



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería

FACULTAD DE INGENIERÍA

ESTIMACIÓN Y CONTROL DE TRÁFICO  
VEHICULAR

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN INGENIERÍA

ÁREA: ELÉCTRICA – CAMPO DE CONOCIMIENTO: CONTROL

P R E S E N T A :

OSCAR ALFONSO ROSAS JAIMES



DIRECTOR DE TESIS:

DR. LUIS A. ALVAREZ ICAZA LONGORIA

CIUDAD UNIVERSITARIA

ENERO DE 2008



## **JURADO ASIGNADO**

Presidente: Dr. Yu Tnag Xu

Secretario: Dra. Angélica del Rocío Lozano Cuevas

Vocal: Luis Agustín Alvarez Icaza Longoria

1er. Suplente: Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez.

2do. Suplente: Dr. Ricardo Aceves García

Lugar donde se realizó la tesis:

Instituto de Ingeniería, UNAM

### **DIRECTOR DE TESIS:**

**Dr. Luis Agustín Alvarez Icaza Longoria**

---

**FIRMA**



*... Con estas razones perdía el pobre caballero el juicio, y desvelábase por entenderlas y desentrañarles el sentido, que no se lo sacara ni las entendiera el mismo Aristóteles, si resucitara para sólo ello...*

*... –No hay camino tan llano –replicó Sancho– que no tenga algún tropezón o barranco...*

“El Ingenioso Hidalgo Don Quijote de la Mancha”, de Miguel de Cervantes Saavedra.

*... Primero trazó una pista para la Carrera, más o menos en círculo («la forma exacta no tiene importancia», dijo) y después todo el grupo se fue colocando aquí y allá a lo largo de la pista. No hubo el «A la una, a las dos, a las tres, ya», sino que todos empezaron a correr cuando quisieron, y cada uno paró cuando quiso, de modo que no era fácil saber cuándo terminaba la carrera. Sin embargo, cuando llevaban corriendo más o menos media hora, y volvían a estar ya secos, el Dodo gritó súbitamente:*

*–¡La carrera ha terminado!*

*Y todos se agruparon jadeantes a su alrededor, preguntando:*

*–¿Pero quién ha ganado?...*

“Alicia en el País de las Maravillas”, de Lewis Carroll.



# Agradecimientos

Doy gracias a mi familia, mi primer origen, mis primeros conocimientos, mis primeras esperanzas. Mi padre: Alfonso(†); mi madre: Reynalda; mis hermanas: Verónica, Claudia y Patricia. A sabiendas y también ignorándolo, han tenido su parte y su *qué-ver* en lo que llevo a cabo, y este trabajo no es excepción.

Una mención sobre todo cariñosa a Ana Lucía Alonso García quien ha sido mi compañera, confidente, socia, amiga, amante; mi dama durante estos años, a quien nadie podría superar.

De manera muy especial deseo agradecer a mi director de tesis y tutor principal en este doctorado, por su paciencia al plantear ideas y explicar temas, por su trato inteligente y amable y sobre todo por su apoyo ofrecido en más de una ocasión y en forma por demás determinante.

Deseo agradecer a las personas con quienes tuve el honor y el agrado de trabajar y aprender en la Universidad de California en Berkeley, lugar donde tomó forma y comenzó a escribirse esta tesis, y de donde provinieron los datos de mediciones reales que se emplearon en varias simulaciones que aquí se muestran, en especial al Profesor Roberto Horowitz, mi asesor en esa institución, y a Gabriel Gomes, cuyo entusiasmo y ánimo han dejado su marca en este documento.

Hago extensivo mi agradecimiento al personal de las bibliotecas Harmer E. Davis Transportation Library en U.C. Berkeley, de la Biblioteca Conjunta Dr. Enzo Levy de la UNAM y de la Unidad de Servicios de Información del Instituto de Ingeniería de la UNAM. En todas estas personas encontré siempre la mejor disposición para auxiliarme en dudas y búsqueda de material. Sus esfuerzos también están aquí, en esta tesis.

A mis revisores, de quienes no sólo obtuve observaciones atinadas y pertinentes, sino también ratos de discusión que me ayudaron a corregir o mejorar no sólo el texto presente, sino al mismo tiempo mis propios conocimientos.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, organismo que me benefició en forma económica mediante el otorgamiento de una *beca* y a la Dirección General de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería por beneficiarme con una *beca complemento*.

México, D. F., enero de 2008.





# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. El automóvil como unidad y como conjunto . . . . .	1
1.2. Datos económicos . . . . .	1
1.3. Soluciones al tráfico congestionado . . . . .	3
1.4. Soluciones desde la Teoría de Control . . . . .	4
<b>2. Conceptos, Definiciones y Modelos</b>	<b>7</b>
2.1. Teoría de Tráfico . . . . .	7
2.2. Conceptos y Definiciones . . . . .	8
2.2.1. Volumen, flujo y capacidad . . . . .	8
2.2.2. Velocidad . . . . .	10
2.2.3. Densidad . . . . .	13
2.2.4. Relaciones entre las variables básicas . . . . .	14
2.3. Modelos de tráfico . . . . .	16
2.3.1. Enfoques . . . . .	16
2.3.2. Análisis del tráfico mediante la distribución de Poisson . . . . .	17
2.3.3. Teoría de Colas . . . . .	18
2.3.4. Modelos de vehículos que siguen a otros vehículos . . . . .	19
2.3.5. Obtención de modelos mediante la aproximación de curvas . . . . .	20
2.3.6. Analogía con la conductividad unidimensional del calor . . . . .	22
2.3.7. Analogía con la Teoría Hidrodinámica . . . . .	23
2.3.8. Modelo de Transmisión por Celdas . . . . .	24
2.3.9. Enfoques alternativos . . . . .	32
<b>3. Estimación de variables y parámetros de tráfico</b>	<b>35</b>
3.1. Planteamiento . . . . .	35
3.2. Identificación de velocidad de tráfico . . . . .	36
3.2.1. Modelo de Modos Conmutados (Switching-Mode Model) . . . . .	36
3.2.2. Identificación por mínimos cuadrados . . . . .	37
3.2.3. Identificación por mínimos cuadrados extendidos . . . . .	40

3.2.4.	Identificación por mínimos cuadrados doblemente extendidos . . . . .	42
3.2.5.	Desempeño de los esquemas de identificación . . . . .	43
3.3.	Observación de densidad y velocidad vehiculares . . . . .	43
3.3.1.	Trabajos relacionados . . . . .	43
3.3.2.	Esquema propuesto de estimación simultánea de densidad y velocidad de onda . . . . .	44
3.3.3.	Modelo de flujo libre . . . . .	45
3.3.4.	Modelo de flujo congestionado . . . . .	46
3.3.5.	Estimación de densidad y velocidad . . . . .	48
3.3.6.	Análisis de estabilidad . . . . .	50
3.3.7.	Combinación de estimadores de flujos libre y congestionado . . . . .	51
3.3.8.	Resultados . . . . .	54
<b>4.</b>	<b>Control de tráfico</b>	<b>59</b>
4.1.	Planteamiento . . . . .	59
4.2.	Trabajos previos . . . . .	60
4.3.	Esquemas de control de tráfico en rampas de acceso . . . . .	60
4.3.1.	ALINEA . . . . .	60
4.3.2.	Rediseño de Lyapunov . . . . .	69
4.3.3.	Control con observador de perturbaciones . . . . .	73
4.3.4.	“Backstepping” . . . . .	76
4.4.	Combinación de esquemas de estimación y control . . . . .	82
<b>5.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>85</b>
<b>A.</b>	<b>Situación Actual del Tráfico Vehicular en la Zona Metropolitana del Valle de México</b>	<b>89</b>

# Índice de figuras

2.1. Niveles de servicio en una vía de tránsito vehicular (según el Highway Capacity Manual [5]) . . . . .	11
2.2. Distancia entre dos autos . . . . .	14
2.3. Relaciones fundamentales entre flujo ( $q$ ), velocidad ( $s$ ) y densidad ( $k$ ) . . . . .	15
2.4. Microsimulación de tráfico ( <i>applet</i> de Martin Treiber [68]). . . . .	20
2.5. Distancias perpendiculares entre puntos y una función de aproximación . . . . .	20
2.6. Distancias verticales entre puntos y una función de aproximación . . . . .	21
2.7. Aproximación de datos de mediciones a curvas fundamentales de tránsito . . . . .	21
2.8. División en celdas de una carretera . . . . .	24
2.9. Frente de onda en retroceso . . . . .	25
2.10. Diagrama fundamental densidad-flujo según el CTM . . . . .	25
2.11. Cálculo del flujo mediante la operación “mínimo” . . . . .	26
2.12. Red de celdas . . . . .	27
2.13. Estructuras topológicas básicas . . . . .	27
2.14. Ejemplos de representaciones permitidas y no permitidas . . . . .	28
2.15. Diagrama de cálculo de flujos de una convergencia . . . . .	30
2.16. Densidad y flujo obtenidos mediante el CTM y comparados con mediciones reales . . . . .	32
3.1. Diagrama fundamental simplificado . . . . .	36
3.2. Esquema de ocho celdas de un tramo de $3.084km$ de la autopista I-210W . . . . .	37
3.3. Efecto del filtrado sobre los datos del flujo $q_1$ . . . . .	38
3.4. Identificación de velocidades de onda mediante la minimización de los cuadrados de los errores. . . . .	40
3.5. Identificación de velocidades. Esquemas extendido y doblemente extendido . . . . .	42
3.6. Densidad en la celda 5 a partir de los valores de las diferentes velocidades de onda obtenidas. . . . .	44
3.7. Clasificador borroso de una sola entrada . . . . .	54
3.8. Flujos acumulados reales y estimados. . . . .	55
3.9. Errores de estimación de flujos acumulados y normalizados . . . . .	56
3.10. Densidad estimada en la celda 1 y densidad local en el punto de inicio del tramo. . . . .	57
3.11. Densidad estimada promedio de las celdas 4 y 5 y densidad local entre las celdas 4 y 5. . . . .	57
3.12. Densidad estimada en la celda 8 y densidad local al final del tramo. . . . .	57
3.13. Velocidades estimadas de flujo libre y congestionado . . . . .	58

4.1. Representación de los flujos de una red de caminos. . . . .	59
4.2. Control local de acceso de tráfico. . . . .	61
4.3. Tramo dividido en 5 celdas . . . . .	63
4.4. ALINEA. Regulación en tráfico libre. Flujos. . . . .	64
4.5. ALINEA. Densidad en la celda 2 regulada hacia $k_2 = 0.065 \frac{veh}{m}$ . . . . .	64
4.6. Formación y comportamiento de las filas para valores de tráfico libre. . . . .	65
4.7. ALINEA. Regulación en tráfico congestionado. Flujos. . . . .	66
4.8. ALINEA. Densidad en la celda 2 regulada hacia $k_2 = 0.1133 \frac{veh}{m}$ . . . . .	67
4.9. Formación y comportamiento de las filas para valores de tráfico congestionado. . . . .	67
4.10. ALINEA. Regulación en tráfico libre ante una perturbación . . . . .	68
4.11. Rediseño de Lyapunov. Simulaciones. . . . .	72
4.12. Combinación de ALINEA y un observador de flujo. Tráfico Libre. . . . .	74
4.13. Combinación de ALINEA y un observador de flujo. Tráfico Congestionado. . . . .	75
4.14. Regulación por “Backstepping”. Tráfico Libre. . . . .	78
4.15. Regulación por “Backstepping”. Tráfico Congestionado con una perturbación. . . . .	80
4.16. ALINEA y estimador. Tráfico libre . . . . .	82
4.17. Combinación de esquemas de control, observación e identificación . . . . .	83

# Índice de tablas

1.1. Longitud de carreteras y número de vehículos para cuatro países (1995 y 2003) . . . . .	2
3.1. Varianzas para cada celda, para cada régimen de flujo, en cada esquema de identificación . .	43
A.1. Vehículos destinados al transporte de pasajeros y viajes-persona/día . . . . .	90
A.2. Padrón vehicular del Distrito Federal. Cifras a diciembre de cada año . . . . .	91
A.3. Tiempo de traslado de las personas que viajan diariamente en el Distrito Federal . . . . .	92
A.4. Consumo Energético histórico de la ZMVM, 1990-2004 . . . . .	93
A.5. Emisiones de las fuentes móviles en la ZMVM, 2004 . . . . .	93
A.6. Contribución porcentual de las fuentes móviles en la ZMVM, 2004 . . . . .	94



## Resumen

Los congestionamientos en las vías vehiculares de las grandes zonas urbanas no sólo se han convertido en eventos de todos los días, sino que su frecuencia y duración va en aumento. Aunque la ampliación o construcción de nueva infraestructura es una solución a la que se recurre para aliviar esta situación, no puede ser tomada como exclusiva dadas las desventajas que presenta. Atender la demanda de transporte de personas y de mercancías es un problema con soluciones múltiples.

La Teoría de Control puede dotar de mayor eficiencia a autopistas o carreteras a través de herramientas que estimen o controlen variables relacionadas con la circulación de automóviles. Esta tesis trata sobre el diseño de esquemas tanto de estimación como de control de tales variables, propuestos sobre la base del modelo de transmisión por celdas, un muy conocido modelo de flujo vehicular. Con datos recabados de medidores de flujo es posible implantar tales esquemas en la vida real. Los resultados presentados muestran la utilidad de estos diseños.

## Abstract

Congestion in roadways of large urban areas have not only become a daily event, but its frequency and duration is increasing. The common solution to alleviate this situation has been the construction of new infrastructure. However, this cannot be taken as the exclusive solution due to the disadvantages it presents. Solving the demand of people and products transportation is a problem with multiple solutions.

Control Theory can provide higher efficiency in highways or freeways by using tools to estimate or control variables related with automobile circulation. This dissertation is about the design of estimation and control schemes of such variables, proposed on the basis of the cell transmission model, a well known flow model. The implementation of these schemes in real life is possible with data obtained from flow sensors. The presented results show the usefulness of these designs.



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. El automóvil como unidad y como conjunto

Desde su aparición y posterior consolidación como medio práctico de transporte, el automóvil ha influido profundamente a la sociedad en aspectos muy distintos y de interés para muy diversas disciplinas como pueden ser la Psicología, la Ecología, la Mercadotecnia, la Economía o el Urbanismo, junto con muchas más que, individual o interdisciplinariamente, pueden tomar en cuenta al vehículo automotor como uno de sus temas de estudio. El automóvil ha sido uno de los inventos que mayor impacto han tenido en la humanidad [6, 53].

Las diferentes ramas de la Ingeniería tienen un vínculo muy directo con el automóvil en más de una forma, desde aspectos relacionados con los principios de los diferentes sistemas que permiten su función básica, la de transportar bienes o personas [75], hasta aquellos que le confieren mayor comodidad, seguridad y eficiencia [39]. También se puede ver al automóvil como un elemento de un conjunto formado por otros vehículos, con la intención de estudiar las interacciones que podrían tener entre sí o con las vías por las cuales circulan, lo cual es útil para el diseño de nuevos caminos o para la modificación de los ya existentes [19].

Sin embargo, aunque el automóvil ha cubierto satisfactoriamente necesidades de transportación, conforme ha pasado el tiempo ha sido también factor de nuevos problemas. Prácticamente todo usuario de vehículos contemporáneo sabe por experiencia propia que la eficiencia de las carreteras, calles o caminos ha venido decreciendo en forma acelerada. Esto quiere decir que ahora se ven más vehículos circulando en vías cuyo número o ampliación no parecen ser suficientes para dar cabida a una densidad poblacional vehicular cada vez más grande y que además parece generalizarse en todas partes.

### 1.2. Datos económicos

La Tabla 1.1 muestra cifras tanto de número total de vehículos en circulación como de longitud total de carreteras de los años 1995 y 2003 para cuatro países con diferentes sociedades y economías<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Con Información del Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática (INEGI) de México, el Department of Transport del Reino Unido, el U.S. Department of Transportation (DOT) y "The world fact book" de la CIA

País	Año	Longitud de Carreteras [km]	Incremento [%]	Vehículos en Circulación	Incremento [%]
México	1995	306 404	13.91	11 961 930	77.72
	2003	349 037		21 258 818	
Estados Unidos	1995	6 296 107	2.16	205 427 212	15.25
	2003 <sup>a</sup>	6 431 924		236 760 033	
India	1995	2 037 000	62.97	33 786 000	98.40
	2003	3 319 644		67 033 000	
Gran Bretaña	1995	386 401	1.54	25 396 000	23.01
	2003	392 342		31 207 000	

<sup>a</sup>Se incluye a Puerto Rico

Tabla 1.1: Longitud total de la red de carreteras y número total de vehículos en circulación, para los años 1995 y 2003, de México, los Estados Unidos, India y Gran Bretaña

La relevancia de las cifras en la Tabla 1.1 se hace evidente cuando se comparan los porcentajes obtenidos de la columna de las longitudes de las redes carreteras con la del número total de vehículos en circulación para cada país. En todos los casos los incrementos son positivos, sin embargo, es notorio que los incrementos en el número de vehículos en circulación<sup>2</sup> siempre es mucho mayor que el de los caminos por donde aquellos circulan.

Una creciente facilidad y mayor disponibilidad para adquirir un vehículo en la actualidad, junto con la idea muy promocionada de un mejor status socio-económico ligada a la posesión de un auto, así como el grado de ineficiencia que ha podido alcanzar el transporte público en algunos puntos geográficos y en determinados momentos, son aspectos importantes para explicar el aumento en el número de vehículos. Este aumento trae consecuencias, entre las que podemos citar una disminución de la velocidad promedio a determinadas horas del día, cuando un gran número de usuarios desea utilizar la misma vía para llegar de su hogar a su trabajo o viceversa, situación que se ha vuelto muy común en el mundo [7].

Desde un punto de vista físico que explique el fenómeno, el que un mayor número de vehículos conlleve a una disminución en la velocidad media de todos ellos tiene que ver con la disminución del espacio disponible con respecto a la densidad alcanzada en determinado momento y con un aspecto psicológico de seguridad. Cada uno de los conductores, al percatarse de que a su alrededor existen otros vehículos, realizará las maniobras necesarias para no impactar con ellos, independientemente de la agresividad en la conducción que cada uno de los individuos pueda poseer. Por lo tanto, a mayor número de vehículos en un determinado tramo de carretera, mayor es el número de interacciones entre estos y mayor es la tendencia a la desaceleración y a las velocidades bajas [29].

Por otra parte, existen eventos que detonan el congestionamiento. Un puesto de peaje o un incidente son puntos que hacen disminuir la velocidad significativamente a los conductores en esos puntos. Obviamente, quienes vienen detrás deberán frenar también para evitar colisiones, por lo que puede apreciarse que se forma

<sup>2</sup>No se está tomando en cuenta a aquellos transportes que no están registrados como nacionales en cada caso

una onda de frenado en sentido contrario al que viaja el conjunto de vehículos, la cual puede durar mucho tiempo y viajar una gran distancia [12]

Una consecuencia aparejada con la disminución de la velocidad promedio es el aumento en el tiempo de viaje para cada usuario, quien deberá emplear parte de ese tiempo para seguir viajando en lugar de ocuparlo en otras actividades durante los periodos en que no se encuentra dentro de algún vehículo.

Por ejemplo, el Urban Mobility Report [34] de Estados Unidos en su edición 2005, indica que existe un retraso promedio anual por viajero en “hora pico” de 47 horas para pasajeros de 85 áreas urbanas de aquel país. Esto es, quienes usan en “hora pico” alguna de las carreteras de estas 85 áreas urbanas, necesitan alrededor de un acumulado de 47 horas en un año para completar sus viajes, adicionales a las que utilizarían si no se presentaran congestiones<sup>3</sup>. Dicha cifra tiene una tendencia a aumentar.

La solución que se había venido dando en el pasado era la construcción de nuevas vialidades o la ampliación de las ya existentes. Pero entonces se requieren fuertes gastos<sup>4</sup> y destinar espacio y terreno que podrían ser usados de otras maneras, o que ya están siendo ocupados para otros fines. Esto explica en buena parte las cifras correspondientes en la Tabla 1.1, por lo que se hace necesaria la búsqueda de otro tipo de soluciones.

### 1.3. Soluciones al tráfico congestionado

El fenómeno del congestionamiento tiene que ver con la forma en que se ocupan los espacios destinados al transporte y a los eventos temporales que lo desencadenan. Por lo tanto, también es un fenómeno con implicaciones sociales y en el medio ambiente. En prácticamente todos los países con ciudades con alta concentración poblacional se han implantado, con diferentes grados de impacto, políticas y acciones que intentan hacer eficiente el transporte de personas y de productos.

En todos los casos de relativo éxito, la solución es un conjunto de diferentes alternativas implantadas al mismo tiempo [36], como son: a) la ampliación o adecuación de diferentes sistemas de transporte colectivo, como tranvías, trenes de superficie y subterráneos, autobuses o microbuses, b) la construcción de infraestructura que ofrece conexiones entre los diferentes tipos de transporte, c) campañas e incentivos para el uso de rutas ciclistas o peatonales, compartir el automóvil o para que las personas consideren mudarse para vivir más cerca de sus lugares de trabajo, d) la realización de estudios que adecuen y reglamenten más precisamente el transporte de carga [15], etcétera.

En el caso de las vías de rodamiento, la idea de crear nuevas o ampliar las ya construidas no queda descartada, pero como ya se mencionó antes, los gastos necesarios son muy grandes. Queda entonces la alternativa de buscar una mayor eficiencia a través de sistemas que pueden ser agregados a las redes de caminos y cuyos costos de implementación, operación y mantenimiento sean reducidos, como el monitoreo del estado del tráfico que puede ser comunicado por radio o por señalamientos interactivos a los usuarios, informando de rutas alternas y aconsejando evitar las que presentan dificultades en determinados momentos,

---

<sup>3</sup>Para cifras análogas a la situación particular de la Zona Metropolitana del Valle de México, véase el Apéndice al final de este documento

<sup>4</sup>En el caso de México, el presupuesto de egresos de la federación para 2005 destinó 17 120 mdp para infraestructura carretera (Fuente: Centro de Estudios de las Finanzas Públicas).

el establecimiento de horarios no necesariamente fijos para restringir determinado tipo de vehículos o su desvío por rutas preferentes [52].

Los dispositivos más tradicionales utilizados para regular el tráfico han sido un remedio en buena parte de los casos. Sin embargo, semáforos y agujas son usados en la mayor parte de los casos como elementos de control de lazo abierto, que no reciben realimentación de los sistemas que están regulando, dando lugar a señales que incluso pueden alejarse del comportamiento deseado. Por ello es de esperar que la adición de sensores o de estimadores de las variables del tráfico a un algoritmo de control cuya salida se refleje en tales dispositivos generará una ventaja para el usuario.

## 1.4. Soluciones desde la Teoría de Control

Han surgido propuestas ambiciosas para convertir a redes de carreteras en sistemas completamente automatizados, buscando incrementar la eficiencia y la seguridad de las mismas<sup>5</sup>. La arquitectura de estos sistemas combinan tecnologías de comunicaciones, cómputo y control, para relacionar distintos niveles de abstracción de los sistemas que pueden involucrarse [70].

En esta forma existe un nivel de abstracción en el que un vehículo individual, o un grupo específico de estos, es un elemento de control, cuya dinámica y comunicación con otros vehículos puede ser medida y controlada a través de esquemas definidos por un nivel superior de abstracción. En forma agregada, tales esquemas se controlan y miden por medio de modelos de flujo y densidad vehiculares que actúan en tramos de carretera. Cada uno de estos tramos tiene comunicación y realimentación con el resto de la red [72].

Existen esfuerzos específicos en el nivel de abstracción donde variables agregadas como el flujo o la densidad de vehículos necesitan ser medidas, estimadas o controladas [2]. En el caso de las vías rápidas, donde lo que se pretende es que el flujo mantenga una continuidad, son las entradas secundarias las que son susceptibles de controlar, restringiendo o permitiendo el paso a través de éstas esperando que con ello el flujo principal se vea afectado en forma conveniente.

Dado que se pretende que estos sistemas de control trabajen con esquemas de lazo cerrado, necesitan los valores del estado o de las salidas del sistema para funcionar. Aunque es posible medir variables como la densidad o el flujo a través de instrumentos de medición, no siempre es posible disponer de todas las mediciones necesarias, por lo que en muchos casos se hace necesario estimarlas.

Tanto la regulación como la estimación de variables de tráfico son herramientas de la Teoría de Control utilizadas en este trabajo. El objetivo buscado en esta tesis es mejorar el uso de vías vehiculares a través de tales herramientas para volver más eficientes a tales sistemas.

Actualmente existen esquemas de estimación de velocidad que incluso, como se verá, han sido implantados en autopistas reales. Pero dichos esquemas sólo obtienen valores promedio de un agregado de vehículos, y descuidan un valor de velocidad muy importante: el de onda de congestión, la cual viaja en sentido contrario al del flujo de vehículos (Capítulo 2).

También existen esquemas de control, particularmente de regulación llevada a cabo en rampas de entrada a flujos mayores. Pero gran cantidad de trabajos, en especial muchos de aquellos que se encuentran en

---

<sup>5</sup>Concepto conocido como Sistemas de Carreteras Automatizadas (AHS: Automated Highway Systems)

operación, no incluyen un tratamiento en el análisis de la estabilidad de tales esquemas, dándolos por hechos. En esta tesis se examinan las características de estabilidad de un esquema que ha tenido una difusión extensa en varios puntos de intersección en carreteras europeas, además de que se proponen otros esquemas, cada uno de ellos acompañado de su respectiva prueba de estabilidad, característica importante y que no debe ser descuidada.

Esta tesis organiza la presentación de la investigación llevada a cabo en cinco capítulos y un apéndice. Después de esta Introducción, el siguiente capítulo trata brevemente sobre conceptos y definiciones importantes relativos al tráfico vehicular. Se da un tratamiento especial al tema relacionado con modelos utilizados para estudiar el comportamiento de vehículos individuales circulando por una vía de rodamiento, enfoque conocido como *microscópico*, y aquellos que estudian el flujo de vehículos como un agregado de los mismos, enfoque llamado *macroscópico*, para después dar relevancia a un modelo en el cual están basados la gran mayoría de los esquemas aquí presentados y en el cual se definen dos tipos de flujo: libre y congestionado, como forma de clasificar las situaciones de tráfico y de calcular sus valores. El Capítulo 3 incluye el tema de estimación de variables de tráfico, tales como densidad, velocidad en flujo libre o velocidad de la onda de congestionamiento. La forma de utilizar estas variables para la regulación de flujos de autos a través de entradas secundarias o rampas de acceso se trata en el Capítulo 4, en el cual se muestran varios esquemas que pueden ser utilizados, así como un conjunto de índices para medir el desempeño de dichos esquemas de regulación. En este Capítulo se muestra un ejemplo en el cual un esquema de estimación trabaja coordinadamente con un esquema de control de los aquí presentados, sistema que podría implantarse en una situación real. El Capítulo final está dedicado a recoger las conclusiones sobre este trabajo. Se incluye además un Apéndice de datos estadísticos correspondientes a la situación actual del tráfico en la Zona Metropolitana del Valle de México, así como una serie de propuestas para la implantación de sistemas similares a los que aquí se proponen en algunas vías de esta zona urbana.

## Capítulo 2

# Conceptos, Definiciones y Modelos

### 2.1. Teoría de Tráfico

Los caminos cumplen la función de ser vías de comunicación por las que se transportan personas y bienes entre dos puntos geográficos. Es conocido el hecho de que la eficiencia en los caminos es un factor de suma importancia para la prosperidad de una región.

En consecuencia, el desarrollo de los distintos tipos de caminos y de los elementos para los cuales se construyen ha sido abarcado por diferentes disciplinas, las que se han ido reuniendo en forma más empírica en un principio, pero más integrada y organizada en tiempos recientes, de tal forma que ahora es posible hablar de una Teoría de Tráfico de Caminos [19], también conocida como Ingeniería de Tránsito<sup>1</sup> [6] o de Transporte [53].

En cualquiera de estas categorías la materia de estudio es el movimiento de vehículos sobre una red bidimensional, objetos móviles que tienen el rasgo esencial de que sus movimientos están controlados por una combinación hombre-máquina, por lo que para entender su comportamiento se deben tomar en cuenta los rasgos fisiológicos y psicológicos propios del ser humano. Esto puede añadir complejidad al estudio del tema, y dependiendo del enfoque y propósito, hacer simplificaciones se vuelve deseable y necesario.

Es un hecho que, pese al factor humano fuertemente involucrado, el conjunto de conductores-vehículos no se mueve en forma azarosa dentro de una vía de rodamiento, sino que obedece leyes que surgen en forma natural una vez que se vuelven elementos de un sistema en el cual se deben evitar colisiones mientras se lleva a cabo la conducción, leyes que acotan las posibilidades de maniobra y hacen posible una racionalización de dicho fenómeno.

Es posible hablar entonces de elementos y de relaciones entre ellos, por lo tanto se puede reconocer la existencia de sistemas y de las variables y propiedades que los describen, con lo cual a su vez es posible obtener modelos que expliquen y predigan sus comportamientos, logrando en conjunto un cuerpo de conocimiento que permite el entendimiento del fenómeno del tráfico.

---

<sup>1</sup>La Ingeniería de Tránsito incluye como objetos de estudio, además del vehículo y la vía, al conductor y al peatón, aunque en ocasiones tal distinción no es estricta.

## 2.2. Conceptos y Definiciones

Como se verá más adelante, el enfoque conveniente de ver al tráfico como una corriente de vehículos, define la existencia de tres variables básicas —volumen o flujo, velocidad y densidad— usadas para describir el estado de tráfico en cualquier estructura de caminos. La forma de tratar a estas variables depende de si su aplicación se da en flujos interrumpidos (como en rutas donde existen semáforos u otros dispositivos restrictivos) o ininterrumpidos. Aun cuando en esta tesis (Capítulo 4) se trabaja con flujos que se llevan a valores nulos durante algunos intervalos de tiempo, no se lleva a cabo ninguna diferenciación al respecto a la hora de manipular estas variables o procesar sus mediciones o estimaciones.

Se detallan a continuación las definiciones de conceptos generales utilizados en esta tesis.

### 2.2.1. Volumen, flujo y capacidad

Estos tres conceptos se hallan relacionados íntimamente entre sí y en ocasiones se confunden.

El *Volumen* es el número total de vehículos que cruzan un punto dado o sección de un carril o de varios carriles durante un intervalo de tiempo dado. Los volúmenes pueden ser expresados en términos anuales, diarios, horarios o en periodos convenientes.

El *Flujo* es el número total de vehículos que cruzan un punto dado o sección de un carril o de varios carriles durante un intervalo de tiempo dado, dividido por la cantidad de tiempo que dura ese intervalo.

La *Capacidad* representa el número máximo de vehículos que cruzan un punto durante un periodo específico de tiempo bajo condiciones predominantes de tráfico, de control y de la misma vía, expresada en unidades de flujo. Esta definición supone varias condiciones, como buen clima, buenas condiciones del pavimento, o una jornada sin incidentes. Se restringe a un punto o a un segmento con condiciones uniformes, por lo que diferentes segmentos en el mismo camino exhibirán distintas capacidades, lo que incluye la suposición de que no hay influencia de las condiciones tráfico abajo, como alguna onda en retroceso (véase la Subsección 2.3.7 en este mismo capítulo) causada por una congestión más adelante.

La capacidad se define con base en una “espectativa razonable”, es decir, la capacidad establecida para una determinada vía es un flujo que puede repetidamente ser observado durante periodos “pico” para los cuales existe suficiente demanda y que pueden ser alcanzados por otras vías de rodamiento similares. Así que no es el flujo máximo que puede ser acomodado ni mucho menos el máximo flujo absoluto que se haya registrado jamás en una vía de determinado tipo.

La distinción entre capacidad, volumen y flujo es importante.

El siguiente ejemplo es una contabilización de vehículos llevada a cabo durante una hora, en intervalos que duran 15 minutos :

Periodo de Tiempo	Volumen [Veh]	Flujo [Veh/hr]	Capacidad [Veh/hr]
5:00-5:15	0	0	1500
5:15-5:30	200	800	1500
5:30-5:45	150	600	1500
5:45-6:00	<u>0</u>	0	1500
5:00-6:00	350		

Los volúmenes han sido observados para cuatro periodos consecutivos de 15 minutos. El volumen total es de 350 vehículos contabilizados en una hora, o sea, la suma de las cuatro observaciones. El flujo, sin embargo, es cero en dos de los intervalos de 15 minutos y 800 y 600 vehículos por hora (*veh/h*) en los otros dos intervalos de 15 minutos. La capacidad es siempre la misma.

En esta forma, el volumen es una contabilización de vehículos acotada a un intervalo de tiempo, mientras que el flujo es la relación de cambio de una cantidad de vehículos con respecto al tiempo; se representa generalmente mediante la letra  $q$ . La capacidad es una constante inherente a la vía y a las condiciones que en ella se pueden encontrar normalmente.

Desde un punto de vista operativo, es posible definir niveles de servicio en segmentos de carretera. Éstos son rangos de operación que en forma cualitativa describen las condiciones de un flujo vehicular tomando en cuenta la percepción por parte de los conductores y pasajeros.

Los niveles de servicio han sido establecidos en el Manual de Capacidad de Carreteras [5] y aunque reflejan principalmente una clasificación del estado de la densidad de vehículos prevaleciente en la vía en estudio, involucran también a la velocidad y al flujo. Han sido denominados como A, B, C, D, E y F, representando niveles cuya calidad se considera que va de la mejor a la peor.

### **Nivel de servicio A**

Se refiere a una circulación a flujo libre, cuyos usuarios se hallan exentos de los efectos de la presencia de otros en circulación debido a la altísima libertad que tienen para maniobrar dentro del tránsito. El nivel general de comodidad y conveniencia proporcionado por la circulación al usuario es excelente.

### **Nivel de servicio B**

Se sigue dentro de una circulación considerada libre, aunque con una mayor densidad las interacciones entre vehículos comienzan a hacerse presentes, pero las velocidades deseadas permanecen inafectadas.

### **Nivel de servicio C**

La operación de los conductores se ve afectada significativamente por las interacciones con los otros conductores y las velocidades así como la libertad de maniobra comienzan a ser restringidas. El nivel de comodidad y conveniencia desciende notablemente.



## Nivel de servicio D

Representa una circulación con una densidad elevada, aunque estable, pero la velocidad y la libertad de maniobra se encuentran restringidas. En este caso la densidad y la velocidad se ven fuertemente afectadas con pequeños incrementos en el flujo. Los usuarios experimentan niveles reducidos de comodidad física y psicológica.

## Nivel de servicio E

El tráfico se encuentra en una zona alrededor de la capacidad de la vía y la velocidad desciende mucho. Cualquier pequeña alteración en el flujo, tal como el acceso de vehículos por una rampa de entrada a la vía o un cambio de carril, puede provocar la formación de una cola de congestionamiento que viajará en dirección contraria al flujo, afectando a los usuarios que vienen detrás del punto donde se produce. Debido a que se ha alcanzado el valor de capacidad de la vía, la habilidad de la misma para absorber hasta la más pequeña alteración desaparece y la maniobrabilidad de los conductores es extremadamente limitada. Los niveles de comodidad física y psicológica de los conductores es pobre.

## Nivel de servicio F

Representa condiciones de flujo forzado, situación que se produce cuando la cantidad de tráfico que se acerca a un punto excede la cantidad que puede pasar por él (cuello de botella), formándose colas y eventos recurrentes e inestables de parada y arranque. Las condiciones de comodidad para los usuarios son las más bajas. Siempre que se presenta un nivel de servicio del tipo F existe el potencial de que se extienda tráfico arriba<sup>2</sup> en distancias considerables.

### 2.2.2. Velocidad

La velocidad es la relación entre el espacio recorrido por un automóvil y el tiempo que ha tardado en recorrerlo. Esta definición es general y es expresada como el cociente  $s$  de una función de distancia  $d$  y una de tiempo  $t$

$$s = \frac{d}{t} \quad (2.1)$$

Es común medir a la velocidad en unidades de kilómetros por hora ( $\frac{km}{h}$ ).

Es posible definir varios parámetros relacionados con la velocidad según el interés específico que se tenga:

#### Velocidad instantánea

Se llama así a la velocidad que tiene un vehículo en un instante de tiempo, o punto en el espacio, específicos. También se le llama *velocidad puntual*.

---

<sup>2</sup>Las expresiones *tráfico arriba* y *tráfico abajo* se refieren a la procedencia y destino respectivamente del tráfico tomando como referencia un punto de observación, de la misma forma en que se usan las expresiones *aguas arriba* y *aguas abajo* al referirse al cauce de un río.



(a) Nivel de Servicio A



(d) Nivel de Servicio D



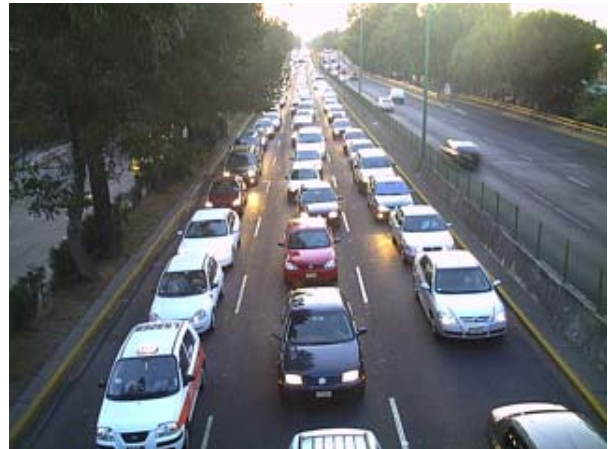
(b) Nivel de Servicio B



(e) Nivel de Servicio E



(c) Nivel de Servicio C



(f) Nivel de Servicio F

Figura 2.1: Niveles de servicio en una vía de tránsito vehicular (según el Highway Capacity Manual [5])

### Velocidad media temporal

Es la media de las velocidades instantáneas de vehículos que cruzan un punto sobre la carretera, por lo tanto se calcula como

$$\bar{s}_t = \frac{\sum_{i=1}^n s_i}{N} \quad (2.2)$$

donde:

$\bar{s}_t$  es la velocidad media temporal

$s_i$  es la velocidad instantánea del vehículo  $i$

$N$  es el número total de vehículos observados

### Velocidad media espacial

Fijada una distancia  $d$  que debe ser recorrida por los vehículos en estudio, se calcula la velocidad media espacial como el cociente de dicha distancia por el promedio de los tiempos empleados por dichos vehículos en recorrerla

$$\bar{s}_s = \frac{d}{\bar{t}} = \frac{d}{\frac{\sum_{i=1}^n t_i}{N}} \quad (2.3)$$

donde:

$\bar{s}_s$  es la velocidad media espacial

$d$  es la distancia fija que deben recorrer los vehículos

$\bar{t}$  es el tiempo promedio de recorrido

$t_i$  es el tiempo que tarda el vehículo  $i$  en recorrer la distancia  $d$

$N$  es el número total de vehículos observados

### Velocidad media de recorrido

Conocida también como *velocidad global* o de *viaje*. Es el resultado de dividir la distancia total recorrida desde el principio hasta el fin del viaje por el tiempo total de recorrido, incluyendo las demoras y paradas que puedan llegarse a registrar en el trayecto<sup>3</sup>.

