



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

**PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN
INGENIERÍA**

FACULTAD DE INGENIERÍA

**RIESGO Y VOLATILIDAD EN LOS
MERCADOS ACCIONARIOS EMERGENTES:
MEDICIÓN DEL VaR Y CVaR APLICANDO LA
TEORIA DE VALOR EXTREMO**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
DOCTOR EN INGENIERÍA
EN EL CAMPO DE CONOCIMIENTO
DE INGENIERÍA DE SISTEMAS
(INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES)
P R E S E N T A
RAUL DE JESUS GUTIERREZ



**DIRECTOR DE TESIS: DR. EDGAR ORTIZ CALISTO
2008**

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Fuentes Maya Sergio

Secretario: Dr. Ordorica Mellado Manuel

1^{er} Vocal: Dr. Ortiz Calisto Edgar

2^{do} Vocal: Dr. Meza Puesto Jesús Hugo

3^{er} Vocal: Dra. Cabello Rosales Alejandra

1^{er} Suplente: Dr. Valencia Herrera Humberto

2^{do} Suplente: Dr. Salas Harms Héctor

TUTOR DE TESIS:

DR. Ortiz Calisto Edgar

Firma

Agradecimientos

La culminación de este trabajo de investigación no hubiera sido posible sin el apoyo de las siguientes personas e instituciones.

Cuando el Dr. Edgar Ortiz, director de esta tesis, me invito a participar como ponente en un congreso internacional, me di cuenta que la puerta que conduce al conocimiento infinito está abierta para cualquiera. Así que debo reconocer y agradecer sus motivaciones, enseñanzas y acertados consejos durante el desarrollo de esta investigación. Muchas gracias Dr. Edgar Ortiz por su confianza y amistad incondicional.

Expreso mis agradecimientos a todos los miembros de mi jurado, por su paciencia y sus valiosos comentarios que ayudaron a enriquecer este trabajo de investigación. Gracias Dr. Sergio Fuentes Maya, Dr. Manuel Ordorica Mellado, Dr. Jesús Hugo Meza Puesto, Dra. Alejandra Cabello Rosales, Dr. Humberto Valencia Herrera y Dr. Héctor Salas Harms.

Asimismo, deseo expresar mis agradecimientos al Departamento de Investigación de Operaciones, por abrirme las puertas de sus aulas y a todos sus profesores que compartieron su conocimiento conmigo.

Agradezco al CONACYT, por haber auspiciado este trabajo de investigación durante todo su proceso.

Finalmente, agradezco a Dios, por lo grande que ha sido conmigo y por darme la oportunidad de terminar esta tarea importante.

Índice General

Agradecimientos	
Resumen	
Abstract	
Introducción.....	1
Capítulo 1	
La Importancia de la Administración de Riesgos.....	11
1.1 Naturaleza del Riesgo Financiero.....	11
1.2 Sucesos Relevantes Determinantes de la Importancia y la Evolución del Riesgo Financiero.....	17
1.3 La Importancia de la Administración de Riesgos como Estrategia de Inversión.....	23
1.4 Factores Importantes que han Contribuido al Desarrollo de la Cultura de la Administración de Riesgos.....	28
Capítulo 2	
Marco Teórico: Valor en Riesgo y Métodos Convencionales para la Administración del Riesgo Financiero.....	34
2.1 Concepto de Valor en Riesgo y Propiedades.....	34
2.2 Medidas de Valor en Riesgo Convencionales.....	39
2.2.1 Método Delta Normal.....	41
2.2.2 Método Delta-Gamma.....	50
2.2.3 Modelo GARCH.....	55
2.2.4 Modelo de Promedios Móviles Exponencialmente Ponderados.....	64
2.2.5 Modelos de Simulación.....	70
2.2.5.1 Simulación Histórica.....	70
2.2.5.2 Simulación Monte Carlo.....	76
2.3 Valor en Riesgo Condicional.....	81

Capítulo 3

Teoría de Valor Extremo.....	90
3.1 Introducción.....	90
3.2 Naturaleza de los Valores Extremos en los Mercados Financieros.....	92
3.3 Procedimientos Estadísticos para el Análisis de Valores Extremos.....	95
3.3.1 Técnica de Picos sobre un Umbral.....	96
3.3.2 Procedimiento de Bloque Máximo.....	98
3.4 Familia de Distribuciones de Valor Extremo.....	101
3.5 Estimación de los Parámetros de la Distribución de Valor Extremo Generalizada.....	108
3.5.1 Métodos de Estimación y Fundamentos Generales.....	108
3.5.2 Método de Máxima Verosimilitud para Estimar los Parámetros de la Distribución de Valor Extremo Generalizada.....	111
3.6 Pruebas de Bondad de Ajuste.....	120
3.7 Medidas VaR y CVaR Basadas en la Teoría de Valor Extremo.....	121
3.8 Análisis de Confiabilidad del Modelo.....	128

Capítulo 4

Evidencia Empírica para Mercados Accionarios Emergentes de América Latina.....	131
4.1 Análisis de los Datos.....	131
4.2 Estimación Empírica de los Parámetros de la Distribución de Valor Extremo Generalizada.....	139
4.3 Resultados de la Prueba de la Razón de Verosimilitud para la Selección de la Distribución de Rendimientos de las Series Financieras.....	146
4.4 Medidas VaR y CVaR para Portafolios Lineales en los Mercados Accionarios Emergentes de América Latina.....	148
4.5 Resultados del Backtesting.....	156

Capítulo 5

Conclusiones.....	160
Apéndices.....	165
Apéndice A: Demostración de las Propiedades de la Medida de Riesgo Coherente.....	165
Apéndice B: Segundas Derivadas Parciales de las Funciones Logarítmicas de Verosimilitud.....	169
Apéndice C: Subrutina de Estimación de Máxima Verosimilitud de los Parámetros de la Distribución de Valor Extremo Generalizada.....	173
Apéndice D: Índice de Tablas.....	184
Apéndice E: Índice de Gráficas.....	185
Referencias.....	186

Introducción

En la actualidad, el riesgo financiero es uno de los temas que más preocupa a empresas, gobiernos e inversionistas institucionales e individuales a tal grado que su administración se ha convertido en uno de los desafíos y prioridades más importantes debido a que se manifiesta de diversas formas y niveles en los mercados financieros, en particular, en las economías emergentes. La creciente incertidumbre generada en estos mercados ha hecho que las inversiones de portafolio presenten diferentes perfiles de riesgos. Tradicionalmente, las instituciones financieras e inversionistas individuales enfrentan siete tipos de riesgos: riesgo cambiario, riesgo crédito, riesgo de liquidez, riesgo operacional, riesgo legal, riesgo país y riesgo de mercado.¹ Desde que las instituciones financieras e inversionistas han adoptado la administración de riesgos sobre una base cuantitativa, el principal problema que han enfrentado, es la medición del riesgo de mercado o riesgo de pérdidas como consecuencia de movimientos adversos en las tasas de interés, los tipos de cambio, los precios de los títulos de capital y bienes. De ahí que una efectiva administración de riesgos requiere de una adecuada medición de las dimensiones del riesgo que presentan las inversiones de portafolio. En este sentido, la administración de riesgos juega un papel clave en el proceso de la toma de decisiones para la eficiente asignación de capital en mercados financieros altamente volátiles, puesto que su función consiste en identificar, medir y controlar la exposición al riesgo en diversos contextos, proporcionando protección parcial, un mejor desempeño financiero incluyendo mayores utilidades y menores costos a todos sus participantes, lo que además redundará en una mejor reputación y confianza en los mercados e instituciones financieras.

En este contexto, el análisis del riesgo en la industria financiera sobre una base cuantitativa se sustenta originalmente en la teoría moderna del portafolio introducida por Markowitz (1952, 1959). De acuerdo con esta teoría, los inversionistas racionales, a fin de maximizar sus rendimientos y minimizar el riesgo, toman decisiones de inversión al analizar un conjunto infinito de combinaciones posibles de alternativas de portafolios

¹ Para una clasificación más amplia de los diferentes tipos de riesgos que existen. Véase Ortiz (2007).

basados en la media y varianza de sus rendimientos, suponiendo que los mercados son perfectos y los rendimientos siguen una distribución normal multivariada.² Una medida alternativa posterior basada en los resultados de la Teoría Moderna del Portafolio es el Modelo de Fijación de Precios de Activos de Capital (CAPM), conocido también como modelo del factor beta,³ desarrollado en forma independiente por Sharpe (1964) y Lintner (1965), y generalizado por Mossin (1966). Este modelo mide la exposición del activo riesgoso a los movimientos del mercado o magnitud del riesgo sistemático⁴ y propone la formación de portafolios óptimos al combinar un activo libre de riesgo y el portafolio del mercado.

En años recientes, la necesidad de medir el riesgo de mercado surge de la inestabilidad en los mercados financieros, el desarrollo de instrumentos financieros más complejos, los avances en los sistemas de información y computacionales, así como la presión de la regulación sobre los requerimientos de capital que las autoridades exigen a las instituciones financieras para cubrir pérdidas que se derivan de sus posiciones de mercado. En cuanto a la administración de riesgos, una de las herramientas estadísticas más populares que ha recibido gran atención por parte de las autoridades reguladoras y de las instituciones financieras, es la metodología valor en riesgo (VaR, por sus siglas en inglés, Value at Risk). Desde que el Acuerdo de Basilea I propuso el uso de la medida VaR,⁵ no sólo ha mostrado ser una herramienta robusta en la determinación de los requerimientos de capital en riesgo, sino también eficiente en la selección de las preferencias de inversión bajo condiciones normales. El valor en riesgo se define como la máxima pérdida estimada de una posición de mercado o de un portafolio de inversión que puede enfrentar una institución financiera o inversionista durante un horizonte de tiempo específico dado un nivel de confianza. La especificación del periodo de tiempo y el nivel de confianza para la estimación del VaR

² Un mercado de capital se considera perfecto cuando los inversionistas tienen las mismas expectativas homogéneas con respecto de los rendimientos de los activos financieros, las operaciones no generan costos de transacción o pago de impuestos y cuando toda la información disponible se encuentra al alcance de todos los participantes en el mercado sin ningún costo, y se refleja inmediatamente en los precios de los activos financieros.

³ El factor beta mide el grado de correlación entre el rendimiento del activo riesgoso y el rendimiento del mercado.

⁴ Este tipo de riesgo es imposible eliminarlo con los efectos de la diversificación.

⁵ Para más detalles de las modificaciones hechas al Acuerdo de Basilea, véase Basel Committee (1996).

es arbitraria. El intervalo de tiempo apropiado para cuantificar el VaR generalmente depende de la bursátilidad de los instrumentos financieros que componen al portafolio de inversión y de la frecuencia con que se negocian. Para determinar óptimos requerimientos de capital para al menos un horizonte de tiempo de 10 días, el Comité de Basilea sugiere que la estimación del VaR se realice sobre un nivel de confianza del 99%.

Así, la revolución en la administración y medición del riesgo en el sector financiero alentó a las instituciones financieras a desarrollar varios métodos internos para la estimación del VaR, los cuales se clasifican en dos grupos: los métodos paramétricos y no paramétricos o modelos de simulación, técnicas indispensables sugeridas por las autoridades reguladoras para controlar y cuantificar el riesgo de mercado en un contexto internacional. Sin embargo, los periodos de inestabilidades financieras a nivel mundial, como la crisis del Peso Mexicano en 1994, la crisis del Sudeste Asiático de 1997, la moratoria declarada por Rusia en 1998, la devaluación del Real Brasileño a principios de 1999 y la crisis en Argentina en el periodo de 2001-2002, no sólo han generado pérdidas financieras catastróficas en los portafolios de los inversionistas e instituciones financieras y no financieras, sino también han mostrado las limitaciones de las medidas convencionales VaR en el proceso de la cuantificación de los eventos de pérdidas grandes con probabilidad baja de ocurrencia.

En consecuencia, la presencia de movimientos atípicos e inesperados en los mercados financieros reduce la eficiencia del modelo VaR delta-normal, es decir, subestima el riesgo como consecuencia del exceso de curtosis exhibido en las distribuciones de los rendimientos (Duffie y Pan, 1997). Asimismo, los modelos GARCH con innovaciones normales o t-student introducidos por Jorion (1988) y Yang y Brorsen (1995) son insuficientes para capturar los diferentes grados de leptocurtosis⁶ y asimetría asociados a los cambios en los factores de riesgo. En relación a este problema, múltiples estudios empíricos han demostrado que los métodos de simulación

⁶ El efecto de la leptocurtosis significa que la distribución se encuentra muy centrada en la media, pero con colas más gruesas o pesadas y largas como consecuencia de la cantidad de valores atípicos que presentan los rendimientos de las series financieras.

proporcionan estimaciones más confiables del VaR a diferencia de los métodos paramétricos que, si bien ofrecen un mejor ajuste en las regiones donde se encuentra la mayoría de los datos, son muy deficientes para ajustar los rendimientos extremos capturados en las colas de la distribución. Estos eventos raros son de vital importancia para determinar suficientes requerimientos de capital para asegurar la supervivencia de las instituciones financieras y la estabilidad en los sistemas financieros (Hendricks, 1996; Jackson, Maude y Perraudin, 1997; Vlaar, 2000). No obstante, los modelos no paramétricos también pueden proporcionar estimaciones inconsistentes del VaR a causa de supuestos mal especificados como se documenta en McNeil y Frey (2000). La principal debilidad del método de simulación histórico (MSH) es que sobreestima el riesgo como resultado de la naturaleza discreta de los rendimientos, por lo que el cálculo del VaR basado en una distribución empírica también será discreto y de varianza alta. Otra limitación que presenta el MSH es la dificultad para estimar los percentiles extremos fuera de la muestra, es decir, las pérdidas extraordinarias generadas en periodos de turbulencia financiera. Finalmente, el método de simulación Monte Carlo es muy sensible al modelo estadístico seleccionado para generar las trayectorias de los precios o rendimientos, además la metodología demanda una extensa carga computacional y mayores costos a medida que aumenta el número de escenarios y factores de riesgo en el portafolio.

En este contexto, una medida de riesgo alternativa más consistente que calcula mejor la severidad de las pérdidas potenciales que exceden el nivel del VaR, es la medida de exceso esperado (ES, por sus siglas en inglés, Expected Shortfall) introducida por Artzner **et al.** (1999), también conocida como valor en riesgo condicional (CVaR). Estas medidas son propuestas en la literatura financiera como medidas de riesgo coherentes, ya que comparten las mismas propiedades cuando se aplican a distribuciones continuas. La medida CVaR, desde el punto de vista financiero, estima el riesgo de la cola de la distribución de manera más eficiente y conservadora al incorporar tanto la frecuencia como el tamaño de los eventos extremos. Además, cumple con la propiedad de subaditividad y la condición de convexidad que permite realizar un análisis del riesgo-rendimiento en el contexto de la teoría moderna del

portafolio de Markowitz (Rockafellar y Uryasev, 2000). Sin embargo, la medida CVaR bajo el supuesto de normalidad y para altos niveles de confianza subestima el riesgo, al no lograr recoger toda la información de las colas de la distribución de rendimientos. Este problema, en gran medida, afecta el comportamiento de los inversionistas racionales, puesto que no cuentan con suficiente información para tomar decisiones con respecto a la entrada o salida del mercado.

Estudios empíricos tradicionales que han confirmado y demostrado que los rendimientos de las series financieras se caracterizan por los hechos estilizados de exceso de curtosis o apuntamiento, efecto de colas pesadas⁷ o gruesas (heavy tails o fat tails) y diferentes grados de asimetría incluyen a Mandelbrot (1963) y Fama (1965). En consecuencia, varias distribuciones alternativas han sido propuestas en la literatura para resolver el problema de las colas pesadas en la industria financiera. Una distribución de colas pesadas propuesta para modelar los rendimientos extremos de las series financieras, es la mixtura de distribuciones normales sugerida por Boness **et al.** (1974). No obstante, la aplicación de este modelo en la administración de riesgos para el cálculo del VaR se describe por primera vez en Zangari (1996); posteriormente Ventakaraman (1997) perfecciona el modelo al estimar los parámetros utilizando el procedimiento de máxima verosimilitud quasi-Bayesiana, mientras que el estudio más reciente y sencillo conceptualmente sobre colas pesadas y VaR es introducido por Hull y White (1998). Por otra parte, Huisman, Koedijk y Pownall (1998) y Heikkinen y Kanto (2002) proponen la distribución t-student como una alternativa para capturar el exceso de riesgo, al combinar la varianza finita con las colas pesadas de la distribución de rendimientos, mientras que Andreev y Kanto (2005) desarrollan un modelo de forma cerrada para determinar el impacto de la leptocurtosis en la estimación del CVaR. Estas alternativas a la distribución normal modelan correctamente el efecto de las colas pesadas, proporcionando mejores estimaciones del riesgo, pero presentan algunas desventajas como la carencia de expresiones de forma cerrada e ignoran los niveles de

⁷ En esta tesis se usará el término de colas pesadas, el cual es sinónimo de colas gruesas o anchas utilizado también en la literatura financiera, esto es, una distribución de colas gruesas tiene más peso o una mayor densidad probabilística en las colas que la distribución normal. Véase, por ejemplo, McNeil y Frey (2000).

asimetría observados en los rendimientos financieros, cuyo impacto se refleja en el proceso de modelación y ajuste de la distribución.

En respuesta a las inconsistencias y desventajas que presentan los modelos previos para capturar la magnitud y la probabilidad de los eventos extremos. La teoría de valor extremo (TVE) proporciona un conjunto de herramientas sólidas para entender y modelar el comportamiento estadístico de los eventos extremos capturados en las colas de las distribuciones empíricas. Cabe aquí señalar que la TVE ha sido aplicada desde hace varios años para la solución de problemas en los campos de la hidrología, climatología y seguros. Sin embargo, el uso de la TVE en las finanzas ha crecido significativamente en años recientes, a tal grado que un gran número de estudios desarrollados resalta su potencial para modelar adecuadamente el impacto de los eventos de la cola en los portafolios de inversión, derivados de las devaluaciones, los desplomes en los índices accionarios, los colapsos en los mercados de bonos, los atentados terroristas, e incluso los auges económicos.

Entre los estudios empíricos que han aplicado las técnicas de la TVE para analizar el comportamiento de los rendimientos en los tipos de cambio destaca el trabajo de Danielsson y de Vries (1997), quienes estiman el índice de la cola para los rendimientos intradía de tres divisas del mercado forex (Yen/DM, Yen/USA y DM/USA).⁸ De manera similar, Loretan y Phillips (1994) aplican la TVE para analizar el comportamiento asintótico de las colas de la distribución de rendimientos para las principales divisas duras de Europa y Yen japonés. Por su parte, Hols y de Vries (1991) y Koedijk, Shanfgans y de Vries (1990) proporcionan evidencia empírica para los rendimientos semanales del dólar canadiense y las divisas bajo el Sistema Monetario Europeo con referencia al dólar americano, respectivamente. Asimismo, el interés creciente de la TVE como herramienta complementaria en la administración del riesgo cuantitativo en los mercados financieros ha crecido notablemente durante la última década, principalmente para el caso de mercados desarrollados. En este sentido, Login

⁸ Yen/Marco Alemán, Yen/Dólar de Estados Unidos y Marco Alemán/Dólar de Estados Unidos.

(1996, 2000) fue el pionero en implementar la TVE en la metodología VaR. En su trabajo seminal aplica la distribución de valor extremo generalizada (DVEG) para estimar el VaR diario de los rendimientos extremos del índice accionario S&P500. El estudio de Danielsson y de Vries (2000) presenta un modelo híbrido que contribuye a la estimación del índice de la cola, y cuantificación del VaR en portafolios aleatorios. Los trabajos de McNeil (1999) y McNeil y Frey (2000), utilizan datos diarios de los índices accionarios DAX y S&P500 para ilustrar el potencial de la distribución de Pareto generalizada (DPG) en la medición del riesgo relacionado con las colas de la distribución empírica. De la misma manera, el análisis del comportamiento extremo en los movimientos de las tasas de interés de los Treasury Bills y Libor es estudiado por Neftci (2000), Bali y Neftci (2001) y Krehbiel y Adkins (2005).

Con respecto a los mercados emergentes, destacan los trabajos de Jondeau y Rockinger (2003) y Susmel (2001), que emplean la DPG para comparar el comportamiento asintótico de las colas de la distribución entre mercados industrializados y emergentes. Mientras que Gencay y Selcuk (2004) estiman el VaR para diferentes mercados emergentes utilizando como herramienta la TVE. Fernandez (2003) presenta evidencia empírica sobre los rendimientos del índice accionario chileno (IPSA). Por su parte, da Silva y Mendes (2003) y Ho **et al.** (2000) usan la teoría estadística de extremos basada en el procedimiento de bloques máximos para analizar las pérdidas potenciales en los principales mercados accionarios asiáticos. No obstante, la literatura existente, en términos relativos, sobre rendimientos extremos asociados a los auges económicos y caídas en los mercados emergentes de la región de América Latina es todavía escasa a pesar de la creciente necesidad e interés por parte de las autoridades reguladoras de llevar un control apropiado sobre el desempeño de las instituciones financieras.

Esta tesis tiene como primer objetivo describir el comportamiento de la magnitud y frecuencia de los rendimientos extremos en los índices accionarios de Brasil y México durante el periodo de 1970 a 2004, empleando la distribución de valor extremo generalizada. Los parámetros de la DVEG son estimados por el método de máxima

verosimilitud usando métodos numéricos y una subrutina implementada en lenguaje C de desarrollo propio. El segundo objetivo de la investigación pretende evaluar el potencial de la TVE en el proceso de la medición del riesgo cuantitativo, estimando el VaR para las posiciones financieras larga y corta, y compararlo con las medidas convencionales. Finalmente, el tercer objetivo es extender los resultados de la TVE para el análisis del CVaR, haciendo uso de la propiedad de máximo dominio de atracción. La literatura empírica sobre medidas de riesgo coherentes bajo el supuesto de colas pesadas aún es muy limitada, especialmente en mercados emergentes altamente volátiles. Esta tesis contribuye a cerrar dicha brecha resaltando el caso de los mercados de México y Brasil que han impulsado una mayor expansión económica en la región de América Latina, y a su vez han ganado la preferencia de los inversionistas de capital privado en los últimos años.

En este contexto, la presente tesis pretende validar las siguientes hipótesis para el caso de la Bolsa Mexicana de Valores y la Bolsa de Valores de Sao Paulo:

“El uso del cuantil de una distribución de colas pesadas como medida de riesgo puede proporcionar a los inversionistas mejor información de la perdidas potenciales y reducir el riesgo de modelo”

“Un cola más pesada o ancha no necesariamente conduce a un mayor riesgo.”

Los principales hallazgos y aportaciones de la tesis se resumen de la siguiente forma: 1) los resultados empíricos muestran el potencial de la DVEG para explicar adecuadamente el comportamiento extremo de los rendimientos de los índices accionarios de Brasil y México; 2) analizando las estimaciones de los índices de la cola de cada mercado se encontró evidencia débil de asimetría entre las colas derecha e izquierda; es decir, la cola derecha de la distribución es ligeramente más pesada que la cola izquierda. Asimismo, la distribución de los rendimientos del índice accionario de la Bolsa Mexicana de Valores presenta colas más pesadas y la propensión más alta para experimentar pérdidas más grandes que el índice accionario Bovespa; 3) finalmente,

los resultados del backtesting sustentan que el método de la TVE es una aproximación más conservadora, y por tanto más confiable, para calcular el VaR y CVaR que los métodos convencionales. Este análisis sobre riesgo de la cola es de relevancia para los inversionistas domésticos e internacionales, puesto que los resultados obtenidos proporcionan mejor información para seleccionar sus decisiones de inversión bajo incertidumbre en los mercados emergentes. La evidencia presentada en esta tesis es también relevante para los responsables de los mercados de valores y sus operadores a fin de que presten más atención en la evolución del riesgo en los portafolios de inversión a medida que se incorpora nueva información al mercado, ya que las crisis financieras ocurridas han demostrado la carencia de instrumentos para proporcionar información más transparente y oportuna de los resultados de las emisoras y la incapacidad con que opera una parte de los participantes para asumir, tolerar y compensar los diferentes niveles de riesgo en exceso. Finalmente, esta tesis también aporta importante conocimiento para los reguladores y responsables del desarrollo de los mercados de capital de Brasil y México, y en general de los países en vías de desarrollo.

Para alcanzar los objetivos propuestos previamente y validar las hipótesis planteadas, la tesis está estructurada en cinco capítulos de la siguiente forma:

En el primer capítulo se presenta un marco contextual de la importancia de la administración de riesgos en la nueva arquitectura financiera y económica internacional, con el fin de destacar los factores principales que han contribuido a su crecimiento para asegurar la estabilidad en los mercados financieros.

El segundo capítulo presenta el marco teórico que contiene los detalles tanto teóricos como técnicos de las principales medidas convencionales VaR y CVaR que se utilizan en la administración de riesgos, así como sus ventajas y desventajas.

El tercer capítulo presenta los resultados fundamentales de la teoría de valor extremo y los detalles técnicos de la metodología adoptada para modelar las colas de

la distribución de rendimientos, así como los procedimientos de estimación que permitirán el cálculo del VaR y CVaR basado en la distribución de valor extremo generalizada.

En el cuarto capítulo se presenta el análisis empírico para alcanzar los objetivos y validar las principales hipótesis planteadas. En primer lugar se describen los datos de las series financieras y las estadísticas básicas. En segundo lugar, se estiman los parámetros desconocidos de la DVEG aplicando el método de máxima verosimilitud utilizando la subrutina en lenguaje C++ de desarrollo propio, y varias pruebas de bondad de ajuste son realizadas para evaluar la eficiencia del modelo. Por último, los parámetros estimados son utilizados para calcular el VaR y CVAR, mismos que son comparados con los resultados de las medidas de riesgo convencionales a fin de determinar el potencial de la TVE para los propósitos de la administración de riesgos.

Finalmente, el capítulo cinco resume los principales hallazgos empíricos, resaltando desde un punto de vista económico las implicaciones en la administración de riesgos y sus principales limitaciones de la TVE, las cuales abren nuevas líneas de investigación en el futuro. El Apéndice contiene los resultados técnicos sustanciales para el desarrollo de procedimientos computacionales. De hecho, para la estimación de los parámetros de la distribución de valor extremo generalizada que representa un problema de optimización no-lineal multidimensional se ha desarrollado un programa en lenguaje C, cuya subrutina principal se encuentra en el Apéndice C.

Resumen

Los modelos valor en riesgo (VaR) han demostrado ser herramientas indispensables para los propósitos de la administración y medición del riesgo financiero. Sin embargo, la alta y persistente volatilidad en los mercados financieros emergentes generada por la presencia de movimientos atípicos o inesperados muestra las limitaciones de los modelos paramétricos convencionales VaR para cuantificar el perfil de riesgo de los portafolios de inversión, como resultado de la evidencia de propiedades de colas pesadas en la distribución de rendimientos. La presente tesis aplica la teoría de valor extremo para analizar el comportamiento asintótico de la magnitud y frecuencia de los rendimientos extremos asociados con los crash y auges económicos en los mercados accionarios de Brasil y México durante el periodo de 1970 a 2004, empleando la distribución de valor extremo generalizada. Asimismo, el c -percentil de la DVEG se utiliza como medida de riesgo para estimar el VaR y CVaR para las posiciones financieras larga y corta, los cuales se comparan con las medidas tradicionales. Las pruebas empíricas muestran el potencial de la DVEG para explicar adecuadamente el comportamiento de los rendimientos extremos en los mercados accionarios de Brasil y México, así como evidencia débil de asimetría entre las colas derecha e izquierda; es decir, la cola derecha de la distribución es ligeramente más pesada que la cola izquierda en ambos mercados. El análisis se basa en las series diarias de los índices de las Bolsas de Brasil y México para el periodo enero 2 de 1970 a diciembre 31 de 2004. Los resultados del backtesting demuestran que el método basado en la TVE es una aproximación más conservadora, y por tanto más confiable, en la estimación del VaR y CVaR que los métodos convencionales para altos niveles de confianza. La evidencia empírica también demuestra un alto potencial de la DVEG para explicar adecuadamente el comportamiento extremo de estos dos mercados emergentes.

Palabras Clave: Administración de riesgos, Teoría de valor extremo, VaR, CVaR, Colas pesadas, DVEG, Mercados Emergentes, Brasil, México.

Abstract

Stock markets, particularly from emerging markets, are characterized by high volatility which conventional models fail to capture fully, potentially leading to high losses. Value at Risk (VaR) models signified an important step to estimate losses of financial assets and portfolios. However, the stylized fact that financial returns exhibit fat tails, implies that conventional VaR models (parametrics and non-parametrics) show important limitations because they fail to take into account the right statistical distributions to capture the frequency and severity of extreme values; the normal distribution is insufficient for this purpose. Extreme Value Theory (EVT) overcomes this limitation because it provides a framework to formally study the extreme behavior of stock markets returns and quantifies the possible losses experienced during financial instabilities and turbulences. This study uses the c -quantile of a fat tailed distribution to Value at Risk analysis; the parameters thus obtained improve the accuracy of measuring financial risk and reduces model risk. This work also extends the results of extreme value theory to show the impact of the frequency and size of extreme returns on values of Conditional Value at Risk (CVaR). A generalized extreme value distribution (GEVD) is used for the cases of the two largest stock markets from Latin America, Brazil and Mexico; a CVaR model is applied to determine risk exposure by investing in those markets. Daily index data for the period January 2, 1970 to December 31, 2004 is used. Backtesting results show that for high levels of confidence EVT methodology yields a more conservative and reliable approximation than conventional models for estimating VaR and CVaR. The empirical evidence also shows a high potential of GEVD to explain adequately the extreme behavior from the stock markets from Brazil and Mexico.

Key Words: Risk Management, Extreme Values, VaR, CVaR, Heavy tails, GVED, Emerging Capital Markets, Brazil, Mexico.

CAPITULO 1

La Importancia de la Administración de Riesgos

1.1 Naturaleza del Riesgo Financiero

Entender la importancia del riesgo en la economía y en los mercados financieros permite a las instituciones financieras y a los inversionistas institucionales¹ e individuales establecer efectivas medidas de control que sirvan de apoyo para una mejor evaluación y administración de la exposición al riesgo como consecuencia de los resultados adversos generados por cambios inesperados en múltiples factores. Asimismo, permite a las empresas ser más competitivas, puesto que un mejor control del riesgo no sólo disminuye sus costos de capital, sino también fomenta la certidumbre de sus ingresos y por ende sus utilidades. Finalmente, coadyuva también a que los gobiernos disminuyan sus niveles de riesgo-país, y mantengan la estabilidad de sus economías controlando mejor las variables fundamentales y optimizando el uso de sus recursos.

Una identificación oportuna e inmunización adecuada del riesgo a través de una efectiva estrategia de análisis e implementación del uso adecuado de modelos para su medición sitúa a los agentes económicos nacionales públicos y privados, en iguales o mejores circunstancias que sus competidores internacionales, maximizando con ello sus rendimientos al limitar y diversificar su exposición al riesgo aprovechando toda la gama de mercados financieros externos. Además una adecuada medición del riesgo hace a los mercados emergentes más estables y atractivos para los inversionistas, favoreciendo por tanto el ingreso de capitales extranjeros. Empero, para tener una mejor percepción del riesgo es necesario comprender la frecuencia y la probabilidad de

¹ Los inversionistas institucionales, en particular los fondos de inversión y los fondos de pensiones a nivel internacional, son considerados los más importantes actores de los mercados de valores. En la Bolsa Mexicana de Valores además de estos participantes también son consideradas las compañías aseguradoras, las administradoras de fondos para el retiro y las sociedades de financiamiento de objeto limitado como operadores de ahorro, inversión y financiamiento.

ocurrencia de los resultados, porque la mayoría de los riesgos que toman y crean los inversionistas obedecen a las decisiones y expectativas que los mismos participantes generan en los mercados, así como la situación política y socioeconómica que caracteriza a cada mercado, en ciertos periodos concretos.² De esta manera, el apetito por invertir y obtener una prima por el riesgo puede ser tan claro como comprar un instrumento financiero en un mercado desarrollado y estable o tan complejo como querer invertir en el sector energético en Irak. Pero, ¿en realidad que es el riesgo? Históricamente, el vocablo castellano riesgo proviene de raíz etimológica latina que se deriva del italiano *risco* o del francés *risque* que significa peñasco alto y escarpado. *Risco*, en un sentido más riguroso y original, significa cortar como una roca. El concepto se derivó de los navegantes europeos que tenían que conducir sus naves rodeando la costa, con el fin de hacer más breve el camino. Sin embargo, a medida que la velocidad del viento en contra aumentaba, las navegaciones enfrentaban mayores probabilidades de estrellarse contra las rocas, creando una situación de *risco*, es decir, riesgo.

Esto significa que desde sus inicios, el riesgo se mide tomando como referencia el parámetro de pérdida de beneficios esperados; la relación riesgo-rendimiento es tan antigua como el deseo de los individuos por satisfacer mejor sus necesidades de consumo. Una decisión de inversión debe tomar en cuenta la valoración de las condiciones prevalentes de mercado, así como las expectativas futuras y los eventos esperados que dan origen a los premios o penalizaciones que todo agente económico considera al momento de tomar una alternativa de inversión. Mientras más alto es el riesgo que se asume, mayor debe ser el premio recibido. El riesgo es un concepto subjetivo que se define como posibles resultados adversos en las condiciones esperadas, con la posibilidad de causarnos una pérdida o un daño mayor. En el sector financiero, en un sentido más estricto, se puede definir como la volatilidad de resultados inesperados en el valor de los flujos financieros de los activos o pasivos de una empresa. A medida que se observan rendimientos extraordinariamente positivos o

² Por ejemplo, véase Bernstein (1996).

negativos, crece la probabilidad de enfrentar pérdidas o ganancias inesperadas en el futuro.³

En un primer alcance, los gobiernos, empresas, instituciones financieras e inversionistas individuales enfrentan tres tipos de riesgos: a) netos o macroeconómicos, b) sectoriales y c) financieros. Los riesgos netos económicos o macroeconómicos son aquellos que se originan de cambios en las variables fundamentales de la economía mundial o del país de origen de los agentes económicos; de carácter mundial, es por ejemplo el cambio en los precios de los energéticos y en general de los exportables clave para la producción industrial o consumo, tales como los precios del petróleo, los precios del maíz o los precios del café. El cambio en los precios de estos productos tiene lugar en los mercados internacionales y afectan las economías de muchos países. De ahí la identificación de este riesgo con el carácter de neto. Los riesgos macroeconómicos se refieren a cambios en los fundamentos de una economía que se transmiten de forma generalizada a todos o casi todos los sectores de la economía. Aunque su origen puede derivarse de cambios en los mercados mundiales, su alcance no se generaliza a nivel mundial. Además, estos cambios frecuentemente se deben a un débil manejo de las políticas económicas por parte de las autoridades de una nación. Tanto el riesgo mundial como el riesgo macroeconómico son difíciles de cubrir. Una diversificación ex-ante puede servir de cobertura, con ciertos límites debido a lo sistémico de su alcance.

El riesgo sectorial, generalmente también identificado como riesgo de negocios, se refiere ya sea a cambios inesperados en el comportamiento de un sector de la economía atribuidos a rezagos o cambios tecnológicos. Se refiere también a la competencia que mantienen entre sí los diferentes participantes del sector. Así, en el caso de una empresa productora, los riesgos de negocios tienen que ver con el mercado del producto donde se desarrolla la empresa, la introducción de cambios tecnológicos, el desarrollo de nuevos productos y la mercadotecnia ejercida por sus competidores. Las empresas siempre están dispuestas a asumir esta clase de riesgo

³ Véase Jorion y Khoury (1997).

con el fin de crear una clara ventaja de competitividad, y agregar valor a sus inversionistas. Finalmente, los riesgos financieros se definen como aquellos que están relacionados con posibles pérdidas que se originan en los mercados financieros en cuanto al valor de los títulos ahí negociados, como consecuencia de los movimientos en las principales variables macroeconómicas. Estos cambios pueden deberse a condiciones intrínsecas de estos mercados (oferta, demanda y expectativas de los agentes económicos) o atribuidos a cambios en variables económicas clave internacionales o nacionales. Los cambios pueden generarse a nivel internacional (cracks financieros) que se transmiten entre varios países; o pueden generarse a nivel local como resultado de cambios en los factores determinantes de estos mercados, tales como inflación, tasas de interés, oferta monetaria, exportaciones, etc.⁴

Considerando que existen diversos tipos de mercados y participantes en los mismos, el riesgo financiero puede también analizarse desde diferentes perspectivas a fin de valorarlo correctamente. Los principales riesgos que deben resaltarse son los siguientes:

- 1) El riesgo crédito se define como la probabilidad de que disminuya el valor de los activos de una institución financiera (especialmente los préstamos), por la falta de cumplimiento de las obligaciones contraídas por parte de los agentes económicos relacionados con la institución. Por ejemplo, este tipo de riesgo puede determinarse a través de la relación existente entre las carteras vencidas e irrecuperables del banco y el total de préstamos otorgados.
- 2) El riesgo de liquidez dentro de esta categoría se refiere a la posibilidad de que en un momento dado, un banco o una empresa no tenga la cantidad suficiente de dinero en efectivo, para cubrir sus pasivos, así como para destinar recursos adicionales para préstamos. Esta situación ocasiona que las instituciones bancarias

⁴ No toda variable económica incide en el comportamiento de los mercados financieros. Además los factores que afectan a un país difieren de los de otro país, dependiendo del nivel de integración o segmentación que existe entre los mercados respectivos. Excelentes análisis de los factores económicos que inciden en las economías de México, Canadá y Estados Unidos, así como en su segmentación incluyen a López (2006) y Ortiz y López (2007).

o las empresas demanden fondos a costos extranormales, provocando con ello un deterioro en sus ganancias. El riesgo de liquidez se cuantifica a través de la relación existente entre el total de los préstamos otorgados por el banco y el total de sus activos, es decir, entre mayor sea el porcentaje de préstamos respecto al activo total, mayor será la probabilidad de incurrir en el riesgo de liquidez. Igualmente, este tipo de riesgo se manifiesta mediante la venta anticipada o forzosa de activos financieros a descuento inusuales para hacer frente a sus obligaciones, o bien, por el hecho de que una posición no logre ser oportunamente enajenada, adquirida o cubierta mediante el uso de una posición inversa.

- 3) Riesgos cambiarios son aquellos derivados de las operaciones internacionales y que pueden causar pérdidas como resultado de las variaciones en los tipos de cambio.
- 4) Riesgo país es el riesgo a que está expuesta cualquier institución financiera como consecuencia de la apreciación que hacen los mercados internacionales en los factores macroeconómicos y microeconómicos de un país, con el fin de aplicar ciertos descuentos a la valuación de sus obligaciones estableciendo altas primas en sus valores. La evaluación de este tipo de riesgo lo realizan grandes empresas financieras internacionales como J. P. Morgan, Moody's, Morgan Stanley, etc. Sus reportes en que se señala la migración (cambio) de categoría de los pasivos de un país pueden ocasionar grandes pérdidas cuando la migración es negativa.⁵
- 5) Riesgo de mercado: A este tipo de riesgo también se le conoce como riesgo sistemático, y es él que enfrentan los agentes económicos simplemente por el hecho de participar en el mercado, no pudiéndolo eliminar totalmente mediante la diversificación. En el caso de las instituciones financieras, este tipo de riesgo está representado por las fluctuaciones inesperadas en los precios de los activos

⁵ Para una explicación más detallada de este tipo de riesgo que enfrentan las instituciones financieras e inversionistas. Véase Ortiz (2007).

financieros que son afectados por los cambios inesperados en las tasas de interés, tipos de cambio e índices bursátiles por mencionar los más importantes.

Dos han sido las respuestas que han surgido para controlar el riesgo de los inversionistas: a) incursión en los mercados de diversos instrumentos financieros para su cobertura, los denominados productos derivados entre los que resaltan los futuros, opciones y swaps financieros creados a partir de la década de los 1970s y que se han convertido en importantes características de la globalización financiera, b) nuevos y sofisticados modelos para medir el riesgo, en donde dos enfoques importantes han tenido lugar: i) medición de la sensibilidad de los activos a los movimientos del mercado; y ii) medición de posibles pérdidas. A los primeros corresponden los modelos de diversificación de los portafolios basados en la selección de los activos. Entre estos se encuentran los modelos de Markowitz, los modelos de fijación de precios de activos de capital, CAPM, APT (por sus siglas en inglés) y los modelos multifactoriales. En estos la sensibilidad de los activos a los movimientos del mercado se mide con el factor β , mientras que el segundo grupo corresponde al modelo VaR, precisamente la preocupación principal de la presente tesis. La medida VaR estima el riesgo de una posición de mercado o portafolio basada en el c -percentil de la distribución de pérdidas y ganancias.

En fin, la volatilidad en las variables económicas y cambios inesperados en los flujos de efectivo financieros, así como la creciente competencia en la captación de los recursos están forzando a las instituciones financieras e inversionistas a implementar en un marco global nuevas técnicas para la administración del riesgo que permitan identificar, trazar y estructurar estrategias idóneas para aprovechar las nuevas oportunidades de ganancias que ofrecen los mercados. Esto es, facilitando la evaluación exacta de los índices de seguimiento de los resultados financieros, pero desde una perspectiva integral riesgo-rendimiento. Aprovechando los mecanismos de cobertura existentes en los mercados para inmunizar el riesgo o midiendo el riesgo regularmente, a fin de asignar los recursos adecuadamente, maximizar los rendimientos, y evitar pérdidas no deseables.

1.2 Sucesos Relevantes Determinantes de la Importancia y la Evolución del Riesgo Financiero

La naturaleza y magnitud de los cambios de fin de siglo y de principios del milenio han hecho que el riesgo financiero evolucione dramáticamente, volviendo más sensibles a los activos financieros. El proceso de la volatilidad comenzó a impactar significativamente desde las tres últimas décadas del siglo XX a raíz de la caída del sistema de Bretton Woods, el hito que debe reconocerse como inicio de la globalización. Su impacto se profundizó con la liberalización de los mercados reales y financieros y los acelerados avances en las tecnologías de la información y las comunicaciones, así como en las tecnologías y aplicaciones de cómputo. Desde entonces una cadena de eventos dramáticos, interrelacionados entre sí, han contribuido al desarrollo de la denominada ingeniería de los riesgos.

Algunos de los eventos históricos relevantes han provocado que el entorno financiero sea más peligroso para las instituciones financieras y los inversionistas individuales hoy en día, mismos que han sido objeto de estudio por diversos organismos privados y públicos, con el propósito de alcanzar conclusiones y recomendaciones encaminadas a prevenir y reducir sus efectos económicos desfavorables en un futuro. Entre los principales sucesos se encuentran los siguientes:

- Crisis del sistema de pagos internacional de 1971, inicio con el colapso del Acuerdo de Bretton Woods que constituía el sistema de paridades fijas basado en el patrón dólar-oro. Este cambio relevante ha sido considerado el motor fundamental de exceso de volatilidad en los mercados globales y locales, en particular, en los mercados emergentes donde finalmente en varios países se ha adoptado un régimen de tipo de cambio de flotación libre.
- A principios de 1973, la dramática alza en los precios del petróleo generó altas tasas de inflación y frecuentes oscilaciones en las tasas de interés.

- La crisis de la deuda externa de los países en vías de desarrollo, que detonó en 1982 con la incapacidad de México para cubrir sus obligaciones internacionales.
- El crash del 19 de octubre de 1987 conocido como el lunes negro que provocó que las acciones norteamericanas perdieran 23% de su valor, generando pérdidas catastróficas por un billón de dólares, y que se transmitió rápidamente a otros mercados de valores.⁶
- La burbuja del alza en los precios de las acciones japonesas que finalmente terminaron cayendo a fines de 1989 y que originó que el índice accionario Nikkei 225 se desplomara de 39,000 puntos a 17,000 puntos, llevando a Japón a enfrentar una crisis financiera sin precedentes al perder \$2.7 billones de dólares en capital.
- La unificación monetaria en Europa que temporalmente se interrumpió por el fracaso del Sistema Monetario Europeo en septiembre de 1992, pero que finalmente se implementó en enero de 1999 con la adopción del Euro aunque sin la participación del Reino Unido.
- El desastre ocurrido en el mercado de bonos de Estados Unidos en 1994 desencadenó una clara tendencia alcista en las tasas de interés que fulminaron aproximadamente \$1.5 billones de capital global; a pesar de que la Reserva Federal había mantenido a la baja las tasas de interés durante tres años.
- La crisis Mexicana de 1994 que ocurrió en un periodo crítico de cambio de gobierno y cuando instrumentos financieros de deuda denominados en dólares emitidos por el gobierno federal, tesobonos, estaban próximos a vencer. Factores clave que ocasionaron pánico especulativo entre los inversionistas

⁶ Durante este periodo de inestabilidad e incertidumbre financiera, la Bolsa Mexicana de Valores experimentó alta volatilidad, las variaciones negativas del IPC estuvieron en un rango del 14% al 20.24%. Este último valor se considera como el máximo descenso histórico. Por su parte, la volatilidad experimentada en la Bolsa de Valores de Sao Paulo fue menos persistente al registrar descensos entre 5.98% y 17.64%.

domésticos e internacionales y, por consiguiente, una fuerte fuga desordenada de capitales al caer la inversión extranjera de portafolio de \$54,824 a \$22,973 millones de dólares durante el periodo de 1993-1995, causando con ello la peor devaluación del peso frente al dólar al perder aproximadamente 45% de su valor en un mes y alta volatilidad en las tasas de interés, cuyos efectos negativos se vieron reflejados en todo el sistema bancario, la industria manufacturera y textil.⁷

- La turbulencia generada en Asia en el periodo de 1997-1998; los países del área contaban con grandes déficit en sus cuentas corrientes, una creciente deuda de corto plazo y un excesivo endeudamiento en el exterior por parte de los bancos domésticos, contraído para financiar proyectos de inversión poco viables. Esta crisis tuvo un efecto inmediato en las economías vecinas de la región al provocar una serie de devaluaciones, que inicio con la depreciación del 20% de la moneda de Tailandia en julio de 1997 y continuando en septiembre del mismo año con las divisas de otros países como Malasia, Indonesia, Filipinas y Singapur que perdieron el 42%, 37%, 26% y 8% de su valor comparado con el nivel de enero de ese mismo año. También disminuyó aproximadamente de tres cuartos la capitalización de las acciones en los mercados de Corea, Hong Kong, Indonesia, Malasia, Tailandia y Taiwán, a pesar de que el ataque especulativo inicial no tuvo efecto directo en la economía de Corea, la cual es considerada la más grande de la región después de la economía de Japón. Sin embargo, este país ya comenzaba a tener problemas en su sistema bancario a principios de 1997, como resultado de una serie de quiebras y presiones financieras en el sector empresarial que la colocaron en una situación difícil para evitar el contagio financiero.⁸
- La declaratoria de moratoria sobre deuda soberana y la devaluación que experimentó Rusia en el segundo semestre de 1998, como resultado de la

⁷ Un excelente texto que explica con detalle las características y tendencias de la Bolsa Mexicana de Valores durante este periodo incluye a Cabello (1999).

⁸ Para un conocimiento más completo de los factores que provocaron la crisis Asiática durante este periodo, véase Corsetti, Pesenti y Roubini (1999) y Gencay y Selcuk (2004).

nueva política económica de mercado, provocando con ello una crisis financiera global que contagio a varios países de Asia y América Latina. Durante el proceso, los niveles de los spreads de las tasas de interés se incrementaron más de 1,500 puntos base y el índice accionario MTMU de Rusia descendió 80% de su valor entre enero y agosto de 1998.

- La devaluación del real brasileño frente al dólar a principios de 1999 que excedió el 30% aproximadamente, precisamente cuando el real brasileño se negociaba bajo un régimen de paridad fija dentro de una banda estrecha con volatilidad del 0.16%. Sin embargo, una vez abandonado este sistema de tipo de cambio por la presión ejercida de los especuladores, la moneda de Brasil se devaluó de RE1.65 a RE2.15 por dólar americano. Esto ocasionó un impacto negativo en la economía, y un efecto de contagio que se extendió a otras economías de América Latina que dependen del mercado de Brasil.
- El 14 de abril de 2000, el desplome en el precio de las acciones de la empresa dot.com conllevó a la caída más precipitosa del índice accionario Nasdaq al descender a 3,321 puntos, generando con ello una pérdida acumulada del 41.87% desde que registro su máximo histórico de 5,048 puntos el 10 de marzo de 2000. El origen de la presente caída obedece a la fuerte corrección de precios en el mercado de valores, precisamente en el momento cuando los precios de las acciones de las empresas tecnológicas más modernas vinculadas a las telecomunicaciones y, en especial, a Internet habían alcanzado los niveles más altos de la historia con un crecimiento aproximado del 86% durante 1999. En consecuencia, el efecto del boom convertido en crack no sólo generó expectativas de alta volatilidad, sino también incrementó la volatilidad implícita en los mercados financieros asiáticos durante este periodo, alcanzando niveles del 40% en el mercado Hang Seng y 50% en el mercado Nikkei 225 cuando en tiempos de relativa calma este patrón alcanzo un 15% o 20%.

- La crisis bancaria de Turquía ocurrida en el año 2000 generada por problemas de liquidez y rumores de privatización cuando la lira se depreciaba a su nivel más bajo; factores que afectaron la sensibilidad en la tasa de interés promedio al elevarla a más del 1000%.
- El atentado del 11 de septiembre de 2001, causado por un grupo de terroristas islámicos impactan dos aviones secuestrados contra las Torres Gemelas del World Trade Center de Nueva York, conmocionando por completo a los mercados financieros mundiales al crear un ambiente de inseguridad y desconfianza entre los inversionistas. Este suceso envió rápidamente señales negativas a través de los mercados financieros al grado de suspender las operaciones en las Bolsas de Valores de Estados Unidos durante casi una semana. En los mercados financieros del viejo continente, los precios se desplomaron inmediatamente después del atentado terrorista; el índice accionario DAX 30 de Alemania perdió más de 8% alcanzando el nivel más bajo durante tres años; el índice accionario CAC 40 de Francia registro una caída de más de 7% y el índice accionario FTSE 100 de Londres retrocedió 5.7% después de haber tenido un fuerte desempeño al principio del día. Sin embargo, la capacidad de los mercados europeos para asimilar rápidamente la noticia, facilitó la recuperación de las pérdidas sufridas del 11 de septiembre. En Asia, el desastre también tuvo efectos negativos en los principales mercados de valores de esa región. Por ejemplo, el índice accionario Nikkei 225 descendió 6.6% aproximadamente al cerrar por debajo de los 10,000 puntos por primera vez en 17 años; el índice accionario HSI de Hong Kong terminó con un descenso del 8.9%, el nivel más bajo registrado durante dos años; el índice accionario KS 200 de Corea del Sur fue el mercado que registro el mayor nivel de descenso con 12%. Por si esto no bastara, el impacto del atentado terrorista generó volatilidad en los mercados de futuros, elevando con ello el precio de los contratos de futuros sobre el petróleo crudo arriba de \$30 dólares por barril.⁹

⁹ Para una descripción más detallada de los efectos negativos que provocó el ataque terrorista del 11 de septiembre. Véase, por ejemplo, The Economist (2001).

