# Anexo A

### Transformaciones en 3D

Las transformaciones en 3D son operaciones para modificar la posición geométrica de puntos o vértices en el espacio. Un punto en el espacio se representa como una terna de números para obtener su localización en un espacio coordenado. Estos puntos también pueden ser representados como una suma vectorial o una matriz como lo muestran las siguientes ecuaciones:

$$1)\ \bar{v} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

$$2)\ \bar{v} = (x, y, z)$$

$$3)\ \bar{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

La primera expresión es una suma vectorial de 3 componentes donde las letras testadas $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ son los vectores unitarios (1,0,0), (0,1,0) y (0,0,1) en un sistema coordenado rectangular, la segunda es una terna de números y la tercera forma es la representación matricial de dichos vectores de posición. La tercera forma es la que se usará para realizar las operaciones matriciales de transformación geométrica.

Las tres transformaciones más comunes son la de traslación, rotación y escalamiento. La traslación es una suma vectorial del vector de posición del punto mas el vector de traslación, el escalamiento es una multiplicación por 3 factores en cada una de las componentes del vector y la rotación también es una multiplicación de los elementos del vector pero los factores con los que se multiplican son el resultado de aplicar una función trigonométrica a un ángulo de rotación.

Si se quieren hacer múltiples transformaciones a un punto la mejor forma de hacerlo es agregando un valor $h = 1$ al vector y cambiar la traslación a una multiplicación de matrices, estas constituyen las ecuaciones en *coordenadas homogéneas*, y permite convertir en transformación lineal el conjunto de rotaciones y escalamientos mas la traslación.

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \textit{Nuevo vector con } h = 1$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textit{Matriz de traslación}$$

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textit{Matriz de rotación en x}$$

$$R_y = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textit{Matriz de rotación en y}$$

$$R_z = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textit{Matriz de rotación en z}$$

Esto facilita mucho las operaciones al ser solamente multiplicaciones de matrices y si se va a hacer a muchos puntos las mismas transformaciones se puede pre calcular una matriz de transformación y se reduce el número de operaciones. Para aplicar las transformaciones 3D a un polígono se deben tener todas las coordenadas de cada uno de sus vértices para representarlos en una matriz y realizar las operaciones matriciales.

El efecto que producen las transformaciones en 3D es apreciable cuando se habla de múltiples puntos o múltiples vértices como se muestra a continuación

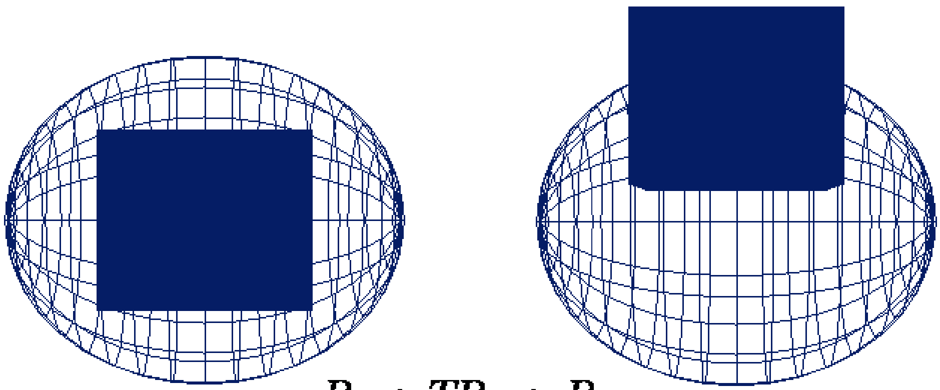
$$P_{4\times m} = \begin{pmatrix} x_0 \cdots x_m \\ y_0 \cdots y_m \\ z_0 \cdots z_m \\ 1 \;\cdots\; 1 \end{pmatrix} \qquad \textit{Matriz de vértices de un polígon}$$

$$T_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \textit{Matriz de traslación}$$

$$P_T = (T_{4\times 4})(P_{4\times m})$$

$$P_T = \begin{pmatrix} x_0 + t_x \cdots x_m + t_x \\ y_0 + t_y \cdots y_m + t_y \\ z_0 + t_z \cdots z_m + t_z \\ 1 \qquad \cdots \qquad 1 \end{pmatrix}$$