Relacionado con ella se encuentra el *Tiempo de Recorrido*, que es el tiempo empleado por un vehículo al recorrer una distancia incluso tomando en cuenta demoras y paradas, siempre y cuando éstas no sean ajenas a la vía o al tráfico presente.

Para fines de cálculo, la literatura [5] usa como sinónimos a la velocidad media de recorrido y a la velocidad media espacial.

---

<sup>3</sup>Se excluyen de dichas demoras las que no son propias de las condiciones de la vía, el tránsito y los dispositivos de control, como son las que corresponden a paradas en gasolineras, restaurantes, lugares de recreación, etcétera [6, 53].

### Velocidad media de marcha

Se define como el cociente de la longitud conocida de un segmento por el tiempo promedio en que un vehículo estuvo en movimiento recorriéndolo. Para obtener la velocidad media de marcha se descuenta del tiempo total de recorrido todos aquellos intervalos en que el vehículo estuvo detenido por cualquier causa.

Relacionado se encuentra el *Tiempo de Marcha*, que es el tiempo durante el cual un vehículo se encuentra en movimiento.

### Velocidad de proyecto

Llamada también *velocidad de diseño*. Es la velocidad máxima a la cual pueden circular los vehículos con seguridad sobre una sección específica de una vía cuando las condiciones atmosféricas y del tránsito son tales que las características geométricas diseñadas para la vía dominan sobre la circulación.

### Velocidad de flujo libre

La que se desarrolla por parte del contingente de automóviles cuando la vía está lo suficientemente despejada para permitirles el desplazamiento sin que las interacciones entre ellos mismos o la carretera lo restrinjan. Se considera que esta velocidad de flujo libre  $v$  es la hallada cuando se tienen niveles de servicio del A al comienzo del E, por lo tanto, se trata de un rango de valores de velocidad que no abarca la totalidad de los ejes de los diagramas de flujo.

### Velocidad de flujo congestionado

Cuando las interacciones que limitan el espacio disponible en la vía, y por lo tanto el desplazamiento de los vehículos, afectan de manera importante el movimiento del tráfico, los autos comienzan a disminuir su velocidad, lo cual hace que los vehículos que vienen detrás los alcancen y también frenen.

Esto hace aparecer una frontera donde los vehículos que vienen a una velocidad  $v$  alcanzan a los que están frenando. Esta frontera se desplaza en dirección contraria al flujo de autos y lleva una velocidad  $w$ , considerada constante para un rango aceptable dentro de esta situación en la que se tiene un flujo congestionado en niveles de servicio E y F.

### 2.2.3. Densidad

La densidad es definida como el número de vehículos que se encuentran ocupando una determinada longitud de un carril o de una vía. Es común expresarla en unidades de vehículos por kilómetro ( $\frac{veh}{km}$ ).

La medición directa de la densidad puede hacerse mediante fotografías aéreas, imágenes videograbadas o mediante observaciones en sitio, delimitando una cierta longitud de vía y contabilizando el número de autos que se encuentran dentro de la misma en determinado momento, para cada carril o para la totalidad de los mismos.

Una forma de obtenerla es mediante el cociente del flujo vehicular  $q$  por la velocidad media espacial  $s_s$ .

$$k = \frac{q}{s_s} \quad (2.4)$$

La densidad tiene su mayor utilidad en vías de flujo ininterrumpido y caracteriza la calidad de su operación. Describe la proximidad que hay entre vehículos y por lo tanto la maniobrabilidad que existe en el tránsito.

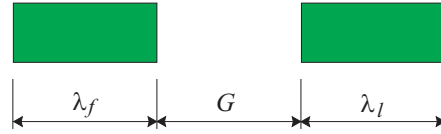


Figura 2.2: Distancia entre dos autos. El espaciamiento  $G$  se mide entre las defensas próximas de los vehículos líder y seguidor cuyas longitudes son respectivamente  $\lambda_l$  y  $\lambda_f$

Esa proximidad en ocasiones se mide directamente a través del *espaciamiento*  $G$  que existe entre un vehículo y el que le antecede (Figura 2.2) y puede ser útil en consideraciones de seguridad o de cálculo de colas formadas debido a una restricción al flujo, por la presencia de semáforos, rampas de entrada, etcétera.

Relacionada con la densidad y muchas veces preferida en sistemas de control se encuentra la *ocupancia*, debido a que hay ocasiones en que es más fácil de medir.

La *Ocupancia en el Espacio* se define como la proporción de longitud de vía cubierta por vehículos. La *Ocupancia en el Tiempo* identifica la proporción de tiempo en que una longitud de vía se encuentra ocupada por vehículos. Bajo el supuesto de un flujo homogéneo o una composición conocida de tráfico, estos dos tipos de ocupancia pueden tomarse como idénticos y ser usados para la obtención de la densidad.

#### 2.2.4. Relaciones entre las variables básicas

La Ecuación (2.4) establece una relación básica entre las tres variables —flujo ( $q$ ), velocidad ( $s$ ) y densidad ( $k$ )— que describen una corriente de tráfico ininterrumpida. Sin embargo, se debe tomar en cuenta que existen relaciones adicionales que restringen la variedad de condiciones de flujo existentes.

Hablando de vías diseñadas para servir a flujos sin interrupción, dichas relaciones se representan en forma gráfica como se muestran en la Figura 2.3. Aunque existen diferentes y muy sofisticadas teorías (Sección 2.3) para explicar y describir al tráfico vehicular, la relación lineal (2.4) simplifica la discusión.

Nótese que los tres diagramas se han colocado de tal manera que existe correspondencia entre los ejes verticales (velocidad) de los que están lado a lado, y que hay correspondencia entre los ejes horizontales (densidad) de los que están uno debajo del otro para reforzar la idea de dicha relación al tomar también en cuenta la escala de cada variable.

La forma de esas gráficas es más bien descriptiva y poco exacta. Su forma verdadera depende de las condiciones del tráfico y del segmento particular de carretera en estudio [43]. La Figura 2.3 muestra curvas continuas, pero en realidad es poco probable encontrar el rango completo de valores de cada variable en un punto particular de medición. Los datos que se llegan a obtener muestran discontinuidades en las cuales parte de estas curvas no está presente [29].

Las curvas de la Figura 2.3 ilustran varios puntos significativos. Nótese que el flujo cero ocurre bajo dos condiciones muy distintas:

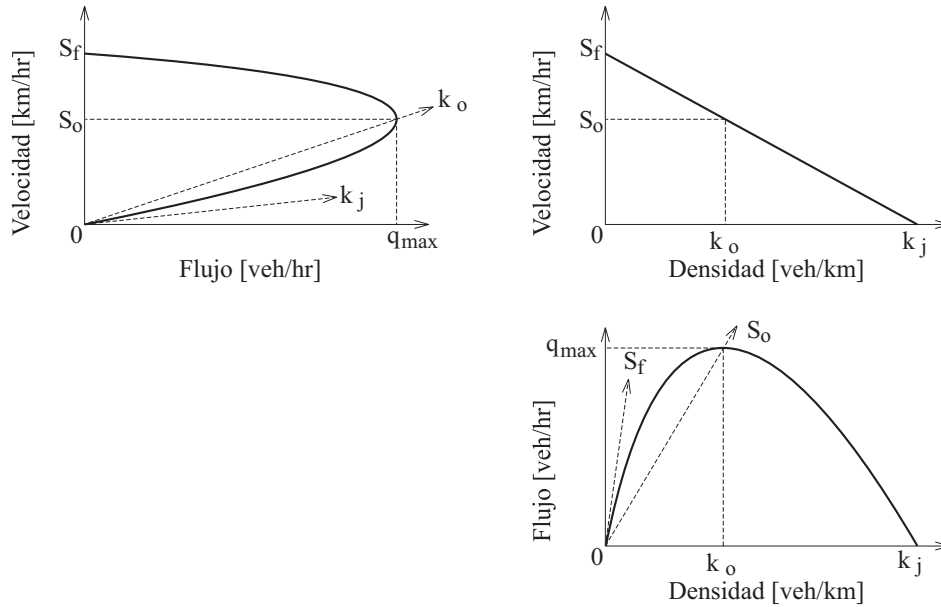


Figura 2.3: Relaciones fundamentales entre flujo ( $q$ ), velocidad ( $s$ ) y densidad ( $k$ )

1. Cuando no hay autos en la vía la densidad es cero y el flujo también. La velocidad es más bien teórica y será la que el primer conductor desee, presumiblemente un valor alto. Dicha velocidad está representada como  $s_f$  y se denomina *velocidad de flujo libre*.
2. Cuando la densidad se vuelve tan alta que todos los vehículos se ven forzados a detenerse, el flujo es otra vez cero, pues no hay movimiento. La densidad a la cual ocurre esta situación se conoce como *densidad de atascamiento*<sup>4</sup> (jam density) y se denota por  $k_j$ .

Entre los dos extremos anteriores existe una diversidad de condiciones del flujo vehicular. Conforme la densidad se incrementa desde cero, el flujo también lo hace, pues hay más vehículos en la vía, pero mientras esto ocurre la velocidad declina, dada la interacción creciente entre los autos. Dicho decremento en la velocidad es imperceptible a densidades y flujos bajos o medios.

Las curvas sugieren que la velocidad decrece significativamente poco antes de que se llegue a la capacidad de la vía, la cual es alcanzada cuando el producto de la densidad y la velocidad resulte en el valor de flujo máximo  $q_{max}$ . Esta condición es mostrada en los diagramas de la Figura 2.3 como *velocidad óptima* o *velocidad crítica*  $s_o$ , *densidad óptima* o *densidad crítica*  $k_o$  y *flujo máximo*  $q_{max}$ .

La pendiente de un rayo cualquiera dibujado desde el origen del diagrama velocidad-flujo hacia cualquier punto sobre la curva representa densidad. Similarmente, un rayo en la gráfica densidad-flujo representa velocidad. Estas pendientes pueden obtenerse de la relación fundamental (2.4).

Obsérvese también que los tres diagramas mostrados son redundantes, pues una vez establecida una sola relación entre variables, las otras dos quedan definidas. En este trabajo se considera a la relación flujo-

<sup>4</sup>Aunque [6] la traduce como *densidad de congestionamiento*, se ha preferido usar *densidad de atascamiento* para ese punto determinado de la gráfica, pues la primera es más bien usada para un rango de valores que van desde una *densidad crítica*  $k_o$  hasta este límite superior.

densidad (y a su respectivo diagrama fundamental) como la principal.

Como puede observarse en la Figura 2.3, cualquier valor de flujo distinto del máximo puede ocurrir en dos distintas condiciones, uno con alta velocidad y baja densidad y el otro con una baja velocidad y alta densidad. La porción de las curvas para éste último caso representa flujo congestionado, con cambios repentinos en el estado del tráfico, debido a paradas y arranques a los que se ven sujetos los vehículos cuando avanzan. Los niveles de servicio del A al E se definen para la porción de baja densidad y alta velocidad de las curvas, con la frontera de flujo máximo en el nivel de servicio E, mientras que la porción de flujo congestionado corresponde con el nivel de servicio F, donde existen baja velocidad y alta densidad.

## 2.3. Modelos de tráfico

### 2.3.1. Enfoques

Encontrar un modelo que describa los detalles y se sujete a las restricciones que caracterizan a las distintas vías de rodamiento de automóviles que pueden ser objeto de estudio requiere tanto del establecimiento de relaciones entre las diferentes variables que las pueden determinar como de la observación de la física del fenómeno.

El estado del tráfico es descrito por las relaciones entre sus variables. La primera aproximación que se ha mencionado al respecto es la Ecuación (2.4), pero hace falta saber cómo son cada una de las variables, las cuales son funciones unas de otras, así como del tiempo y de la superficie por la que circulan. Estas funciones pueden ser aproximadas a su vez desde distintos enfoques debido a que la naturaleza del fenómeno del tránsito presenta diferentes características que lo asemejan a otros fenómenos físicos, pero que mantiene otras que le son propias.

Por ejemplo, el fenómeno del tráfico tiene un carácter aleatorio, ya que un conjunto de unidades vehículo-conductor está influenciado por los deseos de tales conductores para alcanzar su destino, decidir sobre sus trayectorias posibles y los tipos de reacción que cada uno de ellos pueda exhibir durante el proceso. A partir de este enfoque es posible definir *modelos estocásticos* [1, 76].

Sin embargo, los autos conducidos a través de cualquier carretera, avenida o calle no se comportan totalmente en forma azarosa. De hecho, su grado de restricción aumenta conforme se hace más grande el número de interacciones que ocurren entre ellos y la geometría de la carretera por donde circulan. Ya se ha visto que es posible definir algunas relaciones entre las variables que indican su estado y por lo tanto obtener *modelos determinísticos* [9, 10, 32, 33, 50, 54, 57, 69, 68, 79], los cuales dan por sí mismos una mejor comprensión de la dinámica del fenómeno, algo que no puede establecerse tan directamente con sólo un tratamiento probabilístico .

Para cierto tipo de problemas es suficiente un enfoque local, es decir, basta con medir y estimar o modelar y analizar un punto o una sección de una vía de rodamiento por la cual atraviesa un flujo de interés. Un sitio dedicado a un puesto de revisión, una caseta de cuota o la entrada a una vía rápida pueden ser algunas aplicaciones que sirven de ejemplo. No obstante, es importante tomar en cuenta que los flujos que circulan por una avenida o carretera son muchas veces el resultado de otros flujos con los que tienen relación y al

tomarlo en cuenta se vuelve necesario un enfoque de redes, en el cual cada vía de circulación es un arco cuyos nodos se encuentran en aquellos lugares en donde dos o más de estos arcos convergen o se separan [61].

Por otra parte, también se puede intentar explicar el fenómeno de tráfico vehicular a partir de las unidades que lo componen, individuales o en pequeños conglomerados de las mismas, es decir, tomando en cuenta que se trata de un sistema discretizado que puede ser descrito en términos de *modelos microscópicos* [44, 57, 60, 69, 68, 73, 77, 79]. Estos modelos tienen como sus variables principales a las posiciones, velocidades y aceleraciones de autos individuales o pequeños conjuntos de los mismos, así como otros factores que afectan la interacción entre vehículos.

Aunque los modelos microscópicos aportan muchos detalles en la operación del tráfico, también traen consigo inconvenientes que les restan atractivo: altos costos de recursos computacionales y tiempo cuando se intentan simular, dificultad para establecer análisis matemático (en nuestro caso particular, análisis de estabilidad), necesidad de establecer simplificaciones que hacen inútil el nivel de detalle adquirido, etcétera.

Alternativamente, un flujo de vehículos a través de una vía guarda una analogía evidente con una corriente, ya sea de energía o de materia, similares a otros fenómenos físicos que describen al medio en el que se desarrollan los procesos. Las variables principales estudiadas en sistemas tratados en esta forma suelen ser las variables de flujo  $q$ , velocidad  $s$  y densidad  $k$  que ya se han tratado antes. Los modelos que se llegan a obtener en estos casos se les conoce como *modelos macroscópicos* [9, 10, 32, 33, 50].

Dada la riqueza de técnicas que pueden ser aplicadas a la descripción del tráfico vehicular, es posible obtener modelos del mismo que conjunten por ejemplo proposiciones determinísticas con expresiones estocásticas, y cualquier modelo es perfectamente clasificable en más de una de las citadas categorías, las que con seguridad seguirán ampliándose y creándose nuevas. A continuación se intenta dar un aspecto general de la multitud de tales modelos usados para describir el fenómeno que nos ocupa, el tránsito de vehículos a través de una vía de rodamiento.

### 2.3.2. Análisis del tráfico mediante la distribución de Poisson

Si todos los vehículos que circulan por una determinada vialidad se encontraran espaciados en forma uniforme, sería fácil determinar su flujo en sus diferentes niveles de densidad y velocidad desarrollados en cada caso. Pero la situación real es que los vehículos circulan en forma más o menos dispersa y por lo tanto es posible clasificar al tránsito como un proceso aleatorio en una gran cantidad de ocasiones.

Para flujos vehiculares cuyos valores son bajos o medios se puede considerar que

- Cada conductor sitúa su vehículo independientemente de los demás, pero que esto es en menor medida según la densidad se incrementa y el espacio disponible es menor.
- El número de vehículos que pasan por un punto en un intervalo de tiempo es independiente del número de vehículos que pasan por otro punto en el mismo intervalo.
- El número de vehículos que pasan por un punto dado en un intervalo de tiempo es independiente del número de vehículos que pasan por el mismo punto en otro intervalo.



Si se presume que un flujo posee las características anteriores entonces se dice que tiene una distribución de Poisson [76]. La probabilidad  $p$  de que  $n$  vehículos lleguen a un punto de observación en un intervalo de tiempo  $t$  está dada por

$$p(n) = \frac{\mu^n e^{-\mu}}{n!}, \text{ para } n = 0, 1, \dots, \infty \quad (2.5)$$

siendo  $\mu$  el número promedio de llegadas de vehículos en un intervalo  $t$ .

Por otra parte, la probabilidad de que no lleguen vehículos a un punto determinado dentro de un intervalo  $t$  dado, está dada por

$$p(0) = \frac{\mu^0 e^{-\mu}}{0!} = e^{-\mu}, \text{ para } t \geq 0 \quad (2.6)$$

Lo que significa que existe un espaciamiento entre vehículos de al menos una cantidad  $t$  de tiempo.

Conforme el flujo se incrementa, las ecuaciones (2.5) y (2.6) pierden precisión<sup>5</sup>.

Las Expresiones (2.5) y (2.6) tienen aplicaciones como control de intersecciones, cálculo de longitudes de almacenamiento en carriles de vuelta izquierda, estimación de filas y demoras de tránsito, disponibilidad de claros o separaciones entre vehículos de una corriente principal que permita el cruce de vehículos de un flujo secundario, estudio de maniobras de convergencia de flujos, predicción de llegadas a puntos de interés, etcétera.

Aunque la distribución de Poisson tiene muchas aplicaciones, no es la única herramienta utilizada para el estudio del tráfico vehicular como un fenómeno aleatorio y es posible encontrar referencias [14] que citan otros tipos de distribución probabilística. Sin embargo, muchas de estas distribuciones son más bien utilizadas para flujos interrumpidos y, al igual que la de Poisson, ninguna cubre el rango completo de las variables.

### 2.3.3. Teoría de Colas

Hay condiciones en que el tráfico de vehículos se analiza desde la perspectiva de un sistema que provee servicio a demandas que le llegan en forma aleatoria, en este caso, un flujo vehicular que demanda entrar a una vía de circulación, desde una rampa de entrada o después de esperar una señal de semáforo.

La Teoría de Colas se aplica en telefonía, telegrafía, operaciones de inventario, de servicio a clientes y tráfico aéreo, marítimo o ferroviario [76]. El caso del tránsito en carreteras tiene un aspecto fuertemente probabilístico, relacionado con las frecuencias de llegada e incorporación a una cola principalmente [58].

No es el objetivo de este trabajo ahondar en estos análisis, y únicamente interesa la contabilización de los vehículos que se involucran en estos procesos. Debido a que la cola puede estar influida no sólo por los vehículos que a ella llegan sino por los que en ella esperan o salen de la misma, puede ser vista como un sistema dinámico en la cual también es aplicable el principio de conservación

$$\text{Vehículos esperando en la cola} = \text{Vehículos que llegan} - \text{Vehículos que salen} \quad (2.7)$$

La formación de colas de vehículos es una medida del desempeño o parte de las restricciones a tomar en cuenta para el diseño de un esquema de control, por lo que la incorporación de expresiones relacionadas con (2.7) en los esquemas aquí mostrados se verá con mayor detalle en el Capítulo 4.

---

<sup>5</sup>Martin Whol y Brian V. Martin [76] muestran con un análisis de  $\mathcal{X}^2$ , aplicado a datos reales pertenecientes a un flujo de valor grande, que la hipótesis de correlación entre ellos y la Ecuación (2.6) no puede sostenerse.

### 2.3.4. Modelos de vehículos que siguen a otros vehículos

Los conductores realizan varias maniobras a lo largo de sus viajes desde que parten de su origen hasta llegar a su destino. Si suponemos que la mayor parte del tiempo se mantienen siguiendo a un vehículo que se encuentra delante de ellos en la vía, sin tomar en cuenta que eventualmente podría darse un adelantamiento por parte del primero, es posible observar que existe un espaciamiento  $G_n$  entre un vehículo  $n$  y el que le antecede que depende principalmente de la velocidad  $\dot{x}$  a la cual se desplaza cada uno de ellos por la carretera, de tal forma que a mayor velocidad mayor es este espacio, debido a la existencia de un factor de seguridad, que describe el comportamiento del conductor seguidor quien sabe que debe reaccionar ante un eventual cambio de velocidad por parte de quien lo antecede, es decir, ambos presentan aceleraciones  $\ddot{x}$  cuya afectación de uno sobre otro es distinta.

De esta manera, una primera aproximación a un modelo de tráfico a nivel de autos individuales que siguen a otros [57, 74] es

$$G_n = \alpha + \beta\dot{x} + \gamma\dot{x}^2 \quad (2.8)$$

donde

$\alpha$  es la longitud efectiva del vehículo

$\beta$  es el tiempo de reacción del conductor seguidor

$\gamma$  es el recíproco de dos veces la máxima desaceleración del vehículo seguidor,  $1/2a_f$

El término  $\gamma\dot{x}^2$  modela el espacio adicional necesario para el caso en que si el vehículo delantero llegase a frenar totalmente, el vehículo que viene detrás evite una colisión<sup>6</sup>.

Un valor aceptable para el coeficiente  $\gamma$  puede ser

$$\gamma = 0.5 \left( a_f^{-1} - a_l^{-1} \right) \quad (2.9)$$

donde  $a_f$  y  $a_l$  son las máximas aceleraciones promedio de los vehículos seguidor y líder respectivamente, con lo cual se hace un intento por incluir los desempeños de frenado de cada automóvil<sup>7</sup>.

La Ecuación (2.8) tiene un origen empírico, más cercano a observaciones que al análisis. Una expresión actualmente más aceptada debido a que es obtenida a través de un procedimiento analítico, además de estar de acuerdo con lo observado en el campo, es

$$\ddot{x}_n(t) = \lambda_n(t) (\dot{x}_{n-1}(t - \tau) - \dot{x}_n(t - \tau)) \quad (2.10)$$

donde  $\lambda_n(t)$  es la *sensibilidad* del auto  $n$  [79]. La Ecuación dinámica (2.10) sirve para modelar el comportamiento de un número  $N$  de autos que se desplazan sin rebasarse en un carril, donde los que van adelante afectan a cada uno de los que les siguen.

---

<sup>6</sup>La Expresión 2.8 la cita Rothery como resultado de una serie de estudios dada a conocer en el *Highway Capacity Manual* de 1950.

<sup>7</sup>Rothery toma este valor de  $\gamma$  de: Harris, A. J. (1964). *Following Distances, Braking Capacity and the Probability of Danger of Collision Between Vehicles*. Australian Road Research Board, Proceedings 2, Part 1, pp. 496-412.

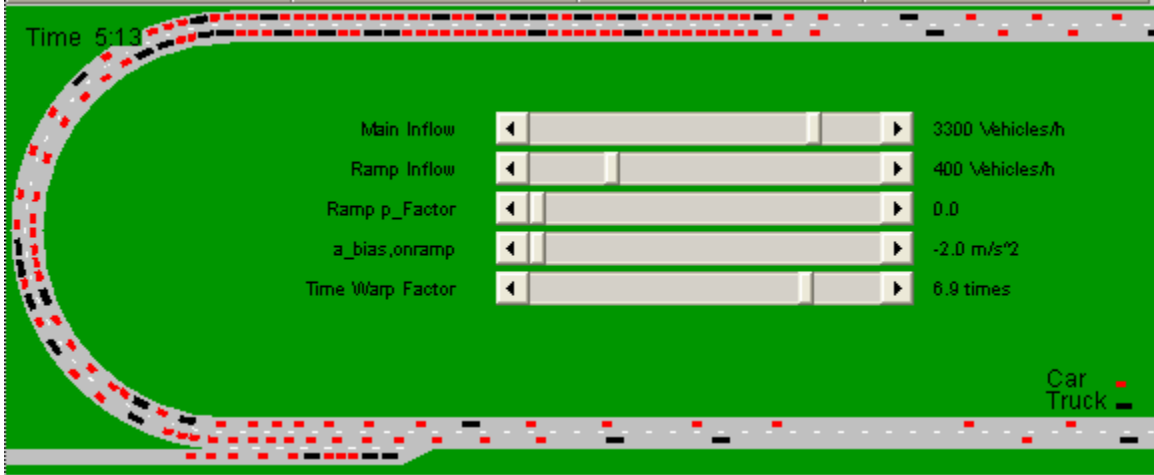


Figura 2.4: Microsimulación de tráfico (*applet* de Martin Treiber [68]).

Estos modelos resultan útiles para llevar a cabo microsimulaciones de autos individuales [68, 69], agregando o modificando términos que expresen la agresividad o cortesía promedio de los conductores, las condiciones de la carretera, o incluso la interacción entre distintos tipos de vehículos (Figura 2.4). Sin embargo, suele ser sumamente difícil llevar a cabo diseño y análisis de estabilidad cuando se intenta incorporar un esquema de control en dichos modelos.

### 2.3.5. Obtención de modelos mediante la aproximación de curvas

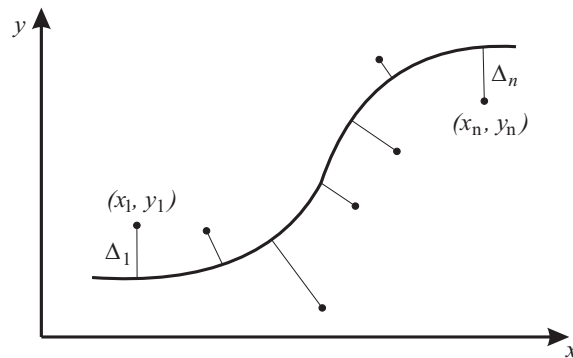


Figura 2.5: Distancias perpendiculares entre puntos y una función de aproximación

Cuando se tienen datos de mediciones de variables, es posible intentar buscar alguna correlación entre ellas a través de alguna técnica apropiada. A partir de puntos que relacionan flujo y densidad, por ejemplo, se puede intentar buscar aproximar una curva cuya expresión matemática pueda ser conocida en sus parámetros.

De la Figura 2.5 se ve que las distancias  $\Delta_i$  deben ser minimizadas simultáneamente para encontrar la curva  $y = f(x)$  que mejor se aproxime a todos los puntos  $(x_i, y_i)$ . La suma de los cuadrados de esas distancias  $\sum_{i=1}^N \Delta_i^2$  se minimiza, con lo cual se obtiene una expresión de la curva que mejor se ajusta a tales puntos.

Generalmente se minimiza únicamente la distancia vertical (Figura 2.6), de tal manera que el cálculo se

expresa como

$$\sum_{i=1}^N \Delta_i^2 = \sum_{i=1}^N [f(x_i) - y_i]^2 \quad (2.11)$$

siendo  $f(x_i)$  los valores de una función  $f(x)$  con la forma de la curva a la cual se desea ajustar el comportamiento de los puntos. Este proceso es conocido como Método de los Mínimos Cuadrados.

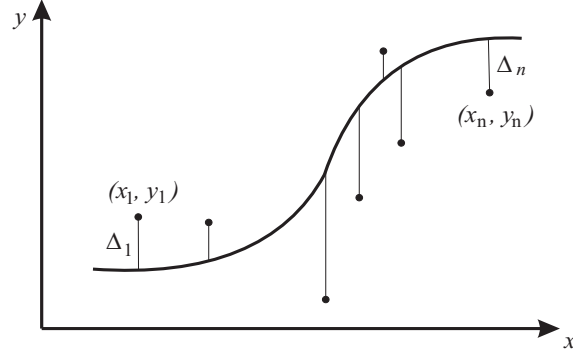


Figura 2.6: Distancias verticales entre puntos y una función de aproximación

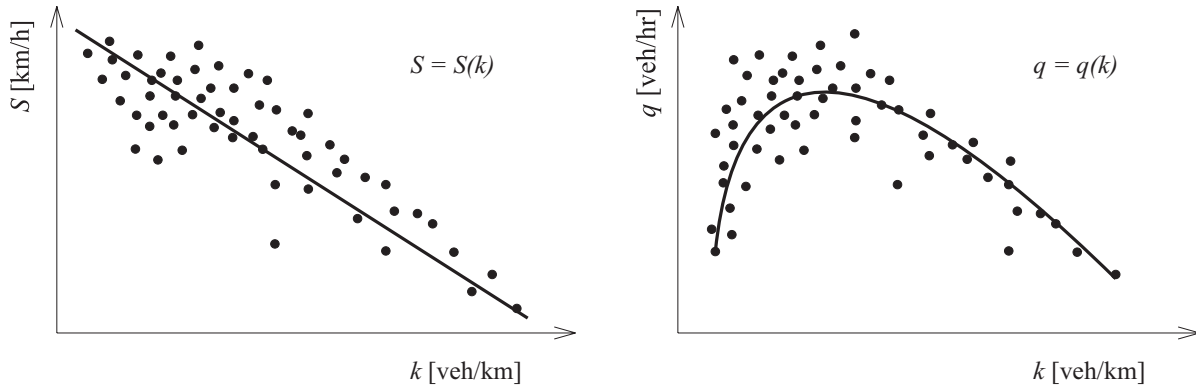
Cuando la función  $f(x)$  es una recta entonces

$$\sum_{i=1}^N \Delta_i^2 = \sum_{i=1}^N [Ax_i + B - y_i]^2 \quad (2.12)$$

y se obtiene una recta de regresión en mínimos cuadrados [37]. Para conocer los coeficientes de dicha recta es necesario obtener las derivadas parciales con respecto a cada uno e igualarlos a cero

$$\frac{\partial}{\partial A} \sum_{i=1}^N [Ax_i + B - y_i]^2 = 2 \sum_{i=1}^N (Ax_i^2 + Bx_i - x_i y_i) = 0 \quad (2.13a)$$

$$\frac{\partial}{\partial B} \sum_{i=1}^N [Ax_i + B - y_i]^2 = 2 \sum_{i=1}^N (Ax_i + B - y_i) = 0 \quad (2.13b)$$



(a) Aproximación de datos de velocidad ( $s$ ) y densidad ( $k$ )

(b) Aproximación de datos de flujo ( $q$ ) y densidad ( $k$ )

Figura 2.7: Aproximación de datos de mediciones a curvas fundamentales de tránsito

Se obtiene entonces el sistema de ecuaciones simultáneas

$$A \sum_{i=1}^N x_i^2 + B \sum_{i=1}^N x_i - \sum_{i=1}^N x_i y_i = 0 \quad (2.14a)$$

$$A \sum_{i=1}^N x_i + NB - \sum_{i=1}^N y_i = 0 \quad (2.14b)$$

que al resolver, dan el valor de de los coeficientes buscados. Las ecuaciones (2.14) pueden usarse para buscar una expresión que describa un perfil de datos de pares densidad-velocidad, por ejemplo (Figura 2.7(a)). Para perfiles flujo-densidad o flujo-velocidad (Figura 2.7(b)), si existe linealidad en los parámetros buscados y a su vez hay independencia lineal en ellos, es posible encontrar un algoritmo basado en este método para hallar sus estimados (véase la subsección 3.2.2).

### 2.3.6. Analogía con la conductividad unidimensional del calor

Dada la complejidad que contiene cada uno de los aspectos del tráfico vehicular es muy difícil reflejar cada detalle en un solo modelo. La mayor parte del tiempo se debe limitar el campo de estudio mediante el análisis únicamente de un conjunto restringido de situaciones particulares del fenómeno o hacer suposiciones que fijen a los parámetros a un valor o rango representativos, con tal de llegar a un modelo matemático en el cual las ecuaciones obtenidas muestran las relaciones de cambio entre variables. Estas relaciones son a la vez producto de las acciones llevadas a cabo en observación, experimentación y razonamiento sobre el fenómeno.

Una forma de explicar el tránsito de vehículos es comparándolo con el flujo de calor a través de un conductor que se considera muy largo y delgado, homogéneo, térmicamente aislado y en el que no existe generación de calor.

$$a^2 \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (2.15)$$

La variación de la Temperatura  $T$  se da a lo largo de la longitud  $x$  de la varilla en función del tiempo  $t$ , en forma análoga a como la densidad vehicular  $k$  varía a lo largo de una autopista y con respecto al tiempo. La constante  $a^2$  engloba propiedades del material del que está hecha la varilla, como conductividad, calor y peso específico. Análogamente, dicha constante ocuparía el lugar de alguna propiedad característica de la autopista en estudio (véase la Subsección 2.3.8 más adelante). En muchas situaciones de tráfico vehicular, un carril puede actuar como un conductor largo y delgado, homogéneo y térmicamente aislado, como cuando existe control en el acceso y ninguna oportunidad de cambio de carril.

Para un conductor en el que el calor se genera en cantidad constante mientras su superficie lateral está aislada [80], esta ecuación se transforma en

$$a^2 \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = c \quad (2.16)$$

siendo  $c$  una constante positiva. La Ecuación (2.16) es una generalización de (2.15) y toma en cuenta los efectos de aquellos vehículos que entran o salen de una sección de camino, en donde el flujo de automóviles es análogo a la temperatura.

### 2.3.7. Analogía con la Teoría Hidrodinámica

Las autopistas sirven de vía a grandes volúmenes o flujos de automóviles los cuales pueden ser vistos como partículas componentes de un fluido en movimiento.

La analogía con modelos hidrodinámicos es cercana al fenómeno y ha resultado la más exitosa y utilizada. Los trabajos de Lighthill y Whitham [32, 33], semejantes a los desarrollados y complementados en forma independiente por Richards [54], son pioneros en dicha propuesta<sup>8</sup>, conocida como el modelo LWR. En conjunto proponen que el tráfico debe cumplir con la ley de conservación

$$\frac{\partial k(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (2.17)$$

donde se tienen las variables ya conocidas de densidad  $k$ , tiempo  $t$  y flujo  $q$ , así como posición longitudinal  $x$  en la vía.

Estas expresiones suponen que la relación entre el flujo  $q(x, t)$  y la densidad  $k(x, t)$  observadas bajo condiciones de estado estable también son válidas cuando flujo y densidad varían con la posición  $x$  o con el tiempo  $t$ , para un segmento de carretera homogénea<sup>9</sup>

$$q(x, t) = Q(k(x, t)) \quad (2.18)$$

donde  $Q$  es una función no-negativa, la cual es cero para  $k = 0$  y  $k = k_j$  (densidad de atascamiento), es decir, dicha función debe obedecer lo observado en el campo (véase la Sección 2.2), por lo que algunas modificaciones o modelos basados en el modelo LWR proponen expresiones específicas para (2.18).

Dado que la relación entre las variables macroscópicas fundamentales es

$$q(x, t) = k(x, t) s(x, t) \quad (2.19)$$

la velocidad  $s$  queda expresada simplemente como  $s = q/k$ . Entonces la ley de conservación (2.17) puede escribirse como

$$\frac{\partial k(x, t)}{\partial t} + k \frac{\partial s(x, t)}{\partial x} + s \frac{\partial k(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (2.20)$$

Una de las propuestas realizadas para expresar la dinámica de las tres variables  $q$ ,  $k$  y  $s$  fue llevada a cabo por Payne [50], quien a las Expresiones (2.17) y (2.19) agregó

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -s \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{1}{\tau} \left[ (s_e(k) - s) + g \left( k, \frac{\partial k}{\partial x} \right) \right] \quad (2.21)$$

donde

$\tau$  es el tiempo promedio de reacción de los automóviles

$s_e(k)$  es la relación velocidad-densidad propia del sistema

$g$  es una función relacionada con la densidad  $k$  y con la variación de ésta con respecto a la posición  $x$

<sup>8</sup>Lighthill y Whitham reconocen a varios trabajos estadísticos de J. G. Wardrop como antecedentes de sus resultados.

<sup>9</sup>Un segmento en el que no varía el número de carriles, ni el ancho de los mismos, así como tampoco las condiciones del pavimento, de su pendiente o de su curvatura, al menos en forma apreciable.

Payne hace el intento de lograr una mayor precisión en la predicción del estado del tráfico que se desplaza en forma continua. El modelo (2.19)-(2.21) ha sido utilizado con éxito [46], pese a que su principal inconveniente consiste en que muestra transitorios de valores negativos de densidad, flujo y velocidad. Este hecho ha valido críticas no sólo para este modelo, sino hacia todos aquellos modelos considerados de segundo orden [11], a los cuales se les puede agregar algún tipo de restricción de cálculo a la hora de usarlos para llevar a cabo simulaciones numéricas y así evitar dichos transitorios [38].

### 2.3.8. Modelo de Transmisión por Celdas

El efecto agregado en las variables de tráfico que se desprende de la Teoría Hidrodinámica del Tráfico hace considerar al flujo  $q$ , densidad  $k$  y velocidad  $s$  como funciones continuas del tiempo  $t$  y de la posición  $x$  en la carretera. Se puede discretizar a estas dos últimas variables de tal forma que la dinámica del tráfico se actualice cada intervalo  $\Delta t$  de un número finito  $I$  de segmentos de longitud  $L_i$  cada uno<sup>10</sup>, llamados “celdas”, en que se puede dividir la carretera.

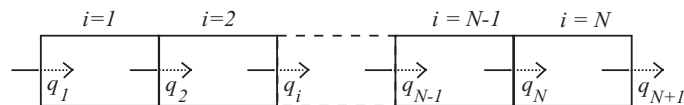


Figura 2.8: División en celdas de una carretera

El Modelo de Transmisión por Celdas (Cell Transmission Model: CTM) propuesto por Daganzo [9] clasifica al tráfico en dos posibles situaciones. Las observaciones en el campo muestran que mientras existan las condiciones para que los vehículos se desplacen libremente lo harán a la máxima velocidad permitida por el conjunto global de características (estado del pavimento, condiciones meteorológicas o de visibilidad, reglas de tránsito, etcétera) de la carretera, lo que correspondería con Niveles de Servicio del A al E (véase la Subsección 2.2.1), donde el flujo  $q$  puede ser calculado mediante la relación lineal

$$q_L = kv \quad (2.22)$$

donde la densidad  $k$  es multiplicada por la velocidad  $v$  del frente de flujo de vehículos –que es la velocidad de flujo libre  $s_f$  que se vio en la Subsección 2.2.4– y que en este caso se toma como constante.