- La crisis de Argentina de diciembre de 2001, tal vez se puede considerar como la más grande de su historia, cuando el Gobierno fue incapaz de cumplir con sus obligaciones contraídas por el monto de \$144,000 millones de dólares en deuda pública. Este evento no sólo provocó que el peso argentino se deslizará en un 75% de su valor con respecto al dólar americano en enero de 2002, sino también generó una serie de efectos negativos al contraer la economía en un 3% y devastar el sistema financiero de Argentina.¹⁰
- Otra clase de eventos de principio de siglo que han generado pérdidas millonarias y desconfianza entre los inversionistas, cuyos orígenes no necesariamente se asocian en su totalidad a los caprichos de los mercados financieros, sino más bien están relacionados con los inapropiados manejos administrativos y operacionales de las instituciones no financieras, lo constituyen los escándalos de fraude cometidos por importantes empresas transnacionales. Iniciada por el derrumbe de la empresa norteamericana comercializadora de energía eléctrica y gas natural Enron el 12 de diciembre de 2001, mismo que originó pérdidas cuantiosas por \$30 mil millones de dólares a los inversionistas al desplomarse el precio de las acciones de \$89 dólares a \$0.22 centavos de dólar. Otro de los escándalos financieros ocurrido en los Estados Unidos es la quiebra fraudulenta de la segunda compañía de telecomunicaciones Worldcom el 21 de julio de 2002, cuyo efectos incremento la desconfianza entre los inversionistas y pánico en las principales bolsas de valores de Estados Unidos durante semanas cuando el ex presidente de la empresa intenta encubrir pérdidas por aproximadamente \$3,900 millones de dólares. A fines de 2003, cuando el actual orden financiero parecía tranquilo se descubre la brecha financiera de €14,500 millones de euros en las cuentas del grupo alimenticio Parmalat. La magnitud de la crisis financiera de la transnacional italiana se vio reflejado inmediatamente en el valor de las acciones del corporativo al descender estrepitosamente en un 98% en cuestión de días, generando

¹⁰ Para un análisis más profundo de los factores que originaron la crisis financiera en Argentina, véase Barham (2002).

pérdidas por €30 mil millones de euros aproximadamente que afectaron a miles de inversionistas y pequeños ahorradores.

La rapidez como se han presentado estos eventos impredecibles e inciertos no sólo han representado para la industria financiera nuevos retos y oportunidades, sino también consecuencias devastadoras porque aunque el riesgo genera ventajas para obtener excelentes ganancias, a su vez conlleva a pérdidas potenciales. Asimismo, su gestación e impactos ha conllevado a la presencia de periodos de inestabilidad en la que tienen lugar valores atípicos y extremos que deben reconocerse a fin de alcanzar un enfoque integral, sistemático y riguroso respecto a la cuantificación, control y monitoreo de los riesgos financieros por parte de las instituciones financieras e inversionistas individuales e institucionales; la importancia del reconocimiento del tipo de anomalías en el contexto internacional coadyuva a las autoridades competentes a desarrollar mecanismos de supervisión y regulación prudenciales que respondan a los trastornos financieros masivos, anulando sus catastróficos efectos reales de contagio en la nueva economía mundial.

1.3 La Importancia de la Administración de Riesgos como Estrategia de Inversión

En los últimos años, la creciente demanda por parte de los participantes del mercado de mejores herramientas, modelos y metodologías que les permitan una decisión óptima en la asignación de capital y recursos, la identificación de límites de riesgo, así como su medición, ha despertado un creciente interés por la administración de riesgos como estrategia para apoyar el proceso de la toma de decisiones. La búsqueda de estrategias apropiadas para identificar y manejar el riesgo financiero ha sido uno de los temas más importantes de las finanzas modernas. Uno de los principales objetivos de los inversionistas por la variable naturaleza de sus activos y pasivos financieros es identificar oportunidades de inversión atractivas sobre una base de riesgo ajustado que se pueden alcanzar a través de estrategias sofisticadas. De esta manera, el desarrollo firme de la administración del riesgo y sus diferentes paradigmas no sólo coadyuvan a presentar a los inversionistas y responsables del manejo de las carteras de inversión

con los diversos perfiles que caracterizan a las diferentes oportunidades de inversión, sino también con las decisiones racionales que deben tomar.

Por ejemplo, los activos de una entidad bancaria se componen por su cartera de inversión y de créditos. La cartera de inversión está formada por todas las posiciones en instrumentos financieros de corto plazo generalmente negociados en mercados líquidos como consecuencia de la regulación bancaria. Los bancos realizan este tipo de operaciones de compra-venta, con el fin de obtener ganancias de los movimientos en los precios, tasas de interés y volatilidades en el corto plazo. Sin embargo, todas las posiciones están expuestas al riesgo de mercado como resultado de la sensibilidad en los cambios de las tasas de interés, por lo que tienen que ser valuadas diariamente a precio de mercado. Aunque para propósitos del cargo de capital por el riesgo de mercado, las instituciones bancarias pueden incluir en su medida de riesgo ciertos instrumentos de la cartera de inversión utilizados para cubrir las posiciones de mercado. Los créditos bancarios son igualmente en su mayoría de corto plazo otorgados a las empresas y consumidores. La solvencia de sus clientes debe ser evaluada correctamente y la cartera de créditos debe ser evaluada continuamente para evitar niveles de tenencias morosas indeseables que conlleven a incurrir en el riesgo de liquidez. Por su parte, los pasivos bancarios comprenden principalmente los depósitos y los ahorros. Aunque su sensibilidad a los cambios en las tasas de interés es generalmente menor, en relación a los activos de inversión de la banca, están sujetos a cambios constantes en sus niveles, porque son la parte esencial del sistema de pagos. Además los niveles de depósitos y ahorros pueden cambiar debido a cambios en la oferta monetaria, cambios en las tasas de inflación, etc. o cambios en los patrones de consumo y ahorro de los grupos familiares. De ahí que los bancos deben responder a estas obligaciones manteniendo niveles adecuados de inversión en términos de riesgo-rendimiento y manteniendo niveles adecuados de reservas, como se indicó anteriormente.

Por otra parte, el cambio acelerado en el entorno global de los negocios ha conducido a las instituciones no financieras a integrar la administración de riesgos

rápidamente como herramienta clave para neutralizar los efectos desfavorables derivados de las fluctuaciones en los factores de riesgos tales como los tipos de cambio, las tasas de interés y los precios de los bienes físicos, cuyo impacto pueden afectar el valor de las empresas como resultado de la naturaleza de sus operaciones nacionales e internacionales. Esto es, las empresas importadoras de insumos pueden determinar muy buenos pronósticos sobre sus volúmenes de compra de la materia prima que necesitan para producir su producto final; pero el valor monetario de la compra es difícil de fijar debido a que el precio del bien físico y la cantidad negociada están determinados por la intersección de las curvas de oferta y demanda que se reflejan en las variaciones del tipo de cambio. De acuerdo con los principios fundamentales de la economía, los consumidores y productores están restringidos por el capital y los recursos que dependen de los precios y otros factores tales como ingresos, ahorros, costos de préstamos, salarios, costos de las materias primas y el tipo de cambio; sin embargo, el equilibrio se alcanza cuando la demanda es igual a la oferta a través de todos los mercados en un entorno incierto, en donde los agentes económicos actúan de manera racional para optimizar su bienestar propio.

Por consiguiente, la principal función de la administración de riesgos no sólo consiste en proteger a las instituciones no financieras contra la dimensionalidad de la exposición al riesgo de las principales variables económicas, sino también generar suficientes flujos de efectivo para promover la eficiencia de las unidades operativas del negocio, lo que sin duda constituye un importante paso para elevar el costo de oportunidad de las inversiones al reducir el costo de capital. En este sentido, la habilidad por parte de las empresas para estabilizar sus flujos de efectivo y reducir sus costos a través de una efectiva estrategia dinámica les permitirá tener un mejor desempeño, incrementado su competitividad a nivel internacional porque la asignación de capital y el riesgo son dos factores importantes que están directamente relacionados en cualquier actividad económica.¹¹

¹¹ Un excelente trabajo que trata el marco de la administración de riesgos incluye a Froot, Scharfstein y Stein (1994).

Igualmente, la necesidad de herramientas eficientes para entender y administrar estratégicamente el riesgo es cada vez más importante para los inversionistas, en particular, para los inversionistas institucionales conocidos en el contexto financiero como los fondos de pensiones, las compañías de seguros y las sociedades de inversión entre los más importantes, puesto que tienen la necesidad de monitorear y controlar el riesgo financiero a que están expuestas las carteras de inversión de sus representados; en los últimos años, el creciente interés por parte de los inversionistas individuales y los fondos de pensiones para invertir en los mercados financieros internacionales, especialmente en los mercados financieros de los países emergentes, como una estrategia de diversificación para proporcionar mejores rendimientos a sus beneficiarios por el concepto de primas vitalicias pagadas, ha provocado que la composición de sus portafolios de inversión sea más compleja atribuido a la creciente negociación de instrumentos financieros tales como obligaciones, acciones, tipos de cambio, bienes físicos y productos derivados. Cabe resaltar el hecho de que los pasivos financieros de los inversionistas institucionales están directamente relacionados con valores actuariales determinados por las estadísticas de jubilación, las tasas de mortalidad y/o la ocurrencia de siniestros como incendios o desastres naturales.

Por todo lo anterior, el objetivo principal de las compañías de seguros, los fondos de pensiones y los fondos de inversión es desarrollar estrategias de inversión que generen suficientes flujos de efectivo para solventar las reclamaciones futuras, pagos de provisiones, etc., ante la ocurrencia de un evento inesperado (Moix, 2001). Ante esta situación, el papel que juega la administración de riesgos como estrategia en la toma de decisiones, es fundamental para determinar mejores alternativas de inversión tomando en cuenta las propiedades deseables de la relación riesgo-rendimiento en términos relativos frente a otras oportunidades de inversión posibles, es decir, la selección del indicador de comportamiento y tendencias históricos (*benchmark*), que permite el análisis de la relación entre los resultados y el riesgo del portafolio de inversión, facilitando al inversionista un mejor conocimiento de si el portafolio de inversión atraviesa sólo por una racha de suerte o bien, ofrece con regularidad

atractivos rendimientos. En este contexto, un excelente *benchmark* se alcanza con el diseño de óptimos portafolios diversificados. Asimismo, un óptimo *benchmark* tiene que garantizar una oportunidad de inversión adecuada y racional que conlleve a minimizar los costos de información y de transacción.

Sin embargo, cabe aclarar que estas estrategias proporcionan a los administradores de portafolios un sin número de formas eficientes para alcanzar rendimientos óptimos consistentes con su aversión al riesgo, absoluta o relativa. Esto se debe a que el *benchmark* refleja la actitud hacia el riesgo por parte de los inversionistas individuales e institucionales. Por ejemplo, un inversionista con mayor aversión al riesgo seleccionará un *benchmark* con un riesgo y rendimiento esperado bajo, mientras que un inversionista con baja aversión al riesgo escogerá un *benchmark* más riesgoso que proporcione un rendimiento esperado más alto.¹²

A medida que los mercados financieros se desarrollen y las barreras disminuyan para extender la apertura de las operaciones y los servicios financieros, la necesidad por el surgimiento de una cultura de administración de riesgos será más importante para los inversionistas, instituciones financieras y no financieras. Para alcanzar una administración de riesgos exitosa es indispensable que todos los participantes del mercado fomenten la cultura y la educación para una toma de riesgos más apropiada; se requiere también del desarrollo de modelos más sofisticados que permitan evaluar de manera dinámica los rendimientos de los diferentes instrumentos financieros o estrategias relativas al riesgo incurrido. De acuerdo con Lo (1999), la sana práctica de la administración de riesgos no sólo debe estar basada en la probabilidad de las pérdidas extremas, sino también en factores importantes como las preferencias y los precios, cuya interacción permitirá a los inversionistas individuales e institucionales determinar de manera más efectiva la evolución del perfil del riesgo en los portafolios a través del tiempo. Así, las preferencias reflejan el comportamiento de los inversionistas cuando se enfrentan a la incertidumbre en el futuro, facilitando con ello la decisión de la cantidad de riesgo a tomar y la cantidad de riesgo a transferir. Las probabilidades

¹² Un excelente estudio que explica con más detalle la selección del *benchmark* incluye a Dowd (1999).

representan una descripción formal del proceso de valuación del riesgo a través de la estimación consistente de la probabilidad de los eventos futuros, porque las decisiones de inversión basadas en probabilidades inconsistentes podrían generar pérdidas financieras significativas para los inversionistas. En este contexto, la principal fuente de volatilidad en los mercados financieros se deriva de los factores de riesgo, cuyas dinámicas son modeladas en términos probabilísticos. Por su parte, los precios que dependen de las preferencias y las probabilidades en gran medida, representan la valuación justa de los instrumentos financieros como una función de los factores de riesgo básicos. Por tal motivo, la fijación de los precios es fundamental para entender completamente la naturaleza de los riesgos financieros y los premios, es decir, constituye el costo que los inversionistas están dispuestos a pagar por administrar los niveles de exposición al riesgo.

El uso de mecanismos de medición y cobertura para identificar y monitorear los riesgos financieros proporcionan claras ventajas para desarrollar normas unificadas clave que permitan el progreso y la fomentación de la cultura de la administración de riesgos en los mercados financieros, especialmente, en los países emergentes. Por consiguiente, la administración de riesgos como estrategia desempeña una función relevante dentro de la industria financiera, así como en otros sectores de la economía distintos al financiero; proporciona herramientas poderosas de defensiva y ofensiva para contrarrestar las contingencias que se derivan de los posibles efectos de los riesgos incurridos en la toma de decisiones de inversión.

1.4 Factores Importantes que han Contribuido al Desarrollo de la Cultura de la Administración de Riesgos

La administración de riesgos es una de las áreas que ha experimentado más innovaciones durante los últimos años. En gran medida los servicios financieros constituyen el sector más importante de la economía global dado los cuantiosos volúmenes de movimientos de capital que se dan a través de sus instituciones y mercados, particularmente en las economías emergentes. Por ejemplo, Brasil y México

ocuparon la tercera y cuarta posición entre los países emergentes que más captaron flujos de inversión extranjera directa en el año de 2004, con \$18,200 y \$16,600 millones de dólares, lo que representó 2.8% y 2.5% de su Producto Interno Bruto, superados por China y Hong Kong, que captaron \$60,600 millones de dólares (3.7% de su PIB) y \$34,100 millones de dólares (20.7% de su PIB). De ahí que es en este sector financiero donde la administración de riesgos ha hecho el progreso más rápido. En este contexto, la administración de riesgos se define como el proceso que permite: la identificación de la exposición de riesgos financieros; la medición de riesgos usando información y modelos estadísticos financieros complejos; el monitoreo y el reporte de la valuación de la exposición de riesgos financieros sobre una base oportuna; es decir, en tiempo real, así como la efectividad de la estrategia de la administración del riesgo y, finalmente, el control de riesgos financieros involucrando a la alta dirección de empresas e instituciones en las actividades de la administración de riesgos (Basilea, 2001).

Existen varios factores que han contribuido a la evolución de la cultura de la administración de riesgos en la industria financiera como una respuesta al enorme crecimiento y volatilidad que han experimentado los mercados financieros durante las últimas cuatro décadas como consecuencia de su liberalización y nuevo alcance mundial, esto es, su globalización. Entre estos factores deben resaltarse: 1) la ruptura del acuerdo de Bretton Woods iniciada en 1971 y los cambios en los precios de los energéticos y productos; 2) la liberalización y desregulación financiera de los mercados locales e internacionales; 3) los avances en computo y telecomunicaciones; y 4) los escándalos financieros de grandes empresas.

La liberalización y desregulación de los mercados financieros ha contribuido a que los flujos internacionales de capital, así como los precios de los activos financieros fluctúen y se ajusten rápidamente en función de los cambios de la oferta y demanda y de las expectativas de los agentes económicos. Esto es, el comportamiento de los mercados financieros sigue ahora procesos aleatorios pues no están sujetos a los arbitrarios límites impuestos por autoridades financieras. Estos límites en tasas de interés, tipos de cambio, préstamos crediticios, ingreso de capitales extranjeros,

restricciones a las salidas de capital conllevaron al mantenimiento de precios y tasas extraoficiales y sobreajustes drásticos con efectos muy negativos para las economías involucradas en tales ajustes; un ejemplo claro es el caso del tipo de cambio. En el caso de México, las crisis de 1976 (58.79%), 1982 (44.87% y 56.06%) y 1994 (22.28%) fueron en gran medida generadas y transmitidas por las macrodevaluaciones que tuvieron que instrumentarse. La adopción del sistema de paridades fijas sólo conllevó a la incertidumbre y como tal difícil de medir para controlar posibles pérdidas. Con la adopción de un mercado libre de cambios el peso mexicano, en la última década, ha experimentado diversos cambios, pero medibles, de tal manera que se pueden determinar niveles de riesgo y administrar su presencia. La liberalización y desregulación de los mercados financieros también implica la necesidad de una administración del riesgo más dinámica y rigurosa porque en los mercados internacionales existe una gran competencia por la captación de los recursos para las inversiones empresariales y gubernamentales.

Igualmente, la desregulación en las operaciones financieras no sólo ha creado mejores oportunidades reales de inversión para los participantes del mercado que cuenten con las herramientas suficientes para desarrollar estrategias efectivas que les permitan mantenerse en iguales circunstancias que sus competidores internacionales, sino también ha originado nuevos retos debido a que el perfil del riesgo de las empresas o de los portafolios de inversión se vuelve más complejo por los crecientes ajustes en los mercados domésticos e internacionales.

La acelerada desregulación en los flujos de capital ha impulsado la inversión extranjera en los países en vías de desarrollo, atrayendo crecientes inversiones a sus mercados de capital como resultado de los altos rendimientos otorgados. No obstante, cabe resaltar que el riesgo prácticamente no ha desaparecido en estas economías emergentes, e incluso se mantiene más persistente, alimentado por las instituciones financieras y no financieras, empresas e inversionistas individuales al momento de diversificar sus portafolios entre varios instrumentos financieros y divisas; obligándolos a demandar mejores mecanismos de cobertura y metodologías de medición que

ayuden a reducir o neutralizar la exposición de los diferentes riesgos financieros a que están expuestos. En este sentido, la cultura de la administración de riesgos se ha desarrollado en forma paralela con el crecimiento de los mercados de derivados financieros que operan desde la década de los 1970s. La innovación de nuevos instrumentos financieros conocidos como productos derivados es uno de los grandes éxitos de la ingeniería financiera que ha contribuido al desarrollo de la administración de riesgos en los países industrializados y emergentes. El volumen de operación de estos instrumentos financieros ha crecido en forma exponencial de \$56,000 billones de dólares en marzo de 1995 a \$233,913 billones de dólares en diciembre de 2003,¹³ puesto que los principales participantes de los mercados de dinero y capital han encontrado mejores formas para proteger y diversificar sus portafolios de inversión, tomando ventaja de la gran especulación y las amplias oportunidades de arbitraje que se generan a través de la compra-venta de instrumentos financieros en diferentes mercados. Debido a su bajo costo, por consecuencia del alto apalancamiento estos instrumentos, en un ambiente de extrema volatilidad, permiten a las instituciones financieras e inversionistas reducir o eliminar el riesgo financiero e incluso incrementar los rendimientos de las inversiones de portafolio en comparación con los instrumentos financieros tradicionales. Sin embargo, el potencial de apalancamiento ilimitado y la exposición a movimientos no lineales en los mercados hacen que el uso de productos derivados sea un reto para las instituciones financieras e inversionistas individuales, ya que pueden generar riesgos cada vez más complejos y difíciles de cuantificar en la nueva arquitectura económica y financiera internacional.

Los avances computacionales y de telecomunicaciones también han jugado un papel fundamental tanto en el desarrollo de instrumentos financieros como en la creación de modelos más sofisticados, facilitando con ello el control y la medición del riesgo en sus diferentes manifestaciones. Asimismo, estos factores han sido piezas clave en el desarrollo de la cultura de la información, proporcionando sistemas y redes avanzadas para capturar y proveer información relevante y oportuna que contribuye a

¹³ Para una descripción más detallada de la participación total de cada uno de los instrumentos financieros que cotizan en los mercados de derivados, véase Jorion (2005).

una mejor identificación y comprensión del riesgo financiero, porque una eficiente asignación del capital depende, en gran medida, de la calidad y fácil interpretación de la información. Además, el desarrollo de la tecnología de la información y la integración de los mercados financieros permiten el libre acceso en forma continua y perfecta a otros mercados financieros internacionales, reduciendo las distancias y los tiempos en las operaciones y diversificación de los portafolios de inversión. En consecuencia, los sistemas y la información integrados son considerados un componente vital en la infraestructura de la administración del riesgo financiero hoy en día, debido a que reducen la existencia de información asimétrica¹⁴ entre los inversionistas participantes en los mercados financieros.

Por otra parte, la década de los noventa ha sido testigo de varios desastres financieros dramáticos que ha experimentado la industria financiera entre los cuales se mencionan a Procter and Gamble, el Condado de Orange y Daiwa (Estados Unidos, 1994, 1995), Banco Banesto (España, 1992), Metallgesellschaft (Alemania, 1993), Crédit Lyonnais (Francia, 1994) y Banco Barings (Reino Unido, 1995), tal vez el más sonado por el impacto que representó su caída.¹⁵ Estos incidentes y los casos de fraude cometidos por Enron, Worldcom y Parmalat por la realización de operaciones ilícitas han provocado pérdidas catastróficas en algunas instituciones financieras grandes del mundo a causa de la carencia de controles internos para la medición del riesgo financiero y la implementación de sistemas de administración de riesgos apropiados. La presencia de estos hechos ha obligado a las autoridades reguladoras e instituciones financieras, así como inversionista institucionales a tomar más conciencia de los peligros a que están expuestos en este nuevo entorno globalizado. Asimismo,

¹⁴ La información asimétrica existe cuando las dos partes de un contrato financiero no poseen la misma información sobre la operación a llevarse a cabo (préstamos entre un cliente y un banco, propietarios de una empresa y nuevos accionistas, un asegurado y la compañía aseguradora, etc.); una de las partes cuenta con mayor información lo que la pone en ventaja en relación a la otra. Ejemplos de ésta situación constituyen el prestatario de un banco que conoce el alto riesgo de su inversión pero que retiene información pertinente al solicitar un crédito; el empresario que emite nuevas acciones o títulos de endeudamiento sin revelar adecuadamente, a los posibles nuevos accionistas, la situación financiera de la empresa; el individuo que padece de una grave enfermedad pero solicita un seguro de vida a la aseguradora, el banquero que asume riesgos indebidos por contar con un seguro para los depósitos. Véase Ortiz (2007).

¹⁵ Excelente literatura que discute y explica con más profundidad los desastres financieros ocurridos en la década de los noventa incluye a Jorion (2000).

los efectos negativos de los escándalos financieros anteriores han obligado a las autoridades reguladoras en un contexto internacional a establecer nuevos requerimientos de capital que excedan el 8%,¹⁶ con el fin de alcanzar una adecuada medición del riesgo de liquidez, de la cartera vencida y que por ello la administración de riesgos ha adquirido gran relevancia para la banca. Así, el Comité de Basilea para la Supervisión Bancaria ha reconocido la vital importancia de los sofisticados modelos internos desarrollados por los bancos para la estimación del riesgo de mercado y determinación de los requerimientos de capital. En este contexto, una moderna medida de riesgo que ha llamado la atención tanto de los participantes del mercado como de las autoridades, y que ha revolucionado la administración de riesgos en un contexto internacional, ha sido la metodología valor en riesgo (VaR).

En consecuencia, la función de la regulación financiera tanto a nivel nacional como internacional no sólo ha contribuido en la evolución de la cultura de la administración de riesgos, sino también ha fomentado la competitividad, la transparencia y el sano desarrollo en el sector financiero durante los últimos años.

¹⁶ Véase Basel Committee on Banking and Supervision, (1988), International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards, BIS, Basel, Switzerland.

CAPITULO 2

Marco Teórico: Valor en Riesgo y Métodos Convencionales para la Administración del Riesgo Financiero

2.1 Concepto de Valor en Riesgo y Propiedades

Desde que los inversionistas han adoptado la administración de riesgos sobre una base cuantitativa, nuevas y sofisticadas medidas de riesgo han surgido para cuantificar el nivel de exposición al riesgo. En la literatura, existen dos familias de modelos comúnmente utilizadas para la medición del riesgo financiero: 1) las medidas de riesgo de sensibilidad, y 2) las medidas de riesgo basadas en el cuantil o percentil de la distribución de pérdidas y ganancias conocidas como las metodologías de valor en riesgo (VaR por sus siglas en inglés). En la actualidad, la metodología VaR se ha convertido en una herramienta estadística estándar esencial para la administración y medición del riesgo de mercado atribuido a su fácil implementación y flexibilidad. Aunque la medida VaR también puede ser utilizada para estimar los riesgos de crédito y operacional.¹ El principal objetivo de esta tesis se enfoca al análisis del riesgo de mercado.

El VaR de un portafolio de activos financieros se define como la máxima pérdida probable que un agente económico enfrentará durante un horizonte de tiempo, dado un cierto nivel de confianza, generalmente del 95% y 99%, al fondear o liquidar todas las posiciones de su portafolio a causa de los movimientos inesperados que pueden sufrir los factores de mercado tales como los tipos de cambio, las tasas de interés, los precios de los bienes y los títulos de capital. Asimismo, esta técnica estadística es

¹ Cabe resaltar que la medida VaR no es suficiente para cubrir todos los riesgos financieros a que están expuestas las entidades financieras o inversionistas, tales como los riesgos de liquidez y legal.

utilizada por los reguladores para mantener un control de las operaciones de las instituciones financieras, determinando óptimos requerimientos de capital que garantizan sus posiciones de mercado y una mejor asignación del capital del banco hacia las áreas más rentables del negocio sobre una base de riesgo ajustado.

En términos estadísticos, el VaR se define como la probabilidad de que los cambios en el valor del portafolio no excederán la máxima pérdida durante un horizonte de tiempo especificado para un nivel de confianza c ; es decir,

$$\Pr(\Delta P \leq -\text{VaR}_c) = c,$$

donde ΔP representa los cambios o pérdidas en el valor del portafolio.

Por ejemplo, si el VaR de un portafolio es igual a \$200,000 durante un horizonte de tiempo de 100 días con un nivel de confianza del 99%, significa que el portafolio puede sufrir pérdidas superiores al VaR una vez cada cien días ($0.01 \cdot 100 = 1$). De manera análoga, las pérdidas en el portafolio serán inferiores al VaR en 99 veces de los 100 días.

Otra forma para estimar el VaR de un portafolio, se obtiene al encontrar la función inversa de la distribución acumulada de los factores de riesgo.² Esto es, se fija un espacio de probabilidad (Ω, F, P) donde Ω representa el espacio muestral o conjunto de posibles resultados, F es una σ -álgebra³ que representa los eventos medibles, P es una medida de probabilidad y X es una variable aleatoria que representa las pérdidas y ganancias del portafolio de inversión durante un horizonte de

² El cambio en el valor del portafolio está gobernado por los cambios en los factores de riesgo, representados por un subconjunto de variables de mercado que afectan el precio de los instrumentos financieros que componen al portafolio. Véase Crouhy, Galai y Mark (2000).

³ Una σ -álgebra F es un subconjunto de Ω si satisface las siguientes condiciones:

- 1) $\Omega \in F$
- 2) $A \in F \Rightarrow A^c \in F$
- 3) $(A_n)_{n=1}^{\infty} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$.

tiempo dado. Así, la función de distribución para la variable aleatoria X es denotada por:

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x),$$

donde $F_X(x)$ es absolutamente continua con función de densidad $f_X(x) > 0$ para toda $x \in R$. Esto significa que la función de distribución $F_X(x)$ es estrictamente creciente para $x \in R$ y su función inversa existe, la cual es denotada por $F_X^{-1}(x)$, $0 < x < 1$.⁴ Como resultado, la definición exacta de la medida VaR de la variable aleatoria X está determinada por el c -percentil de la distribución de pérdidas y ganancias $F_X(x)$ con signo negativo; es decir,

$$\text{VaR}_c = -F_X^{-1}(c).$$

Pero no siempre el VaR se puede definir para todos los valores de c , esto sucede cuando la distribución de pérdidas y ganancias es multimodal. Ocasionalmente que la función inversa $F_X^{-1}(c)$ no exista e incluso su imagen no está bien definida, ya que existe un rango de valores en donde la imagen de la función inversa está compuesta por tres puntos (Szegő, 2002). Para solucionar este problema, Rockafellar y Uryasev (2002) definen a la medida VaR como el número más pequeño que pertenece al conjunto $F_X^{-1}(c)$, o como el c -percentil de la función inversa generalizada de $F_X(x)$, expresada de la siguiente manera:

$$\text{VaR}_c = -F_X^{-1}(c) = -\inf\{x | F_X(x) \geq c\} = -\inf\{x | \Pr[X \leq x] \geq c\},$$

indicando que la máxima pérdida en el valor del portafolio no excederá el nivel del VaR el $c\%$ de las veces. La especificación del periodo de tiempo y el nivel de confianza son

⁴ En caso de que no exista la función de distribución inversa única se puede relajar el concepto. Véase Embrechts, Küppelberg y Mikosch (1997).

relativamente arbitrarios en la estimación del valor en riesgo.⁵ El intervalo de tiempo apropiado para cuantificar el VaR, en gran medida, depende de la estabilidad de la estructura del mercado asociada a la bursátilidad y frecuencia de negociación de los instrumentos financieros del portafolio de inversión. En consecuencia, los métodos VaR son más confiables para estimar el riesgo sobre periodos de tiempo cortos de un día a un mes. Para propósitos de regulación de requerimientos de capital, el Comité de Basilea sugiere que la estimación del VaR se realice sobre un horizonte de tiempo de 10 días, utilizando un nivel de confianza del 99%. Esto es, las instituciones financieras que calculen el VaR con un intervalo de confianza o probabilidad del 99%, las pérdidas generadas en el portafolio de inversión sólo excederán el nivel del VaR el 1% de las veces, o 1 vez cada 100 días de operación de mercado. En la actualidad, existe extensa literatura que explica con más detalle el concepto de valor en riesgo que incluyen a Jorion (2000), Crouhy, Galai y Mark (2000) y Dowd (1998).

Por su parte, para estimar el valor en riesgo de un portafolio de instrumentos financieros, en primer lugar, se tiene que identificar cuales son los factores de riesgo cuyo comportamiento puede afectar de manera significativa en el valor del portafolio de inversión. El segundo paso es determinar una distribución de los cambios en el valor del portafolio; es decir, la sensibilidad de los rendimientos del portafolio derivada de los cambios en los factores de riesgo valuados a precio de mercado (*mark to market*), así como la cuantificación del impacto de la variación en el valor del portafolio de cada uno de los instrumentos financieros que lo componen. El último paso consiste en estimar el VaR del portafolio dado un intervalo de confianza a fin de determinar la variación máxima esperada de los factores de riesgo, la cual dependerá de la metodología que se seleccione y de las series financieras históricas que se utilicen para estimar el VaR.

A pesar de claras debilidades, la metodología VaR no sólo ha sido institucionalizada como una herramienta estándar para la administración y medición del riesgo de mercado en la práctica financiera moderna por parte de las instituciones financieras, sino también por los inversionistas individuales e institucionales. Esta

⁵ Esta definición también se puede extender para distribuciones de pérdidas y ganancias discretas.

herramienta simple ha sido la clave para el desarrollo de la cultura de la administración de riesgos, ya que está cimentada sobre un lenguaje común en la comunidad financiera.

Las principales razones para utilizar los modelos VaR tienen que ver con las características interesantes que ofrecen para adaptarse a las necesidades de los participantes del mercado, las cuales se mencionan a continuación:

- a) El VaR ofrece una medida resumen de la totalidad del riesgo al capturar todas las fuentes posibles del riesgo de mercado en un marco integrado y consistente. Esta característica hace que el VaR sea más fácil de entender como un indicador clave del riesgo en términos monetarios, no sólo para las mesas directivas de los bancos y las autoridades reguladoras, sino también para los directivos de las corporaciones y los inversionistas individuales e institucionales.
- b) El VaR puede expresar las pérdidas y ganancias de un portafolio en términos estocásticos, puesto que puede asociarles una probabilidad de ocurrencia con sólo observar los datos históricos o asumiendo una distribución de probabilidad para las pérdidas y ganancias esperadas.
- c) El VaR se puede usar como una medida de riesgo, ya que está relacionada a la máxima pérdida que una institución financiera puede estar expuesta, por tomar una posición de mercado. Además, fácilmente se puede traducir en un requerimiento de capital óptimo que garantice la solvencia de las instituciones financieras. Debido a que mide el desempeño ajustado al riesgo del capital generado por las actividades de las instituciones financieras.
- d) El uso de la medida VaR como una herramienta eficiente en la asignación de capital permite a los administradores de riesgos detectar la posición con mayor riesgo a que están expuestos los inversionistas y las instituciones financieras a través de un conjunto de restricciones.

2.2 Medidas de Valor en Riesgo Convencionales

Las entidades financieras y los inversionistas individuales han utilizado diferentes técnicas y modelos desarrollados por economistas financieros, con el fin de evaluar y cuantificar las decisiones de inversión de sus líneas de negocio. En la literatura financiera, el desarrollo de modelos analíticos tiene su significativo auge desde fines de la década de los años treinta con el modelo de duración introducido por Macaulay (1938), que más tarde fue corregido por el concepto de convexidad. Estas medidas de sensibilidad miden la exposición al riesgo de tasas de interés inherente a los instrumentos de renta fija. Otra medida de riesgo basada en la teoría moderna del portafolio de Markowitz (1952, 1959) es el Modelo de Fijación de Precios de Activos de Capital (Capital Asset Pricing Model, CAPM); conocido como el factor beta que determina la estructura de correlación de los rendimientos del activo financiero y los rendimientos del mercado desarrollado en forma independiente por Sharpe (1964) y Lintner (1965) y generalizado por Mossin (1966). Los modelos de fijación de precios por arbitraje (Arbitrage Pricing Theory, ATP) y multifactoriales propuestos por Ross (1976) y Chen, Roll y Ross (1986) son extensiones del modelo CAPM; evalúan el riesgo sistemático de los activos financieros con base en múltiples factores tales como la inflación, las tasas de interés, el crecimiento del producto interno bruto, la conducta de los inversionistas, etc. Finalmente, otro conjunto de medidas de sensibilidad adoptadas por los operadores de los mercados de derivados son las letras Griegas,⁶ utilizadas para medir el riesgo en las opciones, principalmente originado por cambios en el precio y la volatilidad del activo subyacente.

Sin embargo, la mayoría de estos modelos, utilizados por los administradores de riesgos como herramientas para el análisis de las inversiones financieras, no cumplen con ciertas propiedades básicas y deseables. Por ejemplo, algunas medidas no proporcionan información suficiente de todas las posibles interacciones entre los factores de riesgo que afectan al valor del portafolio de inversión, ya que estiman el

⁶ Para un mejor análisis de estas medidas de sensibilidad para diversos activos subyacentes. Véase, por ejemplo, Hull (2002).

riesgo de manera individual; es decir, no consideran los efectos de la diversificación capturado por la amplia gama de instrumentos financieros, mercados y divisas existentes. Mientras que otras aproximaciones subestiman el riesgo como consecuencia de los supuestos distribucionales propuestos. En contraste, una herramienta estadística alternativa más flexible e intuitiva que mide el riesgo para cualquier tipo de portafolio en un contexto global, tomando en cuenta todas las posibles interacciones tales como las volatilidades y correlaciones de los factores de riesgo, es la medida valor en riesgo (VaR). Esta medida proporciona información importante de la distribución de rendimientos para cuantificar el riesgo en portafolios grandes y complejos, derivado de las fluctuaciones en los precios de los factores de mercado.

La identificación de factores de riesgo básicos juega un papel importante en la cuantificación del VaR, puesto que permite descomponer las características de los activos financieros del portafolio, proporcionando información más confiable y de fácil manejo. En este sentido, la precisión de los factores de riesgo para describir los cambios en los precios de los activos financieros es una aproximación parsimoniosa, ya que sólo se requiere la distribución de rendimientos para un número limitado de factores de mercado. Aunque cada factor de riesgo afecta los precios de los activos financieros de diferente manera. Por ejemplo, si un inversionista en valores patrimoniales toma una posición en un mercado de capitales internacional, el valor del portafolio es afectado por los precios de la acción y el tipo de cambio. Así, en el VaR solamente se requiere determinar la magnitud de la covarianza de los factores de riesgo, la cual puede ser positiva o negativa dependiendo de la dirección que tomen los factores de riesgo.

En consecuencia, las instituciones financieras, en los últimos años, han desarrollado varias metodologías de valor en riesgo para cuantificar e identificar el riesgo de sus posiciones de mercado, con el fin de cumplir con las regulaciones internacionales. Aunque la eficiencia de las diversas aproximaciones depende, en gran medida, de sus supuestos estadísticos y financieros. En este sentido, los métodos más populares para medir el riesgo de mercado según el VaR son el método delta-normal,

los modelos autorregresivos de heteroscedasticidad condicional generalizados (GARCH) y los modelos dinámicos o de suavizamiento exponencial (EWMA), los cuales forman parte de los métodos paramétricos, así como los métodos de simulación o métodos no paramétricos, reconocidos y propuestos por el Comité de Basilea como medidas de riesgo para la determinación de los requerimientos de capital; es decir, reservas que deben mantener las entidades bancarias para hacer frente a posibles pérdidas inesperadas derivadas de sus posiciones de mercado.

2.2.1 Método Delta-Normal

La institución J. P. Morgan (1995) introdujo el método delta-normal para el cálculo del riesgo de mercado a través de su popular metodología RiskMetrics; esta aproximación también es conocida como el método de varianza-covarianza. Esta medida estándar universal adoptada por varias instituciones financieras está cimentada en la teoría del portafolio de Markowitz (1952), así denominado por ser quien comenzó a utilizar medidas estadísticas de dispersión acerca de los rendimientos esperados como una medida de riesgo de los factores de mercado. Markowitz, también estableció el concepto de covarianza y correlación para determinar que el riesgo en el portafolio disminuye como consecuencia de los efectos de la diversificación cuando los activos financieros entre sí presentan correlaciones negativas.⁷ Esta aproximación local de primer orden estima las estadísticas del VaR, tomando en cuenta las fluctuaciones pasadas en los precios de todos los instrumentos financieros del portafolio, las cuales están linealmente relacionados con un número reducido de factores de riesgo. Este método asume que los rendimientos de los factores de riesgo del mercado se distribuyen independientemente e idénticamente como variables aleatorias normales multivariadas, con volatilidades y correlaciones estables durante el horizonte de tiempo establecido. Así, el VaR de un portafolio se puede calcular directamente con sólo obtener la distribución de probabilidad acumulada conjunta normal de los cambios instantáneos en los factores de riesgo, y un argumento muy ad hoc que facilita la

⁷ Es importante resaltar que una medida de dispersión puede ser adoptada como medida de riesgo siempre y cuando la distribución de los cambios en los factores de riesgo pertenezca a la clase de distribuciones elípticas simétricas. Para más detalles, véase Ingersoll (1987).

interpretación estadística del VaR por medio de niveles de confianza (J. P. Morgan, 1995; Jorion, 2000).

En general, esta metodología estima el riesgo para portafolios compuestos por posiciones lineales, tales como títulos de capital, bonos, materias primas (*commodities*), forwards, futuros y swaps debido a que pueden ser expresados como una función lineal de un conjunto de factores de riesgo, cuyos valores de las posiciones son afectados únicamente por los movimientos ya sea en los precios de los índices bursátiles, tasas de interés, bienes físicos y tipos de cambios cuando se toman posiciones en mercados financieros internacionales. Para los portafolios que incluyen solamente factores de riesgo lineales, el VaR se calcula fácilmente a partir de la matriz de varianza-covarianza y de los vectores de las posiciones tomadas en cada instrumento, lo cual presenta una gran ventaja en términos de simplicidad para los grandes portafolios institucionales. Sin embargo, para los portafolios que incluyen exposiciones de riesgo no lineales tales como las opciones financieras⁸ se deben utilizar algunas técnicas más ad hoc, con el fin de mejorar las aproximaciones locales de primer orden. El método delta-gamma estima el valor en riesgo para portafolios que contienen factores de mercado no-lineales, realizando una expansión en series de Taylor hasta términos de segundo orden para los cambios de los factores de riesgo. Existe literatura que describe la aproximación delta-gamma como una extensión del modelo delta-normal para estimar el VaR de los portafolios que están compuestos por posiciones no lineales tales como las opciones financieras vanillas (Allen, 1997; Duffie y Pan, 1997).

Para definir formalmente el método delta-normal es necesario establecer una función $P(S_{1t}, S_{2t}, \dots, S_{n-1t}, S_{nt}; X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_n; t)$ que represente el valor del portafolio en el tiempo t formada por X_i instrumentos financieros con precios de mercado S_{it} para $i = 1, 2, \dots, n$.

⁸ Las opciones financieras presentan un perfil de pago no lineal debido a que el valor de la posición no sólo depende de los movimientos del activo subyacente, sino también de otros factores como el vencimiento, la situación de la opción cuando se encuentra dentro o fuera del dinero y la volatilidad implícita generada por las expectativas de los participantes del mercado.

Suponiendo que la dinámica de los precios de los instrumentos financieros que forman al portafolio está gobernada por las siguientes ecuaciones diferenciales estocásticas⁹:

$$\begin{aligned}
 dS_{1t} &= S_{1t}\mu_1 dt + S_{1t}\sigma_1 dW_{1t} \\
 dS_{2t} &= S_{2t}\mu_2 dt + S_{2t}\sigma_2 dW_{2t} \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 dS_{n-1t} &= S_{n-1t}\mu_{n-1} dt + S_{n-1t}\sigma_{n-1} dW_{n-1t} \\
 dS_{nt} &= S_{nt}\mu_n dt + S_{nt}\sigma_n dW_{nt},
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

donde el parámetro μ_i que define a la tendencia instantánea representa el rendimiento esperado, σ_i es la desviación estándar o volatilidad del rendimiento esperado del activo financiero S_{it} , y W_{it} es un proceso de Wiener o movimiento Browniano estándar que tiene incrementos temporales independientes y sigue una distribución normal con $E[dW_{it}] = 0$; $\text{Var}[dW_{it}] = dt$ y $\text{Cov}[dW_{it}, dW_{jt}] = \rho_{ij} dt$, para $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 1, 2, \dots, n$ con $i \neq j$.

Aplicando el Lema de Itô¹⁰ a la función del valor del portafolio $P(S_{1t}, S_{2t}, \dots, S_{n-1t}, S_{nt}; X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_n; t)$ hasta términos de primer orden se tiene que:

$$dP = \frac{\partial P}{\partial S_{1t}} dS_{1t} + \frac{\partial P}{\partial S_{2t}} dS_{2t} + \dots + \frac{\partial P}{\partial S_{n-1t}} dS_{n-1t} + \frac{\partial P}{\partial S_{nt}} dS_{nt} + \frac{\partial P}{\partial t} dt.
 \tag{2.2}$$

⁹ Black y Scholes (1973) propusieron este proceso de difusión para determinar el precio de las opciones Europeas de manera analítica. Supusieron que la dinámica del precio del activo subyacente está gobernado por un movimiento Browniano geométrico.

¹⁰ El Lema de Itô para procesos estocásticos es una modificación de la expansión de series de Taylor. La diferencia con el caso determinístico es que los términos estocásticos de segundo orden no pueden ser omitidos. Un excelente texto que explica y aplica el Lema de Itô en las finanzas incluye a Neftci (1996).

La condición necesaria de dependencia lineal en los precios de los activos financieros que componen al portafolio establece que las derivadas parciales de segundo orden tienen que ser iguales a cero. De tal manera que estos cambios de segundo orden en los factores de riesgo no afecten en el cambio del valor del portafolio.

Sustituyendo la dinámica de los precios de los activos financieros en la ecuación (2.2) se tiene que

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial S_{1t}} S_{1t} \mu_1 + \frac{\partial P}{\partial S_{2t}} S_{2t} \mu_2 + \dots + \frac{\partial P}{\partial S_{n-1t}} S_{n-1t} \mu_{n-1} + \frac{\partial P}{\partial S_{nt}} S_{nt} \mu_n + \frac{\partial P}{\partial t} \right) dt + \left(\frac{\partial P}{\partial S_{1t}} S_{1t} \sigma_1 dW_{1t} + \frac{\partial P}{\partial S_{2t}} S_{2t} \sigma_2 dW_{2t} + \dots + \frac{\partial P}{\partial S_{n-1t}} S_{n-1t} \sigma_{n-1} dW_{n-1t} + \frac{\partial P}{\partial S_{nt}} S_{nt} \sigma_n dW_{nt} \right). \quad (2.3)$$

Suponiendo que

$$\delta_k = \frac{\partial P}{\partial S_{kt}} S_{kt} \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, n \quad \text{y} \quad \frac{\partial P}{\partial t} = 0,$$

donde δ_k es un vector de $n \times 1$ que representa la sensibilidad del portafolio con respecto al factor de riesgo k . En este caso, la derivada parcial del valor del portafolio con respecto al tiempo se hace cero debido a que el activo financiero es independiente del tiempo.

$$dP = (\delta_1 \mu_1 + \delta_2 \mu_2 + \dots + \delta_{n-1} \mu_{n-1} + \delta_n \mu_n) dt + (\delta_1 \sigma_1 dW_{1t} + \delta_2 \sigma_2 dW_{2t} + \dots + \delta_{n-1} \sigma_{n-1} dW_{n-1t} + \delta_n \sigma_n dW_{nt}). \quad (2.4)$$

Tomando la varianza a la ecuación (2.4) que representa el cambio en el valor del portafolio se tiene que

$$\begin{aligned} \text{Var}[dP] = & \text{Var}[(\delta_1\mu_1 + \delta_2\mu_2 + \dots + \delta_{n-1}\mu_{n-1} + \delta_n\mu_n) dt] + \\ & + \text{Var}[(\delta_1\sigma_1 dW_{1t} + \delta_2\sigma_2 dW_{2t} + \dots + \delta_{n-1}\sigma_{n-1} dW_{(n-1)t} + \delta_n\sigma_n dW_{nt})]. \end{aligned}$$

Ahora distribuyendo el operador de la varianza para cada uno de las variables se tiene que

$$\begin{aligned} \text{Var}[dP] = & \delta_1^2\sigma_1^2\text{Var}[dW_{1t}] + \delta_2^2\sigma_2^2\text{Var}[dW_{2t}] + \dots + \delta_{n-1}^2\sigma_{n-1}^2\text{Var}[dW_{(n-1)t}] + \delta_n^2\sigma_n^2\text{Var}[dW_{nt}] + \\ & + \delta_1\delta_2\sigma_1\sigma_2\text{Cov}[dW_{1t}, dW_{2t}] + \delta_1\delta_3\sigma_1\sigma_3\text{Cov}[dW_{1t}, dW_{3t}] + \dots + \delta_{n-1}\delta_n\sigma_{n-1}\sigma_n\text{Cov}[dW_{(n-1)t}, dW_{nt}] \end{aligned} \quad (2.5)$$

Pero W_i es un proceso de Wiener que se distribuye normal con $E[dW_{it}] = 0$; $\text{Var}[dW_{it}] = dt$ y $\text{Cov}[dW_{it}, dW_{jt}] = \rho_{ij} dt$, entonces la varianza del cambio en el valor del portafolio es igual a

$$\text{Var}[dP] = [\delta_1^2\sigma_1^2 + \delta_2^2\sigma_2^2 + \dots + \delta_{n-1}^2\sigma_{n-1}^2 + \delta_n^2\sigma_n^2 + \delta_1\delta_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + \delta_1\delta_3\rho_{13}\sigma_1\sigma_3 + \dots + \delta_{n-1}\delta_n\rho_{n-1n}\sigma_{n-1}\sigma_n] dt. \quad (2.6)$$

Otra forma de definir la varianza de los cambios en el valor del portafolio es de la siguiente forma:

$$\text{Var}[dP] = \text{Var}[\Delta P] = \sigma_{\Delta P}^2. \quad (2.7)$$

En consecuencia, la varianza de los cambios en el valor del portafolio expresado en forma matricial equivale a

$$\sigma_{\Delta P}^2 = \delta^T \Sigma \delta \Delta t.$$

Por lo tanto, bajo el supuesto de normalidad los cambios en el valor del portafolio se distribuyen en forma normal con media cero y desviación estándar $\sigma_{\Delta P}$; es

decir, $\Delta P \sim N(0, \sigma_{\Delta P})$. Este supuesto de normalidad es válido en la práctica debido a que el rendimiento esperado de un activo financiero para datos de frecuencia alta o datos diarios es aproximadamente igual a cero, mientras que el teorema del límite central afirma que la suma de una muestra grande de variables aleatorias independientes es aproximadamente igual a una distribución normal multivariada.

$$\sigma_{\Delta P} = \sqrt{\delta^T \Sigma \delta} \cdot \sqrt{\Delta t}. \quad (2.8)$$

Por lo tanto, el valor en riesgo del portafolio es igual a

$$\text{VaR} = Z_c \sqrt{\delta^T \Sigma \delta} \cdot \sqrt{\Delta t}, \quad (2.9)$$

donde

Σ : es la matriz de varianza-covarianza del portafolio de los factores de riesgo, cuya dimensión es de $n \times n$.

δ : es el vector de posiciones de los factores de riesgo.

Z_c : representa el valor crítico apropiado de la distribución normal estándar.

El supuesto de normalidad facilita la estimación del percentil de la distribución de probabilidad de los cambios en el valor del portafolio, ya que los niveles de confianza se pueden traducir en un número específico de desviaciones estándar que representa el rango donde el valor del portafolio va a estar fluctuando en un día, semana o mes. Este cambio en el valor del portafolio puede ser positivo o negativo, el cual puede interpretarse como una ganancia o pérdida en el valor del portafolio. Por ejemplo, las instituciones financieras que utilizan niveles de confianza del 95% y 99% pueden capturar eventos hasta por 1.645 y 2.326 desviaciones estándar respectivamente; asimismo les permite construir intervalos de confianza de la siguiente forma:

$$[\mu_{\Delta P} - 2.326\sigma_{\Delta P}, \mu_{\Delta P} + 2.326\sigma_{\Delta P}].$$

En otras palabras, para un nivel de confianza del 99%, existe una probabilidad del 99% de que los cambios diarios en el valor del portafolio no excederán el nivel del valor en riesgo estimado. Mientras que el caso inverso también debe ser considerado por las entidades financieras, esto es, existe una probabilidad del 1% de que los cambios diarios en el valor del portafolio excederán el nivel del VaR. En otras palabras, las pérdidas ocurrirán en promedio, 1 de 100 veces (una vez cada cien días con datos diarios). Ahora utilizando un nivel de confianza del 95%, las pérdidas ocurrirán, en promedio, 1 de 20 veces (una vez al mes con datos diarios).

Otra forma de representar el valor en riesgo de un portafolio, aplicando el método delta-normal es descomponiendo la matriz de varianza-covarianza de la siguiente forma:

$$\text{VaR}_c = Z_c \sqrt{\delta^T V R V \delta} \sqrt{\Delta t}, \quad (2.10)$$

donde

V : representa la matriz de volatilidad de los cambios de los factores de riesgo.

R : representa la matriz de correlación de los cambios de los factores de riesgo.

