K y T se estipulan en el contrato y r y σ por hipótesis permanecen constantes, está dado por el valor esperado del valor presente del valor intrínseco:

$$c = e^{-r(T-t)}\mathrm{E}\left\{\max(S_T - K, 0)\;\middle|\; S_t\right\}.$$

Donde $max(S_T - K, 0)$ es el valor intrínseco que relaciona el precio del subyacente en el mercado y el precio de liquidación al vencimiento.

Para realizar el calculo de $c(S_t, t)$, se hace el siguiente breve parentésis algebraico. A partir de $g^{-1}(S_T)$, que se obtuvo en la ecuación (4.1.6), se desprende que

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ &\Rightarrow \epsilon\sigma\sqrt{T-t} = \ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - \left(r - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) \\ &\Rightarrow e^{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right)} = e^{\epsilon\sigma\sqrt{T-t} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}\end{aligned}$$

de donde

$$s = S_t e^{\epsilon\sigma\sqrt{T-t} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}, \tag{4.1.9}$$

y cuya diferencial esta dada por

$$\mathrm{d}s = S_t e^{\epsilon\sigma\sqrt{T-t} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} \sigma\sqrt{T-t}\mathrm{d}\epsilon \tag{4.1.10}$$

al sustituir (4.1.9) en (4.1.10) se tiene equivalentemente que

$$\mathrm{d}s = s\sigma\sqrt{T-t}\mathrm{d}\epsilon$$

con lo que se cierra el paréntesis algebraico.

Ahora para calcular el valor esperado del valor presente del valor intrínseco, se utilizará la definición de la esperanza condicional para una variable aleatoria continua, esto es,

$$\begin{aligned}c =& e^{-r(T-t)} \int_0^\infty \max(s-K, 0) f_{S_T|S_t}(s|S_t)\mathrm{d}s \\ =& e^{-r(T-t)} \int_K^\infty (s-K) f_{S_T|S_t}(s|S_t)\mathrm{d}s \\ =& e^{-r(T-t)} \int_{s>K} s f_{S_T|S_t}(s|S_t)\mathrm{d}s - K e^{-r(T-t)} \int_{s>K} f_{S_T|S_t}(s|S_t)\mathrm{d}s \\ =& e^{-r(T-t)} \int_{s>K} \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}\sigma} e^{\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\left(\frac{S}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)^2\right\}} \mathrm{d}s \\ & - K e^{-r(T-t)} \int_{s>K} \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}\sigma s} e^{\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\left(\frac{S}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)^2\right\}} \mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{4.1.11}$$

Se denota a las integrales de (4.1.11) con $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ y se reemplaza en estas a (4.1.10), lo que genera un cambio de variable y por ende un cambio en los límites de integración; el cambio resultante en los límites se establece a continuación

$$
\begin{aligned}
& s\rangle K \\
& \Rightarrow S_t e^{\varepsilon\sigma\sqrt{T-t}+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}\rangle K \\
& \Rightarrow \ln\left(S_t e^{\varepsilon\sigma\sqrt{T-t}+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}\right)\rangle \ln(K) \\
& \Rightarrow \ln(S_t)+\ln\left(e^{\varepsilon\sigma\sqrt{T-t}+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}\right)\rangle \ln(K)\quad . \\
& \Rightarrow \varepsilon\sigma\sqrt{T-t}+\left(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\rangle \ln(K)-\ln(S_t) \\
& \Rightarrow \varepsilon\sigma\sqrt{T-t}\rangle \ln\left(\frac{K}{S_t}\right)-\left(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) \\
& \Rightarrow \varepsilon\rangle \frac{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right)-\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}
\end{aligned}
$$

Si se considera el cambio de variable $u=\epsilon-\sigma\sqrt{T-t}$ y se asume el hecho de que $-\mathcal{E}\sim\mathcal{N}(0,1)$, se calcula a $\mathcal{I}_1$ como:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_1 :=& e^{-r(T-t)}S_t\int_{\left\{\epsilon\,>\,\frac{\ln(K/S_t)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2}e^{\sigma\sqrt{T-t}\;\epsilon+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}\mathrm{d}\epsilon \\
=& S_t\int_{\left\{\epsilon-\sigma\sqrt{T-t}\,>\,\frac{\ln(K/S_t)-(r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\epsilon-\sigma\sqrt{T-t})^2}\mathrm{d}\epsilon \\
=& S_t\int_{\left\{-\infty\,<\,u\,<\,\frac{\ln(S_t/K)+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}u^2}\mathrm{d}u.
\end{aligned}
\tag{4.1.12}
$$

Y la segunda integral esta dada por

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_2 :=& -Ke^{-r(T-t)}\int_{\left\{\epsilon>\frac{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right)-\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\,(T-t)}\sigma s}e^{\left\{-\frac{1}{2}\epsilon^2\right\}}\sigma s\sqrt{T-t}\;\mathrm{d}\epsilon \\
=& -Ke^{-r(T-t)}\int_{\left\{\epsilon\,>\,\frac{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2}\mathrm{d}\epsilon \\
=& -Ke^{-r(T-t)}\int_{\left\{-\infty\,<\,\epsilon\,<\,\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2}\mathrm{d}\epsilon.
\end{aligned}
\tag{4.1.13}
$$

Si se considera a $\Phi(d)$ como la función de distribución acumulada de $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0,1)$, es decir,

$$\Phi(d) = \mathbb{P}_{\mathcal{E}}\{\mathcal{E} \leq d\} = \int_{-\infty}^{d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} \mathrm{d}\epsilon = 1 - \Phi(-d), \tag{4.1.14}$$

entonces de (4.1.12) se tiene que

$$d_1 = d_1(S_t, t; T, K, r, \sigma) = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{4.1.15}$$

y de (4.1.13)

$$d_2 = d_2(S_t, t; T, K, r, \sigma) = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \tag{4.1.16}$$

El resultado de combinar las ecuaciones en (4.1.11), (4.1.12), (4.1.13), (4.1.14), (4.1.15) y (4.1.16) es

$$c = S_t\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2), \tag{4.1.17}$$

es decir, el precio de la opción europea de compra.

4.1.5 Paridad "put-call" y obtención de la fórmula para valuar una opción europea de venta

De manera análoga al análisis anterior, es posible obtener la prima de la opción auropea de venta, la cual se denota mediante la función $p = p(S_t, t; T, K, r, \sigma)$ o $p(S_t, t)$, más específicamente.

A pesar de ser diferentes las opciones *put* y *call*, cuando ambas opciones tienen características similares están correlacionadas mediante la ecuación de paridad *"put-call"* $p + S_t = c + Ke^{-r(T-t)}$, de donde se observa que la fórmula para valuar la opción europea de venta es posible expresarla en términos de la opción europea de compra, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} p &= c - S_t + Ke^{-r(T-t)} \\ &= S_t\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2) - S_t + Ke^{-r(T-t)} \\ &= S_t(1 - \Phi(-d_1) - 1) + Ke^{-r(T-t)}(1 - (1 - \Phi(-d_2))) \\ &= -S_t\Phi(-d_1) + Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2). \end{aligned} \tag{4.1.18}$$

4.2 Valuación con enfoque de ecuaciones diferenciales parciales

Modelo de Black y Scholes

4.2.1 Introducción

En esta sección la herramienta principal para determinar el precio teórico de una opción son las ecuaciones diferenciales parciales, primeramente se obtiene la ecuación diferencial parcial de segundo orden que Fischer Black y Myron Scholes establecieron en su modelo para valuar una opción europea de compra sobre una acción que no paga dividendos durante la vida del contrato y bajo el supuesto de que el precio de la acción se distribuye lognormal. También con ecuaciones diferenciales parciales se resuelve dicha ecuación con condición de frontera, el valor intrínseco del instrumento derivado. El modelo de Black y Scholes publicado en 1973 en el artículo *"The Pricing of Options and Corporate Liabilities"* en el *Journal of Political Economy*, representa para la matemática financiera moderna y para los mercados financieros internacionales una pieza fundamental en el crecimiento y éxito de la economía financiera, tan importante resultado enriquecido por las aportaciones de Robert Merton fue el motivo que en 1997 les valiera el premio Novel a Merton y Scholes.

Los supuestos básicos del modelo clásico de Black y Scholes son:

1) el activo subyacente es una acción que no paga dividendos durante la vida del contrato;
2) el precio del activo subyacente es conducido por el movimiento geométrico Browniano, es decir, el precio es lognormal o los rendimientos son normales;
3) la volatilidad del precio del activo subyacente se mantiene constante a través del tiempo;
4) las ventas en corto del subyacente en cuestión son permitidas;
5) el mercado del subyacente es líquido y divisible, es decir, el subyacente se puede comprar y vender en cualquier fracción de unidad;
6) no hay costos de transacción (comisiones e impuestos);

7) el mercado opera en forma continua, es decir, no hay fines de semana ni días festivos;

8) existe un mercado de crédito, un sistema bancario en el que los agentes pueden prestar y pedir prestado a una tasa de interés constante a todos los plazos y libre de riesgo de incumplimiento;

9) los mercados están en equilibrio, es decir, no existen oportunidades de arbitraje y

10) todos los agentes comparten exactamente la misma información, es decir la información es simétrica.

4.2.2 Expresión analítica de hipótesis

4.2.2.1 Distribución del activo subyacente

Considere un proceso de Wiener $(W_t)_{t\in[0,T]}$ definido sobre un espacio fijo de probabilidad con con su filtración aumentada $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^W)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$. El supuesto de que los precios de una acción S_t en el tiempo t, tienen una distribución lognormal, quiere decir que su distribución es modelada por el movimiento geométrico Browniano, descrito en forma diferencial mediante la ecuación diferencial estocástica

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t, \tag{4.2.1}$$

en donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$ son constantes, a las cuales se interpreta como el rendimiento medio esperado y la volatilidad instantánea respectivamente del activo subyacente, y donde $\mathrm{d}S_t$ representa el cambio infinitésimal en el precio del subyacente y $\mathrm{d}W_t \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{d}t)$, es el proceso que modela las fluctuaciones propias del mercado de S_t. El proceso $\{S_t\}_{t\geq 0}$ es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$. Y su correspondiente integral estocástica es

$$S_t = S_0 + \mu \int_0^t S_u \mathrm{d}u + \sigma \int_0^t S_u \mathrm{d}W_u, \quad t \in [0, T].$$

Dado que S_t se distribuye lognormal, implica que $ln(S_t)$ se distribuye normalmente (véase sección 4.1.1), por lo que al aplicar el lema de Itô a $ln(S_t)$, se tiene

$$\mathrm{d}\left(\ln S_t\right) = \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right) \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t\,;$$

cuya integral estocástica correspondiente es

$$ln(S_t) = ln(S_0) + \mu \int_0^t \mathrm{d}u + \sigma \int_0^t \mathrm{d}W_u - \tfrac{1}{2}\sigma^2 \int_0^t \mathrm{d}W_u^2, \quad t \in [0, T],$$

al integrar se tiene que

$$\ln S_t = \ln S_0 + \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t,$$

después de aplicar la transformación exponencial a esta ultima expresión se obtiene

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t},$$

que corresponde a la definición que se dio en el capítulo dos de movimiento Browniano geométrico.

4.2.2.2 Cambios en la prima de la opción inducidos por el tiempo

La prima o precio de una opción europea de compra con parámetros: S_t = precio del activo subyacente, t = fecha de inicio del contrato, K = precio de ejercicio, T = fecha de vencimiento del contrato, r = tasa de interés del mercado de crédito, σ = volatilidad y μ = rendimiento medio, los cuales se estipulan en el contrato, se expresa funcionalmente como:

$$c = c(S_t, t; T, K, r, \sigma, \mu), \tag{4.2.2}$$

pero también se puede expresar como función unicamente de los parámetros S_t y t, $c\,(S_t, t)$, ya que K y T se estipulan en el contrato, $r = \mu$ por la hipótesis de neutralida al riesgo y r y σ por hipótesis permanecen constantes.

Cada cambio marginal en el tiempo, de t a $t + \mathrm{d}t$ durante la vida del contrato, el activo subyacente cambia marginalmente de S_t a $S_t + \mathrm{d}S_t$, lo que a su vez implica que la prima de la opción cambie marginalmente de $c(S_t, t)$ a $c + \mathrm{d}c$, tal cambio esta dado por:

$$\mathrm{d}c = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t}\mu S_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\right)\mathrm{d}t + \frac{\partial c}{\partial S_t}\sigma S_t \mathrm{d}W_t \tag{4.2.3}$$

el cual se obtiene de aplicar el lema de Itô (también llamado Teorema fundamental del Cálculo Estocástico) a $c(S_t, t)$.

