



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

---

PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN  
INGENIERIA

FACULTAD DE INGENIERIA

**“SIMULACIÓN DE YACIMIENTOS NATURALMENTE  
FRACTURADOS CON TRIPLE POROSIDAD”**

**T E S I S**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**MAESTRO EN INGENIERIA**

CAMPO DE CONOCIMIENTO - CAMPO DISCIPLINARIO

**P R E S E N T A :**

**ERIKA FABIOLA CORTES RUBIO**

TUTOR:

**DR. VÍCTOR HUGO ARANA**

2008



# ÍNDICE

RESUMEN.....	<i>i</i>
LISTA DE FIGURAS.....	<i>ii</i>
LISTA DE TABLAS.....	<i>iii</i>
CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN.....	1
CAPÍTULO 2. FORMULACIÓN MATEMÁTICA DEL PROBLEMA.....	6
2.1 Consideraciones Geológicas.....	6
2.1.1 Porosidad.....	6
2.1.2 Compresibilidad.....	7
2.1.3 Presión Capilar.....	9
2.1.4 Permeabilidad.....	11
2.2 Modelo Conceptual y Matemático.....	13
2.2.1 Modelo Conceptual.....	16
2.2.2 Modelo Matemático.....	19
2.2.2.1 Ecuaciones Diferenciales para el Medio Poroso 1.....	19
2.2.2.2 Ecuaciones Diferenciales para el Medio Poroso 2.....	20
2.2.2.3 Ecuaciones Diferenciales para el Medio Poroso 3.....	21
2.3 Condiciones Iniciales y de Frontera.....	23
2.3.1 Condiciones Iniciales.....	23
2.3.2 Condiciones de Frontera.....	25
CAPÍTULO 3. SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL PROBLEMA.....	26
3.1. Ecuaciones de Flujo en Diferencias Finitas.....	26

3.1.1. Ecuaciones para el Medio 1.....	26
3.1.2. Ecuaciones para el Medio 2.....	30
3.1.3. Ecuaciones para el Medio 3.....	31
3.2 Solución del Sistema de Ecuaciones.....	32
3.2.1 Método Iterativo de Newton-Raphson.....	32
3.2.2 Reducción Matricial del Sistema de Ecuaciones.....	40
3.2.3 Solución del Sistema Lineal de Ecuaciones.....	43
3.3 Implementación del Modelo Conceptual en el Simulador.....	47
<b>CAPÍTULO 4. VALIDACIÓN DEL MODELO.....</b>	<b>49</b>
4.1 Solución para el Flujo Radial Monofásico en un Medio.....	49
4.2 Solución para Flujo Radial Monofásico en Dos Medios.....	52
4.3 Solución Flujo Radial Monofásico en Tres Medios.....	54
4.4 Resultados de la Simulación de Flujo Monofásico en Uno, Dos y Tres Medios.....	57
<b>CAPÍTULO 5. RESULTADOS.....</b>	<b>60</b>
5.1 Caso 1. Simulación de un Sistema de Triple Porosidad por Medio del Modelo de Doble Porosidad .....	60
5.2 Caso 2. Simulación de Flujo Multifásico en un Sistema de Triple Porosidad .....	63
5.4 Caso 3. Simulación de Flujo Multifásico en un Sistema de Triple Porosidad .....	74
<b>CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES.....</b>	<b>81</b>
<b>NOMENCLATURA.....</b>	<b>83</b>
<b>REFERENCIAS.....</b>	<b>86</b>
<b>APÉNDICE A. OBTENCIÓN DE LAS ECUACIONES DE FLUJO     MULTIFÁSICO.....</b>	<b>88</b>

<b>APÉNDICE B. APROXIMACIÓN EN DIFERENCIAS FINITAS.....</b>	<b>92</b>
<b>APÉNDICE C. ECUACIONES Y DERIVADAS PARA UN MODELO DE TRIPLE POROSIDAD.....</b>	<b>97</b>

## RESUMEN

Aunque el modelado de los yacimientos naturalmente fracturados ha sido desarrollado a lo largo de más de cinco décadas, sigue y seguirá habiendo una intensa investigación para obtener un modelamiento práctico y robusto de este tipo de yacimientos. El desarrollo óptimo de un yacimiento naturalmente fracturado requiere de un entendimiento adecuado de la física del flujo en el yacimiento y de su implementación correcta en un simulador numérico de yacimientos. Algunos ajustes de historia realizados por medio de la simulación numérica han mostrado que la clásica formulación de doble porosidad utilizada desde finales de los sesentas, no siempre muestra buenos resultados. Cuando un yacimiento naturalmente fracturado presenta más de dos medios porosos afectando el flujo de fluidos, la formulación de doble porosidad no puede ser usada. Los medios deberán ser agrupados de alguna manera para reproducir dos medios y de esta forma predecir el comportamiento.

El objetivo del presente trabajo es presentar un modelo simple y práctico para simular numéricamente el flujo multifásico en yacimientos petroleros de triple porosidad, e incorporar el mismo en un simulador multifásico-multidimensional <sup>(11)</sup>, para llevarlo de doble a triple porosidad, incrementando así la versatilidad del mismo.

El algoritmo desarrollado en el presente trabajo es una extensión a flujo multifásico de los modelos propuestos por **Camacho y cols** <sup>(8)</sup> y por **Rodríguez y cols** <sup>(27)</sup>. Debido a que el modelo matemático es aplicable a cualquier medio poroso, los tres medios porosos que representan la triple porosidad pueden ser la combinación de varias escalas de fracturas, y/o vórgulos, y /o matrices. Se asume que el modelo de flujo pseudo-estacionario (modelo de **Warren y Root** <sup>35</sup>) que se utiliza, describe el flujo multifásico de fluidos en estos medios porosos. En este trabajo, el sistema más externo es considerado continuo y, por lo tanto, es el único que se encuentra conectado a los pozos productores.

Una vez establecidas las ecuaciones que describen el flujo multifásico en un sistema de triple porosidad y después de aplicar el método de Newton al sistema discretizado de ecuaciones no lineales, considerando un ordenamiento normal, se obtiene una estructura matricial tri-diagonal, la cual se reduce aplicando cíclicamente el complemento de Schur <sup>(40)</sup>, economizando tiempo y memoria de cómputo. El sistema matricial obtenido es similar al que se obtiene en el flujo multifásico de aceite, gas y agua en un yacimiento de una porosidad-una permeabilidad. El trabajo está estructurado de la manera siguiente: el capítulo uno presenta una introducción sobre el desarrollo y evolución de los modelos de simulación, el capítulo dos presenta la formulación matemática del modelo propuesto así como sus condiciones iniciales y de frontera, el capítulo tres presenta la solución numérica del problema y la implementación del modelo en un simulador multifásico y multidimensional, el capítulo cuatro presenta la validación del modelo usando la solución analítica publicada por **Camacho y cols** <sup>(8)</sup> y por **Rodríguez y cols** <sup>(27)</sup>, el capítulo cinco presenta la aplicación del modelo en tres casos sintéticos, y finalmente, el capítulo seis presenta las conclusiones del presente trabajo.

---

---

## CAPÍTULO 1

### INTRODUCCIÓN

La modelación de Yacimientos Naturalmente Fracturados (YNF) ha sido, desde la formulación propuesta por **Barenblat**<sup>4</sup>, un reto permanente para los investigadores involucrados en la explotación de yacimientos de este tipo. La descripción correcta de los YNF, junto con una descripción sensata de los procesos físicos del flujo de fluidos que se llevan a cabo, representan la base para obtener pronósticos de producción lo más cercanos a la realidad.

Desde los años 60s hasta la actualidad, han aparecido diversas formulaciones para conceptualizar un YNF. Las aproximaciones matemáticas desarrolladas para modelar el flujo de fluidos en yacimientos fracturados, se basan en aproximaciones continuas que consisten en: el establecimiento de un modelo conceptual, la incorporación de la información geométrica de un determinado sistema matriz-fractura, del establecimiento de ecuaciones de conservación de masa y energía para los dominios de la matriz y la fractura y, finalmente, de la solución del sistema de ecuaciones discretas no lineales.

Los formulaciones comúnmente utilizadas para modelar el flujo de fluidos en rocas fracturadas, incluyen: 1) Red de fracturas discretas, 2) Modelo de doble medio continuo, incluyendo doble y multiporosidad, doble permeabilidad ó, el método más general de "Múltiple Interacción Continua" (MINC)<sup>25</sup>, y 3) Método de Continuidad Efectiva (ECM), pasando por sistemas equivalentes y continuos, hasta la representación de fracturas mediante distribuciones fractales [**Diodato**<sup>10</sup>].

De los métodos anteriormente mencionados el más utilizado ha sido el de doble medio continuo, debido a que es menos demandante computacionalmente que otras aproximaciones. Básicamente los diferentes modelos pueden distinguirse por la forma como es considerado el almacenamiento y la continuidad de los fluidos.

Todas las formulaciones poseen ventajas y desventajas entre ellas, las cuales dependen de la aplicación en cuestión. En lo que respecta a la aplicación en ingeniería petrolera, la conceptualización que ha mostrado una mejor aplicación a escala de campo, ha sido la formulación de doble medio continuo [**Warren y Root**<sup>35</sup>]. Lo anterior no presupone que esta formulación represente correctamente todos los procesos dinámicos que se llevan a cabo en los YNF.

En general, un YNF ha sido conceptualizado como la interacción de dos medios o sistemas porosos. Un medio está representado por la matriz; es decir, la porción de la roca que "no presenta fracturas" y el otro medio está representado por las fracturas que intercambian fluidos de alguna manera con la matriz y que abstractamente coinciden en espacio y tiempo. Los bloques de matriz están rodeados de fracturas, no existe comunicación entre los bloques de matriz y la red de fracturas es continua.

En la simulación de los yacimientos fracturados, nos encontramos con el hecho de que los bloques de matriz pueden contener alrededor del 90% de la reserva total de aceite. El principal problema para la recuperación de aceite en un yacimiento fracturado es precisamente la extracción de aceite de estos bloques de matriz. Por lo anterior, es importante comprender los mecanismos que se llevan a cabo en los bloques de matriz y simularlos lo más precisamente posible [Tadjar <sup>21</sup>].

Algunos YNF muy probablemente presentan más de dos sistemas porosos. Sin embargo, debido a que no existen actualmente algoritmos para simular YNF con tres sistemas porosos de diferentes propiedades, de alguna manera se agrupan los sistemas identificados para seguir aplicando el modelo de doble porosidad y de esta manera realizar predicciones.

De acuerdo con la teoría de multi-porosidad [Aifantis <sup>2</sup>], cualquier medio que exhibe discontinuidades finitas en la porosidad, se considera que posee propiedades multi-porosidad, esto es, si un sistema no es homogéneo, entonces puede presentar dos o más porosidades.

Para poder establecer cual es el modelo más adecuado para representar a un yacimiento de hidrocarburos y obtener una exitosa predicción del flujo de fluidos en el yacimiento, es necesario definir las características de permeabilidad y porosidad de los tipos de roca que existen, ya que, como se mencionó anteriormente, los diferentes modelos se distinguen por la forma como es considerado el almacenamiento y la continuidad de los fluidos. Por ejemplo, el modelo de una porosidad-una permeabilidad, se aplica en general a yacimientos no fracturados con porosidad y permeabilidad uniformes. Un yacimiento fracturado con permeabilidad de matriz relativamente baja pero alto almacenamiento puede ser caracterizado por medio del modelo de doble porosidad-una permeabilidad. Un modelo comúnmente aceptado es el de doble porosidad-doble permeabilidad, en el cual, las porosidades y las permeabilidades de la matriz y de la fractura son significativamente diferentes y continuas.

Además del concepto tradicional de doble porosidad, diversos modelos de triple porosidad o triple continuidad han sido propuestos para describir el flujo a través de rocas fracturadas. En general, estos métodos se han enfocado en manejar las heterogeneidades de la matriz subdividiendo esta en dos o más subdominios, con diferentes propiedades para cada uno de los medios.

Actualmente también se han propuesto modelos multiporosidad-multipermeabilidad [Aifantis <sup>2</sup>] para representar diversos yacimientos fracturados con: permeabilidad moderada (modelo de triple porosidad-doble permeabilidad) o permeabilidad alta (modelo de triple porosidad-triple permeabilidad).

Entre los modelos multiporosidad-multipermeabilidad que se han publicado en la literatura se pueden mencionar los siguientes:

En 1985, **Pruess y Narasimhan** <sup>25</sup> desarrollaron un método de “Multiple Interacción Continua”, MINC, el cual manejaba el flujo transiente multifásico y multidimensional, tanto en las fracturas como en los bloques de matriz, por medio de una aproximación numérica. La suposición principal del método MINC es que las condiciones termodinámicas en la matriz dependen principalmente de la distancia entre esta y la fractura más cercana. En dicho método, el dominio de flujo podía ser particionado en elementos de volumen de tal forma que todas las interfases entre los elementos de volumen dentro de la matriz, fueran paralelos a la fractura más cercana. Refinando los bloques de matriz con base en la distancia a las fracturas, se tiene como resultado un patrón de elementos de volumen anidados. Cada elemento de volumen tiene un estado termodinámico asignado al mismo. El concepto básico del MINC de particionar los bloques de matriz de acuerdo a la distancia de las caras de la fractura puede extenderse a tamaños y formas irregulares.

Un modelo de triple porosidad-una permeabilidad fue propuesto por **Abdassah y Ershaghi** <sup>1</sup>. Estos autores consideraron un modelo de flujo no estacionario entre el sistema de fracturas, con dos tipos de bloques de matriz, y flujo primario solo a través del sistema de fracturas. Ellos consideraron flujo paralelo entre un sistema de fracturas, que tienen propiedades homogéneas, e interactúan con dos grupos de bloques de matriz separados, que tienen distintas permeabilidades y porosidades.

En 2002, **Camacho y cols** <sup>8</sup> presentaron un estudio para modelar porosidades secundarias, principalmente porosidad vugular, en yacimientos naturalmente fracturados. Presentaron soluciones para dos diferentes casos: cuando no existe flujo primario a través de los vúgulos, lo cual es una extensión del modelo de **Warren y Root** <sup>33</sup>, y para el caso en que el proceso de disolución ha creado un sistema interconectado de vúgulos. En ambos casos, existe una interacción entre la matriz, los vúgulos y el sistema de fracturas.

En 2004, **Wu, Y. S. y cols** <sup>37</sup>, presentaron un modelo conceptual de triple porosidad y triple permeabilidad, para simular los procesos de flujo en rocas fracturadas. Ellos conceptualizan el sistema matriz-fractura formado por una matriz y dos tipos de fracturas: fracturas grandes y fracturas pequeñas; y extienden el concepto de doble permeabilidad por medio de la adición de una conexión más (vía fracturas pequeñas), entre las fracturas grandes y los bloques de matriz.

En 2004, **Rodríguez, F. y cols** <sup>27</sup> presentaron una solución analítica para caracterizar la porosidad secundaria en yacimientos naturalmente fracturados. Ellos desarrollaron un modelo de triple porosidad anidada-una permeabilidad para el transiente de presión de un pozo produciendo en un yacimiento naturalmente fracturado. Se consideró un sistema de triple porosidad actuando a diferentes escalas: matriz, porosidad secundaria de pequeña y gran escala, donde el flujo del fluido a través de estos medios es en serie de la siguiente manera: la matriz intercambia fluidos con la porosidad secundaria de pequeña escala, la cual a su vez alimenta la porosidad secundaria de gran escala.

En 2006 Kang, Z. y cols <sup>16</sup>, presentaron e implementaron un modelo conceptual multi-continuo. El modelo conceptual, propuesto para investigar el flujo y desplazamiento multifásico a través de yacimientos vugulares naturalmente fracturados, se basa en la observación y análisis de datos geológicos. En este modelo conceptual, la roca vugular naturalmente fracturada es considerada un medio de triple continuidad compuesta por: (1) fracturas de gran escala, de alta permeabilidad y bien conectadas; (2) roca matriz de baja o nula permeabilidad; y (3) vúgulos o cavidades de varios tamaños. Los vúgulos pueden estar: (1) directamente conectados a las fracturas grandes, (2) indirectamente conectados a las fracturas grandes a través de las fracturas pequeñas o microfracturas, o (3) aislados de las fracturas grandes por la roca matriz.

En 2006, Tajdar y cols <sup>21</sup> utilizaron el modelo generalizado de doble porosidad denominado de "Múltiple Interacción continua, (MINC)" y lo implementaron en un simulador en paralelo para modelar el flujo de fluidos en matriz y en fractura. De acuerdo al modelo MINC, los bloques de matriz fueron discretizados en subdominios, tanto en dirección vertical como horizontal para ofrecer una precisión mayor del flujo transiente en los bloques de matriz. En dicho modelo se asumió la existencia de equilibrio termodinámico local dentro de cada medio a cualquier nivel de tiempo y, basándose en esa suposición de equilibrio local, definieron variables termodinámicas tales como: presión, saturaciones, concentraciones y temperatura.

En 2006 Yu-Shu y cols <sup>38</sup> desarrollaron un modelo conceptual de múltiple medio continuo y lo implementaron en un simulador de yacimientos tridimensional y trifásico utilizando el modelo generalizado de triple continuidad. El modelo conceptual consideraba las rocas vugulares fracturadas como un medio de triple o múltiple continuidad, constituido por: 1) fracturas de alta permeabilidad, 2) matriz de baja permeabilidad y 3) vúgulos de diversos tamaños. En dicho trabajo también proponen una metodología para el cálculo de la permeabilidad de los bloques que contienen vúgulos.

En 2007 Rubin <sup>30</sup> desarrolló un modelo de "Doble subdominio-Doble permeabilidad", para simular el drene gravitacional debido al flujo directo entre los bloques de matriz (continuidad capilar) y a la reinfiltración en la matriz de la fractura. Rubin aplicó su modelo en yacimientos fracturados con capa secundaria de gas.

De los trabajos anteriormente mencionados, es notable el esfuerzo realizado por tratar de comprender los fenómenos que gobiernan el flujo de fluidos en los yacimientos naturalmente fracturados. Con el fin de contribuir con dichos esfuerzos, el presente trabajo presenta un modelo conceptual para yacimientos que presentan triple porosidad. Los objetivos del presente trabajo son:

- 1) Desarrollar un modelo de triple porosidad-una permeabilidad, para simular numéricamente el flujo multifásico y multidimensional en yacimientos petroleros que presentan triple porosidad.
- 2) Validar el modelo desarrollado contra soluciones analíticas.

- 3) Implementar el modelo propuesto en un simulador trifásico, tridimensional, de doble porosidad.
- 4) Utilizar el simulador en casos de aplicación (sintéticos).

Una vez incorporado el modelo conceptual al simulador, éste presenta las características siguientes:

- Tres Dimensiones
- Totalmente implícito
- Tres Fases
- Triple Porosidad

En el modelo propuesto para ser implementado en el simulador, se considera un sistema compuesto por tres medios, en donde el medio uno posee propiedades bien definidas e interactúa con otros dos medios que poseen diferentes porosidades y permeabilidades. El medio uno se considera continuo, mientras que los medios dos y tres proporcionan almacenamiento pero no contribuyen con el transporte y flujo de los fluidos. Para el modelo propuesto, un sistema con triple porosidad está compuesto por tres medios: uno continuo y dos discontinuos anidados, similar a los modelos propuestos por **Camacho y cols**<sup>(8)</sup> y por **Rodríguez y cols**<sup>(27)</sup>.

El trabajo presente está estructurado de la manera siguiente:

- En una primera parte se presenta una introducción sobre el desarrollo y evolución de los modelos de simulación.
- En una segunda parte se establece la formulación matemática del problema y se asignan condiciones iniciales y de frontera.
- En una tercera parte se realiza la solución numérica del problema que consiste en convertir las ecuaciones diferenciales en ecuaciones en diferencias finitas, se aplica el método de Newton para generar un sistema algebraico de ecuaciones lineales, se realiza una reducción matricial del sistema de ecuaciones aplicando el método del "Complemento de Schur" y se resuelve el sistema de ecuaciones lineales mediante la aplicación de un algoritmo para la solución de matrices dispersas. En una tercera parte se incorpora el modelo conceptual a un simulador trifásico-tridimensional.
- En una cuarta parte se valida el modelo con soluciones analíticas.
- En una quinta parte se utiliza el simulador en casos prácticos.
- En una sexta parte se realizan las conclusiones del presente trabajo.

Finalmente cabe mencionar que aunque implícitamente el algoritmo presente algunas desventajas en el sentido de adquisición de información, también presenta valiosas ventajas: hay un mayor grado de libertad para poder realizar ajustes de historia en YNF con triple porosidad.

## CAPÍTULO 2

## FORMULACIÓN MATEMÁTICA DEL PROBLEMA

## 2.1 Consideraciones Geológicas

## 2.1.1 Porosidad

Las características petrofísicas de una roca carbonatada están controladas básicamente por dos redes de poros: una red de poros interparticular y una red de poros vugular. La *Porosidad Interparticular* puede definirse como el espacio poroso localizado entre las partículas de la roca, el cual no es significativamente mayor al tamaño propio de las partículas. La porosidad interparticular entre granos multicristalinos se denomina porosidad intergranular y entre partículas de cristal simple se denomina porosidad intercrystalina. La *Porosidad Vugular* puede definirse como ese espacio poroso de mayor o igual tamaño que las partículas de la roca y comúnmente se presenta como fracturas o grandes cavidades irregulares. Los vúgulos se encuentran interconectados generalmente de dos formas: (1) a través de redes de poros interparticulares (vúgulos separados), y (2) por contacto directo con otro vúgulo (vúgulos conectados), [Lucia<sup>20</sup>].

A la *Porosidad Interparticular* se le denomina porosidad primaria y es típico de las arenas y las calizas. A la *Porosidad Vugular* se le denomina porosidad secundaria o, cuando se refiere solo a vúgulos o fracturas, porosidad vugular o porosidad de fractura (figura 2.1).

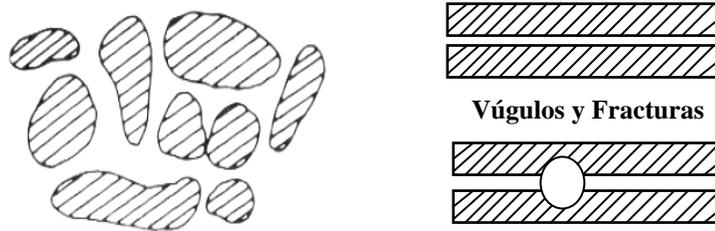


Figura 2.1 a) Espacio Poroso Consolidado (matriz), b) Representación Simplificada del Espacio Poroso de Vúgulos y Fracturas

La porosidad secundaria generalmente se encuentra en rocas compactas, quebradizas y con porosidad intergranular relativamente baja, tales como calizas compactas. La porosidad secundaria se origina normalmente por el fracturamiento de la roca, el agrietamiento y la disolución debido al agua circulante [Van Golf-Racht<sup>34</sup>].

Para estimar los parámetros petrofísicos por medio de examen visual en rocas con ausencia de vúgulos conectados, debe determinarse la cantidad de porosidad interparticular, el tamaño de partícula y la cantidad de porosidad vugular separada. También es importante determinar la presencia o ausencia de vúgulos conectados. Si

están presentes, la permeabilidad puede ser mucho más alta y las propiedades capilares muy diferentes a las que pudieran predecirse si no hubiera vóculos conectados [Lucia <sup>20</sup>]. Además de lo anterior, si existe presencia de vóculos conectados, el modelo a utilizar sería el de doble permeabilidad.

### Sistema de Múltiple Porosidad

En un yacimiento heterogéneo, la porosidad total ( $\phi_t$ ), es el resultado de la simple adición de las porosidades primarias y secundarias, esto es:

$$\phi_t = \phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_n. \quad (2.1)$$

Esta porosidad total es equivalente a la definición estática de *almacenamiento de roca o volumen poroso total*.

### Evaluación Cuantitativa de la Porosidad Secundaria

En general, la evaluación de la porosidad total se realiza por medio de un procedimiento indirecto (registros geofísicos), o por medio de un procedimiento directo (análisis de núcleos).

Los valores de porosidad secundaria pueden variar si lo que se encuentra presente son vóculos o fracturas. Resultados diferentes se esperan también cuando las fracturas son de un tipo o de otro; la más importante subdivisión de fracturas relaciona dos categorías: macrofracturas y microfracturas. Las macrofracturas son fracturas extendidas con grandes aperturas, las cuales se desarrollan a través de varias capas; mientras que las microfracturas (o fisuras), son fracturas con aperturas estrechas y de extensión limitada, a menudo limitadas a una sola capa [Van Golf <sup>34</sup>].

#### 2.1.2 Compresibilidad

En los yacimientos heterogéneos, la compresibilidad tiene un papel muy importante, especialmente si existe gran contraste entre la porosidad de cada uno de los medios.

La compresibilidad, se define en forma general, como el cambio de volumen,  $\Delta V$ , por unidad de volumen,  $V$ , para una presión aplicada,  $\Delta p$ ; esto es:

$$c = -\frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta p}. \quad (2.2)$$

Dependiendo del volumen que se utilice como referencia, la compresibilidad puede ser la propiedad de un cierto volumen de roca sometido a compresión, tal como el volumen total ( $V_b$ ), el volumen poroso ( $V_p$ ) o volumen de fluido ( $V_f$ ).

### Compresibilidad de la Roca

La compresibilidad de la roca en un yacimiento convencional se refiere al volumen total, de roca y poroso; esto es:

$$V_b = V_r + V_p \quad ; \quad (2.3)$$

$$V_p = V_r \cdot \phi$$

y se expresan por medio de su definición básica, como:

$$\text{Compresibilidad Total, } c_b = \frac{1}{V_b} \left( \frac{dV_b}{dp} \right)$$

$$\text{Compresibilidad de Roca, } c_r = \frac{1}{V_r} \left( \frac{dV_r}{dp} \right) ; \quad (2.4)$$

$$\text{Compresibilidad de Poro, } c_p = \frac{1}{V_p} \left( \frac{dV_p}{dp} \right)$$

En el caso de yacimientos heterogéneos, además de la porosidad primaria de la matriz, es necesario tomar en consideración la porosidad secundaria de las fracturas (f), cavernas (c) y vóculos (v). La compresibilidad de la roca se expresa entonces por medio de:

$$c_p = c_m + \phi_c c_c + \phi_f c_f + \phi_v c_v . \quad (2.5)$$

### Compresibilidad Total (roca y fluido)

La compresibilidad del sistema, incluyendo la roca y los fluidos que saturan los poros, puede expresarse como:

$$c_T = S_o c_o + S_w c_w + S_g c_g + c_p . \quad (2.6)$$

### 2.1.3 Presión Capilar

La presión capilar existe siempre que los poros están saturados con dos o más fases. En un sistema multifásico, la presión capilar es, por definición, la presión de la fase no mojante menos la presión de la fase mojante.

Ya que las fuerzas interfaciales, manifestadas como Presiones Capilares, son las mayores fuerzas dentro del volumen representativo del medio poroso, la presión capilar es una característica básica del sistema roca-fluido en el flujo multifásico. Entre los factores que afectan esta variable, se encuentran: la tensión interfacial entre los fluidos, la mojabilidad de la roca, la geometría del espacio poroso, así como la historia de saturaciones (drene o imbibición).

Para sistemas gas-aceite, la expresión para determinar la presión capilar está dada por:

$$P_{cgo}(S_g) = p_g - p_o \quad (2.7)$$

Para sistemas agua-aceite, la expresión para determinar la presión capilar está dada por:

$$P_{cwo}(S_w) = p_o - p_w \quad (2.8)$$

### Curvas de Presión Capilar

Si una roca del yacimiento está completamente saturada por la fase mojante, el desplazamiento de esta fase por medio de una fase no mojante, estará relacionado con la magnitud de la presión capilar y el correspondiente decremento de la saturación de la fase mojante. Este desplazamiento se conoce como *desplazamiento de drene*, y la relación entre la presión capilar y la saturación es conocida como *curva de presión capilar de drene*.

La presión capilar de imbibición se desarrolla cuando la roca del yacimiento está saturada con una fase no mojante, la cual debe ser desplazada por medio de una fase mojante. Para una distribución de poro convencional, la presión capilar de imbibición es aproximadamente la mitad en el orden de magnitud de la presión de drene y, por lo tanto, la curva mostrará una histéresis considerable entre los desplazamientos de *drene* e *imbibición* para una misma roca (figura 2.2).

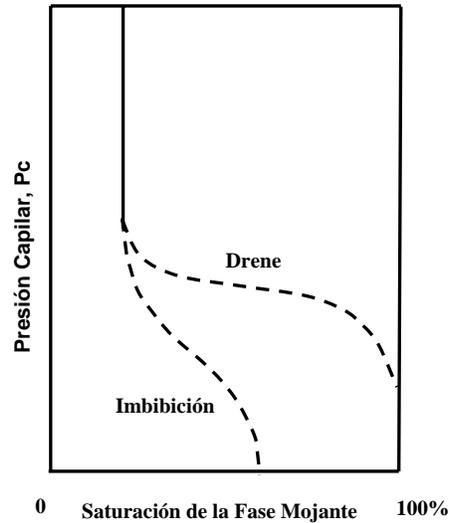


Figura 2.2 Curvas de Presión Capilar para los Procesos de Drene e Imbibición

La forma de la curva capilar del proceso de *drene* refleja la homogeneidad del tamaño de poro. Si en un gran intervalo de saturación de agua la  $P_c$  permanece constante (figura 2.3a), esto prueba la homogeneidad de la dimensión del poro y viceversa, la variación de  $P_c$  contra saturación (figura 2.3b), prueba la heterogeneidad de la dimensión del poro.

Por otro lado, solo las curvas de imbibición muestran la existencia de una saturación particular en la saturación de la fase no mojante (en el caso de agua-aceite,  $S_{ro}$ ). Esta saturación residual ocurre durante el desplazamiento de imbibición, cuando la fase no mojante queda atrapada llenando poros individuales o pequeños grupos de poros. Este entrapamiento es el resultado de la interrupción parcial de la comunicación entre varios poros que son evitados durante el desplazamiento de imbibición. Es físicamente evidente que hay mayores probabilidades de evitar más poros si existe una distribución mayor en el tamaño de poro, donde las variaciones de las dimensiones de los poros, reducen la inter-comunicación. Por lo tanto, ocurrirá una mayor saturación residual de la fase no mojante durante el desplazamiento de imbibición si la distribución de poro (no normal), es similar al caso de la figura 2.3b.

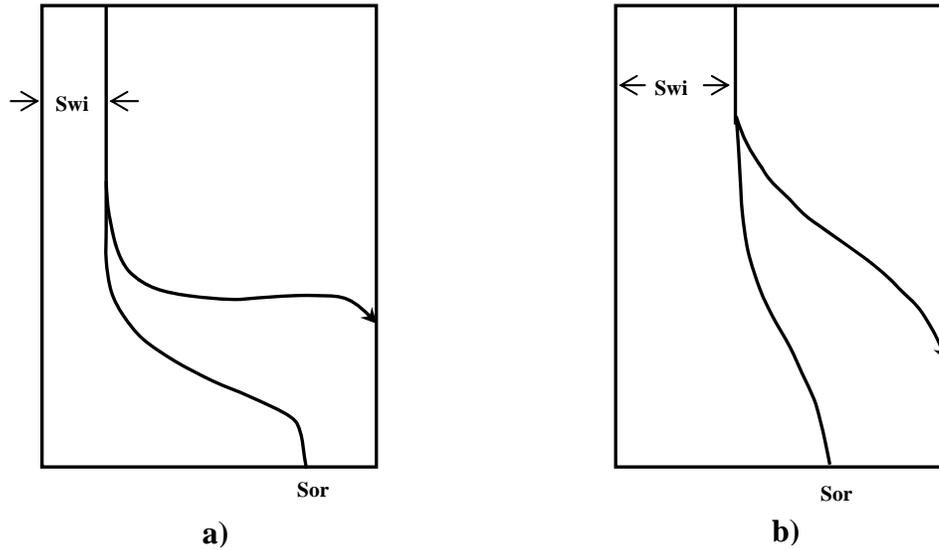


Figura 2.3. Curvas de Presión Capilar si el Promedio de los Diámetros de Poros es: a) Uniforme, b) Disperso

### 2.1.4 Permeabilidad

La permeabilidad es una propiedad del medio poroso y es una medida de la capacidad del medio para transmitir fluidos. En presencia de dos o más medios porosos, la permeabilidad puede definirse como: *permeabilidad del medio 1, permeabilidad del medio 2, ..., permeabilidad del medio n.*

#### Permeabilidad Relativa

Originalmente, la ley de Darcy se derivó para el flujo de una fase donde la permeabilidad del medio poroso al fluido es la permeabilidad absoluta del medio. Cuando dos o más fluidos fluyen simultáneamente a través del medio poroso, la ley de Darcy puede modificarse para calcular el gasto de cada fase. Estas modificaciones incluyen: el uso de la permeabilidad efectiva, el potencial y la viscosidad de cada fase. Con estas modificaciones, el gasto de aceite y agua en un sistema bifásico y en la dirección  $x$ , puede escribirse como:

$$q_{ox} = -\beta \frac{k_{ox} A_x}{\mu_o} \frac{d\Phi_o}{dx} \tag{2.9}$$

y,

$$q_{wx} = -\beta \frac{k_{wx} A_x}{\mu_w} \frac{d\Phi_w}{dx}, \quad (2.10)$$

donde las permeabilidades efectivas,  $k_{ox}$  y  $k_{wx}$  dependen de la saturación. La permeabilidad efectiva del aceite, puede expresarse como:

$$k_{ox} = k_x \left( \frac{k_{ox}}{k_x} \right) = k_x k_{row}, \quad (2.11)$$

donde  $k_x$  = permeabilidad absoluta del medio poroso en la dirección  $x$  y  $k_{row}$  = permeabilidad relativa al aceite. Similarmente para el agua, se tiene:

$$k_{wx} = k_x k_{rw}. \quad (2.12)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.11) y (2.12) en (2.9) y (2.10), se tiene:

$$q_{ox} = -\beta k_x A_x \frac{k_{row}}{\mu_o} \frac{d\Phi_o}{dx}, \quad (2.13)$$

y,

$$q_{wx} = -\beta k_x A_x \frac{k_{rw}}{\mu_w} \frac{d\Phi_w}{dx}. \quad (2.14)$$

Similarmente para el flujo de aceite y gas, se tiene:

$$q_{ox} = -\beta k_x A_x \frac{k_{rog}}{\mu_o} \frac{d\Phi_o}{dx} \quad (2.15)$$

y,

$$q_{gx} = -\beta k_x A_x \frac{k_{rg}}{\mu_g} \frac{d\Phi_g}{dx}. \quad (2.16)$$

Las figuras 2.4 y 2.5 muestran las permeabilidades relativas  $k_{row}$  y  $k_{rw}$  en función de la saturación,  $S_w$ , para un sistema agua-aceite y,  $k_{rog}$  y  $k_{rg}$  como funciones de la saturación,  $S_g$ , para un sistema gas-aceite, respectivamente. Nótese que la suma de

$k_{row}$  y  $k_{rw}$  para cualquier  $S_w$  (y  $k_{rog}$  y  $k_{rg}$  para cualquier  $S_g$ ), es siempre menor o igual a uno. Este último efecto es causado por la tensión interfacial entre los dos fluidos residentes.

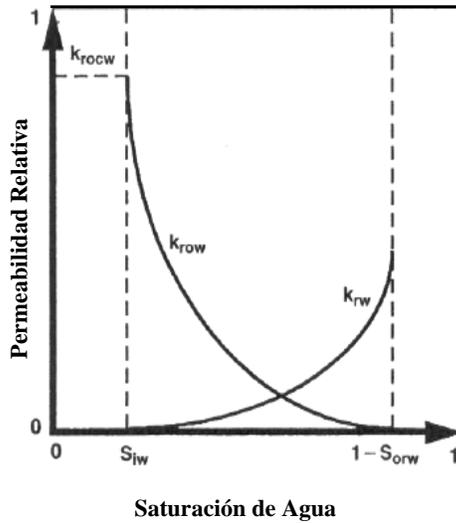


Figura 2.4 Permeabilidad Relativa de un Sistema Agua-Aceite (curvas de imbibición).

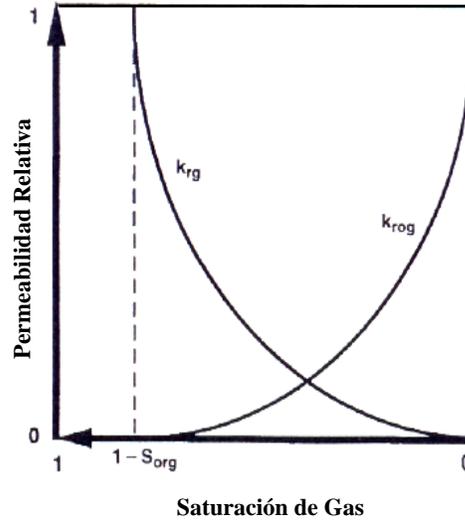


Figura 2.5 Permeabilidad Relativa de un Sistema Gas-Aceite (curvas de drene).

En resumen, para flujo multifásico en medios porosos, los gastos de flujo de las diferentes fases, están dados por:

$$q_{ox} = -\beta k_x A_x \frac{k_{ro}}{\mu_o} \frac{d\Phi_o}{dx}; \tag{2.17}$$

$$q_{gx} = -\beta k_x A_x \frac{k_{rg}}{\mu_g} \frac{d\Phi_g}{dx}; \tag{2.18}$$

$$q_{wx} = -\beta k_x A_x \frac{k_{rw}}{\mu_w} \frac{d\Phi_w}{dx}. \tag{2.19}$$

donde  $k_{rw}$ ,  $k_{rg}$  y  $k_{ro}$  son las permeabilidades relativas del agua, gas y aceite respectivamente, en un sistema trifásico.

## 2.2 Modelo Conceptual y Matemático

Para un mejor entendimiento del modelo de Triple Porosidad, es necesario definir el modelo de doble porosidad.

### Modelo de Doble Porosidad

El modelo de doble porosidad fue introducido por **Barenblatt y cols** <sup>4</sup>, y más tarde extendido por **Warren y Root** <sup>35</sup>. Los modelos de doble porosidad están basados en un medio de flujo idealizado (figura 2.6), que consta de una porosidad primaria creada por depositación y litificación, y una porosidad secundaria creada por fracturamiento [**Warren y Root** <sup>35</sup>]. La base de estos modelos es la observación de que la masa de roca no fracturada (matriz), presenta gran parte de la porosidad del medio (almacenamiento) pero poca permeabilidad (flujo). Por otro lado, la fractura puede presentar poco almacenamiento pero alta permeabilidad. La matriz y la fractura están idealizados como dos medios separados pero que se encuentran interactuando en espacio y tiempo, donde la transferencia de fluidos ocurre de acuerdo al potencial del fluido entre los dos medios.

En el modelo de doble porosidad, un yacimiento fracturado se concibe formado por dos sistemas: uno de fracturas, que constituye un medio continuo; y un sistema de bloques de matriz, que constituye un medio discontinuo. Adicionalmente se realizan las suposiciones siguientes con respecto a la estructura del yacimiento y a la formulación matemática.

1. El sistema continuo de fracturas proporciona la trayectoria principal de flujo del fluido en el yacimiento. El fluido que es desplazado de los bloques de matriz fluye cerca de la interfase matriz-fractura, y entonces fluye a través del sistema de fracturas hacia el pozo. Lo anterior significa que los pozos se encuentran ubicados únicamente en el sistema de fracturas.
2. La ley de Darcy es aplicable para describir el flujo multifásico en la fractura.
3. Los sistemas de fracturas y de bloques de matriz ocupan una misma malla computacional, y por lo tanto, para cada conjunto de soluciones para el sistema de fracturas, se obtiene un conjunto de soluciones para el sistema de bloques de matriz.