El modelo anterior es una aproximación de forma cerrada para la medición y administración del riesgo basada en datos históricos de los factores de riesgo. Este modelo estima el riesgo de mercado de un portafolio formado por posiciones lineales en un marco integrado y consistente comparado con las medidas mencionadas al principio de este capítulo, proporcionando así un número simple y fácil de entender para los tomadores de decisiones de los corporativos, las mesas directivas y consejos de administración. Sin embargo, dada la simplicidad de los supuestos asumidos por el método delta-normal, los participantes del mercado deben estar concientes de las ventajas y limitaciones del modelo respecto a la precisión y complejidad para medir y controlar el riesgo de mercado.

Las principales ventajas que ofrece el método delta-normal para estimar el riesgo de mercado son las siguientes:

- a) La principal ventaja del método es su fácil implementación, ya que permite calcular el VaR para portafolios grandes. Esto se debe a que existe una relación lineal entre los cambios de los factores de riesgo y los cambios de los activos financieros; es decir, el cambio en el valor del portafolio se puede obtener a través de una transformación lineal en los cambios de los factores de riesgo también conocidos como factores de mercado.
- b) En términos computacionales, la estimación del VaR para portafolios institucionales enormes se reduce debido a que la dimensión del problema se centra en un conjunto de factores de riesgo identificados en las posiciones, facilitando con ello la relación entre los cambios en los activos financieros del portafolio y los cambios en los factores de mercado. También es importante señalar que la implementación de la aproximación requiere de un costo menor comparado con otras metodologías, puesto que los cálculos se pueden llevar a cabo en una hoja de cálculo.

Entre las debilidades o limitaciones de esta aproximación analítica se pueden mencionar las siguientes:

- a) Una de las limitaciones que no puede ser evitada en el método delta-normal es el supuesto de que las volatilidades y correlaciones de los rendimientos de los factores de riesgo son relativamente estables, las cuales son estimadas utilizando datos históricos. En la práctica, sin embargo, las volatilidades y correlaciones suelen cambiar a través del tiempo, algunas veces dramáticamente.
- b) El supuesto de normalidad es inapropiado para calcular el valor en riesgo de una posición de mercado o un portafolio, ya que subestima significativamente la probabilidad de los rendimientos extremos. Esto es, la aproximación analítica no

toma en cuenta el efecto de las colas pesadas que presentan las distribuciones de los rendimientos de la mayoría de las series financieras como consecuencia de la presencia de eventos extremos o anomalías en los mercados financieros. La presencia de colas pesadas ocasiona que los rendimientos extremos en los precios financieros ocurren con más frecuencia de lo que se esperaría bajo el supuesto de una distribución normal. Así, la forma de la distribución de rendimientos financieros frecuentemente tiene una cresta más estrecha y más alta en torno a la media en comparación con la distribución normal, pero con colas más pesadas y largas para compensar el área de la cresta,¹¹ características comunes de la distribución leptocúrtica.¹² De hecho, el efecto de la leptocurtosis significa una mayor probabilidad de que ocurran rendimientos muy grandes (positivos) y rendimientos muy pequeños (negativos) en el valor del portafolio, mientras que la probabilidad de rendimientos moderados disminuye. Existe bastante evidencia empírica que ha demostrado que la distribución de rendimientos financieros presenta propiedades de colas más pesadas que la distribución normal. Por ejemplo, los trabajos de Mandelbrot (1963) y Fama (1965) sustentan que los rendimientos de los activos financieros se ajustan mejor con una distribución α -estable, con varianza infinita. Este problema es el que se va a tratar en esta investigación.

- c) Finalmente, otra de las desventajas de esta aproximación es que no proporciona una efectiva estimación del riesgo para portafolios que contienen factores de riesgo no lineales tales como las opciones financieras, puesto que no considera la importancia de los efectos de la convexidad que se incrementa a medida que la opción se va aproximando al dinero, y también cuando falta todavía bastante tiempo para su vencimiento. Una manera de resolver este problema es agregar los efectos de sensibilidad del factor de riesgo de orden superior, cuantificados por la medida gamma. Sin embargo, el efecto de la no linealidad en los precios de las opciones

¹¹ En este caso, la integral de cualquier función de densidad evaluada en el rango de $-\infty$ a ∞ debe ser igual a 1.

¹² Cuando se compara una distribución leptocúrtica con una distribución platicúrtica o distribución mesocúrtica, se observa con frecuencia que las colas de la distribución platicúrtica son más cortas o acotadas con una cresta más ancha y menos alta en torno a la media que la distribución leptocúrtica. Por su parte, la distribución mesocúrtica está representada por la distribución normal. Véase Gujarati (2000).

financieras no sólo viola el supuesto de normalidad para cambios en los precios de las opciones, sino también viola de manera importante, la linealidad de la exposición al riesgo del portafolio que se encuentra implícita en los modelos de medición de riesgo para periodos cortos (Kupiec y O'Brien, 1995).

A pesar de sus claras debilidades, esta aproximación es frecuentemente utilizada por los administradores de riesgos de las instituciones financieras e inversionistas para calcular el valor en riesgo de un portafolio, puesto que ofrece una medida simple y aditiva bajo el supuesto de normalidad, estableciendo una distribución paramétrica para los rendimientos diarios del valor del portafolio, cuyos parámetros son estimados utilizando datos históricos.

2.2.2 Modelo Delta-Gamma

En el contexto de la administración de riesgos cabe resaltar que el supuesto de linealidad es un factor fundamental que garantiza la normalidad de la distribución de rendimientos de un portafolio de posiciones lineales. Sin embargo, la relación no-lineal entre los valores del portafolio y los cambios en los factores de riesgo no solo conlleva a la presencia de diferentes grados de asimetría y propiedades de colas pesadas (exceso de curtosis) en la distribución de rendimientos del portafolio, sino también a errores de estimación en el cálculo del VaR. Para solucionar el problema de la cuantificación del perfil del riesgo en los portafolios compuestos por posiciones no-lineales, tales como las opciones financieras, es preciso refinar el modelo delta-normal agregando un término de segundo orden. Este término cuadrático permite recoger el efecto del riesgo gamma o efecto de convexidad ocasionado por la no-linealidad entre el precio del activo subyacente y el precio de la opción financiera, y la no-normalidad de los cambios en los factores de riesgo. Considerando un portafolio que contiene opciones sobre un factor de riesgo, el efecto del riesgo gamma alcanza su nivel máximo cuando las opciones se encuentran en el dinero (at the money) y la fecha de expiración se aproxima. En otras palabras, la delta es altamente inestable como resultado de cambios rápidos en respuesta a cambios en el activo subyacente. No

obstante, este fenómeno presenta un efecto inverso en las opciones que se encuentran dentro del dinero (in the money) y fuera del dinero (out of money) cuando la medida gamma alcanza un valor muy pequeño o converge a cero. De hecho, la relación entre el precio del activo subyacente y el precio de la opción es casi lineal a medida que la delta se aproxima a uno o cero, respectivamente.

Asimismo, el efecto positivo o negativo del riesgo gamma observado en las posiciones financieras larga o corta tiene un impacto fundamental en la medición del VaR. El efecto de una gamma positiva asociado a una distribución de rendimientos sesgada a la derecha conlleva a un mayor riesgo atribuido al comportamiento del valor de la opción, el cual decrece más suavemente y se incrementa a una velocidad más rápida en relación con el modelo delta-normal. En contraste, la posición corta exhibe una gamma negativa con distribución de rendimientos sesgada a la izquierda y un VaR menor, aunado a los descensos más rápidos e incrementos más suaves en los precios de la opción. En consecuencia, información adicional acerca de la sensibilidad en la delta se puede obtener sustituyendo el perfil del riesgo a partir de una función lineal-cuadrática.

Considérese el caso de un portafolio de n activos financieros cuyo valor de mercado $P(S_i, X_i, t)$ en el tiempo t depende del precio de mercado S_i de cada activo financiero para $i = 1, 2, \dots, n$ y supóngase que los cambios en los factores de riesgo siguen una distribución normal multivariada con media μ_p y matriz de varianza-covarianza Σ . En este caso, el cambio en valor del portafolio basado en el modelo delta-gamma se obtiene realizando la expansión en series de Taylor hasta términos de segundo orden para la función $P(S_i, X_i, t)$ como sigue:

$$\begin{aligned} \Delta P &\approx \sum_{i=1}^n S_i \mu_i + \sum_{i=1}^n S_i \frac{\partial P}{\partial S_i} \Delta S_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n S_i \frac{\partial^2 P}{\partial S_i \partial S_j} \Delta S_i \Delta S_j \\ &\approx \mu_p + \delta^T \Delta S + \frac{1}{2} \Delta S^T \Gamma \Delta S, \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde

δ : representa un vector de nx1 que mide las sensibilidades del valor del portafolio con respecto a cambios en los factores de riesgo.

Γ : representa una matriz gamma simétrica de nxn ajustada a varios factores de riesgo.

Es importante resaltar que la aproximación delta-gamma todavía es considerada una medida local, aunque de segundo orden, fácil de implementar y rápida para capturar el efecto de la convexidad de las posiciones no-lineales en comparación con los modelos de simulación discutidos en la sección 2.2.5. Sin embargo, esta aproximación cuadrática sencilla puede conllevar a resultados inconsistentes cuando no existe una relación uno a uno entre el valor del portafolio y los factores de riesgo de los subyacentes. En otras palabras, la función del valor del portafolio no cumple con las condiciones de suavidad y continuidad.¹³

Por otra parte, la volatilidad de los cambios en el valor del portafolio basada en la aproximación delta-gamma puede ser obtenida de la misma manera como en el modelo delta-normal. Suponiendo que los cambios en los factores de riesgo siguen una distribución normal multivariada con media 0 y matriz de varianza-covarianza Σ . Por lo tanto, la varianza del valor del portafolio se puede expresar como la suma de las varianzas de los términos delta y gamma más la covarianza entre los términos delta y gamma; es decir,

$$\begin{aligned}\text{Var}(\Delta P) &= \text{Var}\left[\delta^T \Delta S + \frac{1}{2} \Delta S^T \Gamma \Delta S\right] \\ &= \text{Var}\left[\delta^T \Delta S\right] + \frac{1}{4} \text{Var}\left[\Delta S^T \Gamma \Delta S\right] + \text{Cov}\left[\delta^T \Delta S, \frac{1}{2} \Delta S^T \Gamma \Delta S\right].\end{aligned}\tag{2.12}$$

¹³ Para más detalles, véase Mina y Ulmer (1999).

Siguiendo el lema de Stein (1981), el término de la covarianza en la ecuación (2.12) se anula.¹⁴ Así, la varianza del valor del portafolio está formada por un término lineal o delta y un término cuadrático o gamma.

La incorporación del término cuadrático transforma la distribución, a tal grado que la distribución de los cambios en el valor del portafolio ya no sigue una distribución normal, esto es, la aproximación delta-gamma ahora se distribuye como la suma de variables aleatorias independientes χ^2 no centrales. Un hecho importante que se refleja inmediatamente en la estimación del VaR, puesto que el cuantil de la distribución es imposible calcularlo a través de una expresión de forma cerrada. No obstante, las soluciones de forma cerrada para calcular el cuantil de la distribución de los cambios en el valor del portafolio son posibles en la práctica, transformando los cambios en los factores de riesgo originales. Importantes contribuciones en la literatura que tratan el problema analítico de la aproximación delta-gamma de la distribución de los cambios en el valor del portafolio incluyen a las transformaciones de Johnson (Zangari, 1996b); expansiones de Cornish-Fisher (Zangari, 1996a); la aproximación de Solomon-Stephens (Britten-Jones y Schaefer, 1999); la aproximación de punto silla (Rogers y Zane, 1999; Feuerverger y Wong, 2000). Por otra parte, los métodos numéricos también son utilizados para solucionar el problema delta-gamma, encontrando la función de densidad de probabilidad de los cambios en el valor del portafolio al invertir la función generadora de momentos. La inversión se lleva a cabo numéricamente utilizando la transformada de Fourier rápida (por sus siglas en inglés, FFT) introducida por Rouvinez (1997).

En el contexto de la administración de riesgos existe bastante evidencia empírica que ha realizado análisis de comparación entre los métodos mencionados, con el fin de determinar la exactitud y velocidad para estimar el VaR cuando los portafolios contienen opciones financieras. Pichler y Selitsch (1999) realiza un estudio de

¹⁴ Este lema establece que la covarianza entre una variable aleatoria X y una función suave $f_Y(y)$ que se distribuyen normal está determinada por el producto entre el valor esperado de la derivada de la función y la covarianza de X y Y ; es decir, $Cov[X, f_Y(y)] = E[f_Y'(y)]Cov[X, Y]$

comparación entre los métodos de las transformaciones de Johnson, delta-normal, delta-gamma-normal y las expansiones de Cornish-Fisher para cuatro y seis momentos, obteniendo los siguientes hallazgos: 1) en el caso de un número pequeño de factores de riesgo, los resultados obtenidos por el método delta-gamma-normal son muy inconsistentes; y 2) todas las aproximaciones mantienen un buen desempeño en cuanto a la estimación del VaR cuando los portafolios tienen gamma negativa, mientras que la eficiencia de estos métodos disminuye para los portafolios con gamma positiva como resultado del efecto de los momentos de orden mayor. En este sentido, la expansión de Cornish-Fisher con al menos seis momentos es sugerida por los autores.

Otro estudio importante que compara los métodos de simulación Monte Carlo parcial, inversión de Fourier, transformaciones de Johnson y la expansión de Cornish-Fisher para el caso de cuatro portafolios incluye a Mina y Ulmer (1999). Los hallazgos de Mina y Ulmer confirman que la aproximación de Johnson no sólo es inconsistente, sino también inestable para ajustar la distribución para algunos portafolios. Mientras que el método de Cornish-Fisher es considerado el algoritmo más rápido en comparación con los métodos de simulación Monte Carlo parcial e inversión de Fourier, pero carece de consistencia a causa de los resultados inaceptables en circunstancias extremas. En consecuencia, las técnicas de simulación Monte Carlo parcial e inversión de Fourier de la función generadora de momentos son consideradas las mejores aproximaciones, en cuanto a la rapidez de respuesta relativamente y consistencia de la convergencia de la distribución del portafolio.

Por su parte, Jaschke (2002) y Volmar (2002) analizan con más detalle la expansión de Cornish-Fisher, demostrando que la aproximación alcanza su máximo nivel de desempeño cuando la distribución se aproxima a la distribución normal, pero si esta condición no se cumple en la práctica, la expansión de Cornish-Fisher para seis o más momentos puede conllevar a sobreestimar el VaR del portafolio, aunado al inapropiado comportamiento de la cola. En respuesta a esta deficiencia cualitativa, los estudios de Rogers y Zane (1999) y Feuerverger y Wong (2000) resaltan la

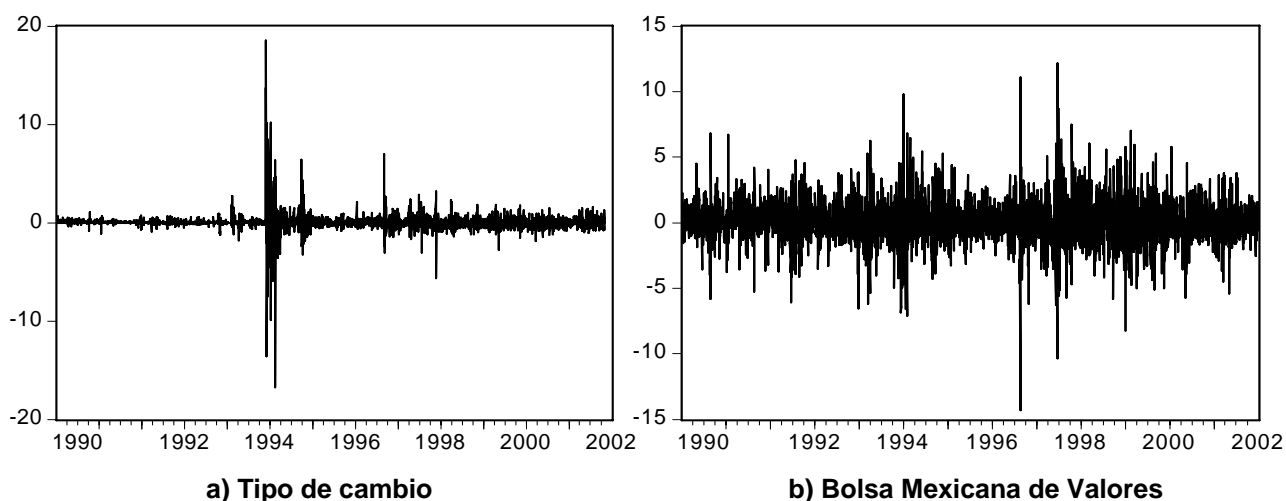
superioridad de los métodos de punto silla para capturar el comportamiento de la cola con un alto grado de exactitud.

2.2.3 Modelo GARCH

En las últimas décadas, los mercados financieros han experimentado una serie de cambios fundamentales, dando origen a una creciente combinación de periodos de alta volatilidad. Esto ha obligado a la creación de modelos más sofisticados que permitan medir, pronosticar y cubrir la volatilidad, puesto que la función de cualquier modelo de volatilidad es explicar su comportamiento histórico a través del tiempo, con el fin de pronosticarla en periodos futuros. Este interés por estimar y pronosticar la volatilidad juega un papel clave en diferentes áreas de la teoría y práctica financiera, tales como la administración de riesgos y la selección del portafolio, así como en la valuación de productos derivados donde el precio depende en gran medida de la volatilidad y la correlación del activo subyacente.

La variabilidad observada en los rendimientos de un instrumento financiero está asociada con los cambios generados en el entorno donde se negocia; de ahí la gran importancia por parte de los investigadores y agentes económicos para estimar el riesgo o volatilidad en función de la información disponible. El cambio en la volatilidad es un factor importante que se debe tomar en cuenta en el análisis de los rendimientos de las series financieras, porque periodos de estabilidad se alternan con periodos de turbulencia asociados a grandes movimientos inesperados en los precios de los activos financieros. Este comportamiento se traduce en periodos de alta y baja volatilidad comúnmente conocida como volatilidad en aglomeraciones (*clustering*), la cual se puede pronosticar. Este fenómeno que se presenta frecuentemente en las series financieras debido a los cambios sistemáticos en el tiempo, se conoce como heteroscedasticidad. El análisis de los datos históricos de las series financieras puede hacer que el fenómeno de la volatilidad *clustering* presente periodos cortos o largos, abarcando desde algunas horas hasta una década en casos extremos; es decir, periodos de alta turbulencia seguidos de periodos de tranquilidad. Para motivar la

importancia de la heteroscedasticidad en las finanzas, consideremos las siguientes series financieras. Analizando la Gráfica 2.1, en el panel (a) se puede observar que los rendimientos del tipo de cambio presentan fases de relativa calma seguidos de periodos de alta volatilidad. Antes de la crisis de fines de 1994, la volatilidad en el tipo de cambio era muy estable, mientras que en el panel (b) los rendimientos de la Bolsa Mexicana de Valores muestran una volatilidad más frecuente con caídas grandes en los precios del Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores, derivadas de grandes rendimientos negativos que ocasionan que la volatilidad sea más persistente.



Gráfica 2.1: Rendimientos diarios del tipo de cambio peso/dólar y del Índice de Precios y Cotizaciones para el periodo del 2 de enero de 1990 al 31 de diciembre de 2002.

Asimismo, se puede apreciar que el problema de la heteroscedasticidad es más notable para los rendimientos de la Bolsa Mexicana de Valores que para los rendimientos del tipo de cambio, propiciado por sus movimientos más dramáticos y prolongados. Esto se debe en parte a que los Bancos Centrales pueden intervenir más directamente en los mercados de divisas, mientras que estas intervenciones no existen en los mercados accionarios. Una fuente de vital importancia que contribuye a la evolución de los precios a través del tiempo, corresponde a la información del valor fundamental del activo financiero. Por lo anterior, la velocidad de difusión y asimilación de la información en el entorno financiero permitirá predecir el tipo de volatilidad en aglomeraciones y su persistencia que va experimentar el mercado. Existen dos tipos de

datos que influyen en el comportamiento de la volatilidad, los datos de frecuencia alta cuyas fuentes están relacionadas a las presiones y turbulencias ocasionadas por la operación diaria del mercado, también conocido como ruido blanco, y los datos de frecuencia baja (mensuales, trimestrales y semestrales) asociados a cambios institucionales y macroeconómicos, considerados los factores más probables que afectan a la volatilidad. En este contexto, Engle y Mezrich (1995) asumen que el uso de datos de frecuencia alta presentan características más complejas e importantes, tales como la forma típica de la volatilidad durante el día, el rebote propiciado por los diferenciales en los activos financieros y la autocorrelación deriva de los precios pasados, así como las tasas irregulares de operación observadas.

En consecuencia, la volatilidad es una medida natural del riesgo de mercado, debido a que la formación de los precios de los instrumentos financieros del portafolio son afectados directamente por los cambios en la volatilidad. Así, la medida VaR puede definirse como un proceso estocástico que evoluciona a través del tiempo, de acuerdo con las condiciones del mercado y la información disponible. Existen diversos modelos de volatilidad condicional para estimar el valor en riesgo de un portafolio de inversión. Entre los cuales se pueden mencionar a los modelos autorregresivos de heteroscedasticidad condicional introducidos por Engle (1982), como un modelo de riesgo en un contexto macroeconómico.¹⁵

En este contexto, la varianza evoluciona como una función de los residuales cuadrados capturada por un modelo de regresión con p rezagos, mientras que la varianza incondicional es constante. A estos modelos se les denomina modelos autorregresivos de heteroscedasticidad condicional, ARCH por sus siglas en inglés (Autoregressive Conditional Heteroscedasticity). Asimismo, los modelos ARCH asumen que el término de error ε_t sigue una distribución normal condicional con media cero y varianza σ^2 , la cual no es constante, puesto que se puede estimar cualquier tendencia para los movimientos en la varianza utilizando un modelo ARMA (Autoregressive

¹⁵ Robert Engle fue premiado con el Premio Nobel de Economía en el año de 2004 por sus importantes contribuciones.

Moving Average).¹⁶ La hipótesis de normalidad condicional es consistente con la distribución leptocúrtica de los rendimientos incondicionales, alimentada por la dinámica de la varianza condicional que permite recoger más outliers o grandes observaciones inusuales.

En este sentido, el modelo ARCH(p) se puede expresar por la siguiente ecuación:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \alpha_3 \varepsilon_{t-3}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 + \varepsilon_t^2, \quad (2.13)$$

donde el parámetro $\alpha_0 > 0$ y los parámetros $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_p \geq 0$ para evitar que la varianza condicional sea negativa. Esta clase de modelos recogen la heteroscedasticidad condicional exhibida en las series financieras, utilizando los promedios móviles de los residuales cuadrados de los rendimientos pasados. Por ejemplo, si un movimiento grande se presentó en cualquier dirección del mercado hace m periodos (con $m \leq p$), su efecto se reflejará inmediatamente en un incremento en la volatilidad condicional actual, ya que depende de los residuales cuadrados. En otras palabras, entre más fuerte sea la tendencia de los residuales cuadrados, mayor será la varianza condicional. Varias extensiones se han hecho al modelo incluyendo a Bollerslev (1986); Bera y Higgins (1993); Engle (1995); Palm (1996). Todas las extensiones han perseguido el mismo objetivo que es la modelación de la varianza condicional como una función de los residuales cuadrados de los rendimientos pasados. Dada la efectividad del modelo ARCH para capturar periodos de tranquilidad y turbulencia en las series financieras, Bollerslev (1986) extiende el modelo de Engle agregando un término autorregresivo a los promedios móviles de los residuales cuadrados. Los modelos autorregresivos de heteroscedasticidad condicional generalizados conocidos como GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heroscedasticity) permiten estimar la varianza condicional futura como una función

¹⁶ Para una comprensión más profunda de esta clase de modelos, véase Enders (2004).

determinística de los residuales cuadrados de los rendimientos bajo el supuesto de varianza incondicional constante.

En la presente tesis se utiliza el modelo GARCH(1,1) debido a que tiene una parametrización más parsimoniosa y mejores propiedades de convergencia. En la práctica, este modelo como herramienta en la industria financiera ha sido aplicado empíricamente con gran éxito a cientos de series financieras; algunos estudios importantes incluyen a Bollerslev, Chou y Kroner (1992); Bera y Higgins (1993); Diebold y Lopez (1995). Evidencia empírica más reciente de la volatilidad en aglomeraciones para mercados accionarios emergentes de América Latina incluye a Ortiz y Arjona (2001). Por su parte, excelente literatura que explica los aspectos teóricos de los modelos GARCH incluye a Bollerslev, Engle y Nelson (1994). Los modelos GARCH generalmente especifican y estiman la volatilidad condicional sobre dos ecuaciones simultáneas. La primera ecuación indica que la evolución de los rendimientos de los precios de la serie financiera es explicada por la misma variable desfasada un periodo, más un término de error aleatorio conocido como ruido blanco que se distribuye normal con media cero y varianza σ^2 , la cual cambia a través del tiempo de acuerdo con la segunda ecuación y que sirve como pronóstico para el horizonte de un día. Estas dos ecuaciones pueden ser expresadas por los siguientes modelos de regresión:

$$r_t = \gamma_0 + \gamma_1 r_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.14)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2. \quad (2.15)$$

Como se puede observar la volatilidad condicional para el periodo t depende de dos valores, esto es, de la última innovación de los residuales cuadrados ε_{t-1}^2 , comúnmente conocido como el efecto ARCH y la varianza condicional previa σ_{t-1}^2 . Una condición suficiente y necesaria para asegurar una volatilidad condicional estrictamente

positiva y la existencia del proceso GARCH, consiste en que los parámetros estimados de la ecuación (2.15) cumplan con las siguientes restricciones $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 \geq 0$ y $\beta_1 \geq 0$.

El modelo de regresión para el rendimiento condicional está representado por un modelo autorregresivo de primer orden AR(1), mientras que el modelo de regresión para la varianza condicional está representado por un modelo autorregresivo de promedios móviles de los residuales cuadrados ARMA(1,1). El nombre GARCH(1,1) significa que se está haciendo un rezago en los residuales cuadrados de los rendimientos y un rezago en la varianza condicional de los residuales de los rendimientos. Este modelo tiene el concepto de reversión a la media alimentado por la convergencia de la varianza condicional pronosticada hacia la varianza incondicional constante en el largo plazo, aunque los mercados financieros pueden experimentar, en ocasiones, volatilidad extrema. Por su parte, la velocidad de reversión a la media está gobernada por la suma de los parámetros estimados $\alpha_1 + \beta_1 \leq 1$, también conocida como persistencia; una condición suficiente para asegurar que el proceso GARCH(1,1) sea estrictamente estacionario y ergódico.¹⁷

Asumiendo el supuesto de estacionaridad del modelo GARCH(1,1), el nivel de la varianza incondicional de ε_t en el largo plazo está representada por

$$\text{Var}(\varepsilon_t) = E(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \alpha_1 E(\varepsilon_{t-1}^2) + \beta_1 E(\sigma_{t-1}^2)$$

$$\sigma^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \sigma^2 + \beta_1 \sigma^2$$

$$\sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1}.$$

¹⁷ Un proceso estacionario es ergódico si los momentos muestrales de una sucesión de observaciones converge en probabilidad a los momentos de la población a medida que el tamaño de la muestra aumenta. Para una explicación estadística más detallada de las propiedades de los procesos estocásticos estacionarios ergódicos, véase Hamilton (1994).

Finalmente, una condición suficiente que garantiza la existencia del cuarto momento está representada por la siguiente restricción $3\alpha_1^2 + 2\alpha_1\beta_1 + \beta_1^2 < 1$, bajo el supuesto de normalidad condicional; es decir,

$$E[\varepsilon_t^4] = \frac{3\alpha_1^2(1 + \alpha_1\beta_1)}{(1 - \alpha_1 - \beta_1)(1 - 3\alpha_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 - \beta_1^2)}.$$

Por lo tanto, el coeficiente de curtosis del proceso Gaussiano condicional GARCH(1,1) es:

$$k = \frac{E[\varepsilon_t^4]}{(E[\varepsilon_t^2])^2} = \frac{3(1 + \alpha_1 + \beta_1) \cdot (1 - \alpha_1 - \beta_1)}{(1 - \beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 - 3\alpha_1^2)},$$

el cual siempre va a ser mayor a tres, si suponemos que $\beta_1 \neq 0$. Este hecho confirma que las colas de la distribución de los rendimientos de las series financieras suelen ser más gruesas que las colas de la distribución normal, sustentado por el alto grado de curtosis detectado en la mayoría de los estudios en donde el modelo ha sido aplicado con éxito.¹⁸ Aunque algunas veces no se garantiza la existencia de los momentos como suele suceder con la distribución normal, cuyos momentos son todos finitos. A medida que aumenta el orden de los momentos de un proceso Gaussiano condicional GARCH(1,1), las restricciones asociadas a sus parámetros aumentan, originando problemas en la estimación del modelo.

En la actualidad, el uso de modelo GARCH como herramienta de predicción de la volatilidad condicional ha crecido entre los investigadores y participantes en los mercados financieros, principalmente en problemas de toma de decisiones financieras tales como la valuación de activos financieros y administración del portafolio (Gourieroux, 1997). En el contexto de la administración del riesgo existen múltiples estudios empíricos que han usado y extendido los modelos GARCH para capturar

¹⁸ Para una mejor explicación de los resultados técnicos de la curtosis, véase Bollerslev (1986).

apropiadamente la dinámica del riesgo financiero, utilizando los percentiles como funciones directas de la varianza en los modelos paramétricos VaR (Alexander y Leigh, 1997; Mittnik y Paoletta, 2000; Giot y Laurent, 2003). Como resultado, el modelo GARCH(1,1) posee características atractivas que coadyuvan a cambiar la estructura de la volatilidad futura, de acuerdo con las condiciones del mercado y los parámetros estimados en el modelo, la cual puede ser monótona creciente durante periodos de condiciones normales de mercado y monótona decreciente durante periodos de turbulencia o inestabilidad financiera. Otras virtudes del modelo, en el contexto univariado, corresponden a su simplicidad matemática y computacional para estimar los respectivos parámetros.

No obstante, el modelo GARCH estándar como herramienta para la administración del riesgo de mercado tiene ciertas limitaciones para explicar empíricamente algunas de las propiedades relevantes de la volatilidad, en particular, cuando se analizan series financieras de periodos largos. Una de las irregularidades del modelo es su debilidad para modelar correctamente las colas de la distribución de rendimientos diarios o frecuencia alta; un hecho estilizado observado en las series financieras a pesar de que las colas de la distribución incondicional del modelo GARCH(1,1) suelen ser más pesadas que las colas de la distribución normal; sin embargo, no es suficiente para capturar la totalidad del exceso de curtosis de los datos. La principal razón de este fenómeno se atribuye al comportamiento de las colas de la distribución incondicional, las cuales decaen en forma exponencial (Bollerslev *et al.*, 1992). Una alternativa es utilizar el modelo GARCH(1,1) con innovaciones *t-student*, aunque la evidencia empírica ha demostrado claramente la debilidad de estos modelos para modelar adecuadamente la volatilidad *clustering* (Bollerslev, 1987; Baillie y DeGenaro, 1990; de Jong, Kemma y Kloek, 1992).

Finalmente, el modelo GARCH estándar es inapropiado para capturar los efectos de la asimetría asociados a los movimientos positivos y negativos del mercado, también conocido como el fenómeno del efecto de apalancamiento. En el contexto del modelo GARCH(1,1), el pronóstico de la varianza condicional sólo depende de la

magnitud de los residuales cuadrados, por lo que el signo de los residuales no tiene importancia, ya que se asume que los movimientos tanto positivos como negativos causan el mismo efecto en la volatilidad condicional, omitiendo así información importante en la estimación. No obstante, Nelson (1991) ha sido el primero en demostrar estadísticamente los diferentes niveles de asimetría observados en la volatilidad condicional, proponiendo un modelo exponencial autorregresivo de heteroscedasticidad condicional generalizado EGARCH(1,1); demostrando que los movimientos negativos en el mercado tendrán un efecto completamente diferente en la volatilidad condicional que los movimientos positivos de la misma magnitud, esto es, las noticias buenas siempre causarán un menor impacto en la volatilidad futura que las noticias malas. Posteriormente, Glosten, Jagannathan y Runkle (1993) proponen un modelo alternativo con mejores propiedades, con el fin modelar correctamente los efectos de asimetría en la volatilidad condicional alimentados por los movimientos positivos y negativos del mercado. Para recoger los diferentes grados de asimetría observados en los rendimientos de las series financieras, el modelo GJR(1,1) incorpora una variable dummy en la ecuación de la varianza condicional, la cual toma el valor de uno cuando el residual de los rendimientos es menor a cero y el valor de cero en otro caso.

Sin embargo, la importancia de contar con modelos alternativos que midan y pronostiquen adecuadamente la volatilidad condicional, representa una clara ventaja para los inversionistas que buscan una eficiente asignación de recursos, óptimas estrategias de cobertura, una valuación justa en los productos derivados y una cuantificación del VaR más exacta. Así, los modelos GARCH se han convertido en una herramienta clave en el análisis del comportamiento de la exposición al riesgo en los mercados financieros, en particular, en los mercados emergentes donde la volatilidad es más persistente y peligrosa atribuido a la debilidad de sus estructuras financieras y económicas.

2.2.4 Modelo de Promedios Móviles Exponencialmente Ponderados

Como se ha señalado anteriormente, en los últimos años, uno de los temas más debatidos en la industria financiera por los académicos y participantes del mercado es el fenómeno de volatilidades altas y muy cambiantes. La importancia de la volatilidad, hoy en día, tiene que ver con el importante desarrollo de los mercados de productos derivados, el desarrollo de la teoría moderna del portafolio o bien de la importancia de las diversas metodologías de valor en riesgo implementadas para medir la exposición al riesgo que enfrentan las instituciones financieras e inversionistas. La necesidad de una buena medición y predicción de la volatilidad es de vital importancia para invertir racionalmente en los mercados financieros, en particular, en los mercados emergentes que se caracterizan por experimentar periodos de extrema volatilidad, ocasionado por cambios estructurales en el corto plazo. En este sentido, los inversionistas que cuenten con la facultad suficiente para predecir rápidamente los cambios en la volatilidad, contarán con mejores herramientas para administrar y estimar el riesgo de mercado utilizando la medida valor en riesgo, especialmente, en este momento que en los mercados financieros internacionales continua la creciente tendencia hacia la desregulación y globalización. Esta estrategia permite reducir, en gran medida, el uso de capital tanto a instituciones financieras como a inversionistas institucionales, gubernamentales o individuales, asignando más eficientemente los recursos en los mercados disponibles. Previamente se ha discutido el modelo GARCH(1,1) considerado como uno de los modelos más sofisticados para predecir la volatilidad futura y estimar el valor en riesgo de un portafolio de inversión de manera dinámica, asumiendo una función de densidad paramétrica estimada por máxima verosimilitud, con datos históricos. Este modelo permite capturar muchos de los hechos estilizados del comportamiento de la volatilidad, comúnmente observados en los rendimientos de las series financieras.

En este contexto, el método de promedios móviles exponencialmente ponderados (Exponentially Weighted Moving Average, EWMA) es otra de las

alternativas que recoge la dinámica de la volatilidad en los mercados financieros.¹⁹ Esta aproximación consiste en asignar mayor peso a las observaciones más recientes que a las primeras o más alejadas en el tiempo; este hecho tiene sentido, puesto que la información más reciente en los mercados financieros tiene un impacto más fuerte en el pronóstico de la volatilidad futura que la información pasada. El método de suavizamiento exponencial simple como también se conoce en la literatura estima la volatilidad *clustering* fijando ponderaciones a los rendimientos cuadrados, con el fin de que vayan decayendo en forma exponencial con el tiempo de la siguiente forma:

$$\sigma_t^2 = \sum_{i=1}^{\infty} w_i r_{t-i}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} r_{t-i}^2}{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1}}, \quad (2.16)$$

donde w_i es el peso asignado al $(t-i)$ -ésimo rendimiento cuadrado, el cual es igual a $\lambda^{i-1}(1-\lambda)$. Así, la suavización se alcanza con el parámetro λ que se encuentra ente 0 y 1, también conocido como el factor de decaimiento exponencial. RiskMetrics recomienda que el valor del parámetro se fije en 0.94 para datos diarios, con el fin de determinar los pesos asignados para los diferentes rendimientos y la cantidad de datos requerida para la estimación de la volatilidad; mostrando así un decaimiento más rápido en la información pasada a medida que el parámetro λ se encuentre más lejos de uno, y asignando un mayor peso a la información más reciente. La selección del parámetro minimiza el error en el pronóstico de la volatilidad futura, lo cual significa una clara ventaja sobre el método de promedios móviles simple. Asimismo, este procedimiento de ponderación evitar caídas bruscas en la volatilidad cuando se retiran rendimientos grandes de la ventana de datos. En otras palabras, los rendimientos extremos originados por las crisis o contagios financieros representan un menor impacto en la estimación de la volatilidad a medida que se van haciendo más viejos en la ventana de datos seleccionados.

¹⁹ El modelo de promedios móviles exponencialmente ponderados fue desarrollado por J. P. Morgan en su metodología RiskMetrics.

Como se puede observar la sucesión de números $\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^i, \dots$ tiene la propiedad deseada al comenzar con un número finito y terminar con un número infinito. Por ejemplo, el coeficiente del rendimiento ponderado de hace n años puede resultar demasiado pequeño a medida que n se incrementa, debido a que es multiplicado por λ^n ; sin embargo, el único problema que presenta la serie es su suma, ya que debe converger a uno. Para resolver este inconveniente sólo se necesita calcular la suma de la serie del denominador de la ecuación (2.16), la cual es una serie geométrica infinita cuya suma converge a:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} = 1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^n + \dots \cong \frac{1}{1-\lambda}.$$

El factor $(1-\lambda)$ asegura que los pesos asignados a los rendimientos cuadrados sean igual a uno. Como resultado, la volatilidad condicional también puede ser estimada por sustitución recursiva a través del modelo de promedios móviles exponencialmente; es decir, la volatilidad condicional en el tiempo t se puede obtener de la volatilidad estimada en el tiempo $t-1$, ajustada por la última innovación al cuadrado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= (1-\lambda) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} r_{t-i}^2 = (1-\lambda) (r_{t-1}^2 + \lambda r_{t-2}^2 + \lambda^2 r_{t-3}^2 + \lambda^3 r_{t-4}^2 + \dots) \\ &= (1-\lambda) r_{t-1}^2 + (1-\lambda) \lambda r_{t-2}^2 + (1-\lambda) \lambda^2 r_{t-3}^2 + (1-\lambda) \lambda^3 r_{t-4}^2 + \dots \\ &= (1-\lambda) r_{t-1}^2 + \lambda [(1-\lambda) (r_{t-2}^2 + \lambda r_{t-3}^2 + \lambda^2 r_{t-4}^2 + \dots)] \\ &= (1-\lambda) r_{t-1}^2 + \lambda \sigma_{t-1}^2 \end{aligned} \quad (2.17)$$

De esta manera, el modelo de suavización exponencial se puede expresar como el promedio ponderado infinito de los rendimientos cuadrados pasados, incorporando información de todos los shocks pasados a los rendimientos cuadrados que van

decaendo en forma exponencial. En la práctica, sin embargo, solamente se utilizan un número finito de observaciones para asegurar que los pesos del estimador de suavización exponencial sean igual a uno; es decir, muestras pequeñas.²⁰ Por su parte, este modelo alternativo puede ser visto como un caso especial del modelo de varianza condicional más sofisticado conocido como GARCH(1,1), considerando las siguientes dos restricciones sobre los parámetros del modelo:

$$\alpha_0 = 0 \text{ y } \alpha_1 + \beta_1 = 1,$$

donde la suma de α_1 y β_1 igual a uno representa el grado de persistencia considerado por el modelo de suavización exponencial, determinado por el parámetro λ . De acuerdo con las ideas principales de Engle y Bollerslev (1986), este modelo es comúnmente conocido como el modelo autorregresivo de heteroscedasticidad condicional integrado (Integrated Autoregressive Conditional Heteroscedasticity, IGARCH), el cual no es de reversión a la media, simplemente porque la varianza incondicional no existe en este caso; es decir, el modelo no es estacionario. La razón principal de esto es que la restricción de la suma igual a uno de los dos parámetros implica una raíz unitaria en el modelo ARMA(1,1) de los residuales. Aunque, el modelo IGARCH(1,1) puede ser aún estrictamente estacionario como se documenta en Nelson (1990).

La simplicidad estadística del modelo de promedios móviles exponencialmente ponderados en el proceso de la estimación del riesgo de mercado ha logrado captar la atención de las instituciones financieras, inversionistas individuales y autoridades reguladoras. Esta metodología transparente de administración y control del riesgo es capaz de reducir la carga computacional, así como los costos de implementación para predecir la volatilidad. Esto se debe a que el modelo de suavización exponencial sólo depende del parámetro del factor de decaimiento exponencial λ . Esto hace que el modelo sea más robusto al error de estimación que otros modelos tales como los modelos GARCH. Aunque bastante evidencia empírica sustenta que el modelo

²⁰ Para una mejor perspectiva sobre los supuestos especificados del modelo, véase RiskMetrics (1995).

GARCH(1,1) tiene mejores propiedades estadísticas para predecir la volatilidad condicional y cuantificar el VaR, en particular, para horizontes de corto plazos menores a 20 días (Cho y West, 1994; Alexander y Leigh, 1997). Igualmente, la aplicación de este modelo en la estimación del riesgo en los mercados financieros de América Latina no sólo proporciona información relevante de la consistencia del modelo para pronosticar la volatilidad condicional, sino también aporta nueva evidencia empírica para la toma de decisiones de inversión en esta clase de mercados que generalmente se caracterizan por ser altamente volátiles.

Otra de las características atractivas del modelo de suavización exponencial es el perfecto funcionamiento para pronosticar la volatilidad actual cuando los rendimientos de los precios de las series financieras están autocorrelacionados; es decir, cuando existe una relación con los rendimientos pasados. Este supuesto de autocorrelación es realista, pero su efecto puede ser débil en la medición del riesgo para periodos de largo plazos. De hecho, el efecto desaparece rápidamente cuando se observan autocorrelaciones pequeñas en los rendimientos de las series financieras. No obstante, en periodos de corto plazos puede ocasionar errores significativos en la estimación del riesgo, en particular, para los horizontes de tiempo utilizados en la medición del valor en riesgo de un portafolio (Lawrence y Robinson, 1995).

Indudablemente, la metodología de RiskMetrics²¹ se ha convertido en una herramienta de medición de riesgo para los participantes del mercado que no cuentan con suficientes recursos para implementar un adecuado sistema de administración de riesgos propio. Esta aproximación ha demostrado efectividad para pronosticar la varianza condicional en los mercados financieros para periodos de corto plazos, asumiendo el supuesto de que los rendimientos diarios de las series financieras son condicionalmente normales. Sin embargo, el modelo de suavización exponencial presenta diversas debilidades, cuyas consecuencias no sólo se reflejan en el análisis

²¹ RiskMetrics es un sistema de administración de riesgos disponible sin ningún costo para las instituciones financieras o inversionistas individuales que carecen de recursos, que permite mapear posiciones, estimar volatilidades y correlaciones de los rendimientos de los precios de los activos financieros de la mayoría de los mercados financieros.

del riesgo financiero, sino también en la determinación de los requerimientos de capital. Estas limitaciones relacionadas a los problemas de especificación ocasionan estimaciones sesgadas o ineficientes en la volatilidad condicional por parte del modelo.

El primer problema de especificación en el modelo de suavización exponencial corresponde al supuesto de varianza condicional integrada; un hecho estilizado que conlleva a una varianza incondicional infinita o inexistente. A pesar de que la literatura ha demostrado que la varianza condicional es altamente persistente, pero estacionaria para la mayoría de las series financieras en el largo plazo. Otro de los problemas de especificación del modelo es que asume una distribución condicional con innovaciones normales. Existe suficiente evidencia empírica que ha demostrado que la distribución condicional de los rendimientos tiende a ser leptocúrtica, en particular, en los mercados emergentes. En la práctica, la mayoría de las distribuciones de rendimientos de las series financieras carecen de observaciones en sus colas como resultado de los cambios grandes en los precios con baja probabilidad de ocurrencia y más observaciones en el centro de la distribución que corresponden a cambios pequeños en los precios con alta probabilidad de ocurrencia. En consecuencia, el modelo de suavización exponencial proporciona información insuficiente del verdadero riesgo en circunstancias extremas de mercado; es decir, cuando se toman valores que caen en las colas de la distribución, ya que en la actualidad son consideradas las partes más importantes para los propósitos de la administración de riesgos. Finalmente, la restricción de utilizar el mismo parámetro de suavización λ para todos los mercados financieros representa un peligro potencial en la estimación del riesgo, porque se estaría ignorando las diferencias entre mercados. Algunos mercados podrían adoptar diferentes valores en el factor de decaimiento exponencial, con el fin de minimizar el error cuadrado medio (Mean Square Error, MSE) en el pronóstico, al menos durante el periodo de estimación. Por su parte, el uso de un factor de decaimiento ex-ante podría ser inapropiado para proporcionar estimaciones correctas del VaR, principalmente para altos niveles de confianza. Una posible solución al problema sería volver a estimar el factor de decaimiento exponencial, de acuerdo con las condiciones del mercado. Algunos trabajos recientes que han mejorado el desempeño del modelo de suavización

exponencial para recoger la volatilidad condicional en los mercados financieros, obteniendo mejores resultados en la estimación del VaR incluyen a Guermat y Harris (2002) y Harris y Shen (2004).

2.2.5 Modelos de Simulación

Otras alternativas para estimar el valor en riesgo de un portafolio de inversión son los modelos de simulación. Aunque estos métodos, en términos computacionales, son grandes consumidores de tiempo, tienen el potencial para estimar la máxima pérdida en el valor de un portafolio de manera más efectiva que el método delta-normal. Esto es, los métodos paramétricos o de valuación local cuantifican el riesgo del portafolio solamente una vez, con el valor de la posición inicial, aplicando la primera y segunda derivadas como la sensibilidad en el valor del portafolio derivada de los posibles cambios en los factores de riesgo.

Los modelos de simulación son conocidos como los modelos de valuación completa, ya que cada vez que una trayectoria o movimiento en los factores de riesgo de mercado se simula, el portafolio es revaluado simultáneamente sobre una serie de escenarios. Esta característica es de vital importancia, especialmente cuando existen factores de riesgo no lineales en los portafolios tales como las opciones financieras. Por último, otra de las características de los modelos de simulación es que no asumen supuestos acerca de la distribución de los cambios en los factores de riesgo. De esta manera, los modelos de simulación se dividen en dos grandes grupos: modelo de simulación histórica y modelo de simulación Monte Carlo.

2.2.5.1 Simulación Histórica

El modelo de simulación histórica presenta propiedades más atractivas que el método delta-normal, puesto que no requiere ningún supuesto en la distribución de probabilidad de los rendimientos. Aunque necesita un gran número de cálculos para pronosticar y simular los posibles valores futuros del portafolio en el corto plazo, esto es, requiere de

los rendimientos pasados para predecir los precios futuros de los factores de riesgo que afectan al portafolio. Así, la composición del portafolio no sufre cambios, pero su valor de mercado si cambia. Este método genera los cambios en el valor del portafolio, asumiendo que las innovaciones en los precios de mercado son derivadas de una distribución empírica o histórica; es decir, los cambios en los factores de riesgo son generados por un proceso estacionario. Esto ocasiona que la función de distribución no cambie significativamente durante el tiempo.

No obstante, el uso de la distribución empírica vuelve sensible al método, proporcionando estimaciones incorrectas del VaR debido a que omite la evolución de los precios a través del tiempo. Asimismo, los rendimientos extremos pasados suelen ser un pobre predictor de los eventos raros, los cuales ocurren en los mercados financieros durante periodos de crisis financieras, devaluaciones y turbulencias bursátiles y, cuyo impacto se refleja notablemente en la estimación del VaR, alimentado por las propiedades de la distribución empírica que se caracteriza por ser muy densa en el interior y suave alrededor de la media.

Existe bastante literatura documentada que estudian las propiedades atractivas del método de simulación histórica para estimar el VaR de un portafolio de inversión, especialmente compuesto por posiciones no lineales. De hecho, varias instituciones financieras y órganos reguladores lo utilizan y lo sugieren para determinar óptimos requerimientos de capital que coadyuven a respaldar las posiciones de sus carteras de inversión. Beder (1995) ofrece un excelente análisis, aplicando varias metodologías para estimar el VaR de tres portafolios con diferentes horizontes de tiempo. Los hallazgos del estudio demuestran que los resultados son muy diferentes para cada una de las metodologías, atribuidos a los supuestos estadísticos establecidos en cada modelo. Hull y White (1998) analizan la variación del riesgo a través del tiempo, construyendo escenarios de residuales históricos, esto es, revaluando el valor del portafolio con base en la historia pasada de los residuales. Por último, Butler y Schachter (1998) proporcionan medidas de valor en riesgo alternativas más precisas,

utilizando el método de simulación histórica y los estimadores Kernel para suavizar la distribución empírica de los rendimientos.

El algoritmo del modelo de simulación histórica empleado para la estimación del valor en riesgo de una posición de mercado o portafolio de inversión es el siguiente:

- a) En primer lugar, se debe contar con datos diarios de las series financieras de los factores de riesgo que componen al portafolio. Para obtener buenos resultados se necesitan al menos tres o cinco años de datos diarios.

$$P_k = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix}$$

donde P_k es el vector del factor de riesgo k .

- b) Se calculan los rendimientos o los cambios en todos los factores de riesgo del portafolio para generar una distribución empírica. Aquí, se emplean dos formas para determinar los cambios en los factores de riesgo, por ejemplo, en el caso de las tasas de interés se trabaja con los niveles de las mismas. Mientras que para los precios en los tipos de cambio, activos financieros y bienes se utiliza la diferencia de los logaritmos naturales; es decir, los rendimientos geométricos.

$$R_k = \begin{bmatrix} \ln \frac{P_1}{P_0} \\ \ln \frac{P_2}{P_1} \\ \vdots \\ \ln \frac{P_n}{P_{n-1}} \end{bmatrix}$$

- c) Se genera un conjunto de precios futuros utilizando los cambios o los rendimientos de los factores de riesgo y el precio actual del factor de riesgo:

$$P_k^f = \begin{bmatrix} P_n * e^{R_1} \\ P_n * e^{R_2} \\ \vdots \\ P_n * e^{R_n} \end{bmatrix}$$

- d) Se calcula el vector de pérdidas y ganancias, tomando la diferencia entre el vector de los precios futuros de los factores de riesgo y el precio actual. Después se multiplica cada una de las diferencias por el valor de la posición inicial.

$$P \& L = \begin{bmatrix} P_n * e^{R_1} - P_n \\ P_n * e^{R_2} - P_n \\ \vdots \\ P_n * e^{R_n} - P_n \end{bmatrix} * W$$

donde W es el valor de la posición inicial.

- e) Finalmente, las pérdidas y ganancias son ordenadas en forma ascendente para calcular el valor en riesgo para un percentil del $c\%$. Por ejemplo, para una distribución de pérdidas y ganancias de 1000 observaciones, el VaR para un nivel de probabilidad del 5% está determinado por la entrada $1000 * 0.05 = 50$ del vector de pérdidas y ganancias del portafolio, una vez ordenado en forma ascendente.

