Capítulo 2

Dinámica de fluidos: Fundamentos

"Los fluidos, como genéricamente llamamos a los líquidos y los gases, nos envuelven formando parte esencial de nuestro medio ambiente. El agua y el aire son los más comunes"[18]. Un fluido es toda sustancia que tiene la propiedad de deformarse al aplicarle una fuerza tangencial o de corte.

Podemos separar a los fluidos en dos clases, los Newtonianos y los no Newtonianos. En los que nos concentraremos en esta tesis son los primeros, los cuales se definen como tales ya que son estudiados a partir de las leyes de movimiento de Newton. Específicamente para esta parte la segunda ley, la cual dice: *"el cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa, y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual aquélla fuerza se imprime"*[19]:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \tag{2.1}$$

donde

$\vec{F}$ es la fuerza,
m es la masa,
y $\vec{a}$ el vector de aceleración.

Dado que $\vec{a} = \dfrac{d\vec{V}}{dt}$ con $\vec{V}$ como el vector velocidad e introducimos a m dentro de la diferencial obtenemos:

$$\sum \vec{F} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} \tag{2.2}$$

Algunas características principales de los fluidos son [20]:

- La posición relativa de sus moléculas puede cambiar contínuamente.
- Todos los fluidos son compresibles en cierto grado. No obstante, los líquidos son mucho menos compresibles que los gases.

- Tienen viscosidad, en los gases mucho menor que en los líquidos.

2.1. Antecedentes y definiciones

Un fluido dependiendo de la sustancia que estemos estudiando tiene diferentes propiedades, la densidad de uno a otro es diferente así como la viscosidad.

La densidad, denotada por el símbolo ρ, es el valor limitante de masa por unidad de volumen y tiene unidades de $masa/longitud^3$ $[M/L^3]$, y puede ser representado por kg/m^3 en el sistema internacional de unidades. El inverso de la densidad ρ es llamado volumen específico v. Para fluidos, la densidad como la viscosidad, es función de ambos, presión y temperatura, y esta dada por la Ecuación 2.3 [21]:

$$\rho = \frac{m}{v} \tag{2.3}$$

donde

m es la masa y
v es el volumen.

Algunos valores de densidades se muestran en la siguiente Tabla:

Sustancia	Densidad $[kg/m^3]$	Condiciones
Agua	999	A 15°C
Aire	1.2	A temperatura y presión atmosférica convencionales
Sangre	1060	A 20°C

Tabla 2.1: *Valores de densidad para diferentes sustancias*

Otra característica de los fluidos es la presión, que es la tensión normal de un fluido en reposo, y se asume positiva para fluidos compresibles.

La viscosidad, comúnmente denotada por el símbolo μ, es la medida de la resistencia interna, la cual es observada con el movimiento de la capa de un fluido con respecto a otra, como se muestra en la Figura 2.1.

En la Figura 2.1, cuando se aplica un esfuerzo cortante a un sólido, su efecto es producir cierto desplazamiento del mismo, tal como dd'. La deformación por corte se define como la razón de este desplazamiento a la dimensión transversal l, y dentro del límite de elasticidad el esfuerzo cortante es proporcional a la deformación. Por el contrario, en un fluido esta deformación aumenta ilimitadamente mientras se aplique el esfuerzo, y este esfuerzo depende de la variación en el tiempo.

Existen dos factores que producen viscosidad: la cohesión y la tasa de cambio del

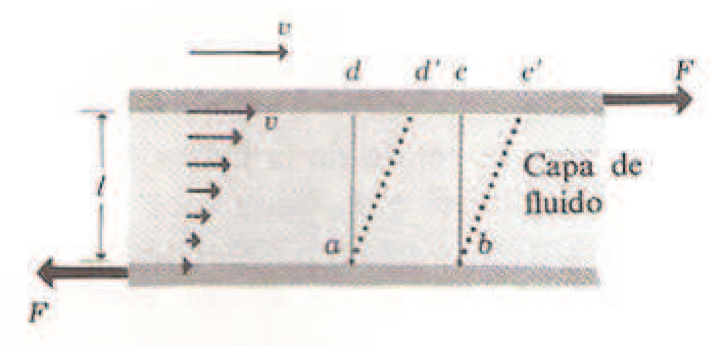

Figura 2.1: *Régimen laminar de un fluido viscoso [25]*

ímpetu molecular. Para líquidos, las fuerzas de cohesión predominan sobre las fuerzas inerciales, mientras que para gases ocurre lo contrario [21].