4.2.2.3 Un portafolio combinado y su cambio inducido por el tiempo

Suponga también la existencia de un portafolio, denotado por Π_t, cuyo valor presente es,

$$\Pi_t = \omega_1 S_t + \omega_2 c(S_t, t), \tag{4.2.4}$$

que combina una cierta cantidad ω_1 unidades del activo subyacente de precio S_t y otra cierta cantidad ω_2 unidades de una opción de compra sobre el mismo subyacente, de precio $c(S_t, t)$.

Cuando el tiempo t tiene un cambio marginal de t a $t + \mathrm{d}t$, interesa saber, cual es el cambio en el valor del portafolio durante el instante $\mathrm{d}t$, el cual está dado por fluctuaciones del mercado y es:

$$\mathrm{d}\Pi_t = \omega_1 \mathrm{d}S_t + \omega_2 \mathrm{d}c. \tag{4.2.5}$$

4.2.2.4 Mercado de crédito

Se supone la existencia de un mercado de crédito, en el que inversionistas pueden prestar y pedir prestado a una tasa de interés constante r a todos los plazos y libre de riesgo de incumplimiento, que se aplica de forma continuamente capitalizable. Este supuesto implica que si un inversionista deposita B_0 unidades monetarias, entonces en el tiempo t su saldo esta dado por $B_t = B_0 e^{rt}$; y el rendimiento marginal de su inversión en el instante $\mathrm{d}t$ satisface la ecuación diferencial $\mathrm{d}B_t = B_t r_t \mathrm{d}t$, con condición inicial B_0. Alternativamente si el valor del portafolio Π_t se depósita en un banco que paga una tasa de interés r libre de riesgo de incumplimiento, entonces su rendimiento marginal esta dado por

$$\mathrm{d}\Pi_t^r = \Pi_t r \mathrm{d}t. \tag{4.2.6}$$

4.2.2.5 Ausencia de arbitraje

La ausencia de oportunidades de arbitrage implica que no hay diferenciales de precios para cualesquiera dos mercados que permitan ganancias, significa que todos los portafolios deben de ganar el mismo rendimiento, lo que sucede sólo si los mercados estan en equilibrio.

4.2.3 Derivación de la ecuación diferencial parcial de Black y Scholes

Suponga que el valor de una acción que se toma como activo subyacente es S_t y satisface la ecuación diferencial estocástica conocida como movimiento geométrico Browniano, a saber

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t$$

en donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$ son los parámetros de tendencia y volatilidad instantánea del activo subyacente y donde $\mathrm{d}W_t \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{d}t)$.

Bajo el supuesto de volatilidad constante y tasa libre de riesgo también constante, la prima de una opción de compra europea se denota como $c\,(S_t, t)$. Al aplicar el lema de Itô (también llamado teorema fundamental del cálculo estocástico) a $c\,(S_t, t)$ se obtiene 4.2.3,

$$\mathrm{d}c = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t}\mu S_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \right) \mathrm{d}t + \frac{\partial c}{\partial S_t}\sigma S_t \mathrm{d}W_t.$$

En este caso como el valor de la opción esta perfectamente correlacionado con el valor del activo subyacente, se puede valuar el precio de la opción construyendo un portafolio que elimine la aleatoriedad del movimiento browniano, de modo de eliminar totalmente la incertidumbre del portafolio; tal portafolio consiste de una opción y un número $\frac{-\partial c}{\partial S_t}$ de acciones. Así el valor del portafolio esta dado por,

$$\Pi_t = c\,(S_t, t) - \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t, \tag{4.2.7}$$

el cambio en el valor del portafolio es

$$\mathrm{d}\Pi_t = \mathrm{d}c - \frac{\partial c}{\partial S_t} dS_t, \tag{4.2.8}$$

al sustituir (4.2.1) y (4.2.3) en (4.2.8) se tiene

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\Pi_t &= \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t}\mu S_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial c^2}{\partial S_t^2}\right)\mathrm{d}t + \frac{\partial c}{\partial S_t}\sigma S_t \mathrm{d}W_t - \frac{\partial c}{\partial S_t}\left(\mu S_t dt + \sigma S_t \mathrm{d}W_t\right) \\ &= \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial c^2}{\partial S_t^2}\right)\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

Nota: a la elección particular de $\omega_2 = 1$ y $\omega_1 = -\Delta = -\frac{\partial c}{\partial S_t}$ se le conoce como cobertura Delta; y significa que se esta cubriendo una venta en corto[1] de Δ unidades del subyacente con una opción de compra.

El supuesto de un mercado de crédito libre de riesgo permite suponer que el valor del portafolio Π_t se depósita en un banco que paga una tasa de interés libre de riesgo que se aplica en forma continuamente capitalizable, por lo que el cambio en el valor del portafolio durante $\mathrm{d}t$ es (4.2.6):

$$\mathrm{d}\Pi_t^r = \Pi_t r \mathrm{d}t.$$

Una vez eliminado el riesgo, el valor del portafolio en el tiempo debe de ser igual por el principio de no arbitraje a colocar la misma cantidad de dinero en un instrumento con tasa libre de riesgo por lo que:

$$\mathrm{d}\Pi_t^r = \Pi_t r \mathrm{d}t = \mathrm{d}\Pi_t$$

es decir,

$$\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial c^2}{\partial S_t^2}\right)\mathrm{d}t = \left(c - \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t\right) r\mathrm{d}t \tag{4.2.10}$$

al dividir (4.2.10) por $\mathrm{d}t$ obtenemos la ecuación diferencial parcial de Black y Scholes:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial c^2}{\partial S_t^2} - cr + \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t r = 0. \tag{4.2.11}$$

Como toda ecuación diferencial tiene una infinidad de soluciones, para determinar la solución única para la opción de compra europea se tienen las condiciones de frontera y final, dadas respectivamente por,

$$c(0,t) = 0 \qquad \text{y} \qquad c(S_t, T) = \max(S_t - K, 0).$$

[1] Se dice que hay venta en corto cuando un inversionista vende un activo financiero que ha conseguido prestado de otro inversionista; la operación de venta en corto la realiza quien tiene espectativas de que la acción ba a la baja.

Se observa que en la ecuación (4.2.11) el parámetro μ no aparece, lo que significa que el valor de la opción es independiente de la rapidez con que crece el valor del activo y el único parámetro del precio del activo que afecta el precio de la opción es la volatilidad σ.

Observe también que la ecuación diferencial parcial lineal de Black-Scholes es de segundo orden y parabólica[2], en donde por el echo de ser lineal, el principio de superposición implica que si tiene dos o mas soluciones, entonces la combinación lineal de ellas también es una solución, por lo que el modelo de Black-Scholes acepta el valor del portafolio como solución; y por el hecho de ser parabólica está relacionada con la ecuación de difusión de calor, es decir, con una ecuación de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u = u(x,\tau) \quad -\infty < x < \infty, \quad \tau > 0 \quad y \quad k > 0,$$

junto con la condición

$$u(x,0) = u_0(x).$$

4.2.4 Solución de la ecuación diferencial parcial de Black y Scholes

Ahora para encontrar el precio de la opción europea de compra se da solución a la ecuación (4.2.11), la cual se renombra por cuestión de orden pertinente a la sección,

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial c}{\partial S_t}S_t r - rc = 0, \tag{4.2.12}$$

con condición e frontera,

$$c(S_t, T) = \max(S_t - K, 0).$$

[2] Definición. Clasificación de ecuaciones: Se dice que la ecuación diferncial parcial, lineal, de segundo orden

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{du}{dx} + E\frac{du}{dy} + Fu = 0,$$

donde A, B, C, D, E y F son constantes reales, es hiperbólica si $B^2 - 4AC > 0$, parabólica si $B^2 - 4AC = 0$, y elíptica si $B^2 - 4AC < 0$.

Para comenzar con este preoceso de solución, considere el siguiente cambio de variables:

$$c(S_t, t) = f(t)g(u_1, u_2), \qquad u_1 = u_1(S_t, t) \qquad \text{y} \qquad u_2 = u_2(S_t, t),$$

donde $f(t)$ y $g(u_1, u_2)$ se obtendrán más adelante. Con el cambio de variables propuesto, se reescribe la ecuación (4.2.12) como:

$$\begin{aligned}
&f'(t)g(u_1,u_2) + f(t)\left[\left(\frac{\partial g}{\partial u_1}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial g}{\partial u_2}\right)\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)\right] \\
&+ \tfrac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 f(t)\Bigg[\left(\left(\frac{\partial g}{\partial u_1}\right)\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial S_t^2}\right) + \left(\frac{\partial u_1}{\partial S_t}\right)\left(\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial S_t}\right) + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u_1 \partial u_2}\right)\left(\frac{\partial u_2}{\partial S_t}\right)\right)\right) \\
&+ \left(\left(\frac{\partial g}{\partial u_2}\right)\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial S_t^2}\right) + \left(\frac{\partial u_2}{\partial S_t}\right)\left(\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u_2^2}\right)\left(\frac{\partial u_2}{\partial S_t}\right) + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u_2 \partial u_1}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial S_t}\right)\right)\right)\Bigg] \\
&+ rS_t f(t)\left[\left(\frac{\partial g}{\partial u_1}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial S_t}\right) + \left(\frac{\partial g}{\partial u_2}\right)\left(\frac{\partial u_2}{\partial S_t}\right)\right] - rf(t)g(u_1,u_2) = 0.
\end{aligned} \tag{4.2.13}$$

Suponga ahora que $f \neq 0$, entonces al dividir la expresión algebraica (4.2.13) entre f, se tiene

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{f'(t)}{f(t)} - r\right)g(u_1,u_2) + \left[\left(\frac{\partial g}{\partial u_1}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial g}{\partial u_2}\right)\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)\right] \\
&+ \tfrac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\Bigg[\left(\left(\frac{\partial g}{\partial u_1}\right)\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial S_t^2}\right) + \left(\frac{\partial u_1}{\partial S_t}\right)\left(\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial S_t}\right) + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u_1 \partial u_2}\right)\left(\frac{\partial u_2}{\partial S_t}\right)\right)\right) \\
&+ \left(\left(\frac{\partial g}{\partial u_2}\right)\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial S_t^2}\right) + \left(\frac{\partial u_2}{\partial S_t}\right)\left(\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u_2^2}\right)\left(\frac{\partial u_2}{\partial S_t}\right) + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u_2 \partial u_1}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial S_t}\right)\right)\right)\Bigg] \\
&+ rS_t\left[\left(\frac{\partial g}{\partial u_1}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial S_t}\right) + \left(\frac{\partial g}{\partial u_2}\right)\left(\frac{\partial u_2}{\partial S_t}\right)\right] = 0,
\end{aligned} \tag{4.2.14}$$

de donde se obtiene que

$$f'(t) = rf(t),$$

el resultado de esta ecuación diferencial, junto con su condición inicial es:

$$f(t) = e^{-r(T-t)}, \qquad f(T) = 1. \tag{4.2.15}$$

Considere ahora, que la función u_2 está dada por:

$$u_2(S_t, t) = u_2(t) = B(T-t), \qquad u_2(T) = 0, \tag{4.2.16}$$

y suponga además que,

$$\frac{\partial g}{\partial u_2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2}, \tag{4.2.17}$$

con estos supuestos se reescribe (4.2.14) nuevamente como:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2}\left[\tfrac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial S_t}\right)^2 - B\right] + \frac{\partial g}{\partial u_1}\left[\frac{\partial u_1}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial u_1}{\partial S_t} r S_t\right] = 0. \tag{4.2.18}$$

Si ahora se supone que

$$\tfrac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial S_t}\right)^2 = B, \tag{4.2.19}$$

se puede denotar sin problema alguno a $B = A^2$. De donde por una parte se obtiene la función $u_1\left(S_t, t\right)$ y por otra parte se reduce la ecuación (4.2.18),esto es,