Cuando la densidad se incrementa de tal manera que las interacciones entre vehículos afectan este valor de velocidad, el flujo deja de ser libre y comienza a congestionarse (Nivel de servicio E). Ahora los conductores buscan espacio dentro de la corriente de tráfico que les permita seguir desplazándose. Conforme el espacio se hace más escaso, la velocidad del conjunto se vuelve menor, por lo que los vehículos que vienen detrás alcanzan a los de adelante, formándose una frontera que retrocede en relación a la dirección del flujo (Figura 2.9).

Si en lugar de tomar en cuenta la densidad debida a la presencia de vehículos, se toma en cuenta el espacio que estos dejan, calculado mediante  $(k_j - k)$ , se verá que son estos espacios los que tienden a llenarse hacia atrás en un frente de onda con velocidad  $w$  que es independiente de la velocidad que los automóviles

<sup>10</sup>Esta longitud debe ser menor o igual a la necesaria para que un vehículo la recorra en el intervalo  $\Delta t$

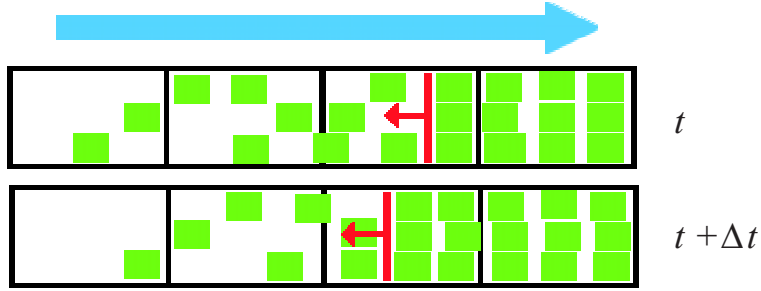


Figura 2.9: Frente en retroceso (iluminado en rojo) durante un proceso de congestionamiento. El flujo normal de tráfico es en la dirección de la flecha azul. Los autos a la derecha no necesariamente deben estar detenidos para que este proceso se lleve a cabo.

llevan, observándose que  $v > w$ . Considerando que el tráfico ahora avanza llenando espacios, el flujo ahora tiene una situación congestionada que debe calcularse como

$$q_C = (k_j - k)w \quad (2.23)$$

Recuérdese que  $k_j$  es la máxima densidad que la carretera puede llegar a contener.

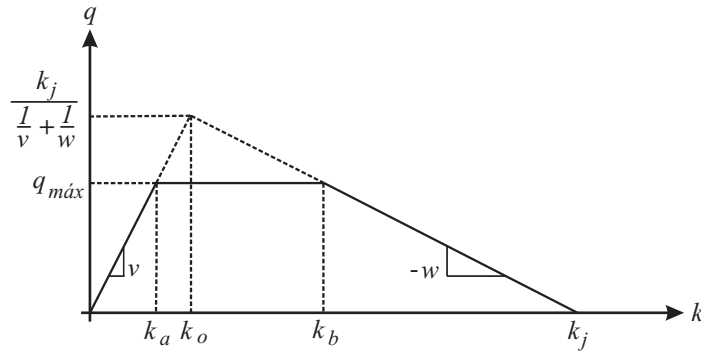


Figura 2.10: Diagrama fundamental densidad-flujo según el CTM

Las Expresiones (2.22) y (2.23) son sólo válidas en rangos respectivos de densidad. En la Figura 2.10 puede apreciarse que, considerando a las velocidades de frente de onda  $v$  y  $w$  como constantes, una aproximación suficientemente precisa en buena parte de los casos, se nota claramente una frontera entre una densidad de tránsito libre y una de tránsito congestionado, en un valor de densidad crítica<sup>11</sup>  $k_o$ , en la cual ocurre la transición entre ambas situaciones.

La Figura 2.10 es la forma que adquiere el diagrama fundamental densidad-flujo (Sección 2.2.4) según la aproximación propuesta por el CTM de la Teoría Hidrodinámica. En la figura se incluye una tercer recta horizontal que representa el valor máximo de flujo alcanzado en la vía y que está directamente relacionada con las características geométricas y de estado general de la carretera. Esta recta intenta aproximar la parte curva correspondiente a esa zona de transición de un diagrama fundamental real (Figuras 2.3 y 2.7(b)), suavizando en esta forma el pico que resulta de la intersección de las rectas (2.22) y (2.23).

<sup>11</sup>Dado que  $k_o$  es el valor en cual se presenta el máximo valor de flujo  $q_{max}$ , también se le llama densidad óptima.



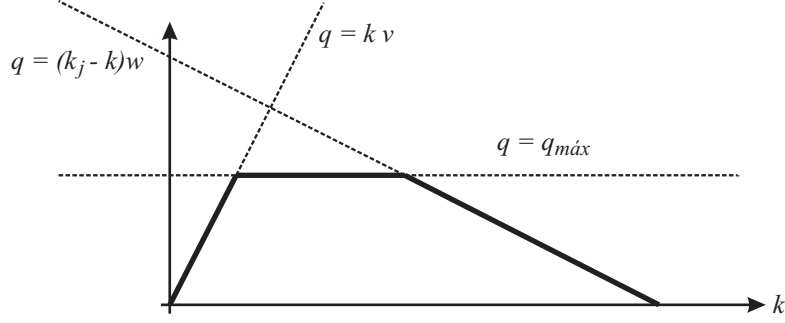


Figura 2.11: Cálculo del flujo  $q$  sobre el diagrama fundamental densidad-flujo del CTM mediante el uso del operador *mínimo*.

Las tres rectas calculan el flujo que se transmite entre dos celdas a partir del valor de densidad presente. La elección final del valor de flujo es la menor de esas tres cantidades (Figura 2.11).

$$q_i = \min\{k_{i-1}v_{i-1}, q_{max}, (k_j - k_i)w_i\} \quad (2.24)$$

donde el subíndice  $i$  relaciona las variables con cada una de las celdas en que se ha dividido la carretera.

Una vez calculados los flujos  $q_i$ , el CTM se completa mediante el cálculo recursivo de densidad<sup>12</sup>

$$\frac{dk_i(t)}{dt} = \frac{1}{L_i} [q_i(t) - q_{i+1}(t)] \quad (2.25)$$

que es una ley de conservación.

### Condiciones de frontera

Para establecer condiciones de frontera a la entrada y la salida de la porción de una carretera simulada, es necesario modificar la Expresión (2.24).

En el caso de los vehículos que fluyen hacia la celda  $i = 1$ , no existe una celda anterior desde la cual se desplacen<sup>13</sup>, por lo que el primer argumento de dicha ecuación debe ser modificado, poniéndose en su lugar un flujo  $q_e(t)$  que puede expresar la forma en que varía el tráfico a lo largo del tiempo, incluyendo fenómenos como “horas pico”, con lo cual el flujo  $q_1(t)$  se calcularía mediante

$$q_1 = \min\{q_e(t), q_{max1}, (k_j1(t) - k_1(t)) w_1\} \quad (2.26)$$

Para el caso del flujo de salida de la celda  $i = I$ , el cual corresponde con  $q_{I+1}$ , los dos últimos argumentos de (2.24) deben ser sustituidos por un flujo máximo de salida  $q_s(t)$ , el cual generalmente es algún tipo de función o serie de datos de mediciones, con lo cual

$$q_{I+1} = \min\{k_I v_I, q_s(t)\} \quad (2.27)$$

<sup>12</sup>Originalmente, Daganzo [9] proponía un esquema más simple en el que las longitudes de las celdas eran exactamente iguales a las distancias que podían recorrer los autos en exactamente un intervalo de tiempo predeterminado, calculando en cada celda el número de autos que en ella se encontraban durante dicho lapso.

<sup>13</sup>Daganzo [9] propone un par de celdas, indicadas como “00” y “0” como elementos fuente.

## Representación de redes de celdas. Definiciones

Los caminos de circulación automotriz no solamente constan de rectas, sino que existen puntos de unión y separación. Es fácil darse cuenta que estos puntos cobran fundamental importancia en la simulación de tramos de caminos que al unirse o dividirse constituyen una red de caminos. Sin embargo, también es notorio que la simulación de este tipo de estructuras implica una mayor complejidad en relación al modelo hasta ahora presentado.

Aunque se pueden representar los trayectos de que se compone una de tales redes a través de celdas en forma similar a como hasta ahora se ha hecho, ahora ya no es posible identificar siempre a cada una de dichas celdas numerándolas consecutivamente para especificar que los vehículos se mueven a aquella numerada como siguiente o que proceden de otra identificada como anterior. Será conveniente entonces redefinir la noción de celda y aún extenderla para abarcar a dichas relaciones. Esto se consigue al describir al sistema como un conjunto de celdas o nodos  $\{I\}$  que están unidas por un conjunto de ligas  $\{l\}$ . Las letras mayúsculas se usarán para identificar celdas mientras que las minúsculas lo harán con las ligas (Figura 2.12). De esta manera se

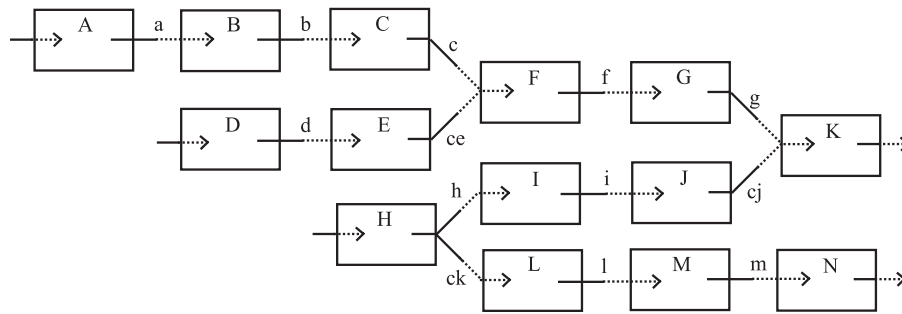


Figura 2.12: Red de celdas

tendrán tres estructuras topológicas básicas: *celdas ordinarias*, *celdas convergentes* y *celdas divergentes*. En cada una de ellas se debe especificar una celda de inicio para esa estructura topológica, así como una celda de terminación, las cuales se encuentran unidas por una liga.

Para fines descriptivos, en los siguientes párrafos de este capítulo se denominarán con *Bl* y *El* a las celdas de inicio y terminación<sup>14</sup>, respectivamente, correspondientes a la topología de la liga *l*, todo lo cual es suficiente para identificar a una celda ordinaria como con las que hasta ahora se ha tratado en secciones anteriores (Figura 2.13a).

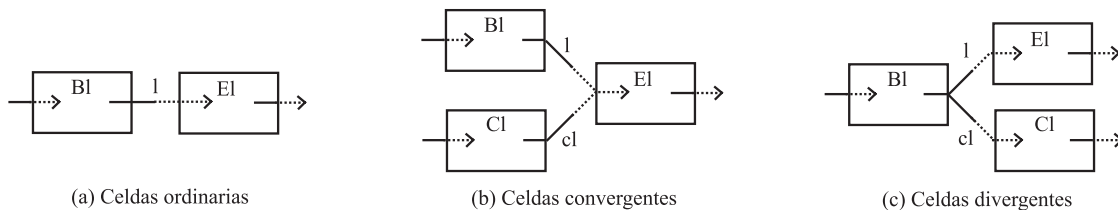


Figura 2.13: Estructuras topológicas básicas

<sup>14</sup>Al igual que en la nomenclatura utilizada en [10]

Las otras estructuras básicas constan de un conjunto de tres celdas. Para identificar todos sus componentes se identifica a la tercer celda como la celda complemento  $Cl$ , la cual se une a la celda de terminación (en el caso de una convergencia) o a la celda de inicio (en el caso de una divergencia) por medio de una liga complemento  $cl$  (Figuras 2.13(b) y 2.13(c)). Los flujos en las ligas  $l$  y  $cl$  se calcularán a través de expresiones similares a (2.24), los que tendrán como argumentos las características  $(q_{max}, k_j)$  de los nodos o celdas  $Bl$ ,  $El$  y  $Cl$ .

Es necesario hacer notar que en una carretera a simular pueden aparecer estructuras de más de tres celdas en lugar de una estructura básica divergente o convergente como las descritas. Tales topologías complican las ecuaciones de flujo que son derivadas de (2.24) y (2.25), por lo que se evita su uso. En su lugar se procura descomponer a la carretera real en tantas estructuras básicas como las definidas según sea necesario, ayudándose para ello en la longitud variable en las celdas. También es posible establecer tiempos de muestreo cuya magnitud permita lograr simulaciones lo más cercanas a la realidad.

La Figura 2.14 muestra en primer término dos topologías de sendos nodos de carretera, las cuales no son permitidas bajo este enfoque al no respetar el diseño de las estructuras básicas; por otro lado, esta Figura muestra a su vez dos topologías alternativas de estos mismos nodos, las que son válidas para las definiciones hasta ahora hechas sobre dichas estructuras, en otras palabras, una red de caminos solamente podrá ser descompuesta en combinaciones de las tres estructuras que se aprecian en la Figura 2.13. A continuación se

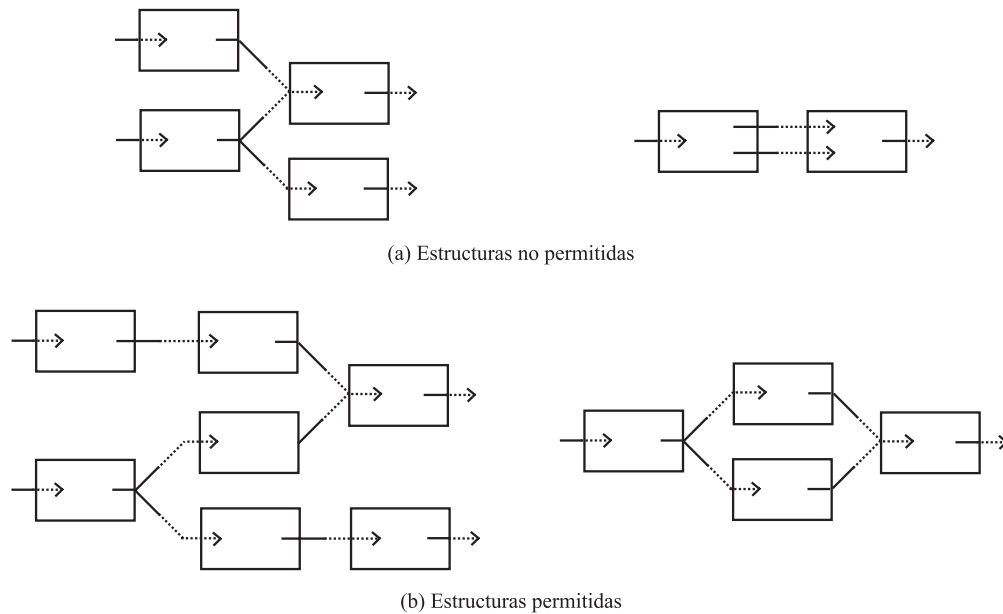


Figura 2.14: Ejemplos de representaciones permitidas y no permitidas

establecen las ecuaciones necesarias para calcular los flujos  $q_l(t)$  circulantes en cada una de estas estructuras.

### Ligas de celdas ordinarias

Redefínase la ecuación (2.24) en la forma

$$q_l(t) = \min\{k_{Bl}(t)v_{Bl}, \min[q_{max Bl}(t), q_{max El}(t)], (k_{j El} - k_{El})w_{El}\} \quad (2.28)$$

donde:

$k_{Bl}(t)$  es la densidad de vehículos provenientes de la celda de inicio  $Bl$

$k_{El}(t)$  es la densidad de vehículos enviados a la celda de terminación  $El$

$L_{Bl}$  es la longitud de la celda de inicio  $Bl$

$L_{El}$  es la longitud de la celda de terminación  $El$

$q_{max\ Bl}(t)$  es el máximo flujo permisible desde la celda  $Bl$

$q_{max\ El}(t)$  es el máximo flujo permisible hacia la celda  $El$

$k_{j\ El}(t)$  es el máximo número de vehículos de la celda  $El$

$v$  es la velocidad de flujo libre

$w$  es la velocidad de onda de retroceso

De esta expresión es posible hacer otra simplificación deseable. Defínanse

$$S_{Bl}(t) = \min\{q_{max\ Bl}(t), k_{Bl}v_{Bl}\} \quad (2.29a)$$

$$R_{El}(t) = \min\{q_{max\ El}(t), (k_{j\ El} - k_{El})w_{El}\} \quad (2.29b)$$

que son los máximos flujos que pueden ser enviados por la celda  $Bl$  o recibidos por la celda  $El$  en el intervalo  $\Delta t$ , con lo que se puede escribir a  $q_l(t)$  en la forma

$$q_l(t) = \min\{S_{Bl}(t), R_{El}(t)\} \quad (2.30)$$

Esto es, el flujo en la liga  $l$  debe ser el máximo que puede ser enviado por su respectiva celda de inicio a menos que se vea restringido por el máximo flujo que puede ser recibido por la celda de terminación.

Obsérvese que la expresión dada por (2.30) tiene la ventaja de ser más explícita en cuanto a los flujos máximos que pueden ser enviados o recibidos, además de que permite establecer dichos flujos entre celdas cuyas capacidades  $(q_{max}, k_j)$  son distintas.

### Ligas de celdas convergentes

De la Figura 2.13b puede verse que el flujo máximo  $R_{El}$  que puede ser recibido por la celda  $El$  está en función de los flujos  $q_l$  y  $q_{cl}$  que avanzan desde las celdas  $Bl$  y  $Cl$  a partir del cálculo de  $S_{Bl}$  y  $S_{Cl}$ .

Es posible darse cuenta de que los flujos deben satisfacer

$$q_l(t) \leq S_{Bl} \quad (2.31a)$$

$$q_{cl}(t) \leq S_{Cl} \quad (2.31b)$$

$$q_l(t) + q_{cl}(t) \leq R_{El} \quad (2.31c)$$

En este tipo de topología existen tres posibles situaciones:

1. **Flujo libre.** La celda  $El$  es capaz de recibir la totalidad de los flujos  $S_{Bl}$  y  $S_{Cl}$ . Puesto que hay espacio suficiente hacia adelante, el flujo viaja libremente en esa dirección y sólo depende de las condiciones existentes aguas arriba de ambas aproximaciones.
2. **Flujo congestionado.** Las celdas tienden a congestionarse. Esto implica que en la celda  $El$ , al encontrarse en dicha situación, aparece la onda de retroceso que empieza a llenar los espacios aún disponibles en las celdas que se encuentran atrás, lo cual implica que los flujos dependen de las condiciones imperantes aguas abajo.
3. **Flujo mixto.** Una de las celdas convergentes se encuentra congestionada y la otra libre, con lo que en la primera el flujo depende de las condiciones aguas abajo y en la segunda de las condiciones aguas arriba. Esto forzosamente implica que la celda de terminación  $El$  de esta topología se encuentra libre.

Puesto que los flujos vehiculares son en general distintos en cuanto a la forma de aproximarse a un punto de convergencia, se supondrá que una fracción  $p_l$  de vehículos proviene de  $Bl$  mientras que el resto,  $p_{cl}$ , se aproxima por  $Cl$ , de tal manera que

$$p_l + p_{cl} = 1 \quad (2.32)$$

$p_l$  y  $p_{cl}$  pueden verse como medidas de la prioridad de cada celda en un punto de convergencia, lo que significa que una vez agotado el flujo de la celda con mayor prioridad dentro del intervalo de tiempo de muestreo, se dará paso al flujo o parte del mismo de la aproximación con menor prioridad y que pueda ser admitido todavía por  $El$ . En general,  $p_l$  y  $p_{cl}$  establecen la manera en que una u otra celda se jerarquizan entre sí.

Para encontrar las expresiones que permitan el cálculo de los diferentes flujos involucrados en una convergencia, supóngase que es posible representarlos a través de la Figura 2.15. En ella se encuentra trazado

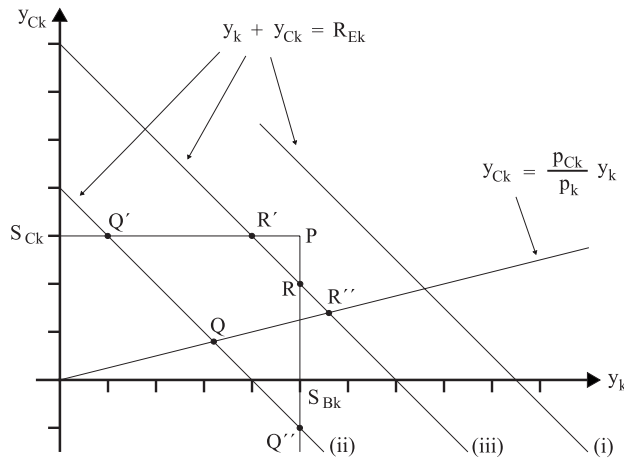


Figura 2.15: Diagrama de cálculo de flujos de una convergencia

un rectángulo cuyos lados miden  $q_l = S_{Bl}$  y  $q_{cl} = S_{Cl}$ , cayendo todos los puntos del mismo en valores no negativos. Este rectángulo representa los flujos que satisfacen a las Ecuaciones (2.31a) y (2.31b). Además,

se tiene la línea  $\frac{q_{cl}}{q_l} = \frac{p_{cl}}{p_l}$  que representa a los flujos que logran avanzar obedeciendo a las prioridades dadas a cada aproximación. En la figura,  $p_l > p_{cl}$  (por ejemplo  $\frac{p_{cl}}{p_l} = \frac{1}{4}$ ) que es el caso más común.

Se ilustran tres casos a través de las líneas con pendiente negativa y que satisfacen (2.31c). Supóngase primero que la celda  $E_l$  es capaz de recibir la totalidad de los flujos que envían  $B_l$  y  $C_l$ , esto es, existe suficiente espacio para que el flujo en la convergencia se mueva en forma libre. Esta es la situación 1 descrita al inicio de esta subsección, la cual se establece como

$$\text{Si } R_{El} > S_{Bl} + S_{Cl} \text{ entonces } q_l(t) = S_{Bl}, q_{cl}(t) = S_{Cl} \quad (2.33)$$

Esta situación queda representada por la línea (i) que no interseca al rectángulo y los flujos son las coordenadas del punto  $P$ .

La situación 2, de onda de retroceso, se da cuando la recta con pendiente negativa se interseca con la de pendiente positiva dentro del rectángulo, pues solamente una fracción de ambos flujos convergentes pueden moverse durante el intervalo en el que se actualiza el estado de las celdas. Tales porciones corresponden a las coordenadas señaladas con el punto  $Q$  sobre la recta (ii).

Por otro lado, si tales líneas se intersecan fuera del rectángulo pero la de pendiente negativa lo interseca, como la (iii), entonces uno de los flujos convergentes puede moverse en forma libre mientras que del otro sólo puede pasar una porción. Esta es la situación 3 de flujo mixto. Los valores de los flujos se obtienen por las coordenadas del punto  $R$  (existe un caso similar a este cuando las rectas se intersecan por fuera pero por encima del rectángulo, es decir, cuando  $\frac{S_{Cl}}{S_l} < \frac{p_{cl}}{p_l}$ ).

A partir de lo anterior, se observa que las soluciones para las situaciones 2 y 3 de flujo en convergencia resultan ser los puntos medios de intersección sobre las líneas (ii) y (iii), respectivamente. Ahora es posible definir la manera de calcular los flujos en una topología de convergencia

Si  $R_{El} < S_{Bl} + S_{Cl}$  entonces:

$$q_l(t) = \text{med}\{S_{Bl}, R_{El} - S_{Cl}, p_l R_{El}\} \quad (2.34a)$$

$$q_{cl}(t) = \text{med}\{S_{Cl}, R_{El} - S_{Bl}, p_{cl} R_{El}\} \quad (2.34b)$$

En las Ecuaciones (2.34) es posible identificar a cada uno de los puntos  $Q, Q', Q''$  o a  $R, R', R''$  según la situación de flujo.

Una vez calculados estos flujos, pueden ser usados para actualizar el estado en la celda  $El$

$$k_{El}(t + \Delta t) = k_{El}(t) + [q_l(t) + q_{cl}(t) - q_{l+1}(t)] \frac{\Delta t}{L_{El}} \quad (2.35)$$

donde  $q_{l+1}(t)$  es el flujo de salida de  $El$ .

### Ligas de celdas divergentes

A diferencia de la topología convergente, en la que los flujos no tienen otra opción que unirse, en el caso de una divergencia (Figura 2.13c) se tiene que las fracciones de autos que van hacia uno u otro flujos de salida dependen de los diferentes destinos que pueden tener los conductores. Tales fracciones son difíciles de estimar *a priori*, pues la más exacta de dichas estimaciones significa conocer las intenciones de cada uno de los viajeros.

Para simplificar, por lo pronto, este problema, puede obtenerse un estimado estadístico que intente aproximar las tendencias de los conductores al uso de una u otra rama en la divergencia, suponiendo que por la liga  $l$  existe una proporción  $\beta_{El}$  de vehículos del flujo proveniente de  $Bl$  que decidirán ir hacia  $El$ , mientras que el resto  $\beta_{Cl}$  lo harán por  $Cl$ , esto es

$$q_l(t) = \beta_{El}q_{Bl} \quad (2.36a)$$

$$q_{cl}(t) = \beta_{Cl}q_{Bl} \quad (2.36b)$$

de tal manera que

$$\beta_{El} + \beta_{Cl} = 1 \quad (2.37)$$

siendo el estado presente en la celda de divergencia

$$k_{Bl}(t + \Delta t) = k_{Bl}(t) + [q_{l-1}(t) - q_l(t) - q_{cl}(t)] \frac{\Delta t}{L_{Bl}} \quad (2.38)$$

donde  $q_{l-1}(t)$  es el flujo que llega a la celda de inicio  $Bl$  de la topología.

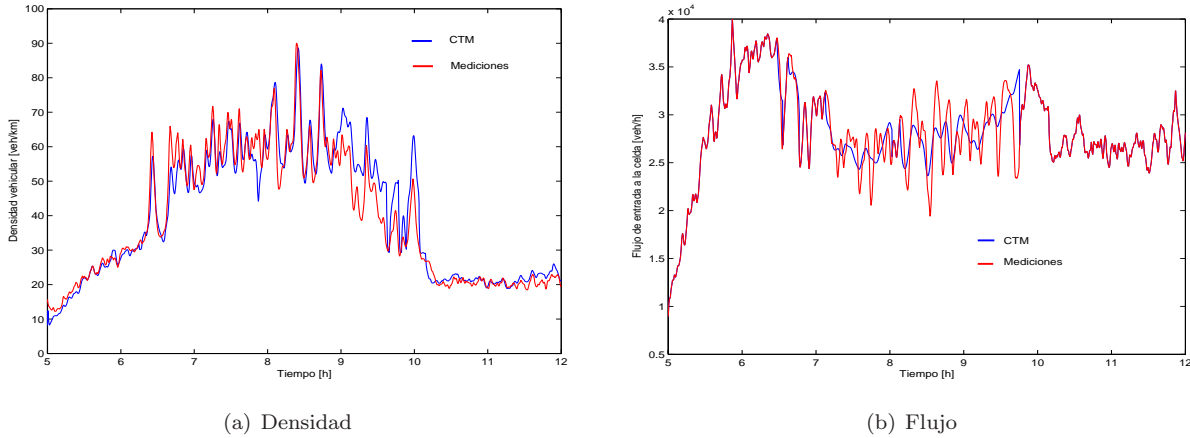


Figura 2.16: Valores de densidad y flujo obtenidos mediante el CTM y comparados con mediciones reales (datos de PEMS [52] de la autopista I-210 West, Pasadena, California).

Pese a su simplicidad, el CTM es capaz de predecir la mayoría de las veces el estado que guarda una autopista en el que el flujo es continuo (Figura 2.16). Es esta simplicidad la que lo vuelve ideal para llevar a cabo no sólo simulaciones sino, como se verá en el resto de este trabajo, es útil para el diseño y análisis de esquemas de estimación y control de variables de tráfico.

### 2.3.9. Enfoques alternativos

Como se ha visto, las características del fenómeno de tráfico vehicular hacen posible abordarlo desde varios puntos de vista y mediante analogías que recuerdan a otros fenómenos. Esa es la razón por la cual, a pesar del gran éxito que han tenido las derivaciones surgidas de la Teoría Hidrodinámica, se siguen buscando alternativas para el análisis, modelado y simulación del tráfico.

La lógica borrosa [20], las redes bayesianas [62] o los modelos inspirados en sistemas biológicos [35], son sólo algunas técnicas que se han usado para estos fines. Incluyo aquí a los autómatas celulares, modelos

originados en el concepto de autorreproducción biológica [21], lo cual no sólo los hace interesantes sino que llegan a obtener resultados muy precisos en cuanto a la simulación de condiciones de tráfico se refiere, y que operan en forma similar al CTM, aunque a nivel microscópico.

### Autómatas celulares

Un sistema está formado por elementos que lo constituyen y que obedecen un conjunto de relaciones. Del estudio de tales elementos, en especial de las leyes que los hacen interactuar, es posible determinar el comportamiento del sistema que componen.

La idea de reglas que controlan las interacciones entre las unidades básicas de las que se compone un sistema es la idea principal de los autómatas celulares, actualmente utilizados en disciplinas tales como Física, Biología, Matemáticas y Ciencias de la Computación.

Nagel [44] ha tomado las ideas básicas de los autómatas celulares [77] para aplicarlas a la elaboración de reglas que permitan simular el comportamiento del tráfico a nivel microscópico. El modelo computacional es definido sobre un arreglo unidimensional de un número finito de sitios con condiciones de frontera abiertas o periódicas. Cada sitio puede ser ocupado por un vehículo o puede estar vacío. Cada vehículo tiene una velocidad de valor entero entre cero y un límite superior de velocidad  $s_{max}$ .

Para una configuración arbitraria, la actualización del sistema en cada iteración consiste en cuatro pasos consecutivos y paralelos para todos los vehículos:

1. Aceleración: si la velocidad  $s$  de un vehículo es menor que  $s_{max}$  y si la distancia al siguiente auto que se encuentra adelante es mayor que  $s + 1$ , entonces la velocidad es incrementada en una unidad [ $s \rightarrow s + 1$ ].
2. Desaceleración (debida a otros vehículos): si un vehículo en el sitio  $i$  alcanza a otro vehículo que se encuentra en el sitio  $i + j$ , con  $j \leq s$ , entonces el primero reduce su velocidad a  $j - 1$  [ $s \rightarrow j - 1$ ].
3. Aleatoriedad: la velocidad de cada vehículo es decrementada en la unidad [ $s \rightarrow s - 1$ ] con una probabilidad  $p$ , siempre que la velocidad  $s$  sea mayor a cero.
4. Movimiento vehicular: cada vehículo avanza  $s$  sitios.

Las tres primeras reglas actualizan la velocidad de los vehículos<sup>15</sup>, mientras que la última actualiza su posición. Los resultados que pueden alcanzarse tienen una muy buena aproximación a la realidad [60, 73].

---

<sup>15</sup>En [31] se propone una modificación a la regla 3, *Desaceleración*, para obtener valores de frenado más realistas.



## Capítulo 3

# Estimación de variables y parámetros de tráfico

### 3.1. Planteamiento

Los datos necesarios para alimentar los esquemas mostrados en el Capítulo 4 pueden provenir de sensores que directamente los miden o de estimadores encargados de determinarlos a través de otras señales.

Normalmente los datos del tránsito de vehículos se obtienen de detectores magnéticos que se entierran en el pavimento o de sensores que proyectan y reciben rayos de luz sobre los vehículos al lado o por encima de las vías de rodamiento. Los detectores generalmente dan un porcentaje de la ocupancia con respecto al tiempo, esto es, la fracción de tiempo en que los vehículos se encuentran sobre el detector. De este porcentaje pueden derivarse otras cantidades macroscópicas tales como densidad vehicular y flujo (véase el Capítulo 1). Por otro lado, los sensores de rayos pueden dar lecturas sobre la velocidad que desarrollan.

Estas variables tienen dinámicas diferentes desde el punto de vista macroscópico, y en general los flujos y las densidades exhiben constantes de tiempo mucho más cortas que las velocidades de los vehículos en su conjunto. Además, dada la estructura que los modelos exhiben, las velocidades de frente de onda de tráfico pueden ser consideradas coeficientes o parámetros, cantidades cuyo conocimiento también es necesario.

Lo ideal es que estos datos se encuentren siempre a disposición y desde tantas posiciones como hagan falta. Sin embargo, el considerable costo de instalación y mantenimiento de estos sensores, junto a eventualidades que los hacen inoperantes a todos al mismo tiempo, ocasionan que las mediciones de tráfico no se encuentren disponibles en todo momento y en cada lugar, lo cual hace necesario que esta carencia sea superada a través de la estimación, la cual debe funcionar mediante datos que sí estén disponibles.

En esta tesis tomaremos a la estimación en un criterio amplio que englobe a la observación de variables y la identificación de parámetros, distinguiéndose por las herramientas utilizadas para llevarlas a cabo.

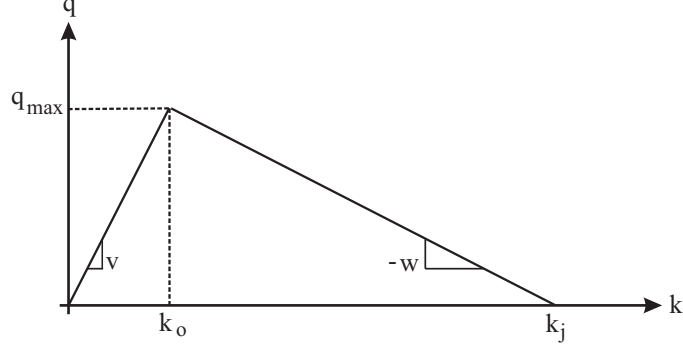


Figura 3.1: Diagrama fundamental Flujo-Densidad. El Flujo máximo coincide con la intersección de las rectas de flujos libre y de congestionado.

## 3.2. Identificación de velocidad de tráfico

### 3.2.1. Modelo de Modos Conmutados (Switching-Mode Model)

En [41] se propone tratar a un número no muy grande de celdas consecutivas de una carretera o autopista como si todas tuvieran el mismo tipo de flujo, es decir, como si todas las  $I$  celdas de ese conjunto estuvieran en flujo libre o como si la totalidad de las mismas estuvieran congestionadas. Esto implica que sólo se toman en cuenta el primero y el tercer términos de la Ecuación (2.24) que calcula el flujo entre celdas, con lo cual el diagrama fundamental es el que se ve en la Figura 3.1.

Muñoz et al. [41, 43] señalan que estos son dos de los  $2^I$  casos posibles de combinaciones de celdas que se encuentren con valores de tráfico libres o congestionados, pero que cualquiera de esas otras situaciones son inestables. Además, Muñoz et al. concluyen que las situaciones en la que todas las celdas están en flujo libre o todas en congestionado constituyen situaciones de equilibrio hacia las que tiende cualquier otra combinación de tipos de flujo en celdas.

El sistema de  $I$  celdas con flujo libre puede representarse en la forma (3.1) tomando a la densidad como variable de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{k}_1 \\ \dot{k}_2 \\ \vdots \\ \dot{k}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{v_1}{L_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{v_1}{L_2} & -\frac{v_2}{L_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{v_I}{L_I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \frac{1}{L_m} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

donde, además de las variables ya conocidas, se tienen a  $q_1$ , que es el flujo que entra por la primera de las celdas, y a  $[r_1 \cdots r_m]^T$ , que son flujos que se mueven a través de  $m$  rampas de acceso o salida de la carretera en la celda asociada a cada una de ellas.

Por otro lado, si el sistema de  $I$  celdas contiene flujos congestionados se representa mediante (3.2)

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{k}_1 \\ \dot{k}_2 \\ \vdots \\ \dot{k}_I \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{w_1}{L_1} & \frac{w_2}{L_1} & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{w_2}{L_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{w_I}{L_I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_I \end{bmatrix} - \\
 &- \begin{bmatrix} -\frac{w_1}{L_1} & \frac{w_2}{L_1} & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{w_2}{L_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{w_I}{L_I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{j1} \\ k_{j2} \\ \vdots \\ k_{jI} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \frac{1}{L_m} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_m \\ q_{I+1} \end{bmatrix} \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

siendo  $q_{I+1}$  el flujo que abandona la carretera a través de la última celda en el sentido de la circulación de vehículos.

Las formas (3.1) y (3.2) son propuestas por el equipo de la Universidad de California en Berkeley en [41] y en [42] con el nombre de “Switching-Mode Model” (Modelo de Modos Conmutados), SMM, una modificación del CTM de Daganzo [9, 10].

### 3.2.2. Identificación por mínimos cuadrados

Pese a su utilidad, son pocos los trabajos relacionados con la estimación de la velocidad en contingentes de vehículos. Un trabajo de Kohan y Bortoff [30] describe un esquema que emplea modos deslizantes para estimar tanto densidad como velocidad del tránsito de vehículos. En [17] y en [26] se habla más bien de la estimación (microscópica) de la velocidad individual, y aunque a través de estos datos sería posible encontrar medias que indicarán velocidades masivas, ni en estas referencias ni en ninguna otra, según la búsqueda realizada, se menciona la estimación de la onda de tráfico en retroceso que se aprecia en situaciones de congestionamiento.

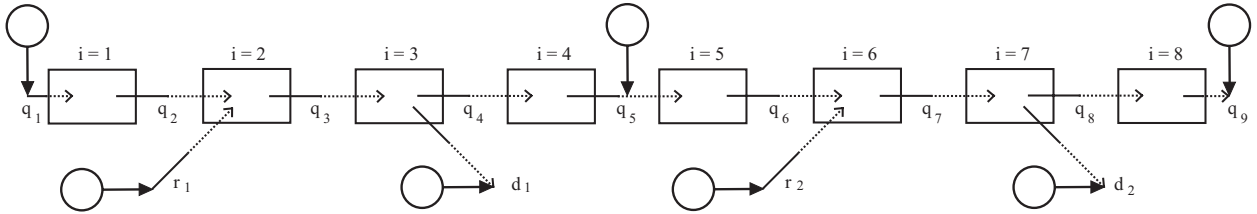


Figura 3.2: Esquema de división en ocho celdas de un tramo de 3.084km de una autopista interestatal de Pasadena, California. Los círculos indican los puntos donde se han colocado medidores de flujo.

La identificación de estas velocidades de onda puede ser llevada a cabo mediante mediciones de flujos de vehículos. La Figura 3.2 muestra esquemáticamente una sección de la autopista I-210, localizada en Pasadena, California. Este esquema divide en ocho celdas un tramo de poco más de 3 kilómetros que contiene dos rampas de acceso y dos rampas de salida. Los círculos indican los lugares donde se encuentran los sensores que obtienen los datos de flujo en intervalos de tiempo  $\Delta t$ . Estos datos son almacenados y están disponibles en forma pública [52].