Una de las características que definen el comportamiento de un fluido está dada por el número de Reynolds denotado por Re. Philip[22] dice que: "es probablemente el parámetro adimensional más importante en mecánica de fluidos. Re representa el efecto de la viscosidad en un flujo. En donde los valores grandes de Re ($Re \to \infty$) son turbulentos", y está definido por la Ecuación 2.4:

$$Re = \frac{\rho V_m D}{\mu} \tag{2.4}$$

donde

V_m es la velocidad media en un tubo, y
D es el diámetro del tubo por donde circula el fluido.

Por ejemplo, para agua a 20 °C que circula por un tubo de 2 cm de diámetro con una velocidad media de 5 $\frac{cm}{s}$, el número de Reynolds es:

$$Re = \frac{\rho V_m D}{\mu} = \frac{\left(1\frac{g}{cm^3}\right)\left(5\frac{cm}{s}\right)(2cm)}{0.01\frac{din\cdot s}{cm^2}} = 1000$$

Muchos experimentos han demostrado que existen dos regímenes diferentes de tipos de flujos: el laminar y el turbulento, y que cuando el número de Reynolds se encuentra en la zona entre 2000 y 3000, el régimen es inestable y puede pasar de uno a otro.

2.2. Flujo laminar

Cuando un flujo laminar existe en un sistema, el líquido fluye suavemente en capas, llamadas láminas. Las capas se deslizan unas tras otras sin aparentes remolinos. No se combina el fluido lateralmente en ninguna parte del tubo, y el flujo sigue líneas de corriente en paralelo [23] como se muestra en la Figura 2.2:

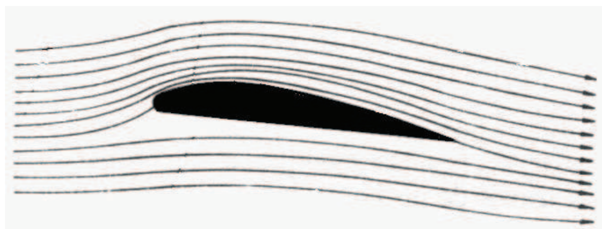

Figura 2.2: *Descripción del flujo laminar*

El flujo laminar está gobernado por la ley de viscosidad de Newton, Ecuación 2.5:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \tag{2.5}$$

Que determina la relación entre el esfuerzo de corte viscoso, τ, la viscosidad, μ, y el esfuerzo cortante para el fluido en la dirección y.

Para flujos laminares el número de Reynolds debe ser menor que 2100.

2.3. Flujo turbulento

El flujo turbulento combina remolinos, vórtices y el movimiento caótico de las partículas sobre la sección transversal [23] como se muestra en la Figura 2.3:

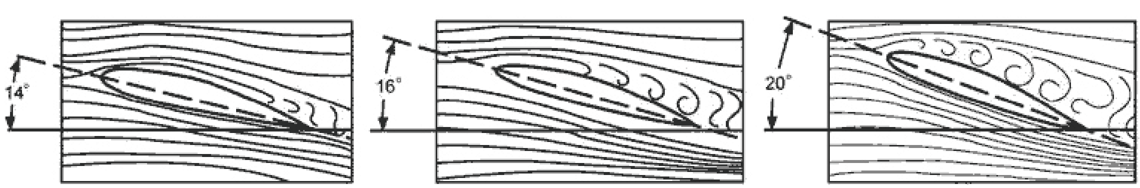

Figura 2.3: *Flujo turbulento con diferentes angulos de ataque*

Hay diferentes causas que pueden hacer que un flujo se convierta en turbulento, algunas de ellas son: si el tubo es muy grande, si la velocidad es muy grande o aumenta y por último si la viscosidad del fluido es muy pequeña.

En el punto de transición entre un flujo laminar a uno turbulento al número de Reynolds se le llama número de Reynolds crítico. Y es este en donde se concentran las características que hacen que un flujo sea turbulento, si el número de Reynolds es mayor que 4000 el flujo será turbulento.

El esfuerzo de corte viscoso se puede expresar por la Ecuación 2.6:

$$\tau = (\mu + \eta)\frac{du}{dy} \tag{2.6}$$

Donde, η es el factor que depende de la densidad del fluido y de las características del movimiento. Representa el efecto debido a la turbulencia.

2.4. Compresibilidad

La compresibilidad de un fluido es cuantificada por el cambio de presión requerido para producir cierto incremento o decremento, ya sea en el volumen o en la densidad del fluido. Esta propiedad, es conocida como módulo de compresibilidad k, definida como:

$$k = -\frac{\Delta p}{\frac{\Delta v}{v}} = -v\frac{\Delta p}{\Delta v} \tag{2.7}$$

donde

p es la presión,
v es el volumen,
Δp y Δv denotan los cambios de presión y de volumen respectivamente.