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial S_t}\right)^2 = A^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial u_1}{\partial S_t} = \sqrt{\frac{2A^2}{\sigma^2 S_t^2}} = \frac{\sqrt{2}A}{\sigma S_t}$$

de donde,

$$u_1 = \int \mathrm{d}u_1 = \frac{A\sqrt{2}}{\sigma}\int \frac{dS_t}{S_t} = \frac{A\sqrt{2}}{\sigma}(\ln(S_t) - \ln(K)) + D(t). \tag{4.2.20}$$

con $-\ln(K)$ constante de integración, y $D(t)$ una función por determinar. La ecuación (4.2.19) hace que (4.2.18) se reduzca a

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial u_1}{\partial S_t} r S_t = 0. \tag{4.2.21}$$

Ahora se obtiene $D(t)$ a partir de usar u_1 de (4.2.20) en (4.2.21),

$$D'\left(t\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{S_t^2}\right)\left(\frac{A\sqrt{2}}{\sigma}\right)\sigma^2 S_t^2 + \left(\frac{A\sqrt{2}}{\sigma}\right)\left(\frac{1}{S_t}\right) r S_t = 0,$$

de donde,

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{S_t^2}\right)\left(\frac{A\sqrt{2}}{\sigma}\right)\sigma^2 S_t^2 + \left(\frac{A\sqrt{2}}{\sigma}\right)\left(\frac{1}{S_t}\right) r S_t = -D'\left(t\right) = -\left(\frac{A\sqrt{2}}{\sigma}\right)\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right),$$

al multiplicar por -1 en ambos lados de la última igualdad e integrar, se resuelve la ecuación diferencial, y puesto que es una función que depende del tiempo, se establece la solución junto con su condición inicial,

$$D(t) = \frac{A\sqrt{2}}{\sigma}\left(r - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t), \qquad D(T) = 0. \tag{4.2.22}$$

dado que ya se tiene $D(t)$ con condición inicial, se obtiene u_1 de (4.2.20), esto es,

$$\begin{aligned} u_1(S_t,t) =& \frac{A\sqrt{2}}{\sigma}\left[\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right] \\ u_1(S_t,T) =& \frac{A\sqrt{2}}{\sigma}\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) \end{aligned}, \tag{4.2.23}$$

obsérvese que $u_1(S_t,T)$ implica que: $\frac{u_1(S_t,T)\sigma}{A\sqrt{2}} = \ln\left(\frac{S_t}{K}\right)$ de donde $S_t = Ke^{\left(\frac{u_1(S_t,T)\sigma}{A\sqrt{2}}\right)}$.

El resultado de sustituir las condiciones iniciales de (4.2.15) y (4.2.16) y $u_1(S_t,T)$ de (4.2.23) en $c(S_t,T)$ es:

$$\begin{aligned} c(S_t,T) &= f(T)g(u_1(S_t,T),u_2(T)) \\ &= g(u_1(S_t,T),0) \\ &= g\left(\frac{A\sqrt{2}}{\sigma}\ln\left(\frac{S_t}{K}\right),0\right) \\ &= \max(S_t-K,0), \end{aligned} \tag{4.2.24}$$

así, el valor intrínseco de la opción en términos de $f(t)$ y $g(u_1,u_2)$,

$$c(S_t,T) = \max(S_t-K,0) = \begin{cases} K\left(e^{\left\{\frac{u_1(S_t,T)\sigma}{A\sqrt{2}}\right\}} - 1\right) & \text{si} \quad u_1(S_t,T) \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad u_1(S_t,T) < 0, \end{cases} \tag{4.2.25}$$

dado que

$$S_t > K \quad \Rightarrow \quad e^{\left\{\frac{u_1\sigma}{A\sqrt{2}}\right\}} > 1 \quad \Rightarrow \quad u_1 > 0;$$

por lo que $c(S_t,T)$ representa el pago de la opción en la fecha de vencimiento. El supuesto (4.2.17) es la ecuación diferencial parcial de calor, la cual ahora se establece junto con su condición inicial $g_0(u_1)$,

$$\frac{\partial g}{\partial u_2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2}, \qquad g = g(u_1,u_2), \qquad -\infty < u_1 < \infty, \qquad u_2 > 0, \tag{4.2.26}$$

$$g_0(u_1) := \begin{cases} K\left(e^{\left\{\frac{u_1\sigma}{A\sqrt{2}}\right\}} - 1\right) & \text{si} \quad u_1 \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad u_1 < 0; \end{cases}$$

la solución de dicha ecuación fué revisada en el capítulo anterior y esta dada por:

$$g(u_1,u_2) = \frac{1}{2\sqrt{\pi u_2}}\int_{-\infty}^{\infty} g_0(x)e^{-(x-u_1)^2/4u_2}\mathrm{d}x. \tag{4.2.27}$$

Ahora considere el siguiente cambio de variable, $y = \frac{x-u_1}{\sqrt{2u_2}}$, del cual se tiene

$$y = \frac{x - u_1}{\sqrt{2u_2}} \quad \Rightarrow \quad x = y\sqrt{2u_2} + u_1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \sqrt{2u_2}\mathrm{d}y,$$

considere también la condición inicial $g_0(x)$ para $x \leq 0$, para reescribir a $g(u_1, u_2)$,

$$g(u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-u_1/\sqrt{2u_2}}^{\infty} g_0(u_1 + \sqrt{2u_2}\ y)e^{-\frac{1}{2}y^2}\mathrm{d}y, \tag{4.2.28}$$

Al evaluar $g_0(x)$ para $x = y\sqrt{2u_2}+u_1$ en (4.2.26), se puede reescribir la integral de (4.2.28) como:

$$g(u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-u_1/\sqrt{2u_2}}^{\infty} K \left[\exp\left\{\frac{\sigma}{A\sqrt{2}}(u_1 + \sqrt{2u_2}\ y)\right\} - 1\right] e^{-\frac{1}{2}y^2}\mathrm{d}y. \tag{4.2.29}$$

Al sustituir u_1 y u_2 en el límite inferior de integración y en el exponente del integrando de la ecuación (4.2.29) ,se tienen los cambios correspondientes:

$$\begin{aligned} -\frac{u_1}{\sqrt{2u_2}} &= -\frac{A\sqrt{2}}{\sigma}\left[\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{T-t}\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma S_t \frac{A\sqrt{2}}{\sigma}\frac{K}{S_t}\frac{1}{K}}\right)\right] \\ &= -\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{A\sqrt{2}}\left(u_1 + \sqrt{2u_2}y\right) &= \frac{\sigma}{A\sqrt{2}}\left[\frac{A\sqrt{2}}{\sigma}\left(\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right)\right. \\ &\quad \left. + \left(\sqrt{2}\sqrt{T-t}\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma S_t \frac{A\sqrt{2}}{\sigma}\frac{K}{S_t}\frac{1}{K}\right)y\right] \\ &= \frac{\sigma}{A\sqrt{2}}\left[\frac{A\sqrt{2}}{\sigma}\left(\left(\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right)\right.\right. ; \\ &\quad \left.\left. + \left(\sqrt{2}\sqrt{T-t}\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma S_t \frac{K}{S_t}\frac{1}{K}\right)y\right)\right] \\ &= \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sqrt{T-t}\sigma y \end{aligned}$$

en consecuencia, se reescribe a (4.2.29) como:

$$\begin{aligned} g\left(u_1, u_2\right) &= \frac{S_t}{\sqrt{2\pi}} \int_{\left\{-\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\}}^{\infty} e^{\left\{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+\sqrt{T-t}\sigma y\right\}} e^{-\frac{1}{2}y^2}\mathrm{d}y \\ &\quad - \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \int_{\left\{-\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}\mathrm{d}y \end{aligned} . \tag{4.2.30}$$

Pero la variable y de integración debe de ser mayor que el límite inferior de integración, pues de no ser así, se convierte en cero el integrando y en el caso de ser igual o en el caso de ser menor, la función no es positiva; con esta observación se establecen los cambios correspondientes en los límites de integración, es decir,

$$
\begin{aligned}
g(u_1,u_2) =& \frac{S_t}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\left\{\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right\}} \left[e^{\left\{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+\sigma\sqrt{(T-t)}y\right\}}\right] e^{-\frac{1}{2}y^2}\mathrm{d}y \\
&- \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\left\{\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right\}} e^{-\frac{1}{2}y^2}\mathrm{d}y.
\end{aligned}
\tag{4.2.31}
$$

Recuérdese ahora que $c(S_t,t) = f(t)g(u_1,u_2)$, donde $f(t) = e^{-r(T-t)}$, por lo que se tiene de (4.2.31)

$$
\begin{aligned}
c(S_t,t) =& \frac{S_t}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\left\{\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right\}} \left[e^{\left\{\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+\sigma\sqrt{(T-t)}y\right\}}\right] e^{-\frac{1}{2}y^2}\mathrm{d}y \\
&- \frac{Ke^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\left\{\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right\}} e^{-\frac{1}{2}y^2}\mathrm{d}y,
\end{aligned}
\tag{4.2.32}
$$

al factorizar el cuadrado del argumento de la exponencial en el integrando, se tiene

$$
\begin{aligned}
c(S_t,t) =& \frac{S_t}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\left\{\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right\}} e^{\left\{-\frac{1}{2}\left(y-\sigma\sqrt{(T-t)}y\right)^2\right\}}\mathrm{d}y \\
&- \frac{Ke^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\left\{\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right\}} e^{-\frac{1}{2}y^2}\mathrm{d}y.
\end{aligned}
\tag{4.2.33}
$$

Ahora considere el siguiente cambio de variable $\epsilon = y - \sigma\sqrt{T-t}$, en el primer sumando de la ecuación (4.2.33), con lo que se obtiene que $c(S_t,t)$ en términos de este nuevo cambio de variable

$$
\begin{aligned}
c(S_t, t) = {} & \frac{S_t}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\left\{\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right\}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2}\mathrm{d}\epsilon \\
& - \frac{Ke^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\left\{\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right\}} e^{-\frac{1}{2}y^2}\mathrm{d}y,
\end{aligned}
$$

equivalentemente,

$$
\begin{aligned}
c\left(S_t, t\right) = {} & \frac{S_t}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\left\{\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right\}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2}\mathrm{d}\epsilon \\
& - \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\left\{\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right\}} e^{-\frac{1}{2}y^2}\mathrm{d}y.
\end{aligned}
\tag{4.2.34}
$$

Por último, si se denota a:

$$
d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t,}} \tag{4.2.35}
$$

$$
d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \tag{4.2.36}
$$

y

$$
\Phi(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{1}{2}y^2}\mathrm{d}y, \tag{4.2.37}
$$

se obtiene de sustituir (4.2.35), (4.2.36), y (4.2.37) en (4.2.34)

$$
c(S_t, t) = S_t\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2) \tag{4.2.38}
$$

el precio teórico de la opción europea de compra que representa la solución a la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes cuando la condición incial es el valor intrínseco de la misma.

4.3 Valuación con enfoque de ecuación de difusión de calor
Modelo de Black y Scholes

4.3.1 Introducción

Mediante cambios de variables convenientes que se aplican a la ecuación diferencial parcial de Black y Scholes se llega a la ecuación de difusión de calor o problema de Cauchy homogéneo, el cual como ya se ha visto esta dado por

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad -\infty < x < \infty \qquad \text{y} \qquad \tau > 0$$

con condición inicial

$$u\left(x,0\right) = u_{0}\left(x\right),$$

esta ecuación describe la evolución en el tiempo $\tau > 0$ de la temperatura a lo largo de una varilla L de longitud infinita, mediante la función $u\left(x_t,\tau\right)$; y dado que su solución depende del tiempo se determina lo que sucede en $\tau = 0$, mediante la condición inicial única arriba enunciada, que debe de satisfacer.

La solución clásica para este problema de valores iniciales homogéneo se abordo en el tercer capítulo y se utiliza para obtener la fórmula de valuación de la opción europea de compra. De la cual por cierto cabe mencionar es trabajada y aplicada en más de 30 lenguajes en el mundo[3].