Una herramienta clásica de identificación es la minimización del cuadrado de los errores (mínimos cuadrados), descrita en la Subsección 2.3.5. Junto con los flujos disponibles del tramo de I-210, y dado el carácter discreto de las mediciones de flujo, se puede llevar a cabo la identificación de las velocidades macroscópicas en flujo libre, reescribiendo (3.1) en la forma discreta

$$\begin{bmatrix} k_1(t + \Delta t) - k_1(t) - q_1(t) \frac{\Delta t}{L_1} \\ k_2(t + \Delta t) - k_2(t) - q_{r1}(t) \frac{\Delta t}{L_2} \\ \vdots \\ k_7(t + \Delta t) - k_7(t) + q_{d2}(t) \frac{\Delta t}{L_7} \\ k_8(t + \Delta t) - k_8(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1(t) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1(t) & -a_2(t) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -a_7(t) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_7(t) & -a_8(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_7 \\ v_8 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

donde  $a_i(t) = k_i \Delta t / L_i$ .

Esta expresión se deriva del SMM para una condición de tráfico libre, y se usa una forma discreta por ser más directamente implementada en un algoritmo de identificación como a continuación se muestra.

La Ecuación (3.3) puede a su vez expresarse como

$$S_L(t + \Delta t) = \Phi_L^T(t) \theta_L(t) \quad (3.4)$$

donde  $\Phi_L^T(t)$  es la matriz de regresores, en la que se considera que todos sus elementos son conocidos,  $S_L(t + \Delta t)$  es el vector de señales observadas o salidas, también accesibles por medición o estimación, y  $\theta_L(t)$  es el vector de parámetros a identificar, cuyos elementos son los valores de la velocidad de flujo libre  $v_i$  para cada una de las ocho celdas.

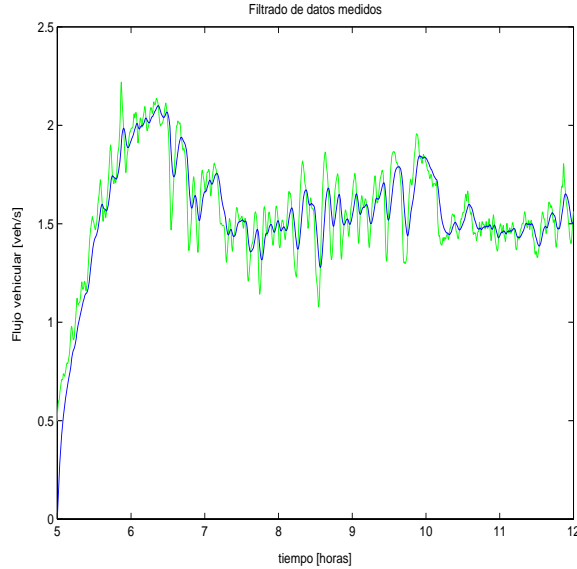


Figura 3.3: Efecto del filtrado sobre los datos del flujo  $q_1$

Para encontrar el vector de parámetros estimados  $\hat{\theta}_L(t)$  se necesita que sus valores sean tales que su producto con los regresores  $\Phi_L^T(t)$  sea lo más cercano posible a los valores de las mediciones  $S_L(t + \Delta t)$ , es

decir, que los residuos

$$\begin{aligned}\epsilon(t) &= S_L(t + \Delta t) - \hat{S}_L(t + \Delta t) \\ &= S_L(t + \Delta t) - \Phi_L^T(t)\hat{\theta}_L(t)\end{aligned}\quad (3.5)$$

se minimicen.

Los valores de  $v_i$  se obtienen recursivamente y en una forma que haría posible su implantación en tiempo real. La excitación persistente de los datos es ocupada para definir la matriz de covariancia  $P(t)$  que se calcula mediante (3.6)

$$P_L(t) = P_L(t - \Delta t) - P_L(t - \Delta t)\Phi_L(t) [I + \Phi_L^T(t)P_L(t - \Delta t)\Phi_L(t)]^{-1} \Phi_L^T(t)P_L(t - \Delta t) \quad (3.6)$$

y la actualización del vector de parámetros estimados  $\hat{\theta}_L(t)$  según

$$\hat{\theta}_L(t) = \hat{\theta}_L(t - \Delta t) + \alpha P_L(t - \Delta t)\Phi_L(t) [I + \Phi_L^T(t)P_L(t - \Delta t)\Phi_L(t)]^{-1} [S_L(t + \Delta t) - \Phi_L^T(t)\hat{\theta}_L(t)] \quad (3.7)$$

donde  $\alpha$  es un factor de retardo que retrasa la actualización, introducido para mejorar la convergencia numérica.

Se puede diseñar un esquema similar para identificar los valores de las velocidades de onda en flujo congestionado,  $w_i$ . En este caso, se define  $b_i(t) = (k_j - k_i)\Delta t/L_i$  para reorganizar (3.2) en la forma

$$\begin{bmatrix} k_1(t + \Delta t) - k_1(t) \\ k_2(t + \Delta t) - k_2(t) - q_{r1}(t)\frac{\Delta t}{L_2} \\ \vdots \\ k_7(t + \Delta t) - k_7(t) + q_{d2}(t)\frac{\Delta t}{L_7} \\ k_8(t + \Delta t) - k_8(t) + q_9(t)\frac{\Delta t}{L_8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1(t) & -b_2(t) & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2(t) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_7(t) & -b_8(t) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_8(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_7 \\ w_8 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

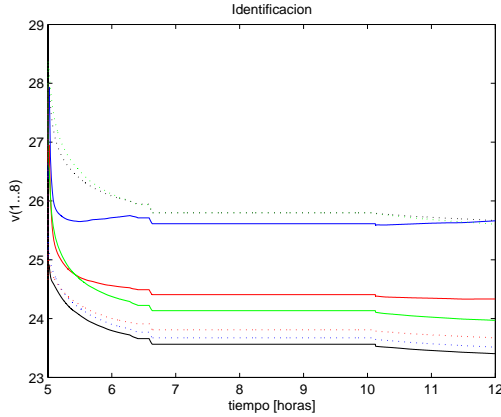
que a su vez puede expresarse como

$$S_C(t + \Delta t) = \Phi_C^T(t)\theta_C(t) \quad (3.9)$$

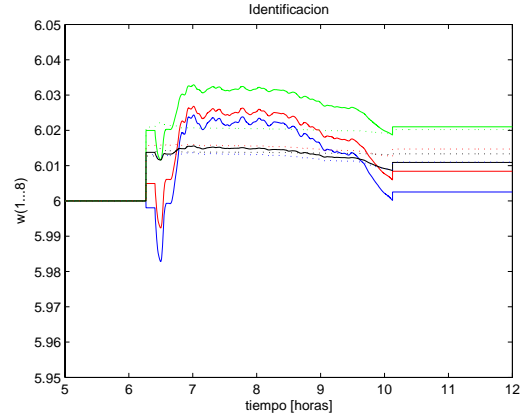
Tanto la matriz de covariancia  $P_C(t)$  como la actualización del vector de parámetros estimados  $\hat{\theta}_C(t)$  se obtienen en forma similar que en las Ecuaciones (3.6) y (3.7).

Los datos ocupados para llevar a cabo los cálculos mediante estos esquemas vienen acompañados de ruido que se supone blanco. La identificación de los parámetros  $v$  y  $w$  se vería afectada debido a las componentes de este ruido que se suman a la excitación proveniente de los datos en sí. Un filtro pasa-bajas de primer orden,  $T(s) = \frac{c}{s+a}$ , eliminaría las altas frecuencias, dejando únicamente las señales de frecuencia baja, entre las que se encuentran los valores medidos. La Figura 3.3 muestra el efecto logrado por el filtrado de los datos del flujo  $q_1$  si  $a = c = 0.01$ .

Al simular las expresiones de identificación usando los datos filtrados de flujo, se obtienen valores como los que se muestran en la gráfica de la Figura 3.4(a). Por su parte, la Figura 3.4(b) muestra lo que resulta de la identificación de la velocidad de flujo congestionado  $w_i$ . Un valor representativo de la velocidad de flujo libre es  $v = 28.2 \frac{m}{s}$  ( $\approx 101.4 \frac{km}{hr}$ ) y la de la velocidad onda en retroceso de flujo congestionado es de  $w_i = 6.47 \frac{m}{s}$  ( $\approx 23.3 \frac{km}{hr}$ ). Puede observarse que existe una buena aproximación a esos valores.



(a) Velocidades  $v$  de onda de flujo libre



(b) Velocidades  $w$  de onda de flujo congestionado

Figura 3.4: Identificación de velocidades de onda mediante la minimización de los cuadrados de los errores.

Dado que se usa un esquema de identificación para el caso en que las celdas se encuentran en valores de flujo libre y otro para el caso en que se encuentran congestionadas, la simulación conmuta entre ambos de acuerdo al valor de densidad de la última celda, es decir, si  $k_8 < k_o$ , siendo  $k_o$  el valor de densidad crítica que separa los valores de flujo libre de los de congestionado, la simulación opera según las Expresiones (3.3)–(3.7). En caso de que se requiera trabajar con valores de tránsito congestionado, se deben utilizar expresiones respectivas. Por lo tanto, al cambiar de tipo de flujo, el algoritmo utilizado “congela” al último valor calculado del esquema en uso. Puesto que  $v$  y  $w$  describen distintos fenómenos, no tiene sentido presentarlas en una sola gráfica.

### 3.2.3. Identificación por mínimos cuadrados extendidos

Si las velocidades  $v$  y  $w$  se consideran valores que cambian muy poco y muy lentamente, de los resultados mostrados en las gráficas de las Figuras anteriores es posible ver que existe una variación significativa. Como la única comparación que puede hacerse es respecto del valor medio considerado correcto ( $v = 28.2 \frac{m}{s} \approx 101.4 \frac{km}{hr}$ ), supondremos que una mejor aproximación es una cuya varianza sea la menor.

La variación podría deberse a ruido, así que pudiera pensarse en alguna estrategia para aislarlo. El enfoque empleado para detectar este ruido es el de mínimos cuadrados extendidos, donde ahora además de buscar el valor de los parámetros  $v_i$  y  $w_i$  se busca también el valor  $c_i$  que corresponde con la amplitud del ruido en cada celda. Así, si se añade el término  $c_i \epsilon_i$  para cada celda, se tiene una expresión análoga a la Ecuaciones (3.3) para tráfico en régimen libre

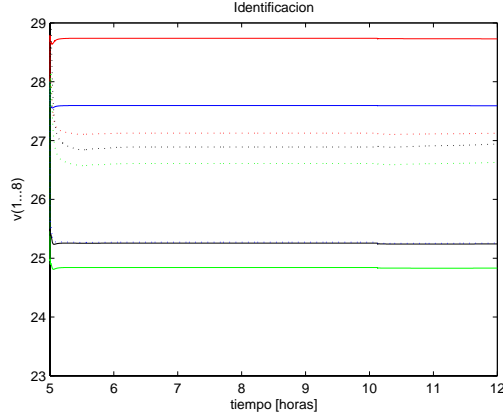
$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} k_1(t + \Delta t) - k_1(t) - q_1(t) \frac{\Delta t}{L_1} \\ k_2(t + \Delta t) - k_2(t) - q_{c1}(t) \frac{\Delta t}{L_2} \\ \vdots \\ k_7(t + \Delta t) - k_7(t) + q_{d2}(t) \frac{\Delta t}{L_7} \\ k_8(t + \Delta t) - k_8(t) \end{bmatrix} = \\
& \begin{bmatrix} -a_1(t) & 0 & \cdots & 0 & 0 & \vdots & \epsilon_1(t) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1(t) & -a_2(t) & \cdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & \epsilon_2(t) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -a_7(t) & 0 & \vdots & 0 & 0 & \cdots & \epsilon_7(t) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_7(t) & -a_8(t) & \vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \epsilon_8(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_8 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_8 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

La expresión correspondiente para el flujo congestionado es

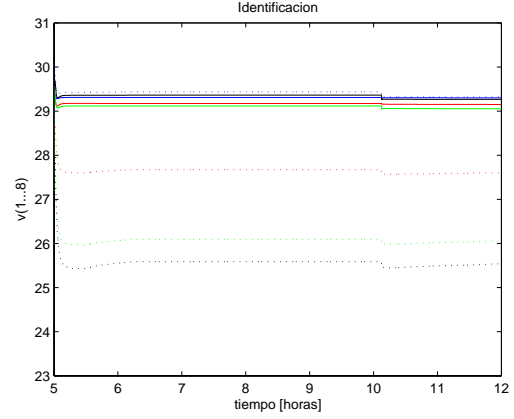
$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} k_1(t + \Delta t) - k_1(t) \\ k_2(t + \Delta t) - k_2(t) - q_{c1}(t) \frac{\Delta t}{L_2} \\ \vdots \\ k_7(t + \Delta t) - k_7(t) + q_{d2}(t) \frac{\Delta t}{L_7} \\ k_8(t + \Delta t) - k_8(t) + q_9(t) \frac{\Delta t}{L_8} \end{bmatrix} = \\
& \begin{bmatrix} b_1(t) & -b_2(t) & \cdots & 0 & 0 & \vdots & \epsilon_1(t) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2(t) & \cdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & \epsilon_2(t) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_7(t) & -b_8(t) & \vdots & 0 & 0 & \cdots & \epsilon_7(t) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_8(t) & \vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \epsilon_8(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_8 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_8 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Es conveniente mencionar que los distintos valores de las densidades no medidas se obtuvieron mediante un observador de orden completo diseñado a partir de (3.1) y de 3.2), con un término de realimentación igual a  $L_L(k_1 - \hat{k}_1)$  para el esquema libre y  $L_C(k_8 - \hat{k}_8)$  para el congestionado. Este observador emplea los valores de velocidades de onda identificados con los algoritmos aquí presentados. De esta forma se tiene un ciclo cerrado en el cual es posible realizar la observación de densidades vehiculares  $k_i$  y la identificación de los parámetros de velocidad  $v_i$  y  $w_i$ .

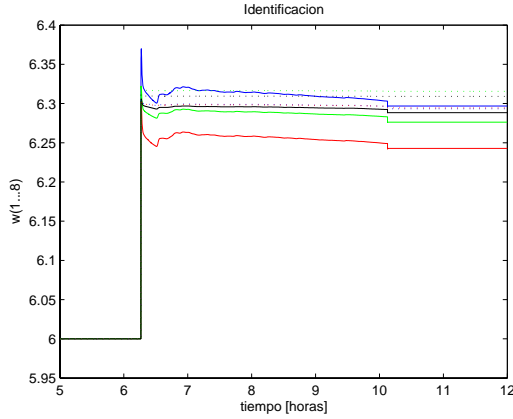
Las expresiones recursivas usadas en estos métodos extendidos tanto para  $P(t)$  como para  $\hat{\theta}(t)$  no sufren mayores alteraciones con respecto a las de mínimos cuadrados simple, salvo que sus dimensiones deben ser congruentes con las nuevas dimensiones de la matriz de regresores y del vector de parámetros desconocidos, respectivamente.



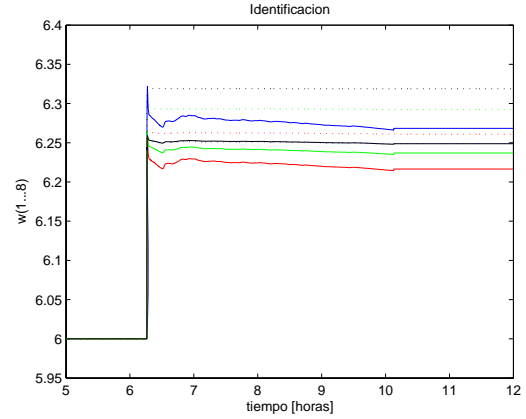
(a) Velocidades  $v$ . Esquema extendido.



(b) Velocidades  $v$ . Esquema doblemente extendido.



(c) Velocidades  $w$ . Esquema extendido.



(d) Velocidades  $w$ . Esquema doblemente extendido.

Figura 3.5: Identificación de velocidades de onda de tránsito mediante la minimización de los cuadrados de los errores. Esquemas extendido y doblemente extendido para aislar componentes de ruido coloreado.

En este caso, los resultados para la velocidad de flujo libre  $v_i$  se muestran en la Figura 3.5(a), mientras que la Figura 3.5(c) muestra los resultados para  $w_i$ .

### 3.2.4. Identificación por mínimos cuadrados doblemente extendidos

Buscando una mayor precisión en el modelado del ruido, se asumió que existía ruido blanco coloreado a través de un filtro de primer orden, es decir, a las matrices de regresores en las Ecuaciones(3.10) y de (3.11) se les agregan columnas con términos de ruido con atraso  $\epsilon(t - \Delta t)$ . De esta forma ahora se busca identificar para cada celda además de las velocidades de onda,  $v_i$ ,  $w_i$ , los coeficientes del filtro de primer orden,  $c_i$  y  $d_i$ . A este esquema se le denominó doblemente extendido. Las expresiones derivadas para esta versión de mínimos cuadrados extendidos son similares a las Ecuaciones(3.10) y (3.11) y no se incluyen.

Los resultados de identificación de  $v_i$  para el esquema de mínimos cuadrados doblemente extendido se muestran en la Figura 3.5(b), mientras que la Figura 3.5(d) muestra los correspondientes para  $w_i$ .



	MCS		MCE		MCEE	
	$\sigma(v_i)$	$\sigma(w_i) \times 10^{-4}$	$\sigma(v_i) \times 10^{-4}$	$\sigma(w_i) \times 10^{-4}$	$\sigma(v_i)$	$\sigma(w_i) \times 10^{-4}$
$i = 1$	0.044	1.050	0.250	0.325	0.000	0.280
$i = 2$	0.116	1.235	1.346	0.217	0.000	0.182
$i = 3$	0.204	2.036	0.868	0.100	0.002	0.071
$i = 4$	0.113	0.460	2.707	0.017	0.003	0.017
$i = 5$	0.125	0.376	8.812	0.008	0.005	0.010
$i = 6$	0.084	0.556	81.51	0.004	0.012	0.006
$i = 7$	0.267	1.012	228.7	0.001	0.030	0.004
$i = 8$	0.184	0.459	420.8	0.000	0.048	0.003
$\sigma_s$	0.005	$3.169 \times 10^{-9}$	$2.382 \times 10^{-4}$	$1.528 \times 10^{-10}$	$3.074 \times 10^{-4}$	$1.083 \times 10^{-10}$

Tabla 3.1: Varianzas para cada celda, para cada régimen de flujo, en cada esquema de identificación

### 3.2.5. Desempeño de los esquemas de identificación

Para complementar este análisis, es conveniente comparar los niveles de variación de los resultados encontrados. Para ello, se recurrió al cálculo de varianzas de las velocidades de onda de cada celda, para cada uno de los esquemas probados y tomando en cuenta únicamente aquellos datos que corresponden al régimen, libre o congestionado, que se encuentra activo en determinado momento. La Tabla 3.1 muestra dichos cálculos.

La Tabla 3.1 incluye también, en el último renglón, las varianzas  $\sigma_s$  de cada columna. En estas últimas, puede verse que el grado de variación de los valores del esquema de mínimos cuadrados simples (MCS), es el que más fluctuaciones tiene. En cambio, los esquemas de mínimos cuadrados extendidos (MCE) y los doblemente extendidos (MCEE) muestran una varianza en sus valores mucho menor. Con base en estos resultados, parece lógico sugerir utilizar el esquema de mínimos cuadrados extendidos (MCE), cuyos grados de variación  $\sigma_s(v_i)$  y  $\sigma_s(w_i)$  son bastante bajos y aceptables, además de requerir un menor esfuerzo de cálculo en comparación con el esquema doblemente extendido.

Finalmente, para mostrar los resultados que se obtienen con estos esquemas de identificación se incluyen en la Fig. 3.6 cuatro curvas con la densidad vehicular en la celda 5 que corresponden a los datos medidos y a los datos proporcionados por el estimador de densidad vehicular mencionado cuando éste usa las velocidades de onda proporcionadas por los tres esquemas de identificación probados.

## 3.3. Observación de densidad y velocidad vehiculares

### 3.3.1. Trabajos relacionados

Otra cantidad importante y a la cual se ha dado una mayor atención es la densidad vehicular. El diseño de esquemas de estimación parten de algún modelo que describa el comportamiento del tráfico y en el Capítulo 2 se mencionan distintos enfoques que a la fecha se han propuesto, como el caso de los autómatas celulares, los cuales son usados en [45].

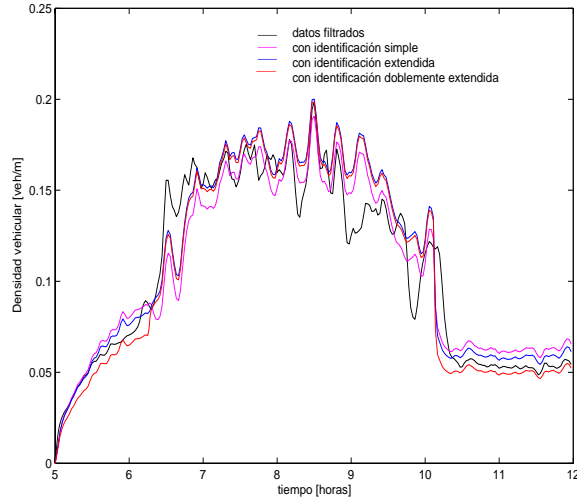


Figura 3.6: Densidad en la celda 5 según datos medidos y las velocidades de onda identificadas por los diferentes algoritmos que se emplean en el estimador de densidades.

Sin embargo, los modelos basados en la Teoría Hidrodinámica formulada por Lighthill, Whitham y Richards [33] son los que más difusión han alcanzado. Ya se mencionó que en [30] se muestran esquemas para estimar tanto velocidad como densidad. En dicho trabajo, los autores usan tanto diseños de modos deslizantes como filtros de Kalman como un primer intento sobre un modelo basado en la teoría hidrodinámica.

Más recientemente, Sun et al. [63, 64] han modificado filtros de Kalman de tal manera que haciendo uso de los principios del SMM no sólo obtienen una estimación de la densidad en los modos de flujo libre y congestionado, sino que a través de un algoritmo de mezcla probabilística para esos estimadores [8] consiguen una estimación bastante aproximada y continua, aunque su carácter es menos determinista.

Por otra parte, en [3] Alvarez-Icaza et al. se propone un estimador adaptable que también se basa en el SMM y que además incluye un análisis de Lyapunov para probar la convergencia de sus estimados, aunque no toma en cuenta escenarios más realistas como el caso de la existencia de rampas de entrada o salida.

### 3.3.2. Esquema propuesto de estimación simultánea de densidad y velocidad de onda

Aquí se propone un esquema que también se basa en el SMM, aplicado a un tramo finito de autopista con regularidad en el número de carriles. La diferencia fundamental con los trabajos anteriormente descritos se basa en que suponemos que tanto densidades como velocidades de onda de tráfico son variables para cada celda en la que se divide el tramo. A la densidad se le considera variante con el tiempo, aunque dicha variación es tomada como muy pequeña para el caso de las velocidades. Además, sólo se necesita de mediciones de flujo para alimentar los estimadores. Y una característica importante de la propuesta aquí mostrada es que cada una de las celdas puede mostrar un tipo de flujo distinto del de sus vecinas, al introducir un discriminador que utiliza lógica borrosa con el cual se califica el carácter libre o congestionado que cada una tiene en determinado momento<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Este esquema de estimación se encuentra publicado en el Journal of Nonlinear Dynamics [56].

### 3.3.3. Modelo de flujo libre

Volvemos a tomar en cuenta la división en celdas del tramo de la interestatal 210 oeste, esquematizado en Figura 3.2 y supondremos que todas las celdas tienen su densidad respectiva por debajo de la crítica  $k_o$ . Entonces la dinámica puede describirse mediante

$$\dot{k} = L^{-1} F_L V k + B_L u_L = A_L(v)k + B_L u_L \quad (3.12a)$$

$$y_L = C_L(v)k \quad (3.12b)$$

donde  $k = [k_1, \dots, k_8]^T$  es el vector de las densidades de las celdas,

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & v_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & v_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & v_8 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$v = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_8 \end{bmatrix}^T \quad (3.14)$$

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{L_8} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$u_L = \begin{bmatrix} q_1 & r_1 & d_1 & r_2 & d_2 \end{bmatrix}^T \quad (3.16)$$

$$C_L(v) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & v_8 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$F_L = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$B_L = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L_7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$A_L(v) = L^{-1} F_L V \quad (3.20)$$

La estructura diagonal de  $V$  implica que

$$A_L(v)k = A_L(k)v \quad (3.21a)$$

$$C_L(v)k = C_L(k)v \quad (3.21b)$$

Como se mencionó en la Sección anterior, se asume que la densidad  $k$  y la velocidad  $v$  no se miden y que sólo existen datos disponibles de flujo en los puntos indicados en la Figura 3.2.

### 3.3.4. Modelo de flujo congestionado

Cuando todas las celdas están congestionadas, se puede derivar un modelo similar a (3.12)

$$\dot{k} = L^{-1} F_C W(k_j - k) + B_C u_C = A_C(w)(k_j - k) + B_C u_C \quad (3.22a)$$

$$y_C = C_C(w)(k_j - k) \quad (3.22b)$$

donde  $k_j$  es el vector de las densidades de atascamiento,

$$W = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & w_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & w_8 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$w = \begin{bmatrix} w_1 & \cdots & w_8 \end{bmatrix}^T \quad (3.24)$$

$$u_C = \begin{bmatrix} r_1 & d_1 & r_2 & d_2 & q_9 \end{bmatrix}^T \quad (3.25)$$

$$C_C(v) = \begin{bmatrix} w_1 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$F_C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$B_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{L_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L_7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_8} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$A_C(v) = L^{-1}F_C W \quad (3.29)$$

Sea un cambio de variables como el que se muestra en (3.30)

$$\bar{k} = (k_j - k) \quad (3.30)$$

entonces la Ecuación (3.22) puede reescribirse en la forma

$$\dot{\bar{k}} = A_C(w)\bar{k} + B_C u_C \quad (3.31a)$$

$$y_C = C_C(w)\bar{k} \quad (3.31b)$$

la cual tiene la misma estructura de la Ecuación (3.12). Nótese que  $A_C(w)\bar{k} = A_C(\bar{k})w$  y  $C_C(v)\bar{k} = C_C(\bar{k})w$ .

Las Ecuaciones (3.12) y (3.31) corresponden a modelos de tráfico de primer orden. Los términos de frontera se representan por  $B_L u_L$  y  $B_C u_C$ , respectivamente. Los vectores  $v$  y  $w$  corresponden a velocidades de onda para todas las celdas, según la notación que se tiene de las Figuras 3.2 y 3.1.

Es importante remarcar las diferencias entre las Ecuaciones (3.12) y (3.31). En (3.12) el flujo  $q_1$  actúa como entrada del sistema, junto con los flujos de las rampas de entrada y de salida, mientras que la salida del sistema es el flujo de la octava celda, representada como el producto  $v_8 k_8$ . En cambio, el modelo en la Ecuación (3.31) considera al flujo de  $q_9$  como entrada al sistema, y al flujo que entra por la celda 1, representado por  $w_1(k_{j_1} - k_1)$ , como la salida del sistema. Estas diferencias, como se muestra en [41], se encuentran relacionadas con las propiedades de controlabilidad y observabilidad de los modelos en (3.12) y (3.31), para flujo de tráfico libre y congestionado, respectivamente.

### 3.3.5. Estimación de densidad y velocidad

Para explicar el diseño del estimador de la densidad y la velocidad se trata a continuación el caso de flujo libre.

La Expresión (3.32) propone un estimador de densidad

$$\dot{\hat{k}} = A_L(\hat{v})\hat{k} + B_L u_L + G_L(y_L - \hat{y}_L) \quad (3.32a)$$

$$\hat{y}_L = C_L(\hat{v})\hat{k} \quad (3.32b)$$

siendo  $\hat{k}$  y  $\hat{v}$  respectivamente los estimados de  $k$  y  $v$ ,  $G_L$  una matriz de ganancias y el par  $[A_L(v) \ C_L(v)]$  es observable para todos los valores de  $v$  que corresponden a flujo libre.

Si  $\tilde{k} = k - \hat{k}$  es el error de estimación de densidad, su dinámica está descrita mediante

$$\dot{\tilde{k}} = \bar{A}_L(v)\tilde{k} - \bar{A}_L(\hat{v})\tilde{k} \quad (3.33)$$

donde

$$\bar{A}_L(v) = A_L(v) - G_L C_L(v), \quad (3.34)$$

y la matriz  $\bar{A}_L(v)$  es Hurwitz con una elección apropiada de  $G_L$ . Manipulando la Ecuación (3.33) se llega a

$$\dot{\tilde{k}} = \bar{A}_L(v)\tilde{k} + \bar{A}_L(\tilde{v})\tilde{k}, \quad (3.35)$$

con  $\tilde{v} = v - \hat{v}$ .

Para diseñar el estimador de velocidad, se considera que los flujos  $q_1, r_1, d_1, q_5, r_2, d_2$  y  $q_9$  se pueden medir y están disponibles. La salida para el caso de flujo libre se define por<sup>2</sup>

$$z_L = \left[ q_1 \quad r_1 \quad d_1 \quad q_5 \quad r_2 \quad d_2 + q_9 \quad d_2 \quad q_9 \right]^T \quad (3.36)$$

que puede expresarse compactamente como

$$z_L = H_L K v = S_L(k)v \quad (3.37)$$

siendo  $K = \text{diag}\{k\}$  y

$$H_L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

<sup>2</sup>Este número de flujos asegura el rango completo de la matriz  $H_L$  (y de  $H_C$ , en su caso), útil para las demostraciones que más adelante se detallan.

Por su parte, la salida estimada  $\hat{z}$  se encuentra dada por

$$\hat{z}_L = S_L(\hat{k})\hat{v} \quad (3.39)$$

por lo tanto el error de estimación es

$$\tilde{z}_L = z_L - \hat{z}_L = S_L(k)v - S_L(\hat{k})\hat{v} \quad (3.40)$$

Nótese que también se tiene la propiedad

$$S_L(k)v = S_L(v)k. \quad (3.41)$$

La Ecuación (3.40) se puede reescribir como

$$\tilde{z}_L = S_L(\hat{k})\tilde{v} + S_L(v)\tilde{k} \quad (3.42)$$

Si se usa una ley de adaptación tipo gradiente para la identificación de velocidad, entonces se tiene

$$\dot{\hat{v}} = \Gamma_L S_L^T(\hat{k})\tilde{z}_L \quad (3.43)$$

donde  $\Gamma_L$  es una matriz diagonal de ganancias positivas.

El estimador de velocidad aquí presentado usa la información disponible de flujos en el tramo de autopista bajo análisis (Figura 3.2). Sin embargo, debe hacerse notar que si hubiese menos mediciones disponibles, el vector  $Z_L$  y el regresor  $S_L(k)$  pueden ser modificados con tal de representar otra distribución de sensores o ser reasignados para una topología diferente.

La estructura para el estimador de densidad para el caso de tráfico congestionado es muy similar a aquél en la Ecuación (3.32). Las matrices y vectores con subíndices  $L$  se reemplazan por sus contrapartes con subíndices  $C$ , la densidad  $k$  por  $\bar{k}$  y la velocidad  $v$  por  $w$ . Para el estimador de velocidad en el caso de tráfico congestionado, la salida se define mediante

$$z_C = \left[ q_1 \quad r_1 \quad q_1 + r_1 \quad d_1 \quad q_5 \quad r_2 \quad d_2 \quad q_9 \right]^T \quad (3.44)$$

lo que puede expresarse como

$$z_C = H_C \bar{K} w = S_C(\bar{k})w \quad (3.45)$$

donde  $\bar{K} = \text{diag}\{\bar{k}\}$  y

$$H_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

La ley de adaptación para la identificación de velocidad es, similarmente,

$$\dot{\hat{w}} = \Gamma_C S_C^T(\hat{k})\tilde{z}_C \quad (3.47)$$

con  $\Gamma_C$  que es una matriz diagonal de ganancias positivas.

### 3.3.6. Análisis de estabilidad

En esta sección se investiga la estabilidad de  $\tilde{k} = 0$  y de  $\tilde{v} = 0$  para el caso de tráfico en flujo libre. Para dicho propósito, considérese la siguiente función candidata de Lyapunov

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2, \quad (3.48)$$

con

$$\mathcal{V}_1 = \frac{1}{2} \tilde{k}^T P \tilde{k} \quad (3.49a)$$

$$\mathcal{V}_2 = \frac{1}{2} \tilde{v}^T \Gamma_L^{-1} \tilde{v} \quad (3.49b)$$

donde  $P = P^T > 0$ . Tomando la derivada temporal de  $\mathcal{V}_1$

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}_1 &= \frac{1}{2} \left( \tilde{k}^T P \dot{\tilde{k}} + \dot{\tilde{k}}^T P \tilde{k} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \tilde{k}^T [P \bar{A}_L(v) + \bar{A}_L^T(v) P] \tilde{k} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \tilde{k}^T P \bar{A}_L(\hat{v}) \hat{k} + \frac{1}{2} \hat{k}^T \bar{A}_L^T(\hat{v}) P \tilde{k} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Úsese la Ecuación (3.21)

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}_1 &= \frac{1}{2} \tilde{k}^T [P \bar{A}_L(v) + \bar{A}_L^T(v) P] \tilde{k} + \\ &\quad + \tilde{k}^T P \bar{A}_L(\hat{k}) \tilde{v} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Tómese la derivada temporal de  $\mathcal{V}_2$  y úsese las Ecuaciones (3.43) y (3.40)

$$\dot{\mathcal{V}}_2 = -\tilde{v}^T S_L^T(\hat{k}) \left[ S_L(\hat{k}) \tilde{v} + S_L(v) \tilde{k} \right] \quad (3.52)$$

Sumando las Ecuaciones (3.51) y (3.52)

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}} &= \dot{\mathcal{V}}_1 + \dot{\mathcal{V}}_2 = \\ &= \frac{1}{2} \tilde{k}^T [P \bar{A}_L(v) + \bar{A}_L^T(v) P] \tilde{k} + \\ &\quad + \tilde{k}^T P \bar{A}_L(\hat{k}) \tilde{v} - \\ &\quad - \tilde{v}^T S_L^T(\hat{k}) \left[ S_L(\hat{k}) \tilde{v} + S_L(v) \tilde{k} \right] = \\ &= -\tilde{k}^T Q \tilde{k} - \tilde{v}^T S_L^T(\hat{k}) S_L(\hat{k}) \tilde{v} + \\ &\quad + \tilde{k}^T P \bar{A}_L(\hat{k}) \tilde{v} - \tilde{v}^T S_L^T(\hat{k}) S_L(v) \tilde{k} \end{aligned} \quad (3.53)$$

donde la matriz  $P$  satisface la Ecuación de Lyapunov

$$P \bar{A}_L(v) + \bar{A}_L^T(v) P = -2Q \quad (3.54)$$

Nótese que los dos primeros términos en la Ecuación (3.53) son negativo definido y negativo semidefinido, respectivamente. Los otros dos términos en la Ecuación (3.53) pueden agruparse como

$$\begin{aligned} &\tilde{k}^T P \bar{A}_L(\hat{k}) \tilde{v} - \tilde{v}^T S_L^T(\hat{k}) S_L(v) \tilde{k} = \\ &\tilde{k}^T \left[ P \bar{A}_L(\hat{k}) - S_L^T(v) S_L(\hat{k}) \right] \tilde{v} \end{aligned} \quad (3.55)$$



Si el grado de libertad disponible para la selección de  $Q$  [16] se usa para seleccionarla de tal manera que  $P$  en la Ecuación (3.49a) satisfaga la siguiente desigualdad

$$P\bar{A}_L(\hat{k}) + \bar{A}_L^T(\hat{k})P \leq -S_L^T(v)S_L(\hat{k}) - S_L^T(\hat{k})S_L(v), \quad (3.56)$$

entonces, usando la Ecuación (3.56), es posible reescribir (3.53) como

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\tilde{k}^T Q \tilde{k} - \tilde{v}^T S_L^T(\hat{k})S_L(\hat{k})\tilde{v} \\ & - \tilde{k}^T \left[ S_L^T(v)S(\hat{k}) + S_L^T(\hat{k})S_L(v) \right] \tilde{v} \end{aligned} \quad (3.57)$$

Si la elección de la matriz  $Q$  satisface  $Q \geq S_L^T(v)S_L(v)$ , entonces la Ecuación (3.57) satisface

$$\dot{V} \leq - \left[ S_L(v)\tilde{k} + S_L(\hat{k})\tilde{v} \right]^T \left[ S_L(v)\tilde{k} + S_L(\hat{k})\tilde{v} \right] \leq 0 \quad (3.58)$$

lo que implica la estabilidad de  $\tilde{k} = 0$  y de  $\tilde{v} = 0$ . Si se usa el Lema de Barbalat [28], es posible probar que  $S_L(v)\tilde{k} \rightarrow 0$  y  $S_L(\hat{k})\tilde{v} \rightarrow 0$  según  $t \rightarrow \infty$ .

Finalmente, para verificar que la selección de  $P$  en la Ecuación (3.56) es apropiada, su valor se substituye en el miembro izquierdo de la Ecuación de Lyapunov (3.54) para obtener

$$P\bar{A}_L(v) + \bar{A}_L^T(v)P \leq -2S_L^T(v)S_L(v) \leq 0 \quad (3.59)$$

lo que muestra la viabilidad del problema de la desigualdad lineal matricial.

Dada la estructura similar de las Ecuaciones (3.12) y (3.31), el análisis de estabilidad para los estimadores en el caso de tráfico congestionado sigue los mismos argumentos, con la apropiada sustitución de variables, y no es presentado aquí.

### 3.3.7. Combinación de estimadores de flujos libre y congestionado

Las secciones previas describen el diseño de dos estimadores de densidad y velocidad, uno que supone todo el tramo de estudio en flujo de tráfico libre y el otro, congestionado. Estos estimadores se diseñaron usando sólo mediciones de flujo en puntos discretos de la autopista. La condición real de una celda, libre o congestionada, es en general desconocida. Cuando se usa información de flujo, de la Figura 3.1 es claro que para cada medición de flujo existen dos densidades, una que corresponde a flujo libre y la otra a tráfico congestionado. En un tiempo dado, sin embargo, sólo una única estimación de densidad y velocidad para cada celda debe ser obtenida. Para conseguirlo, se propone a continuación un procedimiento basado en lógica borrosa para mezclar los resultados producidos por ambos estimadores. Este procedimiento permite no solamente determinar la probable condición de densidad de una celda, sino que también suaviza la transición entre las dos condiciones.

El procedimiento usa la información de ocupancia o densidad puntual disponible. Para el caso del tramo representado en la Figura 3.2, las densidades puntuales en inicio y fin del tramo, así como entre las celdas 4 y 5 son calculadas a partir de la ocupancia [52]. Las celdas se clasifican en dos grupos. El primer grupo está formado por todas las celdas que están próximas a una medición de densidad disponible, es decir, las celdas 1, 4, 5 y 8 en la Figura 3.2. Este grupo se denota por MA. El resto de las celdas, 2, 3, 6 y 7, en la Figura 3.2, forman el otro grupo, denotado por MNA.