Así, para un fluido incompresible, $k \to \infty$. Para el agua, $k = 2.15$ x $10^9 N/m^2$, indicando que es prácticamente incompresible.

Un fluido compresible es aquél en el que el volumen específico v es función de la presión. La compresibilidad no está relacionada con la capacidad de los fluidos para cambiar de forma. Por el contrario, un fluido incompresible es aquél en el cual la densidad no es alterada por fuerzas externas aplicadas sobre éste.

2.5. Principio de Arquímedes

Este principio afirma que: *"cuando un cuerpo está sumergido en un fluido, éste ejerce sobre el cuerpo una fuerza hacia arriba igual al peso del fluido desalojado por él"* [24]. Se puede expresar como:

$$E = mg = \rho_f \, g \, v \tag{2.8}$$

donde

m es la masa,
g es la gravedad,
ρ_f es la densidad del fluido, y
v es el volumen.

Este fenómeno se puede observar en la Figura 2.4, donde las flechas cortas representan las fuerzas ejercidas por el flujo envolvente sobre pequeños elementos de la superficie limite.

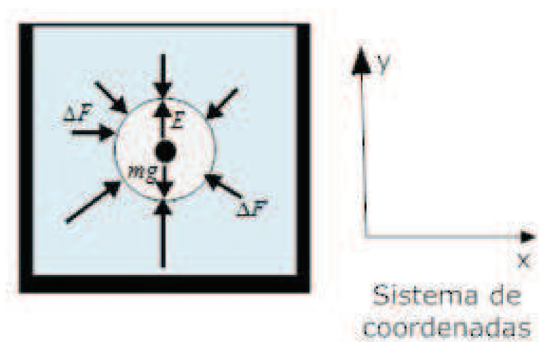

Figura 2.4: *Principio de Arquímedes. El empuje E es igual al peso del fluido desalojado [25]*

Consideremos que el fluido está en reposo, entonces la resultante de las fuerzas en el eje X es nula. La componente según el eje Y de la resultante, E (empuje), ha de ser igual al peso mg del objeto, y su línea de acción ha de pasar por el centro de gravedad de éste.

2.6. Modelos que describen la dinámica de fluidos

Existen modelos que describen la dinámica de los fluidos. Podemos mencionar algunos ejemplos de éstos: las ecuaciones de Euler para el movimiento de un fluido y las ecuaciones de Navier - Stokes.

2.6.1. Ecuaciones de Navier - Stokes

Las ecuaciones de Navier - Stokes, que describen el movimiento de un fluido, solo se aplican para flujos viscosos y laminares, con números de Reynolds pequeños. Se basan en la discretización de un objeto en pequeños elementos de masa.

Para un sistema infinitesimal de masa dm, la segunda ley de Newton puede expresarse como:

$$d\vec{F} = dm\frac{d\vec{V}}{dt} \tag{2.9}$$

donde
$\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$.

El movimiento de una partícula, se muestra en la Figura 2.5.