La esencia de esta aproximación es que en el medio poroso fracturado, las fracturas se caracterizan por tener mayor difusividad (de aquí los pequeños tiempos de respuesta), que la roca matriz. Por lo tanto, la respuesta "temprana" del sistema es controlada por las fracturas, mientras que la respuesta "tardía", es influenciada por la matriz.

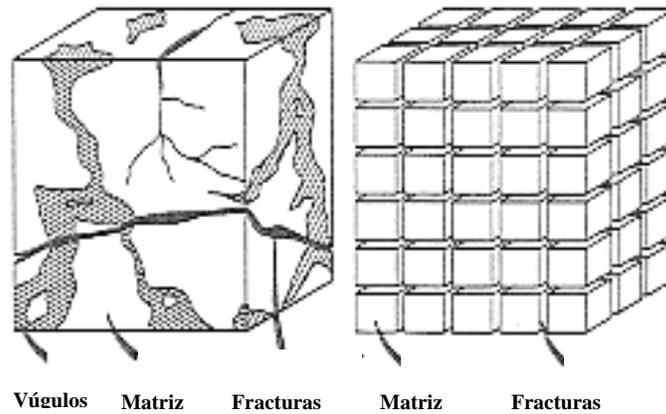


Figura 2.6 Idealización de un Yacimiento Naturalmente Fracturado (Modelo de Warren y Root)

### Modelo de Triple Porosidad

Una vez definido el modelo de doble porosidad, considérese ahora un sistema donde el medio uno tiene propiedades homogéneas e interactúa con otros dos medios separados, que tienen diferentes porosidades y permeabilidades (figura 2.7).

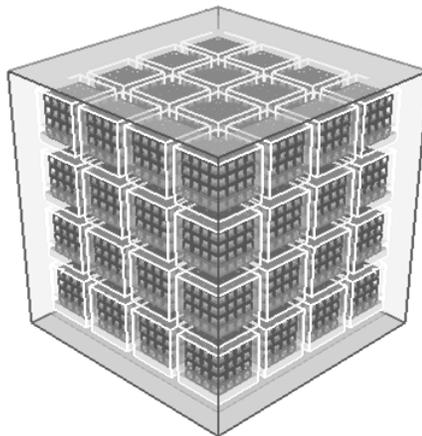


Figura 2.7 Idealización de un Sistema de Triple Porosidad <sup>(11)</sup>

Este sistema se refiere como un sistema de triple porosidad y es una representación más realista de los yacimientos fracturados que el modelo tradicional de doble porosidad.

### 2.2.1 Modelo Conceptual

Para poder establecer cual es el modelo más adecuado para representar a un yacimiento en particular y de esta forma obtener una predicción exitosa del flujo de fluidos en el yacimiento, es necesario definir las características de permeabilidad y porosidad del tipo de roca en particular, ya que los diferentes modelos se distinguen por la forma como consideran el almacenamiento y la continuidad de los fluidos. Por ejemplo, el modelo de una porosidad-una permeabilidad (figura 2.8), se aplica en general a yacimientos no fracturados. Un yacimiento fracturado que presenta dos diferentes porosidades, de las cuales solo una de ellas es continua; esto es, contribuye con el transporte y flujo de los fluidos, puede caracterizarse por medio del modelo de doble porosidad-una permeabilidad (figura 2.9). Un modelo comúnmente aceptado es el de doble porosidad-doble permeabilidad (figura 2.10), en el cual, existen dos porosidades y ambas son continuas. Finalmente, se ha propuesto un modelo multiporosidad-multipermeabilidad en la literatura [Aifantis<sup>2</sup>], para representar diversos yacimientos fracturados con: permeabilidad moderada (modelo de triple porosidad-doble permeabilidad, figura 2.11) o permeabilidad alta (modelo de triple porosidad-triple permeabilidad, figura 2.12).

En el modelo propuesto para la construcción del simulador se considera un sistema compuesto por tres medios. El flujo de fluidos entre estos tres medios es en serie; esto es, el medio tres intercambia fluidos con el medio dos, el cual a su vez intercambia fluidos con el medio uno. El medio uno se considera continuo, mientras que los medios dos y tres proporcionan almacenamiento pero no contribuyen con el transporte y flujo de los fluidos (figura 2.13). Básicamente, el modelo propuesto toma las ideas planteadas por Camacho y cols<sup>(8)</sup> y por Rodríguez y cols<sup>(27)</sup> y las extiende a flujo multifásico.

Para el modelo propuesto, un sistema con triple porosidad puede estar compuesto por tres diferentes sistemas porosos con diferentes propiedades petrofísicas, que afectarán de alguna manera el flujo de fluidos dentro del yacimiento. En la tabla 2.1 se presentan las posibles configuraciones de un sistema de triple porosidad.

A diferencia del modelo MINC<sup>(25)</sup> que considera que las diferentes porosidades están ordenadas en serie y en sentido creciente, donde la porosidad menor ( $\phi_1$ ), se encuentra en contacto con una porosidad mayor ( $\phi_2$ ) y así sucesivamente, de forma tal que  $\phi_{(i)} < \phi_{(i+1)}$ ; en el modelo propuesto las porosidades no tienen un ordenamiento; esto es,  $\phi_1$  puede estar en contacto con  $\phi_3$  o con cualquier otra porosidad que integre el sistema, con la única restricción de que la transferencia de fluidos entre los medios sea en serie. Lo anterior se hizo considerando que un YNF con triple porosidad puede estar compuesto por fracturas, vórgulos y matriz, o también por fracturas grandes, fracturas pequeñas y matriz.

**Tabla 2.1 Posibles Configuraciones de un sistema de Triple Porosidad**

Sistema 1	Sistema 2	Sistema 3
$F$	$f$	$m$
$F$	$m$	$v$
$F$	$m$	$m$

donde:

- $F$  = fracturas grandes
- $f$  = micro fracturas
- $v$  = vóculos
- $m$  = matriz

Esto es, un YNF con triple porosidad puede estar compuesto por fracturas grandes (sistema 1), fracturas pequeñas (sistema 2) y matriz (sistema 3); o bien por fracturas (sistema 1), matriz (sistema 2) y vóculos (sistema 3), etc.

En el trabajo presente se supone que un sistema multifásico isotérmico en un yacimiento naturalmente fracturado está compuesto de tres fases: aceite, gas y agua. Se considera que cada fase fluye en respuesta a las fuerzas de presión, gravitacionales y capilares, de acuerdo a la ley de Darcy.

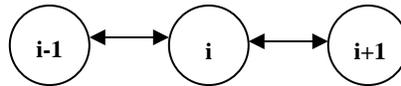


Figura 2.8 Representación Gráfica del Modelo de Una Porosidad – Una Permeabilidad.

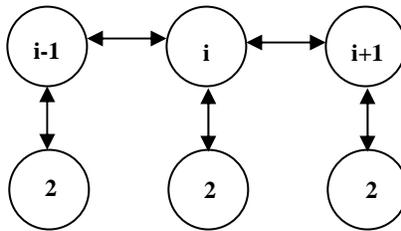


Figura 2.9 Representación Gráfica del Modelo de Doble Porosidad – Una Permeabilidad.

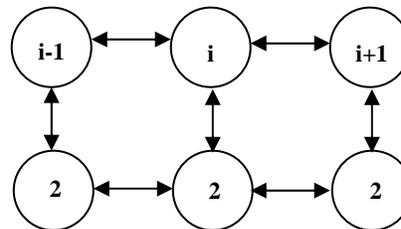


Figura 2.10 Representación Gráfica del Modelo de Doble Porosidad – Doble Permeabilidad.

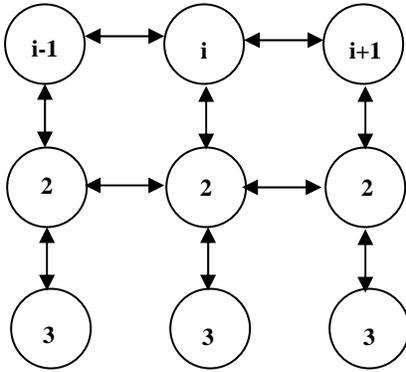


Figura 2.11 Representación Gráfica del Modelo de Triple Porosidad – Doble Permeabilidad.

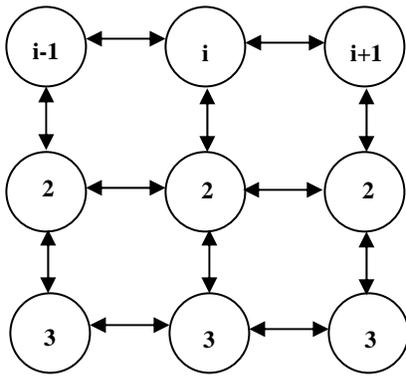


Figura 2.12 Representación Gráfica del Modelo de Triple Porosidad – Triple Permeabilidad.

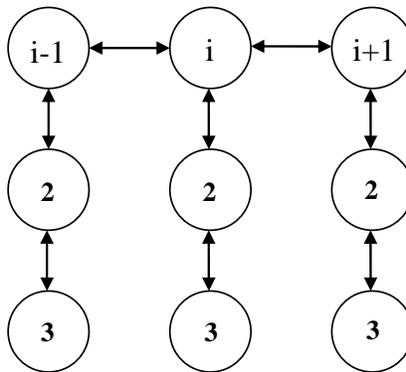


Figura 2.13 Representación Gráfica del Modelo Utilizado en el Presente Trabajo (Triple Porosidad – Una Permeabilidad).

### 2.2.2 Modelo Matemático

Las ecuaciones que describen el flujo trifásico en un yacimiento naturalmente fracturado se desarrollan en el Apéndice A, y comprenden el conjunto siguiente de ecuaciones en cada uno de los medios: medio 1, medio 2 y medio 3.

#### 2.2.2.1 Ecuaciones Diferenciales para el Medio Poroso 1

##### *Ecuaciones de Flujo*

La descripción del flujo de fluidos en un medio poroso matemáticamente se modela a través de ecuaciones que dominan los principios de conservación de masa, de cantidad de movimiento (aproximada por la ley de Darcy) y de una ecuación de estado, obteniéndose así 3 ecuaciones de flujo (una para cada fase). De acuerdo al modelo propuesto, el flujo de fluidos entre los tres medios es en serie; esto es, el medio tres intercambia fluidos con el medio dos, el cual a su vez intercambia fluidos con el medio uno; por lo tanto, no existe transferencia directa entre los medios tres y uno. De acuerdo a lo anterior, las ecuaciones que describen el flujo de fluidos en el medio uno, el cual es considerado continuo, están definidas por las siguientes expresiones:

##### **Aceite:**

$$\nabla \cdot \left[ \frac{kk_{ro}}{\mu_o B_o} (\nabla p_o - \gamma_o \nabla D) \right]_1 + [b_o \hat{q}_o]_1 + \hat{\tau}_{o21} = \frac{\partial}{\partial t} [\phi (b_o S_o)]_1. \quad (2.20)$$

##### **Gas:**

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left[ \frac{kk_{ro}}{\mu_o B_o} R_s (\nabla p_o - \gamma_o \nabla D) + \frac{kk_{rg}}{\mu_g B_g} (\nabla p_g - \gamma_g \nabla D) \right]_1 \\ + [R_s b_o \hat{q}_o]_1 + [b_g \hat{q}_g]_1 + [R_s \hat{\tau}_o]_{21} + [\hat{\tau}_g]_{21} = \frac{\partial}{\partial t} [\phi (R_s b_o S_o + b_g S_g)]_1. \end{aligned} \quad (2.21)$$

##### **Agua:**

$$\nabla \cdot \left[ \frac{kk_{rw}}{B_w \mu_w} (\nabla p_w - \gamma_w \nabla D) \right]_1 + [b_w \hat{q}_w]_1 + [\hat{\tau}_w]_{21} = \frac{\partial}{\partial t} [\phi b_w S_w]_1. \quad (2.22)$$

En las ecuaciones (2.20) a (2.22),  $\tau_{o21}$ ,  $\tau_{g21}$  y  $\tau_{w21}$ , representan el ritmo de intercambio de masa entre el sistema 2 y 1 de las fase aceite, gas y agua respectivamente, a condiciones de yacimiento por unidad de volumen de roca.

### *Ecuaciones Auxiliares*

Se tienen dos ecuaciones de presión capilar:

Para sistemas gas-aceite, la expresión para determinar la presión capilar está dada por:

$$P_{cgo,1}(S_{g1}) = p_{g,1} - p_{o,1}. \quad (2.23)$$

Para sistemas agua-aceite, la expresión para determinar la presión capilar está dada por:

$$P_{cwo,1}(S_{w1}) = p_{o,1} - p_{w,1}. \quad (2.24)$$

### *Ecuaciones de Restricción*

Se tiene una ecuación de restricción para las saturaciones de las fases:

$$S_{o1} + S_{g1} + S_{w1} = 1. \quad (2.25)$$

### **2.2.2.2 Ecuaciones Diferenciales para el Medio Poroso 2**

En este caso, las ecuaciones de transferencia no presentan términos de flujo debido a que es un medio discontinuo; por lo tanto, únicamente aparecen los términos de transferencia entre los medios 1 y 2, y entre los medios 2 y 3.

### *Ecuaciones de Transferencia*

Una para cada fase (agua, aceite y gas):

**Aceite:**

$$-[\hat{\tau}_o]_{21} + [\hat{\tau}_o]_{32} = \frac{\partial}{\partial t} [\phi(b_o S_o)]_2. \quad (2.26)$$

**Gas:**

$$- [R_s \hat{\tau}_o]_{21} - [\hat{\tau}_g]_{21} + [R_s \hat{\tau}_o]_{32} + [\hat{\tau}_g]_{32} = \frac{\partial}{\partial t} [\phi (R_s b_o S_o + b_g S_g)]_2. \quad (2.27)$$

**Agua:**

$$- [\hat{\tau}_w]_{21} + [\hat{\tau}_w]_{32} = \frac{\partial}{\partial t} [\phi b_w S_w]_2. \quad (2.28)$$

En las ecuaciones (2.26) a (2.28),  $\tau_{o32}$ ,  $\tau_{g32}$  y  $\tau_{w32}$ , representan el ritmo de intercambio de masa entre el sistema 3 y 2 de las fase aceite, gas y agua respectivamente, a condiciones de yacimiento por unidad de volumen de roca.

*Ecuaciones Auxiliares.*

Expresiones de presión capilar para describir la relación entre las presiones de las fases;

$$P_{cgo,2}(S_{g2}) = p_{g,2} - p_{o,2}. \quad (2.29)$$

$$P_{cwo,2}(S_{w2}) = p_{o,2} - p_{w,2}. \quad (2.30)$$

*Ecuación de Restricción.*

Una ecuación de restricción para las saturaciones de las fases:

$$S_{o2} + S_{g2} + S_{w2} = 1. \quad (2.31)$$

### 2.2.2.3 Ecuaciones Diferenciales para el Medio Poroso 3

Al igual que en el medio poroso 2, las ecuaciones de transferencia no presentan términos de flujo debido a que es un medio discontinuo; por lo tanto, únicamente aparecen el término de transferencia entre los medios 2 y 3.

*Ecuaciones de Transferencia.*

Una para cada fase (agua, aceite y gas):

**Aceite:**

$$-\hat{\tau}_{o32} = \frac{\partial}{\partial t} [\phi(b_o S_o)]_3. \quad (2.32)$$

**Gas:**

$$-[R_s \hat{\tau}_o]_{32} - [\hat{\tau}_g]_{3,2} = \frac{\partial}{\partial t} [\phi(R_s b_o S_o + b_g S_g)]_3. \quad (2.33)$$

**Agua:**

$$-[\hat{\tau}_w]_{32} = \frac{\partial}{\partial t} [\phi b_w S_w]_3. \quad (2.34)$$

*Ecuaciones de Presiones Capilares.*

Expresiones de presión capilar para describir la relación entre las presiones de las fases:

$$P_{cgo,3}(S_{g3}) = p_{g,3} - p_{o,3}; \quad (2.35)$$

$$P_{cwo,3}(S_{w3}) = p_{o,3} - p_{w,3}. \quad (2.36)$$

*Ecuación de Restricción.*

Una ecuación de restricción para las saturaciones de las fases:

$$S_{o3} + S_{g3} + S_{w3} = 1. \quad (2.37)$$

### 2.3 Condiciones Iniciales y de Frontera

Además de las ecuaciones diferenciales en la formulación de un problema de flujo de fluidos en un medio poroso, se requiere definir las condiciones iniciales y de frontera. La condición inicial es aquella que representa la condición del sistema a un tiempo específico, y las condiciones de frontera indican las condiciones que se tienen en los límites del sistema.

#### 2.3.1 Condiciones Iniciales

En la mayoría de los estudios de simulación, las condiciones iniciales se obtienen suponiendo condiciones de equilibrio gravitacional/capilar inicial, lo que implica cero flujo de las fases a  $t=0$ . En esta forma de inicialización, la distribución de presiones se obtiene especificando una presión de referencia a una profundidad determinada y, utilizando el potencial del fluido, se determinan las presiones a las demás profundidades. La distribución inicial de saturaciones se obtiene a partir de los contactos de los fluidos y las relaciones de presión capilar. El procedimiento descrito anteriormente se puede expresar matemáticamente mediante el algoritmo siguiente:

1. Se calcula la presión de la fase por medio de la siguiente ecuación:

$$p_o = p_{o,ref} + \bar{\gamma}_o(\bar{p}_o)[z - z_{ref}]. \quad (2.38)$$

Donde  $p_o$  es la presión de la fase aceite a cualquier nivel del yacimiento;  $p_{o,ref}$  es la presión de la fase aceite al nivel de referencia fijado, y  $\bar{\gamma}_o$  es la densidad relativa de la fase aceite a una presión  $\bar{p}_o$ .

Ya que la ecuación (2.38) contiene implícitamente a  $p_o$ , (a través de  $\gamma_o$ ), la solución de  $p_o$  puede obtenerse en forma iterativa por medio del método de Newton-Raphson.

2. Si  $p_i < p_b$ , existe gas libre en el yacimiento y, por lo tanto,

$$p_{p,ref} = p_b, \quad (2.39)$$

Donde  $p_b$  es la presión de saturación.

Entonces, la presión del gas en el contacto gas-aceite, se puede calcular por medio de la expresión siguiente:

$$p_{g,zcgo} = P_{cgo,e} + p_{o,zcgo} \cdot \tag{2.40}$$

De forma similar para el agua:

$$p_{w,zcwo} = p_{o,zcwo} - P_{cwo,e} \tag{2.41}$$

3. La distribución de presiones del gas y del agua se calculan, de forma similar a la del aceite, por medio de las expresiones siguientes:

$$p_g = p_{g,zcgo} + \bar{\gamma}_g \bar{P}_g [z - z_{cgo}] ; \tag{2.42}$$

$$p_w = p_{w,zcwo} + \bar{\gamma}_w \bar{P}_w [z - z_{cwo}] . \tag{2.43}$$

4. Conocida la distribución de presiones en el yacimiento (figura 3.9), se calcula la distribución de presiones capilares, con las expresiones siguientes:

$$P_{cgo}(S_g) = p_g(z) - p_o(z); \tag{2.44}$$

$$P_{cwo}(S_w) = p_o(z) - p_w(z). \tag{2.45}$$

5. Por medio de interpolación inversa y haciendo uso de las presiones capilares, se obtiene la distribución inicial de saturaciones.

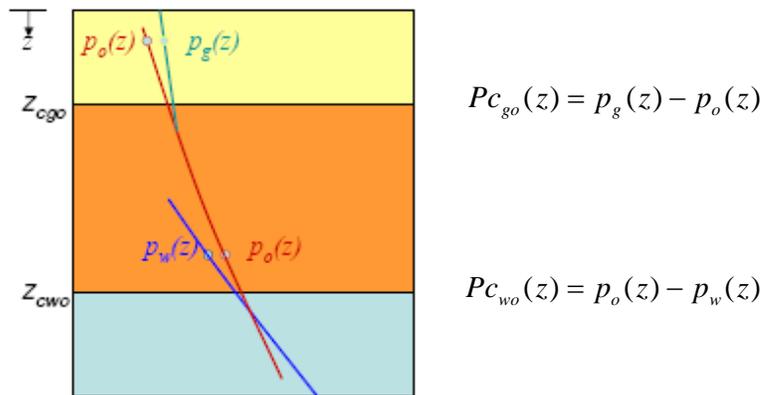


Figura 2.14 Distribución de Presiones en el Yacimiento

### 2.3.2 Condiciones de Frontera

Las ecuaciones diferenciales a resolver por el simulador requieren que se especifiquen todas las fronteras, esto incluye tanto las fronteras exteriores (límites del yacimiento,  $x=L$ ), como fronteras interiores (pozos productores e inyectores,  $x=0$ ). Para las fronteras externas,  $x=L$ , generalmente se supone que no existe flujo en la frontera del yacimiento. Matemáticamente esto puede expresarse de la siguiente forma:

$$\left(\nabla p_p - \gamma_p \nabla D\right)_{x=L} = 0, \quad (2.46)$$

donde:

$L$  = Frontera del yacimiento.  
 $p$  = fases agua, gas y aceite

Para fronteras internas,  $x=0$ , pueden especificarse, ya sea gastos del pozo o presiones de fondo fluyendo. Si se especifica el gasto del pozo, la ley de Darcy puede utilizarse para generar una condición de frontera tipo Neumann:

$$\left(\nabla p_p - \gamma_p \nabla D\right)_{x=0} = \frac{-q_w \mu B}{kA}. \quad (2.47)$$

Si se especifica la presión para el radio de pozo, entonces se puede obtener una condición de frontera tipo Dirichlet,

$$p|_{x=0} = p_{wf}. \quad (2.48)$$

## CAPÍTULO 3

### SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL PROBLEMA

La solución numérica consiste en obtener una representación aproximada de las ecuaciones en derivadas parciales en puntos predeterminados del dominio, en espacio y tiempo, mediante el empleo de métodos de discretización en diferencias finitas.

El conjunto de ecuaciones que describen el comportamiento de flujo de fluidos en el yacimiento, ecuaciones (2.20) a (2.22), (2.26) a (2.28) y (2.32) a (2.34), para los medios 1, 2 y 3, son no lineales, y por consiguiente no se pueden resolver por métodos analíticos. Se recurre a métodos numéricos para resolverlas mediante su aproximación en diferencias finitas, lo que genera un sistema algebraico de ecuaciones no lineales, que puede ser resuelto mediante el método iterativo de Newton-Raphson. En cada iteración, el método de Newton-Raphson resulta en un sistema algebraico de ecuaciones lineales que puede resolverse mediante algún algoritmo aplicable a la solución de sistemas de ecuaciones con matrices dispersas<sup>(15)</sup>. En este capítulo se presentan las ecuaciones aproximadas de flujo para el modelo de triple porosidad y se revisa la aplicación del método de Newton-Raphson a la solución de los sistemas de ecuaciones algebraicas no lineales correspondientes. También se aprovecha el esquema matricial resultante para reducirlo mediante operaciones matriciales<sup>(27)</sup>.

#### 3.1. Ecuaciones de Flujo en Diferencias Finitas.

Los sistemas de ecuaciones no lineales (2.20) a (2.22), (2.26) a (2.28) y (2.32) a (2.34), para los medios 1, 2 y 3, se resuelven numéricamente. El carácter continuo de estas ecuaciones en espacio y tiempo, se cambia por un carácter discreto mediante su aproximación en diferencias finitas. Los términos de flujo de las ecuaciones del medio 1, se aproximan mediante diferencias centrales y los términos de acumulación en los medios 1, 2 y 3, mediante diferencias regresivas. Este proceso de discretización da como resultado un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales en cada etapa de tiempo<sup>(15)</sup>. Como se muestra más adelante, las ecuaciones, que son las que constituyen el modelo, se escriben en términos de operadores en diferencias. La aproximación en diferencias finitas de los sistemas de ecuaciones (2.20) a (2.22), (2.26) a (2.28) y (2.32) a (2.34), se desarrollan en detalle en el Apéndice B.

##### 3.1.1. Ecuaciones para el Medio 1.

Las ecuaciones de flujo en el medio 1 (establecidas anteriormente), aproximadas mediante diferencias finitas para el caso de flujo tridimensional son las siguientes :

Para el aceite:

$$\Delta [T_o (\Delta p_o - \gamma_o \Delta D)]_{1,ijk}^{n+1} + [b_o \hat{q}_o]_{1,ijk}^{n+1} + [\hat{t}_{o21}]_{ijk}^{n+1} = \frac{V_{r,ijk}}{\Delta t} \Delta_t [\phi(b_o S_o)]_{1,ijk} \quad (3.1)$$

Para el gas:

$$\Delta \left[ T_o R_s (\Delta p_o - \gamma_o \Delta D) + T_g (\Delta p_g - \gamma_g \Delta D) \right]_{1,ijk}^{n+1} + \left[ R_s b_o \hat{q}_o \right]_{1,ijk}^{n+1} + \left[ b_g \hat{q}_g \right]_{1,ijk}^{n+1} + \left[ R_s \hat{\tau}_o \right]_{21}^{n+1} + \left[ \hat{\tau}_g \right]_{21}^{n+1} = \frac{V_{r,ijk}}{\Delta t} \Delta_t \left[ \phi (R_s b_o S_o + b_g S_g) \right]_{1,ijk} \quad (3.2)$$

Para el agua :

$$\Delta \left[ T_w (\Delta p_w - \gamma_w \Delta D) \right]_{1,ijk}^{n+1} + \left[ b_w \hat{q}_w \right]_{1,ijk}^{n+1} + \left[ \hat{\tau}_{w21} \right]_{1,ijk}^{n+1} = \frac{V_{r,ijk}}{\Delta t} \Delta_t \left[ \phi b_w S_w \right]_{1,ijk} \quad (3.3)$$

Las ecuaciones de presión capilar se discretizan de la siguiente manera:

$$P_{cgo1,ijk}^{n+1} (S_g) = \left[ p_g - p_o \right]_{1,ijk}^{n+1}; \quad (3.4)$$

$$P_{cwo1,ijk}^{n+1} (S_w) = \left[ p_o - p_w \right]_{1,ijk}^{n+1} \quad (3.5)$$

La ecuación de restricción restante, es la siguiente:

$$\left( S_o + S_g + S_w \right)_{1,ijk}^{n+1} = 1. \quad (3.6)$$

En las ecuaciones (3.1) a (3.3), se tiene que la transmisibilidad de las fases en el medio 1, se define como:

$$T_o = \alpha \left( \frac{b_o k_{ro}}{\mu_o} \right), \quad (3.7)$$

$$T_g = \alpha \left( \frac{b_g k_{rg}}{\mu_g} \right), \quad (3.8)$$

$$T_w = \alpha \left( \frac{k_{rw}}{B_w \mu_w} \right), \quad (3.9)$$

Donde  $\alpha$ , es un factor geométrico que depende del sistema de coordenadas geométricas elegidas.

Para evaluar las transmisibilidades de los fluidos en el medio 1 (fronteras de las celdas), se utiliza el concepto corriente arriba; es decir, las propiedades dentro de los paréntesis se evalúan a las condiciones de presión, y saturación de la celda de mayor presión <sup>(28)</sup>.

Las aproximaciones para la transferencia de fluidos entre el medio 2 y el medio 1, mostradas en las ecuaciones (3.1), (3.2) y (3.3), son las siguientes <sup>(32)</sup>:

$$(\tau_{o21})_{ijk}^{n+1} = [T_{o21}(p_{o2} - p_{o1})]_{ijk}^{n+1}, \quad (3.10)$$

$$(\tau_{g21})_{ijk}^{n+1} = [T_{g21}(p_{g2} - p_{g1})]_{ijk}^{n+1}, \quad (3.11)$$

$$(\tau_{w21})_{ijk}^{n+1} = [T_{w21}(p_{w2} - p_{w1})]_{ijk}^{n+1}. \quad (3.12)$$

Nótese que  $\tau_{p21} = V_{r,ijk} \hat{\tau}_{p21}$ ,  $p = o, g, w$ . Las transmisibilidades de las fases entre los medios 1 y 2 se evalúan corriente arriba; esto es, se calcula el potencial entre los medios y las propiedades se evalúan a las condiciones del medio de mayor presión. Esto es, si el medio 2 es el de mayor presión, entonces las propiedades están definidas como:

$$T_{o21} = \sigma V_r k_2 \left( \frac{b_o k_{ro}}{\mu_o} \right)_{21}, \quad (3.13)$$

$$T_{g21} = \sigma V_r k_2 \left( \frac{b_g k_{rg}}{\mu_g} \right)_{21}, \quad (3.14)$$

$$T_{w21} = \sigma V_r k_2 \left( \frac{k_{rw}}{B_w \mu_w} \right)_{21}. \quad (3.15)$$

De lo contrario, si el medio 1 es el de mayor presión (ej. inyección de fluidos en el yacimiento), entonces las propiedades se evalúan a las condiciones de este medio.

Nótese que las ecuaciones (3.4) a (3.9) pueden acoplarse en las ecuaciones (3.1) a (3.3) para reducir el número de ecuaciones y de incógnitas del sistema.

Las presiones de las fases gas y agua,  $p_g$  y  $p_w$  respectivamente, pueden eliminarse usando las relaciones de presión capilar, dadas en las ecuaciones (3.4) y (3.5):

$$\left( p_g = p_o + P_{cgo} \right)_{1,ijk}^{n+1}, \quad (3.16)$$

$$\left( p_w = p_o - P_{cwo} \right)_{1,ijk}^{n+1}. \quad (3.17)$$

La saturación de aceite,  $S_o$ , puede reemplazarse usando la relación expresada por la ecuación (3.6):

$$\left( S_o = 1 - S_g - S_w \right)_{1,ijk}^{n+1}. \quad (3.18)$$

La porosidad de cada medio en el nivel de tiempo  $n+1$ , se puede escribir en función de la compresibilidad de la roca,  $c_r$ , considerada como constante :

$$\phi^{n+1} = \phi^n \left[ 1 + c_r (p_o^{n+1} - p_o^n) \right]. \quad (3.19)$$

Acoplando las expresiones (3.16) a (3.19) en (3.1) a (3.3), el sistema reducido de ecuaciones es el siguiente:

Para el aceite:

$$\begin{aligned} & \Delta \left[ T_o (\Delta p_o - \gamma_o \Delta D) \right]_{1,ijk}^{n+1} + \left[ b_o q_o \right]_{1,ijk}^{n+1} + \left[ T_{o21} (p_{o2} - p_{o1}) \right]_{ijk}^{n+1} \\ & = \frac{V_{r,ijk}}{\Delta t} \Delta_t \left[ \phi \left( b_o (1 - S_g - S_w) \right) \right]_{1,ijk}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Para el gas:

$$\begin{aligned} & \Delta \left[ T_g (\Delta p_o + \Delta P_{cgo} - \gamma_g \Delta D) \right]_{1,ijk}^{n+1} + \Delta \left[ R_s T_o (\Delta p_o - \gamma_o \Delta D) \right]_{1,ijk}^{n+1} + \left[ b_g q_g + R_s b_o q_o \right]_{1,ijk}^{n+1} \\ & + \left[ T_{g21} (p_{o2} - p_{o1} + P_{cgo2} - P_{cgo1}) + R_s T_{o21} (p_{o2} - p_{o1}) \right]_{ijk}^{n+1} \\ & = \frac{V_{r,ijk}}{\Delta t} \Delta_t \left[ \phi b_g S_g + \phi b_o R_s (1 - S_g - S_w) \right]_{1,ijk}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Para el agua:

$$\begin{aligned} & \Delta \left[ T_w (\Delta p_o - \Delta P c_{wo} - \gamma_w \Delta D) \right]_{1,ijk}^{n+1} + [b_w q_w]_{1,ijk}^{n+1} \\ & + \left[ T_{w21} (p_{o2} - p_{o1} - P c_{wo2} + P c_{wo1}) \right]_{ik}^{n+1} = \frac{V_{r,ijk}}{\Delta t} \Delta_t [\phi b_w S_w]_{1,ijk} . \end{aligned} \quad (3.22)$$

### 3.1.2. Ecuaciones para el Medio 2.

Siguiendo un procedimiento similar para los medios 2 y 3, el sistema de ecuaciones diferenciales que modelan el flujo multifásico en el medio 2, expresadas por las ecuaciones (2.26) a (2.28), aproximadas mediante diferencias finitas, son las siguientes:

Para el aceite:

$$- [\tau_{o21}]_{ijk}^{n+1} + [\tau_{o32}]_{ijk}^{n+1} = \frac{V_{r,ijk}}{\Delta t} \Delta_t [\phi b_o (1 - S_g - S_w)]_{2,ijk} . \quad (3.23)$$

Para el gas:

$$- [\tau_{g21} + R_s \tau_{o21}]_{ijk}^{n+1} + [\tau_{g32} + R_s \tau_{o32}]_{ijk}^{n+1} = \frac{V_{r,ijk}}{\Delta t} \Delta_t [\phi b_g S_g + \phi b_o R_s (1 - S_g - S_w)]_{2,ijk} . \quad (3.24)$$

Para el agua:

$$- [\tau_{w21}]_{ijk}^{n+1} + [\tau_{w21}]_{ijk}^{n+1} = \frac{V_{r,ijk}}{\Delta t} \Delta_t [\phi b_w S_w]_{2,ijk} . \quad (3.25)$$

### 3.1.3. Ecuaciones para el Medio 3.

Para el aceite:

$$- [\tau_{o32}]_{ijk}^{n+1} = \frac{V_{r,ijk}}{\Delta t} \Delta_t [\phi b_o (1 - S_g - S_w)]_{3,ijk} . \quad (3.26)$$

Para el gas:

$$-\left[\tau_{g32} + R_s \tau_{o32}\right]_{ijk}^{n+1} = \frac{V_{r,ijk}}{\Delta t} \Delta_t \left[ \phi b_g S_g + \phi b_o R_s (1 - S_g - S_w) \right]_{3,ijk} . \quad (3.27)$$

Para el agua:

$$-\left[\tau_{w32}\right]_{ijk}^{n+1} = \frac{V_{r,ijk}}{\Delta t} \Delta_t \left[ \phi b_w S_w \right]_{3,ijk} . \quad (3.28)$$

Los términos de transferencia,  $\tau_{o21}$ ,  $\tau_{o32}$ ,  $\tau_{g21}$ ,  $\tau_{g32}$ ,  $\tau_{w21}$  y  $\tau_{w32}$ , en los medios 1, 2 y 3, se definen de la forma siguiente:

Aceite:

$$\left[\tau_{o21}\right]_{ijk}^{n+1} = \left[T_{o21}(p_{o2} - p_{o1})\right]_{ijk}^{n+1} ,$$

$$\left[\tau_{o32}\right]_{ijk}^{n+1} = \left[T_{o32}(p_{o3} - p_{o2})\right]_{ijk}^{n+1} .$$

Gas:

$$\left[\tau_{g21} + R_s \tau_{o21}\right]_{ijk}^{n+1} = \left[T_{g21}(p_{o2} - p_{o1} + P_{cgo2} - P_{cgo1}) + (R_s T_o)_{21}(p_{o2} - p_{o1})\right]_{ijk}^{n+1} ,$$

$$\left[\tau_{g32} + R_s \tau_{o32}\right]_{ijk}^{n+1} = \left[T_{g32}(p_{o3} - p_{o2} + P_{cgo3} - P_{cgo2}) + (R_s T_o)_{32}(p_{o3} - p_{o2})\right]_{ijk}^{n+1} .$$

Agua:

$$\left[\tau_{w21}\right]_{ijk}^{n+1} = \left[T_{w21}(p_{o2} - p_{o1} - P_{cwo2} + P_{cwo1})\right]_{ijk}^{n+1} ,$$

$$\left[\tau_{w32}\right]_{ijk}^{n+1} = \left[T_{w32}(p_{o3} - p_{o2} - P_{cwo3} + P_{cwo2})\right]_{ijk}^{n+1} .$$

Concluyendo, el sistema algebraico de ecuaciones en diferencias finitas para los medios 1, 2 y 3, consiste en cada nivel de tiempo  $n+1$ , y en cada celda  $ijk$  de la malla de cálculo, de un conjunto de 9 ecuaciones con el mismo número de incógnitas.

### 3.2 Solución del Sistema de Ecuaciones

El conjunto de ecuaciones en diferencias finitas, que describe el comportamiento de flujo de fluidos en el yacimiento, ecuaciones (3.20) a (3.22), (3.23) a (3.25) y (3.26) a (3.28) constituyen un sistema algebraico de ecuaciones no lineales. Debido a esto, su solución se obtiene mediante el método iterativo de Newton-Raphson, lo que genera en cada iteración un sistema lineal de ecuaciones.