La idea detrás del sistema de inferencias borrosas es la siguiente. Si una celda corresponde al grupo MA, entonces su densidad será probablemente más similar a la medición de densidad contigua. Cuando una celda no tiene una medición de densidad contigua, es decir, pertenece al grupo MNA, entonces su densidad tendrá influencia de las mediciones de densidad más cercanas. Por ejemplo, si las dos medidas de densidad corresponden a densidades de flujo libre, entonces seguramente dicha celda deberá tener también una densidad de flujo libre.

Para las celdas en el grupo MA se definen dos conjuntos borrosos para densidad. Uno para valores de densidad en flujo libre,  $F$ , y el otro para densidades en flujo congestionado,  $C$ . La forma de la función de pertenencia de tales conjuntos se representa en la parte de abajo de la Figura 3.7, donde el punto medio de las regiones de transición corresponde a  $k_o$  en el diagrama fundamental de la Figura 3.1. Las funciones de pertenencia correspondientes se definen mediante

$$\mu_F(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k < 0.0760 \\ \frac{0.0818-k}{0.0818-0.0760} & \text{si } 0.0760 \leq k \leq 0.0818 \\ 0 & \text{si } k > 0.0818 \end{cases} \quad (3.60a)$$

$$\mu_C(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 0.0760 \\ \frac{k-0.0760}{0.0818-0.0760} & \text{si } 0.0760 \leq k \leq 0.0818 \\ 1 & \text{si } k > 0.0818 \end{cases} \quad (3.60b)$$

Para  $0 \leq k \leq k_j = 0.4225$

Para celdas en el segundo grupo, MNA, la densidad se clasifica en cuatro conjuntos borrosos: totalmente libre,  $TF$ , marginalmente libre,  $MF$ , marginalmente congestionada,  $MC$  y totalmente congestionada,  $TC$ . La forma de las funciones de pertenencia se ilustra en la parte media de la Figura 3.7. Las funciones de pertenencia correspondientes se definen por (3.62)<sup>3</sup>

Para la salida del sistema de inferencias borrosas, se definen dos conjuntos: Flujo Libre Propio,  $YPF$ , y Flujo Congestionado Propio,  $YPC$ . Por conveniencia, dos conjuntos complementarios,  $YNoPF$  y  $YNoPC$ , son definidos, tal que sus pertenencias siempre satisfacen

$$\mu_{YNoPF}(\bar{y}_F) = 1 - \mu_{YPF}(\bar{y}_F) \quad (3.61a)$$

$$\mu_{YNoPC}(\bar{y}_C) = 1 - \mu_{YPC}(\bar{y}_C) \quad (3.61b)$$

donde  $\bar{y}_F$  y  $\bar{y}_C$  son los argumentos de las respectivas funciones de pertenencia. La parte superior de la Figura 3.7 muestra la forma de las funciones de pertenencia para estos conjuntos borrosos del consecuente o salida.

Se aplican dos reglas para aquellas celdas en el grupo MA

- SI  $k_m$  ES  $F$  ENTONCES  $\bar{y}_F$  ES  $YPF$  Y  $\bar{y}_C$  ES  $YNoPC$
- SI  $k_m$  ES  $C$  ENTONCES  $\bar{y}_F$  ES  $YNoPF$  Y  $\bar{y}_C$  ES  $YPC$

---

<sup>3</sup>Todas las densidades se expresan en  $[veh/m]$ . La densidad de atascamiento para una autopista de cuatro carriles se ha tomado como  $k_j = 0.4225$ .

donde  $k_m$  corresponde a la medición de densidad disponible para las celdas en el grupo MA. Nótese que en este caso,  $\bar{y}_F$  y  $\bar{y}_C$  son complementarias a uno.

$$\mu_{TF}(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k < 0.0630 \\ \frac{0.0667-k}{0.0667-0.0630} & \text{si } 0.0630 \leq k \leq 0.0667 \\ 0 & \text{si } k > 0.0667 \end{cases} \quad (3.62a)$$

$$\mu_{MF}(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 0.063 \\ \frac{k-0.0630}{0.0667-0.0630} & \text{si } 0.0630 \leq k \leq 0.0667 \\ 1 & \text{si } 0.0667 \leq k < 0.0760 \\ \frac{0.0818-k}{0.0818-0.0760} & \text{si } 0.0760 \leq k \leq 0.0818 \\ 0 & \text{si } k > 0.0818 \end{cases} \quad (3.62b)$$

$$\mu_{MC}(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 0.0760 \\ \frac{k-0.0760}{0.0818-0.0760} & \text{si } 0.0760 \leq k \leq 0.0818 \\ 1 & \text{si } 0.0818 \leq k < 0.0998 \\ \frac{0.1002-k}{0.1002-0.0998} & \text{si } 0.0998 \leq k \leq 0.1002 \\ 0 & \text{si } k > 0.1002 \end{cases} \quad (3.62c)$$

$$\mu_{TC}(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 0.0998 \\ \frac{k-0.0998}{0.1002-0.0998} & \text{si } 0.0998 \leq k \leq 0.1002 \\ 1 & \text{si } k > 0.1002 \end{cases} \quad (3.62d)$$

Para  $0 \leq k \leq k_j = 0.4225$

Para las celdas en el grupo MNA, se usan las dos mediciones de densidad más cercanas a cada celda en el grupo. Se denotan mediante  $k_{m1}$  y  $k_{m2}$ . Como hay cuatro conjuntos borrosos, existen dieciseis posibles reglas en este caso. Un ejemplo de una de estas reglas es

- SI  $k_{m1}$  ES *TF* Y  $k_{m2}$  ES *MF* ENTONCES  $\bar{y}_F$  ES *YPF* Y  $\bar{y}_C$  ES *NoYPC*

Las otras reglas siguen líneas similares y no se incluyen aquí por economía de espacio.

El cálculo final de la densidad estimada para la celda  $i$ ,  $\hat{k}_i$  está dado por

$$\hat{k}_i = \bar{y}_{F_i} \hat{k}_{F_i} + \bar{y}_{C_i} \hat{k}_{C_i} \quad (3.63)$$

donde  $\hat{k}_{F_i}$  y  $\hat{k}_{C_i}$  son las salidas de los estimadores de densidad para flujo libre y flujo congestionado para la celda  $i$ , respectivamente. Es evidente que la Ecuación (3.63) representa una combinación convexa de las dos densidades estimadas y que los factores convexos  $\bar{y}_{F_i}$  y  $\bar{y}_{C_i}$  pueden ser diferentes en cada celda.

Como se ha mencionado en un principio, ya se han diseñado otros estimadores de densidad. Por ejemplo, en [40, 64] se propone un procedimiento basado en un filtro de Kalman de mezcla. La principal diferencia con el esquema que se propone aquí consiste en que en [40, 64] todas las celdas en la longitud total del tramo son conmutadas entre flujo libre o congestionado simultáneamente, mientras que en nuestra propuesta se analiza la condición de cada celda en forma separada.

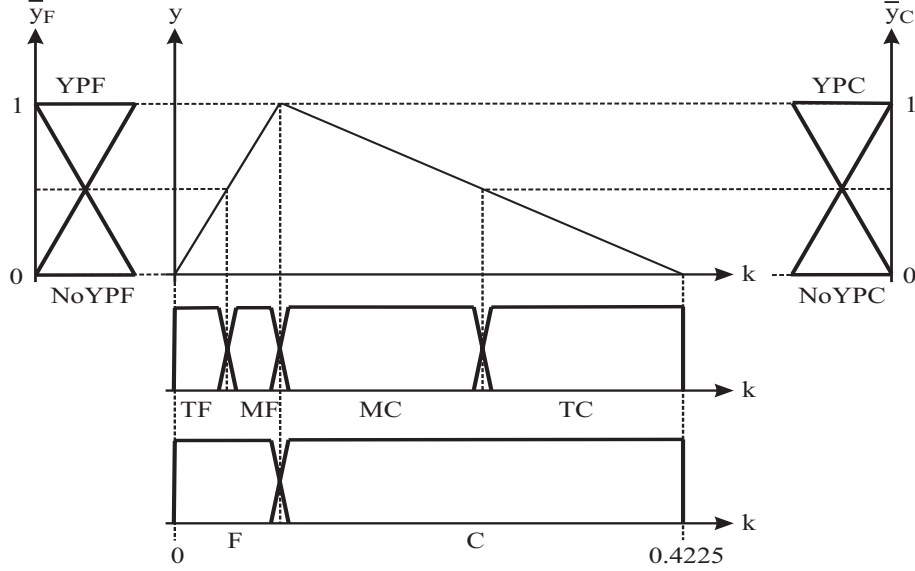


Figura 3.7: Clasificador borroso de una sola entrada

Aun cuando no se garantiza la convergencia al valor de densidad real, la estabilidad de la estimación combinada de densidad está garantizada debido a que, en cualquier momento, la suma de las respectivas funciones de Lyapunov, ponderadas por los factores convexos  $\bar{y}_{F_i}$  y  $\bar{y}_{C_i}$ , logran una transición más suave entre valores libres y congestionados.

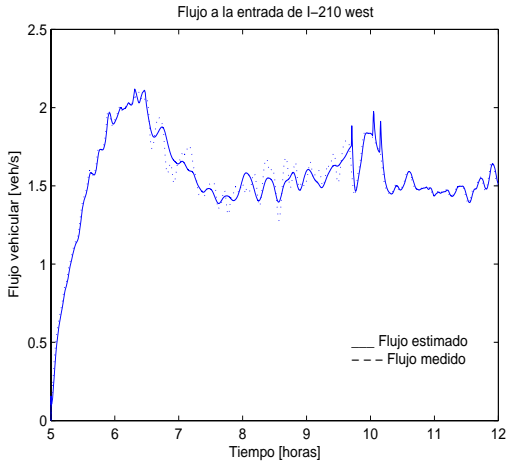
### 3.3.8. Resultados

Con tal de verificar su desempeño, estos estimadores se han aplicado a un conjunto de datos de tráfico obtenidos para el tramo de autopista I-210W, representado en la Figura 3.2. Para dicha carretera existe información tomada para muchos días de operación para los flujos  $y_1$ ,  $r_1$ ,  $d_1$ ,  $y_5$ ,  $r_2$ ,  $d_2$  y  $y_9$ <sup>4</sup>. También se cuenta con información de densidad local, inferida de mediciones de ocupancia, para puntos que se encuentran al inicio del tramo esquematizado, entre las celdas 4 y 5 y al final de dicho tramo. La autopista tiene cuatro carriles y la longitud total del tramo es poco más de 3 km, siendo la longitud de cada sección o celda de  $\begin{bmatrix} 373 & 373 & 603 & 225 & 225 & 444 & 444 & 396 \end{bmatrix}$  [m]. La densidad de atascamiento  $k_{j_i}$  se ha definido en 0.4225 [veh/m] para cada celda.

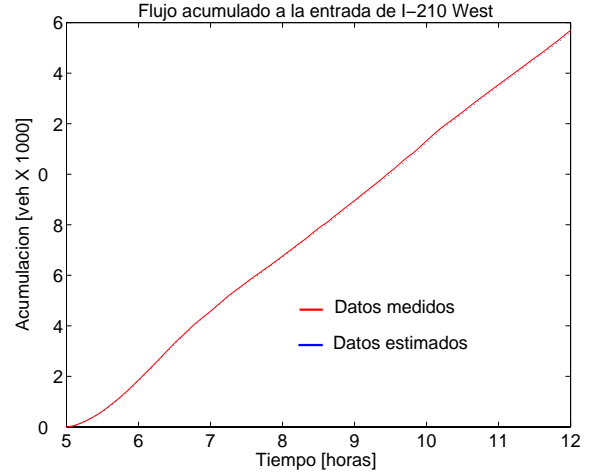
Los valores de las ganancias de realimentación de los observadores,  $G_L$  y  $G_C$  fueron ajustadas para hacer a los valores propios de lazo cerrado de  $\bar{A}_L$  y de  $\bar{A}_C$ , para valores nominales de  $v$  y de  $w$ , alrededor de 10 – 20% más rápidos que los de  $A_L$  y  $A_C$ . Las matrices  $\Gamma_L$  y  $\Gamma_C$ , que determinan las ganancias para los estimadores de gradiente de las velocidades, se definieron como matrices diagonales con todas las entradas igual a  $(1/k_{j_i}) \times 10^{-3}$  y  $(1/k_{j_i}) \times 10^{-4}$ , para  $\Gamma_L$  y  $\Gamma_C$ , respectivamente. Estos últimos valores dependen del periodo de tiempo que se usa para obtener los datos de tráfico. Para los resultados de simulación que aquí se muestran dicho periodo es de 5 s.

Las Figuras 3.8(a) - 3.8(c) muestran los flujos medidos y estimados en el punto de entrada, en el punto

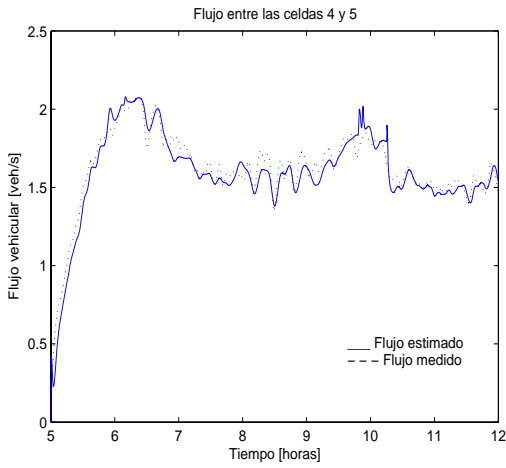
<sup>4</sup>Esta información es producida por el California Freeway Performance Measurement System [52].



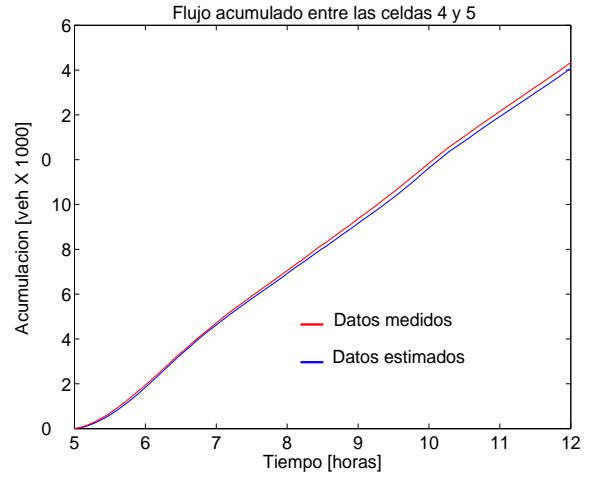
(a) Flujo estimado y real al inicio del tramo ( $y_1$ ).



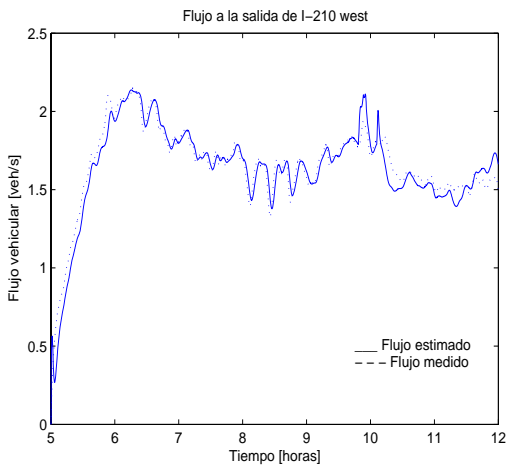
(d) Flujos acumulados real y estimado al inicio del tramo.



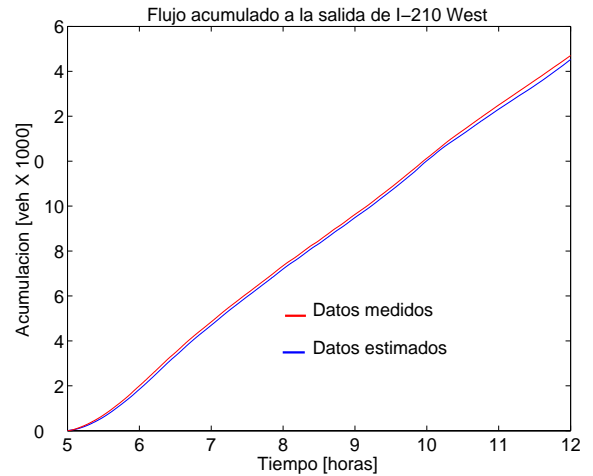
(b) Flujo estimado y real en el punto medio del tramo ( $y_5$ ).



(e) Flujos acumulados real y estimado entre las celdas 4 y 5.



(c) Flujo estimado y real al final del tramo ( $y_9$ ).



(f) Flujos acumulados real y estimado al final del tramo.

Figura 3.8: Flujos acumulados reales y estimados.

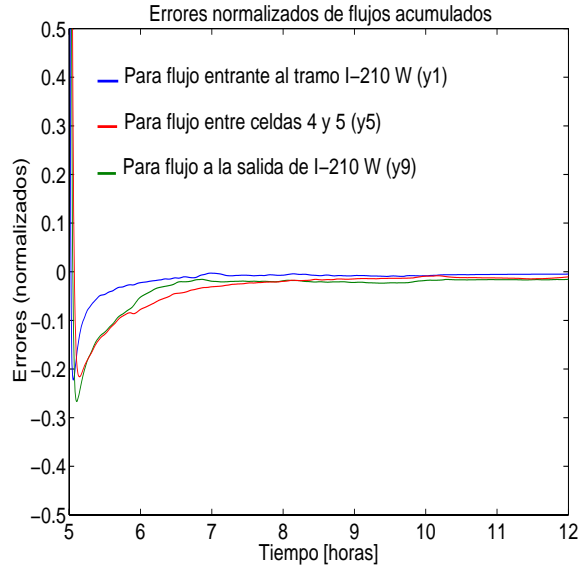


Figura 3.9: Errores de estimación de flujos acumulados y normalizados para los puntos de inicio, medio y final del tramo.

medio y en el punto final del tramo en estudio. Puede verse que la concordancia entre los flujos reales y predichos es bastante buena.

Las Figuras 3.8(d) - 3.8(f) muestran los flujos acumulados en el punto de inicio, en el punto medio y al final del tramo, mientras la Figura 3.9 muestra los errores de estimación de flujo acumulado normalizado en los mismos puntos de la autopista. Dada la naturaleza integral de estas gráficas de variable acumulada, los resultados son aún mejores que los mostrados en las Figuras 3.8(a) - 3.8(c).

Las Figuras 3.10 - 3.12 muestran por su parte las densidades estimadas en la celda 1, la densidad promedio de las celdas 4 y 5, y la de la celda 8, comparadas con la densidad local en el punto de inicio, punto medio y punto final del tramo. Nótese que para la estimación de densidad de las celdas 4 y 5 la medición de flujo disponible a la mitad del tramo ( $y_5$  en la Figura 3.2) no es usada en las Ecuaciones (3.12) y (3.31).

Es evidente que la concordancia en las densidades no es tan buena como en el caso de los estimados del flujo. Esto es de esperarse considerando que el esquema de estimación es afectado por las mediciones de flujo y no por mediciones de densidad. Para explicar estas diferencias también es importante recordar que las densidades en cada celda son cantidades agregadas y que tienen un filtrado del tipo paso-bajas, un efecto promediante, en comparación con las mediciones de densidad local. Este efecto de filtrado, que puede apreciarse en las Figuras 3.10 - 3.12, puede ser usado para los propósitos del control en rampas de acceso.

Finalmente, las Figuras 3.13(a) - 3.13(b) muestran las velocidades de onda estimadas según evolucionan en el tiempo para ambos estimadores de velocidad. Estas velocidades de onda se usa para producir los estimados de flujo mostrados en las Figuras 3.8(a) - 3.8(c). Infortunadamente, no hay mediciones de velocidad real para usar con propósitos de comparación. Sin embargo, los valores obtenidos se encuentran en buena concordancia con las observaciones en campo de las velocidades de onda encontradas en el tramo real de autopista.

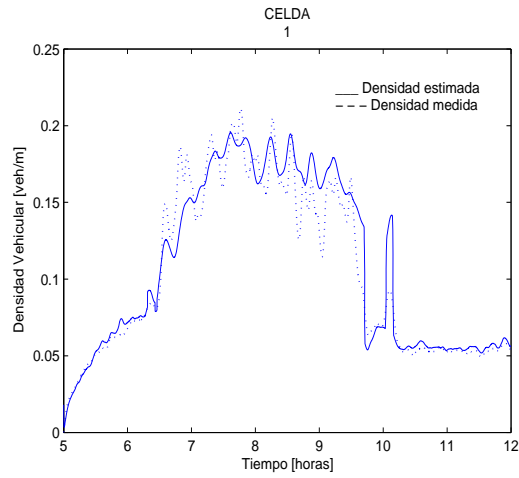


Figura 3.10: Densidad estimada en la celda 1 y densidad local en el punto de inicio del tramo.

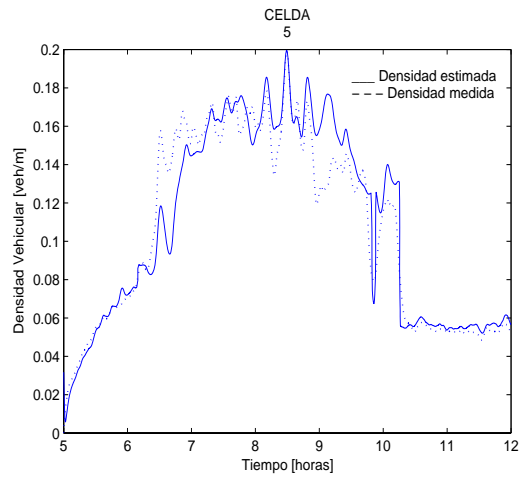


Figura 3.11: Densidad estimada promedio de las celdas 4 y 5 y densidad local entre las celdas 4 y 5.

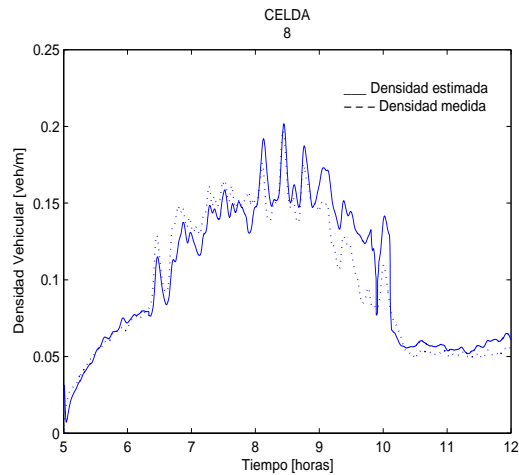
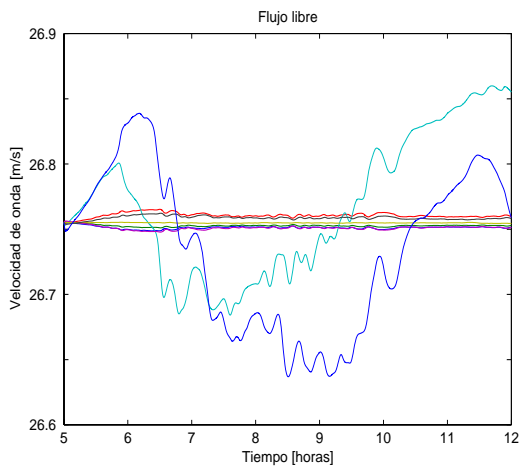
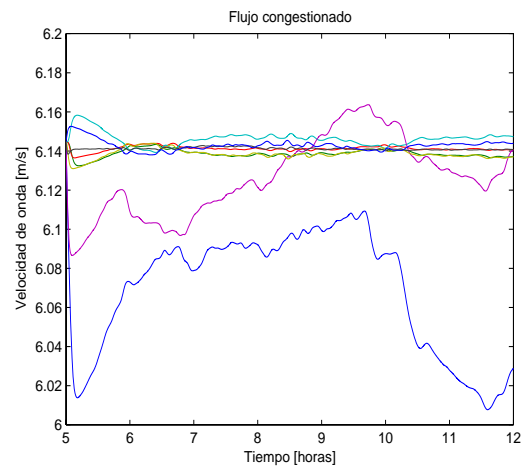


Figura 3.12: Densidad estimada en la celda 8 y densidad local al final del tramo.



(a) Velocidad estimada de onda de tráfico en flujo libre.



(b) Velocidad estimada de onda de tráfico congestionado.

Figura 3.13: Velocidades estimadas de flujo libre y congestionado



# Capítulo 4

## Control de tráfico

### 4.1. Planteamiento

Hace aproximadamente medio siglo se concibió la idea de construir autopistas en áreas urbanas e interurbanas cuya característica fuera dotar de una movilidad ilimitada a sus usuarios [24].

Ya se ha mencionado que, sin embargo, el crecimiento urbano, el número en aumento de vehículos que se incorporan a cada momento al conjunto de los ya existentes, el incremento en la ocurrencia de incidentes automovilísticos, el decremento en espacio disponible de las vías de rodamiento debido a trabajos de mantenimiento, aun en forma temporal, junto con otros eventos relacionados, han logrado incrementar la competencia por el espacio en estas vías y como consecuencia la reducción de su eficiencia (véanse el Capítulo 1 y el Apéndice).

Una formulación simple establecería que, durante un día completo por ejemplo, las demandas agregadas de flujos que entran a una red deben ser iguales a las demandas de flujo de salida de esa misma red, puesto que ningún auto se crea o desaparece dentro de tal sistema (Figura 4.1). Si el movimiento de autos dentro del mismo ocurriese en un flujo libre de restricciones, el tiempo de recorrido total (véase este concepto en la Sección 2.2) ocupado por todos los conductores en ir desde un origen hasta un destino a través de esta red tendría un valor mínimo.

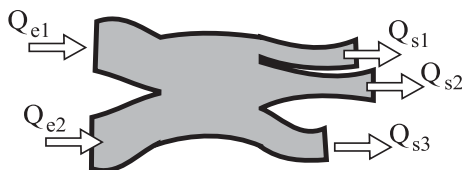


Figura 4.1: Representación de los flujos de una red de caminos.

Sin embargo, este es más bien un valor límite y deseado, ya que el tiempo de recorrido total se ve afectado por retrasos y paradas en el trayecto, por lo que el caso general es que dicho valor de tiempo sea mayor o, equivalentemente, los flujos y velocidades se ven disminuidos de los valores que darían una máxima eficiencia al sistema.

Es entonces claro que si existiese alguna estrategia de control dirigida a lograr una llegada más rápida a los diferentes destinos se lograría un decremento en el tiempo de recorrido total y con ello una reducción en el congestionamiento y sus consecuencias [27, 71].

Se ha probado que el control en las rampas de acceso [49, 51] es una solución que puede lograr reducciones significativas en la congestión formada en una autopista, a través de restringir momentáneamente el paso a los conductores de vehículos que desean incorporarse al flujo principal, lo cual se les compensará al encontrar una vía con flujos más convenientes una vez que ingresen a la misma [18].

## 4.2. Trabajos previos

Las propuestas que se han generado para llevar a cabo control del tráfico en rampas son numerosas, muchas de ellas basadas en herramientas de control: Control Proporcional-Integral [48], Control Lineal Cuadrático y Control Lineal Cuadrático Integral [47], Control Proporcional Integral Más Lineal Cuadrático [67], Control Predictivo de Modelo [4].

Algunas de estas propuestas han sido ya implantadas en varios sitios en el mundo [4, 47], algunas de las cuales tienen un tiempo considerable de funcionamiento [50, 66]. Es posible ver que el control de acceso de flujo no es un tema nuevo, pero tampoco es uno que se considere resuelto.

Esta tesis también aporta algunas propuestas para enfrentar el problema del control de flujo a través de una rampa de acceso, pero además se incluye en todos los casos un análisis de estabilidad, algo que muchos trabajos que se encuentran en la literatura sólo suponen. Por otro lado, también se incluyen esquemas que combinan herramientas de estimación, ya mostradas (Capítulo 3), con algunas de las propuestas de control aquí incluidas. La idea es mostrar la forma en que dicha combinación puede funcionar en un sistema (autopista) que opere en tiempo real.

## 4.3. Esquemas de control de tráfico en rampas de acceso

### 4.3.1. ALINEA

#### Descripción

ALINEA (Asservissement LINéaire d'Entrée Autoroutière) [48] es como se conoce a un controlador local de tráfico de amplia difusión en Europa. Se trata de un control tipo PI utilizado para llevar a cabo la regulación del tráfico de una rampa de acceso.

Papageorgiou et al. [48, 49] describen a este controlador en forma discreta

$$r_1(t) = r_1(t - \Delta t) + K_P [o_n - o(t)] + K_I [o(t) - o(t - \Delta t)] \quad (4.1)$$

siendo  $o$  la ocupancia (véase la Sección 2.2) medida localmente en la celda donde el flujo que viene por la rampa de acceso se mezcla con el principal (Figura 4.2)

El controlador (4.1) tiene un término proporcional que compara el valor actual de ocupancia  $o(t)$  con un valor nominal o deseado de la misma  $o_n$ , valor que se alcanza cuando dicha diferencia se anula. El factor  $K_P$

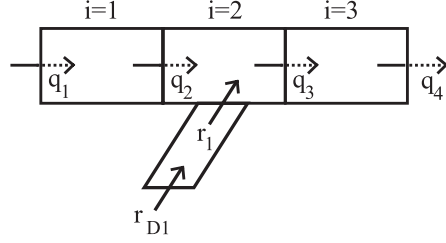


Figura 4.2: Control local de acceso de tráfico. El flujo  $r_{D1}$  es la demanda para la rampa de acceso, mientras que el flujo  $r_1$  se obtiene a través de un esquema de control (como ALINEA).

es una constante que influye en la rapidez con la que dicha diferencia varía.

ALINEA también cuenta con un término integral que lleva a cabo un ajuste fino del control, al comparar el valor actual de ocupancia con el ocurrido en un tiempo  $\Delta t$  anterior, lo cual logra disminuir oscilaciones en su señal.

### Análisis

En esta tesis se ha preferido usar a la densidad en lugar de la ocupancia como variable de estado susceptible de control, pues se trata de una variable de la cual se tienen datos, ya presentados en otras partes de esta tesis, y además se logra con ello uniformidad entre las diferentes descripciones y tratamientos dados a lo largo de este trabajo, evitándose la necesidad de recurrir a un mayor número de variables y a equivalencias entre aquellas que más bien hacen redundante la información.

Por lo tanto, la expresión (4.1) puede escribirse en la forma alterna (4.2)

$$r_1(t) = r_1(t - \Delta t) + K_P [k_n - k(t)] + K_I [k(t) - k(t - \Delta t)] \quad (4.2)$$

con lo cual  $K_P$  puede tener unidades convenientes y hacerse igual a  $v$ , con lo que se logra una expresión que directamente tiene unidades de flujo, mientras que  $K_I$  puede ajustarse a través de alguna técnica apropiada<sup>1</sup>.

El objetivo de control de ALINEA es llevar a la densidad  $k(t)$  a un valor nominal o deseado  $k_n$ . Es posible llevar a cabo un análisis de estabilidad que no sólo compruebe esta propiedad sino que además muestre otras características de este controlador. Convertirlo a su forma continua facilita dicho análisis. Aplíquese este análisis a un esquema de tres celdas como se muestra en la Figura 4.2.

Como se menciona en la Sección 3.2, se supondrá primero que todas las celdas están en una condición de flujo libre y por lo tanto la densidad  $k_2$  en la celda 2 corresponde a flujo libre ( $k_2 < k_o$  en la Figura 3.1). En este caso, si se usan (2.24) y (2.25) para esta celda, se obtiene

$$L_2 \dot{k}_2 = q_2 - q_3 + r_1 = q_2 - v_2 k_2 + r_1 \quad (4.3)$$

Asúmase ahora que existen condiciones nominales de tráfico tales que (4.3) está en equilibrio; asigne a estas condiciones nominales variables con subíndice  $n$ . Si la diferencia entre las densidades real y nominal se define

<sup>1</sup>Para las simulaciones realizadas, se ha llevado a cabo una búsqueda para el valor de  $K_I$  mediante el lugar geométrico de las raíces correspondiente al sistema conformado por la planta y el controlador.

como  $\tilde{k}_1 = k_2 - k_{2n}$ , la dinámica de este error de densidad es<sup>2</sup>

$$L_2 \dot{\tilde{k}}_2 = \tilde{q}_2 - v_2 \tilde{k}_2 + \tilde{r}_1 . \quad (4.4)$$

Si se aplica transformada de Laplace a (4.4) y a ALINEA, que en el dominio de la frecuencia es

$$\tilde{r}_1 = -f_p \tilde{k}_2 - f_i \frac{\tilde{k}_2}{s} \quad (4.5)$$

se obtiene

$$s \tilde{k}_2 = \frac{\tilde{q}_2}{L_2} - \frac{1}{L_2} \left( v_2 + f_p + \frac{f_i}{s} \right) \tilde{k}_2 \quad (4.6)$$

Reordenando se llega a<sup>3</sup>

$$\tilde{k}_2 = \frac{1}{L_2} \frac{\tilde{q}_2 s}{s^2 + \frac{v_2 + f_p}{L_2} s + \frac{f_i}{L_2}} \quad (4.7)$$

Sea  $\tilde{q}_2 = c/s$  una perturbación escalón en el flujo  $q_2$ . Al sustituir en (4.7) se tiene

$$\begin{aligned} \tilde{k}_2 &= \frac{1}{L_2} \frac{\frac{c}{s} s}{s^2 + \frac{v_2 + f_p}{L_2} s + \frac{f_i}{L_2}} = \\ &= \frac{1}{L_2} \frac{c}{s^2 + \frac{v_2 + f_p}{L_2} s + \frac{f_i}{L_2}} \end{aligned} \quad (4.8)$$

entonces

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{k}_2(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \tilde{k}_2(s) = \\ &= \frac{s}{L_2} \frac{c}{s^2 + \frac{v_2 + f_p}{L_2} s + \frac{f_i}{L_2}} = 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

esto es,  $k_2 \rightarrow k_{2n}$  asintóticamente. Puede notarse que si  $\tilde{q}_2$  tiene una complejidad mayor a un valor constante para  $t \rightarrow \infty$ , la expresión (4.9) no puede satisfacerse.

Tómese ahora el caso complementario, cuando la densidad  $k_2$  corresponde a tráfico congestionado. Si se usan de nuevo (2.24) y (2.25)

$$L_2 \dot{\tilde{k}}_2 = q_2 - q_3 + r_1 = w_2(k_j - k_2) - q_3 + r_1 . \quad (4.10)$$

Si se sigue un procedimiento similar al caso anterior y se suponen condiciones nominales de equilibrio en (4.10), la dinámica del error de densidad es

$$L_2 \dot{\tilde{k}}_2 = -\tilde{q}_3 - w_2 \tilde{k}_2 + \tilde{r}_1 . \quad (4.11)$$

Al tomar transformada de Laplace en (4.11) y sustituir (4.5) se obtiene

$$s \tilde{k}_2 = -\frac{\tilde{q}_3}{L_2} - \frac{1}{L_2} \left( w_2 + f_p + \frac{f_i}{s} \right) \tilde{k}_2 , \quad (4.12)$$

que se puede reorganizar como

$$\tilde{k}_2 = -\frac{1}{L_2} \frac{\tilde{q}_3 s}{s^2 + \frac{w_2 + f_p}{L_2} s + \frac{f_i}{L_2}} . \quad (4.13)$$

<sup>2</sup>Se definieron las otras señales de error en (4.4) de manera similar.

<sup>3</sup>Para  $\tilde{q}_2 = 0$  es posible ver que existe estabilidad para  $\tilde{k}_2$  en el sentido de Lyapunov.

Cuando  $\tilde{q}_3 = c/s$ , es una perturbación escalón, el teorema del valor final proporciona

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{k}_2 = 0. \quad (4.14)$$

Nótese que la naturaleza conmutativa del CTM requiere utilizar condiciones de frontera distintas en (4.3) y (4.10), lo que representa el hecho de que una rampa de acceso debe controlar el flujo  $q_2$  en una situación de flujo libre y el flujo  $q_3$  en una de congestión.

## Simulaciones

Para ilustrar el desempeño de ALINEA se muestra a continuación una serie de resultados obtenidos mediante la simulación de un tramo dividido en cinco celdas (Figura 4.3), siendo las tres primeras similares en características a las que se han descrito para un sistema como el de la Figura 4.2. La celda 4 de dicho tramo tiene también una rampa de acceso, la cual se usa para afectar el flujo en tal forma que se logren condiciones de flujo libre o de flujo congestionado según se requiera en la simulación. La última celda permite salir a todo el flujo que proviene de la anterior, por lo que sólo cumple una función de vigilancia en los flujos de salida de dicho tramo.

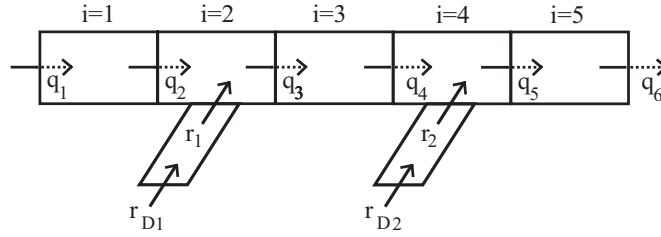


Figura 4.3: Tramo dividido en 5 celdas usado para la simulación de comportamiento de tráfico y su control.

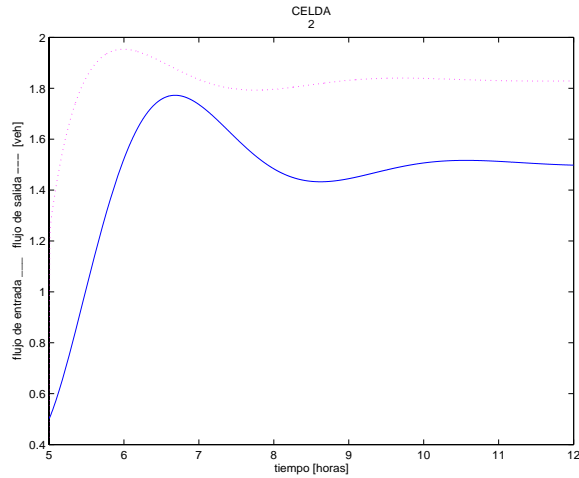
Supónganse valores nominales como  $k_{2n} = 0.065 \frac{veh}{m}$ ,  $q_{1n} = 2 \frac{veh}{s}$  y  $r_{D1n} = r_{1n} = 0.1694 \frac{veh}{s}$ . Estos valores se obtienen en la vida real de un estudio de asignación de flujos y en nuestro caso se supondrá que dicha asignación ha sido considerada como conveniente. Puede notarse que dichos valores consideran también al tráfico como un flujo que se encuentra en estado estacionario.