El método de simulación histórica comenzó a tener popularidad como medida de riesgo en la industria financiera, después de que ocurrió la crisis del caso de Long Term Capital Management (por sus siglas en inglés, LTCM), ocasionada por el contagio de la moratoria de pagos de Rusia ocurrida en el año de 1998. Esta crisis catastrófica dejó claro que el supuesto de normalidad asumido en el modelo de varianza-covarianza introducido por J. P. Morgan (1995), suele ser insuficiente para capturar el efecto de las

colas pesadas exhibido en la distribución de rendimientos y la no linealidad de los portafolios ocasionada por las posiciones de productos derivados. En este sentido, la aproximación histórica estima el VaR como un percentil de la distribución empírica discreta.²² Aunque esta aproximación convencional simple ha sido utilizada ampliamente por varias instituciones financieras e inversionistas individuales para el análisis del riesgo, no deja de tener sus ventajas y desventajas, como todo modelo de medición de riesgo, las cuales se mencionan a continuación.

Las principales ventajas del método de simulación histórica²³ que lo hacen un modelo robusto y ampliamente aceptado en el área de la administración de riesgos son:

- a) La aproximación no asume ningún supuesto acerca de la distribución de probabilidad de los rendimientos, principalmente debido a que la distribución empírica generada por los cambios en los factores de riesgo es estacionaria; es decir, el método implícitamente asume que los rendimientos se distribuyen independientemente e idénticamente.
- b) El método de simulación histórica no asume correlaciones estables, ya que representan una función de la magnitud de los factores de riesgo.
- c) El método permite incorporar la naturaleza no lineal exhibida en las opciones financieras, revaluando el portafolio en diferentes niveles para cada uno de los factores de riesgo, puesto que depende de los precios actuales.
- d) El modelo de simulación no padece el problema del sesgo de la cola; es decir, la aproximación es robusta para capturar las colas pesadas ocasionado por el exceso de curtosis; un hecho estilizado observado en la distribución de rendimientos de los

²² Véase, por ejemplo, Inui y Kijima (2005).

²³ Existe bastante literatura que ha documentado apropiadamente las principales ventajas del método de simulación histórica. Véase, por ejemplo, Mahoney (1996), Hendricks (1996) y Jackson, Maude y Perraudin (1997).

factores de riesgo. En otras palabras, la distribución empírica para todos los factores de riesgo del portafolio refleja exactamente la frecuencia histórica de pérdidas grandes sobre el periodo de análisis.

- e) El método de simulación histórica permite construir intervalos de confianza a diferencia de los métodos paramétricos, los cuales coadyuvan a validar la calidad y exactitud del modelo VaR implementado en la estimación del riesgo de mercado.
- f) Finalmente, el método no está propenso al riesgo de modelo, puesto que no depende de supuestos específicos de modelos de valuación o de la estructura estocástica del mercado.

Entre las desventajas del modelo de simulación histórica se pueden destacar las siguientes:

- a) La principal desventaja de la metodología corresponde a los datos históricos de las series financieras, propiciado por su lenta adaptación a las condiciones actuales del mercado o por la carencia de información. Estos factores no sólo provocan distorsiones en la estimación del riesgo, sino también dificultades en la implementación del método, en particular, en los mercados financieros emergentes que no cuentan con suficiente información. Por ejemplo, para generar 1,250 simulaciones independientes para un factor de riesgo se requieren 5 años de datos diarios.
- b) Otra de las desventajas se atribuye a los resultados inconsistentes proporcionados por el modelo, derivados de la discrepancia entre la distribución futura de los factores de mercado y la distribución histórica.
- c) El modelo se vuelve lento para incorporar cambios estructurales en los portafolios grandes, los cuales pueden ser mejor tratados con el método delta-normal.

- d) El método no permite incorporar escenarios de volatilidad dinámica o variable a través del tiempo como el método delta-normal.

- e) Por último, otro de los problemas del método de simulación histórica es su sensibilidad al tamaño de la muestra y los percentiles pequeños, los cuales pueden causar errores de estimación en el VaR. Esto sucede cuando eventos extremos caen dentro del conjunto de datos, ocasionando un efecto de distorsión en la estimación del VaR frecuentemente más grande que el estimado por los modelos paramétricos. En otras palabras, la frecuencia baja y la naturaleza discreta de los rendimientos fuera de las colas conllevan a estimaciones con varianzas muy altas e incluso infinitas. De ahí, la subestimación o sobreestimación del VaR, el cual también es medido en forma discreta.²⁴

2.2.5.2 Simulación Monte Carlo

Una segunda clase de métodos para determinar la máxima pérdida en un portafolio de inversión es el método de simulación Monte Carlo. En su forma más sencilla, la técnica de simulación Monte Carlo básicamente se refiere a la utilización de series de números aleatorios para la creación de escenarios futuros. Aquí cada escenario de la simulación consiste en una secuencia de valores que en conjunto forman una posible trayectoria de la variable de interés a analizar. Esta aproximación robusta comenzó a utilizarse en el año de 1942 con fines militares y el término se derivó del casino de juegos de azar de Mónaco. Desde entonces no sólo se ha empleado para resolver problemas de física e ingeniería, sino también ha sido empleado en el sector financiero por varias instituciones financieras para la valuación de productos derivados y medición del riesgo financiero. Debido a la gran flexibilidad que posee para capturar los efectos de la convexidad en los portafolios compuestos por instrumentos financieros más complejos tales como las opciones financieras.

²⁴ Para tener una mejor perspectiva de las desventajas y debilidades de la aproximación de simulación histórica para estimar el riesgo de mercado. Véase Pritsker (1999); Danielsson y de Vries (2000).

La técnica tiene la capacidad de generar de forma aleatoria una gran variedad de escenarios del valor del portafolio durante un horizonte de tiempo específico; el proceso se repite miles de veces para generar una distribución de probabilidad representativa de los valores del portafolio de pérdidas y ganancias, la cual se utiliza para obtener una mejor estimación del VaR, seleccionando el percentil apropiado a diferencia del método de simulación histórica que determina la evolución de los factores de riesgo directamente de la historia pasada. De esta manera, el método de simulación Monte Carlo es considerado el más potente para cuantificar el riesgo de un portafolio, ya que permite a los administradores de riesgos utilizar distribuciones empíricas actuales de los rendimientos de los factores de riesgo sin necesidad de asumir el supuesto de normalidad. Aunque la diferencia entre las distribuciones empírica y normal no suele ser tan importante como para rechazar la hipótesis de comportamiento normal de los factores de riesgo.²⁵

Existe una extensa literatura del uso de la técnica para obtener las primas de las opciones financieras. Boyle (1977) fue el primero que aplicó el método de simulación Monte Carlo para determinar las primas de las opciones. Contribuciones más recientes para la valuación de opciones de tipo americano y para contratos de opciones más complejos que incluyen volatilidad estocástica se pueden encontrar en Boyle, Broadie y Glasserman (1997); Broadie y Glasserman (1996); Broadie, Glasserman y Jain (1997); Clewlow y Carverhill (1994); Galanti y Jung (1997); Grant, Vora y Weeks, (1995); Joy, Boyle y Tan (1996); Raymar y Zwecher (1997). En cuanto a la estimación del valor en riesgo para portafolios de instrumentos financieros de renta fija y productos derivados no lineales se pueden destacar los siguientes trabajos: Abken (2000); Mausser y Rosen (1999); Pritsker (1997); El-Jahel, Perraudin y Sellin (1999); Picoult (1997); Jamshidian y Zhu (1997); Stambaugh (1996).

Dada la gran popularidad que ha alcanzado la metodología en la administración de riesgos es necesario seguir los siguientes pasos para determinar el valor en riesgo

²⁵ Otra de las características atractivas de la técnica es que puede generar cambios correlacionados entre los factores de riesgo durante el horizonte de tiempo específico, descomponiendo la matriz de varianza-covarianza a través del algoritmo de Cholesky. Para más detalles, véase Zangari (1996).

de un portafolio compuesto por posiciones lineales y no lineales tales como las opciones financieras:

- a) Seleccionar un modelo estocástico que describa el comportamiento de los precios de los factores de riesgo y especificar los parámetros que intervienen. Por ejemplo, las varianzas, covarianzas de los rendimientos y las volatilidades (para el caso de los factores de riesgo no-lineales), etc. El modelo más común utilizado es el movimiento Browniano geométrico

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dw_t. \quad (2.18)$$

Para simular las trayectorias de los precios es necesario primero encontrar una solución única para la ecuación diferencial estocástica (2.18), la cual se puede expresar como

$$S_t = S_{t-1} \exp(\mu_t dt + \sigma_t dw_t). \quad (2.19)$$

En este caso, la ecuación (2.19) representa movimientos infinitesimales en el precio del activo financiero, por ejemplo, horas, minutos, segundos, etc. Sin embargo, existe la posibilidad de transformar dicha ecuación en términos discretos con un intervalo de tiempo pequeño de tamaño Δt , comprendido entre el momento actual t y el momento objetivo T , con el fin de facilitar el trabajo en la práctica. Por consiguiente, la versión discreta de la ecuación (2.19) se puede expresar de la siguiente forma:

$$S_t = S_{t-1} \exp(\mu \Delta t + \sigma \varepsilon_t \sqrt{\Delta t}), \quad (2.20)$$

donde

ε : es una variable aleatoria normal con media cero y varianza 1.

b) Generar una sucesión de números aleatorios $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ para simular las trayectorias ficticias de los precios para cada uno de los factores de riesgo de interés que afectan al portafolio. Por lo tanto, el conjunto de precios simulados hasta el final del horizonte objetivo es

$$\begin{aligned} S_t &= S_{t-1} \exp(\mu \Delta t + \sigma \varepsilon_1 \sqrt{\Delta t}) \\ S_{t+1} &= S_t \exp(\mu \Delta t + \sigma \varepsilon_2 \sqrt{\Delta t}) \\ &\vdots \\ S_{t+n} &= S_{t+n-1} \exp(\mu \Delta t + \sigma \varepsilon_n \sqrt{\Delta t}). \end{aligned}$$

Es importante señalar que cuando se trabaja con un horizonte temporal pequeño; es decir, $\Delta t = 1$, el parámetro μ que define a la tendencia instantánea es igual a cero. Hasta el momento se ha descrito el algoritmo del método de simulación Monte Carlo para un portafolio compuesto por un factor de riesgo; es decir, no se está incorporando la estructura de correlaciones entre diversos factores de riesgo. Sin embargo, para generar una simulación de rendimientos de múltiples factores de riesgo correlacionados es necesario seguir los siguientes pasos:

- 1) El primer paso consiste en descomponer la matriz de varianza-covarianza Σ positiva definida aplicando el algoritmo de la descomposición de Cholesky, con el fin de obtener una matriz triangular inferior que se puede expresar de la siguiente forma:

$$\Sigma = AA^T$$

donde A es una matriz triangular cuadrada de dimensión $n \times n$, esto es, contiene un cero en la esquina superior derecha.

- 2) Se genera un vector de $n \times 1$ de números aleatorios $\varepsilon = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ con media cero y varianza 1.

3) Se genera un conjunto de rendimientos que se distribuyen normal

$$Y = A^T \mathcal{E},$$

donde Y es un vector de dimensión $n \times 1$, de variables normales transformadas.

4) Finalmente, se generan los precios de los factores de riesgo que se distribuyen lognormal $Z = S_t e^Y$, en donde S_t es el vector de los precios futuros esperados.

El método de simulación Monte Carlo es una aproximación híbrida que puede interpretarse como una combinación del método delta-normal y el método de simulación histórica. Dada la flexibilidad de este método es considerado como el más potente para estimar el valor en riesgo por parte de los participantes del mercado, de ahí que las principales ventajas de la técnica de simulación Monte Carlo son las siguientes:

- a) Esta aproximación proporciona una estimación del riesgo más confiable y precisa que los métodos paramétricos al generar un gran número de escenarios que se pueden analizar fácilmente.
- b) Este método no sólo recoge adecuadamente los efectos de la convexidad, sino también incorporar rápidamente los cambios en la volatilidad a través del tiempo que presentan los factores de riesgo lineales y no lineales tales como las opciones financieras. Asimismo, el modelo captura los efectos de las colas pesadas o gruesas generadas por los movimientos extremos que frecuentemente ocurren en periodos de alta volatilidad.

Los principales problemas que presenta el método de simulación Monte Carlo para estimar el valor en riesgo de un portafolio de inversión son los siguientes:

- a) El tiempo computacional que se requiere para llevar a cabo el análisis del riesgo sobre los escenarios generados a pesar de los avances computacionales en la actualidad. Este problema ocasiona que las instituciones financieras utilicen otros modelos alternativos para medir el valor en riesgo, especialmente cuando la composición de sus portafolios contiene una gran cantidad de activos financieros.
- b) Otra de sus desventajas consiste en su alto costo económico y nivel de sofisticación, debido a que su implementación requiere de una sofisticada herramienta matemática para cuantificar el riesgo del valor del portafolio. Esto origina que no todas las instituciones financieras e inversionistas individuales puedan implementar o tener acceso a un software tan especializado para medir el riesgo de sus posiciones.
- c) Finalmente, otra de las deficiencias del método para estimar el VaR es su incapacidad para neutralizar el riesgo de modelo, derivado de los problemas de especificación de los modelos seleccionados convencionales para simular las trayectorias aleatorias.

2.3 Valor en Riesgo Condicional

En la administración del riesgo también se han desarrollado importantes contribuciones en la forma de medir los riesgos catastróficos asociados con eventos extremos que se presentan con menor frecuencia, pero que representan pérdidas cuantiosas para las instituciones financieras e inversionistas individuales. Aunque las medidas convencionales VaR han sido aceptadas ampliamente como una herramienta para la administración de riesgos y la regulación financiera en un contexto internacional como consecuencia de sus propiedades teóricas y fácil implementación. Sin embargo, existe extensa literatura que ha demostrado que las medidas VaR convencionales o de

primera generación para la administración del riesgo financiero no satisfacen la condición de subaditividad. Esto significa que administrar el riesgo a través de una medida VaR puede ser ineficiente para capturar los efectos de la diversificación que reducen el riesgo del portafolio. En este sentido, una medida de riesgo alternativa atractiva para solucionar parcialmente las deficiencias que presentan las metodologías VaR, es el concepto de valor en riesgo condicional (CVaR por sus siglas en inglés).

El problema de la carencia de subaditividad que presentan las medidas convencionales VaR conllevó a Artzner, Delbaen, Eber y Heath (1997, 1999) a introducir una definición axiomática de medida de riesgo coherente en un espacio de probabilidad finito, que más tarde fue generalizada para espacios de probabilidad por Delbaen (1998). Para entender mejor la medición del riesgo en este contexto se recomienda trabajar con una regla de correspondencia que mapea variables aleatorias a los números reales sobre un espacio de probabilidad; es decir, definir un mapeo $\rho: V \rightarrow R$ como medida de riesgo. Aquí el espacio de variables aleatorias representa las pérdidas y ganancias del portafolio sobre un horizonte de tiempo dado. Así, la siguiente definición explica con más detalla el concepto de medida de riesgo coherente.

Definición 1 (medida de riesgo coherente). Sea V un conjunto de variables aleatorias F -medibles sobre un espacio de probabilidad (Ω, F, P) , tal que $E[X] < \infty$ para toda $X \in V$. Entonces $\rho: V \rightarrow R$ es una medida de riesgo coherente en el sentido de Artzner **et al.** (1997, 1999), si satisface las siguientes propiedades matemáticas para cada factor de riesgo X_1 y X_2 (correlacionados o no correlacionados) y para cada número $\lambda > 0$:

- 1) si $X_1, X_2 \in V$, $X_1 \leq X_2$, $\Rightarrow \rho(X_1) \geq \rho(X_2)$,
- 2) si $X_1, X_2, X_1 + X_2 \in V$, $\Rightarrow \rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$,
- 3) si $X_1 \in V$, $\lambda > 0$, $\lambda X_1 \in V$, $\Rightarrow \rho(\lambda \cdot X_1) = \lambda \cdot \rho(X_1)$,
- 4) si $X_1 \in V$, $\alpha \in R$, $\Rightarrow \rho(X_1 + \alpha) = \rho(X_1) - \alpha$.

La propiedad (1) se conoce como el axioma de monotonía no creciente, la cual establece que una medida de riesgo siempre debe preservar la relación de dominancia estocástica de segundo orden.²⁶ En otras palabras, la posición tomada en un mercado financiero menos líquido siempre debe presentar un riesgo mayor que una posición que se toma en un mercado con mayor liquidez. La propiedad (2) también conocida como la condición de subaditividad de una medida de riesgo significa que el riesgo total de la combinación de varias posiciones que forman un portafolio tiene que ser menor a la suma de los riesgos individuales de las posiciones del portafolio. Esta propiedad es de vital importancia para cuestiones de asignación de capital y límites de riesgos, así como para propósitos de requerimientos de capital en riesgo. En el contexto de la teoría moderna del portafolio, un inversionista siempre busca una medida de riesgo sensible a los efectos de la diversificación, esto es, una medida que disminuya el riesgo cuando se toman posiciones financieras en diferentes mercados.²⁷ Desde el punto de vista regulatorio, una institución financiera grande que es regulada con una medida de riesgo que no satisface la condición de subaditividad, podría reducir sus requerimientos de capital al dividirse en dos entidades financieras más pequeñas. La propiedad (3) o axioma de homogeneidad positiva implica que el riesgo de la posición de mercado se incrementa a medida que el tamaño de la posición aumenta. Esta propiedad solamente es válida para mercados altamente líquidos. Finalmente, la propiedad (4) conocida también como el axioma de invarianza bajo translaciones o condición libre de riesgo establece que cuando se agrega un activo financiero que paga una tasa de interés libre de riesgo o rendimiento seguro a la posición inicial, el riesgo de la posición tiene que disminuir por la misma cantidad.²⁸

Algunas proposiciones adicionales importantes se pueden derivar de los axiomas anteriores. Las propiedades de subaditividad y homogeneidad positiva conjuntamente implican que una medida de riesgo coherente es automáticamente una función convexa; es decir,

²⁶ Para un análisis más profundo de las relaciones de dominancia estocástica en el contexto de la industria financiera. Véase Kijima y Ohnishi (1996).

²⁷ Véase Frittelli y Rosaza (2002).

²⁸ Para una explicación y demostración matemática más detallada de estas propiedades deseables que debe satisfacer toda medida de riesgo coherente. Véase Artzner, Delbaen, Eber y Heath (1999).

$$\rho(\lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2) = \lambda\rho(X_1) + (1 - \lambda)\rho(X_2), \quad \forall X_1, X_2 \in V, \quad \forall \lambda \in (0,1).$$

La propiedad de convexidad juega un papel esencial en la teoría moderna del portafolio, puesto que permite optimizar el riesgo de un conjunto de inversiones. El concepto de medida de riesgo convexa sobre un conjunto finito fue introducido por Heath (2000) y desarrollado más tarde por Frittelli y Rosazza (2002), estableciendo un conjunto de axiomas que definen a las medidas de riesgo convexas. Por otra parte, algunos autores han sustituido las propiedades (2) y (3) por la condición de convexidad. Sin embargo, una medida de riesgo que solamente cumple con las propiedades de invarianza bajo translaciones, monotonicidad y convexidad presenta propiedades más débiles que las medidas de riesgo coherentes, debido al hecho que la convexidad no necesariamente implica homogeneidad positiva (Szegö, 2002). Asimismo, existe literatura que ha demostrado que cualquier medida de riesgo coherente se puede representar como una combinación convexa de medidas de riesgo coherentes para diferentes niveles de confianza.²⁹

Como resultado de la carencia de subaditividad en la medida VaR, varias medidas de riesgo alternativas con propiedades más sólidas han sido propuestas recientemente en la literatura de la administración de riesgos. La teoría de medidas de riesgo coherentes fue introducida por primera vez por Artzner **et al.** (1997, 1999), utilizando el concepto exceso esperado (expected shortfall, ES). La medida de exceso esperado es una medida de riesgo coherente basada en el valor esperado de las pérdidas potenciales que exceden el nivel del VaR. Por su parte, esta medida de riesgo robusta ha sido estudiada en forma independiente y definida de diferentes formas por varios autores en los últimos años. Los principales nombres o variantes que ha adoptado esta medida de riesgo son los siguientes: esperanza condicional de la cola (Tail Conditional Expectation, TCE), esperanza condicional del peor escenario (Worst

²⁹ Un excelente estudio matemático de las propiedades del espacio de medidas de riesgo coherentes es tratado en Acerbi (2002). Por su parte, Inui y Kijima (2005) han demostrado que una nueva medida de riesgo se puede obtener de la combinación convexa de medidas de riesgo coherentes.

Conditional Expectation, WCE), media de la cola (Tail Mean, TM), valor en riesgo condicional (Conditional Value at Risk, CVaR).³⁰

De hecho, la medida de exceso esperado comparte propiedades similares con respecto a la mayoría de las medidas de riesgo anteriores e incluso proporcionan los mismos resultados cuando se aplican a distribuciones de pérdidas y ganancias continuas. Sin embargo, las discrepancias comienzan a surgir cuando las distribuciones de pérdidas y ganancias presentan discontinuidades; llegando al grado de perder la propiedad de medida de riesgo coherente si no se tiene cuidado con los detalles de su definición.³¹ Un importante ejemplo de esta clase de medida de riesgo es la esperanza condicional de la cola (ECC) relacionada a la medida de riesgo de la esperanza condicional del peor escenario (ECPE). La medida ECPE es la medida de riesgo coherente más pequeña que supera a la medida VaR, la cual tiene gran utilidad sólo en el marco teórico, puesto que requiere el reconocimiento del espacio de probabilidad total. Entre tanto, la medida ECC es una medida de riesgo ampliamente usada en la práctica, pero desafortunadamente no cumple con la definición de medida de riesgo coherente; es decir, no satisface la propiedad de subaditividad.³²

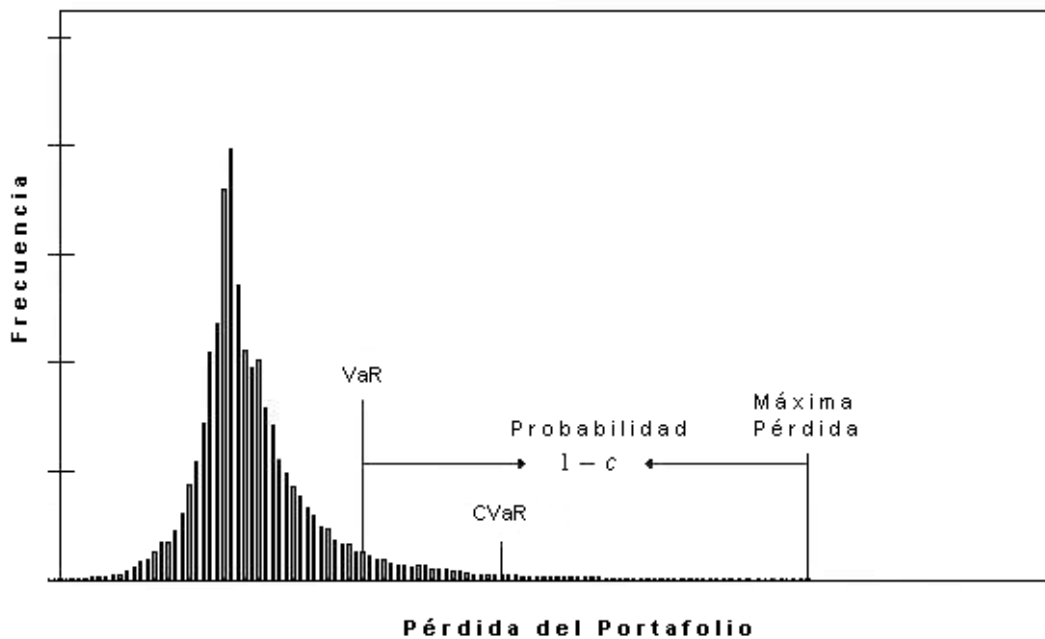
En el contexto financiero, el supremo de las pérdidas esperadas de un portafolio de inversión sobre un conjunto de medidas de probabilidad o conjunto de escenarios generalizados es otra forma de definir a la medida de exceso esperado (Acerbi y Tasche, 2002). Dada las diversas definiciones rigurosas y propiedades de las medidas de riesgo mencionadas previamente, para fines de esta investigación nos centraremos en el concepto de valor en riesgo condicional (CVaR) que coincide con la medida de exceso esperado para el caso de funciones de distribuciones continuas. Además, el CVaR es una medida de riesgo más satisfactoria debido a que cumple con todas las propiedades deseables de una medida de riesgo coherente y con la condición de

³⁰ Estudios recientes que proporcionan diferentes definiciones matemáticas de medidas de riesgo alternativas que cuantifican las pérdidas de las colas de la distribución, consistentes con el concepto exceso esperado incluyen a Acerbi *et al.* (2001), Acerbi y Tasche (2002) y Rockafellar y Uryasev (2002).

³¹ Acerbi y Tasche (2002) proporcionan ejemplos matemáticos donde se demuestra que las medidas de riesgo VaR y ECC no cumplen con la propiedad de subaditividad.

³² Importantes propiedades matemáticas que demuestran la relación de estas medidas de riesgo alternativas son discutidas con más detalle en Acerbi y Tasche (2002) y Rockafellar y Uryasev (2002).

convexidad que permite realizar un análisis del riesgo-rendimiento en el contexto de la teoría moderna del portafolio de Markowitz. Esta aproximación estima las pérdidas esperadas de la cola de la distribución de rendimientos, considerando tanto la frecuencia como el tamaño de los eventos extremos como se ilustra en la Gráfica 2.2. Asimismo, el CVaR puede ser optimizado fácilmente aplicando programación lineal y algoritmos de optimización no lineal; una característica importante que permite el manejo de portafolios con un gran número de instrumentos financieros y escenarios (Rockafellar y Uryasev, 2000).



Gráfica 2.2: Distribución de Pérdidas del Portafolio con Valor en Riesgo (VaR) y Valor en Riesgo Condicional (CVaR)
Fuente: Rockafellar y Uryasev (2000).

En términos estadísticos, la medida CVaR basada en una distribución continua de los cambios en el valor del portafolio se puede definir como la esperanza condicional matemática de las pérdidas que han excedido el nivel del VaR; es decir,

$$\text{CVaR}_c(X) = -E[X|X \leq \text{VaR}_c(X)] \quad (2.21)$$

Para el caso de una distribución de pérdidas y ganancias discreta es necesario modificar la definición de exceso esperado o valor en riesgo condicional para estimar el riesgo de la cola de la distribución. La razón de estos ajustes al concepto por parte de varios autores es con el fin de que cumpla con las propiedades de medida de riesgo coherente.³³ Por su parte, existe extensa literatura financiera que ha demostrado que la medida valor en riesgo condicional es una medida de riesgo coherente. En el Apéndice A se proporciona la demostración de las cuatro propiedades que debe cumplir la medida CVaR siguiendo los trabajos seminales de Artzner **et al.** (1999) y Acerbi y Tasche (2002).

Asimismo, cuando la distribución de pérdidas y ganancias del portafolio sigue una ley normal se ha demostrado en la literatura que el VaR y el CVaR están exentos del riesgo de la cola. Más precisamente, si la distribución de rendimientos del portafolio pertenece a la familia de las distribuciones elípticas simétricas.³⁴ Ante esta situación, el valor en riesgo condicional se puede expresar matemáticamente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \text{CVaR}_c(X) &= -E[X|X \leq \text{VaR}_c(X)] = -\frac{\int_{-\infty}^{\text{VaR}_c(X)} xf(x)dx}{\int_{-\infty}^{\text{VaR}_c(X)} f(x)dx} \\
 &= -\frac{\frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\text{VaR}_c(X)} x \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_X^2}\right\} dx}{F_X(x)} = -\frac{1}{c\sigma_X\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\text{VaR}_c(X)} x \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_X^2}\right\} dx \\
 &= \frac{1}{c\sigma_X\sqrt{2\pi}} \left[\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_X^2}\right\} \sigma_X^2 \right]_{-\infty}^{\text{VaR}_c(X)} = \frac{1}{c\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\text{VaR}_c^2}{2\sigma_X^2}\right\} \sigma_X \\
 &= \frac{1}{c\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{q_c^2}{2}\right\} \sigma_X, \tag{2.22}
 \end{aligned}$$

³³ Estudios que tratan los problemas de las distribuciones de pérdidas y ganancias discretas en el contexto de la medición del valor en riesgo condicional incluyen a Wirch y Hardy (1999), Acerbi y Tasche (2002) y Rockafellar y Uryasev (2002).

³⁴ Para una ilustración de las condiciones del problema del riesgo de la cola del VaR con ejemplos, véase Yamai y Yoshida (2002a, 2002c, 2002d) y Yamai y Yoshida (2005).

donde q_c representa el c -percentil de la distribución normal estándar. En consecuencia, el VaR y CVaR pueden proporcionar estimaciones coherentes del riesgo bajo la hipótesis de normalidad; ambas medidas se pueden representar como un múltiplo escalar de la desviación estándar. Por ejemplo, para un nivel de confianza del 99%, el VaR es igual a 2.326 veces la desviación estándar, mientras que el CVaR para el mismo nivel de confianza equivale a 2.667 veces la desviación estándar, que representa un VaR estimado con un nivel de confianza del 99.6%. Por consiguiente, el supuesto de normalidad no sólo subestima el VaR, sino también el CVaR debido a que no toma en cuenta la severidad de las pérdidas extremas capturadas en las colas de la distribución de rendimientos.

Por otra parte, el valor en riesgo condicional estimado a través del modelo de simulación histórica se determina al tomar el promedio de las pérdidas que exceden el nivel del VaR de la siguiente forma:

$$\text{CVaR}_c(X) = -\frac{1}{(1-c)T} \sum_{t=1}^{(1-c)T} R_t, \quad (2.23)$$

donde todas las observaciones tienen los mismos pesos.

Aunque el CVaR todavía no es considerado una medida estándar en la industria financiera poco a poco va ganando la atención de los administradores de riesgos para utilizarla como una medida alternativa en la cuantificación del riesgo financiero; ha merecido también un alto reconocimiento por parte de las autoridades reguladoras para usarla como una herramienta para determinar requerimientos de capital óptimos adicionales que garanticen la solvencia de las instituciones financieras en periodos de turbulencias financieras. Esto se debe a que la medida CVaR presenta mejores propiedades teóricas sustentadas por una sólida matemática a comparación de la medida VaR. Sin embargo, desde el punto de vista práctico, la medida CVaR y otras medidas de riesgo relacionadas pueden ser difíciles de implementar, ya que requieren más datos para llevar a cabo el Backtesting (Yamai y Yoshida, 2002a). Por otra parte,

la creciente necesidad de introducir variables aleatorias con distribuciones discontinuas en el sector financiero es otra de las desventajas que presentan las medidas de riesgo coherentes. Acerbi y Tasche (2002) han demostrado que tomar simplemente la esperanza condicional de las pérdidas que exceden el nivel del VaR cuando se presentan discontinuidades en la distribución de pérdidas y ganancias del portafolio conlleva a que la medida de riesgo no cumpla con las propiedades deseables de medida de riesgo coherente.

Capítulo 3

Teoría de Valor Extremo

3.1 Introducción

La teoría de valor extremo ha surgido como una de las ramas más importantes de la teoría de la estadística durante los últimos cincuenta años. Esta teoría juega un papel fundamental en el análisis y la modelación del comportamiento de los eventos raros o extraordinarios capturados en los extremos de la distribución de una muestra específica. El desarrollo sistemático de la teoría de valor extremo se le atribuye a Von Bortkiewicz (1922), quien analizó la distribución sobre la media y varianza de una muestra de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas normalmente. La contribución de su investigación fue esencial para el desarrollo de la teoría general, puesto que por primera vez fue introducido claramente el concepto de distribución para valores grandes. Más tarde, un trabajo de mayor relevancia que trata las propiedades de las distribuciones asintóticas de valores extremos incluye a Fréchet (1927). En esta investigación, el autor identificó una posible distribución asintótica para estadísticas de orden extrema.¹ En el siguiente año, siguiendo la contribución de Bortkiewicz (1922) del problema para estimar las probabilidades de valores extremos, Fisher y Tippett (1928) hacen una importante aportación a la teoría, demostrando que las distribuciones de valor extremo pueden clasificarse en tres tipos, descritas más adelante. En la década de los cuarenta, Gnedenko (1943) establece las bases sólidas para el desarrollo de la teoría de valor extremo, proporcionando condiciones suficientes y necesarias para la convergencia débil de las estadísticas de orden extremas para cada una de las tres clases de distribuciones de valor extremo establecidas por Fisher y Tippett (1928). Sin embargo, Gumbel (1941, 1958) puede ser considerado como el principal autor que ha hecho diversas aportaciones significativas a la teoría y el primero

¹ Las estadísticas de orden cuentan con las herramientas matemáticas necesarias para estudiar las propiedades estadísticas de los valores extremos máximos y mínimos de muestras tanto grandes como pequeñas.

que ha llamado la atención de los ingenieros y los estadísticos mediante la aplicación formal de la teoría de valor extremo a ciertas distribuciones que previamente habían sido tratadas empíricamente.²

En este sentido, la teoría de valor extremo ha sido aplicada desde hace varios años para la solución de problemas en diversas áreas de las ciencias y la ingeniería, tales como la ingeniería de estructuras, hidrología, oceanografía, medio ambiente, meteorología, resistencia de materiales, así como en el campo de la telecomunicaciones. Una de las características atractivas de la teoría del valor extremo es que se enfoca principalmente en el análisis de las colas de la distribución, y no en el centro de la distribución donde generalmente se encuentra la mayor masa probabilística, ofreciendo métodos sensibles que tratan la severidad de los eventos extremos de forma eficiente. Existen varios textos excelentes que estudian a la teoría asintótica de valores extremos y sus aplicaciones estadísticas. Entre los más recientes se puede citar a Reiss (1989). Este autor discute varios conceptos de convergencia y tasas de convergencia asociados a los valores extremos, así como sus aplicaciones en diversos campos de las ciencias; Castillo (1988) ha realizado una actualización del texto de Gumbel (1958), presentando varias aplicaciones estadísticas de la teoría de valor extremo en la ingeniería; otras referencias que proporcionan un análisis riguroso de las bases matemáticas de los modelos de valor extremo han sido desarrollados por Haan y Ferreria (2006), Beirlant, Goegebeur, Segers y Teugels (2004), Coles (2001), Resnick (1987), Galambos (1987), Leadbetter, Lindgren y Rootzén (1983) y David (1981).

En la última década del siglo XX y a principios del siglo XXI, la teoría de valor extremo ha recibido gran atención por parte de la industria del sector asegurador y financiero. Sustentada por una probabilidad sólida y extensa esta teoría ha sido considerada como una de las herramientas más poderosas para el análisis de las colas de la distribución de rendimientos de las series financieras. Esto ha contribuido a que la

² Para un estudio más detallado de la historia de la teoría de valor extremo, véase Kotz y Nadarajah (2000) y Kinnison (1985).

aplicación de la teoría de valor extremo a datos financieros progresara rápidamente; así, existen diversos estudios empíricos para el análisis del riesgo financiero extremo que incluyen a McNeil (1999); McNeil y Frey (2000); Danielsson y de Vries (2000); Neftci (2000); Gencay y Selcuk (2004). La mayoría de los trabajos proponen la distribución de Pareto generalizada para analizar el comportamiento asintótico de los rendimientos extremos en los mercados financieros industrializados. Por su parte, Login (2000) estima el VaR utilizando una distribución de valor extremo generalizada para los rendimientos del Índice Accionario S&P 500. Asimismo, una visión profunda del papel fundamental que desempeña la teoría de valor extremo en el análisis de eventos raros capturados en las colas de la distribución de probabilidad, está sustentada por una excelente literatura que cubre aspectos tanto prácticos como formales aplicados a las finanzas y seguros incluyen a McNeil, Frey y Embrechts (2005), Embrechts, Klüppelberg y Mikosh (1997), Reiss y Thomas (1997) y Beirlant, Teugels y Vynckier (1996).

3.2 Naturaleza de los Valores Extremos en los Mercados Financieros

Desde que la administración de riesgos ha sido establecida sobre una base cuantitativa, el modelo naturalmente más simple y utilizado por parte de las instituciones financieras e inversionistas individuales para medir el riesgo ha sido la distribución normal, misma que proporciona un buen ajuste para el centro de la distribución de probabilidad de pérdidas y ganancias del portafolio, cubriendo el rango total de los resultados posibles. Desafortunadamente, la distribución de probabilidad normal es ineficiente para predecir la frecuencia de movimientos extremos observados en los mercados financieros durante periodos de volatilidad y turbulencia financiera. Estos movimientos grandes de mercado considerados por naturaleza eventos raros son derivados de la inestabilidad de los mercados domésticos e internacionales; la combinación de una serie de rendimientos negativos no sólo genera grandes pérdidas para los agentes económicos, sino también puede colapsar el sistema financiero de un país al fulminar enormes cantidades de dinero en cuestión de segundos. Por ejemplo, el crash bursátil que ocurrió en octubre de 1987 en Estados Unidos conocido como el

lunes negro, el colapso en el mercado de bonos estadounidense ocurrido en 1994, la crisis mexicana de 1994 y la crisis asiática de 1997. Estos eventos son ejemplos de las debacles más espectaculares de una categoría de shocks de mercado o devaluaciones que han estremecido a los mercados financieros en el siglo XX. Algunos eventos más recientes incluyen la declaratoria de moratoria sobre la deuda soberana de Rusia en el año de 1998, la devaluación del real brasileño frente al dólar a principios de 1999, el desplome del índice Nasdaq en abril de 2000 y la crisis bancaria de Argentina en 2001.

Como se mencionó anteriormente estos eventos extraordinarios han representado pérdidas millonarias para las instituciones financieras e inversionistas individuales que operan en los mercados financieros, pero sus principales causas aún no han sido identificadas exactamente. Existe bastante literatura que trata de aclarar los orígenes de los crash de mercado a fin de entender sus causas y desarrollar posibles remedios para evitar sus efectos más negativos; sin embargo, ninguna causa clara ha sido generalmente reconocida. Por ejemplo, en el crash de octubre de 1987, muchas explicaciones han sido propuestas pero ninguna ha sido ampliamente aceptada. Algunas causas de este evento son las operaciones computarizadas, la operación excesiva de productos derivados, la falta de liquidez en el mercado, el déficit comercial y presupuestal de Estados Unidos, los precios sobrevaluados de activos financieros originados por la burbuja especulativa durante el periodo previo al crash, la presencia o ausencia de límites en los movimientos de los precios, operaciones realizadas en horas fuera de mercado, la presencia o ausencia de corredores de piso, la diferencia en el volumen de operaciones realizadas en los mercados de contado y de derivados, el comportamiento psicológico de los participantes, el significado de los costos de transacción, etc. Análisis más rigurosos y sistemáticos, así como regresiones múltiples de estos factores han concluido que no existe un origen fundamental que ocasionó este evento (Barro, Fama, Fischel, Meltzer, Roll y Telser, 1989).

Debido al estancamiento alcanzado por las aproximaciones que procuran encontrar una causa fundamental de los crash de mercado, varios investigadores han tratado de buscar causas más sólidas, proponiendo que una crash puede ser el auge

de una inestabilidad endógena asociada al comportamiento psicológico de los inversionistas (Orlean, 1989 y 1995; Johansen y Sornette, 1999; Shiller, 2000). Por su parte, Johansen y Sornette (1999) y Sornette y Johansen (2001) han definido a un crash como un evento estocástico asociado con el fin de una burbuja cuya identificación proporciona una señal. De ahí que se ha desarrollado una extensa literatura para detectar empíricamente las burbujas financieras y, en particular, burbujas sobre expectativas racionales, mientras que la evidencia sobre burbujas especulativas ha sido muy limitada (Camerer, 1989; Adam y Szafarz, 1992).

Por otra parte, en el contexto de la teoría económica se ha demostrado que el comportamiento complejo de los precios en los mercados financieros es un claro reflejo del flujo continuo de la información, la cual es analizada y asimilada por una multitud de analistas y operadores (Cutler, Poterba y Summers, 1989). Pero los movimientos grandes de mercado también pueden ser causados por fenómenos exógenos tales como los eventos del 11 de septiembre de 2001 y el golpe de estado contra el gobierno de Gorbachev ocurrido el 19 de agosto de 1991. Esta clase de shocks pueden ser comparados con aquellos shocks que parecen ser causados en forma endógena como consecuencia de la característica propia del mercado. Esto implica que la existencia de noticias malas absolutamente exógenas influye en los precios de los mercados financieros, creando fuertes incrementos en la volatilidad. Sornette **et al.** (2003) proporcionan evidencia teórica para detectar y entender más fácilmente los shocks endógenos y exógenos. Este análisis es consistente con algunos análisis previos que han sugerido que el crash de 1987 puede ser considerado como un evento endógeno (Barro **et al.**, 1999; Johansen y Sornette, 1999; Sornette y Johansen, 2001).

En consecuencia, uno de los propósitos esenciales de la administración de riesgos es analizar y explorar los datos históricos, con el fin de obtener información adicional que permita a los inversionistas calcular con exactitud la magnitud y la probabilidad de pérdidas potenciales futuras que pueden ocurrir como resultado de los movimientos extremos de mercado. Esta magnitud y probabilidad, en términos estadísticos, son representadas por los percentiles altos y las probabilidades de las

colas de la distribución de pérdidas y ganancias. La identificación de movimientos extremos en los precios de las series financieras suelen ser raros, pero de vital importancia para los inversionistas que participan en los mercados financieros, ya que reflejan información fundamental para una administración del riesgo financiero más consistente. Estos movimientos extremos que experimentan los precios de las series financieras están asociados con las correcciones de los mercados financieros durante periodos normales de operación y durante periodos de extrema volatilidad, derivados de eventos como desplomes en los índices accionarios, crisis financieras, devaluaciones o escándalos financieros y que muchas de las veces son producto de los contagios financieros.

3.3 Procedimientos Estadísticos para el Análisis de Valores Extremos

El principal objetivo de la teoría de valor extremo es la modelación y cuantificación del comportamiento estocástico de un proceso de valores extremos para muestras de tamaño específico que se distribuyen independientemente e idénticamente. Esta teoría es una herramienta poderosa que se interesa principalmente en el análisis de la masa probabilística que se encuentra en las colas de la distribución de probabilidad; es decir, con el estudio de la distribución asintótica de las estadísticas de orden. Los principales resultados de la teoría de valor extremo son afines con el Teorema del Límite Central. De hecho, ambas teorías toma en cuenta el comportamiento asintótico de las variables aleatorias para obtener resultados independientes de la distribución inicial.³

Los valores extremos se pueden definir como las observaciones máximas y las observaciones mínimas que pueden ocurrir durante un periodo de tiempo fijo. Existe fuerte evidencia empírica que ha demostrado que los valores extremos grandes y pequeños en una muestra ocurren en clusters. Este fenómeno se puede explicar en gran medida con la dependencia de las colas de la distribución. Generalmente, los valores extremos se encuentran en la volatilidad *clustering*, la cual es un hecho

³ Para una discusión más detallada sobre la comparación de ambas teorías ilustrada con ejemplos, véase Embrechts, Klüppelberg y Mikosch (1997).

estilizado comúnmente observado en las series financieras cuando se utilizan datos de frecuencia alta, afectando de manera adversa en la estimación de los parámetros y en el pronóstico de la volatilidad, ya que los valores extremos también están influenciados por el comportamiento variable en el tiempo del segundo momento de la distribución. Esto significa que la presencia de movimientos extremos está relacionada a la persistencia de los shocks en la volatilidad como se demuestra en Longin (1997). En consecuencia, la estructura de los rendimientos extremos de las series financieras tendrá que ser tratada de diferente manera como en los modelos autorregresivos de heteroscedasticidad condicional generalizados (GARCH).

Por otra parte, los niveles de las medidas relativas asociados a un conjunto de información determinan los procedimientos estadísticos, principalmente utilizados para entender las características básicas de los rendimientos extremos. Los niveles de las medidas representan la forma de descripción de las características de la información obtenida en las mediciones; es decir, contiene información de cómo los datos se compilaron, se identificaron y clasificaron, así como las características esenciales de las observaciones medidas. En el contexto de la teoría de valor extremo, la identificación de los rendimientos extremos se realiza a través de dos procedimientos estadísticos alternativos definidos de acuerdo con el nivel de la medida: la primera técnica estadística considera el número de rendimientos extremos que ocurren, mientras que la segunda considera la magnitud de los rendimientos extremos. Para tener una perspectiva más completa de las diferentes técnicas que la teoría de valor extremo ofrece para el análisis de los rendimientos extremos a continuación se explican cada una de ellas.

3.3.1 Técnica de Picos sobre un Umbral

Dado el hecho de que los rendimientos de un portafolio de inversión son directamente afectados por las fluctuaciones en los precios de los títulos de capital como consecuencia de las colocaciones de una determinada emisión primaria o secundaria de capital en una fecha futura. En este sentido, la incorporación de la asimetría de las

colas se puede considerar como otra de las características atractivas de la teoría de valor extremo, ya que permite analizar por separado las colas de la distribución de rendimientos, obteniendo una mejor estimación del riesgo extremo, puesto que la información más importante para los administradores de riesgos se encuentra capturada en las colas de la distribución de pérdidas y ganancias. Para propósitos de la administración de riesgos, las instituciones financieras e inversionistas individuales no sólo se interesan en los rendimientos extremos observados, sino también en su comportamiento asintótico cuando se ha excedido un cierto nivel. De esta manera, la caracterización de los rendimientos extremos de los precios en los activos financieros puede ser definida en términos de pérdidas potenciales que exceden un umbral.

El primer procedimiento estadístico se centra en la frecuencia de ocurrencia de pérdidas grandes que exceden un umbral alto. Esta técnica también conocida como la técnica de picos sobre un umbral (Peaks over Threshold) consiste básicamente en obtener rendimientos extremos de una muestra de variables aleatorias R_1, R_2, \dots, R_n que representan riesgos o pérdidas, las cuales se encuentran por encima de un alto umbral u ⁴ fijado de antemano con una función de distribución desconocida, F . Esto es, la probabilidad de que el rendimiento condicional R exceda el umbral u está definida por la siguiente distribución de excesos condicional:

$$F_u(r) = P\{R - u \leq r | R > u\} = \frac{P\{R - u \leq r, R > u\}}{P\{R > u\}} = \frac{F(r + u) - F(u)}{1 - F(u)}.$$

Sin embargo, el comportamiento estadístico de las variables aleatorias R_1, R_2, \dots, R_n no se conoce con exactitud en la mayoría de las aplicaciones, por lo que el comportamiento asintótico de los rendimientos extremos es necesario que sea estudiado a través de teoría de valor extremo. Balkema y de Haan (1974) proponen un teorema que demuestra que para un umbral suficientemente grande u , la función de distribución de excesos puede ser aproximada por un miembro de la familia de la

⁴ Para un desarrollo matemático más completo de la teoría sobre la técnica estadística de picos sobre un umbral y su selección exacta que conlleva a obtener mejores estimaciones en el modelo. Véase Davison y Smith (1990), Smith (1999) y Danielsson y de Vries (2000).

distribución de Pareto generalizada. Los resultados más importantes del teorema sustentan que si un bloque máximo tiene una distribución aproximada, entonces los excesos del umbral tienen una determinada distribución que forma parte de la familia de la distribución de Pareto generalizada.⁵

3.3.2 Procedimiento de Bloque Máximo

Dada la compleja estructura de los mercados financieros, las técnicas de valor extremo, hoy en día, juegan un papel fundamental en el análisis y predicción exacta de los rendimientos extremos en las series financieras, así como en la medición del riesgo extremo. Las propiedades de los rendimientos extremos negativos (mínimos) y positivos (máximos) son altamente relevantes para el análisis del valor en riesgo de una posición larga o una posición corta.

En consecuencia, otra forma alternativa de incorporar información adicional en el análisis de valores extremos es a través del procedimiento estadístico de la magnitud de los valores máximos, principalmente representados por un proceso medido sobre un intervalo de tiempo regular. Generalmente, los valores extremos observados son agrupados en bloques de tamaño fijo, por ejemplo, las pérdidas y ganancias máximas que un inversionista puede alcanzar al tomar una posición financiera durante un día, semana, mes, trimestre, semestre o año de operación. Esta aproximación alternativa que representa la piedra angular de la teoría de valor extremo clásica también es conocida como la técnica de bloques máximos; el procedimiento consiste en la colección de observaciones máximas que se extraen de cada uno de los bloques o submuestras durante un periodo de tiempo fijo. Este grupo de medidas usualmente es fácil de definir, puesto que los bloques máximos se obtienen de muestras grandes de datos que se distribuyen independientemente e idénticamente.

⁵ Una demostración matemática más detallada de la función de distribución de excesos es tratada en Embrechts **et al.** (1997).

Para facilitar la formulación del modelo que describa formalmente el comportamiento asintótico de estadísticas de orden más grande dentro de un bloque; estos valores extremos pueden ser definidos como el máximo y mínimo de n variables aleatorias ordenadas R_1, R_2, \dots, R_n . Ahora denotando a M_n como el rendimiento máximo observado que puede alcanzar un activo financiero durante n días de operación expresado de la siguiente manera:

$$M_n = \text{Max}\{R_1, R_2, \dots, R_n\},$$

y suponiendo que R_1, R_2, \dots, R_n es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticas distribuidas con función de distribución desconocida, F_R .

Por lo tanto, la distribución de M_n puede ser expresada de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} P\{M_n \leq r\} &= P\{R_1 \leq r, R_2 \leq r, \dots, R_n \leq r\} \\ &= P\{R_1 \leq r\} \times P\{R_2 \leq r\} \times \dots \times P\{R_n \leq r\} \\ &= \prod_{j=1}^n P\{R_j \leq r\} = F_R^n(r) = F_{M_n}(r). \end{aligned} \quad (3.1)$$

En el contexto de la administración del riesgo también se requieren modelos que describan el comportamiento de las propiedades de los rendimientos extremos mínimos, porque son considerados altamente relevantes para la estimación del valor en riesgo de una posición larga. Asimismo, la teoría de valor extremo se puede aplicar de manera análoga para los rendimientos extremos mínimos de una posición larga. Los resultados se pueden obtener de manera inmediata de los resultados correspondientes para M_n con un simple cambio de signo. Definiendo $\tilde{R}_i = -R_i$ para $i = 1, \dots, n$, el cambio de signo significa que rendimientos pequeños de R_i corresponden a rendimientos

grandes de \tilde{R}_i . Así que $\tilde{M}_n = -M_n$ siempre y cuando $\tilde{M}_n = \text{Min}\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$ y $M_n = \text{Max}\{\tilde{R}_1, \tilde{R}_2, \dots, \tilde{R}_n\}$.

Por lo tanto, para n suficientemente grande la función de distribución para \tilde{M}_n se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 P\{\tilde{M}_n \leq r\} &= P\{-M_n \leq r\} \\
 &= P\{M_n \geq -r\} = 1 - P\{M_n > r\} \\
 &= 1 - P\{R_1 > r, R_2 > r, \dots, R_n > r\} \\
 &= 1 - P\{R_1 > r\} \times P\{R_2 > r\} \times \dots \times P\{R_n > r\} \\
 &= 1 - \prod_{j=1}^n P\{R_j > r\} = 1 - \prod_{j=1}^n [1 - P\{R_j \leq r\}] \\
 &= 1 - [1 - F_R(r)]^n = F_{\tilde{M}_n}(r). \tag{3.2}
 \end{aligned}$$

Como se puede observar las funciones de distribución definidas por las ecuaciones (3.1) y (3.2) dependen principalmente de las propiedades de $F_R(r)$ para valores grandes de r . Mientras que para valores pequeños de r , el efecto de $F_R(r)$ decrece rápidamente con n , destacando con ello la importancia de la información capturada en las colas de la distribución de rendimientos. Sin embargo, este hecho no suele ser de mucha ayuda en la mayoría de las aplicaciones financieras, puesto que la evidencia empírica ha demostrado que la distribución de rendimientos generalmente no se conoce con precisión y, por ende, la función de distribución de excesos también es desconocida (Login y Solnik, 2001).