#### 3.2.1 Método Iterativo de Newton Raphson

La aplicación del Método de Newton-Raphson comienza con definir las funciones de residuos siguientes:

##### Medio 1.

Aceite:

$$R_{o1,ijk}^{n+1} = \Delta [T_o (\Delta p_o - \gamma_o \Delta D)]_{1,ijk}^{n+1} + [b_o q_o]_{1,ijk}^{n+1} + [(T_o)_{21} (p_{o2} - p_{o1})]_{1,ijk}^{n+1} - \frac{V_{r1,ijk}}{\Delta t} \Delta_t [\phi (b_o (1 - S_g - S_w))]_{1,ijk} = 0 \quad (3.29)$$

Gas

$$R_{g1,ijk}^{n+1} = \Delta [T_o R_s (\Delta p_o - \gamma_o \Delta D)]_{1,ijk}^{n+1} + \Delta [T_g (\Delta p_o + \Delta P c_{go} - \gamma_g \Delta D)]_{1,ijk}^{n+1} + [b_g q_g + b_o q_o R_s]_{1,ijk}^{n+1} + [(T_o R_s)_{21} (p_{o2} - p_{o1}) + (T_g)_{21} (p_{o2} - p_{o1} + P c_{go2} - P c_{go1})]_{1,ijk}^{n+1} - \frac{V_{r1,ijk}}{\Delta t} \Delta_t [\phi (b_o (1 - S_g - S_w) R_s + b_g S_g)]_{1,ijk} = 0 \quad (3.30)$$

Agua:

$$R_{w1,ijk}^{n+1} = \Delta [T_w (\Delta p_o - \Delta P c_{wo} - \gamma_w \Delta D)]_{1,ijk}^{n+1} + [b_w q_w]_{1,ijk}^{n+1} + [(T_w)_{21} (p_{o2} - p_{o1} - P c_{wo2} + P c_{wo1})]_{1,ijk}^{n+1} - \frac{V_{r1,ijk}}{\Delta t} \Delta_t [\phi b_w S_w]_{1,ijk} = 0 \quad (3.31)$$

**Medio 2.**

Aceite:

$$R_{o2,ijk}^{n+1} = -\left[(T_o)_{21}(p_{o2} - p_{o1})\right]_{ijk}^{n+1} + \left[(T_o)_{32}(p_{o3} - p_{o2})\right]_{ijk}^{n+1} - \frac{V_{r2,ijk}}{\Delta t} \Delta_t \left[\phi(b_o(1 - S_g - S_w))\right]_{2,ijk} = 0 \quad (3.32)$$

Gas:

$$R_{g2,ijk}^{n+1} = -\left[(T_o R_s)_{21}(p_{o2} - p_{o1}) + (T_g)_{21}(p_{o2} - p_{o1} + Pc_{go2} - Pc_{go1})\right]_{ijk}^{n+1} + \left[(T_o R_s)_{32}(p_{o3} - p_{o2}) + (T_g)_{32}(p_{o3} - p_{o2} + Pc_{go3} - Pc_{go2})\right]_{ijk}^{n+1} - \frac{V_{r2,ijk}}{\Delta t} \Delta_t \left[\phi(b_o(1 - S_g - S_w)R_s + b_g S_g)\right]_{2,ijk} = 0 \quad (3.33)$$

Agua:

$$R_{w2,ijk}^{n+1} = -\left[T_{w21}(p_{o2} - p_{o1} - Pc_{wo2} + Pc_{wo1})\right]_{ijk}^{n+1} + \left[T_{w32}(p_{o3} - p_{o2} - Pc_{wo3} + Pc_{wo2})\right]_{ijk}^{n+1} - \frac{V_{r2,ijk}}{\Delta t} \Delta_t [\phi b_w S_w]_{2,ijk} = 0 \quad (3.34)$$

**Medio 3.**

Aceite:

$$R_{o3,ijk}^{n+1} = -\left[(T_o)_{32}(p_{o3} - p_{o2})\right]_{ijk}^{n+1} - \frac{V_{r3,ijk}}{\Delta t} \Delta_t \left[\phi(b_o(1 - S_g - S_w))\right]_{3,ijk} = 0 \quad (3.35)$$

Gas:

$$R_{g3,ijk}^{n+1} = -\left[(T_o R_s)_{32}(p_{o3} - p_{o2}) + (T_g)_{32}(p_{o3} - p_{o2} + Pc_{go3} - Pc_{go2})\right]_{ijk}^{n+1} - \frac{V_{r3,ijk}}{\Delta t} \Delta_t \left[\phi(b_o(1 - S_g - S_w)R_s + b_g S_g)\right]_{3,ijk} = 0 \quad (3.36)$$

Agua:

$$R_{w3,ijk}^{n+1} = -\left[T_{w32}(p_{o3} - p_{o2} - PC_{wo3} + PC_{wo2})\right]_{ijk}^{n+1} - \frac{V_{r3,ijk}}{\Delta t} \Delta_t [\phi b_w S_w]_{3,ijk} = 0. \quad (3.37)$$

Una vez expresadas las funciones de residuos, se establece la dependencia de las mismas, para esto, se definen los siguientes vectores de incógnitas, en la celda  $ijk$  para cada uno de los medios:

$$\mathbf{U}_{1,ijk} = (p_o, S_g, S_w)_{1,ijk}^T,$$

$$\mathbf{U}_{2,ijk} = (p_o, S_g, S_w)_{2,ijk}^T,$$

$$\mathbf{U}_{3,ijk} = (p_o, S_g, S_w)_{3,ijk}^T.$$

En forma general, la dependencia de las funciones de residuos de las incógnitas de cada medio, serán:

**Medio 1:**

$$R_{o1,ijk} = R_{o1,ijk}(\mathbf{U}_{1,ijk-1}, \mathbf{U}_{1,ij-1k}, \mathbf{U}_{1,i-1jk}, \mathbf{U}_{1,ijk}, \mathbf{U}_{2,ijk}, \mathbf{U}_{1,i+1jk}, \mathbf{U}_{1,ij+1k}, \mathbf{U}_{1,ijk+1}) = 0,$$

$$R_{g1,ijk} = R_{g1,ijk}(\mathbf{U}_{1,ijk-1}, \mathbf{U}_{1,ij-1k}, \mathbf{U}_{1,i-1jk}, \mathbf{U}_{1,ijk}, \mathbf{U}_{2,ijk}, \mathbf{U}_{1,i+1jk}, \mathbf{U}_{1,ij+1k}, \mathbf{U}_{1,ijk+1}) = 0,$$

$$R_{w1,ijk} = R_{w1,ijk}(\mathbf{U}_{1,ijk-1}, \mathbf{U}_{1,ij-1k}, \mathbf{U}_{1,i-1jk}, \mathbf{U}_{1,ijk}, \mathbf{U}_{2,ijk}, \mathbf{U}_{1,i+1jk}, \mathbf{U}_{1,ij+1k}, \mathbf{U}_{1,ijk+1}) = 0.$$

**Medio 2:**

$$R_{o2,ijk} = R_{o2,ijk}(\mathbf{U}_{1,ijk}, \mathbf{U}_{2,ijk}, \mathbf{U}_{3,ijk}) = 0,$$

$$R_{g2,ijk} = R_{g2,ijk}(\mathbf{U}_{1,ijk}, \mathbf{U}_{2,ijk}, \mathbf{U}_{3,ijk}) = 0,$$

$$R_{w2,ijk} = R_{w2,ijk}(\mathbf{U}_{1,ijk}, \mathbf{U}_{2,ijk}, \mathbf{U}_{3,ijk}) = 0.$$

**Medio 3:**

$$R_{o3,ijk} = R_{o3,ijk}(\mathbf{U}_{2,ijk}, \mathbf{U}_{3,ijk}) = 0,$$

$$R_{g3,ijk} = R_{g3,ijk}(\mathbf{U}_{2,ijk}, \mathbf{U}_{3,ijk}) = 0,$$

$$R_{w3,ijk} = R_{w3,ijk}(\mathbf{U}_{2,ijk}, \mathbf{U}_{3,ijk}) = 0.$$

El proceso iterativo se establece expandiendo las funciones de residuo mediante una serie de Taylor truncada, alrededor del nivel de iteración ( $\nu$ ), de la que solo se conservan los términos de menor orden <sup>(29)</sup>, esto es:

### Medio 1.

Fase aceite o gas:

$$\sum_{klm} \left\{ \frac{\partial R_{p,ijk}^{\nu}}{\partial p_{o,klm}} \delta p_{o,klm}^{\nu+1} + \frac{\partial R_{p,ijk}^{\nu}}{\partial S_{g,klm}} \delta S_{g,klm}^{\nu+1} + \frac{\partial R_{p,ijk}^{\nu}}{\partial S_{w,klm}} \delta S_{w,klm}^{\nu+1} \right\} + \frac{\partial R_{p,ijk}^{\nu}}{\partial p_{o2,ijk}} \delta p_{o2,ijk}^{\nu+1} + \frac{\partial R_{p,ijk}^{\nu}}{\partial S_{g2,ijk}} \delta S_{g2,ijk}^{\nu+1} + \frac{\partial R_{p,ijk}^{\nu}}{\partial S_{w2,ijk}} \delta S_{w2,ijk}^{\nu+1} = -R_{p1,ijk}^{\nu} \quad (3.38)$$

Para agua:

$$\sum_{klm} \left\{ \frac{\partial R_{p,ijk}^{\nu}}{\partial p_{o,klm}} \delta p_{o,klm}^{\nu+1} + \frac{\partial R_{p,ijk}^{\nu}}{\partial S_{w,klm}} \delta S_{w,klm}^{\nu+1} \right\} + \frac{\partial R_{p,ijk}^{\nu}}{\partial p_{o2,ijk}} \delta p_{o2,ijk}^{\nu+1} + \frac{\partial R_{p,ijk}^{\nu}}{\partial S_{w2,ijk}} \delta S_{w2,ijk}^{\nu+1} = -R_{p1,ijk}^{\nu} \quad (3.39)$$

donde:

$$p=o, g, w.$$

$$klm = ijk - 1, ij - 1k, i - 1jk, ijk, i + 1jk, ij + 1k, ijk + 1$$

### Medio 2.

Fase aceite o gas:

$$\frac{\partial R_{p,ijk}^{\nu}}{\partial p_{o1,ijk}} \delta p_{o1,ijk}^{\nu+1} + \frac{\partial R_{p,ijk}^{\nu}}{\partial S_{g1,ijk}} \delta S_{g1,ijk}^{\nu+1} + \frac{\partial R_{p,ijk}^{\nu}}{\partial S_{w1,ijk}} \delta S_{w1,ijk}^{\nu+1} + \frac{\partial R_{p,ijk}^{\nu}}{\partial p_{o2,ijk}} \delta p_{o2,ijk}^{\nu+1} + \frac{\partial R_{p,ijk}^{\nu}}{\partial S_{g2,ijk}} \delta S_{g2,ijk}^{\nu+1} + \frac{\partial R_{p,ijk}^{\nu}}{\partial S_{w2,ijk}} \delta S_{w2,ijk}^{\nu+1} + \frac{\partial R_{p,ijk}^{\nu}}{\partial p_{o3,ijk}} \delta p_{o3,ijk}^{\nu+1} + \frac{\partial R_{p,ijk}^{\nu}}{\partial S_{g3,ijk}} \delta S_{g3,ijk}^{\nu+1} + \frac{\partial R_{p,ijk}^{\nu}}{\partial S_{w3,ijk}} \delta S_{w3,ijk}^{\nu+1} = -R_{p2,ijk}^{\nu} \quad (3.40)$$

Para agua:

$$\frac{\partial R'_{p,ijk}}{\partial p_{o1,ijk}} \delta p_{o1,ijk}^{v+1} + \frac{\partial R'_{p,ijk}}{\partial S_{w1,ijk}} \delta S_{w1,ijk}^{v+1} + \frac{\partial R'_{p,ijk}}{\partial p_{o2,ijk}} \delta p_{o2,ijk}^{v+1} + \frac{\partial R'_{p,ijk}}{\partial S_{w2,ijk}} \delta S_{w2,ijk}^{v+1} + \frac{\partial R'_{p,ijk}}{\partial p_{o3,ijk}} \delta p_{o3,ijk}^{v+1} + \frac{\partial R'_{p,ijk}}{\partial S_{w3,ijk}} \delta S_{w3,ijk}^{v+1} = -R'_{w2,ijk} \quad (3.41)$$

Donde:

$$p=o, g, w.$$

### Medio 3.

Fase aceite o gas:

$$\frac{\partial R'_{p,ijk}}{\partial p_{o2,ijk}} \delta p_{o2,ijk}^{v+1} + \frac{\partial R'_{p,ijk}}{\partial S_{g2,ijk}} \delta S_{g2,ijk}^{v+1} + \frac{\partial R'_{p,ijk}}{\partial S_{w2,ijk}} \delta S_{w2,ijk}^{v+1} + \frac{\partial R'_{p,ijk}}{\partial p_{o3,ijk}} \delta p_{o3,ijk}^{v+1} + \frac{\partial R'_{p,ijk}}{\partial S_{g3,ijk}} \delta S_{g3,ijk}^{v+1} + \frac{\partial R'_{p,ijk}}{\partial S_{w3,ijk}} \delta S_{w3,ijk}^{v+1} = -R'_{p3,ijk} \quad (3.42)$$

Para agua:

$$\frac{\partial R'_{p,ijk}}{\partial p_{o2,ijk}} \delta p_{o2,ijk}^{v+1} + \frac{\partial R'_{p,ijk}}{\partial S_{w2,ijk}} \delta S_{w2,ijk}^{v+1} + \frac{\partial R'_{p,ijk}}{\partial p_{o3,ijk}} \delta p_{o3,ijk}^{v+1} + \frac{\partial R'_{p,ijk}}{\partial S_{w3,ijk}} \delta S_{w3,ijk}^{v+1} = -R'_{p3,ijk} \quad (3.43)$$

En las ecuaciones (3.38) a (3.43), se tiene un sistema de ecuaciones donde las incógnitas son los cambios iterativos de las presiones y saturaciones en cada una de las celdas y en cada uno de los medios; esto es:  $(\delta p_o, \delta S_g, \delta S_w)_{1,ijk}^{v+1}$ ,  $(\delta p_o, \delta S_g, \delta S_w)_{2,ijk}^{v+1}$  y  $(\delta p_o, \delta S_g, \delta S_w)_{3,ijk}^{v+1}$ , donde  $i = 1, 2, \dots, I$ ,  $j = 1, 2, \dots, J$ ,  $k = 1, 2, \dots, K$ . Las definiciones de  $\delta p_o, \delta S_g, \delta S_w$ , para el medio poroso 1 son las siguientes:

$$\delta p_{o1,ijk}^{v+1} = p_{o1,ijk}^{v+1} - p_{o1,ijk}^v \quad (3.44)$$

$$\delta S_{g1,ijk}^{v+1} = S_{g1,ijk}^{v+1} - S_{g1,ijk}^v \quad (3.45)$$

$$\delta S_{w1,ijk}^{\nu+1} = S_{w1,ijk}^{\nu+1} - S_{w1,ijk}^{\nu} . \quad (3.46)$$

Las definiciones para los medios 2 y 3, son similares.

Nótese que con el fin de simplificar la escritura, el superíndice correspondiente al nivel de tiempo  $n+1$  fue eliminado de las expresiones (3.38) a (3.43).

El proceso iterativo del nivel de tiempo  $n+1$  se inicia comúnmente con la estimación de la solución siguiente:

**Para el medio 1:**

$$\left( p_o, S_g, S_w \right)_{1,ijk}^0 = \left( p_o, S_g, S_w \right)_{1,ijk}^n . \quad (3.47)$$

**Para el medio 2:**

$$\left( p_o, S_g, S_w \right)_{2,ijk}^0 = \left( p_o, S_g, S_w \right)_{2,ijk}^n . \quad (3.48)$$

**Para el medio 3:**

$$\left( p_o, S_g, S_w \right)_{3,ijk}^0 = \left( p_o, S_g, S_w \right)_{3,ijk}^n . \quad (3.49)$$

Y termina cuando los cambios iterativos de las incógnitas en cada uno de los medios son menores a una tolerancia estipulada,  $\varepsilon$ , por ejemplo:  $\left| \delta p_{o,ijk}^{\nu+1} \right| < \varepsilon$ . Las incógnitas restantes se definen similarmente.

El sistema lineal de ecuaciones obtenido mediante la aplicación del método iterativo de Newton-Raphson en la iteración  $(\nu+1)$ , expresiones (3.38) a (3.43), puede escribirse en forma compacta como sigue :

$$[J]^{\nu} \delta U^{\nu+1} = -R^{\nu} , \quad (3.50)$$

Donde  $[J]$  se conoce como la matriz Jacobiana,  $\delta U$  es el vector de incógnitas y  $R$  es el vector de funciones de residuos.

La estructura matricial del subsistema de ecuaciones para la celda  $ijk$ , es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} E_{11} & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \end{bmatrix}_{i-1,jk}^v \begin{bmatrix} \delta U_1 \\ \delta U_2 \\ \delta U_3 \end{bmatrix}_{i-1,jk}^{v+1} + \begin{bmatrix} G_{11} & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \end{bmatrix}_{i,j-1,k}^v \begin{bmatrix} \delta U_1 \\ \delta U_2 \\ \delta U_3 \end{bmatrix}_{i,j-1,k}^{v+1} + \\
 & \begin{bmatrix} C_{11} & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \end{bmatrix}_{ij,k-1}^v \begin{bmatrix} \delta U_1 \\ \delta U_2 \\ \delta U_3 \end{bmatrix}_{ij,k-1}^{v+1} + \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & [0] \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ [0] & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}_{ijk}^v \begin{bmatrix} \delta U_1 \\ \delta U_2 \\ \delta U_3 \end{bmatrix}_{i,j,k}^{v+1} + \\
 & \begin{bmatrix} B_{11} & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \end{bmatrix}_{ij,k+1}^v \begin{bmatrix} \delta U_1 \\ \delta U_2 \\ \delta U_3 \end{bmatrix}_{ij,k+1}^{v+1} + \begin{bmatrix} F_{11} & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \end{bmatrix}_{i,j+1,k}^v \begin{bmatrix} \delta U_1 \\ \delta U_2 \\ \delta U_3 \end{bmatrix}_{i,j+1,k}^{v+1} + \\
 & \begin{bmatrix} D_{11} & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \end{bmatrix}_{i+1,jk}^v \begin{bmatrix} \delta U_1 \\ \delta U_2 \\ \delta U_3 \end{bmatrix}_{i+1,jk}^{v+1} = - \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix}_{ijk}^v
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

Donde  $E_{11}, G_{11}, C_{11}, A_{11}, A_{12}, B_{11}, F_{11}, D_{11}, A_{22}, A_{23}, A_{33}, A_{32}$  son submatrices de orden  $(3) \times (3)$ .

Las submatrices  $A_{11}$  y  $A_{12}$ , contienen las derivadas de las funciones de residuos del medio 1 con respecto a las incógnitas del medio 1 y del medio 2 en la celda  $ijk$ , respectivamente. Las submatrices  $A_{21}, A_{22}$  y  $A_{23}$ , contienen las derivadas de las funciones de residuos del medio 2 con respecto a las incógnitas del medio 1, del medio 2 y del medio 3 en la celda  $ijk$ , respectivamente. Las submatrices  $A_{32}$  y  $A_{33}$ , contienen las derivadas de las funciones de residuos del medio 3 con respecto a las incógnitas del medio 2 y del medio 3 en la celda  $ijk$ , respectivamente. Las submatrices  $E_{11}, G_{11}, C_{11}, B_{11}, F_{11}$ , y  $D_{11}$  contienen las derivadas de las funciones de residuos del medio 1 con respecto a las incógnitas del medio 1 en las celdas  $i-1, j, k$ ;  $i, j-1, k$ ;  $i, j, k-1$ ;  $i, j, k+1$ ;  $i, j+1, k$  e  $i+1, j, k$  respectivamente.

### 3.2.2 Reducción Matricial del Sistema de Ecuaciones

#### Primera Reducción para la formulación TI.

La estructura matricial del sistema lineal de ecuaciones (3.51), permite reducirlo a un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas por celda, similar al que se obtiene en el caso de yacimientos homogéneos de aceite negro. La reducción del sistema de ecuaciones se realiza mediante la aplicación del complemento de Schur <sup>(40)(21)</sup>, de la forma siguiente: en una primera etapa se acoplan las ecuaciones del medio 3 en las ecuaciones del medio 2 y posteriormente se acoplan las del medio 2 en las del medio 1. Lo anterior se muestra paso a paso a continuación, para esto, el subsistema de ecuaciones 3.51, puede escribirse de la siguiente manera:

Ecuación del medio 1:

$$C_{11}^v \delta U_1^{v+1} + G_{11}^v \delta U_1^{v+1} + E_{11}^v \delta U_1^{v+1} + A_{11}^v \delta U_1^{v+1} + A_{12}^v \delta U_2^{v+1} + D_{11}^v \delta U_1^{v+1} + F_{11}^v \delta U_1^{v+1} + B_{11}^v \delta U_1^{v+1} = -R_1^v \quad (3.52)$$

Ecuación del medio 2:

$$A_{21}^v \delta U_1^{v+1} + A_{22}^v \delta U_2^{v+1} + A_{23}^v \delta U_3^{v+1} = -R_2^v \quad (3.53)$$

Ecuación del medio 3:

$$A_{32}^v \delta U_2^{v+1} + A_{33}^v \delta U_3^{v+1} = -R_3^v \quad (3.54)$$

Ahora bien, la expresión (3.54) se resuelve para las incógnitas del medio 3,  $\delta U_3^{v+1}$ , en términos de las incógnitas del medio 2,  $\delta U_2^{v+1}$ , como sigue :

$$\delta U_3^{v+1} = -\mathbf{R}_3^{*v} - A_{32}^{*v} \delta U_2^{v+1}. \quad (3.55)$$

Donde:

$$A_{32}^{*v} = [A_{33}^v]^{-1} A_{32}^v. \quad (3.56)$$

$$\mathbf{R}_3^{*v} = [A_{33}^v]^{-1} \mathbf{R}_3^v. \quad (3.57)$$

La expresión (3.55), representa la solución de las incógnitas en el medio 3, en función de las incógnitas del medio 2.

Sustituyendo la ecuación (3.55), en la ecuación del medio 2, expresión (3.53), se tiene lo siguiente:

$$A_{21}^v \delta U_1^{v+1} + A_{22}^v \delta U_2^{v+1} + A_{23}^v [-\mathbf{R}_3^{*v} - A_{32}^{*v} \delta U_2^{v+1}] = -\mathbf{R}_2^v. \quad (3.58)$$

Realizando las operaciones correspondientes:

$$A_{21}^v \delta U_1^{v+1} + A_{22}^v \delta U_2^{v+1} - A_{23}^v \mathbf{R}_3^{*v} - A_{23}^v A_{32}^{*v} \delta U_2^{v+1} = -\mathbf{R}_2^v.$$

Agrupando:

$$A_{21}^v \delta U_1^{v+1} + \delta U_2^{v+1} [A_{22}^v - A_{23}^v A_{32}^{*v}] = -\mathbf{R}_2^v + A_{23}^v \mathbf{R}_3^{*v}.$$

Finalmente:

$$A_{21}^v \delta U_1^{v+1} + A_{22}^{*v} \delta U_2^{v+1} = -\mathbf{R}_2^{*v}, \quad (3.59)$$

Siendo:

$$A_{22}^{*v} = A_{22}^v - A_{23}^v A_{32}^* , \quad (3.60)$$

$$\mathbf{R}_2^* = \mathbf{R}_2^v - A_{23}^v \mathbf{R}_3^{*v} . \quad (3.61)$$

Ahora bien, de la expresión (3.59), se resuelve para las incógnitas del medio 2,  $\delta \mathbf{U}_2^{v+1}$ , en términos de las incógnitas del medio,  $\delta \mathbf{U}_1^{v+1}$ , como sigue :

$$\delta \mathbf{U}_2^{v+1} = -\mathbf{R}_2^{**v} - A_{21}^{*v} \delta \mathbf{U}_1^{v+1} , \quad (3.62)$$

Donde:

$$A_{21}^{*v} = [A_{22}^{*v}]^{-1} A_{21}^v , \quad (3.63)$$

$$\mathbf{R}_2^{**v} = [A_{22}^{*v}]^{-1} \mathbf{R}_2^{*v} . \quad (3.64)$$

La expresión (3.62), representa la solución de las incógnitas del medio 2, en función de las incógnitas del medio 1.

Sustituyendo la ecuación (3.62) en la ecuación del primer medio, expresión (3.52), se tiene lo siguiente:

$$C_{11}^v \delta \mathbf{U}_1^{v+1} + G_{11}^v \delta \mathbf{U}_1^{v+1} + E_{11}^v \delta \mathbf{U}_1^{v+1} + A_{11}^v \delta \mathbf{U}_1^{v+1} + A_{12}^v [-\mathbf{R}_2^{**v} - A_{21}^{*v} \delta \mathbf{U}_1^{v+1}] + D_{11}^v \delta \mathbf{U}_1^{v+1} + F_{11}^v \delta \mathbf{U}_1^{v+1} + B_{11}^v \delta \mathbf{U}_1^{v+1} = -\mathbf{R}_1^v . \quad (3.65)$$

Simplificando:

$$C_{11}^v \delta \mathbf{U}_1^{v+1} + G_{11}^v \delta \mathbf{U}_1^{v+1} + E_{11}^v \delta \mathbf{U}_1^{v+1} + A_{11}^v \delta \mathbf{U}_1^{v+1} - A_{12}^v \mathbf{R}_2^{**v} - A_{12}^v A_{21}^{*v} \delta \mathbf{U}_1^{v+1} + D_{11}^v \delta \mathbf{U}_1^{v+1} + F_{11}^v \delta \mathbf{U}_1^{v+1} + B_{11}^v \delta \mathbf{U}_1^{v+1} = -\mathbf{R}_1^v . \quad (3.66)$$

Agrupando:

$$C_{11}^v \delta \mathbf{U}_1^{v+1} + G_{11}^v \delta \mathbf{U}_1^{v+1} + E_{11}^v \delta \mathbf{U}_1^{v+1} + \delta \mathbf{U}_1^{v+1} [A_{11}^v - A_{12}^v A_{21}^{*v}] + D_{11}^v \delta \mathbf{U}_1^{v+1} + F_{11}^v \delta \mathbf{U}_1^{v+1} + B_{11}^v \delta \mathbf{U}_1^{v+1} = -\mathbf{R}_1^v + A_{12}^v \mathbf{R}_2^{**v} .$$

Finalmente:

$$C_{11}^v \delta U_1^{v+1} + G_{11}^v \delta U_1^{v+1} + E_{11}^v \delta U_1^{v+1} + A_{11}^{*v} \delta U_1^{v+1} + D_{11}^v \delta U_1^{v+1} + F_{11}^v \delta U_1^{v+1} + B_{11}^v \delta U_1^{v+1} = -R_I^{*v}. \quad (3.67)$$

Donde:

$$A_{11}^{*v} = A_{11}^v - A_{12}^v A_{21}^{*v}, \quad (3.68)$$

$$R_I^{*v} = R_I^v - A_{12}^v R_2^{*v}. \quad (3.69)$$

Nótese que el subsistema de ecuaciones en (3.67), consiste de 3 ecuaciones con 3 incógnitas por cada celda de la malla de cálculo. El subsistema (3.67) de ecuaciones contiene sólo incógnitas del medio 1, o sea,  $\delta U_1^{v+1}$ .

La estructura matricial del subsistema de ecuaciones reducido (3.67), posee una estructura matricial similar a la que se obtiene para un yacimiento de aceite negro de una porosidad.

Una vez que se resuelven las incógnitas en el medio 1, en el nivel de tiempo  $n+1$ , es posible resolver las incógnitas del medio 2 (ecuación 3.62) y del medio 3 (ecuación 3.55), de manera directa en cada nodo de la malla de cálculo <sup>(5)</sup>.

### 3.2.3 Solución del Sistema Lineal de Ecuaciones

La solución del sistema lineal se puede obtener mediante *métodos directos* o *métodos iterativos*.

#### Métodos Directos

Los métodos directos realizan un número finito de operaciones para resolver un sistema de ecuaciones.

En los métodos directos, el trabajo computacional y el requerimiento de memoria están directamente relacionados con el número de incógnitas a resolver. Entre mayor es el número de ecuaciones, el ancho de banda es generalmente mayor y la cantidad de memoria de cómputo y de tiempo de procesamiento son también mayores.

El número de ecuaciones y de incógnitas, para un problema dado, depende del número total de bloques o de celdas, en que se discretiza el dominio de interés y del número de componentes considerados.

Los métodos directos se basan en el Método de Eliminación Gaussiana, y constan de dos pasos:

1. En un barrido hacia delante se eliminan todos los elementos diferentes de cero ubicados debajo de la diagonal principal, esto es, se transforma la matriz de coeficientes en una matriz triangular.
2. En un barrido hacia atrás, se obtiene la solución de las incógnitas.

Dentro de los métodos directos, los Algoritmos de Banda y las Técnicas para resolver sistemas de ecuaciones con Matrices Dispersas, son de interés en la Simulación Numérica de Yacimientos.

Las *técnicas de matrices dispersas* reconocen la existencia de un gran número de ceros en la matriz de coeficientes y evitan su almacenamiento y operaciones innecesarias.

Dentro de este tipo de métodos se encuentran: El Método de Eliminación Gaussiana y el Algoritmo de Thomas.

### Métodos Iterativos

En los *métodos iterativos* se aplican algoritmos cíclicos; se busca que a medida que las iteraciones progresen, el método converja a la solución.

En el presente trabajo, el sistema lineal de ecuaciones se resuelve mediante el método iterativo GMRES, el cual es un método tipo Krylov y se describe a continuación:

### Métodos de Krylov

Estos métodos son utilizados comúnmente en combinación con el método de Descomposición de Dominio para resolver problemas cuya dimensión requiere del uso de cómputo paralelo, así como en la solución de problemas no lineales.

Un algoritmo iterativo resulta una opción adecuada para la solución de sistemas de gran escala, sin embargo las técnicas usuales como los métodos de tipo SOR, resultan poco efectivos en estos casos, entre los algoritmos iterativos más eficientes se encuentran los métodos de Krylov, los cuales han sido objetos de estudio en diversas áreas de la matemática aplicada.

Estos algoritmos se basan en la idea de buscar una aproximación a la solución del sistema dentro de un subespacio de dimensión pequeña, esto es descrito a continuación.

Sea  $r_0 = b - Ax_0$  con  $x_0$  una aproximación inicial a  $x_*$ , solución del sistema  $Ax = b$  donde  $A \in R^{n \times n}$  y  $b \in R^n$ , se desea determinar

$$x_k \in x_0 + K_k \tag{4.57}$$

$$b - Ax_k \perp L_k \tag{4.58}$$

tal que  $x_k$  sea una aproximación razonable de  $x_*$  y  $k \ll n$ , con  $K_k := \{A^j r_0\}_{j=0}^{k-1}$  y  $L_k$  un subespacio dependiente del sistema.

La elección del subespacio  $L_k$  conduce a diferentes métodos de aproximación.

### Gradiente Conjugado

Uno de los métodos más utilizados debido a su simplicidad, eficiencia y bajo costo computacional, es el método de Gradiente Conjugado (CG), en este caso se considera  $L_k = K_k$ , con esta elección el proceso lleva a buscar, en cada iteración, reducir el tamaño del error medido en una norma dependiente de la matriz  $A$ , así, en cada iteración de CG se resuelve el problema:

$$\min_{x \in x_0 + K_k} \|x - x_*\|_A$$

donde  $\|v\|_A := \sqrt{\langle v, Av \rangle}$  con  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  el producto escalar usual.

Desafortunadamente este algoritmo requiere que la matriz de coeficientes sea simétrica ( $A = A^t$ ) y la convergencia solo es garantizada si  $A$  es definida positiva, es decir,  $xAx^t > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$ , esto no se presenta en el problema que deseamos resolver, sin embargo existen diversas técnicas y que permiten el uso de éste método en problemas más generales, además de diversas variantes del método para matrices no simétricas.

El siguiente algoritmo representa la forma más simple del Gradiente Conjugado.

### Algoritmo GC

Dados  $A, b, x_0$

$$r_0 = b - Ax_0, v_0 = r_0$$

Para  $k = 1, 2, \dots$

Determinar  $x_k$

Si  $(\|b - Ax_k\|_2 < tol)$  Salir

Construir  $v_k \in K_{k+1}$  tal que  $\langle v_i, v_j \rangle = 0$  para  $j = 0, \dots, k-1$

**GMRES**

Dadas las características del sistema, es necesario buscar un algoritmo con requisitos mínimos sobre la matriz de coeficientes, el método de Residuo Mínimo Generalizado (GMRES), es uno de los algoritmos más representativos de los métodos de Krylov y uno de los más eficientes para matrices generales, en este proceso se elige

$$L_k = AK_k.$$

En cada aproximación de GMRES, al igual que en gradiente conjugado, se resuelve un problema de minimización, sin embargo, en este caso se busca reducir la norma del residual asociado a cada aproximación, así, en cada paso, GMRES resuelve el problema:

$$\min_{x \in x_0 + K_k} \|b - Ax\|_2$$

$$\text{donde } \|v\|_2 := \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

Es importante notar que si  $n = k$  entonces  $x_k = x_*$  es decir, la solución exacta será alcanzada en a lo mas  $n$  iteraciones, en aritmética exacta.

Para llevar al cabo la solución del problema, se requiere de una base ortogonal de  $K_k$ , es decir, se requiere  $\{v_j\}_{j=0}^{k-1}$  tal que  $K_k := \text{span}\{v_j\}_{j=0}^{k-1}$  y  $\langle v_i, v_j \rangle = 0$  para  $i \neq j$  por lo que en cada paso debe obtenerse un elemento de dicha base y almacenar los anteriores.

**Algoritmo GMRES**

Dados  $A, b, x_0$

$$r_0 = b - Ax_0, v_0 = r_0$$

Para  $k = 1, \dots$

Determinar  $x_k$

Si  $(\|b - Ax_k\|_2 < \text{tol})$  Salir

Construir  $v_k \in K_{k+1}$  tal que  $\langle v_i, v_j \rangle = 0$  para  $j = 0, \dots, k-1$

Debido a la necesidad de almacenar los vectores generados en cada iteración, el consumo de memoria al aplicar GMRES puede ser muy elevado.

Una estrategia para controlar el consumo de memoria, es el reinicio del algoritmo si éste no ha alcanzado una aproximación aceptable después de un número de

iteraciones previamente establecido ( $m$ ), el algoritmo así obtenido es conocido como GMRES con reinicio (GMRES( $m$ )).

### Algoritmo GMRES( $m$ )

Dados  $A, b, x_0$

$$r_0 = b - Ax_0, v_0 = r_0$$

Para  $k = 1, \dots, m-1$

Determinar  $x_k$

Si  $(\|b - Ax_k\|_2 < tol)$  Salir

Construir  $v_k \in K_{k+1}$  tal que  $\langle v_i, v_j \rangle = 0$  para  $j = 0, \dots, k-1$

Si  $(\|b - Ax_k\|_2 > tol)$  entonces

$$x_0 = x_k$$

$$r_0 = b - Ax_0$$

$$v_0 = r_0$$

reiniciar el ciclo

Esta versión del algoritmo requiere únicamente del almacenamiento de  $m$  vectores ortogonales, sin embargo la elección del parámetro de reinicio no es sencilla, en general, no existen criterios que permitan elegir el valor de  $m$  a partir de las características del sistema.

### 3.3 Implementación del Modelo Conceptual en el Simulador

El simulador en el cual fue implementado el simulador es un simulador multifásico y tridimensional capaz de modelar el flujo de fluidos en yacimientos naturalmente fracturados. Este simulador fue desarrollado previamente y la contribución del presente trabajo fue implementar inicialmente el modelo de triple porosidad, para posteriormente expandirlo a múltiple porosidad.

A continuación se presenta el algoritmo de programación del simulador, en el cual se incluyen las principales tareas realizadas en el código. Para este simulador existen varios módulos los cuales realizan tareas específicas entre las que se encuentran: lectura de datos, creación de la malla, cálculos PVT, generación del jacobiano, solución del sistema de ecuaciones e impresión de resultados [Peña, O y Resendiz, J.T., 2006<sup>24</sup>]. El diagrama de flujo del simulador a grandes rasgos es el siguiente:

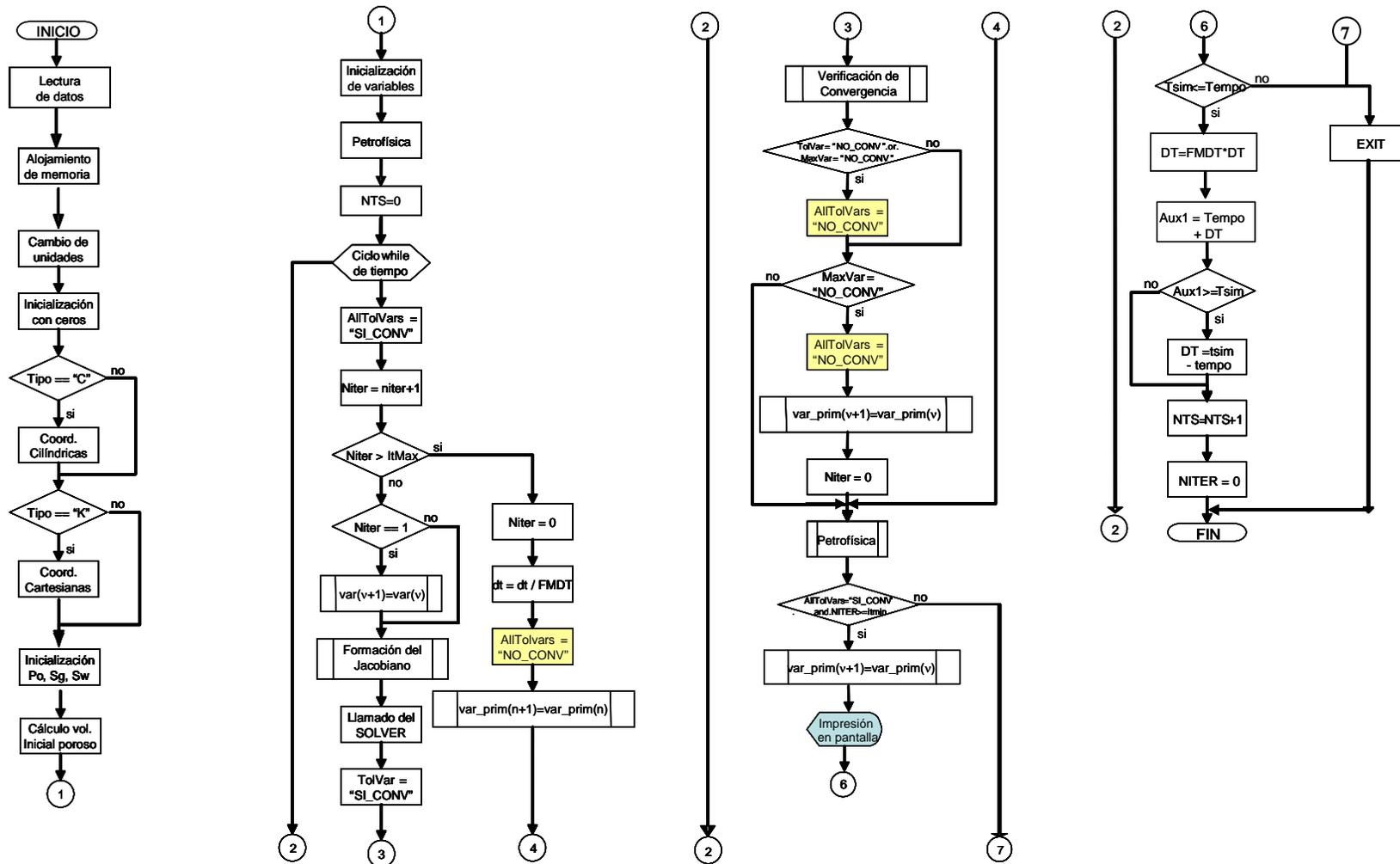


Figura 3.1 Diagrama de flujo del Simulador Camaleón <sup>(11)</sup>

## CAPÍTULO 4

### VALIDACIÓN DEL MÓDELO

La validación del modelo propuesto se realizó mediante la simulación de flujo radial monofásico en uno, dos y tres medios porosos. Posteriormente se graficaron los resultados de  $Pwf$  vs  $\log(t)$ , para observar su comportamiento.

Los resultados de la simulación del flujo radial en uno, dos y tres medios, se validaron mediante soluciones analíticas de la siguiente forma: la validación para el flujo en un solo medio se realizó mediante el uso de la solución de línea fuente, para dos medios mediante el uso de la solución de **Warren y Root** <sup>(35)</sup>, y para tres medios mediante la solución propuesta por **Rodríguez y cols** <sup>(27)</sup>, para un modelo de triple porosidad-una permeabilidad. A continuación se describen las soluciones analíticas utilizadas y posteriormente se muestran los resultados de la simulación:

#### 4.1 Solución para el Flujo Radial Monofásico en un Medio

La ecuación que gobierna la transmisión de presión en un medio poroso conteniendo un fluido ligeramente compresible, está dado por:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{\phi \mu c}{k_r} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (4.1)$$

La ecuación (4.1), es obtenida bajo las siguientes suposiciones:

- a. Flujo laminar o Darcy.
- b. Difusividad hidráulica constante.
- c. Medio poroso homogéneo e isotrópico.
- d. Compresibilidad del fluido pequeña.
- e. Gradientes de presión  $(\partial p / \partial r)$  pequeños, de tal forma que  $(\partial p / \partial r)^2 \cong 0$ .
- f. Flujo monofásico.
- g. Efectos de gravedad y térmicos no considerados.

Si se considera únicamente flujo *radial*, la ecuación (4.1) se reduce a:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\phi \mu c}{k_r} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (4.2)$$

Esta ecuación es conocida como la ecuación de Difusividad, la cual es la base para la teoría de pruebas de presión.

*Solución para Yacimiento Infinito.*

Después del periodo de almacenamiento, el transiente de presión que se podría medir en la cara del pozo refleja la transmisión de la presión a través del yacimiento. A tiempos largos, la respuesta está bajo la influencia de las fronteras del yacimiento, pero antes de estos efectos, la respuesta de presión no se entera de las fronteras y el yacimiento actúa como si fuera infinito en extensión. Aunque existen varios tipos de flujos identificados durante este periodo de yacimiento infinito, uno de los más fácilmente identificados es el flujo radial. El flujo radial para yacimientos comportándose infinitamente es la base de la interpretación de las técnicas de pruebas de presión.