Sin embargo, como se ha visto ya (Capítulo 2), los flujos son funciones del tiempo. Para tomar en cuenta este hecho, las simulaciones que se presentan en este capítulo toman en cuenta funciones del tipo exponencial-senoidal

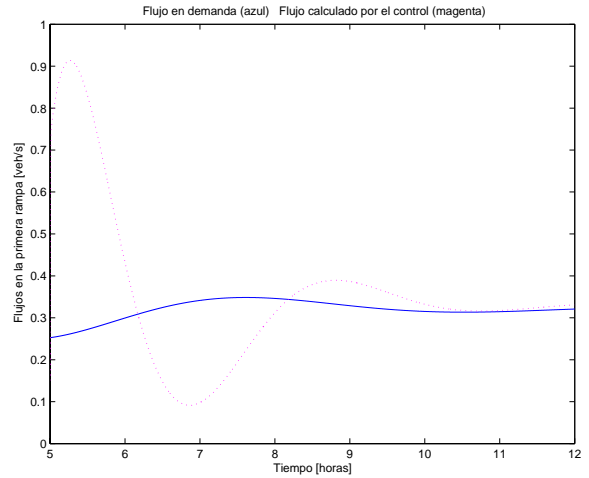
$$y = -Ae^{-Bt} \cos(Ct) + D \quad (4.15)$$

que emulan el comportamiento de los flujos vehiculares<sup>4</sup>. Se han elegido este tipo de funciones debido a que pueden modificarse de tal forma que se parecen a lo que puede encontrarse en un conjunto de datos de mediciones de flujos reales, pero también permiten variar los niveles de congestión para llevar a cabo experimentos.

<sup>4</sup>En este caso, específicamente se han usado:  $q_e(t) = -\exp^{-0.0002t} \cos(0.00045t) + 1.5$ ,  $r_{D1} = -0.07 \exp^{-0.0001t} \cos(0.0003t) + 0.3225$  y  $q_{D2} = -0.05 \exp^{-0.00005t} \cos(0.0002t + 1000) + 0.1$ .



(a) ALINEA controlando en valores de tráfico libre. Flujos a la entrada (azul, continua) y a la salida (magenta, punteada) de la celda 2.



(b) ALINEA controlando en valores de tráfico libre. El flujo en demanda (azul, continua), se modifica para llevar a cabo el control en densidad de la celda a la cual debe entrar, formándose el perfil de flujo admitido (magenta, punteada)

Figura 4.4: ALINEA. Regulación en tráfico libre. Flujos.

La Figura 4.4(a) muestra los flujos que en un régimen de tráfico libre entran y salen de la celda 2 cuando se implanta ALINEA para controlar el tráfico  $r_{D1}$  que demanda entrar por la rampa de acceso. La Figura 4.4(b) muestra por su parte lo que ocurre con ese flujo: en línea azul continua se observa el flujo  $r_{D1}$ , mientras que en línea magenta punteada se ve que dicho tráfico debe modificar su comportamiento para llevar a cabo control en la celda 2, cuyos valores de densidad se muestran en la Figura 4.5

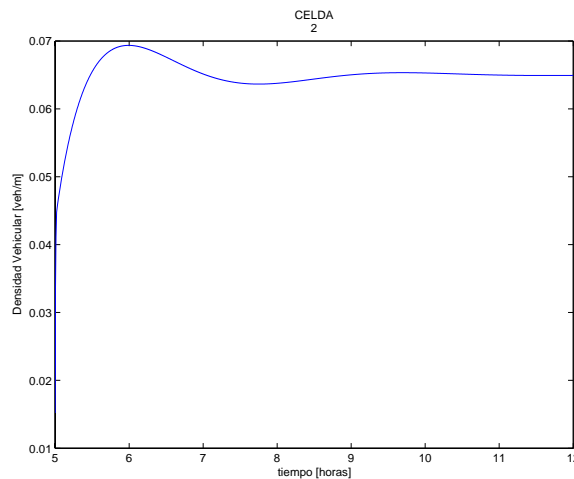


Figura 4.5: ALINEA regulando en valores de tráfico libre. Regulación de densidad para  $k_2 = 0.065 \frac{veh}{m}$ .

Evidentemente no es posible llevar a cabo la regulación en todo momento, pues como se ve en la Figura 4.4(b) hay momentos en que el cálculo de regulación requiere de un valor de flujo inexistente en la demanda, en otros existe una densidad cuyo valor nominal no puede ser regulado debido a que es producido por una sobredemanda del flujo principal  $q_e(t)$  y, por otra parte, en otros intervalos de tiempo el flujo demandado

excede dicho cálculo; esto último provocará la formación de filas de vehículos (Figura 4.6).

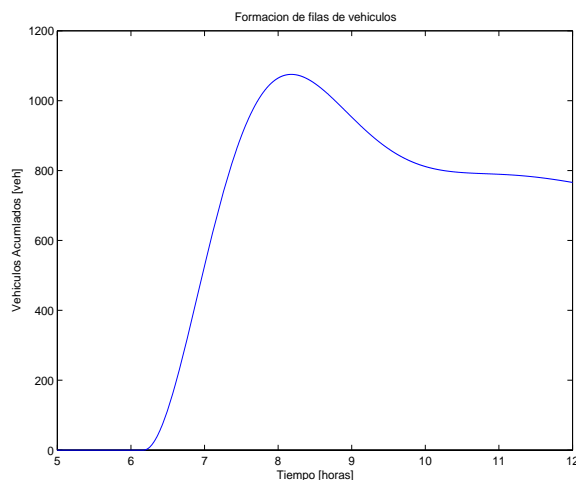


Figura 4.6: Formación y comportamiento de las filas de vehículos en la rampa de acceso a la celda 2 al llevarse a cabo regulación de densidad para  $k_2 = 0.065 \frac{veh}{m}$ .

Más adelante se describe el cálculo de estas filas.

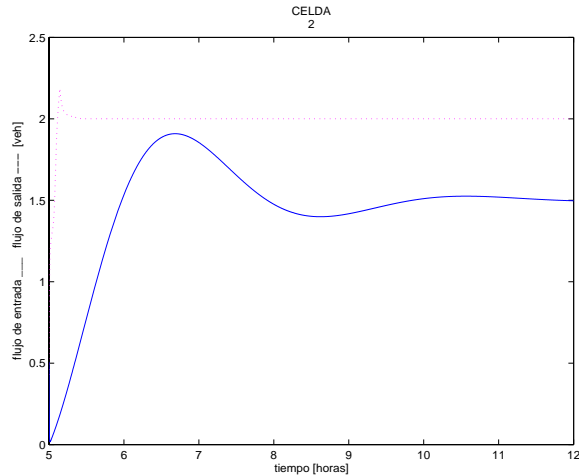
Si ahora se emplean valores nominales de tráfico congestionado como  $k_{2n} = 0.1133 \frac{veh}{m}$ ,  $q_{1n} = 1.9 \frac{veh}{s}$ ,  $r_{D1n} = 0.222 \frac{veh}{s}$ ,  $r_{D2n} = 0.25 \frac{veh}{s}$ , y se aplican a una situación en la que existen perfiles de flujo de la forma (4.15), tales que hagan tender al sistema a valores de congestionamiento<sup>5</sup>, se obtienen los resultados mostrados en las Figuras 4.7-4.9.

Puede verse que ALINEA funciona también para estos valores, al lograr una regulación para un valor  $k_2 > k_o$ , regulación que además produce un flujo  $q_3(t)$  de salida de la celda 2 con un perfil constante (Figura 4.7(b), línea magenta punteada).

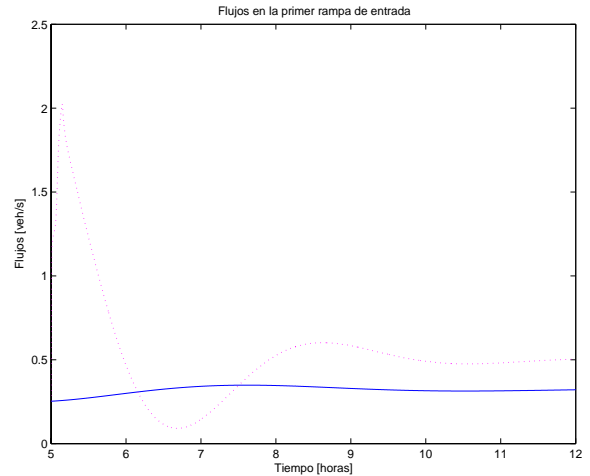
Llama la atención la formación de filas (Figura 4.9), la cual es de esperarse tanto en la primera rampa, controlada, como en la segunda, sin control, debido al congestionamiento. Sin embargo, aunque también es posible contabilizar una fila a la entrada de la celda 1, ésta no se está formando. Es necesario comentar que esta fila no lo es propiamente, pues más bien se habla de una frontera tras la cual existe una porción de autopista no modelada, en la cual no hay tal acumulación, sino los efectos de una onda de congestionamiento que viaja hacia atrás. Sin embargo, dicha contabilización de vehículos acumulados es una buena medida de tal efecto.

Además, y como ya se mencionó, a pesar de la congestión creada, no existe dicha acumulación a la entrada de la celda 1, lo cual puede interpretarse como parte del buen desempeño del controlador, el cual no sólo logra llegar a su objetivo de control (dentro de los límites que las entradas le permiten), sino que no impone mayor congestionamiento al sistema, como puede verse en la Figura 4.7(a) en la que el flujo de entrada a la celda 2 permanece con un perfil muy similar al utilizado en el caso de la simulación con valores de tráfico libre.

<sup>5</sup>En este caso, las funciones son:  $q_e(t) = -1.5 \exp^{-0.0002t} \cos(0.00045t) + 1.5$ ,  $r_{D1} = -0.07 \exp^{-0.0001t} \cos(0.0003t) + 0.3225$  y  $r_{D2} = -0.17 \exp^{-0.00005t} \cos(0.0002t + 1000) + 0.27$



(a) ALINEA regulando en valores de tráfico congestionado. Flujos a la entrada (azul, continua) y a la salida (magenta, punteada) de la celda 2.



(b) ALINEA realizando seguimiento en valores de tráfico congestionado. El flujo en demanda (azul, continua), se modifica para llevar a cabo el control en densidad de la celda a la cual debe entrar, formándose el perfil de flujo admitido (magenta, punteada)

Figura 4.7: ALINEA. Regulación en tráfico congestionado. Flujos.

Las ecuaciones (4.9) y (4.13) demuestran que ALINEA sólo puede manejar perturbaciones de tipo escalón, pero que no puede hacerlo ante perturbaciones más complejas (rampa, polinomiales, senoidales, ruido, etcétera). La Figura 4.10 ilustra este hecho al aparecer una perturbación<sup>6</sup> escalón entre las horas simuladas 9 y 11, transportada por el flujo  $q_e(t) = q_1(t)$ , notándose que efectivamente es posible realizar una excelente regulación al valor nominal deseado.

Sin embargo, cuando en el mismo intervalo de tiempo, se hace aparecer una señal de ruido, ALINEA no es capaz de llevar a cabo satisfactoriamente la regulación (Figura 4.10). Se obtienen resultados similares al usar valores de tráfico congestionado.

### Formación de filas de vehículos

La contabilidad de vehículos que entran a formar parte de una fila se puede llevar a cabo a través de la dinámica (4.16)

$$\frac{dl'(t)}{dt} = l'(t) + [r_{D1}(t) - r_1(t)] \quad (4.16)$$

Puede notarse que si en determinado momento la demanda  $r_{D1}(t)$  es mayor que el flujo calculado  $r_1(t)$ , la fila en formación  $l(t)$  crecerá, y tendrá un comportamiento decreciente en caso contrario, acotado en cero vehículos por debajo. Por lo tanto, el comportamiento de la fila quedará definido por (4.16) y por (4.17)

$$l(t) = \text{máx}\{0, l'(t)\} \quad (4.17)$$

Para incorporar esta formulación en las condiciones de frontera del modelo de transmisión por celdas (Subsección 2.3.8) se hace necesario sumar el flujo causado por la dinámica de la fila al flujo de entrada, ya

<sup>6</sup>Dicha perturbación es un aumento súbito del flujo en  $0.2 \frac{veh}{s}$ .



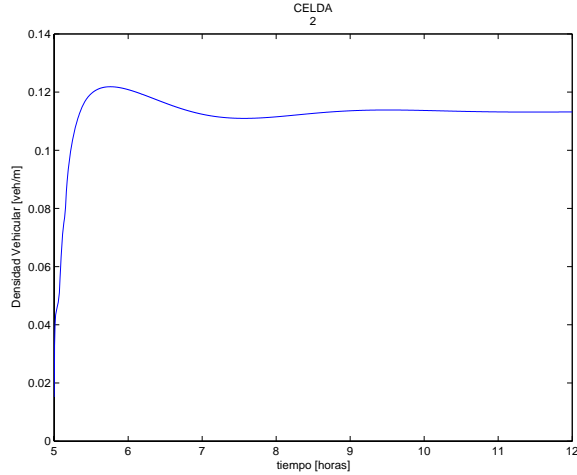


Figura 4.8: ALINEA en valores de tráfico congestionado. Regulación de densidad para  $k_2 = 0.1133 \frac{veh}{m}$ .

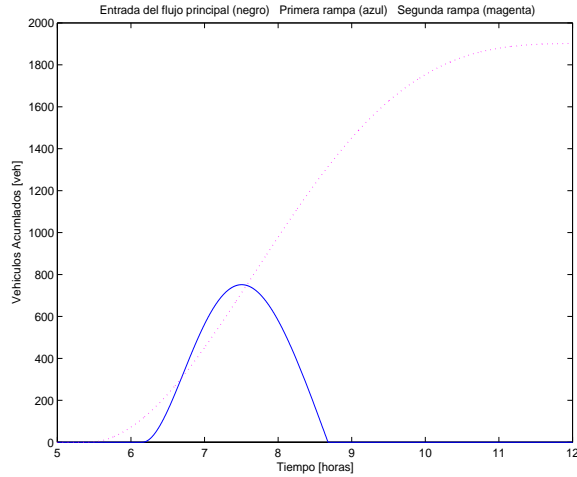


Figura 4.9: Formación y comportamiento de las filas de vehículos en la rampa de acceso a la celda 2 al llevarse a cabo regulación de densidad para  $k_2 = 0.1133 \frac{veh}{m}$ .

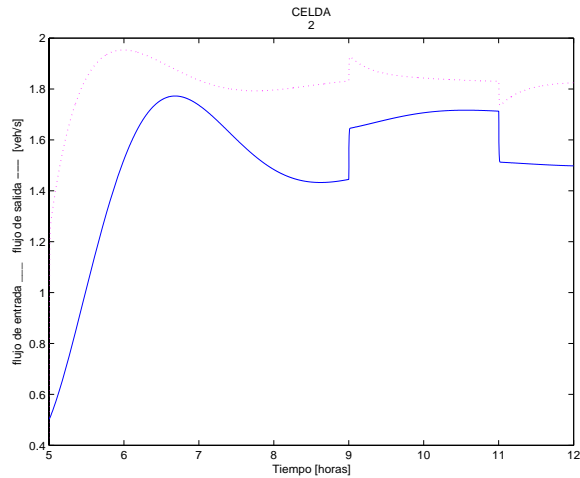
sea el que entra a la primera celda del sistema, modificando (2.26)

$$S_1 = \min \left\{ q_e(t) + \frac{dl_e(t)}{dt}, q_{max1} \right\} \quad (4.18)$$

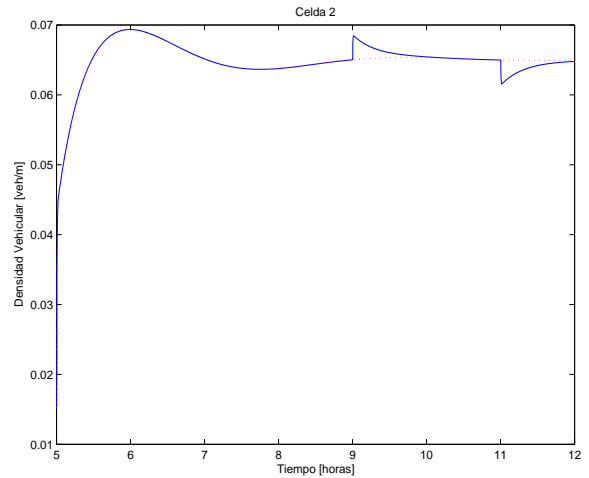
o el que se incorpora por las rampas de entrada que no se encuentran controladas, y que se expresarían en forma similar.

En esta forma, si el cálculo limita el espacio disponible en la celda, haciendo que el flujo de entrada total permitido sea menor a los que se están sumando en la celda de convergencia, entonces no sólo se formará una fila sino que crecerá conforme esa situación se mantenga.

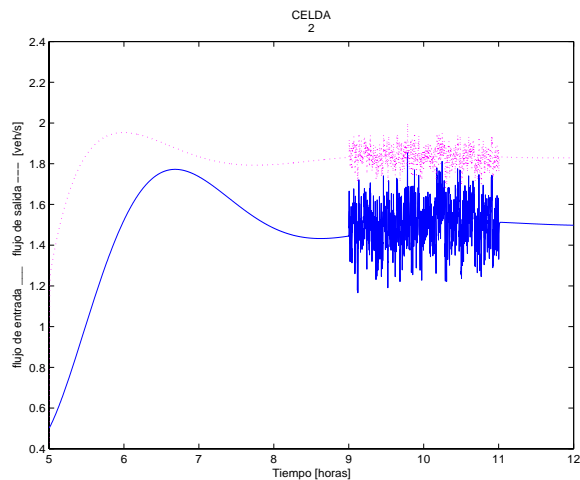
Por otro lado, si dicho cálculo permite no sólo la incorporación de esa suma de flujos a la celda, sino una cierta cantidad adicional, la misma estará dada por aquella porción de vehículos que se han acumulado en la fila, haciéndola decrecer.



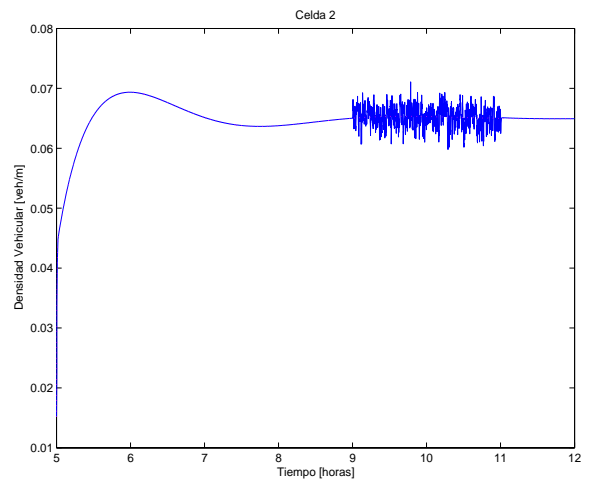
(a) ALINEA llevando a cabo seguimiento en valores de tráfico libre. Una perturbación en el flujo principal de entrada (azul, continua) es manejada por ALINEA ajustándose de tal manera que en el flujo que sale (magenta, punteada) se observa el efecto de la atenuación.



(b) ALINEA llevando a cabo seguimiento en valores de tráfico libre. La densidad (azul, continua) muestra una atenuación ante una perturbación escalón, tendiendo hacia el perfil que tendría en caso de no presentarse ésta.



(c) ALINEA llevando a cabo seguimiento en valores de tráfico libre. Este controlador no puede funcionar satisfactoriamente ante una señal ruidosa que viaja con el flujo principal.



(d) ALINEA llevando a cabo seguimiento en valores de tráfico libre. La densidad buscada (azul, continua) se ve afectada por la perturbación ruidosa, sin lograr el objetivo al que tendería (magenta, punteada) en caso de que no existiera dicha perturbación.

Figura 4.10: ALINEA. Regulación en tráfico libre ante una perturbación

En cambio, una celda que incorpora un control únicamente requiere de las expresiones (4.16) y (4.17), en el caso en el que el control sea una expresión dinámica, la cual se halla relacionada en el término  $r_1$  de dichas expresiones, de tal manera que si el cálculo de  $r_1$  permite un flujo mayor que el de demanda  $r_{D1}$ , entonces puede ser suministrado reduciendo una cantidad proporcional en la fila formada  $l(t)$ , si la hay y en suficiencia.

### 4.3.2. Rediseño de Lyapunov

#### Diseño

Al derivar (4.4) y (4.11) se supuso que las velocidades de onda  $v_2$  y  $w_2$  eran conocidas. Si se asume que se dispone únicamente de mediciones locales de densidad para implantar ALINEA, este pudiera no ser el caso, pues solamente se conocerían velocidad nominales  $v_{2n}$  y  $w_{2n}$  y no las corrientes  $v(t)$  y  $w(t)$ . En esta sección se propone añadir un término adicional a ALINEA para lidiar con la incertidumbre en el conocimiento de estas velocidades de onda.

Asuma que la celda 2 en la Figura 4.2 tiene una densidad que corresponde a flujo libre ( $k_2 < k_o$ ). La ecuación de estado correspondiente es

$$\begin{aligned} L_2 \dot{k}_2 &= q_2 - v_2 k_2 + r_1 \\ &= q_{2n} + \tilde{q}_2 - v_{2n} k_2 - \tilde{v}_2 k_2 + r_{1n} + \tilde{r}_1. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Esta ecuación es diferente de (4.3) en que la velocidad de onda real  $v_2$  y la nominal  $v_{2n}$  son tales que  $\tilde{v}_2 = v_2 - v_{2n}$ . Descompóngase  $\tilde{r}_1 = \tilde{r}_{1s} + \tilde{r}_{1p}$ , donde  $\tilde{r}_{1s}$  es un término estabilizante, en este caso dado por ALINEA en (4.5), y  $\tilde{r}_{1p}$  es un término diseñado para tratar con la incertidumbre en  $v_2$ . Si en condiciones nominales el tráfico está en condiciones de equilibrio, entonces la dinámica del error de densidad  $\tilde{k}_2$  está dada por

$$L_2 \dot{\tilde{k}}_2 = \tilde{y}_2 - v_{2n} \tilde{k}_2 + \tilde{r}_{1s} + \tilde{r}_{1p} - \tilde{v}_2 \tilde{k}_2 - \tilde{v}_2 k_{2n} \quad (4.20)$$

De la sección anterior es claro que si  $\tilde{v}_2 = 0$  y  $\tilde{r}_{1s}$  sigue ALINEA, se puede estabilizar  $\tilde{k}_2 = 0$  para perturbaciones escalón en los flujos de entrada o salida de la celda. El objetivo es diseñar  $\tilde{r}_{1p}$  para eliminar el efecto de la incertidumbre

$$\delta_1 = -\tilde{v}_2 \tilde{k}_2 - \tilde{v}_2 k_{2n} \quad (4.21)$$

Para este propósito acótese la incertidumbre como

$$\begin{aligned} |\delta_1| &= |-\tilde{v}_2 \tilde{k}_2 - \tilde{v}_2 k_{2n}| \\ &\leq v_{2max} (|\tilde{k}_2| + k_{2n}) = \rho_1 \end{aligned} \quad (4.22)$$

donde  $|\tilde{v}_2| \leq v_{2max}$ . Introduzca la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V_1 = \frac{1}{2} \gamma_1 \tilde{k}_2^2, \quad \gamma_1 > 0 \quad (4.23)$$

y defínase

$$\omega_1 = \frac{\partial V_1}{\partial \tilde{k}_2} = \gamma_1 \tilde{k}_2.$$

De tal manera que

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \gamma_1 \tilde{k}_2 \dot{\tilde{k}}_2 = \\ &= \frac{\gamma_1}{L_2} \tilde{k}_2 \left( \tilde{y}_2 - v_{2n} \tilde{k}_2 + \tilde{r}_{1s} \right) + \\ &\quad + \frac{\gamma_1}{L_2} \tilde{k}_2 \left( -\tilde{v}_2 \tilde{k}_2 - \tilde{v}_2 k_{2n} + \tilde{r}_{1p} \right) \end{aligned} \quad (4.24)$$

Por la estabilidad mostrada por ALINEA, de (4.24) se tiene

$$\dot{V}_1 \leq -\alpha \left( |\tilde{k}_2| \right) + \frac{\gamma_1}{L_2} \tilde{k}_2 \left( -\tilde{v}_2 \tilde{k}_2 - \tilde{v}_2 k_{2n} \right) + \frac{\gamma_1}{L_2} \tilde{k}_2 \tilde{r}_{1p} \quad (4.25)$$

siendo  $\alpha \left( |\tilde{k}_2| \right)$  una función clase  $\mathcal{K}$  [28]. A su vez se puede reescribir

$$\dot{V}_1 \leq -\alpha \left( |\tilde{k}_2| \right) + \frac{|\omega_1|}{L_2} v_{2max} \left( |\tilde{k}_2| + k_{2n} \right) + \frac{\omega_1}{L_2} \tilde{r}_{1p} \quad (4.26)$$

Hágase al término  $\tilde{r}_{1p}$  valer

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{1p} &= -\rho_1 \frac{\omega_1}{|\omega_1|} = \\ &= -v_{2max} \left( |\tilde{k}_2| + k_{2n} \right) \frac{\tilde{k}_2}{|\tilde{k}_2|} \end{aligned} \quad (4.27)$$

con lo cual  $\dot{V}_1 \leq -\alpha \left( |\tilde{k}_2| \right)$  y se tiene estabilidad asintótica para  $\tilde{k}_2 = 0$ .

El diseño de  $\tilde{r}_{1p}$  para el caso congestionado sigue líneas similares. El balance de flujos queda en este caso

$$\begin{aligned} L_2 \dot{\tilde{k}}_2 &= w_2(k_j - k_2) - q_3 + r_1 \\ &= -w_{2n}(k_j - k_2) - \tilde{w}_2(k_j - k_2) - q_{3n} - \tilde{y}_3 + r_{1n} + \tilde{r}_1. \end{aligned} \quad (4.28)$$

En igual forma se definen las desviaciones  $\tilde{k}_2, \tilde{y}_3, \tilde{r}_1$ . De manera adicional se hace el cambio de variable

$$\kappa_2 = k_j - k_2, \quad (4.29)$$

con la cual se puede ahora definir

$$\tilde{\kappa}_2 = \kappa_2 - \kappa_{2n} = (k_j - k_2) - (k_j - k_{2n}) \quad (4.30)$$

Con (4.28), (4.29) y (4.30) se llega a la siguiente dinámica

$$L_2 \dot{\tilde{\kappa}}_2 = -w_{2n} \tilde{\kappa}_2 - \tilde{w}_2 \tilde{\kappa}_2 - \tilde{w}_2 \kappa_{2n} + \tilde{y}_3 - \tilde{r}_{1s} + \tilde{r}_{1p} \quad (4.31)$$

Proponiendo ahora la función candidata de Lyapunov

$$V_2 = \frac{1}{2} \gamma_2 \tilde{\kappa}_2^2 \quad (4.32)$$

haciendo

$$\omega_2 = \frac{\partial V_2}{\partial \tilde{\kappa}_2} = \gamma_2 \tilde{\kappa}_2 \quad (4.33)$$

y acotando los términos de la perturbación  $\tilde{w}_2$

$$\begin{aligned} |\delta_2| &= |-\tilde{w}_2\tilde{\kappa}_2 - \tilde{w}_2\kappa_{2n}| \\ &\leq w_{2max} (|\tilde{\kappa}_2| + \kappa_{2n}) = \rho_2 \end{aligned} \quad (4.34)$$

se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \gamma_2\tilde{\kappa}_2\dot{\tilde{\kappa}}_2 = \\ &= \frac{\gamma_2}{L_2}\tilde{\kappa}_2(\tilde{y}_3 - w_{2n}\tilde{\kappa}_2 - \tilde{r}_{1s}) + \frac{\gamma_2}{L_2}\tilde{\kappa}_2(-\tilde{w}_2\tilde{\kappa}_2 - \tilde{w}_2\kappa_{2n} - \tilde{r}_{1p}) \end{aligned} \quad (4.35)$$

Se ha mostrado en la Sección 4.3.1 que ALINEA también estabiliza al primer término del lado derecho de la expresión (4.35), por lo tanto

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq -\alpha (|\tilde{\kappa}_2|) + \frac{\gamma_2}{L_2}\tilde{\kappa}_2(-\tilde{w}_2\tilde{\kappa}_2 - \tilde{w}_2\kappa_{2n}) + \frac{\gamma_2}{L_2}\tilde{\kappa}_2\tilde{r}_{1p} \\ &\leq -\alpha (|\tilde{\kappa}_2|) + \frac{|\omega_2|}{L_2}\delta_2 - \frac{\omega_2}{L_2}\tilde{r}_{1p} \end{aligned} \quad (4.36)$$

En este caso, el término controlador de perturbaciones es

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{1p} &= -\rho_2 \frac{\omega_2}{|\omega_2|} = \\ &= -w_{2max} (|\tilde{\kappa}_2| + \kappa_{2n}) \frac{\tilde{\kappa}_2}{|\tilde{\kappa}_2|} \end{aligned} \quad (4.37)$$

que hace que la derivada de la función de Lyapunov sea negativa definida

$$\dot{V}_2 \leq -\alpha (|\tilde{\kappa}_2|) \quad (4.38)$$

y exista estabilidad asintótica para  $\tilde{\kappa}_2 = 0$ , la cual se extiende al valor  $\tilde{k}_2$  ya que, de (4.30)

$$\tilde{\kappa}_2 = (k_j - k_2) - (k_j - k_{2n}) = -\tilde{k}_2 \quad (4.39)$$

por lo que existe convergencia también en el caso de congestionamiento y  $k_2 \rightarrow k_{2n}$  según  $t \rightarrow \infty$ .

## Simulaciones

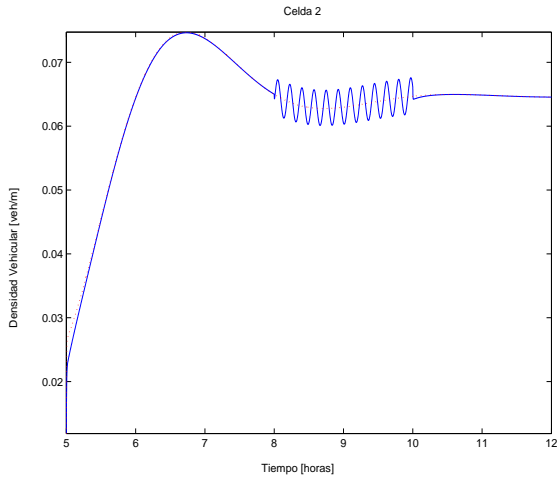
Ya se ha visto la forma de funcionar de ALINEA cuando se desean seguir valores nominales fijos. Ahora se mostrará que es posible llevar a cabo seguimiento de perfiles de flujo que varían con el tiempo. Dichos perfiles serán las señales nominales a las cuales se desea converger.

La Figura 4.11(a) ilustra el comentario anterior al observarse como dicho controlador realiza un seguimiento eficaz del perfil deseado. Pero también ilustra el hecho ya demostrado de que este control no puede desvanecer perturbaciones de complejidad superior a las del tipo escalón.

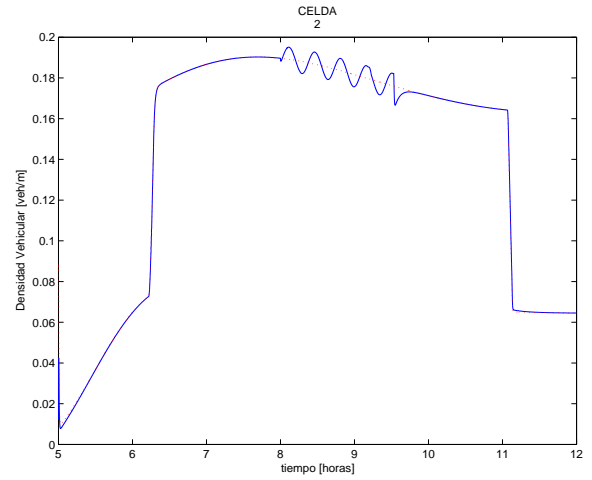
La perturbación en este caso es una senoide<sup>7</sup> de 5 oscilaciones por hora aproximadamente, con una amplitud de aproximadamente una décima parte del valor de la velocidad  $v$ , oscilaciones que ALINEA no es capaz de disminuir.

---

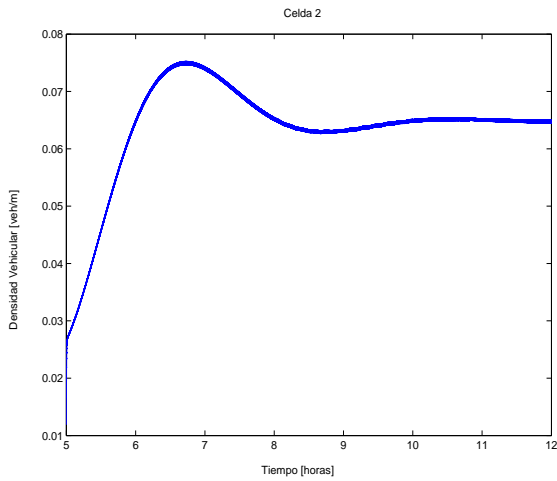
<sup>7</sup>Una perturbación así podría aproximarse al efecto de un flujo de autos que aceleran y desaceleran debido a condiciones locales en el pavimento.



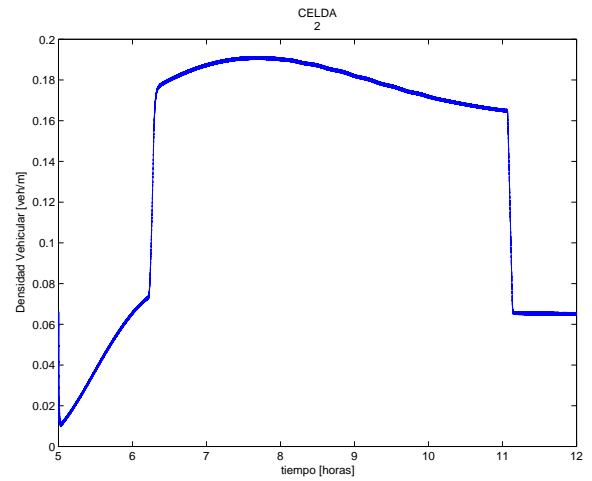
(a) ALINEA sigue el perfil de  $k_{2n}(t)$  excepto por la perturbación de tipo senoidal que no puede corregir.



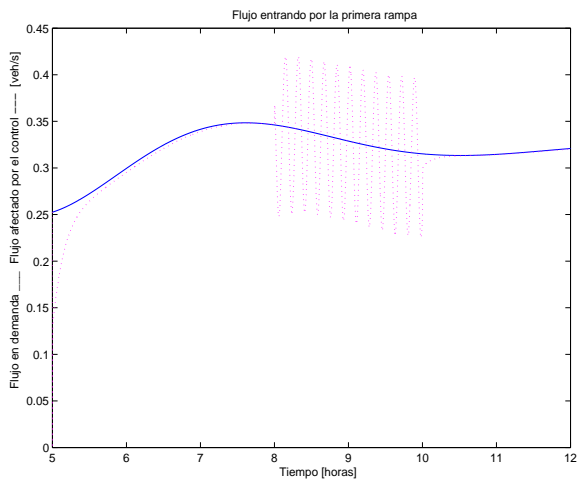
(d) ALINEA sigue el perfil de  $k_{2n}(t)$  excepto por la perturbación de tipo senoidal que no puede corregir.



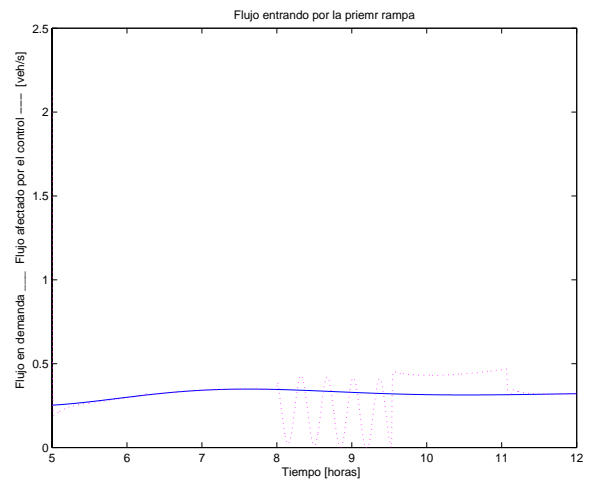
(b) El término diseñado por teoría de Lyapunov y agregado a ALINEA disminuye los efectos de la perturbación.



(e) El término diseñado por teoría de Lyapunov y agregado a ALINEA disminuye los efectos de la perturbación.



(c) El término diseñado por teoría de Lyapunov y agregado a ALINEA adapta el flujo  $r_1$ .



(f) El término diseñado por teoría de Lyapunov y agregado a ALINEA adapta el flujo  $r_1$ .

Figura 4.11: Rediseño de Lyapunov. Simulaciones.

La Figura 4.11(b) muestra por su parte el funcionamiento del controlador una vez que se unen los términos de ALINEA y el rediseñado mediante Teoría de Lyapunov. Puede verse que las mismas perturbaciones mostradas en la anterior figura han desaparecido; sin embargo, existe en pequeña medida un efecto de castaño (*chattering*) inherente a la forma en que se ha propuesto la Expresión (4.27) (o la análoga para el caso congestionado (4.37)).

Las Figuras 4.11(d)–4.11(f) son los casos congestionados análogos a lo que se han mostrado para valores de tráfico libre.

No obstante el efecto de castaño, las Figuras 4.11(c) y 4.11(f) muestran que estos controles son realizables y que pueden comportarse en forma conveniente. Cabe señalar que es posible evitar dicho castaño proponiendo una forma alterna de (4.27) (o de (4.37)), atendiendo a técnicas existentes para tal efecto.

### 4.3.3. Control con observador de perturbaciones

#### Diseño

A continuación se presenta un esquema alternativo para tratar con perturbaciones que viajan hacia el punto de convergencia con una rampa de acceso. Igual que en la subsección anterior, se trata de un término que se agrega a (4.2) y que también se encarga de disminuir el efecto de perturbaciones más complejas que las tipo escalón.

El diseño de este término se basa en un observador para dichas perturbaciones, capaz de reconstruir al flujo  $q_2$  ó  $q_3$  (Figura 4.2) sin necesidad de medir a cualquiera de ellos. Una ventaja adicional es que mantiene la estructura local de ALINEA.

Descompóngase el flujo de la rampa de acceso  $r_1$  en la forma (4.40)

$$r_1 = r_{1s} + r_{1p} \quad (4.40)$$

donde  $r_{1s}$  es un término estabilizante, en este caso ALINEA, y  $r_{1p}$  es un término diseñado para tratar con las perturbaciones.