Cabe resaltar que ambos procedimientos estadísticos han sido desarrollados bajo ciertas condiciones y supuestos, es decir, utilizando fundamentos asintóticos;

representa un problema potencial para la teoría de valor extremo al momento de realizar el análisis del comportamiento estadístico de los valores extremos, por lo que es importante estar conciente de sus limitaciones. El problema para la identificación de los valores extremos es similar en ambos procedimientos estadísticos, caracterizado por el balance entre sesgo y varianza.⁶ Por ejemplo, la selección de un umbral suficientemente bajo afecta el comportamiento de la distribución límite al violar las leyes asintóticas del modelo, proporcionando estimadores sesgados y de varianza mínima. En el caso contrario, la selección de un umbral suficientemente grande genera poca información para estimar el modelo, proporcionando estimadores de varianza alta, pero con sesgo relativamente bajo. En el caso del procedimiento estadístico de bloques máximos también se presenta el mismo problema de *trade-off* entre sesgo y varianza. Por ejemplo, un bloque de tamaño suficientemente pequeño utilizado en la estimación del modelo proporciona estimadores de varianza mínima, pero los rendimientos extremos no serán modelados apropiadamente, ya que existe la posibilidad de que se viole la ley asintótica del modelo. Mientras que un bloque de tamaño suficientemente grande conlleva a un mejor ajuste del modelo para los datos disponibles, esto es, estimadores insesgados, pero con errores estándar asintóticos mucho más grandes. Este problema es frecuente en el análisis de los valores extremos debido a que los niveles de valores extremos son escasos por definición.⁷

3.4 Familia de Distribuciones de Valor Extremo

Una vez seleccionado el procedimiento estadístico para identificar el comportamiento de los valores extremos, así como la compilación de los mismos, la modelación de los datos extremos puede efectuarse por medio de una función de distribución de probabilidad. En la práctica, un problema común es que la función de distribución de rendimientos $F_R(r)$ es desconocida y, por consiguiente, la función de distribución de rendimientos extremos $F_{M_n}(r)$. Esto es, cuando n tiende a infinito la distribución $F_{M_n}(r)$

⁶ En este caso, la raíz cuadrada de la varianza de los estimadores de máxima verosimilitud representan los errores estándar de estimación del modelo.

⁷ Excelentes textos que explican más detalladamente los diferentes procedimientos estadísticos para la interpretación del comportamiento de los valores extremos incluyen a Kinnison (1985) y Coles (2001).

converge a una distribución degenerada sin valor práctico; es decir, para $r \leq r_+$, $F_{M_n}(r) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Mientras que para $r > r_+$, $F_{M_n}(r) \rightarrow 1$ cuando $n \rightarrow \infty$, donde r_+ representa el valor más pequeño de F . Sin embargo, la existencia de teoremas facilita la derivación matemática de las distribuciones de valor extremo a partir de las características generales de la distribución original de los datos observados y del tamaño de la muestra. En este caso se aplica generalmente una distribución asintótica apropiada debido a que las deducciones matemáticas son frecuentemente difíciles de determinar.

Para mostrar las poderosas herramientas y técnicas que la teoría de valor extremo ofrece para el análisis del comportamiento de las colas de la distribución de pérdidas y ganancias de una posición es preciso hacer uso de la teoría de la probabilidad clásica, considerada la base fundamental de la mayoría de los modelos estocásticos utilizados en las aplicaciones financieras, en particular, para la medición del riesgo. De esta manera, el Teorema del Límite Central se vuelve relevante en el estudio de las sumas o promedios de un número grande de eventos aleatorios pequeños definida de la siguiente forma:

$$S_n = R_1 + R_2 + \dots + R_n. \quad (3.3)$$

Dividiendo la ecuación (3.3) por el tamaño de la muestra se obtiene la medida de tendencia central conocida como la media de la muestra, la cual debe poseer propiedades más estables que los elementos individuales que componen a la suma parcial. De hecho, la suma parcial S_n es normalizada por el tamaño de la muestra n , al encontrar la media. Pero también podemos transformar la suma parcial S_n , si primero le restamos la media verdadera y después se estandariza al dividir por n , como sigue:

$$\frac{1}{n}S_n - \frac{n}{n}\mu = \frac{1}{n}(S_n - n\mu). \quad (3.4)$$

En la práctica, este resultado es importante porque el Teorema del Límite Central establece que si S_n es una variable aleatoria estandarizada, entonces su función de distribución se aproxima a una distribución normal con media cero y varianza 1 a medida que n aumenta indefinidamente; es decir, cuando $n \rightarrow \infty$.

En el contexto de valores extremos, ¿es posible utilizar los principales resultados del Teorema del Límite Central para estabilizar la variable M_n que representa la función que proporciona el máximo de las variables aleatorias R_1, R_2, \dots, R_n , y de esta manera obtener probabilidades asintóticas relevantes?

Una aproximación alternativa es aceptar que la función de distribución $F_R(r)$ es desconocida y encontrar una familia de distribuciones para $F_{M_n}(r)$, la cual se pueda estimar únicamente sobre la base de valores extremos. Para solucionar este problema se tiene que transformar la variable aleatoria M_n , a efecto de que la distribución asintótica de la nueva variable aleatoria sea una distribución no degenerada. Esto se puede alcanzar con una simple operación de estandarización, encontrando dos sucesiones apropiadas $\{\beta_n\}$ y $\{\alpha_n\}$, con $\alpha_n > 0$ que estabilicen o ajusten los parámetros de localización y escala de M_n^* , de tal manera que las probabilidades asociadas con

$$M_n^* = \frac{M_n - \beta_n}{\alpha_n},$$

se aproximan a una función de distribución conocida a medida que n tiende a infinito.

Suponiendo la existencia de dos sucesiones $\{\beta_n\}$ y $\{\alpha_n\}$, con $\alpha_n > 0$, Fisher y Tippett (1928) establecieron un teorema que afirma que existe una familia de distribuciones de valor extremo que estudia la teoría asintótica de las distribuciones de valores grandes, sin tomar en cuenta la distribución original de los datos observados.

Sin embargo, este teorema no fue demostrado matemáticamente por los autores. Sus contribuciones fueron completadas y formalizadas por Gnedenko (1943), demostrando de manera rigurosa el teorema y obteniendo tres tipos de distribuciones asintóticas para valores extremos estandarizados identificadas en el Teorema de Fisher y Tippet.

Supóngase que R_1, R_2, \dots, R_n son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución $F_R(r)$ y sea $R_{n,1}, R_{n,2}, \dots, R_{n,m}$ sus estadísticos de orden. Si existen dos sucesiones de normalización $\{\beta_n\}$ y $\{\alpha_n\}$, con $\alpha_n > 0$, tal que

$$P\left\{\frac{(M_n - \beta_n)}{\alpha_n} \leq r\right\} = F^n(\alpha_n r + \beta_n) \xrightarrow{d} H(r),$$

donde H es una función de distribución no degenerada, entonces H pertenece a una de las siguientes familias⁸:

Tipo I: $H(r) = \exp\{-\exp(-r)\}, \quad -\infty < r < \infty;$

Tipo II: $H(r) = \begin{cases} \exp\{-r^{-\tau}\}, & r > 0, \tau > 0 \\ 0, & r \leq 0 \end{cases}$

Tipo III: $H(r) = \begin{cases} \exp\{-(-r)^\tau\}, & r < 0, \tau < 0 \\ 1, & r > 0 \end{cases}$

En este sentido, el principal resultado de la teoría clásica de valor extremo establece que una vez que se cumplen las condiciones no triviales,⁹ las probabilidades

⁸ La notación " \xrightarrow{d} " significa convergencia en distribución. Véase Mittnik y Rachev (1993).

asociadas a la variable normalizada M_n^* convergerán a una distribución asintótica que pertenece al máximo dominio de atracción de $H(r)$, la cual puede estar representada por una de las tres distribuciones de valor extremo anteriores. Esto es, la distribución de Gumbel o distribución de colas ligeras para el tipo I, cuyos momentos son finitos y comportamiento de las colas de la distribución decae en forma exponencial. El tipo II corresponde a la distribución de Fréchet o distribución de colas pesadas derivada por Gnedenko (1943), puesto que las colas de la distribución decaen más lentamente. Finalmente, el tipo III se conoce como la distribución de Weibull o distribución de colas cortas o acotadas; esta distribución se caracteriza por el hecho de que tiene un límite superior finito. El parámetro de forma τ sirve para identificar a la familia de distribuciones, en el caso de una distribución de tipo I se tiene que $\tau = \infty$, cuando $\tau > 0$ se tiene una distribución de tipo II y cuando $\tau < 0$ se tiene una distribución de tipo III. Por otra parte, cuando el parámetro de forma tiende a más infinito y menos infinito respectivamente, las distribuciones de Weibull y Fréchet alcanzan la forma de la distribución de Gumbel.¹⁰

Una vez identificadas los tipos de distribuciones de valor extremo de acuerdo al comportamiento de las colas, dos problemas surgen con respecto a la selección de la técnica para determinar cual de las tres distribuciones se ajusta mejor a los datos y si las estimaciones posteriores de los parámetros es la correcta de tal manera que no ocasione incertidumbre en la selección de la distribución. Este problema se puede solucionar fácilmente, reformulando los modelos del Teorema de Fisher y Tippett si se

⁹ Cabe recordar que la suma de variables aleatorias estandarizadas se aproxima a una distribución normal cuando existe el segundo momento. Aunque, en el caso de varianza infinita, la convergencia todavía ocurre, pero no necesariamente se aproxima a la distribución normal. Esta generalización desaparece cuando el problema se refiere a la convergencia de la distribución de valores extremos, en otras palabras, cuando se está interesado solamente en el comportamiento asintótico de las colas de la distribución. La existencia de restricciones significativas sobre las colas de la distribución para cada una de las variables aleatorias R_1, R_2, \dots, R_n son necesarias para obtener probabilidades de valores extremos asintóticas no triviales. En particular, las probabilidades de las colas deben presentar un comportamiento relativamente suave, en el sentido de que no deben mostrar ningún componente de salto específico. Véase Neftci (2000).

¹⁰ Para un estudio y desarrollo matemático más profundo de las distribuciones de valor extremo. Véase Leadbetter, Lindgren y Rootzén (1983). Excelentes discusiones de la teoría con respecto a las distribuciones de valor extremo en el contexto de la administración de riesgos incluyen a McNeil (1997, 1999), Embrechts, Resnick y Samorodnitsky (1998).

toma la reparametrización $\xi = -1/\tau$. En otras palabras, esta familia de distribuciones puede ser resumida en una simple distribución de valor extremo generalizada de la siguiente forma:

$$H_{\xi}(r) = \begin{cases} \exp[-(1-\xi r)^{1/\xi}] & \text{si } \xi \neq 0 \\ \exp[-\exp(r)] & \text{si } \xi = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

para $r < 1/\xi$ si $\xi < 0$ y $r > 1/\xi$ si $\xi > 0$. En general, la función de distribución $F_R(r)$ puede ser expresada por $F(r) = F\left(\frac{r-\beta_n}{\alpha_n}\right)$, donde β_n y $\alpha_n > 0$ son los parámetros de localización y escala. La distribución de valor extremo generalizada puede ser obtenida, si se agregan los parámetros de localización y escala β_n y $\alpha_n > 0$ tal que $H_{\xi}(r) = H_{\xi, \beta_n, \alpha_n}\left(\frac{r-\beta_n}{\alpha_n}\right)$ sobre una base apropiada.

Esta única familia de funciones de distribución que depende de un parámetro comúnmente conocida como la distribución de valor extremo generalizada (Generalized Extreme Value, GEV) fue introducida por primera vez independientemente por Mises (1936) y Jenkinson (1955) y reparametrizada a un contexto más general por Maritz y Munro (1967). La aplicación de la distribución de valor extremo generalizada ha significado un importante avance para el análisis de valores extremos en varias áreas de investigación en los últimos años, atribuido a sus diversas características como la realización de una sola inferencia, la omisión de la discriminación arbitraria entre distribuciones de valor extremo y las fuentes de incertidumbre del tipo de modelo que facilita la estimación, puesto que se basa en la inferencia de una función de probabilidad (Coles, 2004).

Por su parte, Login (1995, 2000) fue el pionero que aplicó la teoría de valor extremo clásica para analizar el comportamiento de los rendimientos extremos de los precios de las series financieras e integrarla a una medida VaR para estimar el riesgo de una posición de mercado agregada. De acuerdo, con la reparametrización de Maritz y Munro (1967) y la notación de Login (2000), los resultados del Teorema de Fisher y

Tippett se pueden extender para definir empíricamente las distribuciones de valor extremo generalizada de los rendimientos máximos y mínimos en las series financieras de la siguiente manera:

$$F_{\text{Max}}(r) = \exp \left[- \left(1 - \xi_n \left(\frac{r - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{\frac{1}{\xi_n}} \right], \quad (3.6)$$

$$F_{\text{Min}}(r) = 1 - \exp \left[- \left(1 + \xi_n \left(\frac{r - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{\frac{1}{\xi_n}} \right], \quad (3.7)$$

donde r representa los rendimientos extremos máximos y mínimos de los precios de las series financieras durante un periodo de tiempo específico. La distribución de valor extremo generalizada tiene un parámetro de localización β_n y un parámetro de escala $\alpha_n > 0$, así como el índice la cola ξ_n que describe el comportamiento de la cola de la distribución límite denotado por $\tau = -1/\xi_n$. El índice de la cola permite identificar el tipo de distribución que se utiliza para ajustar los datos. En este caso, los tipos de distribuciones de valor extremo corresponden para $\xi_n > 0$ y $\xi_n < 0$. El subconjunto de la familia de la distribución de valor extremo generalizada con $\xi_n = 0$ se puede interpretar como el límite de la ecuación (3.3) cuando $\xi_n \rightarrow 0$, comúnmente conocida como la familia de Gumbel con función de distribución:

$$F_{\text{Max}}(r) = \exp \left[- \exp \left\{ - \left(\frac{r - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right\} \right] \quad -\infty < r < \infty, \quad (3.8)$$

$$F_{\text{Min}}(r) = 1 - \exp \left[- \exp \left(\frac{r - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right] \quad -\infty < r < \infty. \quad (3.9)$$

De esta manera, si el parámetro del índice de la cola ξ_n de la distribución es estrictamente negativo, implica que la función de distribución $F_R(r)$ se encuentra en el máximo dominio de atracción de la distribución de Fréchet generalmente válida para modelar las series financieras. Existen varios casos particulares de distribuciones cuyas colas decaen en forma polinomial que incluyen a las distribuciones α -estables, de Cauchy, t-student y la mixtura de normales entre las más importantes. Cuando $\xi_n > 0$ se dice que la función de distribución $F_R(r)$ pertenece al máximo dominio de atracción de la distribución de Weibull, la cual carece de eficiencia para explicar el comportamiento de los rendimientos de las series financieras. Algunos ejemplos de estos tipos de distribuciones son la uniforme y la beta. Finalmente, si $\xi_n = 0$, la función de distribución $F_R(r)$ se encuentra en el máximo dominio de atracción de la distribución de Gumbel que incluye a las distribuciones normal, exponencial, gama y lognormal. Esta última distribución posee una cola pesada moderada.

3.5 Estimación de los Parámetros de la Distribución de Valor Extremo Generalizada

Uno de los retos cruciales en la medición del riesgo de la cola presentado en la mayoría de las aplicaciones empíricas financieras se refiere a la estimación de los parámetros de la distribución de valor extremo generalizada, en particular, el parámetro del índice de la cola que determina el comportamiento de la cola de la distribución asintótica.

3.5.1 Métodos de Estimación y Fundamentos Generales

Una variedad de técnicas han sido propuestas en la literatura para la estimación de los parámetros de las distribuciones de valor extremo, incluyendo los métodos gráficos, los métodos de momentos, los métodos basados en estadísticas de orden que comprenden a las aproximaciones no paramétricas y los métodos de regresión de mínimos cuadrados no lineales, así como los métodos de máxima verosimilitud. Todos

estos métodos son muy complejos, ya que requieren de supuestos arbitrarios para su aplicación, por lo que existe poca comparación sistemática entre ellos. Sin embargo, las técnicas más populares utilizadas en las aplicaciones empíricas son las aproximaciones no paramétricas, las técnicas de regresión y los estimadores de máxima verosimilitud.

Las aproximaciones no paramétricas para estimar el parámetro del índice de la cola de la distribución de valor extremo han sido desarrolladas por Hill (1975) y Pickands (1975); no obstante, el estimador de Hill es el más popular y usado en la mayoría de las aplicaciones financieras. El estimador de Hill se ha usado en la teoría de valor extremo para estimar el comportamiento de los tipos de cambio por Koedijk **et al.** (1990) y Hols y de Vries (1991), y para el caso de rendimientos accionarios por Jansen y de Vries (1991). El estimador de Hill se diseñó para datos de distribuciones de colas pesadas; sus propiedades han sido extensamente estudiadas en la literatura de la teoría de valor extremo a fin de demostrar teóricamente que el estimador es consistente y eficiente, e incluso la consistencia todavía se mantiene bajo el supuesto de dependencia débil de los datos. Asimismo, Goldie y Smith (1987) han demostrado que el estimador de Hill es asintóticamente normal, con media igual a cero y varianza finita. Desafortunadamente, el estimador de Hill es sesgado para muestras finitas y solamente es válido para la distribución de Fréchet.¹¹

El método de regresión de mínimos cuadrados no lineales es considerado otra de las alternativas para estimar los parámetros de localización, escala e índice de la cola de la distribución de valor extremo generalizada. Este método sugerido por Gumbel (1958) hace uso de las propiedades de los estadísticos de orden para obtener estimadores de mínimos cuadrados consistentes, pero son menos eficientes que los estimadores de máxima verosimilitud, puesto que los errores estándar asintóticos son más grandes. No obstante, los estimadores obtenidos por el método de regresión no lineal pueden servir como valores iniciales en el método de máxima verosimilitud. De

¹¹ Para tener una visión más amplia de la derivación y funcionamiento del estimador de Hill, y su comparación con otros estimadores de la misma clase. Véase Embrechts, Klüppelberg y Mikosch (1997) y Kotz y Nadarajah (2000).

hecho, la función de verosimilitud es fácil de evaluar y maximizar numéricamente, la teoría asintótica proporciona simples aproximaciones para los errores estándar e intervalos de confianza. Asimismo, la función de verosimilitud se puede extender para estructuras más complejas del modelo. Este último punto se puede considerar el más importante en la evaluación empírica, atribuido al potencial de los modelos de valor extremo para llevar a cabo inferencias en procesos estocásticos no estacionarios (Coles, 2004).

No obstante, existe un problema importante que se debe resaltar en la implementación del método de máxima verosimilitud para el caso de la distribución de valor extremo generalizada. Esta dificultad se refiere a las condiciones de regularidad, frecuentemente requeridas en la estimación de los parámetros de la distribución de valor extremo generalizada a fin de evitar la violación del supuesto fundamental de las propiedades asintóticas usuales. En esencia, la condición de regularidad de la función de verosimilitud asegura la validez de las propiedades asintóticas de los estimadores de máxima verosimilitud. Aunque la distribución de valor extremo generalizada no satisface estas condiciones debido a la dependencia de la condición distribucional de los parámetros de la distribución. Sin embargo, Smith (1985) estudio a fondo este problema y demostró que a pesar de la violación de las condiciones regulares estándar, el estimador de máxima verosimilitud cumple con las propiedades asintóticas cuando el parámetro de forma que gobierna el comportamiento de la cola de la distribución asintótica es mayor que -0.5 , así que las limitaciones teóricas del método de máxima verosimilitud no significan un obstáculo en la práctica. Existe extensa literatura que ha estudiado y demostrado que el método de máxima verosimilitud proporciona estimadores consistentes¹² y eficientes; es decir, insesgados con varianza mínima bajo convenientes supuestos, incluyendo a Jenkinson (1969), Prescott y Walden (1980,1983); Hosking (1985) y Macleod (1989).

¹² Un estimador se dice que es consistente cuando el sesgo y la varianza convergen hacia cero; es decir, convergen a su verdadero valor a medida que aumenta el tamaño de la muestra. Sin embargo, esta condición suficiente no siempre se cumple en la práctica, ya que un estimador puede ser consistente aún cuando su sesgo no converge a cero. Véase Mood, Graybill y Boes (1973).

3.5.2 Método de Máxima Verosimilitud para Estimar los Parámetros de la Distribución de Valor Extremo Generalizada

En esta sección se presenta la teoría de estimadores de máxima verosimilitud para determinar los parámetros desconocidos de la distribución de valor extremo generalizada, empleando la técnica de bloques máximos, como se mencionó previamente para la identificación del comportamiento asintótico de los rendimientos extremos máximos y mínimos de las series financieras. En la práctica, es imposible estimar los parámetros de la distribución de valor extremo generalizada con sólo una observación máxima o mínima, así que se tiene que dividir la muestra total en submuestras para construir la función de verosimilitud, aplicando la teoría de valor extremo a cada una de ellas.

Supongamos que se tiene una muestra de N rendimientos r_1, r_2, \dots, r_N , la cual es una realización de las variables aleatorias R_1, R_2, \dots, R_N independientes e idénticamente distribuidas. Ahora dividiendo la muestra total por m que representa el número de submuestras con n observaciones cada una. En otra palabras, para $N = mn$ se tiene que

$$\left\{ r_1, r_2, \dots, r_n \mid r_{n+1}, r_{n+2}, \dots, r_{2n} \mid r_{2n+1}, r_{2n+2}, \dots, r_{3n} \mid \dots \mid r_{(m-1)n+1}, r_{(m-1)n+2}, \dots, r_{mn} \right\}.$$

Suponiendo que $r_{n,i}$ representa el máximo o el mínimo de la i -ésima submuestra, entonces una colección de submuestras máximas o mínimas se puede obtener de la muestra de tamaño m ; es decir,

$$M_n^m = \{r_{n,1}, r_{n,2}, \dots, r_{n,m}\},$$

donde $r_{n,1}$ representa el rendimiento más pequeño o más grande de las primeras n observaciones, $r_{n,2}$ significa el rendimiento más pequeño o más grande de las siguientes n observaciones, así sucesivamente hasta el bloque $r_{n,m}$.

Mientras tanto, esta colección de submuestras máximas o mínimas $r_{n,1}, r_{n,2}, \dots, r_{n,m}$ se utiliza para construir la función de verosimilitud y estimar los parámetros desconocidos de la distribución de valor extremo generalizada, asumiendo que el tamaño del bloque n tiene que ser suficientemente grande para que se cumpla el Teorema de Fisher-Tippet. En un contexto de series de tiempo, muchas veces no siempre es fácil encontrar la función de verosimilitud; generalmente primero se tiene que encontrar la función de verosimilitud condicional.

Sea $r_{n,1}, r_{n,2}, \dots, r_{n,m}$ una muestra de variables aleatorias independientes con función de densidad de probabilidad $f(r; \theta)$ donde θ es un parámetro desconocido. Aquí, el objetivo es encontrar una función $\hat{\theta}(r_{n,1}, r_{n,2}, \dots, r_{n,m})$ de las observaciones que sea un buen estimador de θ . Puesto que la probabilidad conjunta puede expresarse como el producto de las probabilidades condicionales. Por lo tanto, la función de verosimilitud de m variables aleatorias $r_{n,1}, r_{n,2}, \dots, r_{n,m}$ se puede definir como la función de densidad conjunta como sigue:

$$L(r_{n,1}, r_{n,2}, \dots, r_{n,m} | \theta) = \prod_{i=1}^m f(r_{n,i}) \quad (3.10)$$

Esto es, el estimador de máxima verosimilitud $\hat{\theta}$ se define como el valor θ que maximiza la función de verosimilitud. Suponiendo que todas las funciones de verosimilitud satisfacen las condiciones de regularidad, entonces el estimador de máxima verosimilitud es una solución de la siguiente ecuación:

$$\frac{dL(\theta)}{d\theta} = 0 \quad (3.11)$$

Sin pérdida de generalidad, la mayoría de la literatura sugiere más apropiado trabajar con el logaritmo de la función de verosimilitud en lugar de la función de verosimilitud, puesto que ambas funciones alcanzan su valor máximo en el mismo punto. Esto se debe a que la función de verosimilitud se caracteriza por ser una función positiva y la función logarítmica de verosimilitud es creciente monótona.

Por lo tanto, la función logarítmica de verosimilitud se puede expresar de la siguiente manera:

$$l(r_{n,1}, r_{n,2}, \dots, r_{n,m} | \theta) = \log L(r_{n,1}, r_{n,2}, \dots, r_{n,m} | \theta) = \sum_{i=1}^m \log f(r_{n,i}). \quad (3.12)$$

Otra alternativa para obtener el estimador de máxima verosimilitud $\hat{\theta}$ para el parámetro θ es multiplicar la ecuación (3.21) por menos uno y minimizar $-\log L(r_{n,1}, r_{n,2}, \dots, r_{n,m} | \theta)$. Esta segunda alternativa juega un papel fundamental cuando se trata de un problema de optimización no lineal multidimensional.

Suponiendo que las probabilidades asociadas a los rendimientos extremos $r_{n,1}, r_{n,2}, \dots, r_{n,m}$ están representadas por las distribuciones de valor extremo generalizada (3.6) y (3.7) definidas en la sección anterior. Las funciones de densidad de probabilidad se pueden obtener fácilmente diferenciando las ecuaciones (3.6) y (3.7); es decir,

$$f_{\text{Max}}(r_{n,i}) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\alpha_n} \left(1 - \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{\frac{1}{\xi_n} - 1} \exp \left[- \left(1 - \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{\frac{1}{\xi_n}} \right] & \text{si } \xi_n \neq 0 \\ \left(\frac{1}{\alpha_n} \right) \exp \left[\left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) - \exp \left\{ - \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right\} \right] & \text{si } \xi_n = 0, \end{cases} \quad (3.13)$$

$$f_{\text{Min}}(r_{n,i}) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\alpha_n} \right) \left(1 + \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{\frac{1}{\xi_n} - 1} \exp \left[- \left(1 + \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{\frac{1}{\xi_n}} \right] & \text{si } \xi_n \neq 0 \\ \left(\frac{1}{\alpha_n} \right) \exp \left[- \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right] - \exp \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) & \text{si } \xi_n = 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

Suponiendo $\xi_n \neq 0$ y el supuesto de que la muestra $r_{n,1}, r_{n,2}, \dots, r_{n,m}$ son variables aleatorias independientes con función de distribución de valor extremo generalizada. Las funciones logarítmicas de verosimilitud para las ecuaciones (3.13) y (3.14) pueden expresarse como

$$l(\alpha_n, \beta_n, \xi_n) = -m \log \alpha_n + \left(\frac{1}{\xi_n} - 1 \right) \sum_{i=1}^m \log \left(1 - \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right) - \sum_{i=1}^m \left(1 - \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{\frac{1}{\xi_n}} \quad (3.15)$$

$$l(\alpha_n, \beta_n, \xi_n) = -m \log \alpha_n + \left(\frac{1}{\xi_n} - 1 \right) \sum_{i=1}^m \log \left(1 + \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right) - \sum_{i=1}^m \left(1 + \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{\frac{1}{\xi_n}} \quad (3.16)$$

Los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros desconocidos β_n , α_n y ξ_n de la distribución de valor extremo se obtienen optimizando las funciones logarítmicas de verosimilitud. Aplicando las condiciones necesarias de primer orden se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones para la posición financiera corta que corresponde a los rendimientos extremos máximos:

$$\frac{\partial l}{\partial \beta_n} = \left(\frac{1-\xi_n}{\alpha_n} \sum_{i=1}^m \left(1 - \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{-1} - \left(\frac{1}{\alpha_n} \sum_{i=1}^m \left(1 - \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{\frac{1}{\xi_n} - 1} \right) = 0$$

$$\frac{\partial l}{\partial \alpha_n} = -\frac{m}{\alpha_n} + \left(\frac{1-\xi_n}{\alpha_n^2} \sum_{i=1}^m \left(1 - \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{-1} (r_{n,i} - \beta_n) - \left(\frac{1}{\alpha_n^2} \sum_{i=1}^m \left(1 - \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{\frac{1}{\xi_n} - 1} (r_{n,i} - \beta_n) \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \xi_n} &= -\left(\frac{1}{\xi_n^2} \sum_{i=1}^m \log \left(1 - \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right) - \left(\frac{1}{\alpha_n} \left(\frac{1}{\xi_n} - 1 \right) \sum_{i=1}^m \left(1 - \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{-1} (r_{n,i} - \beta_n) \right) \\ &+ \left(\frac{1}{\xi_n^2} \sum_{i=1}^m \left(1 - \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{\frac{1}{\xi_n}} \log \left(1 - \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right) + \left(\frac{1}{\alpha_n} \left(\frac{1}{\xi_n} \right) \sum_{i=1}^m \left(1 - \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{\frac{1}{\xi_n} - 1} (r_{n,i} - \beta_n) \right) = 0 \end{aligned}$$

Si siguiendo el mismo procedimiento se obtiene el sistema de ecuaciones para la posición larga que corresponde a los rendimientos extremos mínimos expresado de la siguiente forma:

$$\frac{\partial l}{\partial \beta_n} = \left(\frac{\xi_n - 1}{\alpha_n} \sum_{i=1}^m \left(1 + \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{-1} + \left(\frac{1}{\alpha_n} \sum_{i=1}^m \left(1 + \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{\frac{1}{\xi_n} - 1} \right) = 0$$

$$\frac{\partial l}{\partial \alpha_n} = -\frac{m}{\alpha_n} + \left(\frac{\xi_n - 1}{\alpha_n^2} \sum_{i=1}^m \left(1 + \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{-1} (r_{n,i} - \beta_n) + \left(\frac{1}{\alpha_n^2} \sum_{i=1}^m \left(1 + \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{\frac{1}{\xi_n} - 1} (r_{n,i} - \beta_n) \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \xi_n} &= -\left(\frac{1}{\xi_n^2} \sum_{i=1}^m \log \left(1 + \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right) + \left(\frac{1}{\alpha_n} \left(\frac{1}{\xi_n} - 1 \right) \sum_{i=1}^m \left(1 + \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{-1} (r_{n,i} - \beta_n) \right) \\ &+ \left(\frac{1}{\xi_n^2} \sum_{i=1}^m \left(1 + \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{\frac{1}{\xi_n}} \log \left(1 + \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right) - \left(\frac{1}{\alpha_n} \left(\frac{1}{\xi_n} \right) \sum_{i=1}^m \left(1 + \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{\frac{1}{\xi_n} - 1} (r_{n,i} - \beta_n) \right) = 0. \end{aligned}$$

Dada la complejidad del problema se requiere de métodos numéricos y subrutinas computacionales para obtener los estimadores de máxima verosimilitud que maximizan el valor de las funciones logarítmicas de verosimilitud (3.15) y (3.16). De hecho, las soluciones de forma cerrada no existen para esta clase de modelos debido a que representa un problema de optimización no-lineal multidimensional. Esto se debe a que las estadísticas suficientes mínimas para la función de distribución de valor extremo generalizada son los estadísticos de orden. Sin embargo, la maximización para un conjunto de datos observados es sencilla utilizando métodos de optimización no lineal, tales como el algoritmo de Newton-Raphson. Este algoritmo es un procedimiento iterativo de convergencia cuadrática que permite encontrar el máximo o mínimo local de un sistema de ecuaciones no lineales. El desarrollo del algoritmo de Newton-Raphson consiste en construir una aproximación cuadrática; realizando una expansión en series de Taylor de segundo orden para la función de interés, proponiendo valores iniciales precisos que contribuyen a generar una sucesión de convergencia rápida en forma cuadrática.¹³

No obstante, la técnica puede ocasionar inestabilidades numéricas al momento de evaluar las ecuaciones (3.15) y (3.16) fuera del espacio de los parámetros permitidos; es decir, cuando el parámetro del índice de la cola es igual a cero. Asimismo, el algoritmo puede fallar para alcanzar la solución óptima cuando los valores iniciales son inapropiados, ya que puede terminar la iteración con un mínimo y no con un máximo o viceversa. Otra limitación de la técnica que representa un serio problema al momento de la programación se refiere al incremento en el número de cálculos realizados en cada iteración, puesto que en el proceso se requiere evaluar explícitamente las segundas derivadas parciales e invertir matrices. Los métodos Cuasi-Newton¹⁴ solucionan este problema sustituyendo la matriz Hessiana o de información observada por una matriz aproximada que se actualiza en cada iteración,

¹³ Para una descripción más detallada del algoritmo de Newton-Raphson, así como su funcionamiento en la práctica. Véase Quinn (2001).

¹⁴ El término Cuasi-Newton se usa para identificar a un grupo de técnicas desarrolladas por varios autores. Para una explicación más detallada de estos tipos de iteración funcional, véase, por ejemplo, Gill et al. (1981) y Murtagh y Saunders (1983).

reduciendo así los cálculos numéricos, pero con la desventaja de que la convergencia ya no es cuadrática a comparación del método de Newton-Raphson.

Para $\xi_n < 0.5$, la familia de la distribución de valor extremo generalizada satisface todas las condiciones de regularidad e incluso para el intervalo $-0.5 < \xi_n < 0.5$. Esto es, los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros β_n , α_n y ξ_n son consistentes, asintóticamente eficientes y la distribución asintótica de $\hat{\theta} = (\hat{\beta}_n, \hat{\alpha}_n, \hat{\xi}_n)$ es una distribución normal multivariada con media $\theta = (\beta_n, \alpha_n, \xi_n)$ y matriz de varianza-covarianza, la cual se obtiene al invertir la matriz de información observada evaluada con los estimadores de máxima verosimilitud. De esta manera, la matriz de información observada está definida por

$$I(\theta) = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 l}{\partial \beta_n^2} & -\frac{\partial^2 l}{\partial \beta_n \partial \alpha_n} & -\frac{\partial^2 l}{\partial \beta_n \partial \xi_n} \\ -\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha_n \partial \beta_n} & -\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha_n^2} & -\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha_n \partial \xi_n} \\ -\frac{\partial^2 l}{\partial \xi_n \partial \beta_n} & -\frac{\partial^2 l}{\partial \xi_n \partial \alpha_n} & -\frac{\partial^2 l}{\partial \xi_n^2} \end{bmatrix}.$$

Asimismo, las segundas derivadas parciales de la función de verosimilitud con respecto a los parámetros desconocidos pueden ser definidas por los elementos de la matriz Hessiana. Sin embargo, la matriz de información observada tiene una forma simple que facilita el cálculo de su matriz inversa, puesto que cumple con la propiedad de matriz definida positiva; un factor importante que no necesariamente satisface siempre la matriz Hessiana.

Como se puede notar la matriz de información observada juega un papel importante en la teoría de la estimación de máxima verosimilitud como resultado de la propiedad de eficiencia asintótica de los estimadores. En otras palabras, la teoría garantiza que no existen otros estimadores consistentes con matriz de varianza-

covarianza más pequeña $[I(\theta)]^{-1}$.¹⁵ Por su parte, la raíz cuadrada de la diagonal de la matriz de varianza-covarianza representa los errores estándar de los estimadores de máxima verosimilitud, en donde todos los resultados son aproximaciones asintóticas que se cumplen para muestras grandes; no obstante, su aplicación a muestras pequeñas puede ser permitida sin ningún problema en la práctica.

Aunque la literatura ha demostrado que la matriz de información observada es más apropiada para estimar la matriz de varianza-covarianza como consecuencia de la exactitud de sus resultados; la matriz del valor esperado de las segundas derivadas parciales de la función de verosimilitud también se puede utilizar como otra alternativa para obtener la matriz de varianza-covarianza; es decir,

$$I_E(\theta) = \begin{bmatrix} E\left(-\frac{\partial^2 l}{\partial \beta_n^2}\right) & E\left(-\frac{\partial^2 l}{\partial \beta_n \partial \alpha_n}\right) & E\left(-\frac{\partial^2 l}{\partial \beta_n \partial \xi_n}\right) \\ E\left(-\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha_n \partial \beta_n}\right) & E\left(-\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha_n^2}\right) & E\left(-\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha_n \partial \xi_n}\right) \\ E\left(-\frac{\partial^2 l}{\partial \xi_n \partial \beta_n}\right) & E\left(-\frac{\partial^2 l}{\partial \xi_n \partial \alpha_n}\right) & E\left(-\frac{\partial^2 l}{\partial \xi_n^2}\right) \end{bmatrix}.$$

La matriz de información esperada mide la curvatura de la función de verosimilitud, la cual es estimada con los datos de la muestra. Esto significa que entre más picuda sea la forma de la función de verosimilitud, mayor información se obtiene acerca del conjunto de parámetros θ en la muestra, proporcionando una matriz de varianza-covarianza más pequeña y estimadores más eficientes, mientras que no existe suficiente información sobre θ en la muestra cuando la forma de la función de verosimilitud es relativamente plana. En consecuencia, la matriz de varianza-

¹⁵ La inversa de la matriz de información observada también se conoce como información límite a la varianza o como el límite inferior de Cramer Rao para la varianza del estimador $\hat{\theta}$. Véase, por ejemplo, Maddala (2001).

covarianza de los parámetros estimados está representada por los elementos de la inversa de la matriz de información esperada también conocida en la literatura como la matriz de información de Fisher. Excelente literatura que explica los detalles de la matriz de información de Fisher de la distribución de valor extremo generalizada incluye a Prescott y Walden (1980). En el Apéndice B se proporcionan las segundas derivadas parciales de las funciones logarítmicas de verosimilitud (3.15) y (3.16), principalmente utilizadas para desarrollar la subrutina computacional que facilita la estimación de los parámetros de la distribución de valor extremo generalizada.

Una vez conocidos los errores estándar se pueden construir intervalos de confianza y llevar a cabo otras formas de inferencia relacionadas con los parámetros de la distribución de valor extremo generalizada, derivadas inmediatamente de la normalidad de los estimadores de máxima verosimilitud. Por ejemplo, los intervalos de confianza al $(1-c)\%$ para los parámetros α_n , β_n y ξ_n están definidos por

$$\hat{\beta}_n \pm \Phi^{-1}\left(1 - \frac{c}{2}\right)\sqrt{\hat{v}_{1,1}}$$

$$\hat{\alpha}_n \pm \Phi^{-1}\left(1 - \frac{c}{2}\right)\sqrt{\hat{v}_{2,2}}$$

$$\hat{\xi}_n \pm \Phi^{-1}\left(1 - \frac{c}{2}\right)\sqrt{\hat{v}_{3,3}},$$

donde $\hat{\beta}_n$, $\hat{\alpha}_n$ y $\hat{\xi}_n$ son los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros β_n , α_n y ξ_n , mientras que los valores $\hat{v}_{1,1}$, $\hat{v}_{2,2}$ y $\hat{v}_{3,3}$ representan los elementos de la diagonal de la matriz de varianza-covarianza después de sustituir los parámetros desconocidos por los estimadores de máxima verosimilitud.

3.6 Pruebas de Bondad de Ajuste

Una vez estimados los parámetros de una particular familia de distribuciones es importante cuantificar la incertidumbre que presentan las estimaciones en el análisis, realizando pruebas sobre la bondad de ajuste de la distribución de probabilidad ajustada a un conjunto de datos; es decir, validar estadísticamente de qué tan bien el modelo describe o explica el comportamiento de los datos observados. En la literatura, existen varias pruebas formales que permiten comprobar la validación del modelo estadísticamente, la mayoría de ellas se basa en la comparación entre la distribución estimada y la distribución observada. En este caso, Sherman (1957) sugiere una prueba de bondad de ajuste basado en una serie de datos ordenados denotada por $(r_{n,i})_{i=1,\dots,m}$. El cálculo del estadístico de la prueba se determinada de la siguiente forma:

$$\Omega_m = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=0}^m H_{\xi_n, \beta_n, \alpha_n}(r_{n,i+1}) - H_{\xi_n, \beta_n, \alpha_n}(r_{n,i}) - \frac{1}{m+1} \right|, \quad (3.17)$$

con $H_{\xi_n, \beta_n, \alpha_n}(r_{n,0}) = 0$ y $H_{\xi_n, \beta_n, \alpha_n}(r_{n,m+1}) = 1$. El estadístico Ω_m se distribuye asintóticamente como una variable normal con media $(m/(m+1))^{m+1}$ y varianza $(2e-5)/me^2$. Un estadístico Ω_m bajo afirma que la discrepancia entre la distribución estimada y la distribución observada es suficientemente pequeña; una condición suficiente que demuestra que la teoría de valor extremo describe adecuadamente el comportamiento de los rendimientos extremos.

En este contexto, otro estadístico popular que facilita la comprobación de la significancia estadística de los estimadores de máxima verosimilitud es la prueba de la razón de verosimilitud definido por:

$$\lambda = 2(l(\hat{\theta}) - l(\theta^*)), \quad (3.18)$$

donde $l(\hat{\theta})$ es el valor máximo de la función logarítmica de verosimilitud para la distribución de valor extremo generalizada o modelo no restringido y $l(\hat{\theta}^*)$ es el valor máximo de la función logarítmica de la distribución de Gumbel o modelo restringido. Si el tamaño de la muestra es grande, por lo tanto, el estadístico de la prueba λ sigue una distribución Chi cuadrada χ^2 , con un determinado número de grados de libertad derivado de la diferencia del número de restricciones de las funciones logarítmicas de verosimilitud establecidas bajo la hipótesis nula. Para probar la validez del modelo no restringido representado por la distribución de valor extremo generalizada es suficiente verificar que $\lambda > C_\alpha$, donde C_α es el $(1-\alpha)\%$ percentil de la distribución χ^2 con un grado de libertad debido a que sólo se tiene una restricción impuesta.¹⁶

3.7 Medidas VaR y CVaR Basadas en la Teoría de Valor Extremo

En un contexto de medidas de riesgo paramétricas, las aproximaciones convencionales basadas en la distribución normal proporcionan buenas estimaciones del riesgo para las áreas donde se encuentra la mayor masa probabilística. Sin embargo, cuando la distribución empírica relevante es totalmente asimétrica y leptocúrtica, tales aproximaciones proporcionan estimaciones incorrectas del riesgo de mercado como resultado de los valores extremos capturados en las colas de la distribución de rendimientos. Este fenómeno comúnmente conocido como el efecto de las colas pesadas o gruesas representa una seria preocupación para los participantes en los mercados financieros, puesto que la medición del riesgo extremo no sólo requiere la estimación de altos percentiles, sino también las probabilidades de la cola de la distribución. En este sentido, la teoría de valor extremo es una herramienta alternativa que permite modelar el comportamiento asintótico de los rendimientos extremos capturados en las colas de la distribución de pérdidas y ganancias.

En esta sección se introducen las medidas tradicionales conocidas en el entorno financiero como VaR y CVaR, aplicando los principales resultados de la teoría de valor

¹⁶ Para una explicación más detallada del estadístico de la prueba de la razón de verosimilitud, véase Hamilton (1994).

extremo a fin de obtener una mejor estimación del riesgo de las colas de la distribución de pérdidas y ganancias de las series financieras. Como se mencionó en el capítulo anterior, la medida valor en riesgo está determinada por el c -percentil extremo de la distribución de rendimientos F ; es decir,

$$\text{VaR}_c = F^{-1}(c),$$

donde F^{-1} representa la función de distribución inversa de F .

Sustituyendo los parámetros estimados de la función logarítmica de verosimilitud en las ecuaciones (3.6) y (3.7) se puede obtener el percentil para una probabilidad dada de la distribución de valor extremo generalizada. En esta tesis nos centramos en ambas colas de la distribución de rendimientos, así que utilizando la relación de probabilidades de la ecuación (3.1), la distribución de valor extremo generalizada para rendimientos máximos está definida de la siguiente manera:

$$c^n = F_{\text{Max}}(\text{VaR}) = F_R^n(\text{VaR}) = \exp \left[- \left(1 - \hat{\xi}_n \left(\frac{\text{VaR} - \hat{\beta}_n}{\hat{\alpha}_n} \right) \right)^{\frac{1}{\hat{\xi}_n}} \right], \quad (3.18)$$

esta relación entre probabilidades es válida debido a que la mayoría de los procesos de los rendimientos de las series financieras son independientes o presentan correlación serial débil. Esto es, el valor en riesgo basado en la distribución de rendimientos F_R para un nivel de probabilidad c está determinado por $\text{VaR}(F_R, c)$, mientras que el valor en riesgo basado en la distribución de rendimientos máximos F_{Max} para un nivel de probabilidad c^n está expresado por $\text{VaR}(F_R, c^n)$ (Login, 2000).

En consecuencia, el valor en riesgo para los rendimientos máximos que corresponde a una posición financiera corta se obtiene al invertir la ecuación (3.18); es decir,

$$\text{VaR}_c(X) = \hat{\beta}_n + \frac{\hat{\alpha}_n}{\hat{\xi}_n} \left[1 - n(-\ln c)^{\hat{\xi}_n} \right]. \quad (3.19)$$

En este caso $\hat{\alpha}_n$, $\hat{\beta}_n$ y $\hat{\xi}_n$ representan los estimadores de máxima verosimilitud para la serie de los rendimientos máximos, c es la probabilidad de que los rendimientos máximos exceden el nivel del VaR y n representa el tamaño o longitud de la submuestra, utilizado para obtener los rendimientos máximos observados durante un determinado número de días de operación. La selección de este parámetro juega un importante papel en la estimación del VaR basado en la teoría de valor extremo clásica.

Finalmente, el VaR de una posición financiera larga se puede calcular aplicando la distribución de valor extremo siguiendo los mismos procedimientos que se utilizaron en la estimación del VaR para la posición financiera corta. Así, utilizando la relación de probabilidades de la ecuación (3.2), la distribución de valor extremo generalizada para los rendimientos mínimos se puede expresar como sigue:

$$1 - c^n = F_{\text{Min}}(\text{VaR}) = 1 - [1 - F_R(\text{VaR})]^n = 1 - \exp \left[- \left(1 + \hat{\xi}_n \left(\frac{\text{VaR} - \hat{\beta}_n}{\hat{\alpha}_n} \right) \right)^{\frac{1}{\hat{\xi}_n}} \right]. \quad (3.20)$$

Por consiguiente, el valor en riesgo de una posición financiera larga que corresponde a los rendimientos mínimos con un nivel de probabilidad c está definido de la siguiente forma:

$$\text{VaR}_c(X) = \hat{\beta}_n - \frac{\hat{\alpha}_n}{\hat{\xi}_n} \left[1 - n(-\ln c)^{\hat{\xi}_n} \right], \quad (3.21)$$

donde $\hat{\alpha}_n$, $\hat{\beta}_n$ y $\hat{\xi}_n$ representan los estimadores de máxima verosimilitud de los rendimientos mínimos, c es la probabilidad de que los rendimientos mínimos no exceden el nivel del VaR y n representa el tamaño o longitud de la submuestra, utilizado para obtener los rendimientos mínimos observados durante un determinado

número de días de operación. Aquí, el valor en riesgo calculado por la ecuación (3.21) es negativo, el cual representa una pérdida por tomar una posición de mercado. Sin embargo, la mayoría de la literatura existente define el VaR como un número positivo.

Por su parte, otra medida de riesgo alternativa que ha sido estudiada por varios autores es la medida de exceso esperado, también conocida como valor en riesgo condicional (Rockafellar y Uryasev, 2000). Esta medida de riesgo que representa la esperanza condicional de las pérdidas que han excedido el nivel del VaR, fue introducida por primera vez por Artzner **et al.** (1997, 1999). La principal razón de la introducción de esta medida de riesgo alternativa se debe a que las medidas convencionales de valor en riesgo no satisfacen la propiedad de subaditividad; una condición de vital importancia que caracteriza a las medidas de riesgo coherentes. Asimismo, bajo el supuesto de normalidad las medidas VaR y CVaR no recogen las propiedades estadísticas de las pérdidas extremas que se encuentran en las colas de la distribución. En este sentido, la medida de valor en riesgo condicional en el contexto de la teoría de valor extremo se puede definir como:

$$\begin{aligned}
 \text{CVaR}_c(X) &= -E[X | X \leq \text{VaR}_c(X)] \\
 &= E[-X | -X \geq \text{VaR}_c(X)] \\
 &= E[-X - \text{VaR}_c(X) + \text{VaR}_c(X) | -X \geq \text{VaR}_c(X)] \\
 &= \text{VaR}_c(X) + E[-X - \text{VaR}_c(X) | -X - \text{VaR}_c(X) \geq 0] \\
 &= \text{VaR}_c(X) - E[X + \text{VaR}_c(X) | X + \text{VaR}_c(X) \leq 0]
 \end{aligned}$$

Suponiendo que $\text{VaR}_c(X) = -u$ se tiene que

$$\text{CVaR}_c(X) = -u - E[X - u | X \leq u] = -u - e(u)$$

donde

$$\begin{aligned}e(u) &= E[X - u | X \leq u] \\&= \frac{\int_{-\infty}^u (x - u) dF_X(x)}{F_X(u)} = \frac{\int_{-\infty}^u x dF_X(x) - \int_{-\infty}^u u dF_X(x)}{F_X(u)} \\&= \frac{\int_{-\infty}^u x dF_X(x) - u F_X(u)}{F_X(u)} = \frac{\int_{-\infty}^u x dF_X(x)}{F_X(u)} - u.\end{aligned}$$

Aplicando el método de integración por partes

$$v = x \qquad dw = dF_X(x)$$

$$dv = dx \qquad w = F_X(x)$$

se tiene que

$$\begin{aligned}e(u) &= \frac{1}{F_X(u)} \left[x F_X(x) \Big|_{-\infty}^u - \int_{-\infty}^u F_X(x) dx \right] - u \\&= \frac{1}{F_X(u)} \left[u F_X(u) - \int_{-\infty}^u F_X(x) dx \right] - u \\&= -\frac{1}{F_X(u)} \left[\int_{-\infty}^u F_X(x) dx \right]\end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor en riesgo condicional es equivalente a

$$\text{CVAR}_c(X) = -u + \frac{1}{F_X(u)} \left[\int_{-\infty}^u F_X(x) dx \right] \quad (3.22)$$

A pesar de sus propiedades teóricas atractivas esta medida de riesgo coherente todavía depende de la figura del VaR. En la práctica, esta medida alternativa puede ser aproximada a través de métodos de simulación como una función de la medida VaR para una distribución de rendimientos dada. Asimismo, el valor en riesgo condicional de una posición financiera también depende de la distribución de rendimientos F_R y del nivel de probabilidad c . Aunque la relación asintótica entre ambas medidas de riesgo puede ser obtenida analíticamente. Como se mencionó en el capítulo anterior, la relación asintótica entre las medidas VaR y CVaR puede representarse como un múltiplo escalar de la desviación estándar cuando se asume que la distribución de los rendimientos sigue una ley normal.