En ausencia de almacenamiento y daño, el transiente de presión (respuesta de presión que se podría medir en la cara del pozo) bajo un comportamiento infinito de un flujo radial, considerando al pozo como una línea fuente, "source line" y gasto constante, está dada por:

$$p_D = -\frac{1}{2} E_i \left[ -\frac{r_D^2}{4t_D} \right], \quad (4.3)$$

donde:

$$p_D = \frac{2\pi kh}{qB\mu} (p_i - p_{(r,t)}) \quad (4.4)$$

$$t_D = \frac{kt}{\phi \mu c r_w^2} \quad (4.5)$$

$$r_D = \frac{r}{r_w} \quad (4.6)$$

Sustituyendo ecuaciones (4.4) a (4.6) en la ecuación (4.3), se tiene lo siguiente:

$$p_{(r,t)} = p_i - \frac{q\mu B}{4\pi kh} E_i \left[ \frac{r^2}{4\eta t} \right], \quad (4.7)$$

donde:

$$\eta = \frac{k}{\phi\mu c} \text{ es la Difusividad hidráulica}$$

$p_{(r,t)}$  es la presión en un punto  $r$  al tiempo  $t$ .

La integral exponencial,  $E_i$ , en la ecuación (4.7), puede ser aproximada como:

$$E_i(-x) = \ln x + 0.5772 \text{ cuando } x < 0.01 \quad (4.8)$$

$$\text{donde } x = \frac{r_D^2}{4t_D} = \frac{r^2}{4\eta t} = \frac{r^2}{\frac{4kt}{\phi\mu c}} = \frac{r^2 \phi\mu c}{4kt}$$

Cuando la ecuación 4.3 es evaluada en la cara del pozo (disparos), o sea, cuando  $r=r_w$ , se tiene que:

$$r_D = \frac{r_w}{r_w} = 1 \text{ y } x = \frac{1}{4t_D}$$

$$\text{Haciendo } \ln x = \ln \frac{1}{4t_D} = \ln(1) - \ln(4t_D) = 0 - [\ln(4) + \ln(t_D)],$$

entonces la ecuación 4.3 se reduce a:

$$p_{wD} = \frac{1}{2} [\ln t_D + 0.80907] + s,$$

donde  $s$  es el daño de la formación.

## 4.2 Solución para Flujo Radial Monofásico en Dos Medios

Los efectos de doble porosidad están descritos en términos de dos parámetros adimensionales,  $\lambda$  y  $\omega$ , que relacionan las propiedades de la matriz con las propiedades de la fractura.  $\lambda$  depende de la relación de transmisibilidades matriz-fractura, mientras que  $\omega$  relaciona la capacidad de almacenamiento de la fractura con la capacidad de almacenamiento del sistema completo.  $\lambda$  y  $\omega$  están definidas por las ecuaciones siguientes:

$$\lambda = \alpha \frac{k_m}{k_f} r_w^2, \quad (4.9)$$

$$\omega = \frac{\phi_f c_{if}}{\phi_f c_{if} + \phi_m c_{im}}. \quad (4.10)$$

$\alpha$  es un factor de forma que depende de la geometría de flujo entre la matriz y las fracturas.

Las expresiones en forma adimensional que describen el flujo en medio de doble porosidad obtenidas por **Warren y Root** <sup>(35)</sup>, fueron:

Para el medio continuo:

$$\frac{\delta^2 P_{fD}}{\delta r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\delta P_{fD}}{\delta r_D} = (1-\omega) \frac{\delta P_{mD}}{\delta t_D} + \omega \frac{\delta P_{fD}}{\delta t_D}. \quad (4.11)$$

Para el medio discontinuo:

$$(1-\omega) \frac{\delta P_{mD}}{\delta t_D} = \lambda (P_{fD} - P_{mD}). \quad (4.12)$$

La solución de estas ecuaciones para un yacimiento infinito y uno finito, con un pozo productor a gasto constante [**Prats** <sup>41</sup>], son:

Yacimiento Infinito:

$$P_{wD} = \frac{1}{2} \left[ \text{Ln } t_D + 0.80908 + E_i \left( \frac{-\lambda t_D}{\omega(1-\omega)} \right) - E_i \left( \frac{-\lambda t_D}{(1-\omega)} \right) \right] + S. \quad (4.13)$$

Yacimiento finito:

$$P_{wD} = \left( \frac{2}{r_D^2 - 1} \right) \left[ \frac{1}{4} + t_D + \frac{(1-\omega)^2}{\lambda} \left( 1 - e^{\frac{-\lambda t_D}{\omega(1-\omega)}} \right) \right] - \frac{3r_D^4 - 4r_D^4 \text{Ln } r_D - 2r_D^2 - 1}{4(r_D^2 - 1)^2}. \quad (4.14)$$

Donde  $r_D$  y  $t_D$  son el radio y tiempo adimensionales, definidos por:

$$r_D = \frac{r}{r_w}, \quad (4.15)$$

$$t_D = \frac{0.0002637 k_f t}{\left[ (\phi c_i)_f + (\phi c_i)_m \right] \mu r_w^2}. \quad (4.16)$$

Donde  $S$  se representa el factor de daño y el término  $E_i(x)$  representa la función Integral Exponencial. La presión real puede ser obtenida de la definición de presión adimensional

$$P_D = \frac{k_f h \left[ P_i - P(r, t) \right]}{141.2 q B \mu}. \quad (4.17)$$

Una gráfica semi-logarítmica de la presión vs. tiempo revela la presencia de dos líneas rectas paralelas en lugar de una, como lo obtenido generalmente para el caso de un yacimiento convencional, *Figura 5.1*. Dado que el sistema de fracturas es de alta transmisibilidad y está directamente conectado al pozo, este responde primero; la matriz no está conectada de forma directa al pozo y es de baja transmisibilidad, por lo tanto responde después. La separación entre las dos rectas depende de la capacidad de almacenamiento relativa,  $\omega$ , mientras que el periodo de transición de la primera a la segunda línea será una función de la relación de transmisibilidades,  $\lambda$ .

### 4.3 Solución Flujo Radial Monofásico en Tres Medios

Las ecuaciones que describen el flujo de un fluido ligeramente compresible, con todas las suposiciones usuales, en un medio de triple porosidad y una permeabilidad, de acuerdo a **Rodríguez y cols** <sup>(27)</sup>, se describen a continuación:

El flujo radial en el medio con porosidad secundaria de gran escala, hacia un pozo produciendo a gasto constante en un yacimiento infinito, se describe por:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left( r_D \frac{\partial p_{DF}}{\partial r_D} \right) + \lambda_{fF} (p_{Df} - p_{DF}) = \omega_F \frac{\partial p_{DF}}{\partial t_D}. \quad (4.18)$$

Las condiciones iniciales y de frontera están dadas por:

$$p_{DF}(r_D, 0) = 0, \quad (4.19)$$

$$r_D \frac{\partial p_{DF}}{\partial r_D} \Big|_{r_D=1} = -1, \quad (4.20)$$

y,

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_{DF}(r_D, t_D) = 0. \quad (4.21)$$

La ecuación de flujo para el medio con porosidad secundaria de pequeña escala es:

$$-\lambda_{fF} (p_{Df} - p_{DF}) + \lambda_{mf} (p_{Dm} - p_{Df}) = \omega_f \frac{\partial p_{Df}}{\partial t_D}. \quad (4.22)$$

con la siguiente condición inicial:

$$p_{Df}(r_D, 0) = 0. \quad (4.23)$$

La ecuación de flujo para la matriz es:

$$-\lambda_{mf}(p_{Dm} - p_{Df}) = \omega_m \frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D} . \quad (4.24)$$

con la siguiente condición inicial:

$$p_{Dm}(r_D, 0) = 0 . \quad (4.25)$$

Las variables adimensionales están definidas por:

$$p_{DF} = 2\pi k_F h(p_i - p_F) / q\mu B , \quad (4.26)$$

$$p_{Df} = 2\pi k_F h(p_i - p_f) / q\mu B , \quad (4.27)$$

$$p_{Dm} = 2\pi k_F h(p_i - p_m) / q\mu B , \quad (4.28)$$

$$t_D = k_F t / \sum (\phi c_t) \mu r_w^2 , \quad (4.29)$$

$$r_D = r / r_w , \quad (4.30)$$

$$\lambda_{mf} = k_m \sigma_{mf} r_w^2 / k_F , \quad (4.31)$$

$$\lambda_{fF} = k_f \sigma_{fF} r_w^2 / k_F , \quad (4.32)$$

$$\omega_F = (\phi c_t)_F / \sum (\phi c_t) , \quad (4.33)$$

$$\omega_f = (\phi c_t)_f / \sum (\phi c_t) , \quad (4.34)$$

$$\omega_m = 1 - (\phi c_t)_F - (\phi c_t)_f, \quad (4.35)$$

$$\Sigma(\phi c_t) = (\phi c_t)_F + (\phi c_t)_f + (\phi c_t)_m. \quad (4.36)$$

La solución matemática al problema descrito por las ecuaciones (4.18) a (4.25), es:

$$p_{wDF}(t_D) = \frac{1}{2} [\text{Ln}(t_D) + 0.80908] - \frac{1}{2} E_1\left(\frac{t_D}{a_1}\right) + \frac{1}{2} E_1\left(\frac{t_D}{a_2}\right) - \frac{1}{2} E_1\left(\frac{t_D}{a_3}\right) + \frac{1}{2} E_1\left(\frac{t_D}{a_4}\right), \quad (4.37)$$

donde  $a_j$ ,  $j=1,2,\dots,4$ , depende del almacenamiento y de los parámetros de interflujo del medio de triple porosidad.

A partir de la ecuación (4.37), se puede obtener una expresión para describir la derivada de la presión <sup>(27)</sup>, esto es:

$$t_D \left( \frac{dp_{wD}}{dt_D} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 + e^{-\frac{t_D}{a_1}} - e^{-\frac{t_D}{a_2}} + e^{-\frac{t_D}{a_3}} - e^{-\frac{t_D}{a_4}} \right). \quad (4.38)$$

Donde:

$$a_1 = \frac{1}{2} \left( c_1 - \sqrt{c_1^2 - 4c_3} \right),$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left( c_2 - \sqrt{c_2^2 - 4c_4} \right)$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \left( c_1 + \sqrt{c_1^2 - 4c_3} \right),$$

$$a_4 = \frac{1}{2} \left( c_2 + \sqrt{c_2^2 - 4c_4} \right)$$

y,

$$c_1 = \frac{(\omega_f + \omega_F)\omega_m}{\lambda_{mf}} + \frac{(\omega_m + \omega_f)\omega_F}{\lambda_{jF}},$$

$$c_2 = \frac{\omega_m}{\lambda_{mf}} + \frac{(\omega_m + \omega_f)}{\lambda_{jF}},$$

$$c_3 = \frac{\omega_m \omega_f \omega_F}{\lambda_{mf} \lambda_{jF}},$$

$$c_4 = \frac{\omega_m \omega_f}{\lambda_{mf} \lambda_{jF}}$$

#### 4.4 Resultados de la Simulación de Flujo Monofásico en Uno, Dos y Tres Medios

La tabla 4.1 muestra los datos utilizados en la validación del modelo. Cabe mencionar que para poder realizar la validación, el valor de la porosidad se mantuvo constante en ambos casos (analítica y numérica), ya que las soluciones analíticas utilizadas hacen esta suposición.

La figura 4.1 muestra los resultados obtenidos para la simulación de flujo monofásico en uno, dos y tres medios, graficados con los resultados de las soluciones analíticas descritas anteriormente. En esta figura puede observarse que ambos resultados (analíticos vs numéricos), se ajustan perfectamente.

Como puede observarse en esa misma figura, cuando se tiene flujo en un solo medio, se presenta un comportamiento lineal; cuando se trata de dos medios, se presenta un cambio de pendiente y; cuando se trata de tres medios, dos cambios de pendiente. Lo anterior se debe a que el medio uno es de alta transmisibilidad y esta directamente conectado al pozo, por lo tanto, este responde primero; los medios 2 y 3 no están conectados de forma directa al pozo y son de baja transmisibilidad, por lo tanto responden después.

En la figura 4.1 también puede observarse que al inicio de la simulación el comportamiento de los resultados de los tres casos (uno, dos y tres medios), es el mismo; esto es porque al inicio de la simulación no se sienten los efectos del segundo y tercer medio, estos se van sintiendo conforme avanza el transiente. Finalmente, en los resultados obtenidos mediante la solución numérica, al final de la simulación pueden apreciarse los efectos de frontera, situación que no se presenta en los resultados de las soluciones analíticas, ya que suponen yacimiento infinito.

	Unidades Prácticas	Unidades del SI
$P_i$	4351.1[psi]	30.0E+06[Pa]
$Q_o$	3773.8[bpd]	600[m <sup>3</sup> /Seg]
$r_w$	0.3281[ft]	0.1[m]
$h$	164.0[ft]	50.0[m]
$k$	1000/100/1[mD]	9.87E-13/9.87E-14/9.87E-16[m <sup>2</sup> ]
$\phi$	0.01/0.1/0.3[Frac.]	0.01/0.1/0.3[Frac.]
$C_t$	4.0E-05/4.0E-05/4.0E-05[psi <sup>-1</sup> ]	5.8E-09/5.8E-09/5.8E-09[Pa <sup>-1</sup> ]
$\Sigma\omega t$	0.16/0.16/0.16[Frac.]	0.16/0.16/0.16[Frac.]
$\alpha$	9.29E-02/9.29E-02[ft <sup>-2</sup> ]	1.0/1.0[m <sup>-2</sup> ]
$\mu_o$	0.695[cp]	[Pa- 6.95E-04Seg]
$B_o$	2.0[bbl/bbl]	2.0[m <sup>3</sup> /m <sup>3</sup> ]
$\omega$	2.44E-02/2.44E-01/7.32E-01	
$\lambda$	1.00E-03/1.00E-05	

**Tabla 4.1 Datos Generales Utilizados para la Validación del Modelo Propuesto**

Presión (Mpa)	Bo (m3/m3)	$\mu_o$ (cp)	$\rho_o$ (kg/m3)	Rs (m3/m3)
0.101	1.062	1.040	740.754	0.178
1.825	1.150	0.975	697.511	16.118
3.548	1.207	0.910	677.378	32.057
6.996	1.295	0.830	656.820	66.073
13.891	2.000	0.695	624.634	113.267
17.338	2.000	0.695	613.571	138.022
20.786	2.000	0.695	605.129	165.627
27.680	2.000	0.695	593.420	226.180
62.154	2.000	0.695	593.420	226.180

**Tabla 4.2 Datos PVT Utilizados para la Validación del Modelo Propuesto**

Pwf vs Log (t)

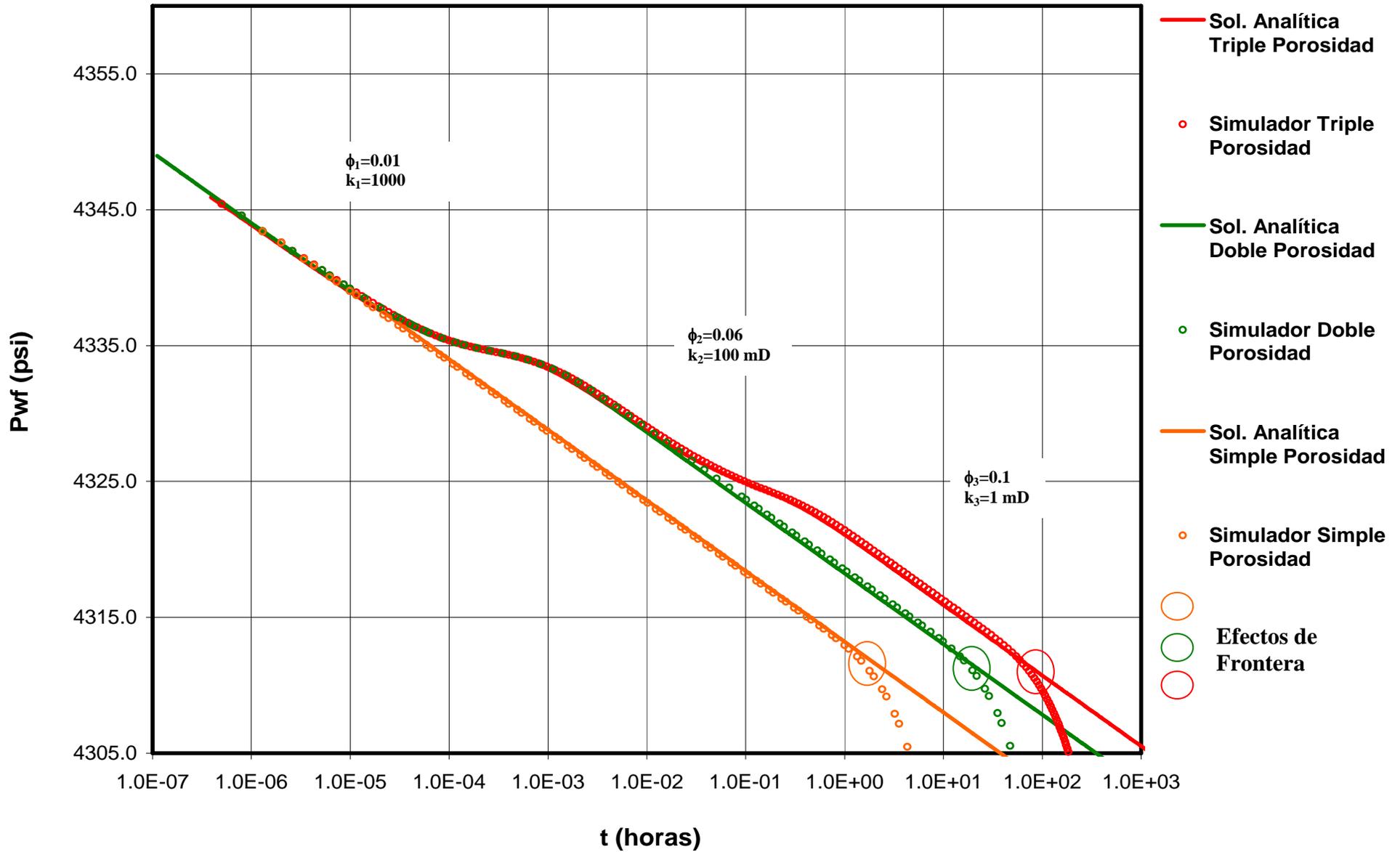


Figura 4.1 Resultados Obtenidos para las Soluciones Numérica y Analítica

## CAPÍTULO 5

### RESULTADOS

El objetivo del presente capítulo es mostrar el funcionamiento del simulador una vez que se ha incorporado el modelo de triple porosidad, por medio de la simulación de tres casos sintéticos. Los casos simulados son:

#### 5.1 Caso 1. Simulación de un Sistema de Triple Porosidad por Medio del Modelo de Doble Porosidad.

El objetivo de este caso es mostrar la importancia de la caracterización y modelado correctos de los yacimientos de múltiple porosidad. Para lo anterior se utilizó un caso sintético de un yacimiento compuesto de tres medios porosos, el cual es explotado por medio de un pozo productor ubicado al centro de la malla. En cada uno de los extremos de la malla se cuenta además con un pozo inyector, cuyo objetivo es mantener la presión en el yacimiento. La malla utilizada para este caso fue de 20x20x3 celdas. Los datos utilizados para la simulación del modelo de triple porosidad se muestran en las tablas 5.1 y 5.2.

Propiedad	Unidades Prácticas	Unidades del SI
$P_i$	4206.094[psi]	29.00E+06[Pa]
$P_b$	4014.644[psi]	27.68E+06[Pa]
$Q_w(iny)$	3144.9, 3144.9, 3144.9[bpd]	5.78E-3, 5.78E-3, 5.78E-3[m <sup>3</sup> /seg]
$Q_o(prod)$	6289.8, 6289.8[bpd]	11.575E-3, 11.575E-3[m <sup>3</sup> /Seg]
$H_x$	16568.24[ft]	5050[m]
$H_y$	16568.24[ft]	5050[m]
$H_z$	164.0[ft]	50.0[m]

**Tabla 5.1. Datos Generales Utilizados para la Simulación del Caso 1.**

Propiedades para el modelo de triple porosidad:

Propiedad	Unidades Prácticas	Unidades del SI
$k$	300/50/10 [mD]	2.96E-13/4.93E-14/9.87E-16 [m <sup>2</sup> ]
$\phi$	0.03/0.04/0.04 [Frac.]	0.03/0.04/0.04 [Frac.]
$C_t$	4.35E-4/4.35E-4/4.35E-4 [psi <sup>-1</sup> ]	6.31E-08/6.31E-08/6.31E-08 [Pa <sup>-1</sup> ]
$S_{wi}$	0.0/0.16/0.16 [Frac.]	0.0/0.16/0.16 [Frac.]

**Tabla 5.2. Datos Utilizados para la Simulación del Modelo de Triple Porosidad.**

Una vez realizada la simulación del yacimiento tomando en cuenta las propiedades de los tres medios, se buscó la forma de simular este yacimiento por medio del modelo de

doble porosidad, para lo cual se fusionaron los medios dos y tres, tomando en cuenta las propiedades de ambos. Para el caso de la porosidad, únicamente se sumaron los valores de ambos medios, pero para el caso de la permeabilidad, fue necesario probar con tres tipos de promedios (aritmético, armónico y geométrico) de ambos valores y simular los tres casos para observar cual de los tres valores arrojaba mejores resultados. Los datos utilizados para la simulación de los modelos de doble porosidad se muestran en las tablas 5.3, 5.4 y 5.5.

Propiedades para los modelos de doble porosidad:

a) Promedio Aritmético

Propiedad	Unidades Prácticas		Unidades del SI	
$k$	300/30	[mD]	2.96E-13/2.96E-14	[m <sup>2</sup> ]
$\phi$	0.03/0.08	[Frac.]	0.03/0.08	[Frac.]
$C_t$	4.35E-04/4.35E-04	[psi <sup>-1</sup> ]	6.31D-08/6.31E-08	[Pa <sup>-1</sup> ]
$S_{wi}$	0.0/0.16	[Frac.]	0.0/0.16	[Frac.]

**Tabla 5.3. Datos Utilizados para la Simulación del Modelo de Doble Porosidad. Promedio Aritmético.**

b) Promedio Armónico

Propiedad	Unidades Prácticas		Unidades del SI	
$k$	300/16.6	[mD]	2.96E-13/1.64E-14	[m <sup>2</sup> ]
$\phi$	0.03/0.08	[Frac.]	0.03/0.08	[Frac.]
$C_t$	4.35E-04/4.35E-04	[psi <sup>-1</sup> ]	6.31D-08/6.31E-08	[Pa <sup>-1</sup> ]
$S_{wi}$	0.0/0.16	[Frac.]	0.0/0.16	[Frac.]

**Tabla 5.4. Datos Utilizados para la Simulación del Modelo de Doble Porosidad. Promedio Armónico.**

c) Promedio Geométrico

Propiedad	Unidades Prácticas		Unidades del SI	
$k$	300/22.36	[mD]	2.96E-13/2.2E-14	[m <sup>2</sup> ]
$\phi$	0.03/0.08	[Frac.]	0.03/0.08	[Frac.]
$C_t$	4.35E-04/4.35E-04	[psi <sup>-1</sup> ]	6.31D-08/6.31E-08	[Pa <sup>-1</sup> ]
$S_{wi}$	0.0/0.16	[Frac.]	0.0/0.16	[Frac.]

**Tabla 5.5. Datos Utilizados para la Simulación del Modelo de Doble Porosidad. Promedio Geométrico.**

La figura 5.1 muestra los resultados de las cuatro simulaciones realizadas. Como se puede observar en dicha figura, aunque en los primeros años de la simulación los resultados de ambos modelos (triple y doble porosidad) son muy similares, al final de la simulación la respuesta de presión obtenida con el modelo de triple porosidad (línea

rosa), es muy diferente a la respuesta obtenida con los modelos de doble porosidad, lo que conduciría a toma de decisiones equivocadas.

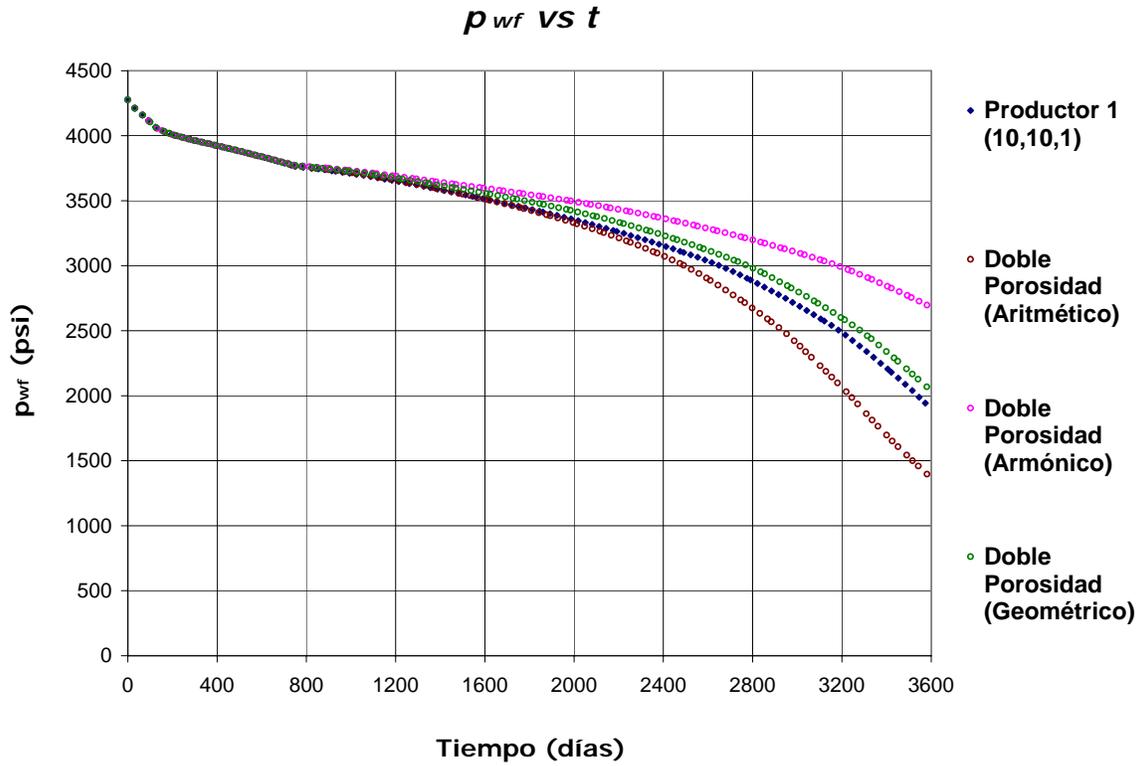


Figura 5.1. Resultados de la Simulación para los Modelos de Triple y Doble Porosidad.

## 5.2 Caso 2. Simulación de Flujo Multifásico en un Sistema de Triple Porosidad.

Para este caso se utilizó una malla de 101x101x1 con 2 pozos productores y 3 pozos que inyectan agua después de 500 y 750 días de producción. Todos los pozos fueron posicionados de tal forma que la distribución de presiones y saturaciones fuera simétrica. Los datos generales utilizados para la simulación de este caso se muestran en la tabla 5.6.

**Tabla 5.6 Datos Generales Utilizados para la Simulación del Caso 2.**

Propiedad	Unidades Prácticas	Unidades del SI
$P_i$	4206.094[psi]	29.00E+06[Pa]
$P_b$	4014.644[psi]	27.68E+06[Pa]
$Q_w(iny)$	12579.6, 12579.6, 12579.6[bpd]	23.15E-3, 23.15E-3, 23.15E-3[m <sup>3</sup> /seg]
$Q_o(prod)$	12579.6, 12579.6[bpd]	23.15E-3, 23.15E-3[m <sup>3</sup> /Seg]
$H_x$	16568.24[ft]	5050[m]
$H_y$	16568.24[ft]	5050[m]
$H_z$	164.0[ft]	50.0[m]
$k$	150/50/10[mD]	1.48E-13/4.93E-14/9.87E-15[m <sup>2</sup> ]
$\phi$	0.03/0.04/0.08[Frac.]	0.03/0.04/0.08[Frac.]
$C_t$	3.0E-05/3.0E-05/3.0E-05[psi <sup>-1</sup> ]	4.35E-09/4.35E-09/4.35E-09[Pa <sup>-1</sup> ]
$S_{wi}$	0.0/0.18/0.18[Frac.]	0.0/0.18/0.18[Frac.]

Los datos PVT para este caso se muestran en las tablas 5.7 a 5.9.

**Tabla 5.7 Datos PVT para el Aceite Utilizados para la Simulación del Caso 2.**

Po (MPa)	Bo (m3/m3)	$\mu_o$ (cp)	$\rho_o$ (kg/m3)	Rso(m3/m3)
0.10135	1.062	1.04000	740.753	0.178093
1.82504	1.150	0.97500	697.511	16.117453
3.54873	1.207	0.91000	677.378	32.056812
6.99611	1.295	0.83000	656.820	66.072651
13.89086	1.435	0.69500	624.634	113.267402
17.33824	1.500	0.64100	613.571	138.022385
20.78562	1.565	0.59400	605.192	165.626862
27.68037	1.695	0.51000	593.420	226.178618
62.15415	1.579	0.74000	637.015	226.178618

Tabla 5.8 Datos PVT para el Gas Utilizados para la Simulación del Caso 2.

Pg (MPa)	Bg (m3/m3)	$\mu_g$ (cp)	$\rho_g$ (kg/m3)	rsg(m3/m3)
0.10135	0.936	0.00800	1.036	0
1.82504	0.068	0.01000	14.282	0
3.54873	0.035	0.01100	27.528	0
6.99611	0.018	0.01400	54.022	0
13.89086	0.009	0.01900	107.007	0
17.33824	0.007	0.02100	133.469	0
20.78562	0.006	0.02300	159.915	0
27.68037	0.005	0.02700	212.958	0
62.15415	0.002	0.04700	447.432	0

Tabla 5.9 Datos PVT para el Agua Utilizados para la Simulación del Caso 2.

Pw (MPa)	Bw (m3/m3)	$\mu_w$ (cp)	$\rho_w$ (kg/m3)
0.10135	1.041	0.310	996.4848
1.82504	1.041	0.310	997.2328
3.54873	1.040	0.310	997.9819
6.99611	1.038	0.310	999.4834
13.89086	1.035	0.310	1002.5001
17.33824	1.034	0.310	1004.0131
20.78562	1.032	0.310	1005.5350
27.68037	1.029	0.310	1008.5884
62.15415	1.029	0.310	1008.5884

La simulación de este caso se llevó a cabo en dos etapas: en una primera etapa se realizó la simulación con valores de presión capilar únicamente para el medio 3 y en una segunda etapa se realizó la simulación sin valores de presión capilar; esto con el fin de observar el efecto entre simular con y sin valores de presión capilar. Los datos de presión capilar y permeabilidad utilizados se muestran en la figura 5.2. Cabe mencionar que por ser un caso sintético se decidió usar curvas de permeabilidad relativa en forma de "x" para la fractura, aunque en la realidad estas curvas pueden tener un comportamiento diferente <sup>(39)</sup>.

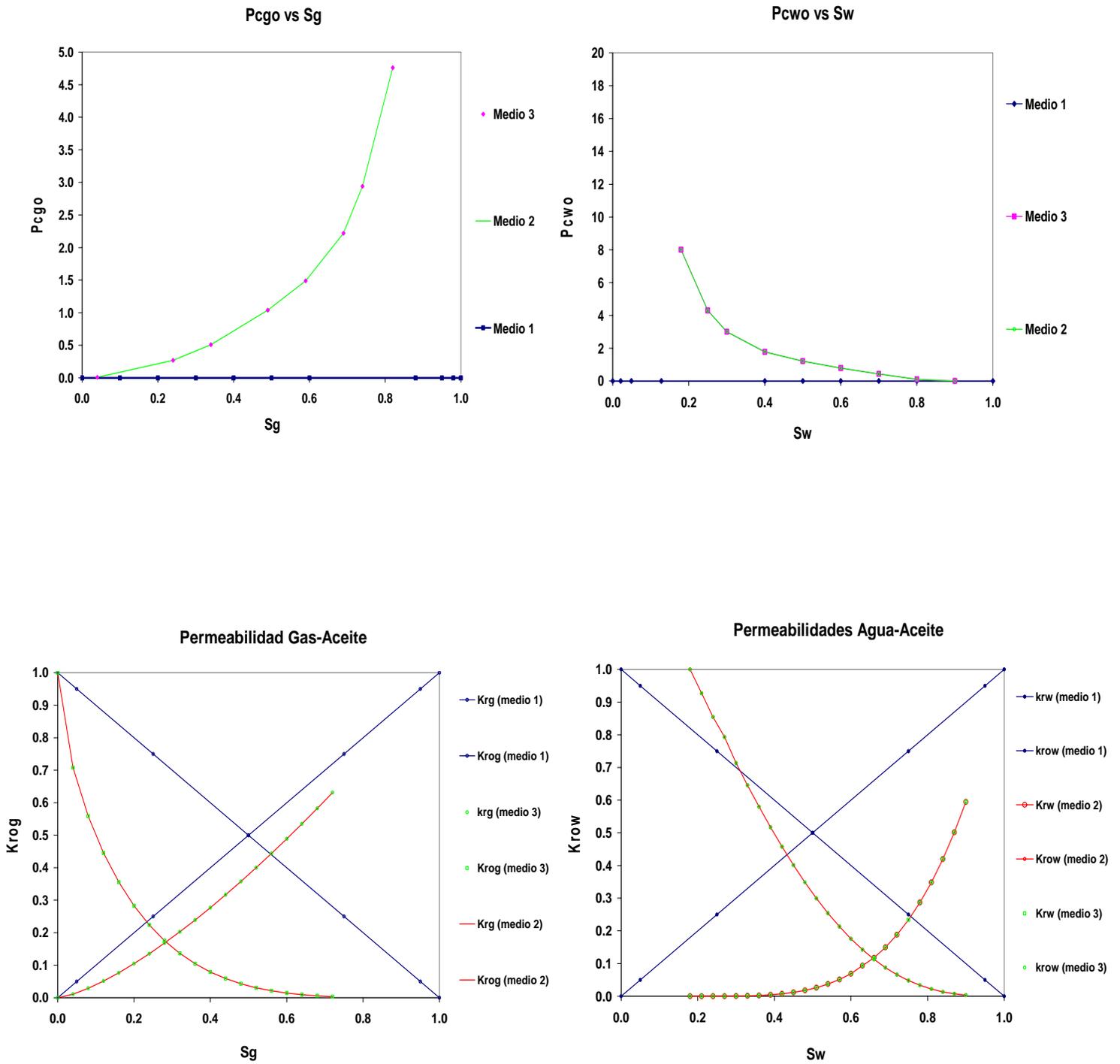


Figura 5.2 Gráficas de Presión Capilar y Permeabilidad Utilizados en la Simulación del Caso 2.

En la figura 5.3 se observa el comportamiento de la presión de fondo fluyendo tanto en los pozos productores como en los inyectores. Al inicio de la simulación el comportamiento en ambos casos (con y sin presión capilar) es similar, pero a partir de los 1000 días de simulación se observa que la caída de presión para el caso en que se utilizaron datos de presión capilar ( $P_c \neq 0$ ), fue mayor que en el caso donde no se utilizaron. La similitud al inicio de la simulación se debe a que los medios uno y dos tienen  $p_c = 0$ , y es hasta que se sienten los efectos del medio 3 (con  $P_c \neq 0$ ), que se presenta una diferencia en los resultados de  $p_{wf}$ , ya que para que el aceite fluya se tienen que vencer los efectos de las fuerzas capilares, las cuales se encuentran relacionadas con la tensión interfacial, la mojabilidad y el tamaño de poro, lo que provoca una caída adicional de la presión.

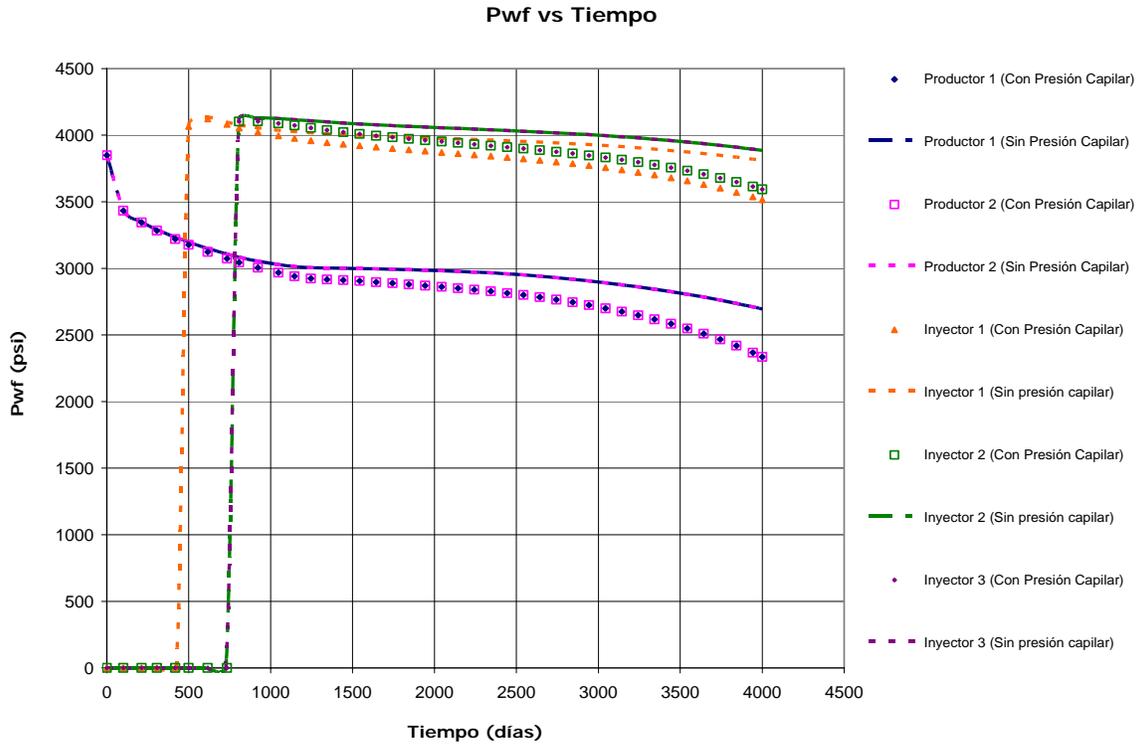
En la figura también se observa que a pesar de que a los 500 días de simulación se inicia la inyección de agua en uno de los pozos, esto no es suficiente para mantener la presión en el yacimiento y esta sigue disminuyendo, por lo que, a los 750 días se inicia la inyección en dos pozos más, y no es sino hasta aproximadamente 1000 días de simulación cuando se observa un cambio en el comportamiento de la presión, la cual tiene un comportamiento relativamente lineal hasta aproximadamente 2000 días de simulación, cuando nuevamente empieza a disminuir.

En la figura 5.4 se encuentra graficado el gasto de aceite vs tiempo. En esta figura puede observarse que el gasto de aceite se mantiene constante durante todo el tiempo de simulación. Lo anterior se debe a que en el simulador se encuentra especificado como constante el gasto, en dicho caso y de acuerdo a la Ley de Darcy, si el gasto se mantiene constante, la que varía es la presión. Como es lógico, en los pozos de inyección no se tiene producción de aceite, por lo tanto, estos presentan un gasto de aceite igual a cero.