Para el caso de densidad en flujo libre ( $k_2 < k_o$ ), las condiciones de frontera hacen necesario recuperar al flujo  $q_2$ . Para este propósito, considérese el sistema dinámico (4.41)

$$L_2 \dot{\hat{k}}_2 = -v_2 \hat{k}_2 + r_1 + c(k_2 - \hat{k}_2) \quad (4.41)$$

Defínase ahora la señal  $\epsilon = k_1 - \hat{k}_1$ . Entonces usando (4.3) y (4.41)

$$L_2 \dot{\epsilon} = -(v_2 + c)\epsilon + q_2 \quad (4.42)$$

Se puede ver que la solución de la ecuación (4.42) puede aproximarse por<sup>8</sup>

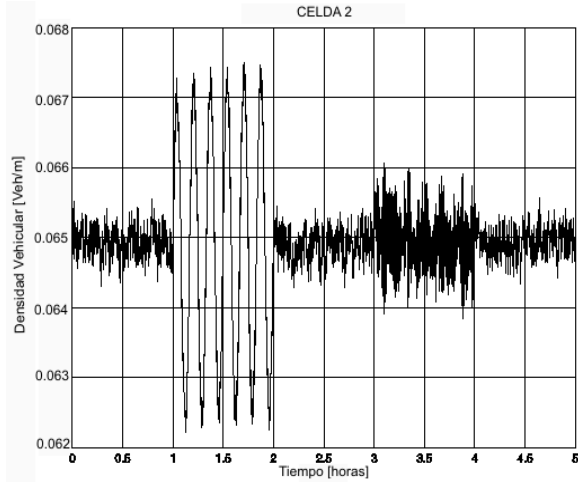
$$\epsilon(t) = \epsilon(0)e^{-\frac{v_2+c}{L_2}t} + \frac{q_2}{v_2+c} \quad (4.43)$$

Entonces  $q_2$  puede recuperarse de

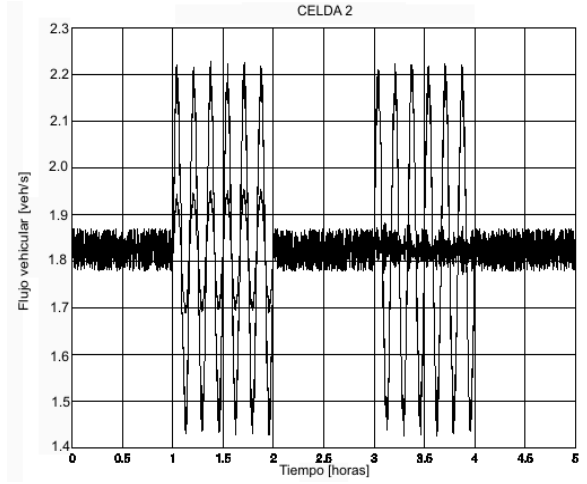
$$q_2 = \epsilon(t)(v_2 + c) \quad (4.44)$$

---

<sup>8</sup>Siempre y cuando los cambios en  $q_2$  sean lentos en comparación con la constante de tiempo  $v_2 + c$ .



(a) Densidad en la celda 2. Regulación para  $k_2 = 0.065 \text{ veh/m}$ . Se usa ALINEA entre la primera y la segunda hora y la nueva ley de control entre la tercera y la cuarta horas.



(b) Flujos de entrada y salida de la celda 2. Se usa ALINEA entre la primera y la segunda hora y la nueva ley de control entre la tercera y la cuarta horas.

Figura 4.12: Combinación de ALINEA y un observador de flujo. Tráfico Libre.

El conocimiento de  $q_2$  puede usarse para proponer

$$\tilde{r}_{1p} = \tilde{q}_2 \quad (4.45)$$

Si la densidad en la celda 2 se encuentra en valores congestionados ( $k_2 > k_o$ ) entonces se debe recuperar el flujo  $q_3$ . Considérese entonces el sistema dinámico

$$L_2 \dot{\hat{k}}_2 = w_2 (k_{j2} - \hat{k}_2) + r_1 + c(k_1 - \hat{k}_1) \quad (4.46)$$

Usando (4.10) y (4.46) se llega a

$$L_2 \dot{\epsilon} = \epsilon(w_2 + c) - q_3 \quad (4.47)$$

La solución de esta ecuación puede ser aproximada mediante

$$\epsilon(t) = \epsilon(0)e^{-\frac{w_2+c}{L_2}t} + \frac{q_3}{w_2 + c} \quad (4.48)$$

Entonces  $q_3$  ahora puede recuperarse a partir de

$$q_3 = -\epsilon(t)(w_2 + c) \quad (4.49)$$

y usarse para proponer

$$\tilde{r}_{1p} = -\tilde{q}_3 \quad (4.50)$$

## Simulaciones

Interesa saber el desempeño del esquema tratado en esta Subsección ante perturbaciones principalmente, de modo que se utilizarán valores nominales para las simulaciones cuyos resultados a continuación se presentan.

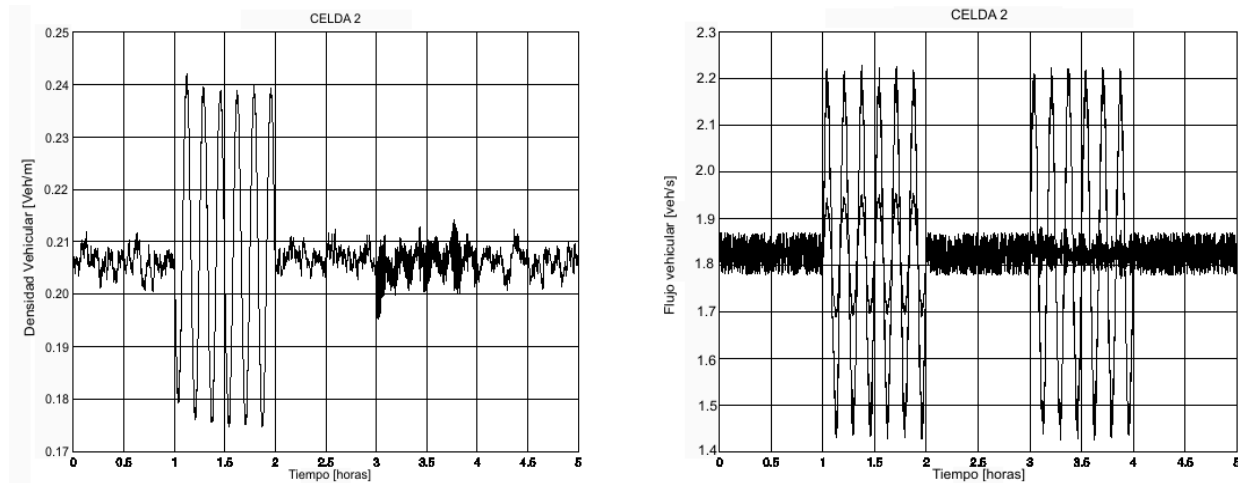


Los valores usados para ALINEA son los mismos que se han usado hasta ahora. El valor deseado de densidad es  $k_{2n} = 0.065 \frac{veh}{m}$ . Después de una hora de tiempo simulado se introduce una perturbación que viaja con el flujo  $q_1$  de la forma

$$\tilde{q}_1(t) = 0.065 \text{sen} \left( \frac{2\pi}{0.1666} t \right) \quad (4.51)$$

que corresponde aproximadamente a un cambio del 30% del valor del flujo nominal  $q_{1n}$  con un periodo de 10 minutos durante 1 hora. Además, se ha agregado ruido aleatorio a la señal.

Hacia la tercer hora de simulación la misma perturbación vuelve a aparecer, pero ahora se agrega la combinación de la ley de control propuesta (4.45) junto con el control ALINEA. La Figura 4.12(a) muestra el comportamiento de la densidad en la celda 2, mientras que la Figura 4.12(b) muestra los flujos que entran y salen de la celda 2. Puede notarse que ALINEA tiene un pobre desempeño frente a esta perturbación, tanto en densidad como en flujo. En cambio, la combinación de dicho controlador con el término propuesto ofrece una mejora notable, disminuyendo en forma evidente el efecto de la perturbación casi completamente.



(a) Densidad en la celda 2. Regulación para  $k_2 = 0.206 \text{veh}/m$ . Se usa ALINEA entre la primera y la segunda hora y la nueva ley de control entre la tercera y la cuarta horas.

(b) Flujos de entrada y salida de la celda 2. Se usa ALINEA entre la primera y la segunda hora y la nueva ley de control entre la tercera y la cuarta horas.

Figura 4.13: Combinación de ALINEA y un observador de flujo. Tráfico Congestionado.

Para el caso de tráfico congestionado se busca regular hacia  $k_2 = 0.206 \frac{veh}{m}$ . La misma perturbación senoidal se hace aparecer y desaparecer en los mismos tiempos. El mismo tipo de ruido está presente. Las Figuras 4.13(a) y 4.13(b) muestran los resultados para esta situación en la que una vez más se muestra la ventaja de la combinación hecha entre ALINEA y (4.50).

### 4.3.4. “Backstepping”

#### Diseño

Tomando una vez más como referencia el diagrama de la Figura 4.2, podemos modelar al sistema completo como

$$\dot{k}_1 = -\frac{v_1}{L_1}k_1 + \frac{1}{L_1}q_1 \quad (4.52a)$$

$$\dot{k}_2 = \frac{v_1}{L_2}k_1 - \frac{v_2}{L_2}k_2 + \frac{1}{L_2}r_1 \quad (4.52b)$$

$$\dot{k}_3 = \frac{v_2}{L_3}k_2 - \frac{v_3}{L_3}k_3 \quad (4.52c)$$

Ahora se busca un controlador local  $r_1$ , distinto de ALINEA, que dosifique el flujo  $r_{D1}$  que entra por la rampa de acceso hacia la celda 2, tal que la densidad en la misma dé seguimiento a una trayectoria deseada o nominal, es decir  $k_2 \rightarrow k_{2n}$ .

La técnica de “backstepping” se caracteriza por llevar a cabo el control de un sistema de varios estados descomponiéndolo en subsistemas más simples. Así es posible llevar a cabo el control de uno de esos subsistemas mediante el diseño de un controlador sólo para el mismo. Una vez logrado este objetivo, este estado estabilizado se inyecta a un siguiente subsistema, con lo que se espera también alcanzar la convergencia de dicha variable, y así sucesivamente hasta lograr la estabilización del sistema completo.

Dado que en flujo libre la información del sistema en particular se transmite en el sentido del flujo, es conveniente trabajar con el sistema en la forma

$$\dot{\tilde{k}}_3 = -\frac{v_3}{L_3}\tilde{k}_3 + \frac{v_2}{L_3}\tilde{k}_2 \quad (4.53a)$$

$$\dot{\tilde{k}}_2 = \frac{v_1}{L_2}\tilde{k}_1 - \frac{v_2}{L_2}\tilde{k}_2 + \frac{1}{L_2}\tilde{r}_1 \quad (4.53b)$$

siendo  $\tilde{k}_i = k_i - k_{in}$ . Inyéctese por la entrada  $\tilde{r}_1$  la señal

$$\tilde{r}_1 = L_2 \left( \tilde{r}_{1a} - \frac{v_1}{L_2}\tilde{k}_1 + \frac{v_2}{L_2}\tilde{k}_2 \right) \quad (4.54)$$

con lo cual se obtiene

$$\dot{\tilde{k}}_3 = -\frac{v_3}{L_3}\tilde{k}_3 + \frac{v_2}{L_3}\tilde{k}_2 \quad (4.55a)$$

$$\dot{\tilde{k}}_2 = \tilde{r}_{1a} \quad (4.55b)$$

Supóngase que es posible controlar (4.55a) tomando a  $\tilde{k}_2$  como su entrada y haciéndola igual al control  $\tilde{k}_2 = \phi(\tilde{k}_3)$

$$\tilde{k}_2 = \phi(\tilde{k}_3) = -\tilde{k}_3 \quad (4.56)$$

de tal forma que si se propone la función de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}\tilde{k}_3^2 \quad (4.57)$$

$$\Rightarrow \dot{V} = \tilde{k}_3 \dot{\tilde{k}}_3 = -\frac{v_2 + v_3}{L_3}\tilde{k}_3^2 \leq 0 \quad (4.58)$$

entonces, con (4.56), el origen del sistema (4.55a) es global y exponencialmente estable.

Ahora defínase la variable

$$z = \tilde{k}_2 - \phi(\tilde{k}_3) = \tilde{k}_2 + \tilde{k}_3 \quad (4.59)$$

y súmese y réstese el término  $\frac{v_2}{L_3}\phi$  en (4.55a), con lo que ahora se tiene el nuevo sistema

$$\dot{\tilde{k}}_3 = -\frac{v_2 + v_3}{L_3}\tilde{k}_3 + \frac{v_2}{L_3}z \quad (4.60a)$$

$$\dot{z} = \tilde{r}_{1a} - \frac{v_2 + v_3}{L_3}\tilde{k}_3 + \frac{v_2}{L_3}z \quad (4.60b)$$

Para probar la estabilidad de (4.73), redefínase la función de Lyapunov (4.61) mediante

$$V_c = V + \frac{1}{2}z^2 \quad (4.61)$$

$$\Rightarrow \dot{V}_c = -\frac{v_2 + v_3}{L_3}\tilde{k}_3^2 + z\dot{z} \quad (4.62)$$

Tómese para  $\tilde{r}_{1a}$

$$\tilde{r}_{1a} = -\frac{v_3}{L_3}z + \frac{v_2 + v_3}{L_3}\tilde{k}_3 - \frac{v_2}{L_3}z \quad (4.63)$$

con lo cual se logra que

$$\dot{V}_c = -\frac{v_2 + v_3}{L_3}\tilde{k}_3^2 - \frac{v_3}{L_3}z^2 \leq 0 \quad (4.64)$$

Sustituyendo (4.63) en (4.54) se obtiene el controlador buscado

$$\tilde{r}_1 = \left[ -(v_2 + v_3)\frac{L_2}{L_3} + v_2 \right] (k_2 - k_{2n}) - v_1 (k_1 - k_{1n}) \quad (4.65)$$

Nótese que si las velocidades  $v_i$  y las longitudes  $L_i$  son conocidas, no hay constantes que deban ser ajustadas, y que las únicas variables que deben medirse, o estimarse, son las densidades  $k_1$  y  $k_2$ .

Por otra parte, hay ocasiones en que ya sea por incidentes, alteraciones periódicas o aleatorias, o ruido presente en los sensores que miden el flujo y la densidad, la convergencia hacia el valor deseado  $k_n$  puede verse afectada, por lo que se busca que el esquema de control tome en cuenta dichas perturbaciones y que se comporte en forma robusta ante ellas.

Replantéese la dinámica para la densidad  $k_i$  en la forma

$$\dot{\tilde{k}}_3 = -\frac{v_3}{L_3}\tilde{k}_3 + \frac{v_2}{L_3}\tilde{k}_2 + \delta_{\tilde{k}_3}(\tilde{k}_3, \tilde{k}_2) \quad (4.66a)$$

$$\dot{\tilde{k}}_2 = \frac{v_1}{L_2}\tilde{k}_1 - \frac{v_2}{L_2}\tilde{k}_2 + \frac{1}{L_2}\tilde{r}_1 + \delta_{\tilde{k}_2}(\tilde{k}_3, \tilde{k}_2) \quad (4.66b)$$

siendo

$$|\delta_{\tilde{k}_3}(\tilde{k}_3, \tilde{k}_2)| \leq a_1|\tilde{k}_3| \quad (4.67a)$$

$$|\delta_{\tilde{k}_2}(\tilde{k}_3, \tilde{k}_2)| \leq a_2|\tilde{k}_2| \quad (4.67b)$$

perturbaciones que puede afectar a los valores de  $\tilde{k}_2$  y  $\tilde{k}_3$ , y úsese (4.54) para convertir a (4.66) en

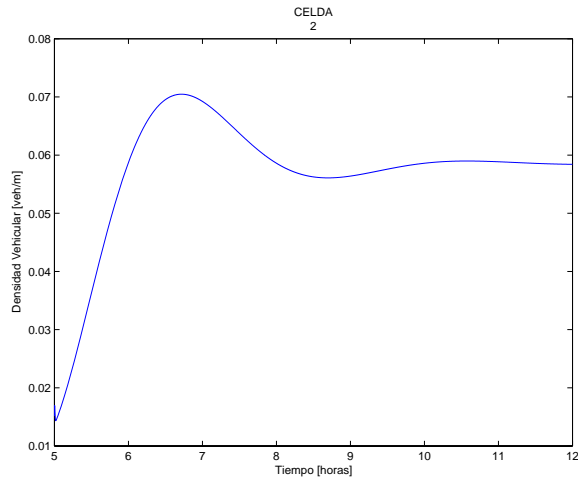
$$\dot{\tilde{k}}_3 = -\frac{v_3}{L_3}\tilde{k}_3 + \frac{v_2}{L_3}\tilde{k}_2 + \delta_{\tilde{k}_3} \quad (4.68a)$$

$$\dot{\tilde{k}}_2 = \tilde{r}_{1a} + \delta_{\tilde{k}_2} \quad (4.68b)$$

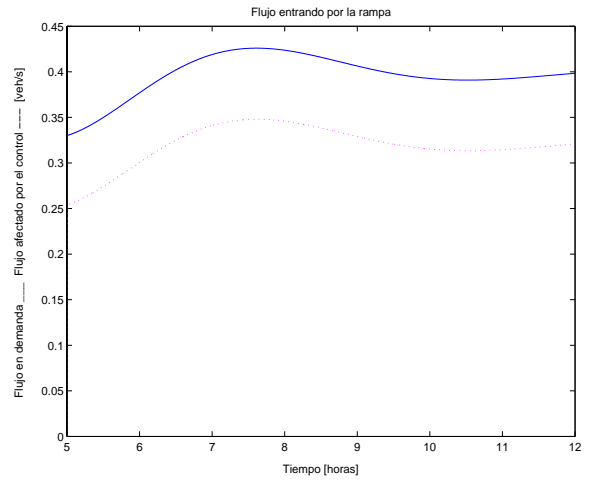
Nuevamente, supóngase que es posible controlar a (4.68a) tomando a  $\tilde{k}_2$  como la entrada, sólo que ahora el nuevo control debe cumplir las restricciones

$$|\phi(\tilde{k}_3)| \leq a_4 |\tilde{k}_3| \quad (4.69a)$$

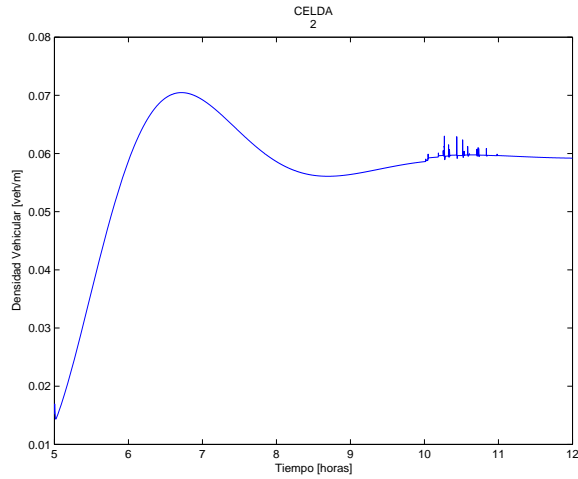
$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{k}_3} \right| \leq a_5 \quad (4.69b)$$



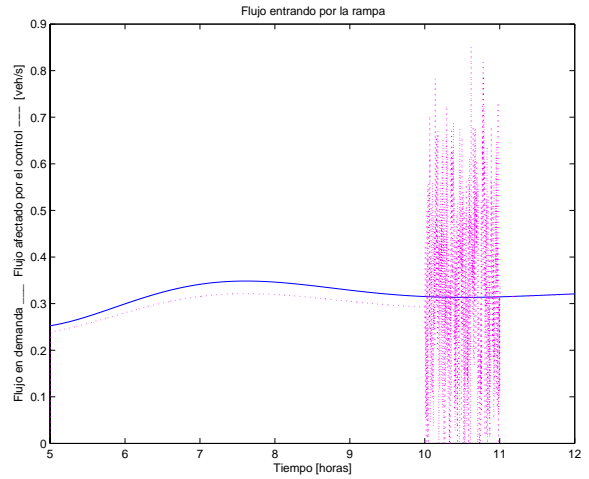
(a) Perfil de densidad nominal para valores libres.



(b) Flujos en la rampa de acceso: el flujo que demanda entrar está representado en línea continua, mientras que la punteada representa al flujo que se permite entrar a partir del cálculo del controlador.



(c) Perfil de densidad en la celda 2, controlado ante una perturbación que aparece entre las 10 y las 11 AM.



(d) Reacción ante una perturbación en el flujo principal  $q_1$ . En línea continua se representa al flujo que demanda entrar por la rampa, y en línea punteada se representa al flujo controlado.

Figura 4.14: Regulación por “Backstepping”. Tráfico Libre.

Con dicho controlador, la derivada de la función candidata de Lyapunov,  $V(\tilde{k}_3) = \frac{1}{2} \tilde{k}_3^2$ , queda ahora

como

$$\begin{aligned}\dot{V} = \tilde{k}_3 \dot{\tilde{k}}_3 &\leq -\frac{v_2 + v_3}{L_3} \tilde{k}_3^2 + a_1 \tilde{k}_3^2 \\ &\leq \left( a_1 - \frac{v_2 + v_3}{L_3} \right) \tilde{k}_3^2 \leq 0\end{aligned}\quad (4.70)$$

Por lo tanto, para que el origen de  $\tilde{k}_3$  sea asintóticamente estable, es necesario que

$$a_1 \leq \frac{v_2 + v_3}{L_3}\quad (4.71)$$

Nótese además que se ha vuelto a tomar

$$\tilde{k}_2 = \phi(\tilde{k}_3) = -\tilde{k}_3\quad (4.72)$$

con lo cual  $a_4 = a_5 = 1$ .

Ahora búsquese la convergencia de  $k_2$  hacia  $k_{2n}$ . Para ello, réstese y súmese en (4.68a) el término  $\frac{v_2}{L_3}\phi$  y defínase la variable  $z = \tilde{k}_2 - \phi(\tilde{k}_3)$ , con lo cual se tiene

$$\dot{\tilde{k}}_3 = -\frac{v_2 + v_3}{L_3} \tilde{k}_3 + \frac{v_2}{L_3} z + \delta_{\tilde{k}_3}\quad (4.73a)$$

$$\dot{z} = \tilde{r}_{1a} - \frac{v_2 + v_3}{L_3} \tilde{k}_3 + \frac{v_2}{L_3} z + \delta_{\tilde{k}_3} + \delta_{\tilde{k}_2}\quad (4.73b)$$

sistema que se analiza con la función compuesta cuya forma es idéntica a (4.61)

$$V_c = V + \frac{1}{2} z^2\quad (4.74)$$

$$\Rightarrow \dot{V}_c = -\frac{v_2 + v_3}{L_3} \tilde{k}_3^2 + z\dot{z}\quad (4.75)$$

con la cual se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{V}_c &\leq \left( a_1 - \frac{v_2 + v_3}{L_3} \right) \tilde{k}_3^2 + z\dot{z} \\ &\leq \left( a_1 - \frac{v_2 + v_3}{L_3} \right) \tilde{k}_3^2 + z \left[ \tilde{r}_{1a} - \frac{v_2 + v_3}{L_3} \tilde{k}_3 + \frac{v_2}{L_3} z + (a_1 + a_2) |\tilde{k}_3| \right]\end{aligned}\quad (4.76)$$

Para que (4.76) sea negativa semidefinida es necesario hacer

$$\tilde{r}_{1a} = -\frac{v_3}{L_3} z + \frac{v_3}{L_3} \tilde{k}_3 - \frac{v_2}{L_3} \tilde{k}_2 + (a_1 + a_2) |\tilde{k}_3|\quad (4.77)$$

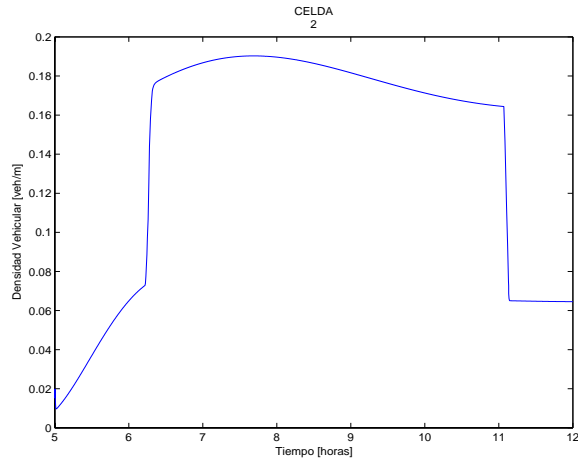
$$\tilde{r}_1 = \left[ -(w_1 + w_2) \frac{L_2}{L_1} + w_2 \right] (k_2 - k_{2n}) - w_3 (k_3 - k_{3n})\quad (4.78)$$

y por lo tanto el controlador para la rampa de entrada a la celda 2 del sistema es

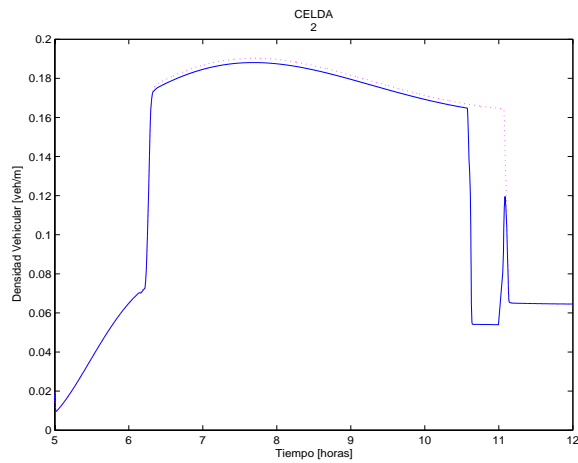
$$\tilde{r}_1 = \left[ -(v_2 + v_3) \frac{L_2}{L_3} + v_2 \right] (k_2 - k_{2n}) - v_1 (k_1 - k_{1n}) - \gamma \frac{v_2 + v_3}{L_3} L_2 |k_3 - k_{3n}|\quad (4.79)$$

donde

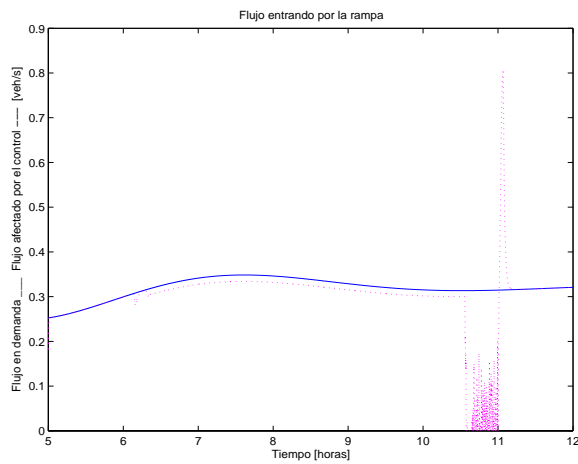
$$a_1 + a_2 = \gamma \quad , \quad 0 \leq \gamma \leq 1$$



(a) Perfil de densidad nominal para valores congestionados.



(b) Perfil de densidad en la celda 2, ante una perturbación que aparece entre las 10 y las 11 AM, en línea continua. La línea punteada es el perfil que se intenta seguir.



(c) Flujo en la rampa de acceso ante una perturbación en el flujo principal  $q_4$ . La línea continua indica la demanda y la punteada representa al flujo controlado.

Figura 4.15: Regulación por “Backstepping”. Tráfico Congestionado con una perturbación.

Nótese que el término que incluye al parámetro  $\gamma$  realimenta el estado  $\tilde{k}_3$  el cual recibe información de  $\tilde{k}_2$  dado que el flujo tiene esa dirección. Esto contribuye a dar información sobre el comportamiento de las perturbaciones y  $\gamma$  sólo influye en la velocidad de respuesta a esta señal, por lo que puede ser sintonizado en forma arbitraria.

Hasta aquí se ha llegado a la posibilidad de controlar la densidad localmente cuando existen valores de flujo libre ( $k_2 < k_o$ ), tanto si hay como si no hay perturbaciones tomadas en cuenta. En forma similar, es posible diseñar esquemas para densidades superiores a  $k_o$ . Los desarrollos son similares y aquí sólo se exponen las expresiones finales respectivas.

Cuando se requiere controlar a valores de densidad considerados congestionados (la recta del lado derecho del diagrama fundamental, Figura 2.10), el flujo de control debe ser

$$\tilde{r}_1 = \left[ -(w_1 + w_2) \frac{L_2}{L_1} + w_2 \right] (k_2 - k_{2n}) - w_3 (k_3 - k_{3n}) \quad (4.80)$$

Pero si se requiere hacer frente a perturbaciones de naturaleza que podría ser compleja<sup>9</sup> entonces la Ecuación (4.78) debe modificarse para quedar

$$\tilde{r}_1 = -\gamma_c (w_1 + w_2) \frac{L_2}{L_1} |k_1 - k_{1n}| + \left[ -(w_1 + w_2) \frac{L_2}{L_1} + w_2 \right] (k_2 - k_{2n}) - w_3 (k_3 - k_{3n}) \quad (4.81)$$

## Simulaciones

Se busca primero una convergencia a un perfil de densidad como el mostrado en la Figura 4.14(a). El diseño de estos controladores controla a más de una celda, lo cual puede ser una ventaja en el caso de perturbaciones locales, aunque es necesario contar con los perfiles nominales de densidad de cada una.

La simulación para seguir estos perfiles se lleva a cabo aumentando en  $0.0775 \text{ veh/s}$  el flujo nominal de la rampa. La simulación obtiene un seguimiento exacto de los perfiles de densidad y prácticamente repiten la gráfica mostrada en la Figura 4.14(a), aunque es posible apreciar en la Figura 4.14(b) la diferencia existente entre el perfil de flujo nominal y el usado para la simulación.

Ahora se introduce una perturbación aleatoria normal, debida a movimientos de los vehículos, no detectados por los sensores, o al ruido que estos pueden agregar a la medición, la cual aparece entre las 10 y las 11 AM en la simulación y que viaja con el flujo principal  $q_1$ .

Obsérvese en la Figura 4.14(d) la reacción de la señal de control ante dicho evento. La Figura 4.14(c) muestra el comportamiento de la densidad en la celda 2, apreciándose la atenuación sobre la perturbación.

En forma similar se han hecho simulaciones para perfiles de densidad cuyos valores se encuentran por arriba de una densidad crítica  $k_o$ , es decir, son congestionados. En este caso, el perfil de densidad hacia el cual se debe dar seguimiento es el que muestra la Figura 4.15(a). Al hacer la simulación correspondiente, el controlador logra dar un seguimiento exacto de dicho perfil.

Al aparecer una perturbación senoidal de características ya descritas, ahora acompañando al flujo  $q_4$ , y puesto que todo el sistema está congestionado, las señales viajan ahora tráfico arriba, por lo que esta perturbación alcanzará a las celdas del sistema viajando en esa dirección. Las Figuras 4.15(b) y 4.15(c) muestran la densidad para la celda 2 y el control en el flujo de la rampa ante la presencia de dicha perturbación.

<sup>9</sup>Ya se mostró que reguladores como ALINEA sólo pueden atenuar perturbaciones de comportamiento tipo escalón.

## 4.4. Combinación de esquemas de estimación y control

La información necesaria para cualquiera de los esquemas de control o regulación presentados proviene principalmente de los valores de densidad. En todos esos esquemas se ha supuesto que dicha variable se encuentra disponible, lo cual puede darse a través de su medición u obtención indirecta de un procesamiento a partir de la ocupancia.

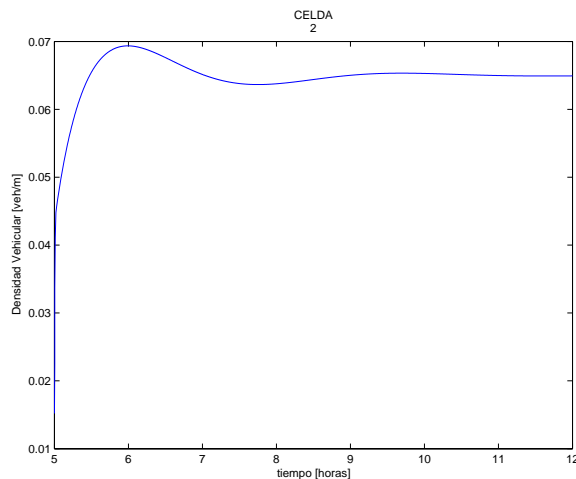
Sin embargo, como ya se mencionó en el Capítulo 3, pudiera no existir un medidor del cual obtener un valor necesario, o estar descompuesto, por lo que se puede recurrir a esquemas de estimación. En esta forma, estimadores y controladores pueden trabajar en conjunto para lograr el objetivo de lograr una mayor eficiencia en el servicio que prestan las vías de tráfico automotor.

Se muestra a continuación la simulación de una de tales combinaciones: el controlador ALINEA trabajando con un estimador de densidad, en tráfico libre para una densidad deseada de  $k_2 = 0.065 \frac{veh}{m}$ . Dicho estimador de densidad es similar al mostrado en la Subsección 3.3.5, cuya forma se reproduce en (4.82) de forma conveniente

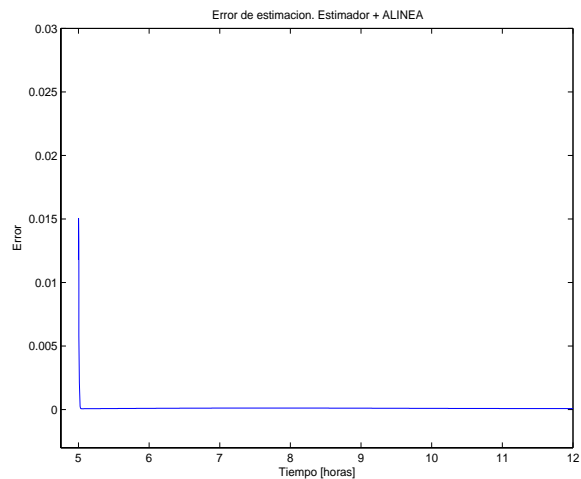
$$\dot{\hat{k}} = A_L \hat{k} + B_L u_L + G_L (y - C_L \hat{k}) \quad (4.82)$$

Las matrices y vectores que componen al estimador de densidad (4.82) son los que se detallan en la Subsección 3.3.5 y el vector de ganancias de este estimador también se diseñó de tal forma que sus valores fueran un 20% más rápidos<sup>10</sup> que los valores propios de  $A_L$ .

La Figura 4.16(a) muestra un desempeño prácticamente idéntico al que se obtuvo para un caso similar, mostrado en la Subsección 4.3.1, mientras que la Figura 4.16(b) muestra el error de estimación, mostrando la utilidad de dicha combinación en caso de llevarse a la práctica.



(a) ALINEA regulando en valores de tráfico libre. Regulación de densidad para  $k_2 = 0.065 \frac{veh}{m}$ , usando valores estimados.



(b) Error de estimación para la densidad en la celda 2.

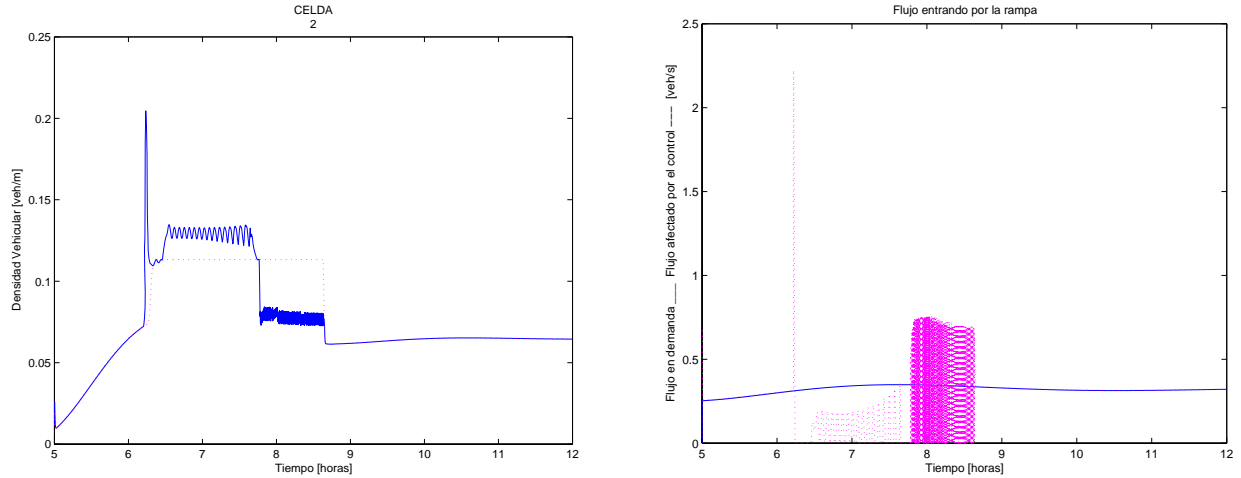
Figura 4.16: ALINEA y estimador. Tráfico libre

Los resultados de un segundo esquema de estimación/control se muestran en la Figura 4.17. Este caso presenta una mayor complejidad al tratar con valores de densidad menores y mayores a la crítica ( $k_o =$

<sup>10</sup>De hecho,  $G_L = [-0.00003616075112 \quad -0.00021161767999 \quad 0.00120840239224 \quad 0.00248213299030]^T$



$0.0789 \frac{veh}{m}$ ), es decir, densidades de tránsito libre y de tránsito congestionado respectivamente.



(a) Seguimiento de perfil de densidad. La densidad nominal se indica por la línea magenta punteada. La línea continua azul es el resultado de la simulación.

(b) Flujos en la rampa de entrada a la celda 2. El flujo en demanda se indica en azul continuo, mientras que el flujo que entra a la celda se indica por la línea magenta punteada.

Figura 4.17: Combinación de esquemas de control (“backstepping”), observación de densidad vehicular e identificación de velocidades de onda

La Figura 4.17(a) corresponde a la densidad de la celda 2. La línea continua color azul corresponde al comportamiento en simulación de la densidad según es afectada en dicha celda por controles tipo “backstepping” como (4.65) y (4.78), mientras la línea magenta punteada representa al perfil de flujo deseado. La diferencia en este caso es que las velocidades de onda de tráfico  $v$  y  $w$  no se consideran fijas, sino que son estimadas a través de identificadores como (3.43) y (3.47), mostrados en el Capítulo 3.

Puede verse que el comportamiento de valores de tránsito congestionado es menos suave que el correspondiente a los valores de tránsito en flujo libre. Resulta más difícil calibrar las ganancias de los observadores e identificadores para esta clase de valores, obteniéndose las oscilaciones mostradas. La Figura 4.17(b) muestra el comportamiento del flujo controlado en la rampa de entrada a la celda 2, apreciándose oscilaciones similares en aquellas partes en que se tiene un régimen congestionado.