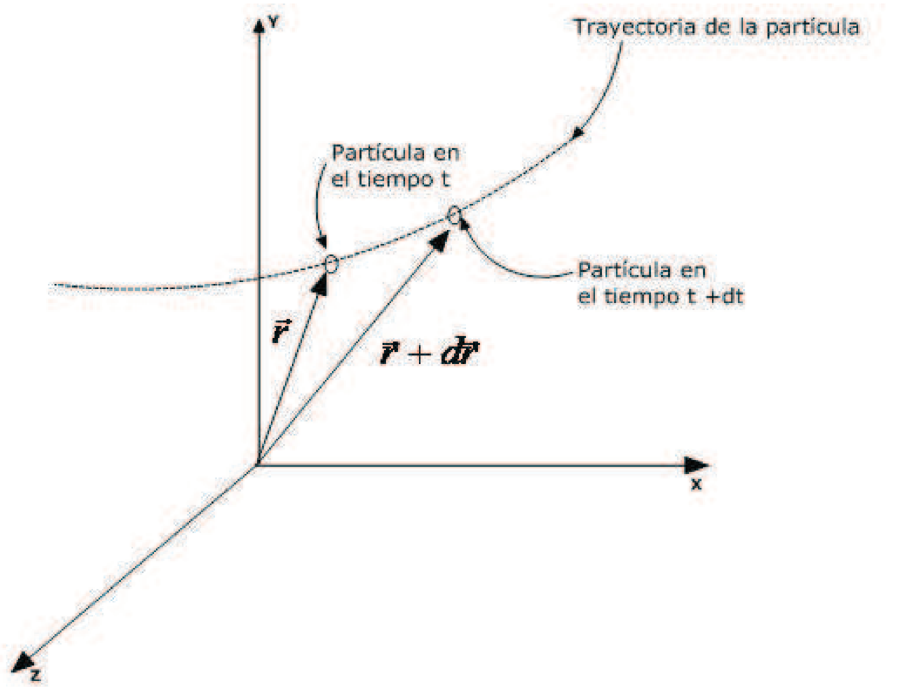

Figura 2.5: *Movimiento de una partícula en un campo de flujo*

La aceleración de una partícula en un campo de flujo requiere de una derivada especial. La cual se expresa como $\frac{D\vec{V}}{Dt}$ (Ecuación 2.10).

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} \equiv \vec{a_p} = u\frac{\partial\vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial\vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial\vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} \tag{2.10}$$

La derivada $\frac{D\vec{V}}{Dt}$ definida por la Ecuación 2.10, se denomina comúnmente derivada sustancial, o también conocida como derivada material o de partícula.

Teniendo esta expresión para la aceleración de un elemento del fluido, de masa dm, moviéndose en un campo de velocidad, podemos escribir la segunda ley de Newton como:

$$d\vec{F} = dm\frac{D\vec{V}}{Dt} = dm\left[u\frac{\partial\vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial\vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial\vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\right] \tag{2.11}$$

Si consideramos el volumen de control de la Figura 2.6, observamos que las fuerzas que actúan sobre éste son: gravitacionales, viscosas o friccionales, y de presión.

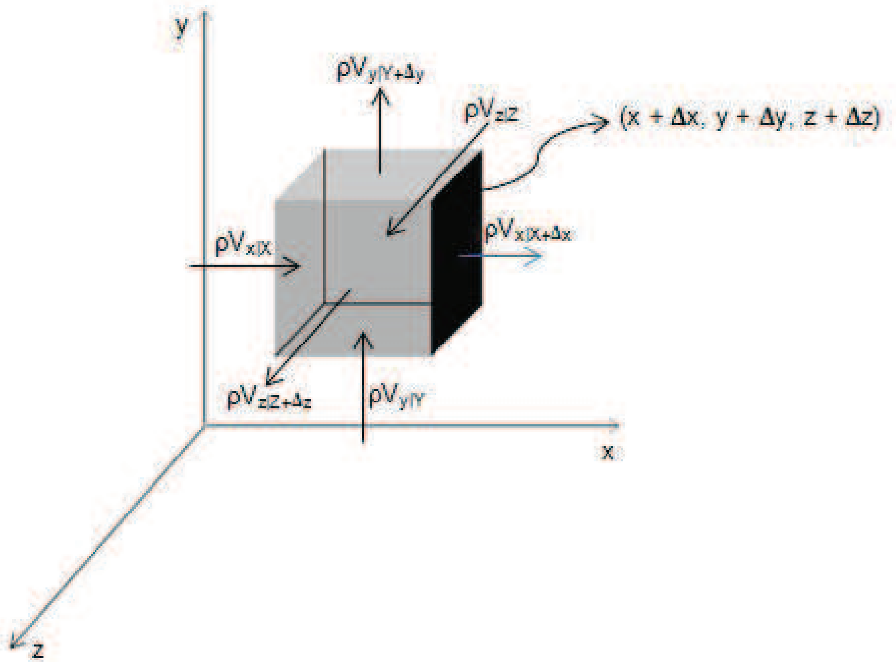

Figura 2.6: *Elemento diferencial de un fluido [23].*

Ahora es necesario introducir la ecuación de continuidad (Ecuación 2.12).

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} = 0 \tag{2.12}$$

donde

t es el tiempo
ρ es la densidad
u, v y w son las velocidades en X, Y y Z respectivamente.

Esta última ecuación puede expresarse como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \tag{2.13}$$

Si las ecuaciones de continuidad y de momento son escritas para las tres direcciones, y el fluido Newtoniano se considera con propiedades constantes de densidad y viscosidad, tenemos como resultado un conjunto de ecuaciones diferenciales. La ecuación de momento puede ser escrita para cada una de las direcciones, las cuales son llamadas ecuaciones de Navier - Stokes [23].