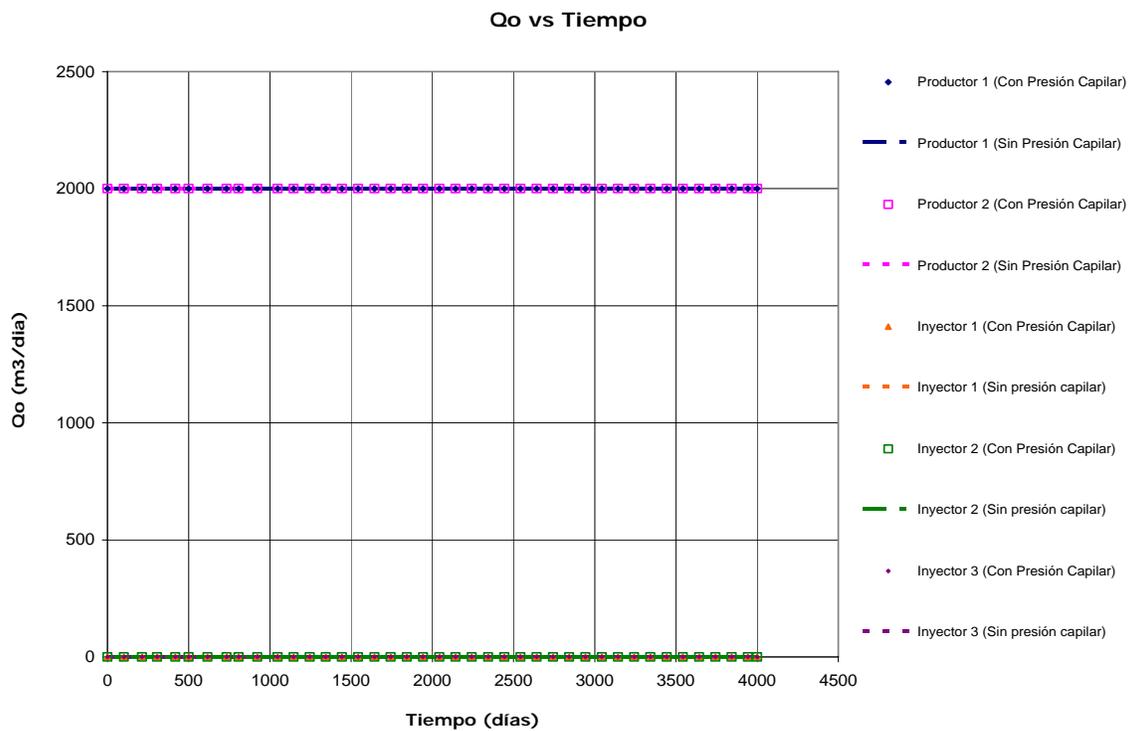
En la figura 5.5 se encuentra graficado el gasto de gas vs tiempo. En esta figura se observa que al inicio y hasta aproximadamente 1000 días de simulación se tiene un comportamiento ascendente en el gasto de gas, esto se debe a que al ir disminuyendo la presión la presencia de gas aumenta dentro del yacimiento, ya que el gas que inicialmente se encontraba disuelto en el aceite, se libera. De 1000 a 2000 días de simulación se presenta un comportamiento descendente, esto debido al mantenimiento de presión que se presenta con la inyección de agua, finalmente, de los 2000 días y hasta el final de la simulación se presenta nuevamente un comportamiento ascendente, nuevamente provocado por el depresionamiento del yacimiento. En esta figura también se observa que el gasto de gas para el caso en el que se tienen datos de presión capilar, es mayor debido a que la caída de presión también es mayor (figura 5.3), por lo tanto, se libera mayor cantidad de gas.

En la figura 5.6 se encuentra graficada la RGA vs tiempo. Los cambios en el comportamiento de la RGA están directamente relacionados con la presencia de gas dentro del yacimiento. Al inicio de la simulación, la RGA aumenta, ya que la presencia de gas aumenta en el yacimiento (figura 5.5), para posteriormente disminuir y volver a aumentar, de acuerdo a la presencia de gas en el yacimiento.

En la figura 5.7 se encuentra graficado el gasto de agua vs tiempo, donde se puede observar que el agua en los pozos productores se presenta hasta aproximadamente 2000 días de producción, esto es, 1500 días después de que se inicia la inyección de agua.



**Figura 5.3 Gráfica de Pwf vs Tiempo para la Simulación de Flujo Multifásico en un Sistema de Triple Porosidad con y sin Presiones Capilares.**



**Figura 5.4 Gráfica de Qo vs Tiempo para la Simulación de Flujo Multifásico en un Sistema de Triple Porosidad con y sin Presiones Capilares.**

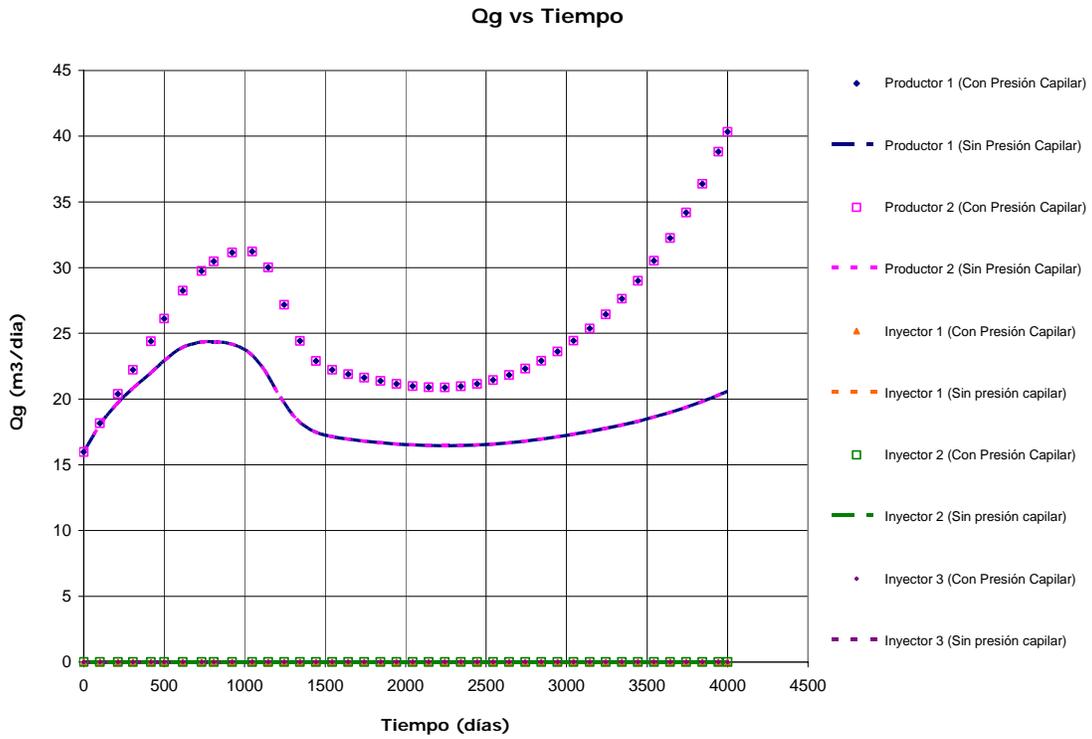


Figura 5.5 Gráfica de Qg vs Tiempo para la Simulación de Flujo Multifásico en un Sistema de Triple Porosidad con y sin Presiones Capilares.

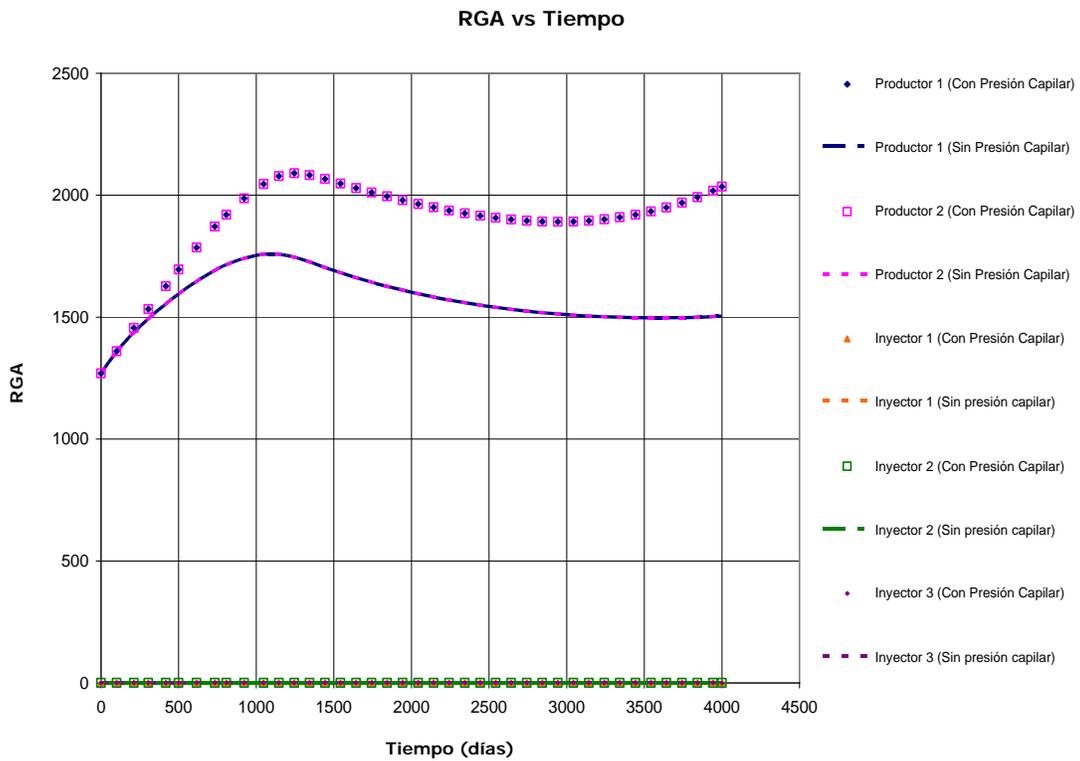
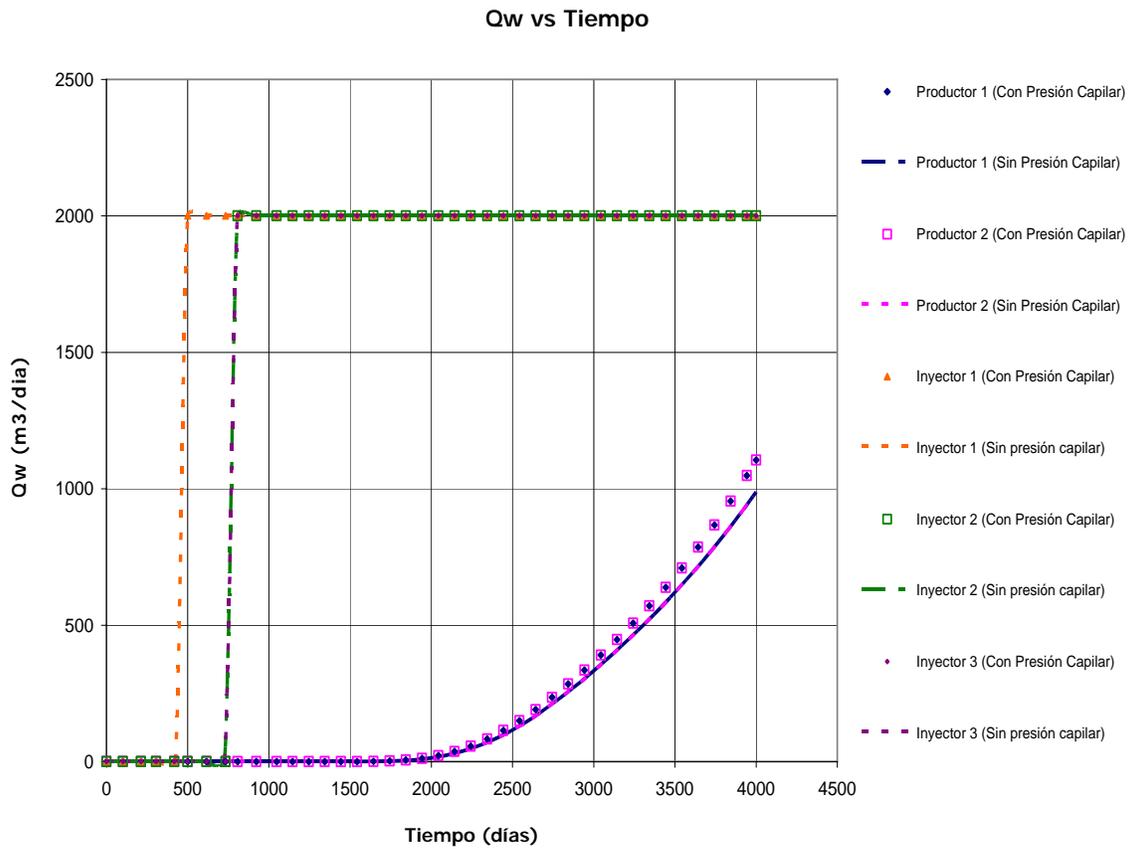


Figura 5.6 Gráfica de RGA vs Tiempo para la Simulación de Flujo Multifásico en un Sistema de Triple Porosidad con y sin Presiones Capilares.



**Figura 5.7 Gráfica de Qw vs Tiempo para la Simulación de Flujo Multifásico en un Sistema de Triple Porosidad con y sin Presiones Capilares.**

Finalmente, en las figuras 5.8 a 5.11, se muestran los gráficos de contorno para las propiedades de  $P_o$ ,  $S_w$ ,  $S_g$  y  $S_o$ , obtenidas en el último paso de tiempo, donde pueden apreciarse claramente las diferencias entre los resultados obtenidos para la simulación con tablas de presión capilar y sin ellas.

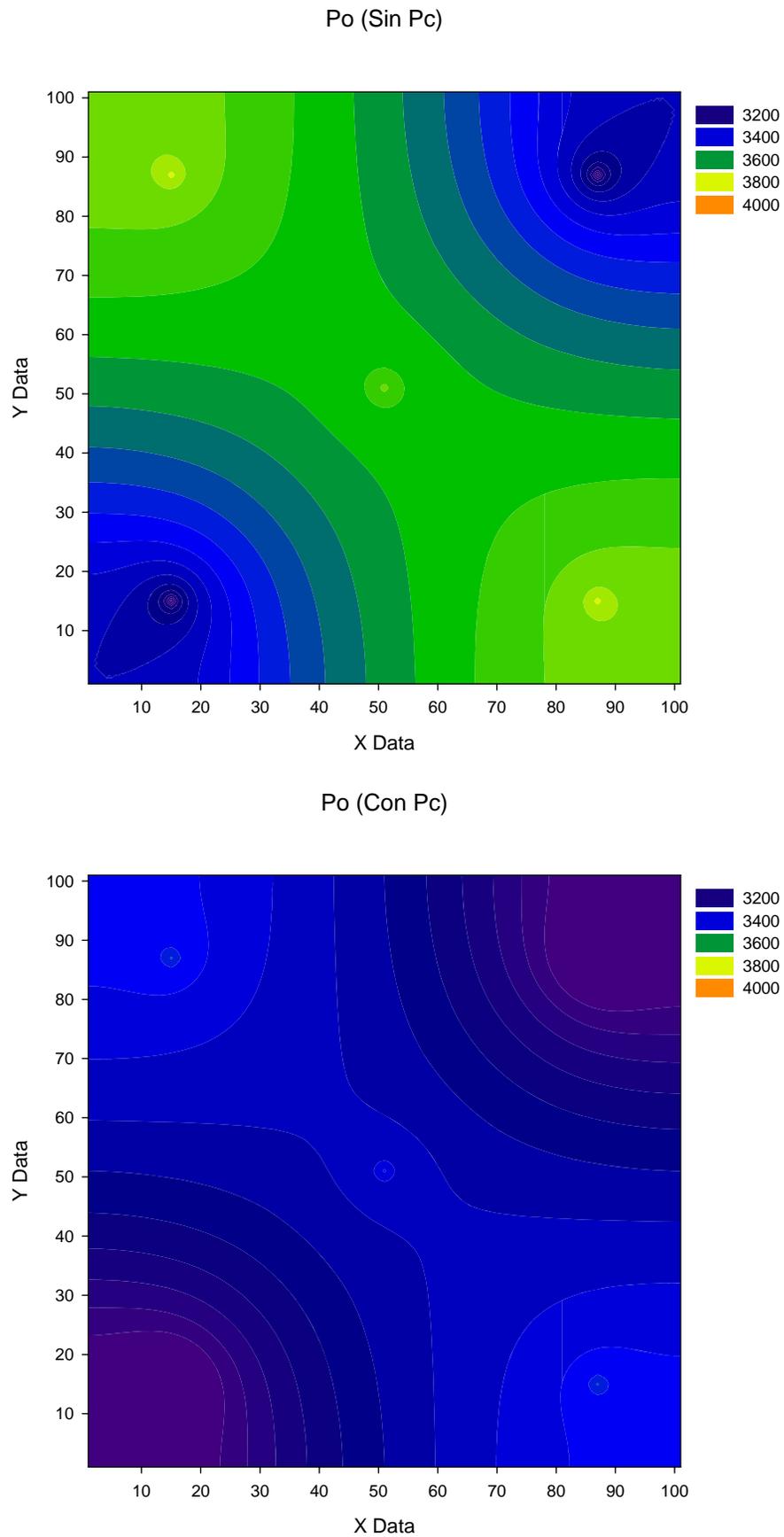


Figura 5.8. Resultados de Presión de Aceite para el Medio 1 con y sin Pc.

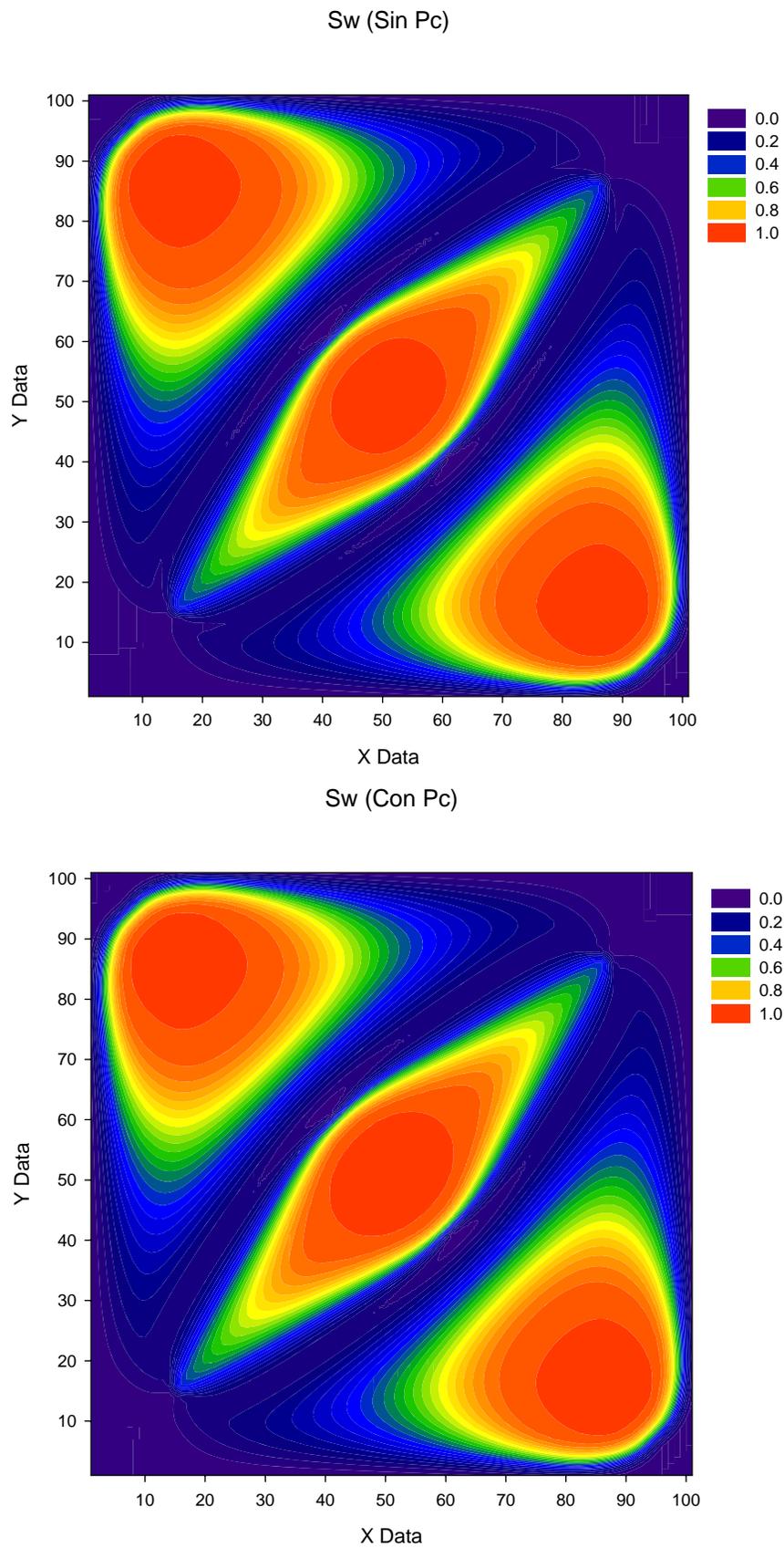
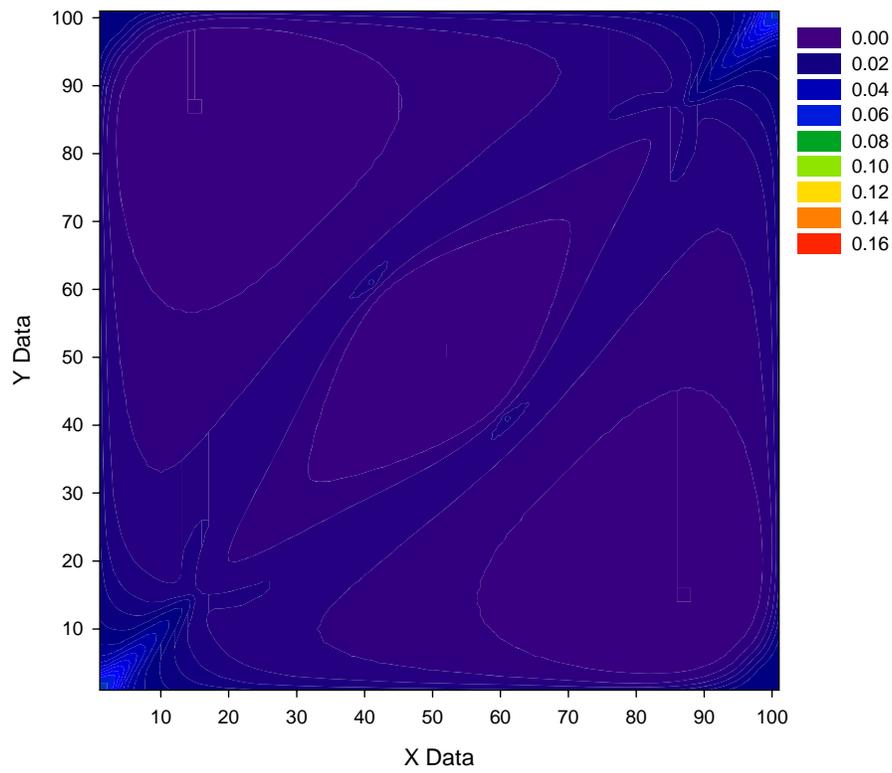


Figura 5.9. Resultados de Saturación de Agua para el Medio 1 con y sin Pc.

Sg (Sin Pc)



Sg (Con Pc)

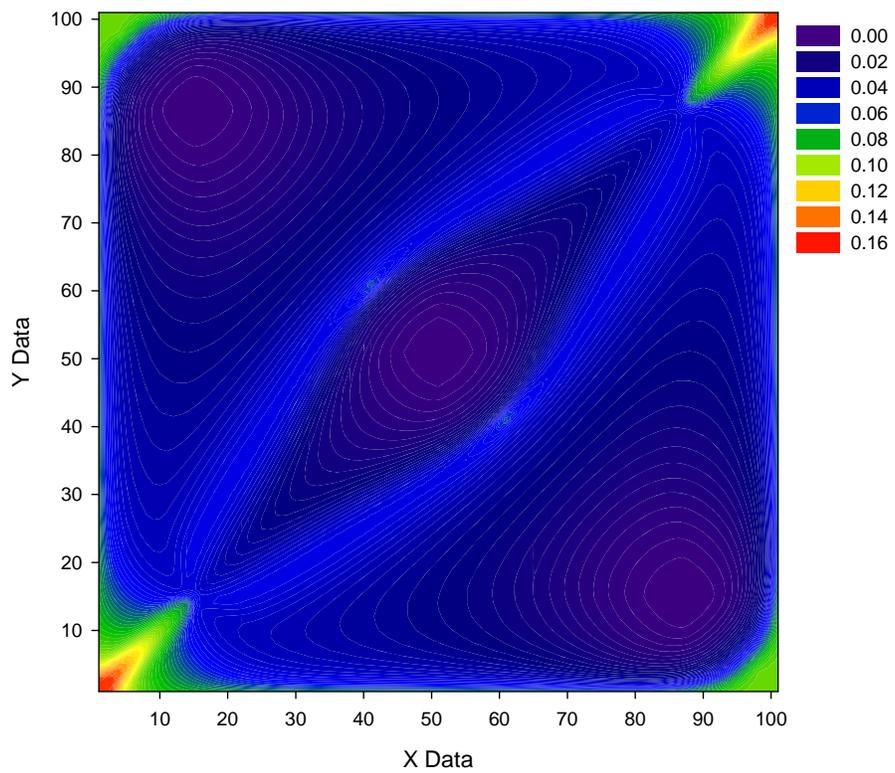
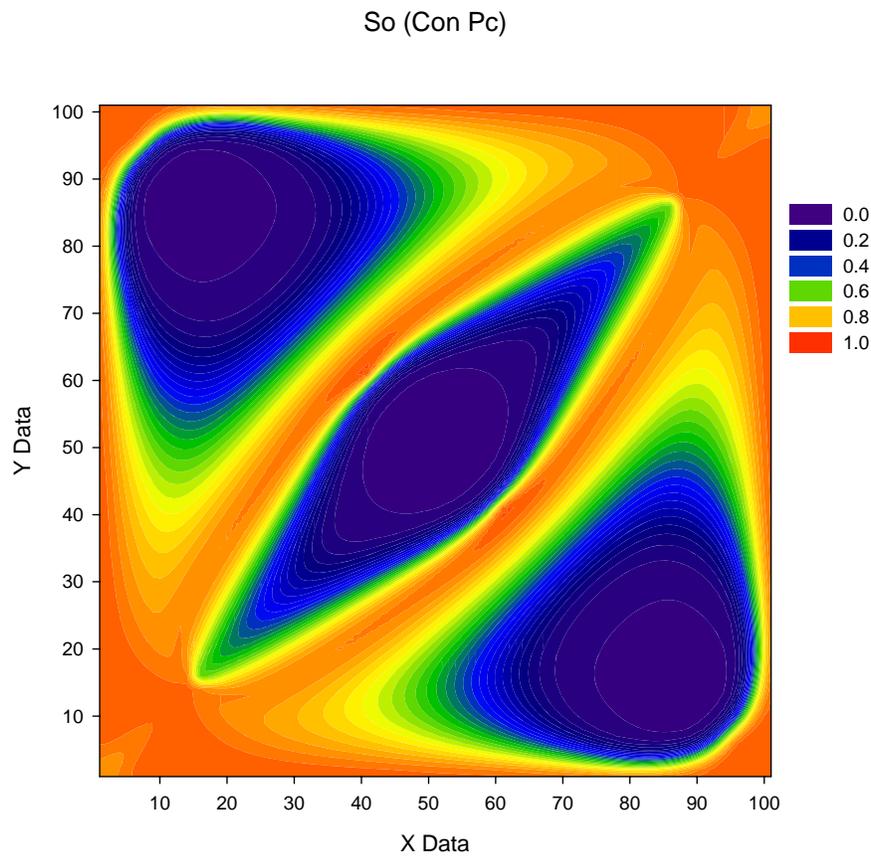
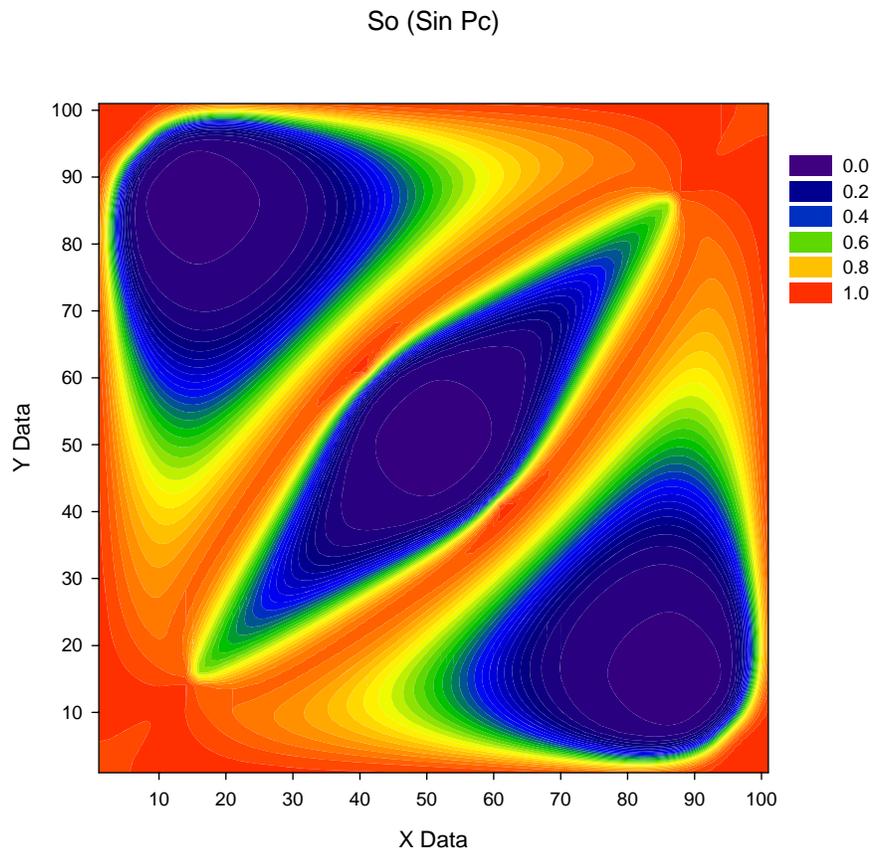


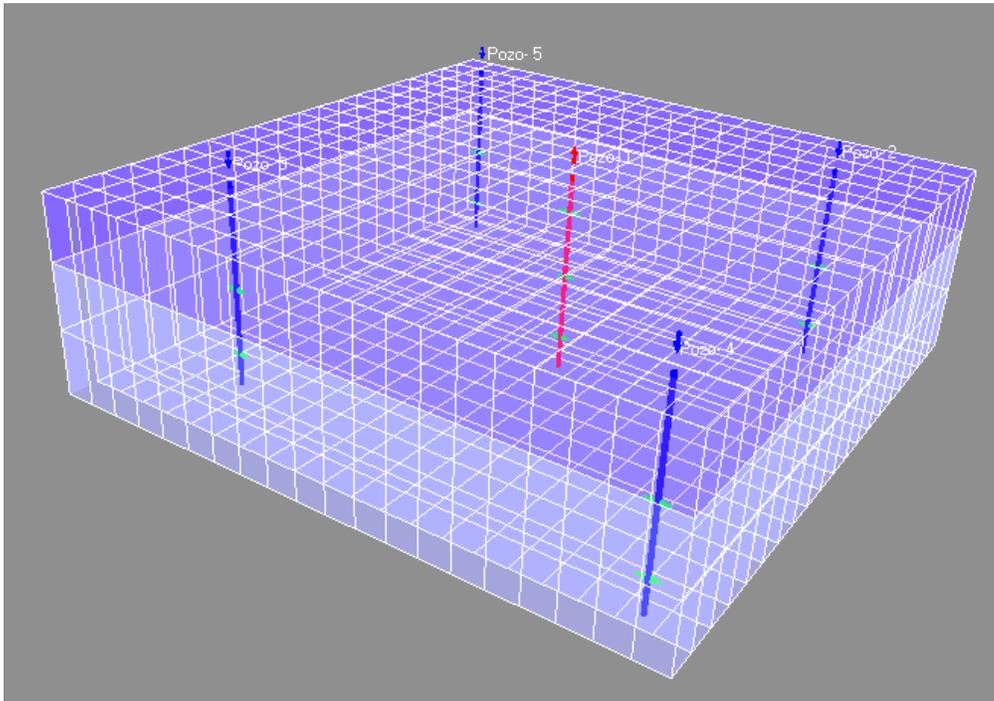
Figura 5.10. Resultados de Saturación de Gas para el Medio 1 con y sin Pc.



**Figura 5.11. Resultados de Saturación de Aceite para el Medio 1 con y sin Pc.**

**5.3 Caso 3. Simulación de Flujo Multifásico en un Sistema de Triple Porosidad.**

Para este caso se utilizó una malla de 20x20x3 en la cual se tienen 5 pozos: un productor ubicado en el centro y cuatro inyectores ubicados en cada uno de los extremos de la malla, los cuales empiezan a inyectar agua a partir de los 750 días de simulación. La malla utilizada y la ubicación de los pozos se muestran en la figura 5.12.



**Figura 5.12. Malla Utilizada en la Simulación del Caso 3.**

Propiedad	Unidades Prácticas	Unidades del SI
$P_i$	4206.094[psi]	29.09E+06[Pa]
$P_b$	4014.644[psi]	27.68E+06[Pa]
	9434.7, 9434.7, 9434.7,	17.36E-3, 17.36E-3, 17.36E-3
$Q_w(iny)$	9434.7[bpd]	17.36E-3[m <sup>3</sup> /seg]
$Q_o(prod)$	15724.15[bpd]	28.93E-3[m <sup>3</sup> /Seg]
$H_x$	6561.67[ft]	2000.0[m]
$H_y$	6561.67[ft]	2000.0[m]
$H_z$	492.12[ft]	150.0[m]
$k$	300/50/10[mD]	2.96E-13/4.93E-14/9.87E-15[m <sup>2</sup> ]
$\phi$	0.03/0.04/0.04[Frac.]	0.03/0.04/0.04[Frac.]
$C_t$	3.0E-06/3.0E-06/3.0E-06[psi <sup>-1</sup> ]	4.35E-10/4.35E-10/4.35E-10[Pa <sup>-1</sup> ]
$S_{wi}$	0.0/0.16/0.16[Frac.]	0.0/0.16/0.16[Frac.]

**Tabla 5.10 Datos Generales Utilizados para la Simulación del Caso 3.**

El propósito de este caso es observar el efecto de las fuerzas gravitacionales, las cuales se reflejan en la distribución de los fluidos dentro del yacimiento. Los datos generales, de presión capilar y permeabilidad utilizados en este caso, se presentan en la tabla 5.10 y las figuras 5.13 y 5.14. Los datos PVT para el aceite, gas y agua, son los mismos que en el caso anterior.

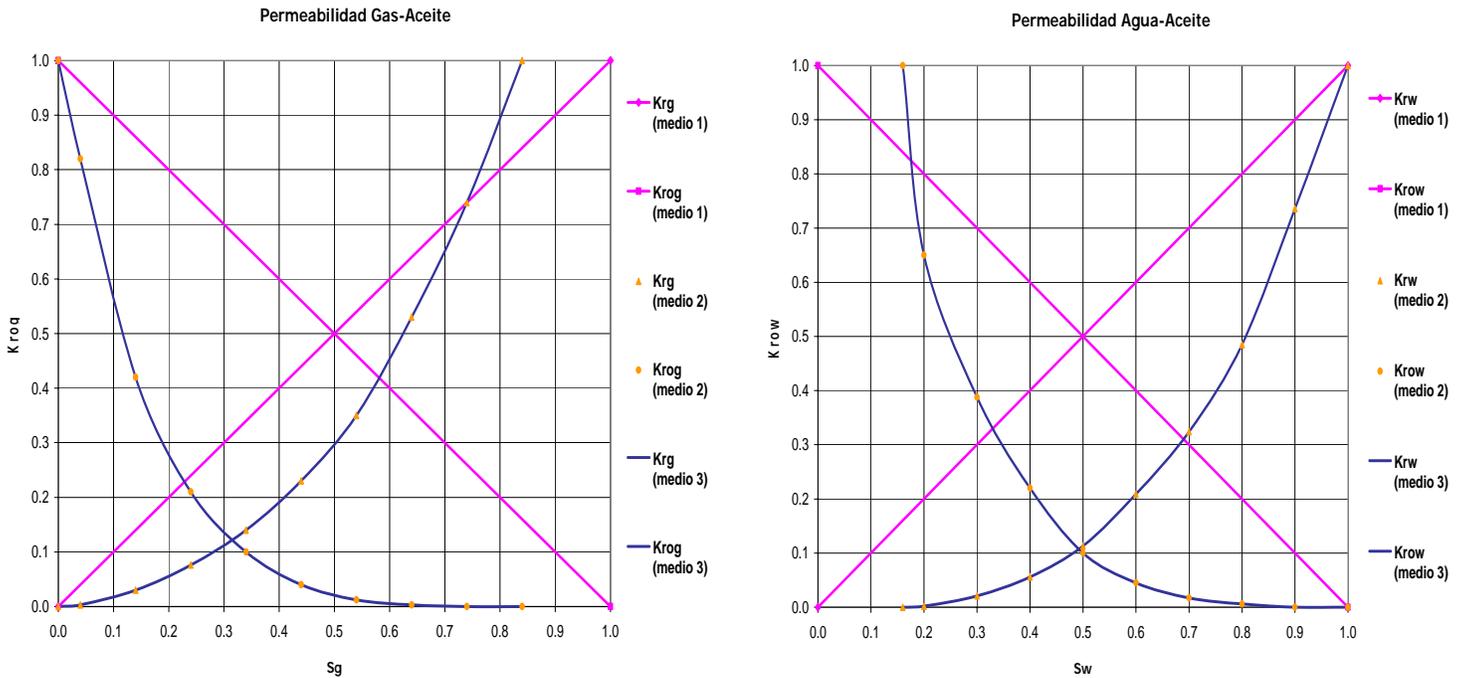


Figura 5.13 Gráficas de Permeabilidad Utilizadas en la Simulación del Caso 3.

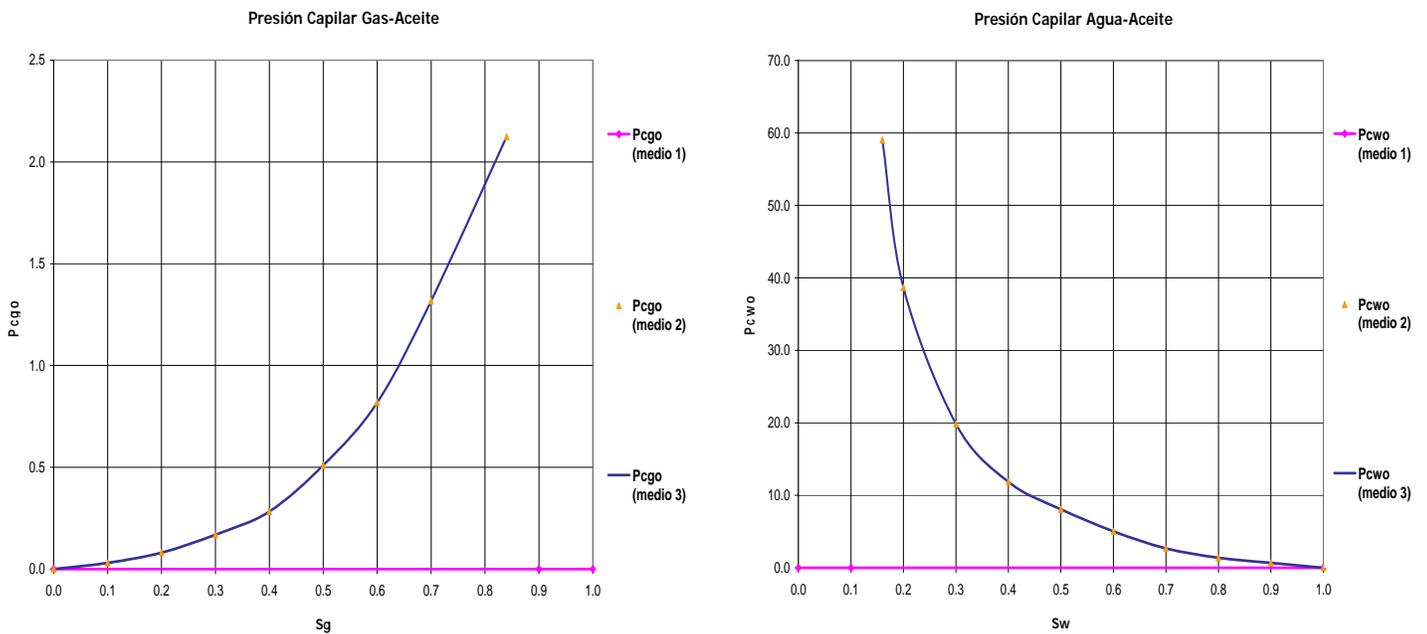


Figura 5.14 Gráficas de Presión Capilar Utilizadas en la Simulación del Caso 3.