Sin embargo, el valor en riesgo condicional se aproxima al valor en riesgo debido a que la diferencia entre ambas medidas converge a cero a medida que se toman valores que se encuentran en las colas de la distribución de rendimientos. No obstante, aprovechando el máximo dominio de atracción se puede establecer una distribución de colas pesadas de tipo de Pareto con parámetros de localización igual a cero, escala igual a uno y exponente característico¹⁷ mayor que uno ($\alpha > 1$); es decir, $F_X(x) = 1 - kx^{-\alpha}$, $x \geq 0$ donde k es una función que cambia moderadamente y α es un parámetro positivo conocido como el índice de la cola de la distribución F .¹⁸

Suponiendo la siguiente desigualdad para $x > u$ de la cola de la distribución F , el valor en riesgo condicional basado en la distribución de colas pesadas de tipo Pareto

¹⁷ Un hecho importante que cabe resaltar es que el índice de la cola de la distribución de colas pesadas de tipo Pareto no tiene nada que ver con el parámetro de escala de la distribución de valor extremo generalizada.

¹⁸ Todas las distribuciones que presentan propiedades de colas pesadas son definidas de esta manera por Gnedenko (1943).

que pertenece al máximo dominio de atracción de la distribución de valor extremo generalizada está determinado por

$$\begin{aligned}
\text{CVAR}_c(X) &= -u + \frac{1}{F_X(u)} \left[\int_{-\infty}^u F_X(x) dx \right] \\
&= -u + \frac{1}{ku^{-\alpha}} \left[\int_{-\infty}^u kx^{-\alpha} dx \right] \\
&= -u + \frac{1}{ku^{-\alpha}} \left[\frac{kx^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_0^u \right] \\
&= -u + \frac{1}{ku^{-\alpha}} \left[\frac{ku^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right] \\
&= -u - \left(\frac{1}{\alpha-1} \right) u \\
&= \text{VAR}_c(X) + \left(\frac{1}{\alpha-1} \right) \text{VAR}_c(X) \\
&= \left(\frac{\alpha}{\alpha-1} \right) \text{VAR}_c(X) \tag{3.23}
\end{aligned}$$

En consecuencia, la ecuación (3.23) demuestra que el valor en riesgo condicional siempre será mayor que el VaR cuando se asume una distribución de colas pesadas, ya que la diferencia entre las medidas CVaR y VaR no converge a cero cuando se toman valores de las colas de la distribución de rendimientos. Este resultado depende en gran medida del grado de exceso de masa probabilística capturado en las colas de la distribución de rendimientos, el cual es medido por el parámetro del índice de la cola. En otras palabras, entre más negativo sea el parámetro del índice de la cola,

mayor será el CVaR obtenido, atribuido a la distribución de rendimientos que se caracteriza por presentar propiedades de colas pesadas o gruesas. Finalmente, la evidencia empírica ha demostrado que el exponente característico generalmente se encuentra entre $1 < \alpha < 2$ para estudios del sector asegurador, mientras que para aplicaciones financieras este mismo exponente característico se encuentra en el intervalo $1.5 < \alpha < 5$.¹⁹

3.8 Análisis de Confiabilidad del Modelo

El potencial de los modelos internos desarrollados por las instituciones financieras no sólo ha revolucionado la administración de riesgos, sino también la regulación financiera. En este sentido, el Comité de Basilea (1996) ha reconocido ampliamente la capacidad de los diversos modelos de valor en riesgo para estimar el riesgo de mercado y los requerimientos de capital mínimos que garanticen la solvencia de las instituciones financieras durante periodos de turbulencias financieras. En el contexto de regulación, las instituciones financieras deben mantener un determinado nivel de capital de acuerdo al grado de exposición al riesgo, con el fin de cubrir posibles pérdidas inesperadas durante un horizonte de tiempo de diez días para un VaR estimado con un nivel de confianza del 99%.

Sin embargo, la aplicación de las medidas VaR requiere de un análisis histórico de resultados que coadyuve a verificar el buen ajuste de los modelos, facilitando así la determinación de suficientes requerimientos de capital y la comparación entre las diferentes metodologías. La validación de la calidad y exactitud de un modelo VaR requiere un proceso de backtesting, el cual consiste en comparar los rendimientos reales de las posiciones de mercado y los resultados de las medidas de riesgo obtenidos a fin de determinar la proporción de excesos sobre el VaR pronosticado. En otras palabras, este procedimiento estadístico consiste en determinar las excepciones observadas; es decir, el número de veces que las pérdidas realizadas en el periodo

¹⁹ Para una explicación más detallada y ejemplos de la medida CVaR basada en la teoría de valor extremo. Véase Artzner **et al.** (1997) y Embrechts **et al.** (1998).

siguiente superaron el resultado del modelo VaR usado por la institución financiera. Una vez identificadas las excepciones es importante llevar a cabo pruebas estadísticas para evaluar si el número de excepciones ha superado al esperado. Por ejemplo, para un nivel de confianza del 95%, las pérdidas sólo excederán el nivel del VaR estimado en 5 ocasiones durante un periodo de 100 días.

De esta manera, este análisis estadístico es importante para evaluar que los resultados de los modelos VaR implementados se apeguen a la realidad, en particular, para las instituciones financieras reguladas. Para fines de esta tesis, la prueba estadística que se empleará para verificar la calidad y exactitud de los modelos VaR propuestos será el estadístico de Kupiec (1995). Aunque existen diversas técnicas en la literatura para realizar el proceso de backtesting, incluyendo a Berkowitz (1998) y Christoffersen (1998).

De acuerdo con la prueba estadística de Kupiec (1995), si y representa el número de excepciones en una muestra de tamaño n y $\frac{y}{n}$ el porcentaje esperado de pérdidas que exceden el nivel del VaR estimado. La probabilidad de observar y excepciones durante un periodo de n días está gobernado por el siguiente proceso binomial

$$f(y) = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y},$$

donde p indica la probabilidad de que ocurra una pérdida que exceda el nivel del VaR en cualquier día. Así, el estadístico de la prueba de la razón de verosimilitud está determinado por

$$LR = -2 \ln \left[(p^*)^y (1-p^*)^{n-y} \right] + 2 \ln \left[\left(\frac{y}{n} \right)^n \left(1 - \frac{y}{n} \right)^{y-n} \right],$$

el cual se distribuye como una variable Chi cuadrada con un grado de libertad bajo la hipótesis nula $H_0 : p = p^*$. En este caso, p representa la probabilidad verdadera, p^* representa la probabilidad o nivel de confianza utilizado para calcular el VaR y \hat{p} es el estimador de máxima verosimilitud de p , el cual está definido de la siguiente forma:

$$\hat{p} = \frac{y}{n}.$$

En otras palabras, la hipótesis nula implica que el modelo VaR es altamente confiable para estimar el riesgo y los requerimientos de capital mínimos si $p \leq p^*$. Mientras que la hipótesis alternativa rechaza el modelo VaR para estimar adecuadamente los niveles de reserva cuando $LR > \chi^2_{(95\%)} = 3.84$. Finalmente, cuando el porcentaje esperado de pérdidas que exceden el nivel del VaR estimado se encuentra cerca de c , entonces es imposible rechazar la hipótesis nula para un nivel de confianza del $(1 - c)$.

CAPITULO 4

Evidencia Empírica para Mercados Accionarios Emergentes de América Latina

4.1 Análisis de los Datos

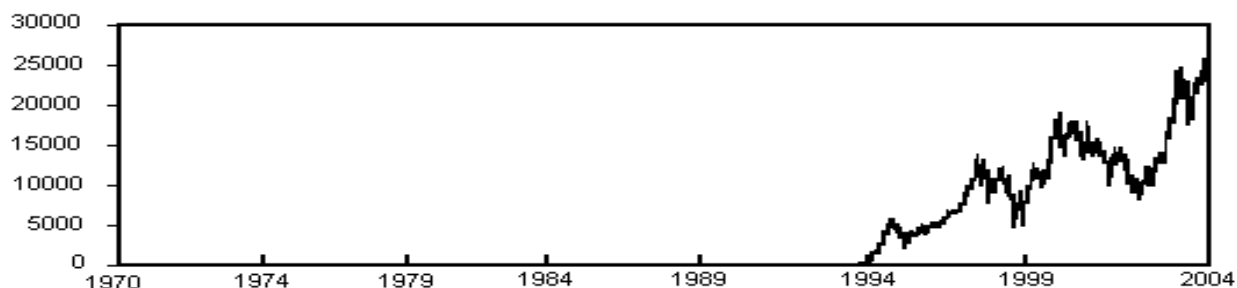
Para ilustrar las características típicas de la dinámica de los movimientos extremos en las series financieras de frecuencia alta que permitirán estimar el riesgo de la cola de la distribución utilizando la teoría de valor extremo, esta investigación hace uso de un conjunto de datos diarios de dos diferentes mercados accionarios emergentes representados por el Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores (IPC) y el Índice de la Bolsa de Valores de Sao Paulo (BOVESPA). Estos países emergentes han logrado una mayor expansión económica que otros países de América Latina y, por ende, han atraído crecientes inversiones a sus mercados de capital como resultado de sus atractivos rendimientos y los esfuerzos de las autoridades por mantener la eficiencia y transparencia en sus respectivos mercados financieros, reduciendo inmediatamente la magnitud de potenciales choques de liquidez negativos. Asimismo, Brasil y México se han convertido en importantes países donde es posible invertir por una gama más amplia de inversionistas sofisticados, en particular, los fondos de pensiones, las aseguradoras y las sociedades de inversión estadounidenses que buscan estrategias de diversificación, formando portafolios grandes de títulos de capital que en gran medida replican a estos índices accionarios emergentes.

Esta muestra permite también comparar el comportamiento del riesgo en los principales mercados accionarios emergentes de América Latina. La muestra de datos cubre el periodo del 2 de enero de 1970 al 31 de diciembre de 2004, totalizando en promedio 8722 observaciones diarias para las respectivas series de cada país. Se obtuvo las series de la base de datos de Reuters complementando con información de

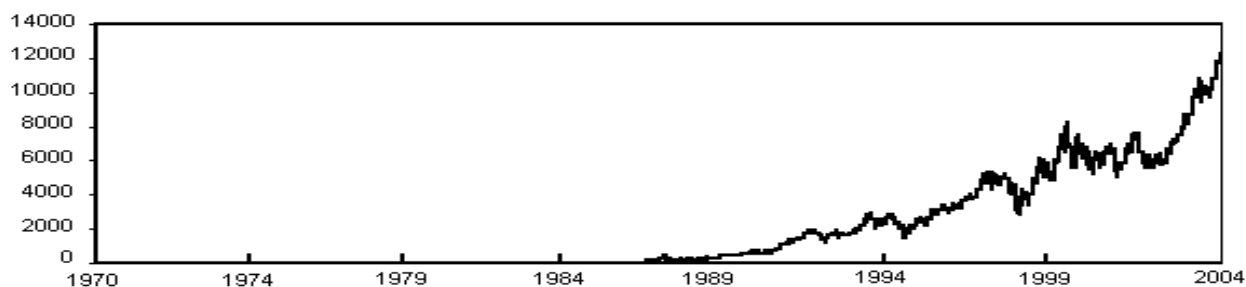
los Bancos Centrales de Brasil y México. El conjunto de datos es suficientemente representativo para realizar un análisis exhaustivo de los movimientos extremos en los precios de los mercados accionarios de la muestra. Las series incluyen varias crisis financieras tales como la crisis del endeudamiento de la década de los años ochenta, el crash del 19 de octubre de 1987, el error de diciembre de 1994, la turbulencia financiera desencadenada en Asia durante 1997, la declaratoria de moratoria y devaluación que experimentó Rusia en 1998, la devaluación del real brasileño en 1999 y la crisis de Argentina en 2001.

A largo plazo y especialmente durante las últimas décadas, ambos índices accionarios han experimentado un crecimiento significativo, principalmente el mercado accionario de Brasil, como se puede observar en la Gráfica 4.1. Este importante auge experimentado por las Bolsas de Brasil y México es resultado de la liberalización financiera y políticas de desregulación implementada por sus respectivos gobiernos, particularmente desde las décadas de los años 1980s y 1990s, las cuales han conducido a incrementar las inversiones por parte de los inversionistas domésticos y extranjeros (Cabello, de Jesús y Ortiz; 2006). Es importante resaltar que el comportamiento de los precios en los mercados financieros sostiene la hipótesis de caminata aleatoria (random walk) para datos financieros de frecuencia alta. En otras palabras, los precios de las series financieras se comportan como una martingala; esto es, el valor esperado del precio futuro dado un conjunto de información relevante sólo depende del último precio de cierre.

Como se puede observar en la Gráfica 4.1, los precios de los índices accionarios muestran un crecimiento exponencial a través del tiempo, especialmente el mercado de Brasil. Esto implica que las series financieras presentan tendencias y varianzas que son proporcionales al nivel de los precios y dependientes en el tiempo. Por consiguiente, la inferencia estadística generalmente es imposible a menos que los precios de las series financieras sean suavizados; es decir, el proceso de la serie financiera debe ser transformado a un proceso estacionario.



(a) Brasil



(b) México

Gráfica 4.1: Niveles de los Precios de los Índices Accionarios de Brasil y México para el periodo del 2 de Enero de 1970 al 31 de Diciembre de 2004.

De esta manera, para llevar a cabo el análisis de las principales características de los índices accionarios es necesario transformar los precios diarios en tasas de rendimientos continuos, tomando el logaritmo del cociente de precios diarios de cierre durante un intervalo de tiempo $(t-1, t)$, como sigue

$$R_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right), \quad (4.1)$$

donde P_t indica el precio de cierre en el día t para cada índice accionario. Asimismo, el análisis requiere que los rendimientos diarios de los precios de las series financieras sean calculados en moneda local. Esta transformación permite trabajar con series financieras estacionarias que se distribuyen independientemente e idénticamente, como generalmente se hace en la investigación estadística en finanzas.

La Tabla 4.1 muestra las principales estadísticas básicas de los rendimientos diarios de las series financieras de los dos mercados accionarios. El rendimiento promedio más alto se observó en el Mercado de Valores de la Bolsa de Sao Paulo (0.361%), en tanto que la Bolsa Mexicana de Valores tuvo el rendimiento promedio más bajo (0.131%).¹ La principal razón para la presencia de rendimientos altos en los mercados emergentes se debe a que estos países han experimentado periodos de alta inflación; también ha influido la liberalización de los flujos de capital entre países industrializados y emergentes.² El mercado accionario de Brasil también presenta la desviación estándar más alta que equivale al 3.10%. Mientras que el mercado accionario de México tiene una desviación estándar de 1.83% aproximadamente. En cuanto a los rendimientos máximos y mínimos, el mercado accionario de Brasil tiene el diferencial más amplio que se encuentra entre 30.79% y -25.20%; después sigue el mercado accionario de México con un diferencial de 23.58% y -20.24%. Aunque el mercado de Brasil presenta el diferencial más amplio las propiedades estadísticas de estos dos mercados son muy similares entre sí.

El coeficiente de skewness o sesgo demuestra que los rendimientos de las dos series financieras presenta un comportamiento asimétrico, presentando así diferentes características las colas de la distribución de rendimientos. Ambos mercados accionarios BOVESPA e IPC presentan sesgos positivos de 0.27 y 0.099 respectivamente, aunque no son muy altos, muestran que la cola derecha de la distribución empírica de los rendimientos es ligeramente más pesada que la cola izquierda, en particular, para el caso del mercado de Brasil. En otras palabras, los rendimientos extremos positivos suelen ocurrir más frecuentemente que los rendimientos extremos negativos. Este hecho es consecuencia del crecimiento explosivo que han experimentado ambos mercados accionarios en las últimas tres

¹ En este análisis se utilizan los rendimientos nominales, puesto que es imposible eliminar el efecto de la alta inflación experimentada en estos países, principalmente por la carencia de información de series de frecuencia alta de la inflación. Para un análisis más profundo de la TVE y sus aplicaciones en los mercados accionarios emergentes con rendimientos nominales, véase Gencay y Selcuk (2004), da Silva y Mendes (2003) y Ho *et al.* (2000).

² Un excelente trabajo que proporciona evidencia empírica de la relación de largo plazo entre variables macroeconómicas, rendimientos accionarios y el riesgo en los mercados de capitales de Brasil y México incluye a Cabello, de Jesús y Ortiz (2006).

décadas. En este sentido, la evidencia de sesgo negativo demostrado por Duffie y Pan (1997) no puede ser confirmada para los mercados de Brasil y México.

Tabla 4.1
Estadísticas Básicas para los Rendimientos Diarios de los Mercados Accionarios

Mercado	Brasil	México
Media	0.361	0.131
Máximo	30.792	23.583
Mínimo	-25.199	-20.242
Desviación Estándar	3.104	1.834
Skewness	0.265	0.099
Curtosis	8.716	25.159
Jarque-Bera	12005*	177977*
Probabilidad	0	0
Observaciones	8745	8698

Nota: Las estadísticas básicas para los rendimientos diarios de los índices accionarios están expresadas en porcentajes, y estimadas con el software EViews versión 5.0.

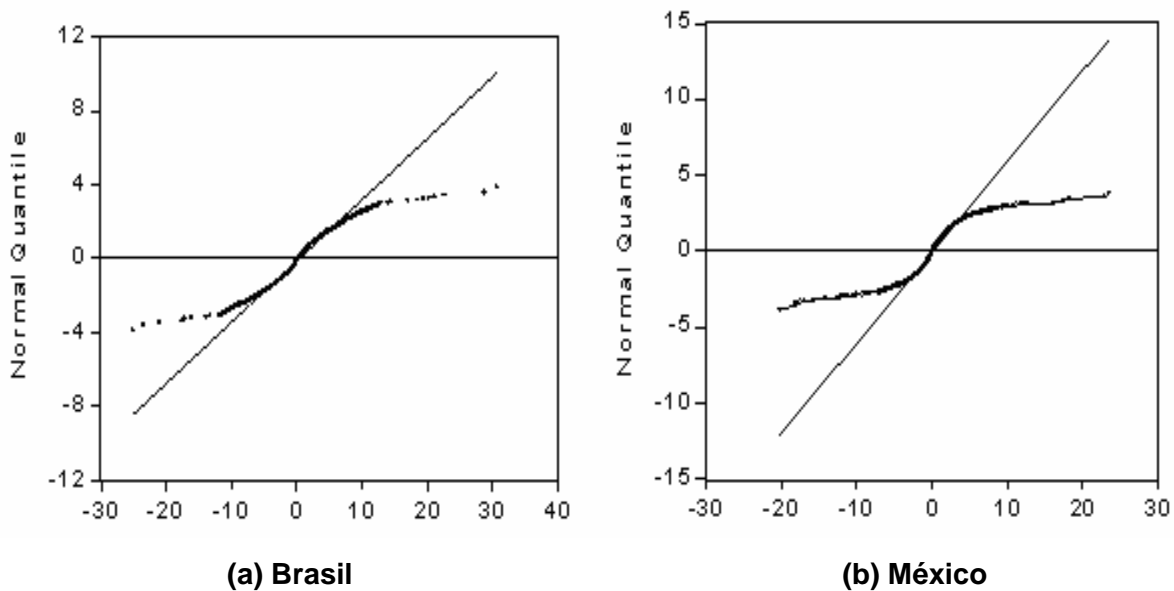
* Significativo a un nivel de confianza del 1%.

De acuerdo con la estimación del cuarto momento, los rendimientos de las dos series financieras presentan evidencia de exceso de curtosis extremadamente alta y estadísticamente significativa. Por ejemplo, la curtosis más alta se observó en el mercado accionario de México con valor de 25.16, mientras que el mercado accionario de Brasil presenta una curtosis más pequeña que equivale a 8.71. Esto confirma que las colas de la distribución de rendimientos de las series financieras tienden a ser más pesadas que las colas de la distribución normal, ya que poseen mayor densidad probabilística. En finanzas, el fenómeno de leptocurtosis ha sido significativamente más fuerte en los rendimientos de frecuencia alta o diarios que para rendimientos de frecuencia baja u horizontes de tiempo más largos.³

La ausencia de normalidad también puede ser confirmada por la prueba estadística Jarque-Bera (1980) que sigue una distribución Chi cuadrada con dos grados

³ Estudios empíricos que demuestran que los rendimientos de las acciones presentan exceso de curtosis incluyen a Fama (1965); Praetz (1972); Blattberg y Gonedes (1974); Kon (1984); Tucker (1992); Kim y Kon (1994). Para evidencia empírica sobre rendimientos de tipos de cambio. Véase Boothe y Glassman (1987); Tucker y Pond (1988).

de libertad. La evidencia del rechazo del supuesto de normalidad para las distribuciones de los rendimientos diarios es notable, principalmente para el Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores que muestra el estadístico Jarque-Bera más grande y significativo estadísticamente, así como la curtosis más alta. Este resultado contrasta con la evidencia empírica reportada en la literatura, demostrando que la carencia de normalidad para estos mercados emergentes es menos fuerte cuando se utilizan datos de frecuencia baja (Susmel, 2001). Por otra parte, el Gráfico QQ es considerado otra herramienta estadística alternativa que permite explicar la estructura principal en los mercados y el análisis de los valores extremos capturados en las colas de la distribución de rendimientos de las series financieras. Básicamente, el Gráfico QQ compara los cuantiles de la distribución empírica contra los cuantiles de la distribución de referencia.

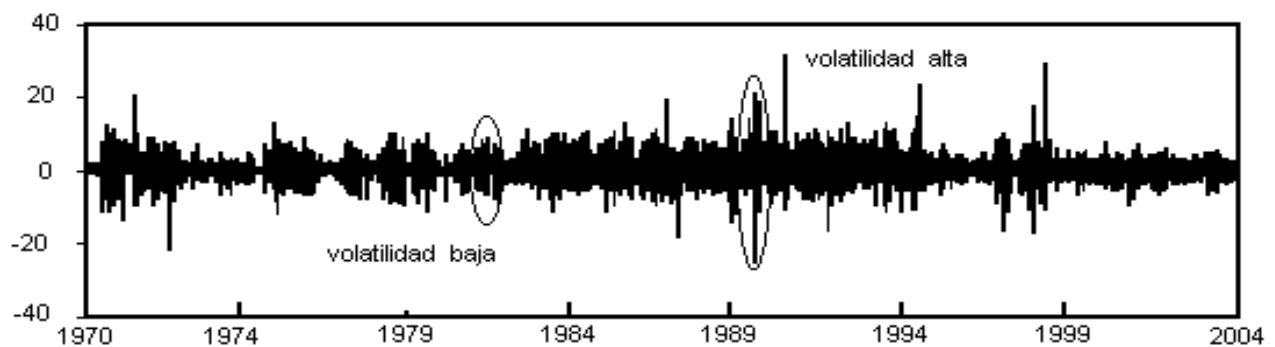


Gráfica 4.2. Gráficos QQ para los rendimientos diarios de los índices accionarios de Brasil y México para el periodo del 2 de Enero de 1970 al 31 de Diciembre de 2004.

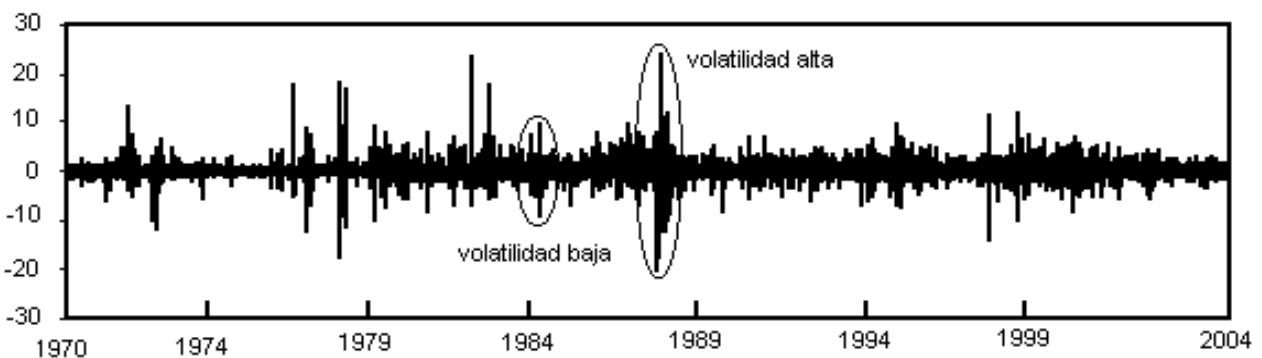
La Gráfica 4.2 muestra claramente que ambas distribuciones de rendimientos de los índices accionarios presentan propiedades de colas pesadas y formas más picudas que la distribución normal. Si los rendimientos realmente siguen una distribución normal, todas las observaciones deberían permanecer sobre una línea recta de 45 grados cuando se grafican contra los cuantiles de la distribución normal. Sin embargo, las observaciones se desvían de la línea recta en los puntos extremos o colas,

presentando mayor variabilidad que las observaciones capturadas en la parte central de la distribución. De ahí, la típica curva en forma de “S” que indica que las distribuciones de rendimientos de los índices accionarios de Brasil y México presentan un comportamiento más leptocúrtico y asimétrico con respecto a la distribución normal.

Por su parte, la Gráfica 4.3 muestra que las series de los rendimientos financieros presentan periodos de tranquilidad donde los precios de los índices accionarios se comportan más o menos estables seguidos de periodos relativamente volátiles, caracterizados por cambios grandes en los precios que generalmente ocurren en clusters. Esto implica que las series financieras presentan evidencia de heteroscedasticidad condicional, comúnmente conocido como el efecto clustering; uno de los hechos estilizados más importantes de los rendimientos de las series financieras demostrado por Engle (1982) y Bollerslev (1986).



(a) Brasil



(b) México

Gráfica 4.3. Rendimientos de los Índices Accionarios de Brasil y México para el periodo del 2 de Enero de 1970 al 31 de Diciembre de 2004.

La Tabla 4.2 muestra los estimadores de máxima verosimilitud del modelo GARCH (1,1) basado en una distribución normal. Los resultados estimados confirman la presencia de fuerte volatilidad en aglomeraciones para los rendimientos de los índices accionarios de Brasil y México, sustentado estadísticamente por los parámetros estimados de las ecuaciones de la media condicional y varianza condicional para un nivel de confianza del 1%, principalmente por la alta significancia en los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros α_1 y β_1 , cuya suma es menor a uno. Así, el alto grado de persistencia exhibido en la volatilidad condicional es un fenómeno frecuentemente observado en los datos financieros de frecuencia alta.

Tabla 4.2
Estimadores de Máxima Verosimilitud del Modelo GARCH (1,1) basado en la distribución Normal

Mercado	γ_0	γ_1	α_0	α_1	β_1
México	0.00095 (11.36)	0.16571 (24.15)	0.000007 (37.68)	0.13214 (46.33)	0.86287 (346.82)
Brasil	0.00238 (7.01)	0.20624 (11.25)	0.000013 (20.96)	0.16525 (38.57)	0.83367 (258.86)

Nota: Los valores en paréntesis denotan los valores del estadístico z de los estimadores de máxima verosimilitud de las ecuaciones de la media y varianza condicional. Los resultados fueron obtenidos con el software EViews versión 5.0.

En conclusión, los rendimientos de los índices accionarios de Brasil y México son excelentes candidatos para analizar las relaciones entre el comportamiento de los rendimientos extremos y el riesgo financiero en mercados altamente volátiles utilizando distribuciones de colas pesadas, puesto que estos mercados se caracterizan por tener distribuciones empíricas más leptocúrticas que los mercados industrializados.

4.2 Estimación Empírica de los Parámetros de la Distribución de Valor Extremo Generalizada

Para realizar el análisis de los rendimientos extremos en los mercados accionarios se aplica la técnica de bloques máximos de la teoría de valor extremo presentada en el capítulo 3, la cual consiste en dividir la muestra total de datos de cada serie financiera en submuestras que contienen un determinado número de observaciones y donde se seleccionan los rendimientos extremos mínimos y máximos. El número de rendimientos extremos para cada muestra depende de la selección del tamaño de la submuestra y el tamaño de la muestra total. Aquí, los rendimientos extremos diarios son seleccionados para diferentes periodos de tiempo tales como un mes ($n=21$), un trimestre ($n=63$), un semestre ($n=126$) y un año ($n=252$).⁴ Por su parte, la selección de los rendimientos extremos sobre una base de diez días únicamente es analizado para el periodo de tiempo de un semestre a fin de evitar que se viole la ley asintótica del modelo; es decir, se sacrifica varianza mínima por sesgo mínimo. Finalmente, una vez formadas las muestras de rendimientos extremos se estiman los parámetros de la distribución de valor extremo generalizada. Los parámetros de localización, escala e índice de la cola se estiman por el método de estimación de máxima verosimilitud de manera independiente para cada cola de la distribución de rendimientos. En el Apéndice C se proporciona una subrutina desarrollada en lenguaje C++ de elaboración propia, que facilita la estimación de los parámetros de la distribución de valor extremo generalizada, así como los errores estándar derivados de la diagonal de la matriz de varianza-covarianza.⁵

En la Tabla 4.3 se muestran los resultados de los estimadores de máxima verosimilitud para los parámetros desconocidos de la distribución de valor extremo generalizada para los rendimientos extremos máximos y mínimos de los índices accionarios, así como sus respectivos errores estándar. De los resultados se puede

⁴ $n = 21$ corresponde aproximadamente al número de días de operación en un mes y $n = 63$ representa el número de días de operación en un trimestre por parte de los respectivos mercados de valores. En el análisis no se consideran los días festivos o fines de semana.

⁵ En el código fuente de la subrutina proporcionada en el Apéndice C se han borrado algunos caracteres, con el fin de proteger la originalidad del software.

observar que el parámetro de localización se incrementa con el tamaño del bloque o submuestra, por ejemplo, para el caso del Índice Accionario BOVESPA el parámetro de localización varía en términos absolutos de 3.928 a 8.235 para los rendimientos positivos y de 3.486 a 8.354 para los rendimientos negativos, mientras que para el Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores se incrementa de 2.066 a 5.382 para los rendimientos positivos y de 1.716 a 5.174 para los rendimientos negativos. Este crecimiento significativo en el tamaño promedio de los rendimientos extremos tanto positivos como negativos obedece a los diversos cambios, los altos índices de inflación y crisis financieras que han experimentado estos países en los últimos treinta años, afectando directamente la dinámica de los rendimientos nominales de los índices accionarios. Por otra parte, existe una diferencia significativa en el valor del parámetro de localización entre cada mercado, considerando una submuestra de 126 días de operación, el valor estimado del parámetro de localización de la Bolsa de Sao Paulo es 1.59 veces aproximadamente más grande que el valor estimado del parámetro de localización de la Bolsa Mexicana de Valores respectivamente para los rendimientos positivos y de 1.63 veces aproximadamente para los rendimientos negativos.

Por su parte, la estimación del parámetro de escala también presenta la misma tendencia creciente para cada mercado accionario a medida que aumenta el tamaño del bloque. Considerando la cola derecha de la distribución de rendimientos, el parámetro de escala estimado de la Bolsa de Valores de Brasil se incrementa de 2.349 a 3.337, seguido por la Bolsa Mexicana de Valores que varía entre 1.285 y 2.984. Mientras que el valor estimado del parámetro de escala de la cola izquierda de la distribución de rendimientos es ligeramente más pequeño que el parámetro de escala de la cola derecha. Este parámetro estimado oscila entre 2.10 y 2.981 para el mercado de Brasil y 1.133 y 2.686 para el mercado de México, indicando que ambos mercados accionarios emergentes están asociados a un alto riesgo; un hecho estilizado que caracteriza a las economías con estructuras financieras y económicas frágiles. Profundizando la comparación entre los mercados de Brasil y México, considerando un subperiodo de tiempo de 126 días se puede observar que las estimaciones de los

parámetros de escala de la Bolsa de Valores de Brasil son aproximadamente más grandes 1.29 y 1.20 veces que los valores estimados del parámetro de escala de la Bolsa Mexicana de Valores para ambos rendimientos.

El análisis del parámetro del índice de la cola como se conoce en la literatura es considerado el más importante para explicar el comportamiento asintótico de las colas de la distribución de rendimientos de las series financieras. Los valores estimados del índice de la cola para los rendimientos extremos positivos para los diferentes periodos de tiempo en los mercados de Brasil y México presentan una variación de -0.121 a -0.337 ; de -0.284 a -0.388 . Considerando la cola izquierda de la distribución de los rendimientos, el índice de la cola estimado oscila entre -0.119 y -0.278 para el mercado de Brasil; -0.235 y -0.351 para el mercado de México. Como se puede observar todos los valores estimados del índice de la cola reportados en la Tabla 4.3 tienden a ser cada vez más negativos, con errores estándar más grandes a medida que se incrementa el tamaño del bloque o submuestra. En ambos mercados, los resultados de la estimación del índice de la cola son alimentados por el estadístico de la prueba de bondad de ajuste de Sherman, indicando que la hipótesis nula de que los rendimientos máximos y mínimos sigue una distribución de valor extremo generalizada no puede ser rechazada para un nivel de confianza del 5%, excepto para los bloques mensuales. Estos hallazgos confirman que la distribución de valor extremo generalizada explica apropiadamente el comportamiento asintótico de los rendimientos extremos máximos y mínimos en los mercados accionarios de Brasil y México.

En resumen, la distribución asintótica de los rendimientos extremos se encuentra en el máximo dominio de atracción de la distribución de Fréchet comúnmente conocida como la distribución de colas pesadas o gruesas, generalmente utilizada para modelar datos financieros reales. Debido a que estas economías han experimentado una oleada de trastornos profundos tales como crisis financieras, devaluaciones, presiones inflacionarias y cambios de regímenes dramáticos, así como importantes auges económicos como consecuencia del creciente interés de los inversionistas internacionales para tomar posiciones financieras en los mercados emergentes que

violan el supuesto de normalidad. Los resultados son consistentes con otros estudios empíricos que han aplicado la teoría de valor extremo clásica a rendimientos de mercados accionarios (Login, 2000; Ho **et al.**, 2000, da Silva y Mendes, 2003).

Tabla 4.3
Estimadores de Máxima Verosimilitud de la Distribución de Valor Extremo Generalizada para los Rendimientos Diarios Máximos y Mínimos de los Mercados Accionarios de Brasil y México

Tamaño de la Submuestra	Parámetro de Localización	Parámetro de Escala	Índice de la Cola	Estadístico de Sherman
Rendimientos Máximos				
Brasil				
$n = 21, m = 420$	3.928 (0.040)	2.349 (0.031)	-0.121 (0.039)	1.966(2.46%)
$n = 63, m = 140$	5.346 (0.086)	2.898 (0.067)	-0.159 (0.069)	1.203(11.4%)
$n = 126, m = 70$	6.700 (0.131)	3.085 (0.106)	-0.222 (0.108)	-0.350(36.3%)
$n = 252, m = 35$	8.235 (0.243)	3.337 (0.154)	-0.337 (0.159)	-1.127(87.0%)
México				
$n = 21, m = 420$	2.066 (0.033)	1.285 (0.027)	-0.284 (0.043)	1.984(2.36%)
$n = 63, m = 140$	3.130 (0.054)	1.804 (0.045)	-0.313 (0.074)	1.158(12.4%)
$n = 126, m = 70$	4.207 (0.102)	2.386 (0.088)	-0.365 (0.122)	-0.152(56.0%)
$n = 252, m = 35$	5.382 (0.233)	2.948 (0.129)	-0.388 (0.174)	-1.119(86.9%)
Rendimientos Mínimos				
Brasil				
$n = 21, m = 420$	-3.486 (0.036)	2.100 (0.028)	-0.119 (0.040)	1.982(2.37%)
$n = 63, m = 140$	-5.349 (0.074)	2.479 (0.057)	-0.134 (0.068)	1.320(9.33%)
$n = 126, m = 70$	-6.642 (0.111)	2.505 (0.073)	-0.197 (0.090)	-0.296(38.3%)
$n = 252, m = 35$	-8.354 (0.185)	2.981 (0.135)	-0.278 (0.152)	-1.504(93.4%)
México				
$n = 21, m = 420$	-1.716 (0.029)	1.133 (0.023)	-0.235 (0.043)	1.826(3.39%)
$n = 63, m = 140$	-2.835 (0.046)	1.531 (0.037)	-0.251 (0.073)	1.477(6.98%)
$n = 126, m = 70$	-4.099 (0.087)	2.096 (0.067)	-0.320 (0.096)	-0.336(36.8%)
$n = 252, m = 35$	-5.174 (0.179)	2.686 (0.128)	-0.351 (0.176)	-0.803(78.9%)

Los valores en paréntesis representan los errores estándar de los estimadores de máxima verosimilitud de la distribución de valor extremo generalizada, derivados de la diagonal de la matriz de varianza-covarianza, y calculados con el programa desarrollado en lenguaje C++. En la última columna se muestran los resultados de la prueba de bondad de ajuste de Sherman con el p -value en paréntesis. El estadístico es comparado con el valor crítico de la distribución normal para un nivel de confianza del 5% (1.645). Si el estadístico es menor al valor crítico, entonces la hipótesis nula de que los rendimientos extremos siguen una DVEG no puede ser rechazada a un nivel de confianza del 5%.

Por otra parte, los resultados indican que las distribuciones de rendimientos diarios presentan diferentes características; es decir, existe un comportamiento ligero

de asimetría en la distribución de rendimientos. La cola derecha de la distribución de rendimientos del mercado accionario de Brasil tiende a ser ligeramente más pesada que la cola izquierda para los periodos de tiempo de un mes a un semestre, pero para un periodo de un año la cola derecha de la distribución es notablemente más estable y pesada que la cola izquierda, ya que el índice de la cola es significativamente diferente de cero (-0.337 contra -0.278). Considerando el índice de la cola de la Bolsa Mexicana de Valores se puede observar que la cola derecha tiende a ser más pesada que la cola izquierda de la distribución de rendimientos para cualquier periodo de tiempo; un fenómeno que se comporta de manera inversa en los mercados accionarios industriales donde la cola izquierda tiende a ser más pesada que la cola derecha de la distribución de rendimientos (Login, 2000). De esta manera, los resultados demuestran que los mercados de Brasil y México no sólo están expuestos a los crash bursátiles, sino también a los auges económicos.

Estos resultados también confirman que los valores estimados del índice de la cola son más estables para los rendimientos de la Bolsa Mexicana de Valores que para los rendimientos de la Bolsa de Sao Paulo, sustentado por el signo negativo del valor del índice de la cola. En otras palabras, la consistencia del índice de la cola depende, en gran parte, de los eventos extremos tales como el crash del 16 de noviembre de 1987 ocurrido en México (-20.24%) y el crash del 21 de marzo de 1990 ocurrido en Brasil (-25.20), puesto que excluyendo estas observaciones de la muestra de las estadísticas de orden extremo, el impacto se refleja inmediatamente en el valor del índice de la cola al cambiar de -0.320 a -0.267 y -0.197 a -0.159 , manteniéndose casi igual los valores estimados de los parámetros de localización y escala. Este mismo efecto ocurre en la muestra de los rendimientos positivos cuando se omiten los valores máximos, indicando que la distribución estimada parece mostrar colas menos pesadas considerando un subperiodo de tiempo de un semestre. Otro hecho importante observado en los resultados estimados es que las colas de la distribución de rendimientos de la Bolsa Mexicana de Valores son más pesadas que las colas de la distribución de rendimientos de la Bolsa de Valores de Brasil para cualquier intervalo de tiempo. Pese a que los rendimientos del Mercado de Valores de Sao Paulo son más

grandes en magnitud, pero adyacentes a diferencia de los rendimientos de la Bolsa Mexicana de Valores que se encuentran más dispersos.

Otro hallazgo relevante derivado de la estimación del índice la cola es la existencia de segundos momentos; es decir, las colas tanto derecha como izquierda de la distribución de rendimientos de los índices accionarios presentan varianzas finitas, pero con diferentes propiedades. Esto se debe a que el valor del índice de la cola para los rendimientos extremos positivos y negativos en ambos mercados es mayor que -0.50 para cualquier bloque, indicando así la regularidad de la función logarítmica de verosimilitud que evita, en esencia, la violación del supuesto de las propiedades asintóticas de los estimadores de máxima verosimilitud demostradas por Smith (1985). Por otra parte, el hecho de que la distribución de rendimientos presente propiedades de colas pesadas, no significa que los momentos más altos no existan. Por ejemplo, los primeros cuatro momentos únicamente existen para la distribución de rendimientos de la Bolsa de Sao Paulo cuando los rendimientos extremos diarios son seleccionados sobre subperiodos de tiempo menor a un año, sustentado por el valor del índice de la cola que se encuentra por arriba de -0.25 . Con respecto a la Bolsa Mexicana de Valores, los primeros cuatro momentos sólo existen para los rendimientos extremos negativos para el subperiodo de tiempo de un mes. Mientras que los primeros tres momentos existen para los rendimientos positivos para el mismo periodo de tiempo.

Por su parte, el comportamiento de los parámetros de la distribución de valor extremo generalizada bajo agregación de tiempo es analizado empíricamente, con el fin de probar hasta que grado afecta la estabilidad de los parámetros estimados cuando se utilizan datos de frecuencia baja. Esto es, para rendimientos sobre una base de diez días y un subperiodo de tiempo de un semestre ($n = 126$). Asimismo, los resultados de la Tabla 4.4 muestran que los parámetros estimados de localización y escala suelen ser más volátiles en los rendimientos financieros de frecuencia baja que en los rendimientos financieros de frecuencia alta, particularmente para el mercado de Brasil. El parámetro de localización para los rendimientos máximos diarios de los Mercados de

Valores de Brasil y México es igual 6.700 y 4.207, mientras que para los rendimientos con frecuencia de diez días equivale a 11.846 y 7.432 respectivamente.

Tabla 4.4
Estimadores de Máxima Verosimilitud de la Distribución de Valor Extremo Generalizada para los Rendimientos Máximos y Mínimos sobre una base de Diez Días de los Mercados Accionarios de Brasil y México

	Parámetro de Localización	Parámetro de Escala	Índice de la Cola	Estadístico de Sherman
Rendimientos Máximos				
Brasil	11.846 (0.247)	5.523 (0.183)	-0.062 (0.135)	0.979 (16.37%)
México	7.432 (0.168)	4.045 (0.127)	-0.092 (0.118)	0.976 (16.44%)
Rendimientos Mínimos				
Brasil	-7.295 (0.217)	5.249 (0.166)	-0.138 (0.115)	1.960 (2.49%)
México	-5.006 (0.141)	3.430 (0.109)	-0.084 (0.106)	1.601 (5.46%)

Los valores en paréntesis indican los errores estándar de los estimadores de máxima verosimilitud de la distribución de valor extremo generalizada, derivados de la diagonal de la matriz de varianza-covarianza, y calculados con el programa desarrollado en lenguaje C ++. En la última columna se muestran los resultados de la prueba de bondad de ajuste de Sherman con el p -value en paréntesis. El estadístico es comparado con el valor crítico de la distribución normal para un nivel de confianza del 5% (1.645). Un estadístico menor al valor crítico implica aceptar la hipótesis nula de que los rendimientos extremos siguen una DVEG a un nivel de confianza del 5%.

El parámetro de escala es igual a 3.085 y 2.386 para los rendimientos máximos diarios, mientras que de 5.523 y 4.045 para los rendimientos máximos sobre una base de diez días. Para los rendimientos extremos mínimos se puede observar que el parámetro de localización es menos volátil para ambos mercados emergentes, ya que se encuentra entre -6.696 y -7.295 para el mercado de Brasil; -4.099 y -5.006 para el mercado de México. Ahora analizando el parámetro de escala para los rendimientos mínimos se puede observar que la variabilidad es similar a la de los rendimientos máximos, aunque el mercado de México presenta menor volatilidad. Las estimaciones se incrementan de 2.505 a 5.249 en el mercado de Brasil; de 2.096 a 3.430 en el mercado de México para las respectivas frecuencias de tiempo. Mientras que el efecto en el parámetro del índice de la cola parece mostrar un comportamiento inverso al converger a cero, confirmando así que las colas de las distribuciones de rendimientos financieros tienden a ser menos pesadas o estables cuando se utilizan datos de

frecuencia baja, aunque el valor del índice de la cola continua permaneciendo con signo negativo para ambos mercados de valores; una condición suficiente para garantizar que la distribución de rendimientos extremos se encuentra en el máximo dominio de atracción de la distribución de Fréchet, y sustentada por el estadístico de Sherman que indica que la hipótesis nula solamente es rechazada para los rendimientos mínimos del mercado de Brasil.

Por lo anterior, es evidente que las colas de la distribución de rendimientos extremos tanto positivos como negativos presentan diferentes propiedades, principalmente la distribución de rendimientos del mercado de Brasil donde la cola izquierda es más pesada o ancha que la cola derecha, mientras que el mercado de México observa un comportamiento inverso. Asimismo, realizando un análisis de comparación entre mercados se puede observar que la cola derecha de la distribución de rendimientos de la Bolsa Mexicana de Valores tiende a ser más estable o pesada que la cola de la distribución de rendimientos de la Bolsa de Valores de Sao Paulo. No obstante, este hecho no es sostenido para los rendimientos extremos mínimos, ya que entre más negativo sea el valor del índice de la cola, más pesada o estable será la cola de la distribución de rendimientos.

4.3 Resultados de la Prueba de la Razón de Verosimilitud para la Selección de la Distribución de Rendimientos de las Series Financieras

Un resultado interesante del teorema de valor extremo es que todos los procesos de rendimientos conducen a la misma forma de la distribución de rendimientos extremos. Las distribuciones de valor extremo obtenidas de diferentes procesos de rendimientos pueden ser diferenciadas por medio de los parámetros de localización, escala e índice de la cola. Los administradores de riesgos y los investigadores han supuesto durante mucho tiempo que el comportamiento asintótico de los rendimientos de las series financieras sigue una distribución normal, misma que pertenece al máximo dominio de atracción de la distribución de Gumbel para rendimientos extremos cuando el valor del

índice de la cola tiene un valor de cero. Esta aseveración puede ser considerada para probar la siguiente hipótesis nula:

$$H_0 : \xi_n = 0 \quad H_a : \xi_n < 0$$

Cuando el índice de la cola es significativamente diferente de cero, estadísticamente se puede afirmar que la distribución asintótica de los rendimientos extremos no se encuentra en el máximo dominio de atracción de la distribución de Gumbel. Por consiguiente, la distribución normal para los rendimientos es rechazada, aceptándose la hipótesis alternativa que establece que la distribución asintótica de los rendimientos extremos se encuentra en el máximo dominio de atracción de la distribución de Fréchet, frecuentemente utilizada para modelar los rendimientos de las series financieras que se caracterizan por presentar exceso de curtosis. Aunque las estimaciones del índice de la cola siempre mantienen un valor negativo para ambos mercados de valores; sin embargo, los valores del índice de la cola pueden no ser significativamente diferentes de cero estadísticamente. La Tabla 4.5 muestra los resultados empíricos de la prueba de la razón de verosimilitud para diferentes niveles de confianza del 1%, 5% y 10%.

Tabla 4.5
Prueba de la Hipótesis Nula para la Selección de la Distribución de los Rendimientos Basado en el Valor del Índice de la Cola

	Valor del Estadístico		Prueba de la Hipótesis Nula	
	Cola Izquierda	Cola Derecha	Cola Izquierda	Cola Derecha
Brasil				
Mensual	12.12	13.23	Rechazada al 1%	Rechazada al 1%
Trimestral	5.14	7.34	Rechazada al 5%	Rechazada al 1%
Semestral	-2.72	6.77	Aceptada al 1%	Rechazada al 1%
Anual	-1.53	1.56	Aceptada al 1%	Aceptada al 1%
México				
Mensual	39.35	45.29	Rechazada al 1%	Rechazada al 1%
Trimestral	18.59	30.80	Rechazada al 1%	Rechazada al 1%
Semestral	12.14	13.51	Rechazada al 1%	Rechazada al 1%
Anual	-2.67	-3.00	Aceptada al 1%	Aceptada al 1%

La prueba de la razón de verosimilitud se distribuye como una variable Chi cuadrada con un grado de libertad, misma que se obtiene de la diferencia del número de parámetros entre las distribuciones de Gumbel y de Fréchet. Los valores críticos para los niveles de confianza del 1%, 5% y 10% son iguales a 6.63, 3.84 y 2.71. Para aceptar la hipótesis nula de la distribución de Gumbel consistente con la distribución normal, el valor del estadístico debe ser menor al valor crítico $\lambda < C$.

Los resultados de la prueba de la razón de verosimilitud muestran evidencia estadística de que los valores estimados del índice de la cola son significativamente diferentes de cero para los periodos de tiempo de un mes a un semestre en ambos mercados emergentes, excepto para los rendimientos mínimos del mercado de Brasil seleccionados sobre un bloque semestral. En consecuencia, la distribución asintótica de rendimientos extremos máximos y mínimos para los índices accionarios de Brasil y México pertenece al máximo dominio de atracción de la distribución de Fréchet. Mientras que la hipótesis nula, en ambos mercados, es sólo aceptada para los rendimientos extremos seleccionados sobre un bloque anual para un nivel de confianza del 1%, demostrando que la distribución asintótica de rendimientos extremos se encuentra en el máximo dominio de atracción de la distribución de Gumbel consistente con la distribución normal. En otras palabras, un valor del índice de la cola significativamente diferente de cero sustenta estadísticamente que el comportamiento asintótico de los rendimientos extremos es mejor explicado por una distribución de colas pesadas o gruesas.

4.4 Medidas VaR y CVaR para Portafolios Lineales en los Mercados Accionarios Emergentes de América Latina

Una vez estimados los parámetros de la distribución de valor extremo generalizada y demostrado que el modelo se ajusta perfectamente al conjunto de datos propuestos, es decir, los estimadores son estadísticamente significativos, el siguiente paso es calcular las medidas VaR y CVaR para los rendimientos de los dos índices accionarios para diferentes niveles de confianza. En el proceso de estimación de los parámetros de la distribución de valor extremo generalizada se utilizaron diferentes periodos de tiempo desde un mes hasta un año. Para obtener una buena estimación del riesgo se utilizan los rendimientos extremos seleccionados sobre un periodo de tiempo de un semestre, con el fin de omitir observaciones que se encuentran en el centro de la distribución de pérdidas y ganancias que conllevan a violar las propiedades asintóticas del modelo de estimación, esto es, sacrificando varianza mínima por sesgo mínimo como se menciona en el capítulo 3.

Por otra parte, una observación importante que se debe resaltar en la mayoría de los modelos de medición de riesgo propuestos en la literatura es que únicamente tratan los rendimientos negativos capturados en la cola izquierda de la distribución de probabilidad, esto es, las instituciones financieras y los inversionistas compran activos financieros cuando los precios presentan una tendencia a la baja y venden cuando los precios suben. En este sentido, el potencial de la teoría del valor extremo permite proporcionar información del riesgo de las colas de la distribución de rendimientos de manera independiente. En otras palabras, la estimación del VaR y CVaR para las posiciones financieras larga y corta. En el primer caso, los inversionista podrían incurrir en pérdidas cuando el precio de los activos financieros bajan de precio como consecuencia de la necesidad de liquidez, mientras que en el segundo caso el inversionista sufrirá pérdidas cuando el activo financiero suba de precio. Esto generalmente sucede cuando los inversionistas realizan operaciones de ventas en corto, es decir, especulan con activos financieros que han pedido prestados para venderlos en ese mismo momento, con el fin de obtener un beneficio significativo siempre y cuando sus expectativas a la baja se cumplan en el futuro.⁶ En este contexto, la estimación del VaR y CVaR para una posición financiera larga se centra en la cola izquierda de la distribución de rendimientos negativos como se ha documentado en la mayoría de la literatura, mientras que para una posición financiera corta se considera la cola derecha de la distribución de rendimientos positivos.