Estos esquemas utilizan los diseños realizados para regímenes de tránsito libre y de tránsito congestionado. Para conmutar entre ambos tipos de flujo, se considera que existe por lo menos una medición de densidad en la celda 2. Si  $k_2 < k_o$ , entonces los esquemas de estimación de densidad y velocidad de onda, así como de control de flujo vehicular, diseñados para valores de flujo libre, se ponen en acción. Si  $k_2 \geq k_o$ , entonces los esquemas para valores congestionados son los que entran en función. En el caso específico de las velocidades de onda se debe hacer notar que mientras se estiman los valores correspondientes a la situación de tránsito actual, libre o congestionado, la situación complementaria mantiene los últimos valores calculados, similarmente a lo planteado en la Sección 3.2. Estos esquemas de identificación de velocidad de onda no usaron los sistemas de inferencias borrosas mostrados en la Subsección 3.3.7.

Aunque es posible mejorar sintonías, o establecer formas más suaves de transición entre valores de tránsito libre y congestionado, se puede apreciar la factibilidad de estos diseños en una aplicación real.

# Capítulo 5

## Conclusiones

Las proyecciones de movilidad en vías de circulación importantes señalan un incremento en el número de vehículos para los próximos años, con múltiples consecuencias, entre ellas la disminución en la eficiencia del servicio de dichas vías por el aumento significativo en la densidad vehicular y las limitantes en construcción o ampliación de la infraestructura e incremento en los tiempos de viaje para cada usuario. Esto implica mayores lapsos para transportarse en forma cotidiana, con efectos en la salud como tensión nerviosa, cansancio o fatiga que disminuyen los reflejos y la atención, que inducen una mayor probabilidad de incidentes de tránsito, que pueden ser leves o fatales, y que a su vez provocan mayores retrasos en las vías de transporte.

Los congestionamientos se han vuelto recurrentes, es decir, se registran en forma cotidiana y en horarios muy señalados y cuyos intervalos se van ampliando año con año. Una implicación alarmante es que el creciente número de autos en circulación significa un mayor número de emisiones contaminantes, las cuales también se ven incrementadas dado el mayor tiempo que un vehículo se ve forzado a permanecer en una vía congestionada. Todo esto trae a su vez daños a la salud de la población en general, a lo cual puede añadirse el deterioro social causado en una zona o región en la cual se deben llevar a cabo obras de rehabilitación o un cambio en su urbanidad al trazar nuevas y más grandes vías de tránsito.

En distintos lugares del mundo se ha llegado a la conclusión de que se requiere de soluciones múltiples ante un problema que desencadena a otros como es el caso del congestionamiento vehicular en los grandes centros de población. Una de esas soluciones se encuentra en las herramientas de la Teoría de Control.

La comprensión del tránsito de vehículos a través de una vía sin más restricciones que las impuestos por el tránsito mismo es posible de abordar desde muy distintos enfoques. En esta tesis se ha utilizado el Modelo de Transmisión por Celdas [9, 10] no sólo para representar distintos fenómenos del tráfico de vehículos, sino que también es la base para llevar a cabo el diseño de los distintos esquemas propuestos en este trabajo, pues representa un modelo muy simple pero suficientemente aproximado al comportamiento real de tráfico.

La estimación de las diferentes variables de interés puede ser útil para llevar a cabo un monitoreo de la carretera, al cual se le pueden dar diferentes usos dependiendo de la forma en que esos datos sean recabados.

En este trabajo se proponen algunos esquemas de estimación de distintas variables con el fin de ser usadas en el control del tránsito por rampas de acceso a vías de gran flujo. Parte de dichas técnicas de estimación la constituye la identificación de parámetros, usadas aquí para la estimación de los valores de velocidad de frente de onda y de onda de retroceso, valores que pueden ser útiles para la calibración y ajuste del modelo utilizado y de los esquemas de control que pueden llegar a utilizarlos.

La observación de variables de estado por su parte puede ser usada directamente para inyectar estos valores en esquemas de control en tiempo real. Esto se vuelve de gran importancia cuando la medición de una de estas variables no se encuentra disponible o se requiere de su comparación con el valor obtenido de su medición. Se expone en este trabajo un esquema de estimación de densidad y de velocidad de onda, el cual se acompaña de su respectivo análisis de estabilidad. Las simulaciones muestran que además se logra una convergencia hacia los valores reales de dichas variables en tiempos muy cortos.

La idea de restringir el paso hacia una carretera o autopista, tomando en cuenta las condiciones presentes en la misma, tiene justificación en el hecho de que a menor congestión en la vía sus usuarios podrán realizar viajes más rápidos y por lo tanto llegar a sus destinos en tiempos menores, por lo que la espera por incorporarse al flujo principal queda compensada.

Existen varias propuestas de control para rampas de acceso, muchas de ellas en operación en diferentes puntos de carreteras en el mundo. ALINEA, como se conoce a uno de estos controles, es de amplia difusión en Europa. Se trata de un control tipo PI el cual puede regular ocupancia o densidad, llevar a cabo seguimiento de perfiles de flujo suaves y atenuar perturbaciones tipo escalón.

Sin embargo, ALINEA no es capaz de obtener resultados satisfactorios de control ante entradas de mayor complejidad, como ha quedado demostrado en esta tesis. A través de un rediseño de Lyapunov se propone un término que, añadido a ALINEA, resuelve el inconveniente. Dicho término se presenta en dos formas, una diseñada para funcionar con valores de tráfico libre y la otra para trabajar con valores de tráfico congestionado.

Una alternativa al diseño anterior es un término de flujo, cuyos valores se obtienen de un observador diseñado para obtener una señal que da información sobre cualquier perturbación que acompañe al flujo principal del sistema.

Se incluye además un control por “backstepping”, el cual tiene como una de sus características que no usa a ALINEA como complemento. Posee además la ventaja de que todos sus parámetros son conocidos y que no posee constantes que deban ser sintonizadas, como es el caso de ALINEA. Se incluyen versiones de este controlador para manejar perturbaciones que se encuentren acotadas, por lo que puede ser considerado como una alternativa a ALINEA, aunque requiere del conocimiento de la densidad de porciones adyacentes a la localidad donde debe llevarse a cabo el control.

Los tres esquemas de control que se incluyen son estables para las condiciones especificadas en sus respectivos diseños. Los tres son capaces de llevar el valor de densidad al punto deseado o dar seguimiento al perfil requerido. No se ha llevado a cabo un análisis del desempeño que pudiera mostrar comparaciones entre estos esquemas de control, ya que para ello se necesita el cálculo de índices tales como tiempos de viaje, velocidades promedio entre puntos o formación de colas. Aunque se desarrolló el algoritmo para realizar el cálculo del último de los índices mencionados, no se puede llevar a cabo una comparación tal, ya que las simulaciones no se llevaron a cabo bajo condiciones normalizadas entre cada uno de los esquemas mostrados.

Finalmente, se incluye la combinación de un esquema de estimación con uno de control, para ilustrar el potencial de estos esquemas en una aplicación real, en la que sólo habría sensores de flujo para estimar densidad cuyos valores fueran usados para el control de dicha variable en una zona local de una carretera real.

Como se mostró en los Capítulos 3 y 4, es posible continuar desarrollando nuevos esquemas de estimación y de control o modificar los ya existentes para mejorar su desempeño. Las herramientas clásicas de control permiten al diseñador una gran variedad de formas de aportar nuevos trabajos y lo mismo debe decirse de otras herramientas que han venido a incorporarse más recientemente, muchas de ellas originadas en otros campos del conocimiento.

Específicamente se puede hablar de tomar en cuenta las filas que se forman en las rampas, lo cual crea una nueva restricción, incorporada a la forma de plantear problemas como los que aquí se han visto. Este tema es importante, dado que dichas filas pueden alcanzar frecuentemente longitudes que superen la capacidad de la rampa de acceso e invadir vías secundarias, con lo cual el problema del congestionamiento se estaría trasladando a otros sitios. Proponer esquemas donde se tomen en cuenta estas restricciones es una extensión valiosa y necesaria a este trabajo.

También se puede hablar de planteamientos que tengan que ver con el uso de otros modelos de tráfico, alternos al CTM, con lo cual los esquemas aquí presentados, junto con otros que pueden generarse, tomarían formas algo distintas aún cuando sus principios fueran los mismos. De hecho, el caso del controlador ALINEA ha sido un buen ejemplo de estas afirmación. Dado que las variables a controlar son independientes de la forma en que se les modele, la diferencia significativa estaría en la sencillez con la que se pueden llegar a expresar estos esquemas tomando como base otros modelos.

Llevar a la práctica estos esquemas, a través de sistemas de medición, cómputo, comunicaciones y dispositivos actuadores constituye un tema que por sí mismo implica esfuerzos y recursos distintos a los que se han empleado en este trabajo, pero en los cuales se tiene un importante potencial de resolver un problema muy actual. Trabajos como el presente constituyen una base importante para lograr este objetivo.

## Apéndice A

# Situación Actual del Tráfico Vehicular en la Zona Metropolitana del Valle de México

La Zona Metropolitana del Valle de México (ZMVM) es una región geográfica<sup>1</sup> que comprende las 16 delegaciones del Distrito Federal, los 34 municipios conurbados del Estado de México<sup>2</sup>, 24 municipios adicionales del Estado de México<sup>3</sup> tomados en cuenta para fines de planeación metropolitana y regional, y el municipio de Tizayuca del Estado de Hidalgo [13].

La delimitación de la ZMVM abarca más de una entidad política ya que toma en cuenta no sólo características geográficas, políticas o económicas, sino además la interrelación entre variables demográficas, urbanas y de comunicación muy estrechas entre la ciudad de México y su periferia.

Según datos del año 2005 [23], la ZMVM contaba con más de 19.2 millones de habitantes en una superficie de 741 000 hectáreas, es decir, una densidad de población de aproximadamente 2 500 habitantes por kilómetro cuadrado, con un crecimiento anual en sus diferentes delegaciones o municipios de entre 0.4 % y 2.2 %.

Es previsible la necesidad de transporte que estas cifras arrojan. Según el Inventario de Emisiones para la ZMVM del año 2004 [59], existen poco más de 3 millones de automóviles destinados solamente para el

---

<sup>1</sup>El Programa de Ordenación de la Zona Metropolitana del Valle de México (POZMVM) hace mención de la Región de Conurbación del Centro del País (RCCP), que incluye no sólo al Distrito Federal y al Estado de México, sino también a la totalidad de Hidalgo, Tlaxcala, Puebla y Morelos, y constituye el ámbito regional inmediato de la Zona Metropolitana del Valle de México (ZMVM), el cual se define por la intensa relación de ésta con las zonas metropolitanas de la corona regional: Toluca, Cuernavaca-Cuautla, Puebla-Tlaxcala y Pachuca.

<sup>2</sup>Acolman, Atenco, Atizapán de Zaragoza, Coacalco de Berriozábal, Cuautitlán, Cuautitlán Izcalli, Chalco, Chiautla, Chicolapan, Chiconcuac, Chimalhuacán, Ecatepec, Huixquilucan, Ixtapaluca, Jaltenco, Melchor Ocampo, Naucalpan de Juárez, Nextlalpan, Nezahualcóyotl Nicolás Romero, Papalotla, La Paz, Tecámac, Teoloyucán, Teotihuacán, Tepetlaoxtoc, Tepozotlán, Texcoco, Tezoyuca, Tlalnepantla de Baz, Tultepec, Tultitlán, Valle de Chalco Solidaridad, y Zumpango.

<sup>3</sup>Amecameca, Apaxco, Atlautla, Axapusco, Ayapango, Cocotitlán, Coyotepec, Ecatzingo, Huehuetoca, Hueypoxtla, Isidro Fabela, Jilotzingo, Juchitepec, Nopaltepec, Otumba, Ozumba, San Martín de la Pirámides, Temamatla, Temascalapa, Tenango del Aire, Tepetlaxpa, Tequixquiac, Tlalmanalco y Villa del Carbón.

transporte de personas, cuyos tipos y usos quedan resumidos en la Tabla A.1.

Tipo de Vehículo	Vehículo para el transporte de personas		Porcentaje de viajes-persona/día
	Número	[ %]	[ %]
Autos particulares	2 967 893	93.6	19.9
Taxis	118 664	3.7	4.4
Combis	19 485	0.6	58.6
Microbuses	33 051	1.0	
Autobuses	32 565	1.0	1.9
<b>Total</b>	<b>3 171 628</b>	<b>100.0</b>	<b>84.8**</b>
**El metro, tren ligero y trolebuses representan el 15.2 % faltante			

Tabla A.1: Vehículos destinados al transporte de pasajeros y viajes-persona/día

Como se señala en la Introducción de esta tesis, el automóvil ha sido un invento que ha influido marcadamente en gran cantidad de aspectos humanos, al incrementar la eficiencia y comodidad en la transportación de bienes y personas a mayores distancias y en menores tiempos. Estas características han expandido y diversificado las actividades humanas, las que a su vez demandan el crecimiento de las vialidades y del transporte [25].

El resultado de este proceso es la densidad incrementada de vehículos en las vías de tránsito, que han sido rebasadas en su capacidad. El Tabla A.2 muestra, sólo para el Distrito Federal, los incrementos en el número y tipo de automóviles en tres diferentes años de contabilización. Es claro que el mayor número es para los autos particulares, así como los mayores aumentos, lo cual se explica en buena parte por una creciente facilidad de adquisición debido a planes de financiamiento más atractivos, la cual se ve reforzada por la noción cultural que relaciona la posesión de un auto con el desarrollo individual [36].

Tal número de vehículos reclama un gran número de vías de circulación, las cuales deben ocupar porciones importantes de terreno que deben desviarse de otros usos. Sin embargo, las necesidades urbanas en la ZMVM han llegado a tal grado de competencia que es difícil la construcción de nuevas vías de circulación automotriz. En 1998, sólo en el Distrito Federal, la superficie total de la vías primarias era de 17 millones 345 mil metros cuadrados y en 2005 ligeramente sobrepasó los 18 millones de metros cuadrados [1], un incremento ínfimo comparado con el del número de vehículos registrados entre esos mismos años, implicando una mayor densidad y por lo tanto competencia por espacio en esas vías para los conductores.

Por otra parte, la ineficiencia e incomodidad en el servicio del transporte público, particularmente el concesionado, es un aliciente más para que los individuos deseen adquirir un auto propio. Sin embargo, esto no hace más que reforzar el círculo vicioso que origina los congestionamientos, pues al desalentarse el uso del transporte colectivo y propiciar el particular se añade un componente más a la elevación de la densidad vehicular, lo que termina afectando a todos los usuarios por igual.

En esta forma se ha creado la paradoja del vehículo automotor que debiendo acortar tiempos en los

Año	2003	2004	2005
<b>TOTAL PADRÓN VEHICULAR</b>	<b>2 180 065</b>	<b>2 473 795</b>	<b>2 804 275</b>
<b>Automóviles particulares</b>	<b>1 987 753</b>	<b>2 278 412</b>	<b>2 592 621</b>
<b>Vehículos de transporte público colectivo</b>	<b>24 705</b>	<b>27 175</b>	<b>29 917</b>
Micro y autobuses concesionados	23 317	25 862	28 532
Autobuses GDF/RTP	1 388	1 313	1 300
Autobuses articulados GDF/Metrobús	-	-	85
<b>Taxis (transporte público individual)</b>	<b>105 955</b>	<b>106 121</b>	<b>106 763</b>
Libre	95 962	96 128	96 766
Sitio	9 993	9 993	9 997
<b>Vehículos de carga</b>	<b>61 652</b>	<b>62 087</b>	<b>74 974</b>
Mercantil	40 616	41 022	50 256
General	21 036	21 065	24 718
Fuente: GDF Secretaría de Transportes y Vialidad. Dirección de Registro Público de Transporte			

Tabla A.2: Padrón vehicular del Distrito Federal. Cifras a diciembre de cada año

viajes que en él se realizan es el principal causante de demoras. La alta saturación vehicular se extiende por periodos que en ciertas vialidades cubren 15 horas del día, con una velocidad promedio inferior a  $24 \text{ km/hr}$  [36]. El Tabla A muestra los resultados de una encuesta realizada en cuatro delegaciones del sur del Distrito Federal, realizada a viajeros a quienes se les interrogó sobre el tiempo que deben invertir para realizar viajes diarios a la escuela o trabajo. Puede verse que menos de un 10% de los encuestados logra realizar su trayecto en menos de 30 minutos, mientras que poco más del 40% ocupa más de 2 horas [1].

Una implicación directa no sólo de la densidad sino de los congestionamientos recurrentes es el gasto de energía en los vehículos. No solamente el mayor número de vehículos hoy en día es responsable de que el sector transporte sea el que más energía consume dentro de la ZMVM (Tabla A.4), sino también el que su tiempo promedio de operación se incremente por los embotellamientos, que aumentan inútilmente el consumo de combustibles [59].

El gasto energético implica a su vez la emisión de sustancias que ponen en peligro la salud y el equilibrio ecológico, tanto local como globalmente. El Tabla A.5 muestra las emisiones contaminantes causadas por las fuentes móviles en la ZMVM, por contaminante y tipo de vehículo en el año 2004. Como recurso comparativo, el Tabla A.6 presenta la contribución porcentual de esos mismos campos. Aunque existen diferencias significativas en los tipos de emisiones para algunos tipos de vehículos, se puede apreciar que los autos particulares son la principal fuente de varios tipos de emisiones, lo cual se explica debido, una vez más, a que son el tipo más numeroso de vehículo.

Los efectos directos de estas emisiones contaminantes sobre la salud van desde leves irritaciones en garganta y ojos, hasta la agudización de cuadros respiratorios severos. Si a esto se le aumenta otro tipo de efectos, como la tensión nerviosa que genera la conducción de un automóvil dentro de un congestionamiento durante periodos más o menos prolongados, la suma de factores que degeneran el cuadro general de salud se ve

Tiempo de viaje y espera [Minutos]	Personas [%]
0	0.07
1 a 30	9.05
31 a 60	19.61
61 a 90	16.73
91 a 120	13.31
121 a 150	13.30
151 a 180	9.82
181 a 210	6.53
211 a 240	5.31
más de 240	6.27
Total	100
Fuente: Schteingart, M, Ibarra, V, Encuesta de origen y destino en la zona sur de la Ciudad de México, 2004, Publicado en El Reto del Transporte en la Ciudad de México. Varios Autores. EDAMEX, 2006	

Tabla A.3: Tiempo de traslado de las personas que viajan diariamente. Estudio de cuatro delegaciones del sur del Distrito Federal

atacada en forma múltiple. Por ejemplo, algunos estudios señalan que variaciones mínimas en el porcentaje de oxígeno presente en el ambiente pueden afectar directamente el desempeño de un conductor [65], en especial cuando se encuentra sometido a largos periodos de conducción, situación que se refleja en estados proporcionales de distracción, somnolencia y lentitud en respuestas reflejas [78, 55].

Como puede apreciarse del resumen presentado en este apéndice, la problemática del transporte tiene tanto factores como consecuencias muy variadas, interrelacionadas estrechamente, por lo que es fácil darse cuenta que su solución demanda la integración de diferentes disciplinas, fuentes de información y financiamiento, de tal manera que las múltiples soluciones que pueden darse sean capaces de complementarse entre sí.

La Teoría de Control puede proporcionar no sólo herramientas para la recolección y procesamiento de información, sino también auxiliar en el diseño de dispositivos encaminados a la solución de las situaciones que actualmente se viven en las distintas vías de rodamiento. Aunque ya existen algunas implementaciones de este tipo (El centro Computarizado de Control Vial es un ejemplo) es posible darse cuenta de que es posible extender e implantar muchas otras herramientas de monitoreo y control muy útiles y a un precio relativamente bajo en puntos de la ZMVM en los que no solamente son necesarias, sino que tienen ventajas visibles sobre otro tipo de soluciones.



Año	Consumo total [Petajoules]	Consumo [%]			
		Transporte	Industria	Residencial	Servicios
1990	502	50	34	14	2
1991	492	50	33	14	2
1992	483	52	29	17	2
1993	529	51	33	15	2
1994	561	48	35	15	2
1995	545	49	34	16	2
1996	545	48	35	15	3
1997	531	51	32	14	2
1998	546	50	34	13	3
1999	550	49	36	13	3
2000	563	51	35	12	3
2001	555	51	35	11	3
2002	552	53	36	9	3
2003	547	52	36	10	3
2004	543	54	34	10	3
<b>Promedio</b>	<b>536</b>	<b>51</b>	<b>34</b>	<b>13</b>	<b>3</b>

Fuente: Tomado de [59], que a su vez la señala como elaborado con datos de PEMEX Refinación, Gas y Petroquímica y SENER

Tabla A.4: Consumo Energético histórico de la ZMVM, 1990-2004

Tipo de Vehículo	Emisiones [ton/año]								
	PM <sub>10</sub>	PM <sub>2.5</sub>	SO <sub>2</sub>	CO	NO <sub>x</sub>	COT	CH <sub>4</sub>	COV	NH <sub>3</sub>
Autos particulares	860	480	1 719	890 602	57 456	92 689	3 931	85 849	2 648
Taxis	144	80	312	118 709	11 062	14 309	606	13 252	483
Combis	24	14	44	69 194	3 208	6 687	283	6 193	76
Microbuses	42	24	123	151 556	10 278	18 767	1 461	17 456	171
Pick up	63	36	149	106 338	8 572	10 825	515	10 012	169
Vehículos ≤ 3 ton	283	234	215	109 111	10 695	11 908	478	11 084	117
Tractocamiones	2 315	2 014	284	31 945	29 094	11 575	494	11 069	30
Autobuses	691	600	261	16 015	10 751	4 741	204	4 530	14
Vehículos > 3 ton	270	223	152	186 038	5 798	12 989	1 030	11 715	45
Motocicletas	76	43	62	98 399	1 057	13 646	814	12 739	22
<b>Total</b>	<b>4 768</b>	<b>3 748</b>	<b>3 321</b>	<b>1 777 907</b>	<b>147 971</b>	<b>198 136</b>	<b>9 816</b>	<b>183 899</b>	<b>3 775</b>

Fuente: Inventario de Emisiones de la ZMVM. Secretaría del Medio Ambiente del Gobierno del Distrito Federal

Tabla A.5: Emisiones de las fuentes móviles en la ZMVM, 2004

Tipo de Vehículo	Emisiones [%]								
	PM <sub>10</sub>	PM <sub>2.5</sub>	SO <sub>2</sub>	CO	NO <sub>x</sub>	COT	CH <sub>4</sub>	COV	NH <sub>3</sub>
Autos particulares	18.0	13.0	51.6	50.1	38.8	46.7	40.0	46.7	70.1
Taxis	3.0	2.1	9.4	6.7	7.5	7.2	6.2	7.2	12.8
Combis	0.5	0.4	1.3	3.9	2.2	3.4	2.9	3.4	2.0
Microbuses	0.9	0.6	3.7	8.5	6.9	9.5	14.9	9.5	4.5
Pick up	1.3	1.0	4.5	6.0	5.8	5.5	5.2	5.4	4.5
Vehículos ≤ 3 ton	5.9	6.2	6.5	6.1	7.2	6.0	4.9	6.0	3.1
Tractocamiones	48.6	53.7	8.6	1.8	19.7	5.8	5.0	6.0	0.8
Autobuses	14.5	16.0	7.9	0.9	7.3	2.4	2.1	2.5	0.4
Vehículos > 3 ton	5.7	5.9	4.6	10.5	3.9	6.6	10.5	6.4	1.2
Motocicletas	1.6	1.1	1.9	5.5	0.7	6.9	8.3	6.9	0.6
<b>Total</b>	<b>100</b>	<b>100</b>	<b>100</b>	<b>100</b>	<b>100</b>	<b>100</b>	<b>100</b>	<b>100</b>	<b>100</b>

Fuente: Inventario de Emisiones de la ZMVM. Secretaría del Medio Ambiente del Gobierno del Distrito Federal

Tabla A.6: Contribución porcentual de las fuentes móviles en la ZMVM, 2004

# Referencias

- [1] Anuario 2005 del transporte y la vialidad. Technical report, Secretaría de Transportes y Vialidad del Distrito Federal, <http://www.setravi.df.gob.mx/vialidades/anuario2005/>, Mayo de 2006.
- [2] Luis Alvarez and Roberto Horowitz. Traffic flow control in automated highway systems. Technical report, California PATH Research Program, november 1997.
- [3] Luis Alvarez, Laura Muñoz, Xiaotian Sun, and Roberto Horowitz. Adaptive observer for traffic density estimation. In *Proceedings of the 2004 American Control Conference*, pages 2705–2710, Boston, Massachusetts, June 2004.
- [4] Tom Bellemans, Bart De Schutter, and Bart De Moor. Model predictive control for ramp metering of motorway traffic: A case study. *Control Engineering Practice*, 14(7):757–767, july 2006. Elsevier Science Ltd.
- [5] Transportation Research Board. *Highway Capacity Manual*. National Research Council, Washington, D.C., third edition, 1994. Special Report 209.
- [6] Rafael Cal y Mayor Reyes Spíndola and Jaime Cárdenas Grisales. *Ingeniería de Tránsito*. Alfaomega, 7a edition, Noviembre 1995.
- [7] Robert Cervero. *The Transit Metropolis: A Global Inquiry*. Island Press, 1998.
- [8] R Chen and J S Liu. Mixture Kalman filters. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B - Statistical Methodology*, 62(3):493–508, 2000.
- [9] Carlos F. Daganzo. The cell transmission model: A dynamic representation of highway traffic consistent with the hydrodynamic theory. *Transportation Research B*, 28B(4):269–287, 1994. Elsevier Science Ltd.
- [10] Carlos F. Daganzo. The cell transmission model: Part II, network traffic. *Transportation Research B*, 29B(2):79–93, 1995. Elsevier Science Ltd.
- [11] Carlos F. Daganzo. Requiem for second-order fluid approximations of traffic flow. *Transportation Research B*, 29B(4):277–286, 1995. Elsevier Science Ltd.
- [12] Carlos F. Daganzo. Traffic jams from nowhere: Have you ever driven out of a traffic jam only to find that nothing was apparently causing it? <http://www.ce.berkeley.edu/trans/Daganzo/index.htm>, Last Update: August 11, 1997.

- [13] Comisión Metropolitana de Asentamientos Humanos (COMETAH). *Programa de Ordenación de la Zona Metropolitana del Valle de México*. Secretaría de Desarrollo Social, Gobierno del Distrito Federal, Gobierno del Estado de México, México, 13 de marzo 1998. Publicado en el Diario Oficial de la Federación el 1 de marzo de 1999.
- [14] Donald R. Drew. *Traffic Flow Theory and Control*. McGraw-Hill Series in Transportation, 1968.
- [15] Caralampo Focas. *The Four World Cities Transport Study*. London Research Centre, 1998.
- [16] L. El Ghaoui, R. Nikoukhan, and F. Delebecque. LMITOOL a package for LMI optimization. In *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3096–3101, 1995.
- [17] Brian Gloyer, Hamid K. Aghajan, Kai-Yeung Siu, and Thomas Kailath. Vehicle detection and tracking for freeway traffic monitoring. In *Conference Record of the Twenty-Eighth Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, volume 2, pages 970–974, 31 Oct.–2 Nov. 1994.
- [18] Gabriel Gomes, Luis Álvarez Icaza, and Roberto Horowitz. Traffic flow patterns in AHS networks: System and user optimals. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 1498–1502, Chicago, Illinois, June 2000.
- [19] Frank Haight. *Mathematical Theories of Traffic Flow*. Academic Press, 1963.
- [20] Serge Hoogendoorn, Sascha Hoogendoorn-Lanser, and Henk Schuurman. Fuzzy perspectives in traffic engineering. *Workshop on Intelligent Traffic Management Models*, 1999. [On line].
- [21] Andrew Ilanchinski. *Cellular automata. A discrete universe*. World Scientific Publishing Co., 2001.
- [22] Instituto Nacional de Estadística Geografía e Informática. *Anuario de Estadísticas por Entidad Federativa*, Capítulo 15. Transportes. INEGI, México, 2005.
- [23] Instituto Nacional de Estadística Geografía e Informática. Sistemas Nacionales Estadístico y de Información Geográfica. Censo de población y vivienda. *Consulta interactiva de Datos. [En línea]*, 2005. [http://www.inegi.gob.mx/lib/olap/general\\_ver3/MDXQueryDatos.asp?#Regreso&c=7247](http://www.inegi.gob.mx/lib/olap/general_ver3/MDXQueryDatos.asp?#Regreso&c=7247).
- [24] Leif Isaksen and Harold J. Payne. Freeway traffic surveillance and control. In *Proceedings of the Fourth International Conference on Machine Learning and Cybernetics*, volume 61, pages 526–536, May 1973.
- [25] Víctor Manuel Islas Rivera. *Llegando Tarde al Compromiso: la Crisis del Transporte en la Ciudad de México*. El Colegio de México, Centro de Estudios Demográficos y de Desarrollo Urbano, Programa sobre Ciencia, Tecnología y Desarrollo, 2000.
- [26] Jing Jin, Zhi-Jun Qiu, and Bin Ran. Intelligent route-based speed estimation using timing advance. In *Proceedings of the IEEE Intelligence Transportation System Conference 2006*, pages 194–197, Toronto, Canada, September 17-20 2006.

- [27] Hiroshi Kazama, Masayoshi Nakajima, Sei Takahashi, and Hideo Nakamura. Some strategies for highway congestion mitigation in desaturated condition. In *Intelligent Transportation Systems*, volume 2, pages 1289–1294, Guangzhou, China, 12-15 October 2003.
- [28] H. K. Khalil. *Nonlinear systems*. Prentice-Hall, third edition, 2002.
- [29] Taewan Kim and H. Michael Zhang. An empirical study on gap time and its relation to the fundamental diagram of traffic flow. In *7th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems*, pages 94–99, Washington, D.C., 2004.
- [30] Rashid R. Kohan and Scott A. Bortoff. An observer for highway traffic systems. In *Proceedings of the 37th Conference on Decision and Control*, pages 1012–1017, December 1998.
- [31] María E. Lárraga, Jesús Antonio del Río, and Luis Alvarez-Icaza. Cellular automata for one-lane traffic flow modeling. *Transportation Research C*, 13:63–74, 2005.
- [32] M. J. Lighthill and G. B. Whitham. On kinematic waves. I. Flood movement in long rivers. *Proc. Royal Soc. A*, 229:281–316, 1955.
- [33] M. J. Lighthill and G. B. Whitham. On kinematic waves. II. A theory of traffic flow on long crowded roads. *Proc. Royal Soc. A*, 229:317–345, 1955.
- [34] Tim Lomax and David Schrank. 2005 annual urban mobility report. *Texas Transportation Institute*, [on-line] <http://mobility.tamu.edu/ums/>.
- [35] Panta Lučić and Dušan Teodorović. Transportation modeling: An artificial life approach. In *14th IEEE International Conference on Tools with Artificial Intelligence, ICTAI 2002*, pages 216–223, 4-6 November 2002.
- [36] Centro Mario Molina para Estudios Estratégicos de Energía y Medio Ambiente, Centro Mexicano de Derecho Ambiental, Centro de Transporte Sustentable de México, Instituto de Políticas para el Desarrollo del Transporte, and Presencia Ciudadana Mexicana. Movilidad y calidad de vida: 6 estrategias de acción para la Zona Metropolitana del Valle de México. Technical report, Noviembre 2006.
- [37] John H. Mathews and Kurtis D. Fink. *Métodos Numéricos con MATLAB*. Prentice-Hall, third edition, 2000.
- [38] Albert Messmer and Markos Papageorgiou. METANET: A microscopic simulation program for motorway networks. *Traffic Engineering and Control*, 31(9):466–470, 1990.
- [39] Luis Montoro González, Enrique J. Carbonell Vayá, Jaime Sanmartín Arce, y Francisco M. Tortosa Gil. *Seguridad Vial: Del Factor Humano a las Nuevas Tecnologías*. Síntesis, 1995.
- [40] Laura Muñoz, Xiaotian Sun, and Roberto Horowitz. Highway traffic state estimation using improved Kalman filter for effective ramp metering control. In *Proceedings of the Conference on Decision and Control*, volume 6, pages 6333–6338, 2003.

- [41] Laura Muñoz, Xiaotian Sun, Roberto Horowitz, and Luis Alvarez. Traffic density estimation with the cell transmission model. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 3750–3755, Denver, Colorado, USA, June 4 - 6 2003.
- [42] Laura Muñoz, Xiaotian Sun, Roberto Horowitz, and Luis Alvarez. Piecewise-linearized cell transmission model and parameter calibration methodology. *Transportation Research Record*, 1965:183–191, 2006.
- [43] Laura Muñoz, Xiaotian Sun, Dengfeng Sun, Gabriel Gomes, and Roberto Horowitz. Methodological calibration of the cell transmission model. In *Proceeding of the 2004 American Control Conference*, page WeM05.4, Boston, Massachusetts, June 30 - July 2 2004.
- [44] Kai Nagel and Michael Schreckenberg. Cellular automaton models for freeway traffic. *Physics*, I(2):2221–2229, 1992.
- [45] Joseph S. Niedbalski and Prashant G. Mehta. Simulation and estimation of traffic dynamics on a graph. In *Proceeding of the 2007 American Control Conference*, pages 5064–5069, New York City, USA, July 11–13 2007.
- [46] Markos Papageorgiou, Jean-Marc Blosseville, and Habib Hadj-Salem. Modelling and real-time control of traffic flow on the southern part of boulevard périphérique in Paris, part I: Modeling. *Transportation research A*, 24A(5):345–359, 1990.
- [47] Markos Papageorgiou, Jean-Marc Blosseville, and Habib Hadj-Salem. Modelling and real-time control of traffic flow on the southern part of boulevard périphérique in Paris, part II: Coordinated on-ramp metering. *Transportation Research A*, 24A(5):361–370, 1990.
- [48] Markos Papageorgiou, Habib Hadj-Salem, and Jean-Marc Blosseville. ALINEA: A local feedback control law for on-ramp metering. *Transportation Research Record*, 1320:58–64, 1991.
- [49] Markos Papageorgiou and Apostolos Kotsialos. Freeway ramp metering: An overview. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 3(4):271–281, December 2002.
- [50] Harold J. Payne. Models of freeway traffic and control. In *Mathematic Models of Public Systems. Simulation Council*, volume 28, pages 51–61, 1971.
- [51] Harold J. Payne and Warren A. Thompson. Allocation of freeway ramp metering volumes to optimize corridor performance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-19(3):177–186, June 1974.
- [52] PEMS. Freeway performance measurement project. <http://pems.eecs.berkeley.edu>, 2003. [On-Line].
- [53] Guido Radelat. *Principios de Ingeniería de Tránsito*. Institute of Transportation Engineers, 2003.
- [54] Paul I. Richards. Shock waves on the highway. *Operation research*, 4:42–51, 1956.
- [55] Joceline Rogé, Thierry Pebayle, and Alain Muzet. Variations of the level of vigilance and of behavioral activities during simulated automobile driving. *Accident Analysis and Prevention*, 33:181–186, 2001.

- [56] Oscar Rosas Jaimes and Luis Alvarez. Traffic density and velocity estimation. *Journal of Nonlinear Dynamics*, 2007.
- [57] Richard W. Rothery. *Traffic Flow Theory*, volume 165, chapter 4. Car Following Models. Transportation Research Board Special Report, 1992.
- [58] Thomas L. Saaty. *Elements of queueing theory*. McGraw-Hill, 1961.
- [59] Jorge Sarmiento Rentería. Inventario de emisiones de la ZMVM. Technical report, Secretaría del Medio Ambiente del Gobierno del Distrito Federal, 2004.
- [60] A. Schadschneider and M. Schreckenberg. Cellular automaton models and traffic flow. *J. Phys.*, A(26):L679–L683, 1993.
- [61] Yosef Sheffi. *Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods*. Prentice Hall, New Jersey, 1985.
- [62] Shiliang Sun, Changshui Zhang, and Guoqiang Yu. A bayesian network approach to traffic flow forecasting. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 7(1):124–132, March 2006.
- [63] Xiaotian Sun, Laura Muñoz, and Roberto Horowitz. Highway traffic state estimation using improved mixture Kalman filters for effective ramp metering control. In *Proceedings of the 42th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 6333–6338, Maui, Hawaii, USA, December 2003.
- [64] Xiaotian Sun, Laura Muñoz, and Roberto Horowitz. Mixture Kalman filter based highway congestion mode and vehicle density estimator and its applications. In *Proceedings of the 2004 American Control Conference*, pages 2098–2103, Boston, Massachusetts, June 2004.
- [65] Eun-Jung Sung, Byung-Chan Min, Seung-Chul Kim, and Chul-Jung Kim. Effects of oxygen concentrations on driver fatigue during simulated driving. *Applied Ergonomics*, 36(1):25–31, January 2005.
- [66] Henk Taale and Frans Middelham. Ten years of ramp-metering in the Netherlands. In *Tenth International Conference on Road Transport Information and Control*, pages 106–110, London, 4-6 April 2000.
- [67] C.J. Taylor, P.C. Young, A. Chotai, and J. Whittaker. Nonminimal state space approach to multivariable ramp metering control of motorway bottlenecks. In *IEE Proceedings on Control Theory and Applications*, volume 145, pages 568–574, November 1998.
- [68] Martin Treiber. Microsimulation of road traffic. <http://vwisb7.vkw.tu-dresden.de/~treiber/MicroApplet/index.html>, 2005. [On Line].
- [69] Martin Treiber and Dirk Helbing. Microsimulations of freeway traffic including control measures. *Automatisierungstechnik*, 49:478–484, 2001.
- [70] Pravin Varaiya. Smart cars on smart roads: Problems of control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(2):195–207, February 1993.

- [71] Pravin Varaiya. What we have learned about highway congestion. *Access*, (27):2–9, fall 2005.
- [72] Pravin Varaiya and Steven Shladover. Sketch of an IVHS systems architecture. Technical report, Institute of Transportation Studies, University of California at Berkeley, October 1990.
- [73] L. C. Q. Vilar and A. M. C. de Souza. Cellular automata models for general traffic conditions on a line. *Physica*, A(211):84–92, 1994.
- [74] Yanlin Weng and Tiejun Wuand. Car-following model of vehicular traffic. In *International Conferences on Info-tech and Info-net, ICII 2001*, volume 4, pages 101 – 106, Beijing, China, 29 Oct–1 Nov 2001.
- [75] Albert W. Whitney. *Man and the Motor Car*. National Conservation Bureau, 1944.
- [76] Martin Wohl and Brian V. Martin. *Traffic System Analysis*. McGraw-Hill Series in Transportation, 1967.
- [77] Stephen Wolfram. *Theory and Applications of Cellular Automata*. World Scientific, 1986.
- [78] M. Yamaguchi and J. Sakakima. Evaluation of driver stress in a motor-vehicle driving simulator using a biochemical marker. *The Journal of International Medical Research*, 35(1):91–100, 2007.
- [79] Xiaoyan Zhang and David F. Jarret. Stability analysis of the classical car-following model. *Transportation Research B*, 31(6):441–462, 1997.
- [80] Dennis G. Zill. *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones*. Grupo Editorial Iberoamérica, segunda edition, 1988.