4.3.2 Ecuación diferencial parcial de Black y Scholes

Dado que la ecuación que se va a transformar en la ecuación de difusión de calor es la ecuación diferencial parcial de Black y Scholes, se le mantendrá presente en esta sección junto con las condiciones de frontera, mediante la siguiente ecuación

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial c}{\partial S_t} r S_t - rc = 0, \tag{4.3.1}$$

[3] Lenguajes registrados: Autoit, Fortress, Lua, APL, SAS, Mathcad, J, MEL, Postscript, VB.NET, Clean, Ruby, Lisp, Prolog, PL/SQL, LyME, ColdFusion, K, HP48, Transact SQL, O'Caml, Rebol, Real Basic, Icon, Squeak, Haskell, JAVA , JavaScript, VBA, C++, Perl, Maple, Mathematica, Matlab, S-Plus, IDL, Pascal, Python, Fortran, Scheme, PHP.

$$c(0,t)=0, \qquad c(S_t,t)\approx S_t \quad \text{cuando} \quad S_t\to\infty,$$

y

$$c(S_t,T)=\max(S_t-K,0).$$

4.3.3 Transformación de la ecuación diferencial parcial de Black y Scholes en la ecuación de difusión de calor

4.3.3.1 Fase I

Para transformar la ecuación diferencial parcial de Black y Scholes en el problema de Cauchy homogéneo, lo primero consiste en deshacerse de los términos S y S^2 de la ecuación 4.3.1, para lo cual se establecen los siguientes cambios de variable:

$$S_t=Ke^{x_t}, \qquad t=T-\frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2}, \qquad \text{y} \qquad \kappa=\frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}. \tag{4.3.2}$$

Observe que estas sustituciones, revelan que las nuevas variables serán x_t y τ dadas por,

$$x_t=\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) \qquad \text{y} \qquad \tau=\tfrac{1}{2}\sigma^2(T-t), \tag{4.3.3}$$

las cuales están en términos del activo subyacente, el precio de ejercicio y el tiempo; y de donde se desprende que ahora c será función de estas nuevas variables, por lo que se expresa a la prima de la opción como:

$$c(S_t,t)=K\nu(x_t,\tau). \tag{4.3.4}$$

Ahora se realiza el álgebra necesaria con los cambios establecidos en las ecuaciones (4.3.2), (4.3.3) y (4.3.4), para escribir la ecuación diferencial parcial de Black y Scholes en términos de estos cambios de variable. Se comienza por obtener las derivadas parciales de primer y segundo orden de la ecuación (4.3.4) en términos de x_t y τ, esto es,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}c\left(S_t,t\right) &= \frac{\partial}{\partial t}K\nu(x_t,\tau)\\
&= \frac{\partial}{\partial t}K\nu\left(\ln\left(\frac{S_t}{K}\right),\tfrac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right)\\
&= K\frac{\partial\nu}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial t}\\
&= K\frac{\partial\nu}{\partial\tau}\left(-\tfrac{1}{2}\sigma^2\right)
\end{aligned} \tag{4.3.5}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial S_t}c\left(S_t,t\right) &= \frac{\partial}{\partial S_t}K\nu(x_t,\tau)\\ &= \frac{\partial}{\partial S_t}K\nu\left(\ln\left(\frac{S_t}{K}\right),\tfrac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right)\\ &= K\frac{\partial \nu}{\partial x_t}\frac{\partial x_t}{\partial S_t}\\ &= K\frac{\partial \nu}{\partial x_t}\frac{1}{S_t}\\ &= \frac{K}{S_t}\frac{\partial \nu}{\partial x_t}\\ &= e^{-x_t}\frac{\partial \nu}{\partial x_t}\end{aligned} \tag{4.3.6}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} &= \frac{\partial}{\partial S_t}\left(e^{-x_t}\frac{\partial \nu}{\partial x_t}\right)\\ &= \left(e^{-x_t}\frac{\partial \nu}{\partial x_t}\frac{\partial \nu}{\partial x_t}\frac{\partial x_t}{\partial S_t} - \frac{\partial \nu}{\partial x_t}e^{-x_t}\frac{\partial x_t}{\partial S_t}\right)\\ &= \frac{\partial x_t}{\partial S_t}\frac{\partial}{\partial x_t}\left(e^{-x_t}\frac{\partial \nu}{\partial x_t}\right)\\ &= \frac{\partial x_t}{\partial S_t}\left(e^{-x_t}\frac{\partial^2 \nu}{\partial x_t^2} - e^{-x_t}\frac{\partial \nu}{\partial x_t}\right)\\ &= \frac{1}{Ke^{x_t}}\left(e^{-x_t}\frac{\partial^2 \nu}{\partial x_t^2} - e^{-x_t}\frac{\partial \nu}{\partial x_t}\right)\\ &= \frac{1}{K}\left(e^{-2x_t}\frac{\partial^2 \nu}{\partial x_t^2} - e^{-2x_t}\frac{\partial \nu}{\partial x_t}\right).\end{aligned} \tag{4.3.7}$$

Se reescribe ahora la ecuación diferencial parcial de Black y Scholes

$$-\tfrac{1}{2}K\sigma^2\frac{\partial \nu}{\partial \tau} + \tfrac{1}{2}K^2e^{2x_t}\sigma^2\left(e^{-2x_t}\frac{\partial^2 \nu}{\partial x_t^2} - e^{-2x_t}\frac{\partial \nu}{\partial x_t}\right)\frac{1}{K} + rKe^{x_t}\frac{\partial \nu}{\partial x_t}e^{-x_t} - rK\nu = 0,$$

pero de 4.3.2 se tiene que $\kappa = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}$, por lo que la ecuación anterior se transforma en

$$0 = \frac{-\frac{1}{2}r\sigma^2\frac{\partial \nu}{\partial \tau}}{\frac{1}{2}\sigma^2} + \frac{1}{2}\frac{e^{2x_t}r\sigma^2}{\frac{1}{2}\sigma^2}\left(e^{-2x_t}\frac{\partial^2 \nu}{\partial x_t^2} - e^{-2x_t}\frac{\partial \nu}{\partial x_t}\right) + \frac{rr}{\frac{1}{2}\sigma^2}e^{x_t}\frac{\partial \nu}{\partial x_t}e^{-x_t} - \frac{r^2}{\frac{1}{2}\sigma^2}\nu$$

o

$$0 = -\frac{\partial \nu}{\partial \tau} + re^{2x_t}e^{-2x_t}\frac{\partial^2 \nu}{\partial x_t^2} - e^{2x_t}e^{-2x_t}r\frac{\partial \nu}{\partial x_t} + \frac{r^2}{\frac{1}{2}\sigma^2}e^{x_t}e^{-x_t}\frac{\partial \nu}{\partial x_t} - \frac{r^2}{\frac{1}{2}\sigma^2}\nu,$$

al multiplicar por -1 y dividir entre r se tiene,

$$0 = -\frac{\partial \nu}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_t^2} + \frac{\partial \nu}{\partial x_t} - \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}\frac{\partial \nu}{\partial x_t} + \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}\nu,$$

equivalentemente,

$$0 = -\frac{\partial \nu}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_t^2} + \frac{\partial \nu}{\partial x_t} - \kappa \frac{\partial \nu}{\partial x_t} + \kappa \nu,$$

es decir,

$$\frac{\partial \nu}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_t^2} + (\kappa - 1)\frac{\partial \nu}{\partial x_t} - \kappa \nu. \tag{4.3.8}$$

Esta ecuación es ya más parecida a la ecuación de calor, pero aún no lo es, por lo que se realiza un nuevo cambio de variables, enseguida de verificar cual es la condición inicial correspondiente a (4.3.8) dadas las sustituciones de (4.3.2), (4.3.3), (4.3.4) y el valor intrínseco del instrumento derivado en cuestión, por lo que se tiene:

$$\begin{aligned} c(S_t, T) &= \max(S_t - K, 0) \\ &= \max(Ke^{x_t} - K, 0) \\ &= \max(K(e^{x_t} - 1), 0) \\ &= K \max(e^{x_t} - 1, 0) \\ &= K\nu(x_t, 0), \end{aligned} \tag{4.3.9}$$

de donde se desprende la condición inicial dada por,

$$\nu(x_t, 0) = \max(e^{x_t} - 1, 0).$$

4.3.3.2 Fase II

Con el objeto de llegar a establecer el prblema de Cauchy homogéneo, se define ahora $\nu(x_t, \tau)$ como:

$$\nu(x_t, \tau) = e^{\alpha x_t + \beta \tau} u(x_t, \tau), \tag{4.3.10}$$

a partir de (4.3.10) se calculan las derivadas parciales correspondientes para simplificar (4.3.9), por lo que se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nu}{\partial x_t} &= \frac{\partial}{\partial x_t} e^{\alpha x_t + \beta \tau} u \\ &= e^{\alpha x_t + \beta \tau} \frac{\partial u}{\partial x_t} + \alpha u e^{\alpha x_t + \beta \tau} \\ &= e^{\alpha x_t + \beta \tau} \left(\frac{\partial u}{\partial x_t} + \alpha u \right), \end{aligned} \tag{4.3.11}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \nu}{\partial \tau} &= e^{\alpha x_t+\beta\tau}\frac{\partial u}{\partial x_t}+ue^{\alpha x_t+\beta\tau}\beta \\ &= e^{\alpha x_t+\beta\tau}\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}+\beta u\right)\end{aligned} \tag{4.3.12}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \nu}{\partial x_t^2} &= \frac{\partial u}{\partial x_t}\left(e^{\alpha x_t+\beta\tau}\frac{\partial u}{\partial x_t}+\alpha ue^{\alpha x_t+\beta\tau}\right) \\ &= \left(\alpha\frac{\partial u}{\partial x_t}e^{\alpha x_t+\beta\tau}+e^{\alpha x_t+\beta\tau}\frac{\partial^2 u}{\partial x_t^2}+\alpha^2ue^{\alpha x_t+\beta\tau}+\alpha\frac{\partial u}{\partial x_t}e^{\alpha x_t+\beta\tau}\right) \\ &= e^{\alpha x_t+\beta\tau}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_t^2}+2\alpha\frac{\partial u}{\partial x_t}+\alpha^2u\right).\end{aligned} \tag{4.3.13}$$

Ahora se sustituye (4.3.11), (4.3.12), y (4.3.13) en (4.3.8), con lo que se tiene,

$$\begin{aligned}e^{\alpha x_t+\beta\tau}\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}+\beta u\right) &= e^{\alpha x_t+\beta\tau}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_t^2}+2\alpha\frac{\partial u}{\partial x_t}+\alpha^2u\right) \\ &\quad + e^{\alpha x_t+\beta\tau}\left(\frac{\partial u}{\partial x_t}+\alpha u\right)(\kappa-1)-\kappa e^{\alpha x_t+\beta\tau}u\end{aligned},$$

es decir,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}+\beta u\right)=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_t^2}+2\alpha\frac{\partial u}{\partial x_t}+\alpha^2u\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial x_t}+\alpha u\right)(\kappa-1)-\kappa u,$$

al factorizar u se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}+u[\beta-\alpha^2-(\kappa-1)\alpha+\kappa]=\frac{\partial^2 u}{\partial x_t^2}+\frac{\partial u}{\partial x_t}(2\alpha+\kappa-1)\,. \tag{4.3.14}$$

4.3.3.3 Fase III

Por último, para desaparecer u y la $\frac{\partial u}{\partial x_t}$ en (4.3.14), se eligen

$$\begin{aligned}&2\alpha+k-1=0 \\ &\Rightarrow 2\alpha=-(k-1) \\ &\Rightarrow \alpha=-\tfrac{1}{2}(k-1)\end{aligned} \tag{4.3.15}$$

y

$$\begin{aligned}&\beta-\alpha^2-(k-1)\alpha+k=0 \\ &\Rightarrow \beta=\alpha^2+(k-1)\alpha-k= \\ &\Rightarrow \beta=\tfrac{1}{4}(k-1)^2-\tfrac{1}{2}(k-1)(k-1)-k \\ &\Rightarrow \beta=-\tfrac{1}{4}(k-1)^2-k \\ &\Rightarrow \beta=-\tfrac{1}{4}k^2-\tfrac{k}{2}-\tfrac{1}{4} \\ &\Rightarrow \beta=-\tfrac{1}{4}(k+1)^2\,.\end{aligned} \tag{4.3.16}$$

Al sustituir los resultados de (4.3.15) y (4.3.16) en (4.3.14), se obtiene por fin la ecuación de difusión de calor o problema de Cauchy homogéneo