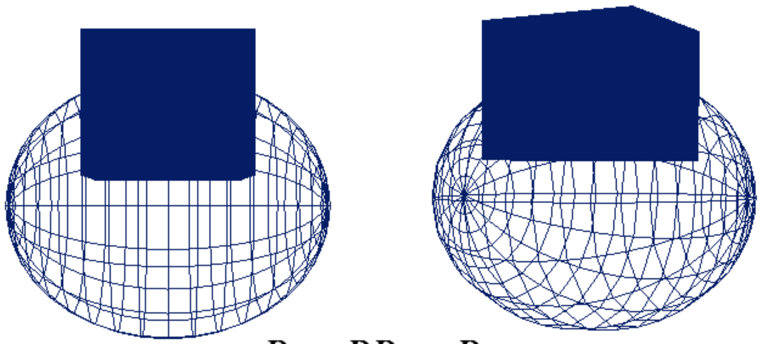
Por ejemplo una traslación de un prisma queda como sigue:



$$P \rightarrow TP \rightarrow P_T$$

**Figura 49: Traslación**

Una rotación se aplica el mismo principio pero con otra matriz al igual que el escalamiento



$$P \rightarrow RP \rightarrow P_R$$

**Figura 1: Rotación**

$$P \rightarrow SP \rightarrow P_S$$

**Figura 50: Escalamiento**

Cabe aclarar que la multiplicación de matrices no es conmutativa (en la mayor parte de los casos) así que el resultado final varía si se hacen las mismas transformaciones en orden diferente

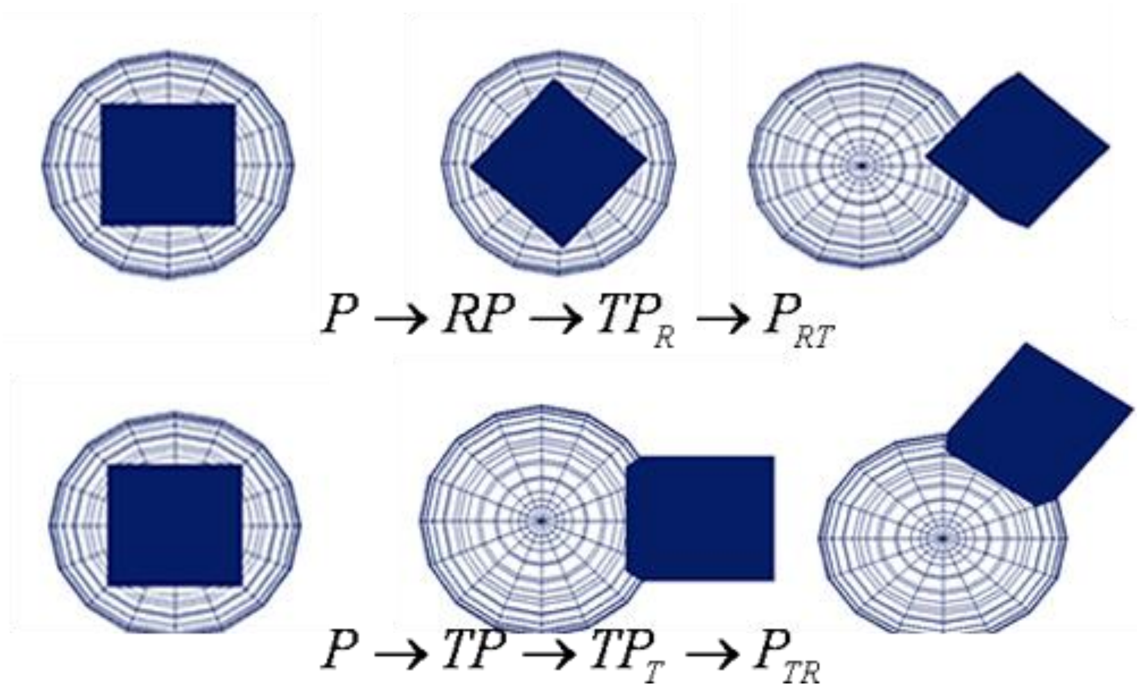



**Figura 51: Tranformaciones acumuladas**