En las figuras 5.15 y 5.16, se encuentran graficados los resultados de  $p_{wf}$ , vs  $t$  y de  $Q_o$  vs  $t$ , respectivamente. En la figura 5.16 puede observarse que el gasto de aceite al inicio y hasta aproximadamente 1250 días de simulación es de 2500 m<sup>3</sup>/día, para posteriormente disminuir hasta menos de 500 m<sup>3</sup>/día. Lo anterior se debe a la caída de presión que se observa en la figura 5.15, esto es, el pozo produce al gasto especificado mientras la presión en el yacimiento no llega a un mínimo (1000 psi) y, una vez que cae hasta dicho mínimo, produce únicamente la cantidad que alcanza con dicha presión. Posteriormente el gasto vuelve a incrementarse una vez que se siente el efecto de los pozos inyector de agua.

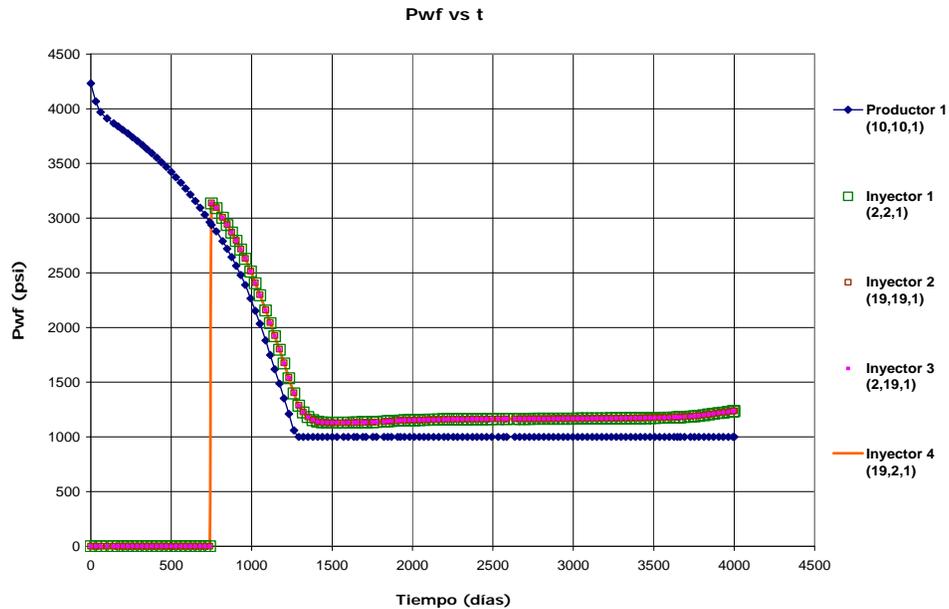


Figura 5.15 Gráfica de  $P_{wf}$  vs Tiempo para la Simulación de Flujo Multifásico en un Sistema de Triple Porosidad (Caso 3).

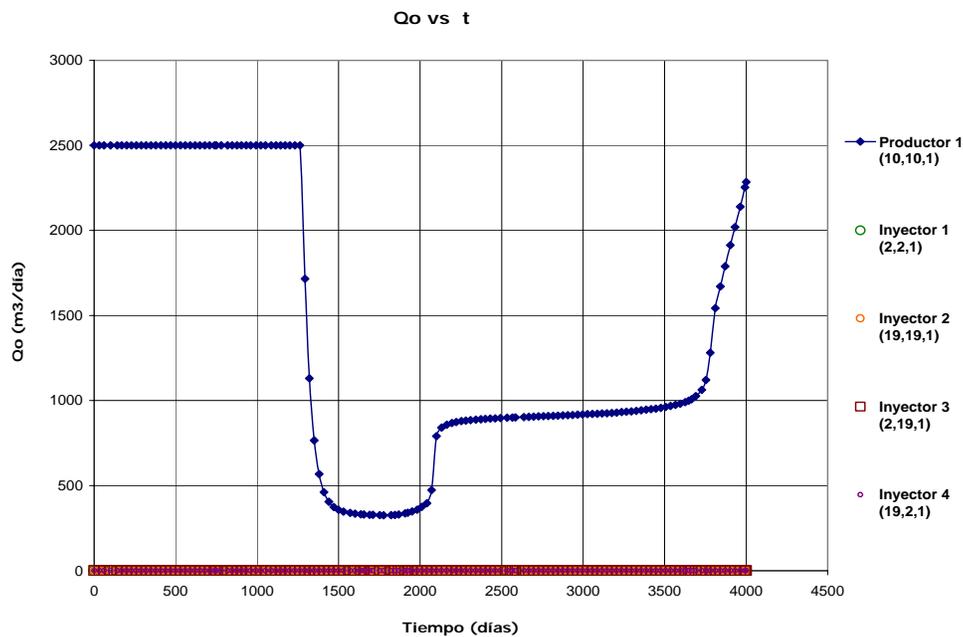
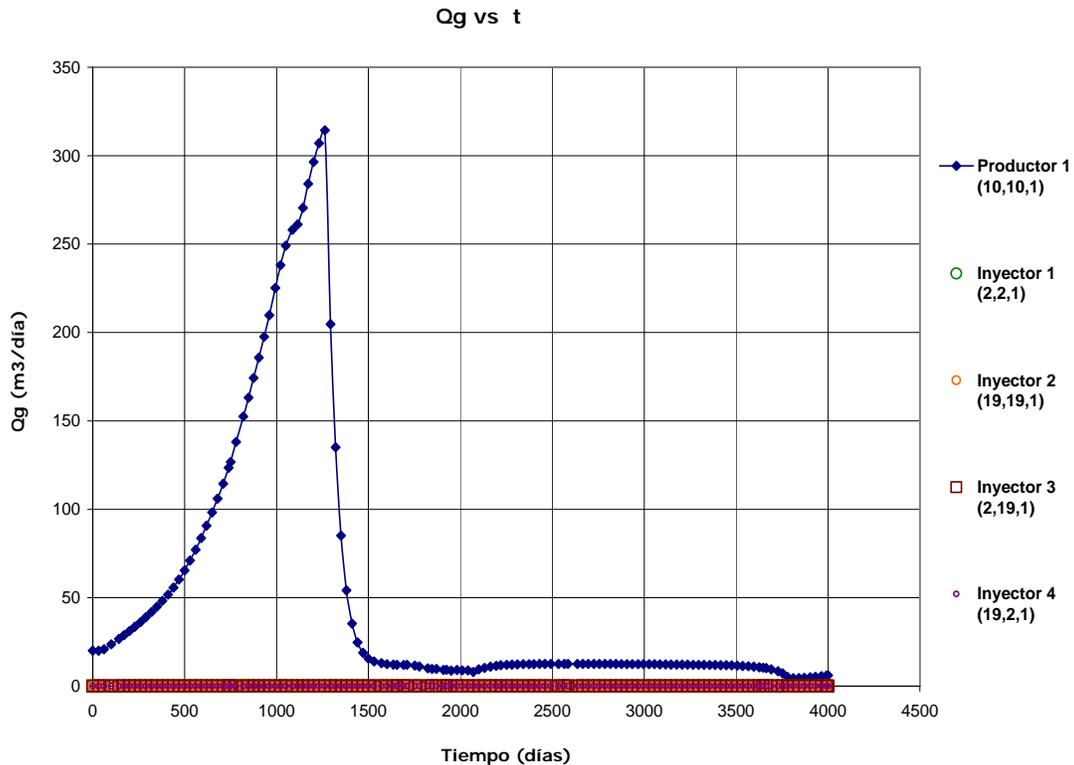


Figura 5.16 Gráfica de  $Q_o$  vs Tiempo para la Simulación de Flujo Multifásico en un Sistema de Triple Porosidad (Caso 3).

En la figura 5.17 se muestran los resultados de gasto de gas vs tiempo. En esta figura se observa un aumento en el gasto de gas ocasionado por el depresionamiento del yacimiento, para posteriormente volver a disminuir al sentirse el efecto de los pozos inyectores.



**Figura 5.17 Gráfica de Qg vs Tiempo para la Simulación de Flujo Multifásico en un Sistema de Triple Porosidad (Caso 2).**

En la figura 5.18 se observa que el agua únicamente se encuentra presente en los pozos inyectores y nunca se presenta en el pozo productor.

Finalmente la figura 5.19 contiene graficados los resultados de RGA vs t. De forma similar al gasto de aceite y gas, es evidente que el comportamiento de la RGA se encuentra influenciado por los cambios de presión dentro del yacimiento.

Las figuras 5.20 a 5.23 muestran la distribución de presiones de aceite y de saturaciones de aceite, gas y agua al final de la simulación. En dichas figuras puede apreciarse como se distribuyen los fluidos en el yacimiento debido a las fuerzas gravitacionales. Esto es, el agua que es el fluido de mayor densidad se distribuye en el fondo del yacimiento, posteriormente el aceite y finalmente el gas que es el fluido con menor densidad.

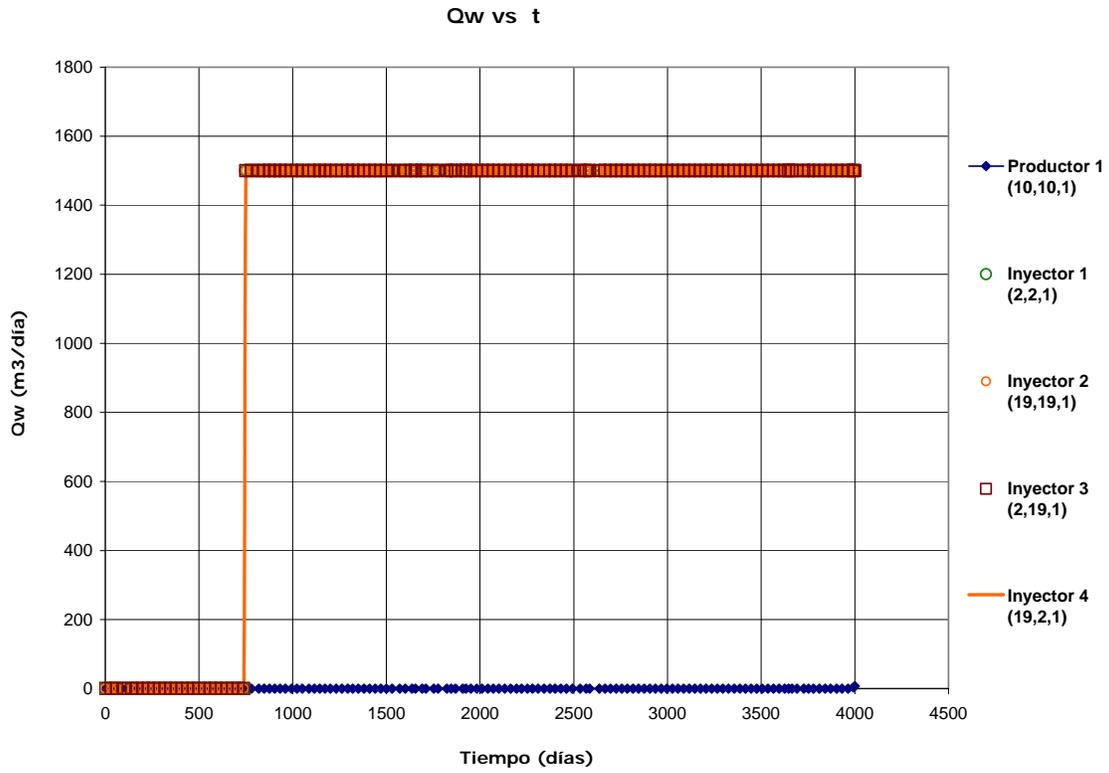


Figura 5.18 Gráfica de Qw vs Tiempo para la Simulación de Flujo Multifásico en un Sistema de Triple Porosidad (Caso 2).

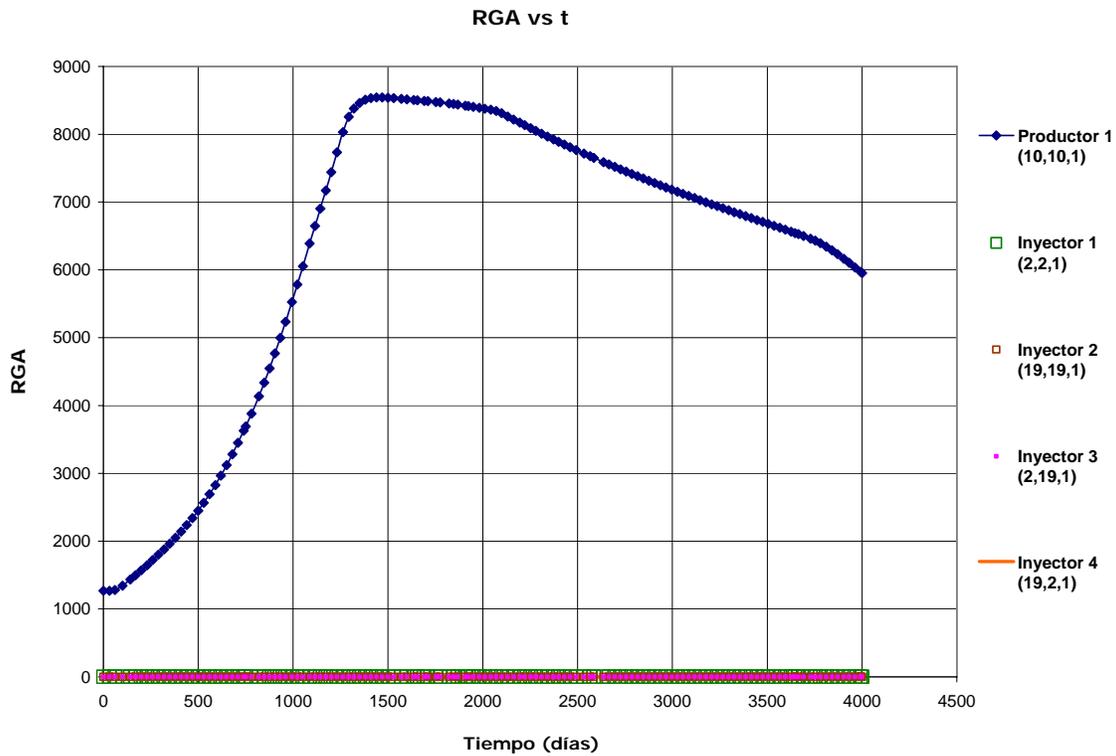
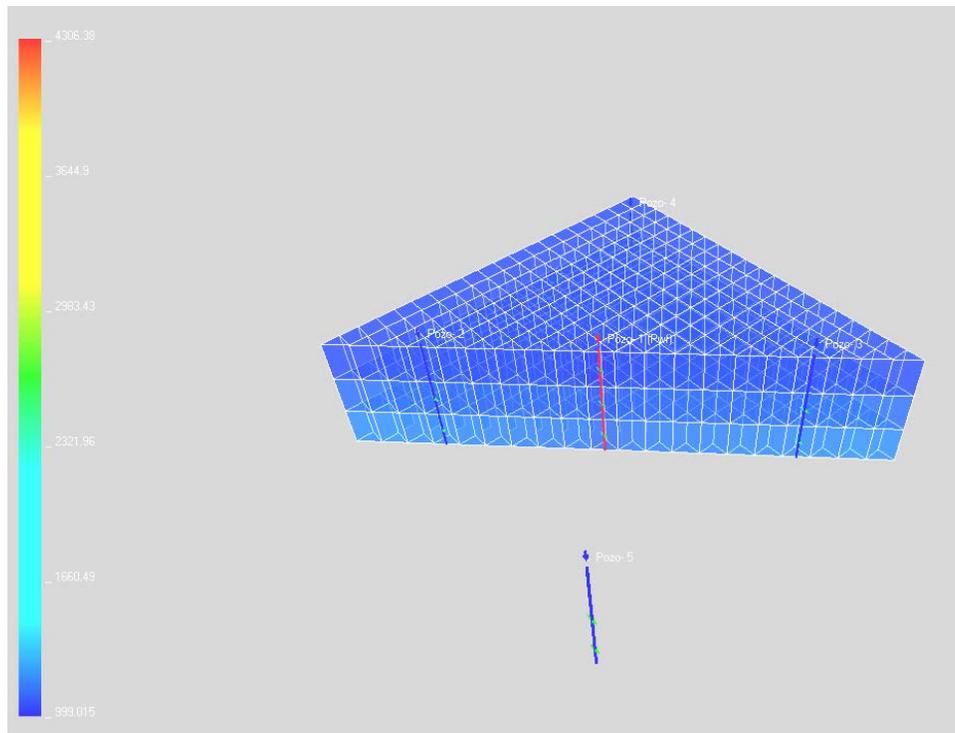
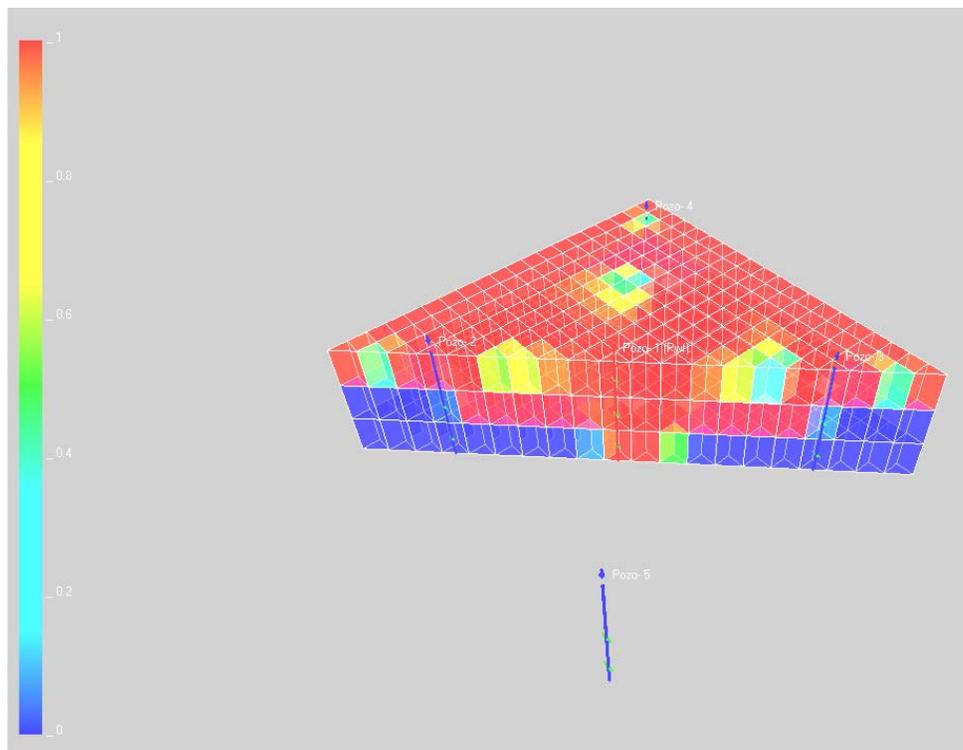


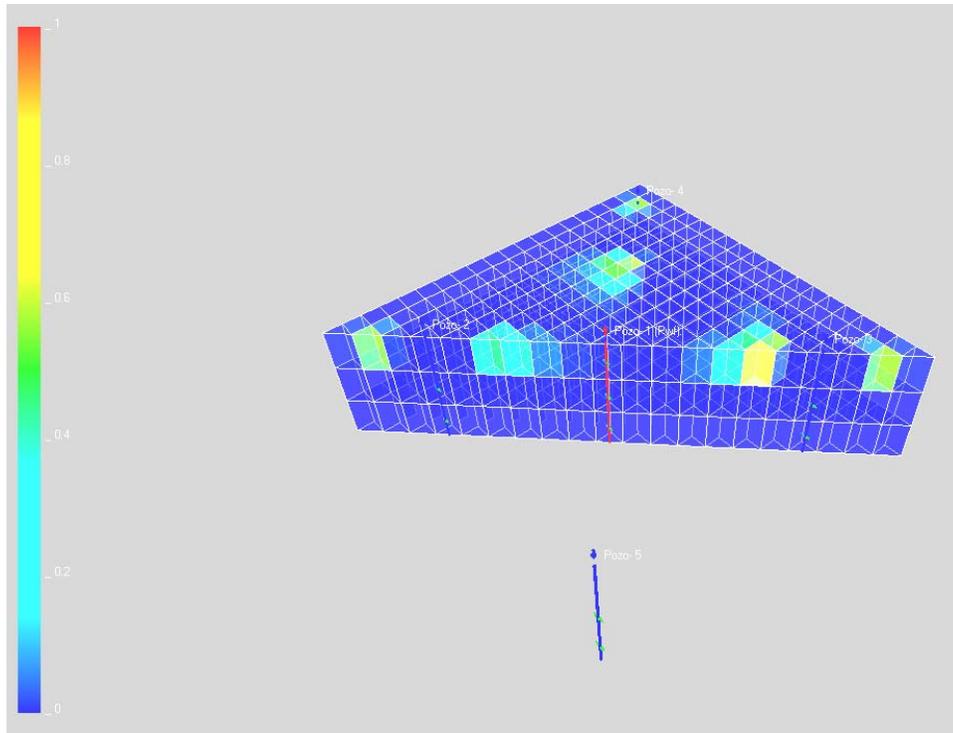
Figura 5.19 Gráfica de RGA vs Tiempo para la Simulación de Flujo Multifásico en un Sistema de Triple Porosidad (Caso 2).



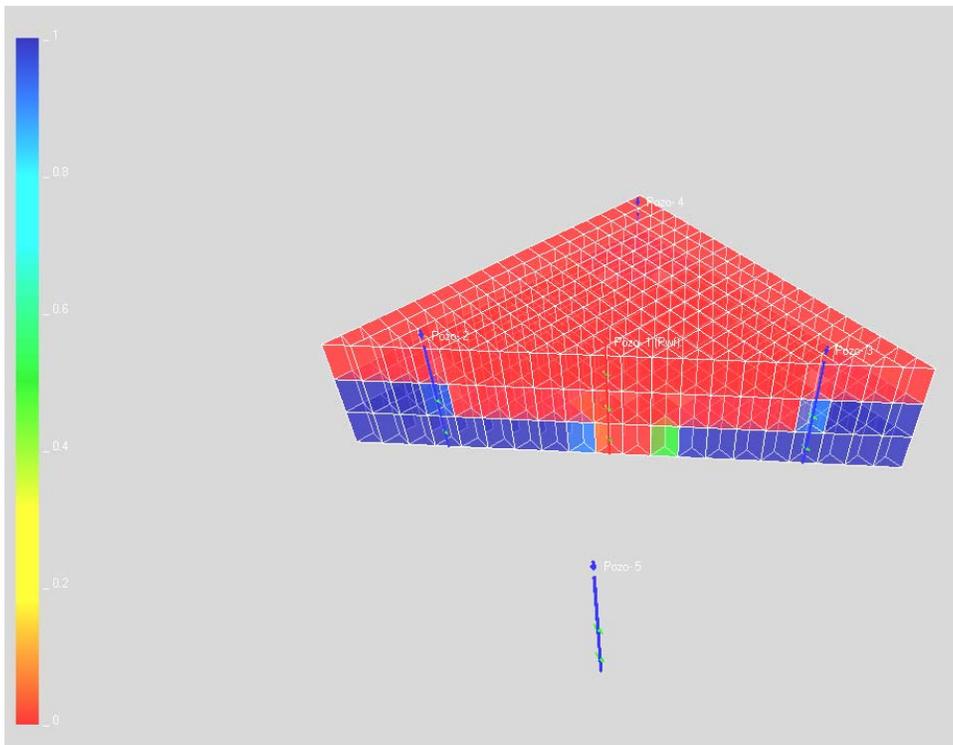
**Figura 5.20 Distribución de Presiones de Aceite, Po (Caso 3).**



**Figura 5.21 Distribución de Saturaciones de Aceite, So (Caso 3).**



**Figura 5.22 Distribución de Saturaciones de Gas,  $S_g$  (Caso 3).**



**Figura 5.23 Distribución de Saturaciones de Agua,  $S_w$  (Caso 3).**

---

---

## CAPÍTULO 6

### CONCLUSIONES

- Se desarrolló un modelo de triple porosidad-una permeabilidad para describir el flujo de fluidos en Yacimientos Naturalmente Fracturados que presentan triple porosidad.
- Se incorporó el modelo propuesto a un simulador trifásico-multidimensional de doble porosidad, extendiéndolo de doble a triple porosidad, considerando medios inelásticos.
- Se validó el modelo con la solución analítica obtenida por **Camacho y cols** <sup>(8)</sup> y por **Rodríguez y cols** <sup>(27)</sup>, para un sistema de triple porosidad-una permeabilidad, bajo las condiciones de: 1) flujo radial monofásico, 2) fluido ligeramente compresible, 3) gasto constante y, 4) yacimiento infinito; obteniéndose un buen ajuste entre la solución numérica y la analítica.
- Se aplicó el modelo en tres casos sintéticos:
  - El primer caso consistió en simular el comportamiento de un yacimiento compuesto por tres medios con los modelos de doble y triple porosidad, respectivamente. Para poder realizar la simulación con el modelo de doble porosidad se agruparon las porosidades de los medios dos y tres, y se realizaron diferentes promedios (aritmético, armónico y geométrico), entre las permeabilidades de dichos medios. Los resultados mostraron que todas las respuestas obtenidas con el modelo de doble porosidad presentan diferencias con respecto a la respuesta del modelo de triple porosidad. Dichas diferencias van desde un 9% (promedio geométrico), hasta un 79% (promedio armónico).
  - El segundo caso consistió en simular el comportamiento de un yacimiento que presenta triple porosidad. Dicho yacimiento cuenta con dos pozos productores de aceite y tres pozos inyectores de agua. El objetivo de este caso básicamente fue probar el funcionamiento del simulador. Como complemento de este caso se realizaron corridas con y sin curvas de presión capilar para observar el efecto de las mismas en la respuesta de presión. Los resultados obtenidos mostraron que se presenta una mayor caída de presión en el caso en que se utilizaron las curvas de presión capilar. Lo anterior se debe a que para que el aceite fluya necesita vencer los efectos de las fuerzas capilares, lo que provoca dicha diferencia en el comportamiento de presión.
  - Finalmente, el caso tres consistió en simular el comportamiento de un yacimiento que presenta triple porosidad y que cuenta con cinco pozos: un productor y cuatro inyectores. El objetivo de este caso fue probar el funcionamiento del simulador bajo condiciones de flujo multifásico (aceite, gas y agua). Los resultados obtenidos fueron satisfactorios ya que el simulador fue capaz de representar el comportamiento de las tres fases, en cada uno de los medios presentes en el yacimiento.

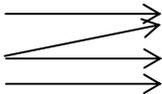
- Se mostró la importancia de la correcta caracterización y modelado de los yacimientos de múltiple porosidad.
- Para una correcta caracterización de este tipo de yacimientos se recomienda el uso de pruebas de presión, las cuales pueden apoyarse en las gráficas desarrolladas por **Rodríguez y cols** <sup>(27)</sup>. para la caracterización de yacimientos con triple porosidad anidada. La información obtenida por medio de las pruebas de presión puede complementarse con la petrofísica, ya que muchas veces es posible observar la presencia de múltiples porosidades en el análisis de núcleos.

## APÉNDICE A

### OBTENCIÓN DE LAS ECUACIONES DE FLUJO MULTIFÁSICO

En este apéndice se tratan los principios fundamentales de la física relacionados con la transferencia de masa, y se determina como se relacionan las representaciones matemáticas de éstos para desarrollar las ecuaciones diferenciales que representan los balances de masa dentro de un yacimiento.

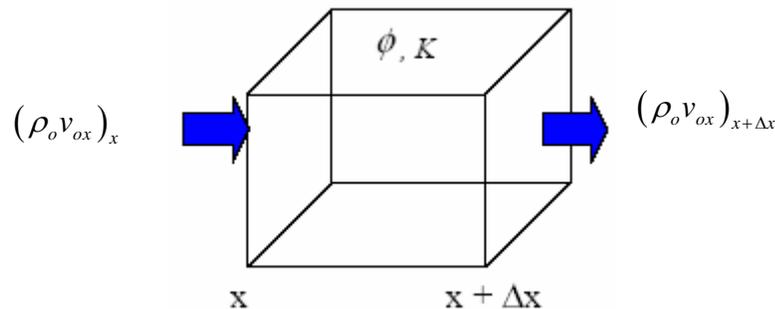
En el trabajo presente se utiliza el modelo de flujo de fluidos tipo Beta, donde el gas y aceite obtenidos después de separadores son los pseudo-componentes que forman las fases aceite y gas en el yacimiento. Lo anterior se ejemplifica mediante el diagrama siguiente:

<u>COMPONENTE</u>		<u>FASE</u>
Aceite del separador		Aceite
Gas del separador		Gas
Agua		Agua

Se considera que:

- Existen tres fases móviles posibles en un yacimiento
- Las fases aceite y gas se encuentran en equilibrio en espacio y tiempo
- La fase agua no intercambia masa con las otras fases

Para derivar las ecuaciones del flujo multifásico Tipo Beta Modificado, se parte de un volumen elemental representativo del medio poroso (figura A1), en donde existe flujo unidimensional.



**Figura A.1. Volumen elemental representativo del medio poroso**

Con base en el principio de conservación de materia, se puede establecer el balance de materia siguiente en el volumen elemental en la dirección  $x$ .

Ritmo de entrada de masa al volumen de control:

$$(A_{yz} \rho_o v_{ox}) \Big|_x. \quad (A.1)$$

Ritmo de salida de masa del volumen de control:

$$(A_{yz} \rho_o v_{ox}) \Big|_{x+\Delta x}. \quad (A.2)$$

Donde:

$A_{yz}$  = Área transversal del elemento en el plano  $yz$  expuesto al flujo.

$\rho_o$  = Densidad de la fase aceite

$v_{ox}$  = Velocidad macroscópica de la fase aceite en la dirección  $x$ .

El ritmo de acumulación de masa en el volumen de control, está dado por el ritmo de cambio de masa, contenidos en las fases aceite y gas en el espacio poroso, esto es:

Ritmo de acumulación de masa del elemento en el volumen de control:

$$A\Delta x \frac{\partial}{\partial t} (\phi S_o \rho_o). \quad (A.3)$$

El ritmo de producción/inyección de masa en el volumen de control, definiendo  $\hat{q}_p =$  gasto volumétrico de la fase  $p=o,g,w$  a condiciones de yacimiento por unidad de volumen de roca, es:

$$A\Delta x (\rho_o q_o). \quad (A.4)$$

Substituyendo las ecuaciones (A.1) a (A.4) en el postulado de conservación de materia, dividiendo la expresión resultante entre el volumen de control,  $A\Delta x$ , re-arreglando y tomando límites cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ , se llega a:

$$-\frac{\partial}{\partial x} (\rho_o v_{ox}) + \rho_o q_o = \frac{\partial}{\partial t} [\phi (\rho_o S_o)]. \quad (A.5)$$

La ecuacion (A.5) puede extenderse al caso de flujo multidimensional. En notación del operador diferencial nabla  $\nabla$ , estas ecuaciones pueden escribirse en forma más general como:

$$-\nabla \cdot [(\rho_o v_o)] + \rho_o q_o = \frac{\partial}{\partial t} [\phi(\rho_o S_o)]. \quad (\text{A.6})$$

Para flujo laminar en el yacimiento, podemos expresar la velocidad de cada fase mediante la ecuación de Darcy:

$$v_p = -\frac{kk_{rp}}{\mu_p} (\nabla p_p - \gamma_p \nabla D). \quad (\text{A.7})$$

Donde:  $\rho = o, g, w$ .

Sustituyendo la ecuación (A.7) en la ecuación (A.6), se tiene lo siguiente:

$$\nabla \cdot \left[ \rho_o \frac{kk_{ro}}{\mu_o} (\nabla p_o - \gamma_o \nabla D) \right] + \rho_o q_o = \frac{\partial}{\partial t} [\phi(\rho_o S_o)]. \quad (\text{A.8})$$

Para el caso del aceite se considera que:

$$\rho @ c.y. = \frac{\rho @ c.s.}{B_o}. \quad (\text{A.9})$$

Substituyendo la ecuación (A.9) en la ecuación (A.8), se tiene que:

$$\nabla \cdot \left[ \left( \frac{\rho @ c.s.}{B_o} \right) \frac{kk_{ro}}{\mu_o} (\nabla p_o - \gamma_o \nabla D) \right] + \left( \frac{\rho @ c.s.}{B_o} \right) q_o = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{\rho @ c.s.}{B_o} \right) \phi(S_o) \right]. \quad (\text{A.10})$$

Se tiene que  $\rho @ c.s. = \text{cte}$  y que  $b_o = \frac{1}{B_o}$ ; entonces:

$$\nabla \cdot \left[ \frac{b_o kk_{ro}}{\mu_o} (\nabla p_o - \gamma_o \nabla D) \right] + [b_o q_o] + \tau_{omf} = \frac{\partial}{\partial t} [\phi(b_o S_o)]. \quad (\text{A.11})$$

Nótese que el operador diferencial nabla  $\nabla$ , se define en el sistema de coordenadas cartesianas como:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k. \quad (\text{A.12})$$

y el vector de velocidades de la fase  $p = o, g, w$ ,  $v_p$ , es :

$$v_p = v_{px} i + v_{py} j + v_{pz} k. \quad (\text{A.13})$$

Un tratamiento similar para la fase gas considerando el gas disuelto que se tiene en el aceite se conduce a lo siguiente:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left[ \hat{R}_s b_o \frac{kk_{ro}}{\mu_o} (\nabla p_o - \gamma_o \nabla D) + b_g \frac{kk_{rg}}{\mu_g} (\nabla p_g - \gamma_g \nabla D) \right] \\ + \left[ \hat{R}_s b_o q_o + b_g q_g \right] + \hat{R}_s \tau_{omf} + \tau_{gmf} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \phi \left( \hat{R}_s b_o S_o + b_g S_g \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Un tratamiento similar para la fase agua conduce a lo siguiente:

$$\nabla \cdot \left[ \frac{kk_{rw}}{B_w \mu_w} (\nabla p_w - \gamma_w \nabla D) \right] + b_w q_w + \tau_{wmf} = \frac{\partial}{\partial t} [\phi b_w S_w]. \quad (\text{A.15})$$

Las ecuaciones (A.11), (A.14) y (A.15) describen el flujo multifásico en un yacimiento bajo condiciones isotérmicas y laminares.



## APÉNDICE B

### APROXIMACIÓN EN DIFERENCIAS FINITAS

A continuación se presenta la aproximación de las ecuaciones diferenciales en ecuaciones de diferencias, obtenidas a través de un esquema en diferencias finitas.

Realizando el análisis para el medio uno y partiendo de la ecuación (2.20), solo para el aceite, considerando una sólo dirección en el nivel de tiempo  $(n+1)$  y empleando un esquema implícito, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{kk_{ro}}{\mu_o B_o} \left( \frac{\partial p_o}{\partial x} - \gamma_o \frac{\partial D}{\partial x} \right) \right]_{1,i}^{n+1} + [b_o \hat{q}_o]_{1,i}^{n+1} + [\hat{\tau}_{o21}]_{1,i}^{n+1} = \frac{\partial}{\partial t} [\phi(b_o S_o)]_{1,i}^{n+1} \quad (B.1)$$

Considerando,

$$u = \lambda_{ox} \left( \frac{\partial p_o}{\partial x} - \gamma_o \frac{\partial D}{\partial x} \right) \quad (B.2)$$

donde :

$$\lambda_{ox} = \frac{kk_{ro}}{\mu_o B_o} \quad (B.3)$$

Ahora, sustituyendo la ecuación (B.2) en el término de flujo de la ecuación (B.1), se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda_{ox} \left( \frac{\partial p_o}{\partial x} - \gamma_o \frac{\partial D}{\partial x} \right) \right]_i^{n+1} = \frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial x_i} \quad (B.4)$$

Empleando diferencias centrales en la ecuación (B.4), se tiene:

$$\frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial x_i} = \frac{u_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - u_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta x_i} \quad (B.5)$$

donde :

$$u_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = (\lambda_{ox})_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \left[ \frac{p_{o,i+1} - p_{o,i}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} - \gamma_{o,i+\frac{1}{2}} \frac{D_{i+1} - D_i}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \right]^{n+1} \quad (B.6)$$

y

$$u_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} = (\lambda_{ox})_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} \left[ \frac{p_{o,i} - p_{o,i-1}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} - \gamma_{o,i-\frac{1}{2}} \frac{D_i - D_{i-1}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \right]^{n+1} \quad (B.7)$$

Sustituyendo las ecuaciones (B.6) y (B.7) en (B.5), se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial x_i} = & \frac{1}{\Delta x_i} (\lambda_{ox})_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \left[ \left( \frac{p_{o,i+1} - p_{o,i}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} - \gamma_{o,i+\frac{1}{2}} \frac{D_{i+1} - D_i}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \right)^{n+1} \right] \\ & - \frac{1}{\Delta x_i} (\lambda_{ox})_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} \left[ \left( \frac{p_{o,i} - p_{o,i-1}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} - \gamma_{o,i-\frac{1}{2}} \frac{D_i - D_{i-1}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \right)^{n+1} \right] \end{aligned} \quad (B.8)$$

Discretizando el término de acumulación empleando diferencias regresivas en tiempo, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\phi(b_o S_o)]_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta t^{n+1}} [(\phi b_o S_o)^{n+1} - (\phi b_o S_o)^n] \quad (B.9)$$

Sustituyendo las ecuaciones (B.8) y (B.9) en (B.1), se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x_i} (\lambda_{ox})_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \left[ \left( \frac{p_{o,i+1} - p_{o,i}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} - \gamma_{o,i+\frac{1}{2}} \frac{D_{i+1} - D_i}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \right)^{n+1} \right] - \frac{1}{\Delta x_i} (\lambda_{ox})_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} \left[ \left( \frac{p_{o,i} - p_{o,i-1}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} - \gamma_{o,i-\frac{1}{2}} \frac{D_i - D_{i-1}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \right)^{n+1} \right] \\ + [b_o \hat{q}_o]_i^{n+1} + [\hat{\tau}_{o21}]_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta t^{n+1}} [(\phi b_o S_o)^{n+1} - (\phi b_o S_o)^n]_i \end{aligned} \quad (B.10)$$

Multiplicando la ecuación (B.10) por el volumen de roca de la celda  $i$ ,  $Vr_i = A\Delta x_i$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\lambda_{ox}A}{\Delta x_i}\right)_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \left[ p_{o,i+1} - p_{o,i} - \gamma_{o,i+\frac{1}{2}}(D_{i+1} - D_i) \right]^{n+1} - \left(\frac{\lambda_{ox}A}{\Delta x_i}\right)_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} \left[ p_{o,i} - p_{o,i-1} - \gamma_{o,i-\frac{1}{2}}(D_i - D_{i-1}) \right]^{n+1} \\ + [b_o q_o]_i^{n+1} + [\tau_{o21}]_i^{n+1} = \frac{Vr_i}{\Delta t^{n+1}} \left[ (\phi b_o S_o)^{n+1} - (\phi b_o S_o)^n \right]_i \end{aligned} \quad (B.11)$$

Introduciendo el concepto de transmisibilidad para la fase aceite:

$$T_{ox} = \frac{\lambda_{ox}A}{\Delta x_i} \quad (B.12)$$

Las transmisibilidades de la fase gas y aceite se definen de forma similar.