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_t^2}, \quad -\infty < x_t < \infty, \quad \tau > 0, \tag{4.3.17}$$

y su condición inicial se obtiene a partir de los resultados de (4.3.15), (4.3.16) y de (4.3.10), en la siguiente forma

$$\begin{aligned} \nu(x_t, \tau) &= e^{\alpha x_t + \beta \tau} u(x_t, \tau) \\ &= e^{-\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t - \frac{1}{4}(\kappa+1)^2 \tau} u(x_t, \tau) \end{aligned}, \tag{4.3.18}$$

por lo que se tiene,

$$\nu(x_t, 0) = e^{-\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t} u(x_t, 0),$$

al despejar $u(x_t, 0)$ y a partir de la condición inicial de (4.3.8) se obtiene la condición inicial para la ecuación de calor de (4.3.17)

$$\begin{aligned} u(x_t, 0) &= e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t} \nu(x_t, 0) \\ &= e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t} \max(e^{x_t} - 1, 0) \\ &= \max(e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t + x_t} - e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t}, 0) \\ &= \max(e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)x_t} - e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t}, 0) \\ &= u_0(x_t). \end{aligned} \tag{4.3.19}$$

4.3.4 Solución de la ecuación diferencial parcial de Black y Scholes a partir de la solución de la ecuación de difusión de calor

A partir de la ecuación (3.4) que es la solución clásica generalizada para el problema de la ecuación de difusión de calor homogéneo con condición inicial única, se tiene como solución para la ecuación de calor cuando $x \in \mathbb{R}$,

$$u(x_t, \tau) = \frac{1}{(4\pi\tau)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(s-x_t)^2}{4\tau}} u_0(s) \mathrm{d}s. \tag{4.3.20}$$

Para dar solución a la ecuación diferencial parcial de Black y Scholes a partir de la solución al problema de Cauchy homogéneo, se realizan también algunos cambios de variable. Primero, se considera el siguiente cambio de variable

$$y = \frac{s - x_t}{\sqrt{2\tau}},$$

de donde,

$$s = y\sqrt{2\tau} + x_t \qquad y \qquad \mathrm{d}s = \sqrt{2\tau}\mathrm{d}y.$$

Por lo que

$$u\left(x_t, \tau\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0\left(s\right) e^{-\left(x_t - s\right)^2 / 4\tau} \mathrm{d}s;$$

así mismo, al sustituir el cambio de variable propuesto en la condición inicial de (4.3.18) se tiene que $u_0(s)$ esta dada por

$$u_0(s) = \max\left\{e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)(x_t+\sqrt{2\tau}y)} - e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)(x_t+\sqrt{2\tau}y)}, 0\right\}.$$

Se reemplaza ahora en (4.3.20), y, $\mathrm{d}s$ y $u_0(s)$, por lo que se tiene entonces que $u(x_t, \tau)$ esta dada por

$$\begin{aligned} u\left(x_t, \tau\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0\left(x_t + y\sqrt{2\tau}\right) e^{-\frac{1}{2}y^2} \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)\left(x_t+y\sqrt{2\tau}\right)} - e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)\left(x_t+y\sqrt{2\tau}\right)}\right\} e^{-\frac{1}{2}y^2} \mathrm{d}y \end{aligned}, \tag{4.3.21}$$

pero de $u_0(s)$ se tiene

$$e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)\left(x_t+y\sqrt{2\tau}\right)} - e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)\left(x_t+y\sqrt{2\tau}\right)} > 0$$

por lo que,

$$\begin{aligned} & \frac{e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)\left(x_t+y\sqrt{2\tau}\right)}}{e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)\left(x_t+y\sqrt{2\tau}\right)}} > 0 \\ \Rightarrow \quad & e^{\frac{1}{2}\kappa x_t + \frac{1}{2}x_t + \frac{1}{2}\kappa y\sqrt{2\tau} + \frac{1}{2}y\sqrt{2\tau} - \frac{1}{2}\kappa x_t + \frac{1}{2}x_t - \frac{1}{2}\kappa y\sqrt{2\tau} + \frac{1}{2}y\sqrt{2\tau}} > 0 \\ \Rightarrow \quad & e^{x_t + y\sqrt{2\tau}} > 0 \\ \Rightarrow \quad & e^{x_t + y\sqrt{2\tau}} > 0 \\ \Rightarrow \quad & y > -\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}} \end{aligned},$$

por tanto se reescribe (4.3.21) como:

$$\begin{aligned}
u(x_t,\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty}\left\{e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)(x_t+\sqrt{2\tau}y)}-e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)(x_t+\sqrt{2\tau}y)}\right\}e^{-\frac{1}{2}y^2}\mathrm{d}y\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty}e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)(x_t+\sqrt{2\tau}y)}e^{-\frac{1}{2}y^2}\mathrm{d}y-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty}e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)(x_t+\sqrt{2\tau}y)}e^{-\frac{1}{2}y^2}\mathrm{d}y\\
&= I_1-I_2.
\end{aligned} \tag{4.3.22}$$

Se calcula ahora a I_1, para tal efecto se completa el cuadrado en el exponente de la función exponencial del integrando, esto es,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty}\left\{e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)x_t+\frac{1}{2}(\kappa+1)\left(y\sqrt{2\tau}\right)-\frac{1}{2}y^2}\right\}\mathrm{d}y\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty}\left\{e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)x_t-\left[-\frac{1}{2}(\kappa+1)\left(y\sqrt{2\tau}\right)+\frac{1}{2}y^2\right]}\right\}\mathrm{d}y\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty}\left\{e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)x_t+\frac{1}{8}(\kappa+1)^2 2\tau-\left[-\frac{1}{2}(\kappa+1)\left(y\sqrt{2\tau}\right)+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{8}(\kappa+1)^2 2\tau\right]}\right\}\mathrm{d}y\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty}\left\{e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)x_t+\frac{1}{8}(\kappa+1)^2 2\tau-\left[\frac{1}{\sqrt{2}}y-\frac{1}{2\sqrt{2}}(\kappa+1)\sqrt{2\tau}\right]^2}\right\}\mathrm{d}y\\
&= \frac{e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)x_t+\frac{1}{8}(\kappa+1)^2 2\tau}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty}\left\{e^{-\left[\frac{1}{\sqrt{2}}y-\frac{1}{2\sqrt{2}}(\kappa+1)\sqrt{2\tau}\right]^2}\right\}\mathrm{d}y\\
&= \frac{e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)x_t+\frac{1}{8}(\kappa+1)^2 2\tau}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty}\left\{e^{-\frac{1}{2}\left[y-\frac{1}{2}(\kappa+1)\sqrt{2\tau}\right]^2}\right\}\mathrm{d}y
\end{aligned} \quad , \tag{4.3.23}$$

se realiza el siguiente cambio de variable, en el binomio del integrando:

$$\epsilon = y-\tfrac{1}{2}(\kappa+1)\sqrt{2\tau} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}\epsilon=\mathrm{d}y;$$

pero este cambio de variable, genera cambios en los límites de integración dado que $y > -x_t/\sqrt{2\tau}$, entonces,

$$\epsilon > -\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}-\frac{(\kappa+1)\sqrt{2\tau}}{2}=-\frac{x_t+(\kappa+1)\tau}{\sqrt{2\tau}},$$

así I_1 en términos de este cambio de variable es:

$$\begin{aligned} I_1 &= e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)x_t+\frac{1}{8}(\kappa+1)^2 2\tau} \int_{-\frac{x_t+(\kappa+1)\tau}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} \mathrm{d}\epsilon \\ &= e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)x_t+\frac{1}{8}(\kappa+1)^2 2\tau} \int_{-\infty}^{\frac{x_t+(\kappa+1)\tau}{\sqrt{2\tau}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} \mathrm{d}\epsilon. \end{aligned} \tag{4.3.24}$$

Se observa en esta última ecuación, que la integral así definida, representa la función de distribución acumulada de una variable aleatoria normal estándar, la cual se denota por medio de:

$$\Phi\left(d_1\right) = \int_{-\infty}^{d_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} \mathrm{d}\epsilon,$$

donde

$$d_1 = \frac{x_t + (\kappa+1)\tau}{\sqrt{2\tau}}, \tag{4.3.25}$$

por lo que I_1 es

$$I_1 = e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)x_t+\frac{1}{8}(\kappa+1)^2 2\tau} \Phi\left(d_1\right). \tag{4.3.26}$$

Ahora se calcula la integral I_2, de manera análoga a como se realizó el calculó de la integral I_1, esto es,

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} \left\{ e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t+\frac{1}{2}(\kappa-1)\left(y\sqrt{2\tau}\right)-\frac{1}{2}y^2} \right\} \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} \left\{ e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t-\left[-\frac{1}{2}(\kappa-1)\left(y\sqrt{2\tau}\right)+\frac{1}{2}y^2\right]} \right\} \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} \left\{ e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t+\frac{1}{8}(\kappa-1)^2 2\tau-\left[-\frac{1}{2}(\kappa-1)\left(y\sqrt{2\tau}\right)+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{8}(\kappa-1)^2 2\tau\right]} \right\} \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} \left\{ e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t+\frac{1}{8}(\kappa-1)^2 2\tau-\left[\frac{1}{\sqrt{2}}y-\frac{1}{2\sqrt{2}}(\kappa-1)\sqrt{2\tau}\right]^2} \right\} \mathrm{d}y \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t+\frac{1}{8}(\kappa-1)^2 2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} \left\{ e^{-\left[\frac{1}{\sqrt{2}}y-\frac{1}{2\sqrt{2}}(\kappa-1)\sqrt{2\tau}\right]^2} \right\} \mathrm{d}y \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t+\frac{1}{8}(\kappa-1)^2 2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} \left\{ e^{-\frac{1}{2}\left[y-\frac{1}{2}(\kappa-1)\sqrt{2\tau}\right]^2} \right\} \mathrm{d}y, \end{aligned} \tag{4.3.27}$$

ahora el cambio de variable consiedrado es:

$$\epsilon = y - \tfrac{1}{2}(\kappa - 1)\sqrt{2\tau} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}\epsilon = \mathrm{d}y;$$

pero tal cambio genera que los límites de integración también cambien, dado que $y > -x_t/\sqrt{2\tau}$ por lo que,

$$\epsilon > -\frac{x_t}{\sqrt{2\tau}} - \frac{(\kappa-1)\sqrt{2\tau}}{2} = -\frac{x_t + (\kappa-1)\tau}{\sqrt{2\tau}},$$

así I_2 en términos de este cambio de variable es

$$\begin{aligned} I_2 &= e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t + \frac{1}{8}(\kappa-1)^2 2\tau} \int_{-\frac{x_t+(\kappa-1)\tau}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} \mathrm{d}\epsilon \\ &= e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t + \frac{1}{8}(\kappa-1)^2 2\tau} \int_{-\infty}^{\frac{x_t+(\kappa-1)\tau}{\sqrt{2\tau}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} \mathrm{d}\epsilon. \end{aligned} \tag{4.3.28}$$

Nuevamente se observa en esta última ecuación, que la integral así definida, representa la función de edistribución acumulada de una variable aleatoria normal estándar, la cual se denota por

$$\Phi(d_2) = \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} \mathrm{d}\epsilon,$$

donde,

$$d_2 = \frac{x_t + (\kappa - 1)\tau}{\sqrt{2\tau}} \qquad (4.3.29),$$

por lo que I_2 es

$$I_2 = e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t + \frac{1}{8}(\kappa-1)^2 2\tau} \Phi(d_2). \tag{4.3.30}$$

Una vez que han calculado I_1 e I_2 se tiene el resultado de (4.3.22) dado por

$$u(x_t, \tau) = I_1 - I_2 = e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)x_t + \frac{1}{8}(\kappa+1)^2 2\tau} \Phi(d_1) - e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t + \frac{1}{8}(\kappa-1)^2 2\tau} \Phi(d_2). \tag{4.3.31}$$

Ahora a partir de las sustituciones de (4.3.2), se tiene que d_1 y d_2 o (4.3.25) y (4.3.29) son:

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{x_t + (\kappa + 1)\,\tau}{\sqrt{2\tau}} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(\frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} + 1\right)\left(\frac{1}{2}\sigma^2\,(T-t)\right)}{\sqrt{2\left(\frac{1}{2}\sigma^2\,(T-t)\right)}} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(\frac{r+\frac{1}{2}\sigma^2}{\frac{1}{2}\sigma^2}\right)\left(\frac{1}{2}\sigma^2\,(T-t)\right)}{\sqrt{\sigma^2\,(T-t)}} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \end{aligned} \tag{4.3.32}$$

y

$$\begin{aligned} d_2 &= \frac{x_t + (\kappa - 1)\,\tau}{\sqrt{2\tau}} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(\frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} - 1\right)\left(\frac{1}{2}\sigma^2\,(T-t)\right)}{\sqrt{2\left(\frac{1}{2}\sigma^2\,(T-t)\right)}} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(\frac{r-\frac{1}{2}\sigma^2}{\frac{1}{2}\sigma^2}\right)\left(\frac{1}{2}\sigma^2\,(T-t)\right)}{\sqrt{\sigma^2\,(T-t)}} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}. \end{aligned} \tag{4.3.33}$$

Por último, de (4.3.4), (4.3.18) y (4.3.31) se tiene que dado

$$c = K\nu(x_t, \tau),$$

el precio teórico de la opción de compra europea y solución a la ecuación diferencial parcial de Black y Scholes es:

$$
\begin{aligned}
c = K\nu\left(x_t,\tau\right) &= K\left(e^{-\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t-\frac{1}{4}(\kappa+1)^2\tau}\right)u\left(x_t,\tau\right)\\
&= K\left(e^{-\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t-\frac{1}{4}(\kappa+1)^2\tau}\right)\left(I_1-I_2\right)\\
&= K\left(e^{-\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t-\frac{1}{4}(\kappa+1)^2\tau}\right)\left(e^{\frac{1}{2}(\kappa+1)x_t+\frac{1}{8}(\kappa+1)^2 2\tau}\Phi\left(d_1\right)-e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t+\frac{1}{8}(\kappa-1)^2 2\tau}\Phi\left(d_2\right)\right)\\
&= K\left(e^{-\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t-\frac{1}{4}(\kappa+1)^2\tau+\frac{1}{2}(\kappa+1)x_t+\frac{1}{8}(\kappa+1)^2 2\tau}\right)\Phi\left(d_1\right)\\
&- K\left(e^{-\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t-\frac{1}{4}\left(\kappa^2+2\kappa+1\right)\tau+\frac{1}{2}(\kappa-1)x_t+\frac{2}{8}\left(\kappa^2-2\kappa+1\right)\tau}\right)\Phi\left(d_2\right)\\
&= K\left(e^{x_t}\right)\Phi\left(d_1\right)-K\left(e^{-\kappa\tau}\right)\Phi\left(d_2\right)\\
&= K\left(e^{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)}\right)\Phi\left(d_1\right)-K\left(e^{-\left(\frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}\right)\left(\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right)}\right)\Phi\left(d_2\right)\\
&= S_t\Phi\left(d_1\right)-K\left(e^{-r(T-t)}\right)\Phi\left(d_2\right).
\end{aligned}
\tag{4.3.34}
$$

4.4 Valuación con enfoque de portafolios replicantes y autofinanciables

Modelo de Black y Scholes

4.4.1 Introducción

En esta sección se obtiene la ecuación diferencial parcial de Black y Scholes, la cual describe el comportamiento de los precios de la opción en tiempo continuo, la ecuación considerada es la de la opción europea de compra y la descripción utilizada para su obtención es mediante el uso de un portafolio con estrategia replicante y autofinanciable.

Para tal efecto considérese un movimiento Browniano $\{W_t\}_{t\in[0,T]}$ definido sobre un espacio fijo de probabilidad con una filtración $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$. El portafolio consta de un activo con riesgo el cual es una acción de precio S_t en el tiempo t; se asume que el comportamiento de los precios esta determinado por la siguiente ecuación diferencial estocástica, que es la forma diferencial del movimieto geométrico Browniano

$$\mathrm{d}S_t = S_t\left(\mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t\right) \tag{4.4.1}$$

donde μ y σ son costantes y $\mathrm{d}W_t \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{d}t)$. Se supone que el activo subyacente y la opción se negocian de forma continua. También se supone un activo sin riesgo con precio M_t, el cual es considerado un principal en depósito en un sistema bancario que paga la tasa de interés instantánea libre de riesgo r y se supone que su comportamiento esta descrito por la ecuación diferencial ordinaria

$$\mathrm{d}M_t = rM_t\mathrm{d}t, \tag{4.4.2}$$

la cual representa el rendimiento del depósito principal en el instante $\mathrm{d}t$.

4.4.2 Estrategia con portafolios replicantes y autofinanciables para obtener la ecuación diferencial parcial de Black y Scholes

Se desea construir una estrategia $\phi = \{\phi\}_{0\leq t\leq T} = \left((v_t, w_t)_{0\leq t\leq T}\right)$ cuyos componentes v_t y w_t son las cantidades de la acción y el depósito bancario de un portafolio en el tiempo t

$$v_tS_t + w_tM_t = V(\phi),$$

se requiere que el portafolio tenga posición larga en el activo subyacente y un depósito bancario, de forma tal que el valor del portafolio replique, en todo momento, el valor de una opción europea de compra, es decir,

$$V(\phi) = c(S_t, t), \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{4.4.3}$$

para tal efecto, lo que se requiere es encontrar los procesos estocásticos $v_t = v(S_t, t)$ y $w_t = w(S_t, t)$, tales que

$$v_tS_t + w_tM_t = c(S_t, t), \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{4.4.4}$$

con

$$\int_0^t v_s^2\mathrm{d}s < \infty \qquad \text{y} \qquad \int_0^t w_s^2\mathrm{d}s < \infty.$$

Que el portafolio sea replicante para cada $t \in [0, T]$ significa que no hay arbitraje, ya que si lo hubiera la igualdad no se daría para algún $t \in [0, T]$ y permitiría entonces ganacias libres de riesgo; por ejemplo y sin perder generalidad supóngase que en el tiempo cero, el portafolio contiene v_0 unidades del activo con riesgo, sí sucede que $c(S_0, 0) < v_0 S_0 + w_0 M_0$, entonces se vende una opción al precio $c(S_0, 0)$ y este valor se invierte en el portafolio, lo que permitiría una ganancia libre de riesgo y si por el contrario $c(S_0, 0) > v_0 S_0 + w_0 M_0$, entonces se compra una opción y se liquida en T el portafolio, lo que sigue permitiendo hacer ganancias sin riesgo; lo anterior indica que en ambos casos hay arbitraje, por lo que en ausencia de arbitraje se satisface la igualdad $c(S_0, 0) = v_0 S_0 + w_0 M_0$.

Se supone que en T

$$v_T S_T + w_T M_T = \max(S_T - K, 0);$$

para que la estrategia sea autofinanciable se debe de satisfacer

$$(v_t, w_t) \cdot (S_t, M_t) = (v_{t+1}, w_{t+1}) \cdot (S_t, M_t), \tag{4.4.5}$$

lo que significa que al tiempo t una vez que el nuevo precio es cotizado en S_t y es capitalizada la inversión en t, el inversor o dueño del portafolio, reajusta su posición de ϕ_n a ϕ_{n+1}, sin hacer un depósito extra. Se tiene que la igualdad (4.4.5) es equivalente a

$$w_{t+1} M_{t+1} - w_{t+1} M_t + v_{t+1} S_{t+1} - v_{t+1} S_t = (v_{t+1}, w_{t+1})(S_{t+1}, M_{t+1}) - (v_t, w_t)(S_t, M_t)$$

o

$$V_{n+1}(\phi) - V_n(\phi) = \phi_{n+1}(S_{t+1} - S_t, M_{t+1} - M_t) = (v_{t+1}, w_{t+1})(S_{t+1} - S_t, M_{t+1} - M_t), \tag{4.4.6}$$

es decir, al tiempo $t + 1$ el portafolio tiene ganancia $V_{n+1}(\phi)$ y la ganancia neta esta dada por $\phi_{n+1}(S_{t+1} - S_t, M_{t+1} - M_t)$, la cual es causada por el cambio de los precios entre los tiempos t y $t + 1$; por lo que la ganancia o pérdida realizada por una estrategia autofinancible es solamente debida al movimiento de los precios. Tal cambio en forma continua en el portafolio se escribe de la siguiente manera,

$$v_t \mathrm{d}S_t + w_t \mathrm{d}M_t = \mathrm{d}c(S_t, t). \tag{4.4.7}$$

Ahora se sustituyen (4.4.1) y (4.4.2) en (4.4.7), la cual se reescribe como

$$v_t(\mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t) + w_t r M_t \mathrm{d}t = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t}\mu S_t + \tfrac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \right) \mathrm{d}t + \frac{\partial c}{\partial S_t}\sigma S_t \mathrm{d}W_t. \quad (4.4.8)$$

Si se igualan los coeficientes de $\mathrm{d}W_t$ de (4.4.8) se eobtiene

$$v_t = \frac{\partial c}{\partial S_t}. \quad (4.4.9)$$

De la ecuación (4.4.4) se obtiene que w_t, esta dada por

$$w_t = \frac{c(S_t, t) - v_t S_t}{M_t}, \quad (4.4.10)$$

ahora ya se tiene a v_t y w_t que determinan el portafolio replicante del valor de la opción europea de compra, el cual para su mantenimiento es autofinanciable.

Ahora para obtener la fórmula de Black y Scholes se igualan los coeficientes con $\mathrm{d}t$ de la ecuación (4.4.8), de lo que se obtiene

$$v_t \mu S_t + w_t r M_t = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t}\mu S_t + \tfrac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}. \quad (4.4.11)$$

De sustituir (4.4.9) y (4.4.10) en (4.4.11), se obtiene

$$\frac{\partial c}{\partial S_t}\mu S_t + r\left(c(S_t, t) - \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t \right) = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t}\mu S_t + \tfrac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}$$

o

$$r\left(c(S_t, t) - \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t \right) = \frac{\partial c}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}.$$

Por último, al igualar con cero esta ecuación se obtiene la ecuación diferencial parcial de Black y Scholes

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} + \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t r - r c(S_t, t) = 0, \quad (4.4.12)$$

adicionalmente, se debe imponer como condición final, el valor en la fecha de vencimiento del portafolio replicante y autofinanciable,

$$c(S_t, T) = \max(S_t - K, 0), \quad (4.4.13)$$

para que se tenga solución única en (4.4.11).

Capítulo 5

Análisis comparativo

5.1 Introducción

En este capítulo se realiza un análisis comparativo de las cuatro metodologías presentadas en el capítulo precedente, dicho análisis se apoya en la Tabla 5.1 del presente capítulo y en el análisis particular de las metodologías de valuación del capítulo cuarto; la información disponible en los renglones de la tabla y el análisis metodológico permiten establecer tanto diferencias como coincidencias existentes entre las diferentes metodologías de valuación, no sólo respecto del enfoque teórico en el que cada una de ellas es modelada, sino también diferencias en cuanto al grado de complejidad inherente al marco teórico multidisciplinario conceptual y operacional en el que los enfoques metodológicos se desarrollan, diferencias entre los supuestos que dan lugar a cada uno de los modelos y/o su solución y las aplicaciones o usos que se hacen de los supuestos, según el enfoque metodológico correspondiente y los datos de los que se dispone para abordarlos.

En la tabla de análisis comparativo, se estableció un criterio de calificación con rangos: bajo, medio y alto, para determinar la complejidad en la obtención de cada metodología; dicho criterio está basado en la dificultad de las herramientas teóricas involucradas en el enfoque teórico de valuación correspondiente, el grado de dificultad en la argumentación lógica mutidisciplinaria de cada metodología; la cual representa la complejidad matemática de operabilidad de los conceptos de las multiples disciplinas, que convergen para modelar tanto el problema de la valuación como sustentar su solución.

Para hacer un poco más explicito el análisis comparativo, se observa que los campos disciplinarios que intervienen en el modelado y en la solución del problema de la valuación de opciones son:

a) Matemáticas Fnancieras modernas

b) Del área de Matemáticas: Probabilidad, Procesos estocásticos, Cálculo estocástico, Ecuaciones diferenciales y Ecuaciones diferenciales parciales, Calculo Diferencial e Integral en varias variables y Algebra.

c) Economía y

d) Física.

5.2 Tabla 5.1 Análisis comparativo de diversas metodologías para la valuación de opciones

Acontinuación se describen cada uno de las renglones de la Tabla 5.1.