Finalmente, las pérdidas estimadas a través de las medidas VaR y CVaR basado en la teoría de valor extremo para los niveles de confianza del 95%, 97.5%, 99% y 99.9% son expresadas en términos de moneda local para facilitar la interpretación de los resultados. Aunque las pérdidas potenciales también son reportadas en términos de porcentajes para cada posición financiera a fin de proporcionar un mejor análisis de comparación e identificar el mercado que presenta la mayor exposición al riesgo para el inversionista extranjero. La eficiencia del modelo basado en la teoría de valor extremo para los propósitos de la administración de

⁶ Un inversionista vende en corto un activo financiero cuando tiene expectativas de que su precio en el mercado va a presentar un ajuste negativo en el futuro. Para más información de los procedimientos de las operaciones de ventas en corto, véase Sharpe, Alexander y Bailey (1999).

riesgos es alcanzada, analizando los resultados obtenidos con las estimaciones de los modelos tradicionales o de primera generación conocidos como los modelos paramétricos y no paramétricos. Los modelos paramétricos son el método delta normal con distribución incondicional normal, los modelos GARCH(1,1) y el método de suavización exponencial (RiskMetrics) con distribución condicional normal, mientras que el único modelo no paramétrico tratado en este análisis está representado por el método de simulación histórica basado en la distribución empírica incondicional. En el análisis empírico de la presente tesis no se considera necesario la aplicación del método de simulación Monte Carlo en el proceso de la medición del riesgo de mercado, porque todos los factores de riesgo empleados en el análisis son considerados de carácter lineal. En consecuencia, se limita el estudio a los principales modelos paramétricos y simulación histórica, así como su extensión para estimar el valor en riesgo condicional (CVaR) para las posiciones financieras larga y corta.

Los resultados empíricos para los cinco diferentes modelos que estiman el VaR y CVaR de las colas de la distribución de rendimientos diarios para ambos mercados accionarios emergentes son mostrados en la Tabla 4.6. En ambos mercados se puede observar que las aproximaciones paramétricas basadas en las distribuciones de rendimientos incondicional y condicional con innovaciones normales proporcionan estimaciones del VaR más conservadoras para ambas posiciones financieras; es decir, pérdidas más altas que la aproximación basada en la distribución de valor extremo incondicional para niveles de confianza pequeños, por ejemplo, para un nivel de confianza del 95%. La pérdida máxima estimada (VaR) para una posición larga de \$100 tomada en la Bolsa Mexicana de Valores equivale a \$2.39 aplicando el método delta-normal, utilizando los modelos condicionales GARCH y suavización exponencial se tienen pérdidas por \$1.93 y \$1.89 respectivamente, mientras que la estimación del VaR basado en la distribución de valor extremo es igual a \$1.21. En el caso de la posición financiera larga tomada en la Bolsa de Valores de Sao Paulo, las pérdidas estimadas por los métodos paramétricos basados en las distribuciones de rendimientos incondicional y condicional son iguales a \$3.47, \$2.44 y \$2.41, al mismo tiempo que la máxima pérdida estimada utilizando la distribución asintótica de valor extremo es igual

a \$2.95. Aquí se puede observar que las estimaciones del VaR empleando la teoría de valor extremo son ligeramente más conservadoras que las estimaciones de los modelos condicionales. Para la posición financiera corta se obtuvieron resultados similares para los dos mercados accionarios emergentes. En contraste, las estimaciones del VaR aplicando la teoría de valor extremo son más conservadoras para altos niveles de confianza que las medidas paramétricas tradicionales, principalmente para los modelos basados en la distribución condicional. Para un nivel de confianza del 99.9%, las estimaciones del VaR obtenidas con la teoría de valor extremo para la posición financiera corta en los dos mercados accionarios son aproximadamente dos veces más grandes que los valores del VaR calculados con el método delta-normal, esto es, \$11.85 contra \$4.43 para la Bolsa Mexicana de Valores y \$15.06 contra \$7.21 para la Bolsa de Valores de Sao Paulo. Con respecto a la posición financiera larga, las pérdidas potenciales obtenidas a través de los diferentes métodos son iguales a \$10.46 y \$4.49 (México) y \$13.47 y \$6.51 (Brasil). Esta diferencia significativa no sólo está sustentada por la forma como se estimó la distribución de rendimientos extremos en los dos mercados accionarios, sino también por el signo negativo del índice de la cola.

En este sentido, los resultados empíricos anteriores explican claramente los efectos positivos de utilizar el cuantil de la distribución de valor extremo generalizada como medida de riesgo en el análisis del VaR para altos niveles de confianza, puesto que proporcionan mejor información del perfil del riesgo o de las pérdidas potenciales a que están expuestos los inversionistas a medida que se toma información capturada en las colas de la distribución de rendimientos, misma que es omitida por los modelos incondicional y condicional con innovaciones normales. De esta manera, la primera hipótesis planteada es probada por la evidencia empírica. Sin embargo, el análisis comparativo entre el método de simulación histórica⁷ y el modelo de valor extremo demuestra notablemente que el modelo basado en la distribución empírica proporciona estimaciones del VaR más conservadoras para cualquier nivel de confianza y posición

⁷ Cuando el producto entre el nivel de confianza y el tamaño de la muestra (cT) no es un número entero se aplica el método de interpolación lineal para obtener estimaciones más precisas del VaR o la pérdida máxima a través del método de simulación histórica.

financiera en ambos mercados; es decir, sobreestiman el riesgo, excepto para el nivel de confianza del 99.9% donde los resultados son muy parecidos, en particular, para la posición larga (\$14.03 contra \$13.47) para Brasil, y (\$11.61 contra \$10.46) para México.

Tabla 4.6
Resultados Empíricos de las Medidas VaR y CVaR para Posiciones Lineales de los Rendimientos Diarios de los Mercados Accionarios de Brasil y México

Pérdidas Potenciales para la Posición Larga

Método	Delta-Normal		GARCH		RiskMetrics		Valor Extremo		Simulación Histórica	
	VaR	CVaR	VaR	CVaR	VaR	CVaR	VaR	CVaR	VaR	CVaR
México										
C=0.95	2.39	3.00	1.93	2.41	1.89	2.37	1.21	1.78	2.73	4.51
C=0.975	2.85	3.40	2.29	2.74	2.25	2.68	2.14	3.15	3.61	5.59
C=0.99	3.38	3.88	2.72	3.12	2.67	3.06	3.72	5.47	4.77	7.62
c=0.999	4.49	4.90	3.62	3.94	3.55	3.87	10.46	15.37	11.61	16.58
Brasil										
c=0.95	3.47	4.35	2.44	3.06	2.41	3.02	2.95	3.79	5.44	7.81
c=0.975	4.13	4.93	2.91	3.47	2.88	3.43	4.23	5.43	6.73	9.03
c=0.99	4.90	5.62	3.45	3.96	3.41	3.91	6.24	8.01	8.44	10.95
c=0.999	6.51	7.10	4.59	5.00	4.53	4.94	13.47	17.31	14.03	19.98

Pérdidas Potenciales para las Posición Corta

Método	Delta-Normal		GARCH		RiskMetrics		Valor Extremo		Simulación Histórica	
	VaR	CVaR	VaR	CVaR	VaR	CVaR	VaR	CVaR	VaR	CVaR
México										
c=0.95	2.36	2.95	2.00	2.51	1.90	2.38	1.04	1.64	2.40	4.46
c=0.975	2.81	3.35	2.39	2.85	2.33	2.70	2.03	3.20	3.35	5.82
c=0.99	3.33	3.82	2.83	3.25	2.77	3.08	3.78	5.95	5.07	8.32
c=0.999	4.43	4.83	3.76	4.11	3.68	3.90	11.85	18.67	15.28	18.44
Brasil										
c=0.95	3.84	4.81	2.80	3.51	2.77	3.47	2.09	2.69	4.55	7.16
c=0.975	4.57	5.46	3.34	3.98	3.29	3.93	3.66	4.71	6.05	8.68
c=0.99	5.43	6.22	3.96	4.54	3.91	4.48	6.13	7.89	7.96	11.01
c=0.999	7.21	7.87	5.26	5.74	5.19	5.66	15.06	19.36	14.46	20.86

La principal razón de este hecho se atribuye a que la distribución empírica suele ser muy densa en el interior como consecuencia de la naturaleza discreta de los rendimientos. Este fenómeno implica que las estimaciones del VaR que dependen de las colas también sean calculados en forma discreta y de varianza alta, provocando con ello que el método de simulación histórica sobreestime o subestime el riesgo. Asimismo, el método de simulación histórica es insuficiente para proporcionar

estimaciones de calidad fuera de la muestra a diferencia del modelo de valor extremo que garantiza estimaciones más precisas del riesgo para percentiles extremos.

Igualmente, analizando los resultados empíricos obtenidos de la medida CVaR de la Tabla 4.6 se puede observar que existen diferencias entre los modelos para cada país e incluso las estimaciones siempre son mayores a los valores estimados del VaR para todas las aproximaciones, particularmente para los modelos de simulación y valor extremo. El CVaR estimado con el modelo de valor extremo para una posición financiera de \$100 y nivel de confianza del 99% es igual a \$5.47 tomando una posición larga y \$5.95 tomando una posición corta (México); \$8.01 tomando una posición larga y \$7.89 tomando una posición corta (Brasil); en el caso del modelo de simulación histórica es igual a \$7.62 y \$8.32 (México) y \$10.95 y \$11.01 (Brasil), y utilizando modelo delta-normal es igual a \$3.88 y \$3.82 (México) y \$5.62 y \$6.22 (Brasil), mientras que los modelos condicionales proporcionan estimaciones del CVaR más pequeñas en magnitud e idénticas a medida que el nivel de confianza aumenta.

Para un nivel de confianza del 99.9%, los resultados indican que los valores del CVaR son más conservadores en ambos mercados emergentes, esto es, pérdidas potenciales más grandes atribuidas a la estabilidad del índice de la cola, en particular, para los rendimientos positivos. Indicando con ello que la percepción del riesgo es más severa y persistente en las economías emergentes que en las economías desarrolladas. Esta característica se puede apreciar mejor al considerar la diferencia entre el CVaR y el VaR. Por ejemplo, aplicando el modelo de valor extremo para los niveles de confianza del 99% y 99.9% se puede observar que la diferencia se incrementa en términos absolutos de \$1.75 a \$4.92 para la posición larga y de \$2.17 a \$6.82 para la posición corta (México) y de \$1.77 a \$3.84 para la posición larga y de \$1.76 a \$4.30 para la posición corta (Brasil). Desde un punto de vista estadístico, esta diferencia significativa en términos absolutos se atribuye al valor del índice de la cola porque entre más negativo sea, mayor será su impacto en el valor en riesgo condicional. Este mismo efecto se presenta con el método de simulación histórica aunque con mayor magnitud como resultado de la naturaleza discreta de los

rendimientos. Con respecto al método delta-normal está diferencia presenta un disminución en términos absolutos de \$0.50 a \$0.41 y \$0.49 a \$0.40 (México) y de \$0.72 a \$0.59 y de \$0.80 a \$0.66 (Brasil). Los resultados demuestran claramente que el CVaR estimado a través de las aproximaciones de valor extremo y de simulación histórica tiende a desviarse del VaR a medida que se incrementa el nivel de confianza, mientras que el CVaR calculado con el método delta-normal tiende a converger hacia el VaR. Como resultado, cualquier modelo que asume el supuesto de normalidad no sólo proporciona información incorrecta de las colas de la distribución de rendimientos, sino también subestima el valor en riesgo condicional, en este sentido, la teoría de valor extremo desempeña un papel fundamental en la modelación correcta del comportamiento asintótico de las colas de la distribución de rendimientos en los mercados emergentes.

Los resultados de la Tabla 4.7 muestran claramente que el VaR y CVaR para cualquier posición financiera y mercado son más grandes en magnitud para datos de frecuencia baja que cuando se utilizan datos de frecuencia alta. Ambas medidas de riesgo basadas en la teoría de valor extremo para un nivel de confianza del 99.9% proporcionan pérdidas en el Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores por \$23.38 y \$25.53 para la posición larga y pérdidas por \$29.50 y \$32.48 para la posición corta. Para el caso de la Bolsa de Valores de Sao Paulo, las pérdidas estimadas por las medidas VaR y CVaR equivalen a \$39.29 y \$45.59 para la posición larga y \$39.93 y \$42.55 para la posición corta para un horizonte de tiempo de 10 días.

Por su parte, las estimaciones del VaR y CVaR basado en la distribución empírica es imposible para altos niveles de confianza (99.9%), ya que no existe suficiente información,⁸ mientras que para un nivel de confianza del 99%, las medidas VaR y CVaR son muy conservadoras como resultado de la frecuencia baja e imprecisión de los rendimientos capturados en las colas de la distribución que

⁸ Como se especificó en el capítulo dos de esta tesis, el método de simulación histórica requiere de muestras grandes de series financieras; es decir, 1250 datos históricos como mínimo para estimar el riesgo de manera eficiente. Sin embargo, las muestras que se utilizaron para estimar el VaR y CVaR sobre una base de diez días contienen en promedio 579 rendimientos positivos y 347 rendimientos negativos para ambos mercados accionarios.

ocasionan estimaciones de varianza alta e incluso infinita. Esta desventaja puede ser relajada ampliamente por el método de valor extremo, puesto que proporciona mejores estimaciones del riesgo fuera de la muestra.

Tabla 4.7
Resultados Empíricos de las Medidas VaR y CVaR para Posiciones Lineales de los Rendimientos Sobre una Base de Diez Días de los Mercados Accionarios de Brasil y México

Pérdidas Potenciales para la Posición Larga

Método	Delta-Normal		GARCH		RiskMetrics		Valor Extremo		Simulación Histórica	
México	VaR	CVaR	VaR	CVaR	VaR	CVaR	VaR	CVaR	VaR	CVaR
c=0.95	8.21	10.29	6.55	8.21	6.50	8.14	6.71	7.32	10.42	15.27
c=0.975	9.78	11.67	7.80	9.31	7.74	9.23	9.30	10.16	13.73	17.49
c=0.99	11.61	13.31	9.26	10.62	9.19	10.53	12.95	14.14	17.20	20.28
c=0.999	15.42	16.82	12.30	13.41	12.20	13.30	23.38	25.53	nd	nd
Brasil	VaR	CVaR	VaR	CVaR	VaR	CVaR	VaR	CVaR	VaR	CVaR
c=0.95	11.29	14.16	8.11	10.16	8.13	10.19	9.93	11.52	11.42	17.08
c=0.975	13.46	16.05	9.66	11.52	9.69	11.56	14.09	16.35	15.08	21.26
c=0.99	15.97	18.31	11.46	13.15	11.50	13.18	20.19	23.43	22.23	26.73
c=0.999	21.21	23.13	15.23	16.61	15.28	16.66	39.29	45.59	nd	nd

Pérdidas Potenciales para la Posición Corta

Método	Delta-Normal		GARCH		RiskMetrics		Valor Extremo		Simulación Histórica	
México	VaR	CVaR	VaR	CVaR	VaR	CVaR	VaR	CVaR	VaR	CVaR
c=0.95	7.23	9.06	5.75	7.21	5.70	7.22	9.44	10.39	8.19	14.09
c=0.975	8.61	10.28	6.85	8.18	6.80	8.19	12.53	13.79	11.20	17.66
c=0.99	10.22	11.72	8.13	9.33	8.06	9.34	16.88	18.58	16.43	23.94
c=0.999	13.58	14.81	10.81	11.79	10.71	11.81	29.50	32.48	nd	nd
Brasil	VaR	CVaR	VaR	CVaR	VaR	CVaR	VaR	CVaR	VaR	CVaR
c=0.95	13.60	17.05	10.56	13.24	10.60	13.28	14.57	15.52	23.29	31.36
c=0.975	16.20	19.33	12.59	15.01	12.63	15.06	18.67	19.90	29.10	34.95
c=0.99	19.23	22.05	14.94	17.13	14.99	17.18	24.33	25.92	34.76	37.82
c=0.999	25.55	27.86	19.84	21.64	19.91	21.71	39.93	42.55	nd	nd

Finalmente, los resultados estimados del VaR y CVaR basados en la aproximación de valor extremo demuestran substancialmente que el riesgo financiero es más severo y peligroso para los inversionistas nacionales y extranjeros en la Bolsa de Valores de Sao Paulo que en la Bolsa Mexicana de Valores para cualquier posición financiera y nivel de confianza. Aunque los valores estimados del índice de la cola demuestran estadísticamente que las colas tanto derecha como izquierda de la distribución de rendimientos para la Bolsa Mexicana de Valores tienden a ser más

pesadas o anchas que las colas de la distribución de rendimientos de la Bolsa de Valores de Sao Paulo, esto es, los valores del índice del cola en el mercado de México son más pequeños en magnitud o negativos que en el mercado de Brasil para datos de frecuencia alta (-0.320 contra -0.221 para rendimientos positivos diarios; -0.365 contra -0.222 para rendimientos negativos diarios). En el caso de datos de frecuencia baja este fenómeno sólo es observado para los rendimientos extremos positivos (-0.092 contra -0.062); un hallazgo que confirma que los rendimientos de la Bolsa Mexicana de Valores presentan propiedades de colas pesadas y pérdidas grandes con probabilidad más alta de ocurrir. Este efecto también es observado cuando se realiza la comparación entre las colas izquierda y derecha de las distribuciones de rendimientos para cada uno de los mercados emergentes, en particular, para la Bolsa de Valores de Brasil. Para niveles de confianza del 95% y 97.5%, las pérdidas para la posición larga son más grandes que las pérdidas de la posición corta, por ejemplo, \$2.95 contra \$2.09 y \$4.23 contra \$3.66 a pesar de que los valores estimados de los índices de la cola son muy similares. Mientras que para la Bolsa Mexicana de Valores son \$1.21 contra \$1.04 y \$2.14 contra \$2.03 considerando una submuestra de tamaño de 126 días. En consecuencia, los resultados empíricos prueban la segunda hipótesis planteada que una cola más pesada no necesariamente conduce a un mayor riesgo o pérdida. De esta manera, las medidas VaR y CVaR no parecen estar exentos del riesgo de la cola cuando el comportamiento asintótico de los rendimientos de los índices accionarios es explicado por una distribución de valor extremo o de colas pesadas.⁹

4.5 Resultados del Backtesting

Una vez estimados las pérdidas potenciales es necesario realizar un análisis histórico de resultados a fin de analizar la consistencia de cada una de las medidas VaR implementadas. El proceso de validación se lleva a cabo durante el periodo de tiempo de 02/01/01 a 31/12/04, con un total de 1000 observaciones diarias para diferentes niveles de confianza. En la Tabla 8 se reportan el número de excepciones esperadas y

⁹ Para ilustrar el problema del riesgo de la cola de las medidas VaR y CVaR, véase Yamai y Yoshima (2002a, 2002d).

reales, así como los resultados del estadístico de Kupiec que permite comprobar cuando las medidas VaR implementadas subestiman o sobreestiman el riesgo. La evidencia empírica del proceso de backtesting muestra que el método delta-normal estima apropiadamente el riesgo para niveles de confianza del 95% y 97.5%, en particular, para la posición corta tomada en el mercado de Brasil, pero subestima el riesgo para niveles de confianza más altos. Por ejemplo, para niveles de confianza del 99% y 99.9%, el número de excepciones sobre el nivel del VaR que se espera observar equivalen a 10 y 1, respectivamente; sin embargo, el número de excepciones reales para ambas posiciones en el mercado de México fue de 12 y 4, respectivamente.

En este sentido, la carencia de robustez del modelo delta-normal para capturar los rendimientos extremos es muy notable, puesto que el impacto del número de excepciones inesperadas (2 y 3) para altos niveles de confianza podría reflejarse inmediatamente en el valor del portafolio. Por su parte, el modelo de simulación histórica proporciona resultados más conservadores en ambos mercados para cualquier nivel de confianza. No obstante, la evidencia empírica ha demostrado que el grado de exactitud de esta medida de riesgo es muy débil para predecir las pérdidas potenciales como consecuencia de la carencia de observaciones en las colas. Prueba de ello es la diferencia significativa entre el número de excepciones reales observadas y el número de excepciones esperadas en ambos mercados, incluso para pequeños niveles de confianza.

De la misma manera, la capacidad de predicción de la teoría de valor extremo en la medición del riesgo es impecable cuando nos centramos en las colas de la distribución de rendimientos. Analizando los dos índices accionarios se puede observar que la medida VaR basada en la TVE proporciona resultados más correctos de las pérdidas para altos niveles de confianza a comparación del método delta-normal. Por ejemplo, el número de pérdidas superiores al VaR esperado para los niveles de confianza del 99% y 99.9% es igual a 10 y 1 excepciones, respectivamente, pero el número observado fue de 5 y 0 excepciones para el mercado de Brasil y de 6 y 0 excepciones para el mercado de México para la posición larga, mientras que en el caso de la posición corta se observaron 3 y 0 excepciones en ambos mercados. Si embargo,

este método proporciona resultados incorrectos para niveles de confianza del 95% y 97.5%, principalmente para la posición corta donde el método delta-normal estima correctamente el riesgo. En el contexto de la administración de riesgos, los resultados del backtesting confirman la superioridad del modelo basado en la TVE para capturar de manera más eficiente el impacto de los rendimientos extremos en el valor del portafolio a diferencia de los modelos convencionales.

Tabla 4.8
Resultados del Backtesting para los Modelos VaR para Diferentes Niveles de Confianza

Periodo: 02/01/01-30/12/04								
Número de Rendimientos Diarios: 1000								
Posición Larga								
Mercado	Brasil				México			
Nivel de Confianza	95%	97.5%	99%	99.9%	95%	97.5%	99%	99.9%
Excepciones Esperadas	50	25	10	1	50	25	10	1
Método								
Delta-Normal								
Número de Excepciones	39	22	9	4	26	16	12	4
Estadístico de Kupiec	2.75	0.38	0.10	5.10	14.60	3.80	0.38	5.10
Valor Extremo								
Número de Excepciones	57	21	5	0	106	31	6	0
Estadístico de Kupiec	0.99	0.69	4.71	nd	50.67	1.37	1.89	nd
Simulación Histórica								
Número de Excepciones	5	3	1	0	18	8	3	0
Estadístico de Kupiec	69.07	31.77	13.48	nd	28.29	16.06	6.83	nd
Posición Corta								
Mercado	Brasil				México			
Nivel de Confianza	95%	97.5%	99%	99.9%	95%	97.5%	99%	99.9%
Excepciones Esperadas	50	25	10	1	50	25	10	1
Método								
Delta-Normal								
Número de Excepciones	20	10	3	1	30	19	12	3
Estadístico de Kupiec	24.29	11.90	6.83	0.00	9.77	1.61	0.38	2.60
Valor Extremo								
Número de Excepciones	127	23	3	0	179	46	3	0
Estadístico de Kupiec	89.19	0.17	6.83	nd	216.95	14.55	6.83	nd
Simulación Histórica								
Número de Excepciones	10	3	0	0	29	11	2	0
Estadístico de Kupiec	49.47	31.77	nd	nd	10.87	10.14	9.63	nd

Nota: La Tabla contiene el número de veces que el VaR estimado es excedido por los rendimientos diarios durante el periodo de tiempo de 02/01/01 a 31/12/04. Los resultados del estadístico de la prueba de Kupiec también son proporcionados. Este estadístico se distribuye como una variable Chi cuadrada con un grado de libertad. La hipótesis nula se rechaza cuando $LR > \chi^2_{(5\%)} = 3.84$.

Finalmente, analizando los resultados de la prueba de Kupiec se puede observar que el modelo delta-normal es ampliamente aceptado para la posición larga tomada en el mercado de Brasil para los niveles de confianza del 95%, 97.5% y 99%, mientras que para la posición corta solamente es aceptado para el nivel de confianza del 99.9%. Asimismo, la hipótesis nula es aceptada en el mercado de México para ambas posiciones financieras para los niveles de confianza del 97.5%, 99% y 99.9%, excepto para la posición larga para el nivel de confianza más alto. Por su parte, los resultados indican claramente el rechazo del modelo de simulación histórica para estimar adecuadamente las pérdidas potenciales para cualquier nivel de confianza y mercado. Este hecho es confirmado por los valores del estadístico de la razón de verosimilitud, puesto que son mayores al valor crítico de la distribución acumulada de la Chi cuadrada con un grado de libertad. Con respecto a la medida VaR basado en la TVE se puede observar de los resultados del estadístico que el modelo es válido para los niveles de confianza del 95% y 97.5% para la posición larga tomada en el mercado de Brasil, mientras que el modelo es confiable para la posición corta para el nivel de confianza del 97.5%. Para el caso del mercado de México, el modelo es aceptado únicamente para los niveles de confianza del 97.5% y 99% para la posición larga. Por ello el modelo basado en la TVE, a pesar de rechazar varias veces la hipótesis nula en ambos mercados, no sólo es altamente confiable para estimar el riesgo, sino también suficientes requerimientos de capital mínimos que evitaran colapsos financieros en los mercados emergentes.

Capítulo 5

Conclusiones

En esta investigación se ha demostrado el potencial de la teoría de valor extremo para cuantificar de manera más precisa las pérdidas o riesgo de las colas de la distribución de rendimientos de los mercados accionarios emergentes (IPC y BOVESPA) para altos niveles de confianza; resaltando el caso del mercado brasileño el cual se ha caracterizado por experimentar fluctuaciones más grandes y adyacentes que el mercado mexicano, aunado a su crecimiento explosivo y las altas tasas de inflación durante las últimas décadas. Los principales hallazgos se pueden resumir de la siguiente manera: en primer lugar, los resultados indican que las distribuciones de rendimientos de los dos mercados accionarios emergentes presentan propiedades de colas pesadas o gruesas como consecuencia del exceso de curtosis. Esto puede ser explicado por el efecto de las diversas crisis que han experimentado estas economías a través del tiempo. Este hecho también es sustentado por los valores negativos estimados del índice de la cola de la distribución de valor extremo generalizada, demostrando así que la distribución asintótica para rendimientos extremos se encuentra en el máximo dominio de atracción de la distribución de Fréchet consistente con la distribución de colas pesadas, comúnmente utilizada para modelar los rendimientos financieros reales. Asimismo, las colas derecha e izquierda de la distribución de rendimientos presentan diferentes características como consecuencia del sesgo o asimetría, razón por la que el grado del riesgo tiene un comportamiento diferente en cada país, principalmente en las economías emergentes donde los movimientos atípicos ocurren con mayor frecuencia como resultado de los cambios de regímenes en periodos de corto plazo.

En segundo lugar, los resultados empíricos demuestran claramente que el uso del cuantil de la distribución de valor extremo generalizada como medida de riesgo para el análisis del VaR y CVaR proporciona información más robusta del riesgo financiero que las medidas paramétricas convencionales para niveles de confianza del 99% y

99.9%, sustentado por los resultados del backtesting. Esto se debe a que la distribución de valor extremo generalizada explica mejor el comportamiento de la magnitud de los movimientos extremos capturados en las colas de la distribución de probabilidad. Por otra parte, la medida basada en la distribución empírica proporciona estimaciones más conservadoras del riesgo que la medida de valor extremo, pero sufre de varianza alta derivada del comportamiento discreto de los rendimientos que se encuentran fuera de las colas. Además, la medida de valor extremo tiene la ventaja de proporcionar mejor información del riesgo fuera de la muestra; es decir, para niveles de confianza de probabilidad más conservadores (99.9%); sin embargo, cabe destacar que las estimaciones del VaR y CVaR basados en la teoría de valor extremo son más conservadoras para las posiciones financieras tomadas en la Bolsa de Valores de Sao Paulo que en la Bolsa Mexicana de Valores. Pese a que la distribución de rendimientos del mercado accionario de México presenta propiedades de colas significativamente más pesadas o gruesas que la distribución de rendimientos del mercado accionario de Brasil. Un hecho que representa pérdidas potenciales más severas con alta probabilidad de ocurrencia. De esta manera, los resultados empíricos del análisis prueban las dos hipótesis planteadas en la presente tesis.

En un contexto univariado, las medidas VaR y CVaR aplicando la teoría de valor extremo pueden ser alternadas de manera efectiva en la administración del riesgo financiero, permitiendo así a los inversionistas tener una mejor perspectiva de la magnitud del verdadero riesgo derivado de las decisiones de inversión de compra o venta bajo incertidumbre en los mercados desarrollados y emergentes, principalmente para los inversionistas institucionales considerados, hoy en día, como las nuevas figuras del sistema financiero internacional como resultado de la desregulación financiera generalizada a nivel mundial. Estos nuevos actores que operan en el mercado de dinero, mercado de renta variable y mercados de productos derivados requerirán del desarrollo de la combinación de estrategias de operación para maximizar sus rendimientos, así como de nuevas metodologías o herramientas innovadoras que coadyuven a dar un mejor seguimiento sobre la sensibilidad de un portafolio de inversión, y un mejor control en el análisis del riesgo financiero, a fin de conservar el

régimen de inversión en el cual se comprometieron a operar. En este sentido, las medidas de valor extremo están llamadas a desempeñar un papel esencial en la nueva era del desarrollo de la administración de riesgos, puesto que el análisis del perfil del riesgo extremo no sólo se explica directamente en función de la volatilidad o desviación estándar.

Asimismo, el análisis del riesgo extremo tiene diferentes implicaciones económicas en el contexto de la regulación y supervisión bancaria. Desde la perspectiva natural de las autoridades, el uso de metodologías alternativas que permitan medir exactamente el riesgo de las colas de la distribución de rendimientos serán de gran utilidad para determinar suficientes niveles de requerimientos de capital durante periodos de crisis financieras, precisamente cuando las entidades bancarias necesitan una mayor liquidez para poder hacer frente a las pérdidas a fin de reducir la probabilidad de colapso en los sistemas financieros, en particular, en los mercados emergentes donde el comportamiento del riesgo percibido por estos agentes económicos es más severo y persistente que en los mercados industrializados. Sin embargo, la selección de medidas conservadoras para propósitos de regulación del riesgo de mercado conlleva a requerimientos de capital adicional que constituyen enormes cantidades de dinero inmovilizado en el proceso de la colocación de recursos, afectando la rentabilidad de las instituciones bancarias en términos del análisis de la relación rendimiento esperado y riesgo del portafolio. En este caso, las instituciones no reguladas tendrán mejores oportunidades de inversión al tomar posiciones de mercado riesgosas obteniendo premios más atractivos, puesto que los efectos de la regulación del riesgo ocasionan que el índice de Sharpe de las instituciones financieras reguladas sea más alto; es decir, afectan el problema de optimización intertemporal de los bancos (Sham, Yan y Pang, 2003).

Cabe reconocer que la teoría de valor extremo presenta algunas debilidades en la estimación del riesgo financiero como todo modelo de medición, mismas que pueden crear situaciones financieras peligrosas en las decisiones de inversiones internacionales. En este sentido, una de las principales debilidades que presenta el

modelo de valor extremo basado en el procedimiento de bloques máximos es que puede subestimar el riesgo en periodos de inestabilidad o turbulencia financiera, en donde varios rendimientos extremos importantes pueden quedar fuera de la muestra. La segunda limitación es que la aproximación estima el riesgo de manera individual al no capturar los efectos de la diversificación. Finalmente, la TVE no recoge la volatilidad estocástica exhibida por la mayoría de las series financieras, estimando el riesgo de manera estática, particularmente para análisis de horizontes de tiempo sobre una base de diez días en el que el nivel del VaR puede ser violado durante el periodo de inversión, por ejemplo, en el cuarto día.

Finalmente, las contribuciones de la presente tesis son relevantes desde el punto de vista académico, ya que los resultados alcanzados no sólo contribuyen a un mejor conocimiento sobre el comportamiento complejo de los mercados accionarios en la región de América Latina, sino también proporciona evidencia empírica sobre el potencial de la teoría de valor extremo para explicar el comportamiento asintótico de los rendimientos extremos durante periodos de crisis financieras o auges económicos. Al mismo tiempo, este estudio sobre medición del riesgo extremo es de vital importancia para los inversionistas y reguladores domésticos que le dan movilidad, operatividad, vigilancia y transparencia a los mercados financieros, dado que les proporciona herramientas sólidas que facilitan el monitoreo y análisis desde una perspectiva más clara y prudencial de las principales fuentes de volatilidad que afectan los resultados de las inversiones de portafolio; se promueve así una regulación eficiente que cumpla con su función de supervisar rigurosamente en materia de medición, seguimiento y control del riesgo de mercado, contribuyendo de esta manera a mantener y mejorar la seguridad en los sistemas financieros, primordialmente en los mercados emergentes.

En conclusión, este estudio abre nuevas líneas de investigación a futuro entre las cuales se mencionan las siguientes:

- 1) Extender el análisis a una estructura dependiente, proponiendo una aproximación multivariada que incorpore la correlación entre varios factores de riesgo,

particularmente de varios países a fin de analizar el potencial y limitaciones de la diversificación internacional.

- 2) Estudios empíricos comparativos sobre diferentes tipos de distribuciones de colas pesadas y procedimientos para analizar el comportamiento de los valores extremos, con la finalidad de obtener medidas de riesgo consistentes que permitan estimar pérdidas potenciales durante periodos de turbulencias financieras, mismas que puedan traducirse fácilmente en óptimos requerimientos de capital.
- 3) Estudios empíricos regionales comparativos sobre la aplicación de la TVE como herramienta complementaria en la medición del VaR y CVaR.
- 4) Análisis y desarrollo de la TVE para determinar la probabilidad de movimientos extremos futuros como medidas de alerta anticipada a crisis financieras.

Apéndices

Apéndice A: Demostración de las Propiedades de la Medida de Riesgo Coherente

Proposición 1 (monotonicidad no creciente). Dados los siguientes factores de riesgo $X_1, X_2 \in V$, $X_1 \leq X_2$ con $E[X_1] < \infty$ y $E[X_2] < \infty$, entonces la siguiente desigualdad es válida

$$\text{CVaR}_c(X_1) \geq \text{CVaR}_c(X_2).$$

Demostración. Sea $X_1 \leq X_2$, se obtiene que

$$\begin{aligned} \text{CVaR}_c(X_2) &= -E[X_2 | X_2 \leq \text{VaR}_c(X_2)] \\ &= -E[X_2 + \text{VaR}_c(X_2) | X_2 \leq \text{VaR}_c(X_2)] + \text{VaR}_c(X_2) \\ &= \frac{-E[(X_2 + \text{VaR}_c(X_2)) \mathbf{1}_{\{X_2 \leq \text{VaR}_c(X_2)\}}]}{P\{X_2 \leq \text{VaR}_c(X_2)\}} + \text{VaR}_c(X_2) \\ &= \frac{-E[(X_2 + \text{VaR}_c(X_2)) \mathbf{1}_{\{X_2 \leq \text{VaR}_c(X_2)\}} \mathbf{1}_{\{X_1 \leq \text{VaR}_c(X_1)\}}]}{c} \\ &\quad - \frac{E[(X_2 + \text{VaR}_c(X_2)) \mathbf{1}_{\{X_2 - \text{VaR}_c(X_2) \leq 0\}} \mathbf{1}_{\{X_1 \geq \text{VaR}_c(X_1)\}}]}{c} + \text{VaR}_c(X_2) \\ &\leq -\frac{E[(X_2 + \text{VaR}_c(X_2)) \mathbf{1}_{\{X_2 - \text{VaR}_c(X_2) \leq 0\}} \mathbf{1}_{\{X_1 \leq \text{VaR}_c(X_1)\}}]}{c} + \text{VaR}_c(X_2) \\ &\leq -\frac{E[(X_2 + \text{VaR}_c(X_2)) \mathbf{1}_{\{X_1 \leq \text{VaR}_c(X_1)\}}]}{P\{X_1 + \text{VaR}_c(X_1)\}} + \text{VaR}_c(X_2) \\ &= -E[X_2 + \text{VaR}_c(X_2) | X_1 \leq \text{VaR}_c(X_1)] + \text{VaR}_c(X_2) \\ &= -E[X_2 | X_1 \leq \text{VaR}_c(X_1)] \\ &\leq -E[X_1 | X_1 \leq \text{VaR}_c(X_1)] = \text{CVaR}_c(X_1) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la medida valor en riesgo condicional satisface la propiedad de monotonicidad no creciente.

Proposición 2 (subaditividad). Dados los siguientes factores de riesgo $X_1, X_2 \in V$, con $E[X_1] < \infty$ y $E[X_2] < \infty$, entonces se cumple la siguiente desigualdad

$$\text{CVaR}_c(X_1 + X_2) \leq \text{CVaR}_c(X_1) + \text{CVaR}_c(X_2).$$

Demostración.

$$\begin{aligned} E[X_1 | X_1 \leq -\text{VaR}_c(X_1)] &= E[X_1 + \text{VaR}_c(X_1) | X_1 \leq -\text{VaR}_c(X_1)] - \text{VaR}_c(X_1) \\ &= \frac{E[(X_1 + \text{VaR}_c(X_1)) \mathbf{1}_{\{X_1 \leq -\text{VaR}_c(X_1)\}}]}{P\{X_1 \leq -\text{VaR}_c(X_1)\}} - \text{VaR}_c(X_1) \\ &= \frac{E[(X_1 + \text{VaR}_c(X_1)) \mathbf{1}_{\{X_1 \leq -\text{VaR}_c(X_1)\}} \mathbf{1}_{\{X_1 + X_2 \leq -\text{VaR}_c(X_1 + X_2)\}}]}{c} \\ &\quad + \frac{E[(X_1 + \text{VaR}_c(X_1)) \mathbf{1}_{\{X_2 + \text{VaR}_c(X_2) < 0\}} \mathbf{1}_{\{X_1 + X_2 \geq -\text{VaR}_c(X_1 + X_2)\}}]}{c} - \text{VaR}_c(X_1) \\ &\leq \frac{E[(X_1 + \text{VaR}_c(X_1)) \mathbf{1}_{\{X_1 \leq -\text{VaR}_c(X_1)\}} \mathbf{1}_{\{X_1 + X_2 \leq -\text{VaR}_c(X_1 + X_2)\}}]}{c} - \text{VaR}_c(X_1) \\ &\leq \frac{E[(X_1 + \text{VaR}_c(X_1)) \mathbf{1}_{\{X_1 + X_2 \leq -\text{VaR}_c(X_1 + X_2)\}}]}{P\{X_1 + X_2 \leq -\text{VaR}_c(X_1 + X_2)\}} - \text{VaR}_c(X_1) \\ &= E[X_1 + \text{VaR}_c(X_1) | X_1 + X_2 \leq -\text{VaR}_c(X_1 + X_2)] - \text{VaR}_c(X_1) \\ &= E[X_1 | X_1 + X_2 \leq -\text{VaR}_c(X_1 + X_2)] \end{aligned}$$

Asimismo, por la simetría en las operaciones también se tiene que

$$E[X_2 | X_2 \leq -\text{VaR}_c(X_2)] \leq E[X_2 | X_1 + X_2 \leq -\text{VaR}_c(X_1 + X_2)].$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
 \text{CVaR}_c(X_1 + X_2) &= -E[X_1 + X_2 | X_1 + X_2 \leq -\text{VaR}_c(X_1 + X_2)] \\
 &= -E[X_1 | X_1 + X_2 \leq -\text{VaR}_c(X_1 + X_2)] - E[X_2 | X_1 + X_2 \leq -\text{VaR}_c(X_1 + X_2)] \\
 &\leq -E[X_1 | X_1 \leq -\text{VaR}_c(X_1)] - E[X_2 | X_2 \leq -\text{VaR}_c(X_2)] \\
 &= \text{CVaR}_c(X_1) + \text{CVaR}_c(X_2)
 \end{aligned}$$

Esto implica que la medida valor en riesgo condicional satisface la propiedad de subaditividad.

Proposición 3 (homogénea positiva). Dado el siguiente factor de riesgo $X \in V$, con $\lambda > 0$ y $E[X] < \infty$, entonces se dice que la medida valor en riesgo condicional es homogénea positiva. Es decir,

$$\text{CVaR}_c(\lambda X) = \lambda \text{CVaR}_c(X)$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
 \text{CVaR}_c(\lambda X) &= -E[\lambda X | \lambda X \leq \text{VaR}_c(\lambda X)] \\
 &= -E[\lambda X | \lambda X \leq \lambda \text{VaR}_c(X)] \\
 &= -E[\lambda X | X \leq \text{VaR}_c(X)] \\
 &= -\lambda E[X | X \leq \text{VaR}_c(X)] \\
 &= \lambda \text{CVaR}_c(X).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la medida valor en riesgo condicional es homogénea positiva.

Proposición 4 (Invarianza bajo translaciones). Dado el siguiente factor de riesgo $X \in V$, con $\alpha \in R$ y $E[X] < \infty$, entonces se dice que la medida valor en riesgo condicional es invariante bajo translaciones. Es decir,

$$\text{CVaR}_c(X + \alpha) = \text{CVaR}_c(X) - \alpha.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \text{CVaR}_c(X + \alpha) &= -E[X + \alpha | X + \alpha \leq \text{VaR}_c(X + \alpha)] \\ &= -E[X + \alpha | X + \alpha \leq \text{VaR}_c(X) + \alpha] \\ &= -E[X + \alpha | X \leq \text{VaR}_c(X)] \\ &= -E[X | X \leq \text{VaR}_c(X)] - E[\alpha | X \leq \text{VaR}_c(X)] \\ &= \text{CVaR}_c(X) - \alpha \end{aligned}$$

En consecuencia, la medida valor en riesgo condicional es invariante bajo translaciones, así como una medida de riesgo coherente.

Apéndice B: Segundas Derivadas Parciales de las Funciones Logarítmicas de Verosimilitud

Aplicando las condiciones necesarias de segundo orden a las funciones logarítmicas de verosimilitud (3.15) y (3.16) se tiene que

$$l(\alpha_n, \beta_n, \xi_n) = -m \log \alpha_n + \left(\frac{1}{\xi_n} - 1 \right) \sum_{i=1}^m \log \left(1 - \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right) - \sum_{i=1}^m \left(1 - \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{\frac{1}{\xi_n}} \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \beta_n^2} = \xi_n \left(\frac{\xi_n - 1}{\alpha_n^2} \right) \sum_{i=1}^m \left(1 - \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{-2} + \left(\frac{\xi_n - 1}{\alpha_n^2} \right) \sum_{i=1}^m \left(1 - \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{\frac{1}{\xi_n} - 2}$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha_n^2} = \frac{m}{\alpha_n^2} - 2 \left(\frac{1 - \xi_n}{\alpha_n^3} \right) \sum_{i=1}^m \left(1 - \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{-1} (r_{n,i} - \beta_n) - \xi_n \left(\frac{1 - \xi_n}{\alpha_n^4} \right) \sum_{i=1}^m \left(1 - \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{-2} (r_{n,i} - \beta_n)^2$$

$$+ \left(\frac{2}{\alpha_n^3} \right) \sum_{i=1}^m \left(1 - \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{\frac{1}{\xi_n} - 1} (r_{n,i} - \beta_n) + \left(\frac{\xi_n - 1}{\alpha_n^4} \right) \sum_{i=1}^m \left(1 - \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{\frac{1}{\xi_n} - 2} (r_{n,i} - \beta_n)^2$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \xi_n^2} = \left(\frac{2}{\xi_n^3} \right) \sum_{i=1}^m \log \left(1 - \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right) + 2 \left(\frac{1}{\alpha_n} \right) \left(\frac{1}{\xi_n^2} \right) \sum_{i=1}^m \left(1 - \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{-1} (r_{n,i} - \beta_n)$$

$$- \left(\frac{1}{\alpha_n^2} \right) \left(\frac{1}{\xi_n} - 1 \right) \sum_{i=1}^m \left(1 - \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{-2} (r_{n,i} - \beta_n)^2 - \left(\frac{1}{\xi_n^4} \right) \sum_{i=1}^m \left(1 - \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{\frac{1}{\xi_n}} \left(\log \left(1 - \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right) \right)^2$$

$$- 2 \left(\frac{1}{\alpha_n} \right) \left(\frac{1}{\xi_n^3} \right) \sum_{i=1}^m \left(1 - \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{\frac{1}{\xi_n} - 1} \log \left(1 - \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right) (r_{n,i} - \beta_n)$$

$$- 2 \left(\frac{1}{\alpha_n} \right) \left(\frac{1}{\xi_n^2} \right) \sum_{i=1}^m \left(1 - \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{\frac{1}{\xi_n} - 1} (r_{n,i} - \beta_n) - \left(\frac{2}{\xi_n^3} \right) \sum_{i=1}^m \left(1 - \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{\frac{1}{\xi_n}} \log \left(1 - \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)$$

$$- \left(\frac{1}{\alpha_n^2} \right) \left(\frac{1}{\xi_n} \right) \left(\frac{1}{\xi_n} - 1 \right) \sum_{i=1}^m \left(1 - \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{\frac{1}{\xi_n} - 2} (r_{n,i} - \beta_n)^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l}{\partial \beta_n \partial \alpha_n} &= \left(\frac{\xi_n - 1}{\alpha_n^2} \sum_{i=1}^m \left(1 - \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{-1} + \xi_n \left(\frac{\xi_n - 1}{\alpha_n^3} \sum_{i=1}^m \left(1 - \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{-2} \right) (r_{n,i} - \beta_n) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{\alpha_n^2} \sum_{i=1}^m \left(1 - \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{\frac{1}{\xi_n} - 1} + \left(\frac{\xi_n - 1}{\alpha_n^3} \sum_{i=1}^m \left(1 - \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{\frac{1}{\xi_n} - 2} \right) (r_{n,i} - \beta_n) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l}{\partial \beta_n \partial \xi_n} &= - \left(\frac{1}{\alpha_n} \sum_{i=1}^m \left(1 - \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{-1} + \left(\frac{1 - \xi_n}{\alpha_n^2} \sum_{i=1}^m \left(1 - \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{-2} \right) (r_{n,i} - \beta_n) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{\alpha_n} \right) \left(\frac{1}{\xi_n^2} \sum_{i=1}^m \left(1 - \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{\frac{1}{\xi_n} - 1} \log \left(1 - \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{\alpha_n^2} \right) \left(\frac{1}{\xi_n} - 1 \right) \sum_{i=1}^m \left(1 - \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{\frac{1}{\xi_n} - 2} (r_{n,i} - \beta_n) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l}{\partial \alpha_n \partial \xi_n} &= - \left(\frac{1}{\alpha_n^2} \sum_{i=1}^m \left(1 - \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{-1} (r_{n,i} - \beta_n) + \left(\frac{1 - \xi_n}{\alpha_n^3} \sum_{i=1}^m \left(1 - \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{-2} \right) (r_{n,i} - \beta_n)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{\alpha_n^2} \right) \left(\frac{1}{\xi_n^2} \sum_{i=1}^m \left(1 - \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{\frac{1}{\xi_n} - 1} \log \left(1 - \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right) \right) (r_{n,i} - \beta_n) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{\alpha_n^3} \right) \left(\frac{1}{\xi_n} - 1 \right) \sum_{i=1}^m \left(1 - \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{\frac{1}{\xi_n} - 2} (r_{n,i} - \beta_n)^2 \right) \end{aligned}$$

$$l(\alpha_n, \beta_n, \xi_n) = -m \log \alpha_n + \left(\frac{1}{\xi_n} - 1 \right) \sum_{i=1}^m \log \left(1 + \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right) - \sum_{i=1}^m \left(1 + \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{\frac{1}{\xi_n}} \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \beta_n^2} = \xi_n \left(\frac{\xi_n - 1}{\alpha_n^2} \right) \sum_{i=1}^m \left(1 + \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{-2} + \left(\frac{\xi_n - 1}{\alpha_n^2} \right) \sum_{i=1}^m \left(1 + \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{\frac{1}{\xi_n} - 2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l}{\partial \alpha_n^2} &= \frac{m}{\alpha_n^2} + 2 \left(\frac{1 - \xi_n}{\alpha_n^3} \right) \sum_{i=1}^m \left(1 + \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{-1} (r_{n,i} - \beta_n) + \xi_n \left(\frac{\xi_n - 1}{\alpha_n^4} \right) \sum_{i=1}^m \left(1 + \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{-2} (r_{n,i} - \beta_n)^2 \\ &\quad - \left(\frac{2}{\alpha_n^3} \right) \sum_{i=1}^m \left(1 + \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{\frac{1}{\xi_n} - 1} (r_{n,i} - \beta_n) + \left(\frac{\xi_n - 1}{\alpha_n^4} \right) \sum_{i=1}^m \left(1 + \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{\frac{1}{\xi_n} - 2} (r_{n,i} - \beta_n)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l}{\partial \xi_n^2} &= \left(\frac{2}{\xi_n^3} \right) \sum_{i=1}^m \log \left(1 + \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right) - 2 \left(\frac{1}{\alpha_n} \right) \left(\frac{1}{\xi_n^2} \right) \sum_{i=1}^m \left(1 + \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{-1} (r_{n,i} - \beta_n) \\ &\quad - \left(\frac{1}{\alpha_n^2} \right) \left(\frac{1}{\xi_n} - 1 \right) \sum_{i=1}^m \left(1 + \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{-2} (r_{n,i} - \beta_n)^2 - \left(\frac{1}{\xi_n^4} \right) \sum_{i=1}^m \left(1 + \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{\frac{1}{\xi_n}} \left(\log \left(1 + \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right) \right)^2 \\ &\quad + 2 \left(\frac{1}{\alpha_n} \right) \left(\frac{1}{\xi_n^3} \right) \sum_{i=1}^m \left(1 + \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{\frac{1}{\xi_n} - 1} \log \left(1 + \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right) (r_{n,i} - \beta_n) \\ &\quad + 2 \left(\frac{1}{\alpha_n} \right) \left(\frac{1}{\xi_n^2} \right) \sum_{i=1}^m \left(1 + \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{\frac{1}{\xi_n} - 1} (r_{n,i} - \beta_n) - \left(\frac{2}{\xi_n^3} \right) \sum_{i=1}^m \left(1 + \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{\frac{1}{\xi_n}} \log \left(1 + \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{\alpha_n^2} \right) \left(\frac{1}{\xi_n} \right) \left(\frac{1}{\xi_n} - 1 \right) \sum_{i=1}^m \left(1 + \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{\frac{1}{\xi_n} - 2} (r_{n,i} - \beta_n)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l}{\partial \beta_n \partial \alpha_n} &= - \left(\frac{\xi_n - 1}{\alpha_n^2} \right) \sum_{i=1}^m \left(1 + \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{-1} + \xi_n \left(\frac{\xi_n - 1}{\alpha_n^3} \right) \sum_{i=1}^m \left(1 + \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{-2} (r_{n,i} - \beta_n) \\ &\quad - \left(\frac{1}{\alpha_n^2} \right) \sum_{i=1}^m \left(1 + \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{\frac{1}{\xi_n} - 1} + \left(\frac{\xi_n - 1}{\alpha_n^3} \right) \sum_{i=1}^m \left(1 + \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{\frac{1}{\xi_n} - 2} (r_{n,i} - \beta_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l}{\partial \beta_n \partial \xi_n} &= \left(\frac{1}{\alpha_n} \right) \sum_{i=1}^m \left(1 + \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{-1} + \left(\frac{1 - \xi_n}{\alpha_n^2} \right) \sum_{i=1}^m \left(1 + \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{-2} (r_{n,i} - \beta_n) \\ &\quad - \left(\frac{1}{\alpha_n} \right) \left(\frac{1}{\xi_n^2} \right) \sum_{i=1}^m \left(1 + \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{\frac{1}{\xi_n} - 1} \log \left(1 + \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{\alpha_n^2} \right) \left(\frac{1}{\xi_n} - 1 \right) \sum_{i=1}^m \left(1 + \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{\frac{1}{\xi_n} - 2} (r_{n,i} - \beta_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l}{\partial \alpha_n \partial \xi_n} &= \left(\frac{1}{\alpha_n^2} \right) \sum_{i=1}^m \left(1 + \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{-1} (r_{n,i} - \beta_n) + \left(\frac{1 - \xi_n}{\alpha_n^3} \right) \sum_{i=1}^m \left(1 + \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{-2} (r_{n,i} - \beta_n)^2 \\ &\quad - \left(\frac{1}{\alpha_n^2} \right) \left(\frac{1}{\xi_n^2} \right) \sum_{i=1}^m \left(1 + \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{\frac{1}{\xi_n} - 1} \log \left(1 + \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right) (r_{n,i} - \beta_n) \\ &\quad + \left(\frac{1}{\alpha_n^3} \right) \left(\frac{1}{\xi_n} - 1 \right) \sum_{i=1}^m \left(1 + \xi_n \left(\frac{r_{n,i} - \beta_n}{\alpha_n} \right) \right)^{\frac{1}{\xi_n} - 2} (r_{n,i} - \beta_n)^2 \end{aligned}$$