Para un problema general de mecánica de fluidos asumimos que tenemos un fluido Newtoniano con propiedades constantes. Las ecuaciones de gobierno en coordenadas cartesianas son las Ecuaciones 2.14:

$$\rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} \right) \tag{2.14a}$$

$$\rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} \right) \tag{2.14b}$$

$$\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} \right) \tag{2.14c}$$

donde

g es la gravedad, y
p es la presión.

Del lado derecho de las ecuaciones nos encontramos con los términos de aceleración. Estos términos son no lineales y presentan dificultades al resolver las ecuaciones. Del lado izquierdo nos encontramos con términos de presión, de gravedad y fuerzas viscosas.

La forma vectorial equivalente de estas ecuaciones es:

$$\rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V} = \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} \tag{2.15}$$

La cual también puede ser escrita como [26]:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g} + v(\nabla^2 \vec{V}) \tag{2.16}$$

Estas ecuaciones también pueden ser expresadas en otros sistemas coordenados, tales como cilíndrico y esférico, como se muestra en el Apéndice A.

2.6.2. Ley de Stokes

La ley de Stokes se refiere a la fuerza de fricción experimentada por objetos esféricos moviéndose en el seno de un fluido viscoso en un régimen laminar para números de Reynolds pequeños. Fue derivada en 1851 por George Gabriel Stokes tras resolver un caso particular de las ecuaciones de Navier-Stokes. En general la ley de Stokes es válida en el movimiento de partículas esféricas pequeñas moviéndose a velocidades bajas [27].

Si la velocidad es inferior a un cierto valor crítico, la resistencia que ofrece el medio se debe casi exclusivamente a fuerzas de rozamiento que se oponen al resbalamiento de unas capas de fluido sobre otras, a partir de una capa límite que queda adherida al cuerpo.

La superficie mínima que puede ofrecer un objeto es la de una esfera. Entonces, la influencia de la forma del objeto queda determinada por el radio de la esfera, R, y la expresión de la fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad se conoce como la formula general de la fuerza de fricción (Ecuación 2.17).

$$f = \frac{1}{2} C_d \rho_f A V^2 \tag{2.17}$$

Donde C_d se denomina coeficiente de arrastre ρ_f es la densidad del medio, A es el área de la sección transversal (en el caso de una esfera es πr^2) y V es la velocidad.

Para un amplio intervalo de números de Reynolds, y en particular para números pequeños C_d se puede escribir como se muestra en la Ecuación 2.18.

$$C_d \approx \frac{24}{Re} \tag{2.18}$$

Y sabemos que el número de Reynolds se puede expresar como:

$$Re = \frac{\rho V_m D}{\mu} \tag{2.19}$$

Si sustituimos las ecuaciones 2.18 y 2.19 en 2.17 tenemos:

$$f_f = \frac{1}{2} \frac{24}{\frac{\rho_f V 2r}{\mu}} \rho_f \pi r^2 V^2 \tag{2.20}$$

donde r es el radio de la esfera.

Con lo cual obtenemos la fórmula de Stokes Ecuación 2.21:

$$\vec{f_f} = 6\pi r \mu \vec{V} \tag{2.21}$$

2.6.3. Ecuación de Euler para el movimiento de los fluidos

Las ecuaciones de Euler son las que describen el movimiento de un fluido compresible no viscoso.

Para estas ecuaciones consideramos que es un fluido incompresible y que su continuidad no sea interrumpida. Si aplicamos estas consideraciones a un fluido en un instante dado, tenemos la ecuación de continuidad [28]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{2.22}$$

Consideramos las tres componentes de la aceleración dada como la derivada material (Ecuación 2.10).

A continuación se hacen consideraciones dinámicas para determinar el movimiento de las partículas, aislando el fluido en un instante t de tamaño diferencial.

Las resultantes de las fuerzas de presión están asociadas a las variaciones espaciales de p y, para esa variación infinitesimal de fluido, se obtiene, una fuerza igual y contraria al producto del volumen, $dxdydz$, por el gradiente local de presiones, de componentes [28]:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}\right) \tag{2.23}$$

Así, cuando se elige un sistema de coordenadas en las que Z es la coordenada vertical, ascendente, se deducen las Ecuaciones 2.24.

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} \tag{2.24a}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} \tag{2.24b}$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} \tag{2.24c}$$

Que junto a la ecuación de continuidad constituyen el sistema de ecuaciones que describen el movimiento de fluidos ideales incompresibles de densidad constante.

Las ecuaciones en los diferentes sistemas coordenados pueden ser expresadas como se muestra en el Apéndice B.