1) Metodología para valuar opciones. El primer renglón de la tabla muestra los enfoques de valuación que son objeto del análisis comparativo.

2) Supuestos implicados en el enfoque de valuación. En el segundo renglón se enuncian los supuestos que sustentan al modelo y/o su solución.

3) Herramientas teóricas implicadas. En el tercer renglón se enuncian los elementos teóricos correspondientes al enfoque metodológico, que son herramientas en la modelación y/o en la solución del instrumento de valuación de opciones que se obtiene; así como aquellos elementos teóricos que modelan a los supuestos sobre los que la metodología en cuestión se desarrolla.

4) Complejidad en la obtención de la metodología. En el cuarto renglón se califica como baja, media o alta la complejidad que representa obtener cada metodolgía, teniendo en cuenta tanto el contexto teórico particular de cada metodología de valuación, como el marco teórico general a nivel conceptual y operacional multidisciplinario que cada enfoque para valuar opciones encierra.

5) Datos disponibles. Por último, en el quinto renglón se hace mención de los datos de los que se dispone para iniciar el desarrollo de la metodología correspondiente.

Metodología para valuar opciones	Enfoque Probabilista	Enfoque de ecuaciones diferenciales parciales	Enfoque de Ecuación de difusión de calor	Portafolios replicantes y autofinanciables
Supuestos implicados en el enfoque de valuación	• Distribución lognormal del subyacente • Volatilidad constante • Mercado de crédito • Valuación neutral al riesgo	• Distribución lognormal del subyacente • Volatilidad constante • Función de la prima de la opción • Cambio marginal en la prima de la opción • Portafolio • Cambio marginal en el valor del portafolio • Mercado de crédito • Venta en corto • Ausencia de arbitraje	• Ecuación de difusión de calor: problema de Cauchy homogéneo • Condiciones iniciales, finales y de frontera • Ecuación diferencial parcial de Black-Scholes • Solución al problema de Cauchy homogéneo	• Cobertura dinámica • El precio del activo subyacente es modelado por el movimiento geométrico Browniano • Volatilidad constante • Mercado de crédito • Portafolio autofinanciado • Portafolio replicante
Herramientas teóricas implicadas	• Variable aleatoria estocástica • Movimiento Browniano • Filtraciones • Movimiento geométrico Browniano en forma diferencial • Reglas básicas de diferenciación estocástica • Lema de Itô • Ecuación diferencial de 1er. orden con condición inicial • Espacio y medida de probabilidad • Variable aleatoria continua • Función de variable aleatoria • Probabilidad condicional • Función de densidad • Función de distribución • Valor esperado condicional de una variable aleatoria continua • Condición de paridad *put-call*	• Variable aleatoria estocástica • Proceso de Wiener • Filtraciones • Movimiento geométrico Browniano en forma diferencial • Reglas básicas de diferenciación estocástica • Lema de Itô • Ecuación diferencial de 1er. orden con condición inicial • Espacio y medida de probabilidad • Ecuación diferencial parcial de segundo orden de B-S-M • Problemas de valor inicial y de frontera • Principio de superposición • Solución al problema de Cauchy homogéneo • Portafolio • Cobertura delta • Equilibrio general y no arbitraje.	• Ecuación diferencial parcial de segundo orden de B-S-M • Condiciones iniciales, finales y de frontera • Ecuación de difusión de calor: El problema de Cauchy homogéneo y su solución.	• Variable aleatoria estocástica • Proceso estocástico • Movimiento Browniano • Filtraciones • Movimiento geométrico Browniano en forma diferencial • Reglas básicas de diferenciación estocástica • Lema de Itô • Ecuación diferencial de 1er. orden con condición inicial • Estrategias en tiempo discreto y continuo • Portafolios autofinanciados • Portafolios replicantes • Equilibrio general y no arbitraje
Complejidad en la obtención de la metodología	El nivel de complejidad de este enfoque de valuación es medio y es dado por una parte, por lo abstracto de la teoría involucrada y por otra por la interacción de las múltiples disciplinas que en el intervienen.	Este enfoque de valuación es de alta complejidad y es el más complejo de los cuatro, primeramente por lo sofisticado de sus herramientas teóricas y segundo, por que su argumentación lógica es multidisciplinaria, lo cual, además de difícil hace elegante a la ya fina matemática con la que se obtiene el precio teórico de la opción.	El nivel de complejidad correspondiente a este enfoque de valuación es entre medio y alto, dada la mecánica operacional y de interpretación de los ingeniosos y refinados procesos: de transformación de la ecuación diferencial de B-S-M, al problema de Cauchy homogéneo y su solución mediante la solución al problema de Cauchy homogéneo.	El nivel de complejidad para este enfoque se consideró medio, por la dinámica entre los supuestos y las múltiples disciplinas que en este modelo convergen para modelar la ecuación cuya solución es el precio teórico de una opción. Contrastantemente el proceso lógico clarifica el uso y la aplicación de la metodología.
Datos disponibles	S_t, K, T, t, r y σ	S_t, K, T, t, r y σ	S_t, K, T, t, r y σ	S_t, K, T, t, r y σ

Tabla 5.1 Análisis comparativo de diversas metodologías para la valuación de opciones.

5.3 Análisis comparativo

A partir de la tabla 5.1, se observa que hay elementos teóricos comunes a los cuatro enfoques de valuación metodológicos, en lo que corresponde al rubro de supuestos implicados en el enfoque de valuación. No en todos los casos los supestos están expresados de forma explícita, tal es el caso de la metodología de valuación con enfoque de ecuación de difusión de calor; ya que el hecho de que el supuesto sea la ecuación diferencial parcial de Black y Scholes, hace inherentes a la metodología los supuestos básicos del modelo de B-S; y es por esto que hay supuestos comunes, con las respectivas herramientas teóricas a las que cada uno de ellos conlleva. Los supuestos y las herramientas teóricas comunes a saber son:

1) El precio del activo subyacente es conducido por el movimiento geométrico Browniano, es decir, el precio es lognormal o los rendimientos son normales;
   a) Variable aleatoria estocástica
   b) Espacio y medida de probabilidad
   c) Caminata aleatoria y Movimiento Browniano estándar
   d) Filtraciones y Movimiento Browniano
   e) Movimiento geométrico Browniano en forma diferencial
2) La volatilidad del precio del activo subyacente se mantiene constante a través del tiempo;
3) Mercado de crédito, es decir, un sistema bancario en el que los agentes pueden prestar y pedir prestado a una tasa de interés constante a todos los plazos y libre de riesgo de incumplimiento;
   a) Ecuación diferencial de primer orden con condición inicial.

Pero el hecho de que haya supuestos comunes en los cuatro enfoques metodológicos, no implica que todos plantean el problema de la misma forma y mucho menos que lo solucionan de la misma manera. Esta observación nos lleva a establecer las siguientes diferencias y/o similitudes entre las cuatro metodologías de valuación:

1) Pese a los supuestos comunes arriba enunciados, se observa que en el caso del enfoque probabilista los supuestos y su teoría correspondiente son utilizados para modelar

la función de densidad del precio del activo subyacente, mientras que en el caso de los enfoques de ecuaciones diferenciales parciales y portafolios replicantes y autofinanciables, estas hipótesis junto con las herramientas matemáticas que las modelan, son utilizadas para modelar dos portafolios mediante los cuales se modela la ecuación diferencial parcial de Black y Scholes.

2) La diferencia señalada en el punto anterior, permite así mismo señalar que mediante el enfoque de valuación probabilista se obtiene el precio teórico de la opción europea de compra, que es solución a la ecuación diferencial parcial lineal de Black-Scholes, pero no se modela tal ecuación con dicho enfoque; y en los enfoques de valuación de ecuaciones diferenciales parciales y de portafolios replicantes y autofinanciables si se modela la ecuación diferencial de Black-Scholes, cuya solución es el precio teórico del instrumento derivado en cuestión.

3) Se observa a partir del capítulo cinco, aunque no así de la tabla 5.1, que la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes es modelada mediante dos diferentes enfoques metodológicos a saber: enfoque de ecuaciones diferenciales parciales y enfoque de portafolios replicantes y autofinanciables. Mientras que el precio teórico de la opción europea de compra, que es la solución a dicha ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden, se obtiene mediante tres diferentes enfoques metodologícos de valuación, que son: probabilista, de ecuaciones diferenciales parciales y de ecuación de difusión de calor.

4) Las herramientas teóricas implicadas en los enfoques metodológicos: probabilista, de ecuaciones diferenciales parciales y de portafolios replicantes y autofinancibles, aunadas a las hipótesis comunes mencionadas arriba, establecen diferencias en los usos y aplicaciones que las hipótesis tienen en cada uno de los diferentes contextos teóricos. Así, mientras que en el enfoque probabilista los supuestos son actores en la modelación de una función de densidad, en el enfoque de ecuaciones diferenciales parciales son sustento de un portafolio combinado de una acción de un determinado subyacente y una opción sobre el mismo subyacente, y en el caso del enfoque de portafolios replicantes y autofinancibles los supuestos fundamentan una estrategia

cuyos componentes son procesos estocásticos que representan las cantidades de una acción y de un depósito bancario que deben de replicar en todo momento el precio de una opción.

5) Por otra parte, se mecionó ya que con los enfoques de ecuaciones diferenciales parciales y de portafolios replicantes y autofinanciables se hace la modelación de la ecuación diferencial de Black-Scholes y en ambos casos, se modela mediante un portafolio. Sin embargo las diferencias entre los contextos teóricos hace que estos portafolios sean diferentes cualitativamente, ya que mientras el primer enfoque construye el portafolio mediante una cierta cantidad sobre un subyacente más otra cierta cantidad de una opción sobre el mismo subyacente y pide que esas cantidades sean tales que se elimine el riesgo del portafolio; el segundo enfoque construye el portafolio mediante una cierta cantidad de un activo con riesgo que es un subyacente, más otra cierta cantidad de un activo sin riesgo que es un depósito bancario y pide que esas cantidades sean procesos estocásticos tales que hagan que en todo momento el portafolio replique el valor de la opción.

6) Se menciono también, que el precio teórico con el que se evalúa una opción se abordo mediante tres diferentes enfoques metodológicos, nuevamente los distintos contextos teóricos de cada enfoque hacen que la forma de obtener dicho instrumento financiero difiera de una metodología a otra. Así, en el enfoque probabilista el precio teórico de una opción de compra europea, se calcula mediante el valor esperado del valor presente del valor intrínseco, y el precio de la opción de venta es obtenido por medio de la condición de paridad *put-call*. En el enfoque de ecuaciones diferenciales parciales se da solución a la ecuación de Black-Scholes, haciendo algunos cambios de variables y suponiendo la ecuación de difusión de calor inmersa en la ecuación de B-S, con lo que se logra a partir del contexto teórico obtener la condición incial de la ecuación de difusión de calor y entonces a partir de su solución generalizada, analizada en el acpítulo tres, se obtiene el precio teórico de la opción europea de compra. Por último, en el caso del enfoque de ecuación de difusión de calor o problema de Cauchy homogéneo, lo que se hace es transformar la ecuación de Black-Scholes junto con su condición de frontera, por medio de cambios de variables en el problema de Cauchy homogéneo junto con su

condición inicial y una vez hecha la transformación, se da solución a la ecuación de B-S a partir de la solución del problema de Cauchy homogéneo invirtiendo los cambios de variables.

7) Las diferencias observadas en el punto anterior y el análisis del capítulo cuarto, permiten a su vez observar, que los tres enfoques convergen por medio de su contexto teórico individual a la solución de la ecuación de difusión de calor o problema de Cauchy homogéneo, para poder obtener el precio teórico del instrumento derivado en cuestión.

8) Otra de las coincidencias entre los cuatro enfoques de valuación, son los datos de los que se dispone, tanto para modelar la ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden, como para dar solución a la misma.

9) Para finalizar este análisis, obsérvese en la tabla 5.1, que los enfoques metodológicos tienen asociados diferentes rangos de dificultad en la obtención de la metodología correspondiente, esto se debe en buena medida esencialmente a dos cosas, primero a la dificultad de los procesos matemáticos de los que cada enfoque hace uso en su contexto propio y segundo a la interacción tanto lógica como conceptual multidisciplinaria de cada enfoque metodológico.