Apéndice C: Subrutina de Estimación de Máxima Verosimilitud de los Parámetros de la Distribución de Valor Extremo Generalizada

int fn_mlegev()

```
{
    double d_escal,    d_forma,    d_localizacion,    // Parametros de la funcion de
densidad
        d_derivFEscala, d_derivFForma, d_derivFLocalizacion, // Derivadas parciales
de F con respecto a c/parametro

    DELA, DELG, DELU,

    DGG, DUA, DUG, DUU, E, F, FOLD,
    GAI, GG, GI, GIPQ, H, HE, HH, P, PA,
    PQ, PQG, PU, Q, QA, QU, R, RA, RATIO, RG, RU, SE,
    SH, SHE, SHH, SHHE, SMALL, SRF,
    AI, AIGI, AN, D, DAA, DAG,
    SY, SYE, SYHE, SYYE, TEMP1, TEMP2, XMAX, XMIN, Z, YE, Y;
int    MAXSR, I,    n_iteracion, n_evaluacion, NSR, ITYPE, KK,    PASS,
    n_resultado;
// Resultado de la función
char    s_salLoc[100], s_salEsc[100], s_salFma[100], s_salMVC[100], s_salRes[100];
FILE    *f_salLoc,    *f_salEsc,    *f_salFma,    *f_salMVC,    *f_salRes;

// Asignacion de archivos de salida

printf( s_salLoc, "%s/Salida/%s.loc",    s_pathApp, s_archSal );
printf( s_salEsc, "%s/Salida/%s.esc",    s_pathApp, s_archSal );
printf( s_salFma, "%s/Salida/%s.fma",    s_pathApp, s_archSal );

n_resultado = Inicializa( s_pathApp, s_archEnt );

if( n_resultado )
    return n_resultado;

//    n_maxIt es el numero maximo de iteraciones
//    MAXEV    es el numero maximo de evaluaciones para la funcion
//    SRF    es el factor de reduccion del paso
//    MAXSR    es el numero maximo de reducciones permitido por iteracion

SRF = 0.25;
MAXSR = 30;

//    SMALL es en numero pequeño usado para ajustar el parametro de forma y
eliminar un valor de cero
//    VLNEG es un numero grande negativo usado para inicializar la funcion
```

```

SMALL = 1.0e-3;

// Abrimos archivos para salida de datos
if( !(f_salLoc=fopen( s_salLoc, "w")) )
return 11;

// Encontramos el numero maximo y minimo de la muestra

for( I=0; I<6; I++ )
    d_matVarCov[I] = d_ZERO;

n_resultado = 10;

if( n_tamano<2 )
{
    for( I=0; I<3; I++ )
        d_parametro[I] = d_ZERO;

    return n_resultado;
}

XMIN = d_dato[0];
XMAX = d_dato[0];

for( I=1; I<n_tamano; I++ )
{
if( d_dato[I]<XMIN )
    XMIN = d_dato[I];

if( d_dato[I]>XMAX )
    XMAX = d_dato[I];
}

SMALL = 1.0e-5;

// Inicializacion de variables
// d_localizacion es el parametro de Localizacion      XI
// d_escalas es el parametro de Escala                ALPHA
// d_forma es el parametro de Forma                    KAPPA

n_resultado = 0;;

```

```

n_iteracion          = 0;
n_evaluacion = 0;
FOLD                 = d_VLNEG;
d_localizacion= d_parametro[0];
d_escalita          = d_parametro[1];
d_forma              = d_parametro[2];

if( d_escalita<=d_ZERO )
    d_escalita = d_ONE;

AN = (double)((float)n_tamano);

if( d_forma>d_ZERO )
    goto l_30;

if( XMIN<=d_localizacion )
    goto l_40;

Y = d_escalita / (XMIN - d_localizacion);

if( d_forma>Y )
    goto l_40;

// fprintf( f_salida, "%4d, %4d, %2.20f, %2.20f, %2.20f\n", n_iteracion, n_evaluacion,
d_localizacion*100, d_escalita*100, d_forma );
fprintf( f_salLoc, "%2.20f\n", d_localizacion );
fprintf( f_salEsc, "%2.20f\n", d_escalita );
fprintf( f_salFma, "%2.20f\n", d_forma );

d_forma = Y + SMALL;

if( d_forma>=d_ZERO )
    d_forma = d_HALF * Y;

goto l_40;

l_30:
if( XMAX<=d_localizacion )
    goto l_40;
Y = d_escalita / (XMAX - d_localizacion);

if( d_forma<Y )
    goto l_40;

```



```

        // fprintf( f_salida, "%4d $d %2.20f %2.20f %2.20f\n", n_iteracion, n_evaluacion,
d_localizacion, d_escal, d_forma );
        fprintf( f_salLoc, "%2.20f\n", d_localizacion );
        fprintf( f_salEsc, "%2.20f\n", d_escal );
        fprintf( f_salFma, "%2.20f\n", d_forma );

        d_forma = Y - SMALL;

        if( d_forma<=d_ZERO )
            d_forma = d_HALF * Y;

l_40:
        for( n_iteracion=0; n_iteracion<n_maxIt; n_iteracion++ )
        {

            NSR = 0;

l_50:
            if( n_evaluacion>=n_MAXEV )
            {
                n_resultado = 3;

                // fprintf( f_salida, "%4d %4d %2.20f %2.20f %2.20f\n\n", n_iteracion,
n_MAXEV, d_localizacion, d_escal, d_forma );
                fprintf( f_salLoc, "%2.20f\n", d_localizacion );
                fprintf( f_salEsc, "%2.20f\n", d_escal );
                fprintf( f_salFma, "%2.20f\n", d_forma );

                d_parametro[0] = d_localizacion;
                d_parametro[1] = d_escal;
                d_parametro[2] = d_forma;

                fclose( f_salLoc );
                fclose( f_salEsc );
                fclose( f_salFma );

                return n_resultado;
            }

            n_evaluacion = n_evaluacion + 1;

            AI = d_ONE / d_escal;
            GI = d_ONE / d_forma;
            GAI = d_forma * AI;
            AIGI = AI * GI;
            GG = d_ONE - d_forma;

```

```

SY = d_ZERO;
SE = d_ZERO;
SYE = d_ZERO;
SYYE = d_ZERO;
SH = d_ZERO;
SHE = d_ZERO;
SYHE = d_ZERO;
SHHE = d_ZERO;
SHH = d_ZERO;

```

```

for( I=0; I<n_tamano; I++ )
{
    Y = d_ONE - GAI * (d_dato[I] - d_localizacion);
    Z = -GI * log(Y);
    E = exp( -Z );
    H = d_ONE / Y;
    YE = Z * E;
    HE = H * E;
    HH = H * H;
    SY = SY + Z;
    SE = SE + E;
    SYE = SYE + YE;
    SYYE = SYYE + Z * YE;
    SH = SH + H;
    SHE = SHE + HE;

}

```

```

// F es el valor de la funcion

```

```

F = - AN * log(d_escalas) - GG * SY - SE;

```

```

// La funcion no se ha incrementado, se reduce el paso y se intenta nuevamente

```

```

if( F>FOLD )
    goto l_90;

```

```

// fprintf( f_salida, "%4d %4d %2.20f %2.20f %2.20f\n", n_iteracion,
n_evaluacion, d_localizacion, d_escalas, d_forma );
fprintf( f_salLoc, "%2.20f\n", d_localizacion );
fprintf( f_salEsc, "%2.20f\n", d_escalas );
fprintf( f_salFma, "%2.20f\n", d_forma );

```

```

if( NSR==MAXSR )
    goto l_80;

```

l_70:

```
NSR = NSR + 1;  
d_localizacion = d_localizacion - DELU;  
d_escalas = d_escalas - DELA;  
d_forma = d_forma - DELG;
```

```
DELU = SRF * DELU;  
DELA = SRF * DELA;  
DELG = SRF * DELG;
```

```
d_localizacion = d_localizacion + DELU;  
d_escalas = d_escalas + DELA;  
d_forma = d_forma + DELG;
```

```
if( d_escalas>(d_forma*(XMIN-d_localizacion)) &&  
d_escalas>(d_forma*(XMAX-d_localizacion)) && d_forma!=d_ZERO )  
    goto l_50;
```

```
// fprintf( f_salida, "%4d %4d %2.20f %2.20f %2.20f\n", n_iteracion,  
n_evaluacion, d_localizacion, d_escalas, d_forma );  
fprintf( f_salLoc, "%2.20f\n", d_localizacion );  
fprintf( f_salEsc, "%2.20f\n", d_escalas );  
fprintf( f_salFma, "%2.20f\n", d_forma );
```

```
if( NSR<MAXSR )  
    goto l_70;
```

l_80:

```
d_localizacion = d_localizacion - DELU;  
d_escalas = d_escalas - DELA;  
d_forma = d_forma - DELG;
```

```
// fprintf( f_salida, "%4d %4d %2.20f %2.20f %2.20f\n", n_iteracion,  
n_evaluacion, d_localizacion, d_escalas, d_forma );  
fprintf( f_salLoc, "%2.20f\n", d_localizacion );  
fprintf( f_salEsc, "%2.20f\n", d_escalas );  
fprintf( f_salFma, "%2.20f\n", d_forma );
```

```
if( ITYPE==1 )  
    goto l_100;
```

```
n_resultado = 4;
```

```
// fprintf( f_salida, "\n\n" );
```

```
d_parametro[0] = d_localizacion;  
d_parametro[1] = d_escalas;
```

```

d_parametro[2] = d_forma;

fclose( f_salLoc );
fclose( f_salEsc );
fclose( f_salFma );

return n_resultado;

l_90:
FOLD = F;
P  = AN - SE;
Q  = SHE - GG * SH;
R  = AN - SY + SYE;
PQ = P  + Q;
GIPQ = GI * PQ;

//    Primeras derivadas

d_derivFLocalizacion = -AI * Q;
d_derivFEscala = -AIGI * PQ;
d_derivFForma = -GI * (R - GIPQ);

PU = -AI * SHE;
PA = GI * PU + AIGI * SE;
QU = GG * AI * (SHHE + d_forma * SHH);
RU = AI * (SH - SHE + SYHE);
RA = GI * RU - AIGI * (AN - SE + SYE);
RG = GI * (SY - SYE + SYYE - d_escalas * RA);
QA = AI * Q + GI * (PU + QU);
PQG = GIPQ + d_escalas * (RA - GI * (PA + QA));

//    Menos la segunda derivada de la funcion

DUU = AI * QU;
DUA = AIGI * (PU + QU);
DAA = -AIGI * (AI * PQ - PA - QA);
DUG = GI * (RU - GI * (PU + QU));
DAG = -AIGI * (GIPQ - PQG);
DGG = GI * (RG - GI * (PQG + R - GIPQ - GIPQ));

//    Inversion de la matriz hessiana

for( KK=1; KK<4; KK++ )
{
    if( DUU<=d_ZERO )
        goto l_100;

    D  = d_ONE / DUU;

```

```

        TEMP1 = -DUA * D;

        if( KK>2 )
            TEMP1 = -TEMP1;

        TEMP2 = -DUG * D;

        if( KK>1 )
            TEMP2 = -TEMP2;

        DUU = DAA + TEMP1 * DUA;
        DUA = DAG + TEMP1 * DUG;
        DAA = DGG + TEMP2 * DUG;
        DUG = TEMP1;
        DAG = TEMP2;
        DGG = D;
    }

    ITYPE = 1;

    // fprintf( f_salida, "%4d %4d %2.20f %2.20f %2.20f\n", n_iteracion, n_evaluacion,
d_localizacion, d_escal, d_forma );
    fprintf( f_salLoc, "%2.20f\n", d_localizacion );
    fprintf( f_salEsc, "%2.20f\n", d_escal );
    fprintf( f_salFma, "%2.20f\n", d_forma );

    DELU = DUU * d_derivFLocalizacion + DUA * d_derivFEscala + DUG *
d_derivFForma;
    DELA = DUA * d_derivFLocalizacion + DAA * d_derivFEscala + DAG *
d_derivFForma;
    DELG = DUG * d_derivFLocalizacion + DAG * d_derivFEscala + DGG *
d_derivFForma;

    RATIO = max( fabs(DELU)/(d_pasoLocalizacion*d_escal), max(
fabs(DELA)/(d_pasoEscala*d_escal), fabs(DELG)/d_pasoForma ) );

    if( RATIO<d_ONE )
        goto l_110;

    RATIO = d_ONE / RATIO;
    DELU = DELU * RATIO;
    DELA = DELA * RATIO;
    DELG = DELG * RATIO;
    goto l_110;

l_100:
    ITYPE = 2;

```

```

// fprintf( f_salida, "%4d %4d %2.20f %2.20f %2.20f\n", n_iteracion, n_evaluacion,
d_localizacion, d_escal, d_forma );
    fprintf( f_salLoc, "%2.20f\n", d_localizacion );
    fprintf( f_salEsc, "%2.20f\n", d_escal );
    fprintf( f_salFma, "%2.20f\n", d_forma );

    D = fabs(d_VLNEG);
    TEMP1 = D;

    if( d_derivFLocalizacion<d_ZERO )
        TEMP1 = d_pasoLocalizacion / (fabs(d_derivFLocalizacion)*d_escal);

    TEMP2 = D;

    Y = D;

    if( d_derivFForma<d_ZERO )
        Y = d_pasoForma / fabs(d_derivFForma);

    RATIO = min( TEMP1, min( TEMP2, Y ) );
    DELU = RATIO * d_derivFLocalizacion * d_escal * d_escal;
    DELA = RATIO * d_derivFEscala * d_escal * d_escal;
    DELG = RATIO * d_derivFForma;

//     Ajuste de parametros
l_110:
    d_localizacion = d_localizacion + DELU;
    d_escal = d_escal + DELA;
    d_forma = d_forma + DELG;

    if( d_escal>(d_forma*(XMIN-d_localizacion)) &&
d_escal>(d_forma*(XMAX-d_localizacion)) && d_forma!=d_ZERO )
        goto l_130;

    for( NSR=0; NSR<MAXSR; NSR++ )
    {
        // fprintf( f_salida, "%4d %4d %2.20f %2.20f %2.20f\n", n_iteracion,
n_evaluacion, d_localizacion, d_escal, d_forma );
        fprintf( f_salLoc, "%2.20f\n", d_localizacion );
        fprintf( f_salEsc, "%2.20f\n", d_escal );
        fprintf( f_salFma, "%2.20f\n", d_forma );

        d_localizacion = d_localizacion - DELU;

```

```

        d_escal = d_escal - DELA;
        d_forma = d_forma - DELG;
        DELU = SRF * DELU;
        DELA = SRF * DELA;
        DELG = SRF * DELG;
        d_localizacion = d_localizacion + DELU;
        d_escal = d_escal + DELA;
        d_forma = d_forma + DELG;

        if( d_escal>(d_forma*(XMIN-d_localizacion)) &&
d_escal>(d_forma*(XMAX-d_localizacion)) && d_forma!=d_ZERO )
            goto l_140;
    }

    goto l_80;

//    Prueba de convergencia
l_130:
    if( fabs(DELU)>d_critLocalizacion*d_escal )
        goto l_140;

    if( fabs(DELA)>d_critEscala*d_escal )
        goto l_140;

    if( fabs(DELG)>d_critForma )
        goto l_140;

    // fprintf( f_salida, "%4d %4d %2.20f %2.20f %2.20f\n", n_iteracion,
n_evaluacion, d_localizacion, d_escal, d_forma );
    fprintf( f_salLoc, "%2.20f\n", d_localizacion );
    fprintf( f_salEsc, "%2.20f\n", d_escal );
    fprintf( f_salFma, "%2.20f\n", d_forma );

    sprintf( s_salMVC, "%s/Salida/%s.mvc", s_pathApp, s_archSal );

    if( !(f_salMVC=fopen( s_salMVC, "w")) )
        return 11;

    for( KK=0; KK<6; KK++ )
        fprintf( f_salMVC, "%2.20f\n", d_matVarCov[KK] );

```

```

    d_parametro[0] = d_localizacion;
    d_parametro[1] = d_escalas;
    d_parametro[2] = d_forma;
    sprintf( s_salRes, "%s/Salida/%s.par",      s_pathApp, s_archSal );

    if( !(f_salRes=fopen( s_salRes, "w")) )
        return 11;

    for( KK=0; KK<3; KK++ )
        fprintf( f_salRes, "%2.20f\n", d_parametro[KK] );

    fclose( f_salRes );
    fclose( f_salMVC );
    fclose( f_salLoc );
    fclose( f_salEsc );
    fclose( f_salFma );

    return n_resultado;

l_140:
    PASS = 0;
}

// No converge
n_resultado = 2;

// fprintf( f_salida, "%4d %4d %2.20f %2.20f %2.20f\n\n", n_maxIt, n_evaluacion,
d_localizacion, d_escalas, d_forma );
fprintf( f_salLoc, "%2.20f\n", d_localizacion );
fprintf( f_salEsc, "%2.20f\n", d_escalas );
fprintf( f_salFma, "%2.20f\n", d_forma );

fclose( f_salEsc );
fclose( f_salFma );

d_parametro[0] = d_localizacion;
d_parametro[1] = d_escalas;
d_parametro[2] = d_forma;

return n_resultado;

}

```


Apéndice D: Índice de Tablas

Tabla 4.1: Estadísticas Básicas para los Rendimientos Diarios de los Mercados Accionarios.....	135
Tabla 4.2: Estimadores de Máxima Verosimilitud del Modelo GARCH (1,1) basado en la distribución Normal.....	138
Tabla 4.3: Estimadores de Máxima Verosimilitud de la Distribución de Valor Extremo Generalizada para los Rendimientos Diarios Máximos y Mínimos de los Mercados Accionarios de Brasil y México.....	142
Tabla 4.4: Estimadores de Máxima Verosimilitud de la Distribución de Valor Extremo Generalizada para los Rendimientos Máximos y Mínimos sobre una base de Diez Días de los Mercados Accionarios de Brasil y México.....	145
Tabla 4.5: Prueba de la Hipótesis Nula para la Selección de la Distribución de los Rendimientos Basado en el Valor del Índice de la Cola.....	147
Tabla 4.6: Resultados Empíricos de las Medidas VaR y CVaR para Posiciones Lineales de los Rendimientos Diarios de los Mercados Accionarios de Brasil y México.....	152
Tabla 4.7: Resultados Empíricos de las Medidas VaR y CVaR para Posiciones Lineales de los Rendimientos Sobre una Base de Diez Días de los Mercados Accionarios de Brasil y México.....	155
Tabla 4.8: Resultados del Backtesting para los Modelos VaR para Diferentes Niveles de Confianza.....	158

Apéndice E: Índice de Gráficas

Gráfica 2.1: Rendimientos diarios del tipo de cambio peso/dólar y del Índice de Precios y Cotizaciones para el periodo del 2 de enero de 1990 al 31 de diciembre de 2002.....	56
Gráfica 2.2: Distribución de Pérdidas del Portafolio con Valor en Riesgo (VaR) y Valor en Riesgo Condicional (CVaR). Fuente: Rockafellar y Uryasev (2000).....	86
Gráfica 4.1: Niveles de los Precios de los Índices Accionarios de Brasil y México para el periodo del 2 de Enero de 1970 al 31 de Diciembre de 2004.....	133
Gráfica 4.2. Gráficos QQ para los rendimientos diarios de los índices accionarios de Brasil y México para el periodo del 2 de Enero de 1970 al 31 de Diciembre de 2004.....	136
Gráfica 4.3. Rendimientos de los Índices Accionarios de Brasil y México para el periodo del 2 de Enero de 1970 al 31 de Diciembre de 2004.....	137

Referencias

Abken, P. A. (2000). An empirical evaluation of value at risk by scenario simulation. *The Journal of Derivatives*, Summer, 12-29.

Acerbi, C., C. Nordio and C. Sirtori. (2001). Expected shortfall as a tool for financial risk management. Working Paper. (<http://www.gloriamundi.org/var/wps.html>).

Acerbi, C. (2002). Spectral measures of risk: A coherent representation of subjective risk aversion. *Journal of Banking & Finance*, 26, 1505-1518.

Acerbi, C. and D. Tasche. (2002). On coherence of expected shortfall. *Journal of Banking & Finance*, 26, 1487-1503.

Adam, M. and A. Szafarz. (1992). Speculative bubbles and financial markets, *Oxford Economic Papers*, 44, 626-640.

Alexander, C. O. and C. T. Leigh. (1997). On the covariance matrices used in value at risk models. *The Journal of Derivatives*, 4(3), 50-62.

Allen, S. (1997). Comparing and contrasting different approaches to computing value at risk. Risk Conference, New York, July.

Andreev, A. and A. Kanto. (2005). Conditional value at risk estimation using non-integer values degrees of freedom in student's t-distribution. *Journal of Risk*, 7(5), 55-61.

Artzner, P., F. Delbaen, J. M. Eber and D. Heath. (1997). Thinking coherently. *Risk*, November, 33-49.

Artzner, P., F. Delbaen, J. M. Eber, and D. Heath. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 9, 203-228.

Bali, T. G, and S. N. Netfci. (2001). Estimating the term structure of interest rate volatility in extreme values. *Journal of Fixed Income*, 10(4), 7-14.

Balkema, A. and L. de Haan. (1974). Residual lifetime at great age. *Annals of Probability*, 2, 792-804.

Barham, J. (2002). Devaluation, default, depression. *LatinFinance*, February, 23-25.

Barro, R., E. Fama, D. Fischer, A. Meltzer, R. Roll and L. Telser. (1989). Black Monday and the future of financial markets. Edited by R. Kamphuis Jr., R. Kormendi and J. Watson, Mid American Institute for Public Policy Research/Dow Jones-Irwin.

Basel Committee. (1988). International convergence of capital measurement and capital standards. Basel Committee on Banking and Supervision, Switzerland.

Basel Committee. (1992). Recent developments in international interbank relations. Basel Committee on Banking Supervision: Bank for International Settlements, Switzerland.

Basel Committee. (1996). Amendment to capital accord to incorporate market risks. Basel Committee on Banking and Supervision, Switzerland.

Basel Committee. (1996a). Supervisory framework for the use of backtesting in conjunction with the internal models approach to market risk capital requirements. Basel Committee on Banking and Supervision, Switzerland.

Basel Committee. (2001). Sound Practices for the Management and Supervision of Operation Risk. Basel Committee on Banking Supervision, December. (<http://www.bis.org>).

Basel Committee. (2002). The quantitative impact study for operational risk: overview of individual loss data and lessons learned. Risk Management Group of the Basel Committee on Banking Supervision, January, (<http://www.bis.org>).

Beder, T. (1995). VaR: seductive but dangerous. *Financial Analysis Journal*, 51, September-October, 12-24.

Beirlant, J., J. L. Teugels and P. Vynckier. (1996). Practical analysis of extreme values. Leuven University Press, Leuven.

Bera, A. K. and M. L. Higgins. (1993). A survey of arch models: properties, estimation and testing. *Journal of Economic Survey*, 7, 305-366.

Bernstein, P. L. (1996), The new religion of risk management. *Harvard Business Review*, March-April, 47-52.

Black, F. (1995). Hedging, speculation, and systemic risk. *The Journal of Derivatives*, 2, Summer, 6-8.

Black, F. and M. Scholes. (1973). The pricing of options of corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81, 637-659.

Blattberg, R. and N. Gonedes. (1974), A comparison of student and stable distributions as statistical models of stock prices. *Journal of Business*, 47, 244-280.

Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.

Bollerslev, T. (1987). A conditionally heteroskedastic time series model for speculative prices and rates return. *Review of Economics and Statistics*, 69, 542-547.

- Bollersllev, T., R. Y. Chou and K. Kroner. (1992). ARCH modeling in finance: a review of the theory and empirical evidence. *Journal of Econometrics*, 52, 5-59.
- Bollersllev, T., R. F. Engle and D. B. Nelson. (1994). ARCH models. In R. F. Engle and D. L. McFadden (Eds.), *Handbook of Econometrics IV*, Amsterdam: Elsevier Science, 2961-3038.
- Boness, A., A. Chen and S. Jatusipitak. (1974). Investigation of nonstationary prices. *Journal of Business*, 47, 518-537.
- Boothe, P. and D. Glassman. (1987). The statistical distribution of exchange rates. *Journal of International Economics*, 22, 297-319.
- Bortkiewicz, L. von. (1922). Variationsbreite und mittlerer fehler. *Sitzungsber. Berli. Math. Ges.* 21, 3-11.
- Boyle, P. P. (1977). Options: A Monte Carlo approach. *Journal of Financial Economics*, 4, 323-338.
- Boyle, P., M. Broadie and P. Glasserman. (1997). Monte Carlo methods for security pricing. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21, 1267-1321.
- Britten-Jones, M. and M. S. Schaefer (1999). Non-linear value at risk. *European Finance Review*, 2(2), 1-27.
- Broadie, M. and P. Glasserman. (1996). Estimating security prices using simulation. *Management Science*, 42, 269-285.
- Broadie, M., P. Glasserman and G. Jain. (1997). Enhanced Monte Carlo estimates for American option prices. *The Journal of Derivatives*, Fall, 22-44.
- Butler, J. S. and B. Schachter. (1998). Estimating value at risk with a precision measure by combining kernel estimation with historical simulation. *Review of Derivatives Research*, 1, 371-390.
- Cabello, A., R. de Jesús and E. Ortiz. (2006). Long-run inflation and exchange rate hedge of stocks in Brazil and Mexico, *Global Economy Journal*, 6(3), 1-29.
- Camerer, C. (1989). Bubbles and fads in asset prices. *Journal of Economic Surveys*, 3, 3-41.
- Castillo, E. (1989). *Extreme value theory in engineering*. Academic Press, Inc., San Diego, CA.
- Chen, N., R. Roll and S. Ross. (1986). Economic forces and the stock market, *Journal of Business*, 59, 386-403.

- Cho, D. and K. West. (1994). Predictive ability of several models of exchange rate volatility. NBER Technical Paper 152.
- Clelow, L., and A. Carverhill. (1994). On the simulation of contingent claims. *The Journal of Derivatives*, Winter, 66-74.
- Coles, S. (2001). An introduction to statistical modeling of extreme values. Springer-Verlag, London.
- Coles, S. (2004). The use and misuse of extreme value models in practice. In extreme values in finance, telecommunications, and the environment, Finkenstädt, B. and H. Rootzén, Eds., CRC/Chapman & Hall. Boca Raton, Chapter 2.
- Comisión Económica para América Latina y el Caribe. (1999). Hacia una nueva arquitectura financiera internacional. *Revista: EL Mercado de Valores*, Septiembre, 54-64.
- Corsetti, G., P. Pesenti and N. Roubini. (1999). What caused the Asian currency and financial crisis. *Japan and World Economy*, 11, 305-373.
- Crouhy, M., D. Galai and R. Mark. (2000). Risk management. McGraw-Hill, New York.
- Cutler, D., J. Poterba and L. Summers. (1989). What moves stock prices? *Journal of Portfolio Management*, Spring, 4-12.
- Da Silva, A. L. C. and B. V. de Melo Mendes. (2003). Value at risk and extreme returns in Asian stock markets. *International Journal of Business*, 8(1), 17-40.
- Danielsson, J. and C. de Vries. (1997). Tail index and quantile estimation with very high frequency data. *Journal of Empirical Finance*, 4, 241-257.
- Danielsson, J. and C. G. de Vries. (2000). Value at risk and extreme returns. *Annales d'Economic Statistique* 3, 73-85.
- Danielsson, J. (2002). The emperor has no clothes: limits to risk modeling. *Journal of Banking & Finance*, 26, 1273-1296.
- David, H. A. (1981). Order statistics 2nd edn., John Wiley and Sons.
- Davison, A. C. and R. L. Smith. (1990). Models for exceedences over high thresholds *Journal of Royal Statistical Society, Serie B*, 52, 393-442.
- Delbaen, F. (1998). Coherent risk measures on general probability spaces. Working Paper, ETH Zürich.
- Diebold, F. X. and J. A. Lopez. (1995). Modelling volatility dynamics. In K. Hoover (ed.), *Macroeconomics-Developments, Tensions and Prospects*, Boston: Kluwer, 427-472.

Dowd, K. (1998). *Beyond value at risk: the new science of risk management*. John Wiley & Sons, Chichester.

Dowd, K. (1999). Financial risk management. *Financial Analysts Journal*, July-August, 65-71.

Duffie, D. and J. Pan. (1997). An overview of value at risk. *Journal of Derivatives*, Spring, 7-49.

El-Jahel, L., W. Perraudin and P. Sellin. (1999). Value at risk for derivatives. *The Journal of Derivatives*, Spring, 7-26.

Embrechts, P. (1999). *Extreme value theory in finance and insurance*. Manuscript. Zurich, Switzerland: Department of Mathematics, ETH. Swiss Federal Technical University.

Embrechts, P., C. Küppelberg and T. Mikosch. (1997). *Modelling extremal events for insurance and finance*. Springer-Verlag, Heidelberg.

Embrechts, P., S. Resnick and G. Samorodnitsky. (1998). Living on the edge. *Risk* January, 96-100.

Embrechts, P., A. McNeil and D. Straumann. (2002). Correlation and dependency in risk management: properties and pitfalls. In M. A. H. Dempster (Ed.), *Risk management: value at risk and beyond*. Cambridge University Press, 176-223.

Enders, W. (2004). *Applied econometric time series*. John Wiley & Sons, Second Edition.

Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of UK inflation. *Econometrica*, 50, 987-1008.

Engle, R. F. and T. Bollerslev. (1986). Modelling the persistence of conditional variances. *Econometric Reviews*, 5, 1-50 and 81-87.

Engle, R. F. and J. Mezrich. (1995). Grappling with Garch. *Risk*, September, 112-117.

Fama, E. F. (1965). The behavior of stock market prices. *Journal of Business*, 38, 34-105.

Fernandez, V. (2003). Extreme value theory and value at risk. *Revista de Análisis Económico*, 18(1), 57-85.

Feuerverger, A. and A. C. Wong. (2000). Computation of value at risk for nonlinear portfolios. *Journal of Risk*, 3(1), 37-55.

- Fisher, R. A. and L. H. C., Tippett. (1928). Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. *Procs. Cambridge Philos. Soc.* 24, 180-190.
- Fréchet, M. (1927). Sur la loi de probabilité de l'écart maximum. *Ann. Soc. Polon. Math. Cracovie.* 6, 93-116.
- Frittelli, M. and E. Rosazza. (2002). Putting order in risk measures, *Journal of Banking & Finance*, 26, 1473-1486.
- Froot, A., D. S. Scharfstein and J. C. Stein. (1994). A framework for risk management, *Harvard Business Review*, November-December, 91-102.
- Galambos, J. (1987). *The asymptotic theory of extreme order statistics*, 2nd ed. Robert E. Krieger Publishing Company, Malabar, FL.
- Galanti, S. and A. Jung. (1997). Low-discrepancy sequences: Monte Carlo simulation of option prices, *The Journal of Derivative*, Fall, 63-83.
- Gencay, R. and F. Selcuk. (2004). Extreme value theory and value at risk: relative performance in emerging markets, *International Journal of Forecasting*, 20, 287-303.
- Gill, P. E., W. Murray and M. H. Wright. (1981). *Practical optimization*, Academic Press.
- Giot, P., and S. Laurent. (2003). Value at risk for long and short trading positions, *Journal of Applied Econometrics*, 18, 641-664.
- Glick, R., R. Moreno and M. Spiegel. (2001). Financial crisis in emerging markets: an introductory overview, In R. Glick, R. Moreno and M. Spiegel, eds. New York: Cambridge University Press. 1-32.
- Glosten, L. R., R. Jagannathan and D. E. Runkle. (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks, *Journal of Finance*, 48, 1779-1801.
- Gourieroux, C. (1997). *ARCH models and financial applications*, Berlin: Springer-Verlag.
- Gnedenko, B. V. (1943). Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire, *Annals of Mathematics.* 44, 423-453. Translated and Reprinted in *Breakthroughs in Statistics*, Vol. I, 1992, Eds. S. Kotz and N. L. Johnson, Springer-Verlag, 195-225.
- Goldie, C. M. and R. L. Smith. (1987). Slow variation with remainder: theory and applications, *Quarterly Journal of Mathematics*, Oxford 2nd Series, 38, 45-71.
- Grant, D., G. Vora, and D. Weeks. (1995). simulation and the early-exercise option problem, *Journal of Financial Engineering*, 5, 3, 211-227.

- Guermat, C. and R. Harris. (2002). Robust conditional variance estimation and value at risk, *Journal of Risk*, 4, 24-41.
- Gujarati, D. N. (1995). *Basic econometrics*, McGraw-Hill, Third edition.
- Gumbel, E. J. (1941). The return period of flood flows, *Ann. Math. Statist.* 12, 163-190.
- Gumbel, E. J. (1958). *Statistics of extremes*, Columbia University Press.
- Hamilton, J. (1994). *Time series analysis*, Princeton University Press, New York.
- Harris, R. D. F. and J. Shen. (2004). Estimation of VaR with bias-corrected forecasts of conditional volatility, *The Journal of Derivatives*, Summer, 10-20.
- Heath, D. (2000). Back to the future, Plenary Lecture at the First World Congress of the Bachelier Society, Paris, June.
- Hendricks, D. (1996). Evaluation of value at risk using historical data, *Federal Reserve Bank of New York Economic Policy Review*, Vol. 2, No. 1, 39-69.
- Hill, B. M. (1975). A simple general approach to inference about the tail of a distribution, *Annals of Statistics*, 3, 1163-1174.
- Ho, L. C., P. Burridge, J. Cadle and M. Theobald. (2000). Value at risk: applying the extreme value approach to Asian markets in the recent financial turmoil, *Pacific-Basin Finance Journal*, 8, 224-275.
- Hols, M. C. A. B., and C. G. de Vries. (1991). Limiting distribution of extremal exchange rate returns, *Journal of Applied Econometrics*, 6, 287-302.
- Hosking, J. R. M. (1985). Algorithm AS215: maximum-likelihood estimation of the parameters of the generated extreme – value distributions, *Applied Statistics*, 34, 301-310.
- Huisman, R., K. G. Koedijk and R. A. Pownall. (1998). VaR-x: fat tails in financial risk management, *The Journal of Risk*, Fall, 47-61.
- Hull, J. and A. White. (1998). Incorporating volatility updating into the historical simulation method for value at risk, *Journal of Risk*, 1(1), 5-19.
- Hull, J. and A. White. (1998). Value at risk when daily changes in market variables are not normally distributed, *The Journal of Derivatives*, Spring, 9-19.
- Hull, J. (2002). *Options, futures, and others derivatives*, Prentice Hall, Upper Saddle River, Fifth Edition.
- Ingersoll, J. (1987). *Theory of financial decision making*, Rowman & Littlefield, Savage.

- Inui, K. and M. Kijima. (2005). On the significance of expected shortfall as a coherent risk measure, *Journal of Banking and Finance*, 29, 853-864.
- Jackson, P., D. J. Maude and W. Perraudin. (1997). Bank capital and value at risk, *The Journal of Derivative*, Spring, 73-88.
- Jamshidian, F., and Y. Zhu. (1997). Scenario simulation model: theory and methodology, *Finance and Stochastics*, 1(1), 43-67.
- Jansen, D. W. and C. G. de Vries. (1991). On the frequency of large stock returns: putting booms and busts into perspective, *The Review of Economics and Statistics*, 73, 18-24.
- Jaschke, S. R. (2002). The Cornish-Fisher expansion in the context of delta-gamma normal approximations, *Journal of Risk*, 4, 33-52.
- Jenkinson, A. F. (1955). Distribution of the annual maximum (or minimum) values of meteorological elements, *Quarterly Journal of Royal Meteorological Society*, 81, 145-158.
- Jenkinson, A. F. (1969). Statistics of extremes, Technical Note, No. 98, World Meteorological Organization, Chapter 5, 183-227.
- Johansen, A. and D. Sornette. (1999). Critical crashes, *Risk*, January, 91-94.
- Jondeau E. and M. Rockinger. (2003). The tail behaviour of stock returns: emerging versus mature markets, *Journal of Empirical Finance*, 10(5), 559-581.
- Jorion P. and S. J. Khoury. (1997). Financial risk management, Blackwell Publishers, 1997, USA.
- Jorion, P. (1988). On jump processes in the foreign exchange and stock markets, *The Review Of Financial Studies*, 1, 427-445.
- Jorion, P. (2000). Value at risk: new benchmark for measuring derivatives risk, Irwin Professional Publishing.
- Jorion, P. (2005). Financial risk manager: Handbook, John Wiley & Sons, Inc. Third Edition
- Joy, C., P. Boyle, and Tan. (1996). Quasi-Monte Carlo methods in numerical finance, *Management Science*. Vol. 42, 6, 926-936.
- J. P. Morgan (1995). Riskmetrics – Technical Document, Third Edition, New York.
- Kijima, M. and M. Ohnishi. (1996). Portfolio selection problems via the bivariate characterization of stochastic dominance relations, *Mathematical Finance*, 6, 237-277.

- Kin, D. and S. Kon. (1994). Alternative model for the conditional heteroskedasticity of stock returns, *Journal of Business*, 67, 4, 563-598.
- Kinnison, R. R. (1985). *Applied extreme value statistics*, Macmillan Publishing Company, New York.
- Koedijk, K. G., M. M. A. Schafgans and C. G. de Vries. (1990). The tail index of exchange rate returns, *Journal of International Economics*, 29, 93-108.
- Kon, S. (1984). Models of stocks returns: A comparison, *Journal of Finance*, 39, 1, 147-163.
- Kotz, S. And S. Nadarajah. (2000). *Extreme value distributions: Theory and applications*, Imperial College Press. London.
- Krehbiel, T., and L. C. Adkins. (2005). Extreme daily changes in U. S. Dollar Inter-Bank Offer Rates, Working Paper: Department of Finance and Economics. Oklahoma State University.
- Kupiec, P. and J. O'Brien. (1995). Internal affairs, *Risk*, May, 43-47.
- Lawrence C. and G. Robinson (1995). Value at risk: Addressing liquidity and volatility risk, *Capital Market Strategies*, 7, November.
- Leadbetter, M. R., G. Lindgren and H. Rootzén. (1983). *Extremes and related properties of random sequences and processes*, Springer-Verlag, New York.
- Lintner, J. (1965). Security prices, risk and maximal gains from diversification, *Journal of Finance* 20, 587-615.
- Lo, A. (1999). The three P's of total risk management, *Financial Analyst Journal*, 55, 1, pp. 13-26.
- Longin, F. M. (1995). Optimal margins in future markets, *Proceedings, Ninth Chicago Board of Trade Conference on Futures and Options*, Bonn.
- Longin, F. M., (1996). The asymptotic distribution of extreme stock market returns, *Journal of Business*, 69, 383-408.
- Longin, F. M. (1997). The threshold effect in expected volatility: a model based on asymmetric information, *Review of Financial Studies*, 10, 837-869.
- Longin, F. M. (2000). From value at risk to stress testing: the extreme value approach, *Journal of Banking & Finance*, 24, 1097-1130.
- Longin, F. M. and B. Solnik. (2001). Extreme correlation of international equity markets, *Journal of Finance*, 5, 651-678.

Longin, F. M. (2001). Beyond the VaR, *The Journal of Derivatives*, Summer, 36-48.

López, F. (2006). Factores macroeconómicos y riesgo sistemático: modelos multifactoriales de los mercados de capitales del TLCAN. *Tesis Doctoral*. Universidad Nacional Autónoma de México. México.

Loretan, M. and P. C. Phillips, (1994). Testing the covariance stationary of heavy-tailed time series, *Journal of Empirical Finance*, 1, 211-248.

Macaulay, F. R. (1938). Some theoretical problems suggested by the movements of interest rates, bond yields, and stock prices in the United States since 1956. New York: National Bureau of Economic Research.

Macleod, A. J. (1989). Comment on maximum-likelihood estimation of the parameters of the generalized extreme-value distribution, *Applied Statistics*, 38, 198-199.

Maddala, G. S. (2001). *Introduction to econometrics*, John Wiley & Sons, New York.

Mahoney, J. M. (1996). Forecasting biases in value at risk estimations: evidence from foreign exchange and global equity portfolio, Federal Reserve Bank of New York, Mimeo.

Mandelbrot, B. (1963). The variation of certain speculative prices, *Journal of Business*, 36, 394-419.

Maritz, J. S. and A. H. Munro. (1967). On the use of the generalized extreme value distribution in estimating extreme percentiles, *Biometrics*, 23, 79-103.

Markowitz, H. M. (1952). Portfolio selection, *Journal of Finance*, 7, 77-91.

Markowitz, H. M. (1959). *Portfolio selection: efficient diversification of investments*, New York: John Wiley & Sons.

Mausser, H., and D. Rosen. (1999). Beyond VaR: from measuring risk to managing risk, *ALGO Research Quarterly*, 1, 2, 5-20.

McNeil, A. (1997). Estimating the tails of loss severity distributions using extreme value theory, *Astin Bulletin* 27, 117-137.

McNeil, A. (1999). *Extreme value theory for risk managers*, Internal Modelling and CAD II, Published by Risk Books, London, UK, 93-118.

McNeil, A. J. and R. Frey. (2000). Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach, *Journal of Empirical Finance*, 7, 271-300.

Mina, J. and A. Ulmer. (1999). Delta-gamma four ways. Working Paper RiskMetrics.

- Mises, R. von. (1954). La distribution de la plus grande de n valeurs, *Rev. Math. Union Interbalcanique*, 1, pp. 141-160 (Reproduced in selected papers of R. von Mises); *American Mathematical Society*, 2, 271-294.
- Mittnik, S. and S. T. Rachev. (1993). Modelling asset returns with alternative stable distributions, *Econometric Reviews*, 12(3), 261-230.
- Mittnik, S., and M. Paolella. (2000). Conditional density and value at risk prediction of asian currency exchange rates, *Journal of Forecasting*, 19, 313-333.
- Moix, P. Y. (2001). *The measurement of risk market*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Mood, A. M., F. A. Graybill and D. C. Boes. (1973). *Introduction to the theory of statistics*, Third Edition, McGraw-Hill, New York.
- Mossin, J. (1966). Equilibrium in a capital asset market, *Econometrica*, 768-783.
- Murtagh, B. A. and M. A. Saunders (1983). MINOS 5.0 user's guide, Report SOL 83-20, Department of Operations Research, Stanford University.
- Neftci, S. N. (2000). Value at risk calculations, extreme events, and tail estimation, *The Journal of Derivatives*, Spring, 23-37.
- Nelson, D. B. (1990). ARCH models as diffusion approximations, *Journal of Econometrics*, 45, 7-38.
- Orlean, A. (1989). Mimetic contagion and speculative bubbles, *Theory and Decision*, 27, 63-92.
- Orlean, A. (1995). Bayesian interactions and collective dynamics of opinion: heard behavior and mimetic contagion, *Journal of Economic Behavior & Organization*, 28, 257-274.
- Ortiz, E. (2000a). La inversión extranjera de portafolios en los mercados de dinero y capital de México y su impacto en la crisis mexicana, en Irma Manrique, Coord., *Arquitectura de la Crisis Financiera*. (México, D.F.: Miguel Angel Porrúa).
- Ortiz, E. (2007). *Finanzas y productos derivados, contratos adelantados, futuros, opciones y swaps*, libro (mimeo).
- Ortiz, E. y F. López. (2007). Patterns of cointegration in the NAFTA capital markets, *Emerging Market Letters*, 1(1), 84-96.
- Pichler, S. and K. Selitsch. (1999). A comparison of analytical VaR methodologies for portfolios that include options. Working Paper TU Wien.

- Pickands, J. (1975). Statistical inference using extreme order statistics, *Annals of Statistics*, 3, 119-131.
- Picoult, E. (1997). Calculating value at risk with Monte Carlo simulation, In Aran Aggarwal, ed., *Risk Management for Financial Institutions: Advances in Measurement and Control*. Risk Publications.
- Praetz, P. (1972). The distribution of share price changes, *Journal of Business*, 45, 49-55.
- Prescott, P. and A. T. Walden. (1980). Maximum likelihood estimation of the parameters generalized extreme value distribution, *Biometrika*, 67, 723-724.
- Prescott, P. and A. T. Walden. (1983). Maximum likelihood estimation of the parameters of the three-parameter generalized extreme value distribution from censored samples, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 16, 241-250.
- Pritsker, M. (1997). Evaluating value at risk methodologies: accuracy versus computational time, *Journal of Financial Service Research*, 12, 201-242.
- Pritsker, M. (1999). The hidden dangers of historical simulation, Mimeo, Federal Reserve Board, Washington, D. C.
- Quinn, K. (2001). The Newton Raphson algorithm for function optimization, Working Paper, University of Washington, October.
- Raymar, S. and M. Zwecher. (1997). A Monte Carlo valuation of American call options on the maximum of several stocks, *The Journal of Derivatives*, Fall, 7-23.
- Reiss, R. D. (1989). *Approximate Distributions of Order Statistics: With Applications to Nonparametric Statistics*, Springer, New York.
- Reiss, R. D. and M. Thomas. (1997). *Statistical analysis of extreme values with applications to insurance, finance, hydrology and other fields*, Birkhäuser Verlag, Basel, Switzerland.
- Resnick, S. I. (1987). *Extreme values, regular variation, and point processes*, Springer-Verlag, New York.
- Rockafellar, R. T. and S. Uryasev. (2000). Optimization of conditional value at risk, *Journal of Risk*, 2, 21-41.
- Rockafellar, R. T. and S. Uryasev. (2002). Conditional value at risk for general loss distributions, *Journal of Banking & Finance*, 26, 1443-1471.
- Rogers, L. and O. Zane. (1999). Saddle point approximations to option prices. *Annals of Applied Probability*, 9(2), 493-503.

- Ross, S. A. (1976). The arbitrage theory of asset pricing. *Journal of Economic Theory* 13, 341-360.
- Rouvinez, C. (1997). Going Greek with VaR. *Risk*, 10(2), 57-65.
- Sham, M. C., W. Yan and C. Y. Pang (2003). Market risk management of banks: implications from the accuracy of value at risk forecasts, *Journal of Forecasting*, 22, 23-33.
- Sharpe, W. F. (1963). A simplified model for portfolio analysis, *Management Science*, 9, No. 2, January, 277-293.
- Sharpe, W. F. (1964). Capital asset price: a theory of market equilibrium under conditions of risk, *Journal of Finance*, 19, 425-442.
- Sharpe, W. F., G. Alexander and J. Bailey (1999). *Investments*, Prentice Hall: New York.
- Shiller, R. (2000). *Irrational exuberance*, Princeton University Press.
- Smith, R. L. (1985). Maximum likelihood estimation in a class of non-singular cases, *Biometrika*, 72, 67-90.
- Smith, R. L. (1999). Measuring risk with extreme value theory, Working Paper, Department of Statistics, University of North Carolina at Chapel Hill.
- Sornette, D. and A. Johansen. (2001). Significance of log-periodic precursors to financial crashes, *Quantitative Finance*, 1 (4), 452-471.
- Sornette, D.Y. Malevergne and J. F. Muzy. (2003). What causes crashes?, *Risk*, February, 67-71.
- Stambaugh, F. (1996). Risk and value at risk, *European Management Journal*, 14, 6, pp. 612-621.
- Stein, C. (1981). Estimation of the mean of a multivariate normal distribution. *The Annals of Statistics*, 9(6), 1135-1151.
- Susmel, R. (2001), Extreme observations and diversification in Latin American emerging equity markets, *Journal of International Money and Finance*, 20, 971-986.
- Szegö, G. (2002). Measures of risk, *Journal of Banking & Finance*, 26, 1253-1272.
- Tucker, A. (1992). A reexamination of finite and infinite variance distributions as models of daily stock returns," *Journal of Business & Economic Statistics*, 10, 73-81.

Tucker, L and L. Pond. (1988). The probability distribution of foreign exchanges: tests of candidate processes, *The Review of Economics and Statistics*, 70, 4, 638-647.

Ventakaraman, S. (1997). Value at risk for mixture of normal distributions: the use of quasi-bayesian estimation technique, *Economic Perspectives*, Federal Reserve Bank of Chicago, March/April, pp. 2-13.

Vlaar, P. (2000). Value at risk models for Dutch bonds portfolios, *Journal of Banking and Finance*, 24, 131-154.

Volmar, U. (2002). Comparison of different methods for calculation of delta-gamma value at risk. Thesis in Mathematical Finance, University of Oxford.

Wirch, J. and M. Hardy. (1999). A synthesis of risk measures for capital adequacy, *Insurance: Mathematics and Economics*, 25, 337-347.

Yamai, Y. and T. Yoshiba. (2002a). On the validity of value at risk: comparative analysis with expected shortfall, *Monetary and Economic Studies*, Bank of Japan, 20, 1, 57-86.

Yamai, Y. and T. Yoshiba. (2002c). Comparative analyses of expected shortfall and value at risk (2): expected utility maximization and tail risk, *Monetary and Economic Studies*, Bank of Japan, 20, 2, 95-115.

Yamai, Y. and T. Yoshiba. (2002d). Comparative analyses of expected shortfall and value at risk (3): their validity under market stress. *Monetary and Economic Studies*, Bank of Japan, 20, 181-237.

Yamai, Y. and T. Yoshiba. (2005). Value at risk versus expected shortfall: a practical perspective. *Journal of Banking & Finance*, 29, 997-1015.

Yang, S. R. and B. W. Brorsen. (1995). Nolinear dynamics of daily foreign exchange rates. *Advances in Quantitative Finance and Accounting*, 3, 111-130.

Zangari, P. (1996). When is non-normality a problem? The case of 15 series from emerging markets. *RiskMetrics Monitor*, Fourth Quarter.

Zangari, P. (1996). An improved methodology for measuring VaR. *RiskMetrics Monitor*, Reuters, J. P. Morgan, Second Quarter.

Zangari, P. (1996a). A VaR methodology for portfolios that include options. *RiskMetrics*, First Quarter Monitor, 4-12.

Zangari, P. (1996b). How accurate is the delta-gamma methodology? *RiskMetrics*, Third Quarter Monitor, 12-29.