Capítulo 6

Conclusiones

Dados los análisis que se realizaron en este trabajo de tesis, tanto de cada uno de los cuatro enfoques metodológicos para la valuación de opciones, como del análisis comparativo entre éstos, se observa que hay tres supuestos comunes a los cuatro enfoques; el de distribución lognormal del subyacente, el supuesto de volatilidad constante y el supuesto de un mercado de crédito, por lo cual, támbien hay herramientas teóricas comunes. Pero el hecho de que los diferentes enfoques coincidan en estos supuestos, no quiere decir que los empleen de la misma manera. Así mientras que en el enfoque probabilista tales hipótesis son actores en la modelación de la función de densidad del activo subyacente, en los enfoques de ecuaciones diferenciales parciales y de portafolios replicantes y autofinanciables, las mismas hipótesis son utilizadas para modelar portafolios, mediante los cuales fué obtenida la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes; por otra parte en el enfoque de la ecuación de difusión de calor, estos supuestos están implícitos en el modelo de Black-Scholes que es supuesto para este enfoque.

A pesar de que los cuatro enfoques metodológicos se ocupan de la modelación y/o solución de la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes junto con su condición de frontera, que es el modelo mediante el que se obtiene el precio teórico de una opción, el grado de dificultad para la obtención del mismo varía de un enfoque a otro, debido a la dificultad inherente al contexto teórico, la dificultad de las herramientas teóricas involucradas y la argumentación lógica mutidisciplinaria con las que se desarrolla cada enfoque de valuación.

De los análisis expuestos, se observa que para comprender mejor y hacer un ejercicio profesional de la valuación, el uso y las aplicaciones de las opciones financieras, ya sea como estrategia de inversión y/o como medida de control de riesgos, es esencial involucrarse y estar actualizado en los contextos disciplinarios económico, financiero, físico y matemático en las aŕeas de probabilidad, ecuaciones diferenciales parciales y de ecuación de calor, que motivan la modelación y existencia de dichos instrumentos, tanto en el ámbito teórico como en el práctico.

Los análisis desarrolados en los capítulos cuatro y cinco de este trabajo de tesis, exhiben que los cuatro enfoques son igualmente precisos, para modelar la ecuación diferencial parcial de Black y Scholes, como para obtener el precio teórico de las opciones, sin ambargo, el grado de dificultad en su obtención y el mismo contexto teórico traducidos en rapidez y sencillez, permiten sugerir su uso a los distintos agentes que manejan los productos derivados en cuestión. Así, el uso del enfoque probabilista se recomienda a los coberturistas, especuladores y arbitrajistas, que trabajan por ejemplo para bancos comerciales, corporativos que operan derivados para cubrir sus pasivos, casas de bolsa y MexDer, entre otros; los enfoques de ecuaciones diferenciales parciales y ecuación de difusión de calor, se recomiendan a los académicos y a los analistas financieros de instituciones financieras tales como casas de bolsa y el MexDer; y el enfoque de portafolios replicantes y autofinanciables se recomienda a cualquier estudioso del tema, tanto operadores de opciones, como a analistas financieros y académicos.

Por otra parte se observa que los modelos analizados presentan todavía algunas limitaciones que requieren de un mayor esfuerzo de investigación en el futuro. Así, los modelos pueden ser extendidos en las siguientes direcciones:

- No-estacionariedad aparente de los datos financieros. Las variaciones de los precios de los productos financieros parecen tener una distribución no estacionaria, es decir, se ven periodos de mucha variación seguidos de periodos mucho más tranquilos. El movimiento browniano no presenta esta propiedad, ya que la variación de los precios en intervalos de duración constante está equidistribuida.
- Concentración de la variabilidad. La variabilidad no sólo no es constante, sino que además se concentran los periodos de alta variabilidad, es decir los periodos en los que la variación de los precios es elevada no se encuentran aislados, sino concentrados temporalmente.

- Dependencia a largo plazo. La anterior característica de los precios financieros está muy relacionada con esta otra de que parece que las variaciones de los precios financieros presentan cierta dependencia que no desaparece sino muy lentamente. Sin embargo el movimiento browniano tiene incrementos independientes y por tanto la variación de un periodo no está relacionada con la variación del periodo anterior.

- Colas pesadas. Las distribuciones de la variación de los precios financieros suelen ser leptocúrticas, es decir, se aprecia empíricamente que variaciones grandes de los precios aparecen con más frecuencia de lo que normalmente sería de esperar. Por tanto esto conduce a que es necesario utilizar modelos con mayor variabilidad de los precios que la que proporciona la distribución gaussiana que define el movimiento Browniano.

- Discontinuidad en los comportamientos. Las trayectorias del movimiento Browniano son continuas, esto no permite introducir discontinuidades de salto en los modelos en que aparece el movimiento browniano. Sin embargo, esta discontinuidad en el comportamiento es algo que es justificable en la realidad, la sensibilidad de los mercados financieros a todo tipo de información, los hace sumamente volátiles y por ejemplo cualquier variación en la política económica, información acerca de la evolución de las magnitudes macroeconómicas o nuevos datos acerca de la evolución de cualquier empresa hace que se produzca un cambio brusco en la situación del mercado que realmente se puede interpretar como una discontinuidad de cambio.

Por lo antes mencionado es que surgen los enfoques de valuación de opciones con volatilidad estocástica, valuación de opciones con procesos de difusión con saltos, valuación de opciones sobre subyacentes con elasticidad constante de la varianza y otros tópicos avanzados de opciones que tratan de subsanar las limitantes del modelo de Black, Scholes y Merton y atender a los requerimientos de la realidad financiera, pero todos ellos aún presentan sus propias limitantes, sin embargo, sin todos estos trabajos la mecánica de los mercados financieros no habría llegado a lo que el día de hoy es. Todos estos tópicos avanzados de valuación de opciones representan un campo abierto a la presente investigación.

Bibliografía

Fuentes U.N.A.M.

- Díaz Tinoco y Hernández Trillo, "Futuros y Opciones Financieras", una introducción, México Distrito Federal, 2002, Limusa, 3a. edición.

- Evans, L.C. (1998). *"Partial Differencial Ecuations". Graduate Studies in Mathematics, 19, Amarican Mathematical Society.*

- Hull, John C., "Introducción a los mercados de Futuros y Opciones", Madrid, 2002, Prentice Hall, 4 edición en español.

- Karatzas, I. and S.E. Shreve (1988). *"Brownian Motion and Stochastic Calculus. Springer.*

- Kijima, Masaaki. (2003). *"Stochastic processes with aplications to finance". Boca raton Florida, 2003, Chapman and Hall/CRC.*

- Revuz, D. and M. Yor (1999). *"Continous Martingales and Brownian Motion", Third edition, Springer-Verlag, New York.*

- Ross, Stephen A.; Westerfield, Randolph W. Jaffe, Jeffrey F. "Finanzas Corporativas", México Distrito Federal, 2002, McGraw-hill, 5 edición.

- Venegas, M., F. (2007). "Riesgos Financieros y Económicos", productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre, México Distrito Federal, marzo de 2007, Thomson.

- Wilmott, P., Howison, S. *and* Dewynne, J. *"The Mathematics of Financial Derivatives". A Student Introduction. New York, USA, 1999, Cambridge University Press.*

- Zill, D. y Cullen, M. (2006). "Ecuaciones Diferenciales con Problemas de Valores en la Frontera". México Distrito Federal, 2006, THOMSON, 6 edición.

Fuentes externas

- Bachelier, L. (1900).- *Théorie de la Speculation, Thésis de Docteur és Sciences Mathématiques. Université Paris Sorbonne. Gauthier-Villars, Paris.*

- Bachelier, L. (1964).- *Theory of Speculation, Traslation of the french edition. P. H. Cootner, editor, in the Random Character of Stock Market Prices, Cambridge, The MIT press, pp.17-79.*

- Black, F. and M. Scholes (1973). *"The Pricing of Options and Corporate Liabilities". The Journal of Political Economy. Vol. 81, No. 3, pp. 637-654.*

- Brener, M. and M. G. Subrahmanyam (1998). *"A Simple Approach to Option Valuation and Hedging in Black-Scholes Model". Financial Analysis Journal of Political Economy. Vol. 50, No. 2, pp. 25-28.*

- Casana, C. "Introducción a las Opciones Financieras". Descargable en `http://www.monografias.com/trabajos38/opciones-financieras.shtml`.

- Casana, C. "Opciones Finanacieras". Descargable en `http://www.elprisma.com/apuntes/economia/opcionesfinancieras/default.asp`

- Franco, Luis C. "El Modelo de Black-Scholes-Merton". Descargable en `www.monografias.com.`

- Garman, M. B. and S. W. Kohlhangen (1983). *"Foreing Currency Option Values". Journal of Internacional Money and Finance. Vol. 2. No. 3, pp. 231-237.*

- Girsanov, I. V. (1960). *"On transforming a Certain Class of Stochastic Processes by Absolutely Continuous Substitution of Measures". Journal of Theory of Probability and its Aplications. Vol. 5, pp. 285-301.*

- Girsanov, I. V. (1962). *"On An Example on Non-uniqueness of the Solution to the Estochastic Diferencial Equation of K. Itô". Journal of Theory of Probability and its Aplications. Vol. 7, pp. 325-331.*

- Korn, E. y Korn, Ralf. "Matemática y economía", del proyecto Management Mathematics For European Schools. Descargable en
  `http://optimierung.mathematik.unikl.de/mamaeusch/`
  `veroeffentlichungen/ver_texte/bm_option_s.pdf`

- Lamberton, Damien. (2003). *"Introduction to stochastic calculus applied to finance". London, 1996, Chapman and Hall.* Macroeconomía S.A. de C.V. Descargable en
  `http://www.macroeconomia.com.mx/articulos.php?id_sec=9&id_art=583`
  `&id_ejemplar=46`

- MexDer (Mercado mexicano de derivados). 2007. "Términos y condiciones generales de contratación de los contratos de opción sobre acciones (Liquidación en Especie)". Descargable en
  `http://www.mexder.com.mx/MEX/Contratos-Opciones.html`.

- MexDer (Mercado mexicano de derivados). 2007. "Regimen fiscal 2007, operaciones financiera derivadas". Descargable en
  `http://www.mexder.com.mx/MEX/Regimen_Fiscal.html`.

- MexDer (Mercado mexicano de derivados). 2007. "Glosario". Descargable en
  `http://www.mexder.com.mx/MEX/Glosario.html.`

- Perotti, Estrella "Lecturas sobre derivados: El comportamiento del precio de las acciones". Descargable en
  `http://www.bcr.com.ar/pagcentrales/publicaciones/images/pdf/Modelo`
  `%20del%20comportamiento%20del%20precio%20de%20las%20acciones`
  `%202005_DIC.pdf.`

- Shreve, Steven. (1997). *"Stochastic Calculus and Finance"*. Descargable en
  `http://www.stat.berkeley.edu/users/evans/shreve.pdf.`

- Rincón, Luis. "Construyendo la Integral estocástica de Ito". Descargable en
  `http://www.smm.org.mx/SMMP/html/modules/Publicaciones/AM/Cm`
  `/35/artExp12.pdf`

- Valderas, Juan M., Alba, José M. y Olmedo, Elena. "Modelización estocástica de los mercados financieros: un puente entre lo simple y lo complejo". Descargable en: `http://www.encuentros-multidisciplinares.org/Revistan%C2%BA12/Juan%20 Manuel%20Valderas;%20Jos%C3%A9%20M%C2%AA%20Alba;%20Elena%20Olmedo.pdf`.

- Venegas, M., F. (2001). "Una guía completa para economistas en la valuación de opciones", Gaceta de Economía, Año 6, No. 12, pp. 155-212.

- Villalon, Julio. "Bases estadístico matemáticas para economistas financieros". Descargable en: `http://www.uv.es-asepuma-V-31.pdf`.

- Villalon, Julio. "Métodos modernos de valoración de los instrumentos financieros". Descargable en `http://eco-mat.ccee.uma.es/asepuma/laspalmas2001/laspalmas/Invo27.pdf`.

- "Algunos procesos estocásticos destacables". Descargable en `halweb.uc3m.es/esp/Personal/personas/jmmarin/esp/PEst/tema3pe.pdf`.

- "El problema de Cauchy para la ecuación de Calor". Descargable en: `http://www.departamento.us.es/edan/asignaturas/EDE/Tema1%20EDE.pdf`.