Sustituyendo la ecuación (B.12) en (B.11), se tiene:

$$(T_o)_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} (\Delta p_o - \gamma_o \Delta D)_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - (T_o)_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} (\Delta p_o - \gamma_o \Delta D)_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} + [b_o q_o]_i^{n+1} + [\tau_{o21}]_i^{n+1} = \frac{Vr_i}{\Delta t} \Delta_t [\phi(b_o S_o)]_i \quad (B.13)$$

La ecuación (B.13) se puede expresar de una manera más compacta, empleando operadores en diferencias, como se muestra a continuación:

$$\Delta [T_o (\Delta p_o - \gamma_o \Delta D)]_i^{n+1} + [b_o q_o]_i^{n+1} + [\tau_{o21}]_i^{n+1} = \frac{Vr_{i,1}}{\Delta t} \Delta_t [\phi(b_o S_o)]_i \quad (B.14)$$

Nótese que en (B.14) se ha incluido los operadores diferencias centrales,  $\Delta u_i^{n+1}$ , y diferencias regresivas,  $\Delta_t u_i^{n+1}$ , definidos como:

$$\Delta u_i^{n+1} = u_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - u_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} \quad (B.15)$$

$$\Delta_t u_i^{n+1} = u_i^{n+1} - u_i^n \quad (B.16)$$

Expandiendo a tres dimensiones y procediendo en forma similar para las ecuaciones (2.21) y (2.22), se tienen las siguientes expresiones:

Para el aceite:

$$\Delta \left[ T_o (\Delta p_o - \gamma_o \Delta D) \right]_{1,ijk}^{n+1} + \left[ b_o q_o \right]_{1,ijk}^{n+1} + \left[ \tau_{o21} \right]_{ijk}^{n+1} = \frac{Vr_{1,ijk}}{\Delta t} \Delta_t \left[ \phi (b_o S_o) \right]_{1,ijk} \quad (B.17)$$

Para el gas:

$$\Delta \left[ R_s T_o (\Delta p_o - \gamma_o \Delta D) \right]_{1,ijk}^{n+1} + \Delta \left[ T_g (\Delta p_g - \gamma_g \Delta D) \right]_{1,ijk}^{n+1} + \left[ R_s b_o q_o + b_g q_g \right]_{1,ijk}^{n+1} + \left[ R_s \tau_{o21} + \tau_{g21} \right]_{ijk}^{n+1} \\ = \frac{Vr_{1,ijk}}{\Delta t} \Delta_t \left[ \phi (R_s b_o S_o + b_g S_g) \right]_{1,ijk} \quad (B.18)$$

Para el agua:

$$\Delta \left[ T_w (\Delta p_w - \gamma_w \Delta D) \right]_{1,ijk}^{n+1} + \left[ b_w q_w \right]_{1,ijk}^{n+1} + \left[ \tau_{w21} \right]_{ijk}^{n+1} = \frac{Vr_{1,ijk}}{\Delta t} \Delta_t \left[ \phi b_w S_w \right]_{1,ijk} \quad (B.19)$$

Para el medio 2, ecuaciones (2.26) a (2.28), debido a su conceptualización, únicamente se discretiza el término de acumulación, presentando las siguientes ecuaciones:

Para el aceite:

$$-\left[ \tau_{o21} \right]_{ijk}^{n+1} + \left[ \tau_{o32} \right]_{ijk}^{n+1} = \frac{Vr_{2,ijk}}{\Delta t} \Delta_t \left[ \phi (b_o S_o) \right]_{2,ijk} \quad (B.20)$$

Para el gas:

$$-\left[ R_s \tau_{o21} + \tau_{g21} \right]_{ijk}^{n+1} + \left[ R_s \tau_{o32} + \tau_{g32} \right]_{ijk}^{n+1} = \frac{Vr_{2,ijk}}{\Delta t} \Delta_t \left[ \phi (R_s b_o S_o + b_g S_g) \right]_{2,ijk} \quad (B.21)$$



Para el agua:

$$-\left[\tau_{w21}\right]_{ijk}^{n+1} + \left[\tau_{w32}\right]_{ijk}^{n+1} = \frac{Vr_{2,ijk}}{\Delta t} \Delta_t \left[\phi b_w S_w\right]_{2,ijk} \quad (B.22)$$

Para el medio 3, ecuaciones (2.32) a (2.34), debido a su conceptualización, únicamente se discretiza el término de acumulación, presentando las siguientes ecuaciones:

Para el aceite:

$$-\left[\tau_{o32}\right]_{ijk}^{n+1} = \frac{Vr_{3,ijk}}{\Delta t} \Delta_t \left[\phi(b_o S_o)\right]_{3,ijk} \quad (B.23)$$

Para el gas:

$$-\left[R_s \tau_{o32} + \tau_{g32}\right]_{ijk}^{n+1} = \frac{Vr_{3,ijk}}{\Delta t} \Delta_t \left[\phi(R_s b_o S_o + b_g S_g)\right]_{3,ijk} \quad (B.24)$$

Para el agua:

$$-\left[\tau_{w32}\right]_{ijk}^{n+1} = \frac{Vr_{3,ijk}}{\Delta t} \Delta_t \left[\phi b_w S_w\right]_{3,ijk} \quad (B.25)$$

Nótese el cambio de  $\hat{\tau}_{cp,mf}$  y  $\hat{q}_p$ , por  $\tau_{p,mf}$  y  $q_p$ , respectivamente, donde  $p = o, g, w$ .

APÉNDICE C

ECUACIONES Y DERIVADAS PARA UN MODELO DE TRIPLE POROSIDAD

ACEITE:

ECUACIÓN PARA EL MEDIO 1:

—

$$\begin{array}{cccc}
 \text{Término de flujo} & \text{Término Fuente} & \text{Término Transferencia 2-1} & \text{Término de acumulación} \\
 \underbrace{\hspace{10em}} & \underbrace{\hspace{10em}} & \underbrace{\hspace{10em}} & \underbrace{\hspace{10em}} \\
 \Delta [T_o (\Delta p_o - \gamma_o \Delta D)]_{1,ijk}^{n+1} + [b_o q_o]_{1,ijk}^{n+1} + [\tau_{o21}]_{ijk}^{n+1} & = & \frac{Vr_{1,ijk}}{\Delta t} \Delta_t \left\{ \phi [b_o (1 - S_g - S_w)] \right\}_{1,ijk}
 \end{array}$$

ECUACIÓN PARA EL MEDIO 2:

—

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Término Transferencia 2-1} & \text{Término Transferencia 3-2} & \text{Término de acumulación} \\
 \underbrace{\hspace{10em}} & \underbrace{\hspace{10em}} & \underbrace{\hspace{10em}} \\
 -[\tau_{o21}]_{ijk}^{n+1} + [\tau_{o32}]_{ijk}^{n+1} & = & \frac{Vr_{2,ijk}}{\Delta t} \Delta_t \left\{ \phi [b_o (1 - S_g - S_w)] \right\}_{2,ijk}
 \end{array}$$

ECUACIÓN PARA EL MEDIO 3:

—

$$\begin{array}{cc}
 \text{Término Transferencia 3-2} & \text{Término de acumulación} \\
 \underbrace{\hspace{10em}} & \underbrace{\hspace{10em}} \\
 -[\tau_{o32}]_{ijk}^{n+1} & = \frac{Vr_{3,ijk}}{\Delta t} \Delta_t \left\{ \phi [b_o (1 - S_g - S_w)] \right\}_{3,ijk}
 \end{array}$$

Donde:

$$\tau_{o21} = \sigma \left[ \frac{b_o k k_{ro}}{\mu_o} \right]_{21} (p_{o2} - p_{o1}) = T_{o21} (p_{o2} - p_{o1})$$

$$\tau_{o32} = \sigma \left[ \frac{b_o k k_{ro}}{\mu_o} \right]_{32} (p_{o3} - p_{o2}) = T_{o32} (p_{o3} - p_{o2})$$

FUNCIÓN DE RESIDUO DEL ACEITE PARA EL MEDIO 1:

$$F_{o1,ijk} = \Delta \left[ T_o (\Delta p_o - \gamma_o \Delta D) \right]_{1,ijk}^{n+1} + \left[ b_o q_o \right]_{1,ijk}^{n+1} + \left[ \tau_{o21} \right]_{ijk}^{n+1} - \frac{V r_{1,ijk}}{\Delta t} \Delta_t \left\{ \phi \left[ b_o (1 - S_g - S_w) \right] \right\}_{1,ijk} = 0$$

Expansión de la función de residuo del medio 1:

$$\begin{aligned} F_{o1,ijk} = & \left[ T_{o_{i+\frac{1}{2},j,k}} \left( p_{o_{i+1,j,k}} - p_{o_{i,j,k}} - (\gamma_o \Delta D)_{i+\frac{1}{2},j,k} \right) \right]_1^{n+1} - \left[ T_{o_{i-\frac{1}{2},j,k}} \left( p_{o_{i,j,k}} - p_{o_{i-1,j,k}} - (\gamma_o \Delta D)_{i-\frac{1}{2},j,k} \right) \right]_1^{n+1} + \\ & \left[ T_{o_{i,j+\frac{1}{2},k}} \left( p_{o_{i,j+1,k}} - p_{o_{i,j,k}} - (\gamma_o \Delta D)_{i,j+\frac{1}{2},k} \right) \right]_1^{n+1} - \left[ T_{o_{i,j-\frac{1}{2},k}} \left( p_{o_{i,j,k}} - p_{o_{i,j-1,k}} - (\gamma_o \Delta D)_{i,j-\frac{1}{2},k} \right) \right]_1^{n+1} + \\ & \left[ T_{o_{i,j,k+\frac{1}{2}}} \left( p_{o_{i,j,k+1}} - p_{o_{i,j,k}} - (\gamma_o \Delta D)_{i,j,k+\frac{1}{2}} \right) \right]_1^{n+1} - \left[ T_{o_{i,j,k-\frac{1}{2}}} \left( p_{o_{i,j,k}} - p_{o_{i,j,k-1}} - (\gamma_o \Delta D)_{i,j,k-\frac{1}{2}} \right) \right]_1^{n+1} + \\ & \left[ b_o q_o \right]_{1,ijk}^{n+1} + \left[ T_{o21} (p_{o2} - p_{o1}) \right]_{ijk}^{n+1} \\ & - \frac{V p_{1,ijk}}{\Delta t} \left\{ \left[ \left[ 1 + C_r (p_o^{n+1} - p_o^n) \right] (b_o (1 - S_w - S_g))^{n+1} \right] - (b_o (1 - S_w - S_g))^n \right\}_{1,ijk} = 0 \end{aligned}$$

**Derivada de la función de residuo del aceite con respecto a la presión de aceite en el medio 1, en ijk:**

$$\frac{\partial F_{o1,ijk}}{\partial p_{o1,ijk}} = \frac{\partial \{T.Flujo\}}{\partial p_{o1,ijk}} + \frac{\partial \{T. Fuente\}}{\partial p_{o1,ijk}} + \frac{\partial \{FT21\}}{\partial p_{o1,ijk}} + \frac{\partial \{T.Acum.\}}{\partial p_{o1,ijk}}$$

Términos de flujo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{T.Flujo\}}{\partial p_{o1,ijk}} &= T_{ox2} \frac{\partial P_{otox2}}{\partial p_{o1,ijk}} + P_{otox2} \frac{\partial T_{ox2}}{\partial p_{o1,ijk}} - T_{ox1} \frac{\partial P_{otox1}}{\partial p_{o1,ijk}} - P_{otox1} \frac{\partial T_{ox1}}{\partial p_{o1,ijk}} \\ &+ T_{oy2} \frac{\partial P_{otoy2}}{\partial p_{o1,ijk}} + P_{otoy2} \frac{\partial T_{oy2}}{\partial p_{o1,ijk}} - T_{oy1} \frac{\partial P_{otoy1}}{\partial p_{o1,ijk}} - P_{otoy1} \frac{\partial T_{oy1}}{\partial p_{o1,ijk}} \\ &+ T_{oz2} \frac{\partial P_{otoz2}}{\partial p_{o1,ijk}} + P_{otoz2} \frac{\partial T_{oz2}}{\partial p_{o1,ijk}} - T_{oz1} \frac{\partial P_{otoz1}}{\partial p_{o1,ijk}} - P_{otoz1} \frac{\partial T_{oz1}}{\partial p_{o1,ijk}} \end{aligned}$$

Términos fuente:

$$\frac{\partial \{T. Fuente\}}{\partial p_{o1,ijk}} = b_{o_{ijk}} \frac{\partial q_{o_{ijk}}}{\partial p_{o1,ijk}} + q_{o_{ijk}} \frac{\partial b_{o_{ijk}}}{\partial p_{o1,ijk}}$$

Función de transferencia 2-1:

$$\frac{\partial \{FT21\}}{\partial p_{o1,ijk}} = \left( T_{o21} \frac{\partial P_{oto21}}{\partial p_{o1,ijk}} + P_{oto21} \frac{\partial T_{o21}}{\partial p_{o1,ijk}} \right)$$

Término de acumulación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{T.Acum.\}}{\partial p_{o1,ijk}} &= -\frac{Vr_{1,ijk}}{\Delta t} \left\{ \phi \frac{\partial}{\partial p_{o1,ijk}} \left[ (b_o(1-S_w-S_g)) \right] + \left[ (b_o(1-S_w-S_g)) \right] \frac{\partial \phi}{\partial p_{o1,ijk}} \right\}_{ijk}^{n+1} \\ &= -\frac{Vp_{1,ijk}}{\Delta t} \left\{ \left[ 1 + C_r (p_o^{n+1} - p_o^n) \right] \left[ (1-S_w-S_g)^{n+1} \frac{\partial b_o}{\partial p_{o1,ijk}} \right] + C_r (b_o(1-S_w-S_g))^{n+1} \right\}_{ijk} \end{aligned}$$

Derivadas de potenciales:

$$\frac{\partial P_{otox2}}{\partial p_{o1,ijk}} = \frac{\partial}{\partial p_{o1,ijk}} \left[ p_{oi+1,jk} - p_{o_{ijk}} - \gamma_{o_{i+\frac{1}{2},jk}} (D_{i+1,jk} - D_{i,jk}) \right] = -1 - \frac{1}{2} (D_{i+1,jk} - D_{i,jk}) \frac{\partial \gamma_{o_{ijk}}}{\partial p_{o1,ijk}}$$

$$\frac{\partial P_{otox1}}{\partial p_{o1,ijk}} = \frac{\partial}{\partial p_{o1,ijk}} \left[ p_{o,ijk} - p_{o_{i-1,jk}} - \gamma_{o_{i-\frac{1}{2},jk}} (D_{ijk} - D_{i-1,jk}) \right] = 1 - \frac{1}{2} (D_{ijk} - D_{i-1,jk}) \frac{\partial \gamma_{o,ijk}}{\partial p_{o1,ijk}}$$

Derivadas de las transmisibilidades:

$$T_o = F \frac{b_o k_{ro}}{\mu_o}$$

$$\frac{\partial T_o}{\partial p_{o1,ijk}} = T_o \left( \frac{1}{b_o} \frac{\partial b_o}{\partial p_{o1,ijk}} - \frac{1}{\mu_o} \frac{\partial \mu_o}{\partial p_{o1,ijk}} \right)$$

**Derivada de la función de residuo del aceite con respecto a la saturación de gas en el medio 1, en ijk:**

$$\frac{\partial F_{o1,ijk}}{\partial S_{g1,ijk}} = \frac{\partial \{T.Flujos\}}{\partial S_{g1,ijk}} + \frac{\partial \{T. Fuente\}}{\partial S_{g1,ijk}} + \frac{\partial \{FT21\}}{\partial S_{g1,ijk}} + \frac{\partial \{T.Acum.\}}{\partial S_{g1,ijk}}$$

Términos de flujo:

$$\frac{\partial \{T.Flujos\}}{\partial S_{g1,ijk}} = P_{otox2} \frac{\partial T_{ox2}}{\partial S_{g1,ijk}} - P_{otox1} \frac{\partial T_{ox1}}{\partial S_{g1,ijk}} + P_{otoy2} \frac{\partial T_{oy2}}{\partial S_{g1,ijk}} - P_{otoy1} \frac{\partial T_{oy1}}{\partial S_{g1,ijk}} + P_{otoz2} \frac{\partial T_{oz2}}{\partial S_{g1,ijk}} - P_{otoz1} \frac{\partial T_{oz1}}{\partial S_{g1,ijk}}$$

Función de transferencia 2-1:

$$\frac{\partial \{FT21\}}{\partial S_{g1,ijk}} = \left( P_{oto21} \frac{\partial T_{o21,ijk}}{\partial S_{g1,ijk}} \right)$$

Términos Fuente:

$$\frac{\partial (b_o q_o)_{ijk}^{n+1}}{\partial S_{g1,ijk}} = b_{oi,j,k} \frac{\partial q_{o,j,k}}{\partial S_{g1,ijk}}$$

Término de Acumulación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{T.Acum.\}}{\partial S_{g1,ijk}} &= -\frac{Vr_{1,ijk}}{\Delta t} \left\{ \phi \frac{\partial}{\partial S_{g1,ijk}} [b_o (1 - S_g - S_w)] \right\}_{ijk} \\ &= -\frac{Vp_{1,ijk}}{\Delta t} [1 + C_r (p_o^{n+1} - p_o^n)] (-b_o^{n+1})_{ijk} \end{aligned}$$

Derivadas de potenciales:

$$\frac{\partial P_{otox2}}{\partial S_{g1,ijk}} = 0$$

$$\frac{\partial P_{otox1}}{\partial S_{g1,ijk}} = 0$$

Derivadas de transmisibilidades:

$$\frac{\partial T_o}{\partial S_{g1,ijk}} = F \frac{b_o}{\mu_o} \frac{\partial kr_o}{\partial S_{g1,ijk}}$$

**Derivada de la función de residuo del aceite con respecto a la saturación de agua en el medio 1, en ijk:**

$$\frac{\partial F_{o1,ijk}}{\partial S_{w1,ijk}} = \frac{\partial \{T.Flujos\}}{\partial S_{w1,ijk}} + \frac{\partial \{T. Fuente\}}{\partial S_{w1,ijk}} + \frac{\partial \{FT21\}}{\partial S_{w1,ijk}} + \frac{\partial \{T.Acum.\}}{\partial S_{w1,ijk}}$$

Términos de flujo:

$$\frac{\partial \{T.Flujos\}}{\partial S_{w1,ijk}} = P_{otox2} \frac{\partial T_{ox2}}{\partial S_{w1,ijk}} - P_{otox1} \frac{\partial T_{ox1}}{\partial S_{w1,ijk}} + P_{otoy2} \frac{\partial T_{oy2}}{\partial S_{w1,ijk}} - P_{otoy1} \frac{\partial T_{oy1}}{\partial S_{w1,ijk}} + P_{otoz2} \frac{\partial T_{oz2}}{\partial S_{w1,ijk}} - P_{otoz1} \frac{\partial T_{oz1}}{\partial S_{w1,ijk}}$$

Términos fuente:

$$\frac{\partial \{T. Fuente\}}{\partial S_{w1,ijk}} = 0$$

Término de transferencia:

$$\frac{\partial \{FT21\}}{\partial S_{w1,ijk}} = P_{oto21} \frac{\partial T_{o21}}{\partial S_{w1,ijk}}$$

Término de acumulación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{T.Acum.\}}{\partial S_{w1,ijk}} &= -\frac{Vr_{1,ijk}}{\Delta t} \left\{ \phi \frac{\partial}{\partial S_{w1,ijk}} \left[ b_o (1 - S_g - S_w) \right] \right\}_{ijk} \\ &= +\frac{Vp_{1,ijk}}{\Delta t} \left[ 1 + C_r (p_o^{n+1} - p_o^n) \right] b_{o1,ijk}^{n+1} \end{aligned}$$

Derivadas de transmisibilidades:

$$\frac{\partial T_o}{\partial S_{w1,ijk}} = F \frac{b_o}{\mu_o} \frac{\partial kr_o}{\partial S_{w1,ijk}}$$

**Derivada de la función de residuo del aceite en el medio 1, en i-1,j,k:**

$$\frac{\partial F_{o1}}{\partial p_{o1,i-1,jk}} = - \left[ T_{ox1} \frac{\partial P_{otox1}}{\partial p_{o1,i-1,jk}} + P_{otox1} \frac{\partial T_{ox1}}{\partial p_{o1,i-1,jk}} \right]$$

$$\frac{\partial F_{o1}}{\partial S_{g1,i-1,jk}} = - \left[ P_{otox1} \frac{\partial T_{ox1}}{\partial S_{g1,i-1,jk}} \right]$$

$$\frac{\partial F_{o1}}{\partial S_{w1,i-1,jk}} = -P_{otox1} \frac{\partial T_{ox1}}{\partial S_{w1,i-1,jk}}$$

**Derivada de la función de residuo del aceite en el medio 1, en i,j-1,k:**

$$\frac{\partial F_{o1}}{\partial p_{o1,ij-1,k}} = - \left[ T_{oy1} \frac{\partial P_{otoy1}}{\partial p_{o1,ij-1,k}} + P_{otoy1} \frac{\partial T_{oy1}}{\partial p_{o1,ij-1,k}} \right]$$

$$\frac{\partial F_{o1}}{\partial S_{g^1,ij-1,k}} = - \left[ P_{otoy1} \frac{\partial T_{oy1}}{\partial S_{g^1,ij-1,k}} \right]$$

$$\frac{\partial F_{o1}}{\partial S_{w^1,ij-1,k}} = -P_{otoy1} \frac{\partial T_{oy1}}{\partial S_{w^1,ij-1,k}}$$

**Derivada de la función de residuo aceite en el medio 1, en el nodo i,j,k-1:**

$$\frac{\partial F_{o1}}{\partial p_{o^1,ijk-1}} = - \left[ T_{oz1} \frac{\partial P_{otoz1}}{\partial p_{o^1,ijk-1}} + P_{otoz1} \frac{\partial T_{oz1}}{\partial p_{o^1,ijk-1}} \right]$$

$$\frac{\partial F_{o1}}{\partial S_{g^1,ijk-1}} = - \left[ P_{otoz1} \frac{\partial T_{oz1}}{\partial S_{g^1,ijk-1}} \right]$$

$$\frac{\partial F_{o1}}{\partial S_{w^1,ijk-1}} = -P_{otoz1} \frac{\partial T_{oz1}}{\partial S_{w^1,ijk-1}}$$

**Derivada de la función de residuo del aceite en el medio 1, en el nodo i+1,j,k:**

$$\frac{\partial F_{o1}}{\partial p_{o^1,i+1,jk}} = T_{ox2} \frac{\partial P_{otox2}}{\partial p_{o^1,i+1,jk}} + P_{otox2} \frac{\partial T_{ox2}}{\partial p_{o^1,i+1,jk}}$$

$$\frac{\partial F_{o1}}{\partial S_{g^1,i+1,jk}} = P_{otox2} \frac{\partial T_{ox2}}{\partial S_{g^1,i+1,jk}}$$

$$\frac{\partial F_{o1}}{\partial S_{w^1,ijk}} = P_{otox2} \frac{\partial T_{ox2}}{\partial S_{w^1,ijk}}$$

**Derivada de la función de residuo del aceite en el medio 1, en el nodo i,j+1,k:**

$$\frac{\partial F_{o1}}{\partial p_{o^1,ij+1k}} = T_{oy2} \frac{\partial P_{otoy2}}{\partial p_{o^1,ij+1k}} + P_{otoy2} \frac{\partial T_{oy2}}{\partial p_{o^1,ij+1k}}$$

$$\frac{\partial F_{o1}}{\partial S_{g^1,ij+1k}} = P_{otoy2} \frac{\partial T_{oy2}}{\partial S_{g^1,ij+1k}}$$

$$\frac{\partial F_{o1}}{\partial S_{w1,ij+1k}} = P_{otoy2} \frac{\partial T_{oy2}}{\partial S_{w1,ij+1k}}$$

**Derivada de la función de residuo de la fase aceite el medio 1, en el nodo i,j,k+1:**

$$\frac{\partial F_{o1}}{\partial p_{o1,ijk+1}} = T_{oz2} \frac{\partial P_{otoz2}}{\partial p_{o1,ijk+1}} + P_{otoz2} \frac{\partial T_{oz2}}{\partial p_{o1,ijk+1}}$$

$$\frac{\partial F_{o1}}{\partial S_{g1,ijk+1}} = P_{otoz2} \frac{\partial T_{oz2}}{\partial S_{g1,ijk+1}}$$

$$\frac{\partial F_{o1}}{\partial S_{w1,ijk+1}} = P_{otoz2} \frac{\partial T_{oz2}}{\partial S_{w1,ijk+1}}$$

**FUNCIÓN DE RESIDUO DEL ACEITE PARA EL MEDIO 2:**

$$F_{o2,ijk} = -\left[T_{o21}(p_{o2} - p_{o1})\right]_{ijk}^{n+1} + \left[T_{o32}(p_{o3} - p_{o2})\right]_{ijk}^{n+1} - \frac{V_{r2,ijk}}{\Delta t} \Delta_t \left\{ \phi \left[ b_o (1 - S_g - S_w) \right] \right\}_{2,ijk} = 0$$

**Derivada de la función de residuo del aceite con respecto a la presión de aceite en el medio 2, en ijk:**

$$\frac{\partial F_{o2,ijk}}{\partial p_{o2,ijk}} = \frac{\partial \{FT21\}}{\partial p_{o2,ijk}} + \frac{\partial \{FT32\}}{\partial p_{o2,ijk}} + \frac{\partial \{T.Acum.\}}{\partial p_{o2,ijk}}$$

Función de transferencia 2-1:

$$\frac{\partial \{FT21\}}{\partial p_{o2,ijk}} = -\left( T_{o21} \frac{\partial P_{oto21}}{\partial p_{o2,ijk}} + P_{oto21} \frac{\partial T_{o21}}{\partial p_{o2,ijk}} \right)$$

Función de transferencia 3-2:

$$\frac{\partial \{FT32\}}{\partial p_{o2,ijk}} = \left( T_{o32} \frac{\partial P_{oto32}}{\partial p_{o2,ijk}} + P_{oto32} \frac{\partial T_{o32}}{\partial p_{o2,ijk}} \right)$$

Derivada del término de acumulación con respecto a la presión en el medio 2:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{T.Acum.\}}{\partial p_{o2,ijk}} &= -\frac{Vr_{2,ijk}}{\Delta t} \left\{ \phi \frac{\partial}{\partial p_{o2,ijk}} \left[ (b_o(1-S_w-S_g)) \right] + \left[ (b_o(1-S_w-S_g)) \right] \frac{\partial \phi}{\partial p_{o2,ijk}} \right\}_{2,ijk}^{n+1} \\ &= -\frac{Vp_{2,ijk}}{\Delta t} \left\{ \left[ 1 + C_r(p_o^{n+1} - p_o^n) \right] \left[ (1-S_w-S_g)^{n+1} \frac{\partial b_o}{\partial p_{o2,ijk}} \right] + C_r(b_o(1-S_w-S_g))^{n+1} \right\}_{2,ijk} \end{aligned}$$

**Derivada de la función de residuo del aceite con respecto a la saturación de gas en el medio 2, en ijk:**

$$\frac{\partial F_{o2,ijk}}{\partial S_{g2,ijk}} = \frac{\partial \{FT21\}}{\partial S_{g2,ijk}} + \frac{\partial \{FT32\}}{\partial S_{g2,ijk}} + \frac{\partial \{T.Acum.\}}{\partial S_{g2,ijk}}$$

Función de transferencia 2-1:

$$\frac{\partial \{FT21\}}{\partial S_{g2,ijk}} = - \left( P_{oto21} \frac{\partial T_{o21ijk}}{\partial S_{g2,ijk}} \right)$$

Función de transferencia 3-2:

$$\frac{\partial \{FT32\}}{\partial S_{g2,ijk}} = \left( P_{oto32} \frac{\partial T_{o32ijk}}{\partial S_{g2,ijk}} \right)$$

Derivadas del término de acumulación con respecto a la saturación de gas en el medio 2:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\{T.Acum.\}}{\partial S_{g2,ijk}} &= -\frac{Vr_{2,ijk}}{\Delta t} \left\{ \phi \frac{\partial}{\partial S_{g2,ijk}} [b_o(1-S_g-S_w)] \right\}_{2,ijk} \\ &= -\frac{Vp_{2,ijk}}{\Delta t} [1+C_r(p_o^{n+1}-p_o^n)](-b_o^{n+1})_{2,ijk}\end{aligned}$$

**Derivada de la función de residuo del aceite con respecto a la saturación de agua en el medio 2, en ijk:**

$$\frac{\partial F_{o2,ijk}}{\partial S_{w2,ijk}} = \frac{\partial\{FT21\}}{\partial S_{w2,ijk}} + \frac{\partial\{FT32\}}{\partial S_{w2,ijk}} + \frac{\partial\{T.Acum.\}}{\partial S_{w2,ijk}}$$

Función de transferencia 2-1:

$$\frac{\partial\{FT21\}}{\partial S_{w2,ijk}} = -P_{oto21} \frac{\partial T_{o21}}{\partial S_{w2,ijk}}$$

Función de transferencia 3-2:

$$\frac{\partial\{FT32\}}{\partial S_{w2,ijk}} = P_{oto32} \frac{\partial T_{o32}}{\partial S_{w2,ijk}}$$

Término de acumulación:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\{T.Acum.\}}{\partial S_{w2,ijk}} &= -\frac{Vr_{2,ijk}}{\Delta t} \left\{ \phi \frac{\partial}{\partial S_{w2,ijk}} [b_o(1-S_g-S_w)] \right\}_{2,ijk} \\ &= +\frac{Vp_{2,ijk}}{\Delta t} \left\{ [1+C_r(p_o^{n+1}-p_o^n)] b_o^{n+1} \right\}_{2,ijk}\end{aligned}$$

**FUNCIÓN DE RESIDUO DEL ACEITE PARA EL MEDIO 3:**

$$F_{o3,ijk} = -[T_{o32}(p_{o3}-p_{o2})]_{ijk}^{n+1} - \frac{Vr_{3,ijk}}{\Delta t} \Delta_t \left\{ \phi [b_o(1-S_g-S_w)] \right\}_{3,ijk} = 0$$

**Derivada de la función de residuo del aceite con respecto a la presión de aceite en el medio 3, en ijk:**

$$\frac{\partial F_{o3,ijk}}{\partial p_{o3,ijk}} = \frac{\partial \{FT32\}}{\partial p_{o3,ijk}} + \frac{\partial \{T.Acum.\}}{\partial p_{o3,ijk}}$$

Función de transferencia 3-2:

$$\frac{\partial \{FT32\}}{\partial p_{o3,ijk}} = - \left( T_{oto32} \frac{\partial P_{oto32}}{\partial p_{o3,ijk}} + P_{oto32} \frac{\partial T_{oto32}}{\partial p_{o3,ijk}} \right)$$

Derivada del término de acumulación con respecto a la presión en el medio 3:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{T.Acum.\}}{\partial p_{o3,ijk}} &= - \frac{Vr_{3,ijk}}{\Delta t} \left\{ \phi \frac{\partial}{\partial p_{o3,ijk}} \left[ \left( b_o (1 - S_w - S_g) \right) \right] + \left[ \left( b_o (1 - S_w - S_g) \right) \right] \frac{\partial \phi}{\partial p_{o3,ijk}} \right\}_{3,ijk}^{n+1} \\ &= - \frac{Vp_{3,ijk}}{\Delta t} \left\{ \left[ 1 + C_r (p_o^{n+1} - p_o^n) \right] \left[ (1 - S_w - S_g)^{n+1} \frac{\partial b_o}{\partial p_{o3,ijk}} \right] + C_r \left( b_o (1 - S_w - S_g) \right)^{n+1} \right\}_{3,ijk} \end{aligned}$$

**Derivada de la función de residuo del aceite con respecto a la saturación de gas en el medio 3, en ijk:**

$$\frac{\partial F_{o3,ijk}}{\partial S_{g3,ijk}} = \frac{\partial \{FT32\}}{\partial S_{g3,ijk}} + \frac{\partial \{T.Acum.\}}{\partial S_{g3,ijk}}$$

Función de transferencia 3-2:

$$\frac{\partial \{FT32\}}{\partial S_{g3,ijk}} = - \left( P_{oto32} \frac{\partial T_{oto32}}{\partial S_{g3,ijk}} \right)$$

Derivadas del término de acumulación con respecto a la saturación de gas en el medio 3:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{T.Acum.\}}{\partial S_{g3,ijk}} &= -\frac{Vr_{3,ijk}}{\Delta t} \left\{ \phi \frac{\partial}{\partial S_{g3,ijk}} \left[ b_o (1 - S_g - S_w) \right] \right\}_{3,ijk} \\ &= -\frac{Vp_{3,ijk}}{\Delta t} \left[ 1 + C_r (p_o^{n+1} - p_o^n) \right] (-b_o^{n+1})_{3,ijk} \end{aligned}$$

**Derivada de la función de residuo del aceite con respecto a la saturación de agua en el medio 3, en ijk:**

$$\frac{\partial F_{o3,ijk}}{\partial S_{w3,ijk}} = \frac{\partial \{FT32\}}{\partial S_{w3,ijk}} + \frac{\partial \{T.Acum.\}}{\partial S_{w3,ijk}}$$

Función de transferencia 3-2:

$$\frac{\partial \{FT32\}}{\partial S_{w3,ijk}} = -P_{oto32} \frac{\partial T_{o32}}{\partial S_{w3,ijk}}$$

Término de acumulación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{T.Acum.\}}{\partial S_{w3,ijk}} &= -\frac{Vr_{3,ijk}}{\Delta t} \left\{ \phi \frac{\partial}{\partial S_{w3,ijk}} \left[ b_o (1 - S_g - S_w) \right] \right\}_{3,ijk} \\ &= +\frac{Vp_{3,ijk}}{\Delta t} \left\{ \left[ 1 + C_r (p_o^{n+1} - p_o^n) \right] b_{oijk}^{n+1} \right\}_{3,ijk} \end{aligned}$$

Donde:

Derivadas de los potenciales con respecto a la presión en el medio 1:

$$\frac{\partial P_{oto21}}{\partial p_{o1,ijk}} = -1$$

Derivadas de los potenciales con respecto a la presión en el medio 2:

$$\frac{\partial P_{oto21}}{\partial p_{o2,ijk}} = 1$$

$$\frac{\partial P_{oto32}}{\partial p_{o2,ijk}} = -1$$

Derivadas de los potenciales con respecto a la presión en el medio 3:

$$\frac{\partial P_{oto32}}{\partial p_{o3,ijk}} = 1$$

Derivadas de las transmisibilidades con respecto a la presión en el medio 1:

Si  $poto21 \geq 0$

$$\frac{\partial T_{o21}}{\partial p_{o1,ijk}} = 0$$

Si  $poto21 < 0$

$$\frac{\partial T_{o21}}{\partial p_{o1,ijk}} = T_{o21} \left( \frac{1}{b_o} \frac{\partial b_o}{\partial p_o} - \frac{1}{\mu_o} \frac{\partial \mu_o}{\partial p_o} \right)_1$$

Derivadas de las transmisibilidades con respecto a la presión en el medio 2:

Si  $poto21 \geq 0$

$$\frac{\partial T_{o21}}{\partial p_{o2,ijk}} = T_{o21} \left( \frac{1}{b_o} \frac{\partial b_o}{\partial p_o} - \frac{1}{\mu_o} \frac{\partial \mu_o}{\partial p_o} \right)_2$$

Si  $poto21 < 0$

$$\frac{\partial T_{o21}}{\partial p_{o2,ijk}} = 0$$

Si  $poto32 \geq 0$

$$\frac{\partial T_{o32}}{\partial p_{o2,ijk}} = 0$$

Si  $poto32 < 0$

$$\frac{\partial T_{o32}}{\partial p_{o2,ijk}} = T_{o32} \left( \frac{1}{b_o} \frac{\partial b_o}{\partial p_o} - \frac{1}{\mu_o} \frac{\partial \mu_o}{\partial p_o} \right)_2$$

Derivadas de las transmisibilidades con respecto a la presión en el medio 3:

Si  $p_{oto32} \geq 0$

$$\frac{\partial T_{o32}}{\partial p_{o3,ijk}} = T_{o32} \left( \frac{1}{b_o} \frac{\partial b_o}{\partial p_o} - \frac{1}{\mu_o} \frac{\partial \mu_o}{\partial p_o} \right)_3$$

Si  $p_{oto32} < 0$

$$\frac{\partial T_{o32}}{\partial p_{o3,ijk}} = 0$$

Derivadas de los potenciales con respecto a la saturación de gas en el medio 1:

$$\frac{\partial P_{oto21}}{\partial S_{g^1,ijk}} = 0$$

Derivadas de los potenciales con respecto a la saturación de gas en el medio 2:

$$\frac{\partial P_{oto21}}{\partial S_{g^2,ijk}} = 0$$

Derivadas de los potenciales con respecto a la saturación de gas en el medio 3:

$$\frac{\partial P_{oto32}}{\partial S_{g^3,ijk}} = 0$$

Derivadas de las transmisibilidades con respecto a la saturación de gas en el medio 1:

Si  $p_{oto21} \geq 0$

$$\frac{\partial T_{o21}}{\partial S_{g^1,ijk}} = 0$$

Si  $p_{oto21} < 0$

$$\frac{\partial T_{o21}}{\partial S_{g^2,ijk}} = F_{21} \frac{b_{o2}}{\mu_{o2}} \frac{\partial k_{r_{o2}}}{\partial S_{g^2,ijk}}$$

Derivadas de las transmisibilidades con respecto a la saturación de gas en el medio 2:

Si  $p_{oto21} \geq 0$

$$\frac{\partial T_{o21}}{\partial S_{g2,ijk}} = F_{21} \frac{b_{o2}}{\mu_{o2}} \frac{\partial kr_{o2}}{\partial S_{g2,ijk}}$$

Si  $poto21 < 0$

$$\frac{\partial T_{o21}}{\partial S_{g2,ijk}} = 0$$

Si  $poto32 \geq 0$

$$\frac{\partial T_{o32}}{\partial S_{g2,ijk}} = 0$$

Si  $poto32 < 0$

$$\frac{\partial T_{o32}}{\partial S_{g2,ijk}} = F_{32} \frac{b_{o2}}{\mu_{o2}} \frac{\partial kr_{o2}}{\partial S_{g2,ijk}}$$

Derivadas de las transmisibilidades con respecto a la saturación de gas en el medio 3:

Si  $poto32 \geq 0$

$$\frac{\partial T_{o32}}{\partial S_{g3,ijk}} = F_{32} \frac{b_{o3}}{\mu_{o3}} \frac{\partial kr_{o3}}{\partial S_{g3,ijk}}$$

Si  $poto32 < 0$

$$\frac{\partial T_{o32}}{\partial S_{g3,ijk}} = 0$$

Derivadas de los potenciales con respecto a la saturación de agua en el medio 1:

$$\frac{\partial P_{oto21}}{\partial S_{w1,ijk}} = 0$$

Derivadas de los potenciales con respecto a la saturación de agua en el medio 2:

$$\frac{\partial P_{oto21}}{\partial S_{w2,ijk}} = 0$$

Derivadas de los potenciales con respecto a la saturación de agua en el medio 3:

$$\frac{\partial P_{oto32}}{\partial S_{w3,ijk}} = 0$$

Derivadas de las transmisibilidades con respecto a la saturación de agua en el medio 1:

Si  $poto21 \geq 0$

$$\frac{\partial T_{o21}}{\partial S_{w1,ijk}} = 0$$

Si  $poto21 < 0$

$$\frac{\partial T_{o21}}{\partial S_{w2,ijk}} = F_{21} \frac{b_{o2}}{\mu_{o2}} \frac{\partial kr_{o2}}{\partial S_{w2,ijk}}$$

Derivadas de las transmisibilidades con respecto a la saturación de agua en el medio 2:

Si  $poto21 \geq 0$

$$\frac{\partial T_{o21}}{\partial S_{w2,ijk}} = F_{21} \frac{b_{o2}}{\mu_{o2}} \frac{\partial kr_{o2}}{\partial S_{w2,ijk}}$$

Si  $poto21 < 0$

$$\frac{\partial T_{o21}}{\partial S_{w2,ijk}} = 0$$

Si  $poto32 \geq 0$

$$\frac{\partial T_{o32}}{\partial S_{w2,ijk}} = 0$$

Si  $poto32 < 0$

$$\frac{\partial T_{o32}}{\partial S_{w2,ijk}} = F_{32} \frac{b_{o2}}{\mu_{o2}} \frac{\partial kr_{o2}}{\partial S_{w2,ijk}}$$

Derivadas de las transmisibilidades con respecto a la saturación de agua en el medio 3:

Si  $poto32 \geq 0$

$$\frac{\partial T_{o32}}{\partial S_{w3,ijk}} = F_{32} \frac{b_{o3}}{\mu_{o3}} \frac{\partial kr_{o3}}{\partial S_{w3,ijk}}$$

Si  $poto32 < 0$

$$\frac{\partial T_{o32}}{\partial S_{w3,ijk}} = 0$$

**GAS:**

ECUACIÓN PARA EL MEDIO 1:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\Delta \left[ T_g (\Delta p_g + \gamma_g \Delta D) \right]_{1,ijk}^{n+1}}_{\text{Términos de flujo}} + \underbrace{\Delta \left[ R_s T_o (\Delta p_o + \gamma_o \Delta D) \right]_{1,ijk}^{n+1}}_{\text{Términos Fuente}} + \underbrace{\Delta \left[ b_g q_g + R_s b_o q_o \right]_{1,ijk}^{n+1}}_{\text{Términos Fuente}} + \underbrace{\Delta \left[ R_s \tau_{o21} + \tau_{g21} \right]_{ijk}^{n+1}}_{\text{Término Transferencia 2-1}} \\ & = \underbrace{\frac{Vr_{1,ijk}}{\Delta t} \Delta_t \left[ \phi b_o R_s (1 - S_g - S_w) + \phi b_g S_g \right]_{1,ijk}}_{\text{Término de acumulación}} \end{aligned}$$

ECUACIÓN PARA EL MEDIO 2:

$$\begin{aligned} & \underbrace{-\left[ R_s \tau_{o21} + \tau_{g21} \right]_{ijk}^{n+1}}_{\text{Término Transferencia 2-1}} + \underbrace{\left[ R_s \tau_{o32} + \tau_{g32} \right]_{ijk}^{n+1}}_{\text{Término Transferencia 3-2}} + \underbrace{\frac{Vr_{2,ijk}}{\Delta t} \Delta_t \left[ \phi b_o R_s (1 - S_g - S_w) + \phi b_g S_g \right]_{2,ijk}}_{\text{Término de acumulación}} \end{aligned}$$

ECUACIÓN PARA EL MEDIO 3:

Término Transferencia

3-2

Término de acumulación

$$-\left[ R_s \tau_{o32} + \tau_{g32} \right]_{ijk}^{n+1} = \frac{Vr_{3,ijk}}{\Delta t} \Delta_t \left[ \phi b_o R_s (1 - S_g - S_w) + \phi b_g S_g \right]_{3,ijk}$$

Donde:

$$\tau_{o21} = \sigma \left[ \frac{b_o k k_{ro}}{\mu_o} \right]_{21} (p_{o2} - p_{o1}) = T_{o21} (p_{o2} - p_{o1})$$

$$\tau_{g21} = \sigma \left[ \frac{b_g k k_{rg}}{\mu_g} \right]_{21} (p_{g2} - p_{g1}) = T_{g21} (p_{o2} - p_{o1} + P_{cgo2} - P_{cgo1})$$

$$\tau_{o32} = \sigma \left[ \frac{b_o k k_{ro}}{\mu_o} \right]_{32} (p_{o3} - p_{o2}) = T_{o32} (p_{o3} - p_{o2})$$

$$\tau_{g32} = \sigma \left[ \frac{b_g k k_{rg}}{\mu_g} \right]_{32} (p_{g3} - p_{g2}) = T_{g32} (p_{o3} - p_{o2} + P_{cgo3} - P_{cgo2})$$

FUNCIÓN DE RESIDUO DEL GAS PARA EL MEDIO 1:

$$F_{g1,ijk} = \Delta \left[ T_g (\Delta p_g + \gamma_g \Delta D) \right]_{1,ijk}^{n+1} + \Delta \left[ R_s T_o (\Delta p_o + \gamma_o \Delta D) \right]_{1,ijk}^{n+1} + \left[ b_g q_g + R_s b_o q_o \right]_{1,ijk}^{n+1} + \left[ \tau_{g21} + R_s \tau_{o21} \right]_{ijk}^{n+1}$$

$$-\frac{Vr_{1,ijk}}{\Delta t} \Delta_t \left[ \phi b_g S_g + \phi R_s b_o (1 - S_g - S_w) \right]_{1,ijk} = 0$$

Expansión de la función de residuo del medio 1:

$$\begin{aligned}
 F_{g^1,ijk} = & \left[ T_{g_{i+\frac{1}{2},jk}} \left( p_{o_{i+1,jk}} - p_{o_{ijk}} + P_{cgo_{i+1,jk}} - P_{cgo_{ijk}} - (\gamma_g \Delta D)_{i+\frac{1}{2},jk} \right) \right]_1^{n+1} - \\
 & \left[ T_{g_{i-\frac{1}{2},jk}} \left( p_{o_{ijk}} - p_{o_{i-1,jk}} + P_{cgo_{ijk}} - P_{cgo_{i-1,jk}} - (\gamma_g \Delta D)_{i-\frac{1}{2},jk} \right) \right]_1^{n+1} + \\
 & \left[ (R_s T_o)_{i+\frac{1}{2},jk} \left( p_{o_{i+1,jk}} - p_{o_{ijk}} - (\gamma_o \Delta D)_{i+\frac{1}{2},jk} \right) \right]_1^{n+1} - \left[ (R_s T_o)_{i-\frac{1}{2},j,k} \left( p_{o_{ijk}} - p_{o_{i-1,jk}} - (\gamma_o \Delta D)_{i-\frac{1}{2},jk} \right) \right]_1^{n+1} + \\
 & \left[ T_{g_{i,j+\frac{1}{2},k}} \left( p_{o_{i,j+1,k}} - p_{o_{ijk}} + P_{cgo_{i,j+1,k}} - P_{cgo_{ijk}} - (\gamma_g \Delta D)_{i,j+\frac{1}{2},k} \right) \right]_1^{n+1} - \\
 & \left[ T_{g_{i,j-\frac{1}{2},k}} \left( p_{o_{ijk}} - p_{o_{i,j-1,k}} + P_{cgo_{ijk}} - P_{cgo_{i,j-1,k}} - (\gamma_g \Delta D)_{i,j-\frac{1}{2},k} \right) \right]_1^{n+1} + \\
 & \left[ (R_s T_o)_{i,j+\frac{1}{2},k} \left( p_{o_{i,j+1,k}} - p_{o_{ijk}} - (\gamma_o \Delta D)_{i,j+\frac{1}{2},k} \right) \right]_1^{n+1} - \left[ (R_s T_o)_{i,j-\frac{1}{2},k} \left( p_{o_{ijk}} - p_{o_{i,j-1,k}} - (\gamma_o \Delta D)_{i,j-\frac{1}{2},k} \right) \right]_1^{n+1} + \\
 & \left[ T_{g_{ijk+\frac{1}{2}}} \left( p_{o_{ijk+1}} - p_{o_{ijk}} + P_{cgo_{ijk+1}} - P_{cgo_{ijk}} - (\gamma_g \Delta D)_{ijk+\frac{1}{2}} \right) \right]_1^{n+1} - \\
 & \left[ T_{g_{ijk-\frac{1}{2}}} \left( p_{o_{ijk}} - p_{o_{ijk-1}} + P_{cgo_{ijk}} - P_{cgo_{ijk-1}} - (\gamma_g \Delta D)_{ijk-\frac{1}{2}} \right) \right]_1^{n+1} + \\
 & \left[ (R_s T_o)_{ijk+\frac{1}{2}} \left( p_{o_{ijk+1}} - p_{o_{ijk}} - (\gamma_o \Delta D)_{ijk+\frac{1}{2}} \right) \right]_1^{n+1} - \left[ (R_s T_o)_{ijk-\frac{1}{2}} \left( p_{o_{ijk}} - p_{o_{ijk-1}} - (\gamma_o \Delta D)_{ijk-\frac{1}{2}} \right) \right]_1^{n+1} + \\
 & [b_g q_g + R_s b_o q_o]_{1,ijk}^{n+1} + [T_{g_{21}} (p_{o_{21}} - p_{o_{11}} + P_{cgo_{21}} - P_{cgo_{11}}) + R_s T_{o_{21}} (p_{o_{21}} - p_{o_{11}})]_{ijk}^{n+1}
 \end{aligned}$$

$$\frac{Vp_{1,ijk}}{\Delta t} \left\{ \left[ [1 + C_r (p_o^{n+1} - p_o^n)] (b_g S_g + R_s b_o (1 - S_w - S_g))^{n+1} \right] - (b_g S_g + R_s b_o (1 - S_w - S_g))^n \right\}_{1,ijk} = 0$$

**Derivada de la función de residuo del gas con respecto a la presión de aceite en el medio 1, en ijk:**

$$\frac{\partial F_{g1,ijk}}{\partial p_{o1,ijk}} = \frac{\partial \{T.\text{Flujo}\}}{\partial p_{o1,ijk}} + \frac{\partial \{T.\text{Fuente}\}}{\partial p_{o1,ijk}} + \frac{\partial \{FT21\}}{\partial p_{o1,ijk}} + \frac{\partial \{T.\text{Acum.}\}}{\partial p_{o1,ijk}}$$

Términos de flujo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{T.\text{Flujo}\}}{\partial p_{o1,ijk}} = & T_{gx2} \frac{\partial P_{otgx2}}{\partial p_{o1,ijk}} + P_{otgx2} \frac{\partial T_{gx2}}{\partial p_{o1,ijk}} - T_{gx1} \frac{\partial P_{otgx1}}{\partial p_{o1,ijk}} - P_{otgx1} \frac{\partial T_{gx1}}{\partial p_{o1,ijk}} + \\ & (R_s T_o)_{x2} \frac{\partial P_{otox2}}{\partial p_{o1,ijk}} + P_{otox2} \frac{\partial (R_s T_o)_{x2}}{\partial p_{o1,ijk}} - (R_s T_o)_{x1} \frac{\partial P_{otox1}}{\partial p_{o1,ijk}} - P_{otox1} \frac{\partial (R_s T_o)_{x1}}{\partial p_{o1,ijk}} + \\ & T_{gy2} \frac{\partial P_{otgy2}}{\partial p_{o1,ijk}} + P_{otgy2} \frac{\partial T_{gy2}}{\partial p_{o1,ijk}} - T_{gy1} \frac{\partial P_{otgy1}}{\partial p_{o1,ijk}} - P_{otgy1} \frac{\partial T_{gy1}}{\partial p_{o1,ijk}} + \\ & (R_s T_o)_{y2} \frac{\partial P_{otoy2}}{\partial p_{o1,ijk}} + P_{otoy2} \frac{\partial (R_s T_o)_{y2}}{\partial p_{o1,ijk}} - (R_s T_o)_{y1} \frac{\partial P_{otoy1}}{\partial p_{o1,ijk}} - P_{otoy1} \frac{\partial (R_s T_o)_{y1}}{\partial p_{o1,ijk}} + \\ & T_{gz2} \frac{\partial P_{otgz2}}{\partial p_{o1,ijk}} + P_{otgz2} \frac{\partial T_{gz2}}{\partial p_{o1,ijk}} - T_{gz1} \frac{\partial P_{otgz1}}{\partial p_{o1,ijk}} - P_{otgz1} \frac{\partial T_{gz1}}{\partial p_{o1,ijk}} + \\ & (R_s T_o)_{z2} \frac{\partial P_{otoz2}}{\partial p_{o1,ijk}} + P_{otoz2} \frac{\partial (R_s T_o)_{z2}}{\partial p_{o1,ijk}} - (R_s T_o)_{z1} \frac{\partial P_{otoz1}}{\partial p_{o1,ijk}} - P_{otoz1} \frac{\partial (R_s T_o)_{z1}}{\partial p_{o1,ijk}} \end{aligned}$$

Términos fuente:

$$\frac{\partial \{T.\text{Fuente}\}}{\partial p_{o1,ijk}} = b_{gijk} \frac{\partial q_{gijk}}{\partial p_{o1,ijk}} + q_{gijk} \frac{\partial b_{gijk}}{\partial p_{o1,ijk}} + (R_s b_o)_{ijk} \left[ \frac{\partial q_{oijk}}{\partial p_{o1,ijk}} + q_{oijk} \left( \frac{1}{b_{oijk}} \frac{\partial b_{oijk}}{\partial p_{o1,ijk}} + \frac{1}{R_{sijk}} \frac{\partial R_{sijk}}{\partial p_{o1,ijk}} \right) \right]$$

Función de transferencia 2-1:

$$\frac{\partial \{FT21\}}{\partial p_{o1,ijk}} = \left( T_{g21} \frac{\partial P_{otg21}}{\partial p_{o1,ijk}} + P_{otg21} \frac{\partial T_{g21}}{\partial p_{o1,ijk}} \right) + \left( (R_s T_o)_{21} \frac{\partial P_{oto21}}{\partial p_{o1,ijk}} + P_{oto21} \frac{\partial (R_s T_o)_{21}}{\partial p_{o1,ijk}} \right)$$

Término de Acumulación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{T.Acum.\}}{\partial p_{o1,ijk}} &= -\frac{V_{r,ijk}}{\Delta t} \Delta_i \left\{ \phi \frac{\partial}{\partial p_{o1,ijk}} [b_g S_g + R_s b_o (1 - S_g - S_w)] + [b_g S_g + R_s b_o (1 - S_g - S_w)] \frac{\partial \phi}{\partial p_{o1,ijk}} \right\}_{ijk} \\ &= -\frac{V p_{1,ijk}}{\Delta t} \left\{ [1 + C_r (p_o^{n+1} - p_o^n)] \left[ S_g \frac{\partial b_g}{\partial p_{o1,ijk}} + (1 - S_w - S_g)^{n+1} \left( R_s \frac{\partial b_o}{\partial p_{o1,ijk}} + b_o \frac{\partial R_s}{\partial p_{o1,ijk}} \right)^{n+1} \right] + \right. \\ &\quad \left. C_r [b_g S_g + R_s b_o (1 - S_w - S_g)]^{n+1} \right\}_{ijk} \end{aligned}$$

Derivadas de potenciales:

$$\frac{\partial P_{otgx2}}{\partial p_{o1,ijk}} = \frac{\partial}{\partial p_{o1,ijk}} \left[ p_{o_{i+1}jk} - p_{o_{ijk}} + P_{cgo_{i+1}jk} - P_{cgo_{ijk}} + \gamma_{g_{i+\frac{1}{2}}jk} (D_{i+1jk} - D_{ijk}) \right] = -1 + \frac{1}{2} (D_{i+1jk} - D_{ijk}) \frac{\partial \gamma_{g_{ijk}}}{\partial p_{o1,ijk}}$$

$$\frac{\partial P_{otgx1}}{\partial p_{o1,ijk}} = \frac{\partial}{\partial p_{o1,ijk}} \left[ p_{o_{ijk}} - p_{o_{i-1}jk} + P_{cgo_{ijk}} - P_{cgo_{i-1}jk} + \gamma_{g_{i-\frac{1}{2}}jk} (D_{ijk} - D_{i-1jk}) \right] = 1 + \frac{1}{2} (D_{ijk} - D_{i-1jk}) \frac{\partial \gamma_{g_{ijk}}}{\partial p_{o1,ijk}}$$

$$\frac{\partial P_{otox2}}{\partial p_{o1,ijk}} = \frac{\partial}{\partial p_{o1,ijk}} \left[ p_{o_{i+1}jk} - p_{o_{ijk}} + \gamma_{o_{i+\frac{1}{2}}jk} (D_{i+1jk} - D_{ijk}) \right] = -1 + \frac{1}{2} (D_{i+1jk} - D_{ijk}) \frac{\partial \gamma_{o_{ijk}}}{\partial p_{o1,ijk}}$$

$$\frac{\partial P_{otox1}}{\partial p_{o1,ijk}} = \frac{\partial}{\partial p_{o1,ijk}} \left[ p_{o_{ijk}} - p_{o_{i-1}jk} + \gamma_{o_{i-\frac{1}{2}}jk} (D_{ijk} - D_{i-1jk}) \right] = 1 + \frac{1}{2} (D_{ijk} - D_{i-1jk}) \frac{\partial \gamma_{o_{ijk}}}{\partial p_{o1,ijk}}$$

Derivadas de las transmisibilidades:

$$T_g = F \frac{b_g k k_{rg}}{\mu_g}$$

$$T_o = F \frac{b_o k k_{ro}}{\mu_o}$$

$$\frac{\partial T_o}{\partial p_{o1,ijk}} = T_o \left( \frac{1}{b_o} \frac{\partial b_o}{\partial p_{o1,ijk}} - \frac{1}{\mu_o} \frac{\partial \mu_o}{\partial p_{o1,ijk}} \right)$$

$$\frac{\partial T_g}{\partial p_{o1,ijk}} = T_g \left( \frac{1}{b_g} \frac{\partial b_g}{\partial p_{o1,ijk}} - \frac{1}{\mu_g} \frac{\partial \mu_g}{\partial p_{o1,ijk}} \right)$$

$$\frac{\partial R_s T_o}{\partial p_{o1,ijk}} = R_s \frac{\partial T_o}{\partial p_{o1,ijk}} + T_o \frac{\partial R_s}{\partial p_{o1,ijk}}$$

**Derivada de la función de residuo del gas con respecto a la saturación de gas en el medio 1, en ijk:**

$$\frac{\partial F_{g1,ijk}}{\partial S_{g1,ijk}} = \frac{\partial \{T.Flujos\}}{\partial S_{g1,ijk}} + \frac{\partial \{T. Fuente\}}{\partial S_{g1,ijk}} + \frac{\partial \{FT21\}}{\partial S_{g1,ijk}} + \frac{\partial \{T.Acum.\}}{\partial S_{g1,ijk}}$$

Términos de flujo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{T.Flujos\}}{\partial S_{g1,ijk}} = & T_{gx2} \frac{\partial P_{otgx2}}{\partial S_{g1,ijk}} + P_{otgx2} \frac{\partial T_{gx2}}{\partial S_{g1,ijk}} - T_{gx1} \frac{\partial P_{otgx1}}{\partial S_{g1,ijk}} - P_{otgx1} \frac{\partial T_{gx1}}{\partial S_{g1,ijk}} + P_{otox2} \frac{\partial (R_s T_o)_{x2}}{\partial S_{g1,ijk}} - P_{otox1} \frac{\partial (R_s T_o)_{x1}}{\partial S_{g1,ijk}} + \\ & T_{gy2} \frac{\partial P_{otgy2}}{\partial S_{g1,ijk}} + P_{otgy2} \frac{\partial T_{gy2}}{\partial S_{g1,ijk}} - T_{gy1} \frac{\partial P_{otgy1}}{\partial S_{g1,ijk}} - P_{otgy1} \frac{\partial T_{gy1}}{\partial S_{g1,ijk}} + P_{otoy2} \frac{\partial (R_s T_o)_{y2}}{\partial S_{g1,ijk}} - P_{otoy1} \frac{\partial (R_s T_o)_{y1}}{\partial S_{g1,ijk}} + \\ & T_{gz2} \frac{\partial P_{otgz2}}{\partial S_{g1,ijk}} + P_{otgz2} \frac{\partial T_{gz2}}{\partial S_{g1,ijk}} - T_{gz1} \frac{\partial P_{otgz1}}{\partial S_{g1,ijk}} - P_{otgz1} \frac{\partial T_{gz1}}{\partial S_{g1,ijk}} + P_{otoz2} \frac{\partial (R_s T_o)_{z2}}{\partial S_{g1,ijk}} - P_{otoz1} \frac{\partial (R_s T_o)_{z1}}{\partial S_{g1,ijk}} \end{aligned}$$

Función de transferencia 2-1:

$$\frac{\partial \{FT21\}}{\partial S_{g1,ijk}} = \left( P_{oto21} \frac{\partial (R_s T_o)_{21,ijk}}{\partial S_{g1,ijk}} \right) + \left( T_{g21,ijk} \frac{\partial P_{otg21}}{\partial S_{g1,ijk}} + P_{otg21} \frac{\partial T_{g21,ijk}}{\partial S_{g1,ijk}} \right)$$

Términos Fuente:

$$\frac{\partial (b_g q_g + b_o R_s q_o)_{ijk}^{n+1}}{\partial S_{g1,ijk}} = b_{g,ijk} \frac{\partial q_{g,ijk}}{\partial S_{g1,ijk}} + q_{g,ijk} \left( \frac{\partial b_{g,ijk}}{\partial p_{o1,ijk}} \frac{\partial P_{cgo,ijk}}{\partial S_{g1,ijk}} \right) + (b_o R_s)_{ijk} \frac{\partial q_{o,ijk}}{\partial S_{g1,ijk}}$$

Término de Acumulación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{T.Acum.\}}{\partial S_{g1,ijk}} &= -\frac{Vr_{1,ijk}}{\Delta t} \left\{ \phi \frac{\partial}{\partial S_{g1,ijk}} \left[ b_g S_g + R_s b_o (1 - S_g - S_w) \right] \right\}_{ijk} \\ &= -\frac{Vp_{1,ijk}}{\Delta t} \left\{ \left[ 1 + C_r (p_o^{n+1} - p_o^n) \right] \left( b_g + S_g \frac{\partial b_g}{\partial p_{o1,ijk}} \frac{\partial P_{cgo}}{\partial S_{g1,ijk}} - R_s b_o^{n+1} \right) \right\}_{ijk} \end{aligned}$$

Derivadas de los potenciales con respecto a la saturación de gas:

$$\frac{\partial P_{otox2}}{\partial S_{g1,ijk}} = 0$$

$$\frac{\partial P_{otox1}}{\partial S_{g1,ijk}} = 0$$

$$\frac{\partial P_{otgx2}}{\partial S_{g1,ijk}} = -\frac{\partial P_{cgo}}{\partial S_{g1,ijk}} + \frac{1}{2} (D_{i+1,jk} - D_{ijk}) \frac{\partial \gamma_{gijk}}{\partial p_{o1,ijk}} \frac{\partial P_{cgo}}{\partial S_{g1,ijk}}$$

$$\frac{\partial P_{otgx1}}{\partial S_{g1,ijk}} = \frac{\partial P_{cgo}}{\partial S_{g1,ijk}} + \frac{1}{2} (D_{i+1,jk} - D_{ijk}) \frac{\partial \gamma_{g_{i-\frac{1}{2},jk}}}{\partial p_{o1,ijk}} \frac{\partial P_{cgo}}{\partial S_{g1,ijk}}$$

Derivadas de transmisibilidades con respecto a la saturación de gas:

$$\frac{\partial T_g}{\partial S_{g1,ijk}} = Fk \frac{\partial}{\partial S_{g1,ijk}} \left( \frac{k_{rg} b_g}{\mu_g} \right) = T_g \left[ \frac{1}{b_g} \frac{\partial b_g}{\partial p_{o1,ijk}} \frac{\partial P_{cgo}}{\partial S_{g1,ijk}} + \frac{1}{k_{rg}} \frac{\partial k_{rg}}{\partial S_{g1,ijk}} - \frac{1}{\mu_g} \frac{\partial \mu_g}{\partial p_{o1,ijk}} \frac{\partial P_{cgo}}{\partial S_{g1,ijk}} \right]$$

Reescribiendo la ec. anterior, tenemos:

$$\frac{\partial T_g}{\partial S_{g1,ijk}} = \frac{Fb_g}{\mu_g} \frac{\partial k_{rg}}{\partial S_{g1,ijk}} + \frac{\partial T_g}{\partial p_{o1,ijk}} \frac{\partial P_{cgo}}{\partial S_{g1,ijk}}$$

$$\frac{\partial(R_s T_o)}{\partial S_{g1,ijk}} = R_s \frac{\partial T_o}{\partial S_{g1,ijk}}$$

$$\frac{\partial T_o}{\partial S_{g1,ijk}} = \frac{Fkb_o}{\mu_o} \frac{\partial k_{ro}}{\partial S_{g1,ijk}}$$

**Derivada de la función de residuo del gas con respecto a la saturación de agua en el medio 1, en ijk:**

$$\frac{\partial F_{g1,ijk}}{\partial S_{w1,ijk}} = \frac{\partial \{T.Flujo\}}{\partial S_{w1,ijk}} + \frac{\partial \{T. Fuente\}}{\partial S_{w1,ijk}} + \frac{\partial \{FT21\}}{\partial S_{w1,ijk}} + \frac{\partial \{T.Acum.\}}{\partial S_{w1,ijk}}$$

Términos de flujo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{T.Flujo\}}{\partial S_{w1,ijk}} = & P_{otox2} \frac{\partial (R_s T_o)_{x2}}{\partial S_{w1,ijk}} - P_{otox1} \frac{\partial (R_s T_o)_{x1}}{\partial S_{w1,ijk}} + P_{otoy2} \frac{\partial (R_s T_o)_{y2}}{\partial S_{w1,ijk}} - P_{otoy1} \frac{\partial (R_s T_o)_{y1}}{\partial S_{w1,ijk}} + \\ & P_{otoz2} \frac{\partial (R_s T_o)_{z2}}{\partial S_{w1,ijk}} - P_{otoz1} \frac{\partial (R_s T_o)_{z1}}{\partial S_{w1,ijk}} \end{aligned}$$

Términos fuente:

$$\frac{\partial \{T. Fuente\}}{\partial S_{w1,ijk}} = 0$$

Término de transferencia:

$$\frac{\partial \{FT21\}}{\partial S_{w1,ijk}} = P_{oto21} \frac{\partial (R_s T_o)_{21}}{\partial S_{w1,ijk}}$$

Término de acumulación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{T.Acum.\}}{\partial S_{w1,ijk}} &= -\frac{Vr_{1,ijk}}{\Delta t} \left\{ \phi \frac{\partial}{\partial S_{w1,ijk}} \left[ b_g S_g + R_s b_o (1 - S_g - S_w) \right] \right\}_{ijk} \\ &= +\frac{Vp_{1,ijk}}{\Delta t} \left\{ \left[ 1 + C_r (p_o^{n+1} - p_o^n) \right] (R_s b_o^{n+1}) \right\}_{ijk} \end{aligned}$$

Derivadas de transmisibilidades con respecto a la saturación de agua:

$$\frac{\partial (R_s T_o)}{\partial S_{w1,ijk}} = R_s \frac{\partial T_o}{\partial S_{w1,ijk}}$$

$$\frac{\partial T_o}{\partial S_{w1,ijk}} = \frac{F k b_o}{\mu_o} \frac{\partial k_{ro}}{\partial S_{w1,ijk}}$$

**Derivada de la función de residuo del pseudo componente gas en el nodo i-1,j,k:**

$$\frac{\partial F_{g1}}{\partial p_{o1,i-1,jk}} = - \left[ T_{gx1} \frac{\partial P_{otgx1}}{\partial p_{o1,i-1,jk}} + P_{otgx1} \frac{\partial T_{gx1}}{\partial p_{o1,i-1,jk}} + (R_s T_o)_{x1} \frac{\partial P_{otox1}}{\partial p_{o1,i-1,jk}} + P_{otox1} \frac{\partial (R_s T_o)_{x1}}{\partial p_{o1,i-1,jk}} \right]$$

$$\frac{\partial F_{g1}}{\partial S_{g1,i-1,jk}} = -T_{gx1} \frac{\partial P_{otgx1}}{\partial S_{g1,i-1,jk}} - P_{otgx1} \frac{\partial T_{gx1}}{\partial S_{g1,i-1,jk}} - P_{otox1} \frac{\partial (R_s T_o)_{x1}}{\partial S_{g1,i-1,jk}}$$

$$\frac{\partial F_{g1}}{\partial S_{w1,i-1,jk}} = -P_{otox1} \frac{\partial (R_s T_o)_{x1}}{\partial S_{w1,i-1,jk}}$$

**Derivada de la función de residuo del pseudo componente gas en el nodo i,j-1,k:**

$$\frac{\partial F_{g1}}{\partial p_{o1,ij-1,k}} = - \left[ T_{gy1} \frac{\partial P_{otgy1}}{\partial p_{o1,ij-1,k}} + P_{otgy1} \frac{\partial T_{gy1}}{\partial p_{o1,ij-1,k}} + (R_s T_o)_{y1} \frac{\partial P_{otoy1}}{\partial p_{o1,ij-1,k}} + P_{otoy1} \frac{\partial (R_s T_o)_{y1}}{\partial p_{o1,ij-1,k}} \right]$$

$$\frac{\partial F_{g1}}{\partial S_{g1,ij-1,k}} = -T_{gy1} \frac{\partial P_{otgy1}}{\partial S_{g1,ij-1,k}} - P_{otgy1} \frac{\partial T_{gy1}}{\partial S_{g1,ij-1,k}} - P_{otoy1} \frac{\partial (R_s T_o)_{y1}}{\partial S_{g1,ij-1,k}}$$

$$\frac{\partial F_{g1}}{\partial S_{w1,ij-1k}} = -P_{otoy1} \frac{\partial (R_s T_o)_{y1}}{\partial S_{w1,ij-1k}}$$

**Derivada de la función de residuo del pseudo componente gas en el nodo i,j,k-1:**

$$\frac{\partial F_{g1}}{\partial p_{o1,ijk-1}} = - \left[ T_{gz1} \frac{\partial P_{otgz1}}{\partial p_{o1,ijk-1}} + P_{otgz1} \frac{\partial T_{gz1}}{\partial p_{o1,ijk-1}} + (R_s T_o)_{z1} \frac{\partial P_{otoz1}}{\partial p_{o1,ijk-1}} + P_{otoz1} \frac{\partial (R_s T_o)_{z1}}{\partial p_{o1,ijk-1}} \right]$$

$$\frac{\partial F_{g1}}{\partial S_{g1,ijk-1}} = -T_{gz1} \frac{\partial P_{otgz1}}{\partial S_{g1,ijk-1}} - P_{otgz1} \frac{\partial T_{gz1}}{\partial S_{g1,ijk-1}} - P_{otoz1} \frac{\partial (R_s T_o)_{z1}}{\partial S_{g1,ijk-1}}$$

$$\frac{\partial F_{g1}}{\partial S_{w1,ij-1k}} = -P_{otoy1} \frac{\partial (R_s T_o)_{y1}}{\partial S_{w1,ij-1k}}$$

**Derivada de la función de residuo del pseudo componente gas con respecto a la presión del aceite en el nodo i+1,j,k**

$$\frac{\partial F_{g1}}{\partial p_{o1,i+1,jk}} = T_{gx2} \frac{\partial P_{otgx2}}{\partial p_{o1,i+1,jk}} + P_{otgx2} \frac{\partial T_{gx2}}{\partial p_{o1,i+1,jk}} + (R_s T_o)_{x2} \frac{\partial P_{otox2}}{\partial p_{o1,i+1,jk}} + P_{otox2} \frac{\partial (R_s T_o)_{x2}}{\partial p_{o1,i+1,jk}}$$

$$\frac{\partial F_{g1}}{\partial S_{g1,i+1,jk}} = T_{gx2} \frac{\partial P_{otgx2}}{\partial S_{g1,i+1,jk}} + P_{otgx2} \frac{\partial T_{gx2}}{\partial S_{g1,i+1,jk}} + P_{otox2} \frac{\partial (R_s T_o)_{x2}}{\partial S_{g1,i+1,jk}}$$

$$\frac{\partial F_{g1}}{\partial S_{w1,i+1,jk}} = P_{otox2} \frac{\partial (R_s T_o)_{x2}}{\partial S_{w1,i+1,jk}}$$

**Derivada de la función de residuo del pseudo componente gas con respecto a la presión del aceite en el nodo i,j+1,k**

$$\frac{\partial F_{g1}}{\partial p_{o1,ij+1,k}} = T_{gy2} \frac{\partial P_{otgy2}}{\partial p_{o1,ij+1,k}} + P_{otgy2} \frac{\partial T_{gy2}}{\partial p_{o1,ij+1,k}} + (R_s T_o)_{y2} \frac{\partial P_{otoy2}}{\partial p_{o1,ij+1,k}} + P_{otoy2} \frac{\partial (R_s T_o)_{y2}}{\partial p_{o1,ij+1,k}}$$

$$\frac{\partial F_{g1}}{\partial S_{g1,ij+1,k}} = T_{gy2} \frac{\partial P_{otgy2}}{\partial S_{g1,ij+1,k}} + P_{otgy2} \frac{\partial T_{gy2}}{\partial S_{g1,ij+1,k}} + P_{otoy2} \frac{\partial (R_s T_o)_{y2}}{\partial S_{g1,ij+1,k}}$$

$$\frac{\partial F_{g1}}{\partial S_{w1,ij+1,k}} = P_{otoy2} \frac{\partial (R_s T_o)_{y2}}{\partial S_{w1,ij+1,k}}$$

**Derivada de la función de residuo del pseudo componente gas con respecto a la presión del aceite en el nodo  $i,j,k+1$**

$$\frac{\partial F_{g1}}{\partial p_{o1,ijk+1}} = T_{gz2} \frac{\partial P_{otgz2}}{\partial p_{o1,ijk+1}} + P_{otgz2} \frac{\partial T_{gz2}}{\partial p_{o1,ijk+1}} + (R_s T_o)_{z2} \frac{\partial P_{otoz2}}{\partial p_{o1,ijk+1}} + P_{otoz2} \frac{\partial (R_s T_o)_{z2}}{\partial p_{o1,ijk+1}}$$

$$\frac{\partial F_{g1}}{\partial S_{g1,ijk+1}} = T_{gz2} \frac{\partial P_{otgz2}}{\partial S_{g1,ijk+1}} + P_{otgz2} \frac{\partial T_{gz2}}{\partial S_{g1,ijk+1}} + P_{otoz2} \frac{\partial (R_s T_o)_{z2}}{\partial S_{g1,ijk+1}}$$

$$\frac{\partial F_{g1}}{\partial S_{w1,ijk+1}} = P_{otoz2} \frac{\partial (R_s T_o)_{z2}}{\partial S_{w1,ijk+1}}$$

**FUNCIÓN DE RESIDUO DEL GAS PARA EL MEDIO 2:**

$$\begin{aligned} F_{g2,ijk} = & - \left[ T_{g21} (p_{o2} - p_{o1} + P_{cgo2} - P_{cgo1}) + (R_s T_o)_{21} (p_{o2} - p_{o1}) \right]_{ijk}^{n+1} \\ & + \left[ T_{g32} (p_{o3} - p_{o2} + P_{cgo3} - P_{cgo2}) + (R_s T_o)_{32} (p_{o3} - p_{o2}) \right]_{ijk}^{n+1} \\ & - \frac{Vr_{2,ijk}}{\Delta t} \Delta_t \left[ \phi b_g S_g + \phi R_s b_o (1 - S_g - S_w) \right]_{2,ijk} = 0 \end{aligned}$$

**Derivada de la función de residuo del gas con respecto a la presión de aceite en el medio 2, en  $ijk$ :**

$$\frac{\partial F_{g2,ijk}}{\partial p_{o2,ijk}} = \frac{\partial \{FT21\}}{\partial p_{o2,ijk}} + \frac{\partial \{FT32\}}{\partial p_{o2,ijk}} + \frac{\partial \{T.Acum.\}}{\partial p_{o2,ijk}}$$

Función de transferencia 2-1:

$$\frac{\partial \{FT21\}}{\partial p_{o2,ijk}} = - \left\{ T_{g21} \frac{\partial P_{otg21}}{\partial p_{o2,ijk}} + P_{otg21} \frac{\partial T_{g21}}{\partial p_{o2,ijk}} + (R_s T_o)_{21} \frac{\partial P_{oto21}}{\partial p_{o2,ijk}} + P_{oto21} \frac{\partial (R_s T_o)_{21}}{\partial p_{o2,ijk}} \right\}$$

Función de transferencia 3-2:

$$\frac{\partial \{FT32\}}{\partial p_{o2,ijk}} = T_{g32} \frac{\partial P_{otg32}}{\partial p_{o2,ijk}} + P_{otg32} \frac{\partial T_{g32}}{\partial p_{o2,ijk}} + (R_s T_o)_{32} \frac{\partial P_{oto32}}{\partial p_{o2,ijk}} + P_{oto32} \frac{\partial (R_s T_o)_{32}}{\partial p_{o2,ijk}}$$

Término de Acumulación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{T.Acum.\}}{\partial p_{o2,ijk}} &= - \frac{Vr_{2,ijk}}{\Delta t} \Delta_r \left\{ \phi \frac{\partial}{\partial p_{o2,ijk}} \left[ b_g S_g + R_s b_o (1 - S_g - S_w) \right] + \left[ b_g S_g + R_s b_o (1 - S_g - S_w) \right] \frac{\partial \phi}{\partial p_{o2,ijk}} \right\}_{ijk} \\ &= - \frac{VP_{2,ijk}}{\Delta t} \left\{ \left[ 1 + C_r (p_o^{n+1} - p_o^n) \right] \left[ S_g \frac{\partial b_g}{\partial p_{o2,ijk}} + (1 - S_w - S_g)^{n+1} \left( R_s \frac{\partial b_o}{\partial p_{o2,ijk}} + b_o \frac{\partial R_s}{\partial p_{o2,ijk}} \right)^{n+1} \right] + \right. \\ &\quad \left. C_r \left[ b_g S_g + R_s b_o (1 - S_w - S_g) \right]^{n+1} \right\}_{ijk} \end{aligned}$$

**Derivada de la función de residuo del gas con respecto a la saturación de gas en el medio 2, en ijk:**

$$\frac{\partial F_{g2,ijk}}{\partial S_{g2,ijk}} = \frac{\partial \{FT21\}}{\partial S_{g2,ijk}} + \frac{\partial \{FT32\}}{\partial S_{g2,ijk}} + \frac{\partial \{T.Acum.\}}{\partial S_{g2,ijk}}$$

Función de transferencia 2-1:

$$\frac{\partial \{FT21\}}{\partial S_{g2,ijk}} = - \left( P_{oto21} \frac{\partial (R_s T_o)_{21,ijk}}{\partial S_{g2,ijk}} \right) + \left( T_{g21,ijk} \frac{\partial P_{otg21}}{\partial S_{g2,ijk}} + P_{otg21} \frac{\partial T_{g21,ijk}}{\partial S_{g2,ijk}} \right)$$

Función de transferencia 3-2:

$$\frac{\partial\{FT32\}}{\partial S_{g2,ijk}} = \left( P_{oto32} \frac{\partial(R_s T_o)_{32,ijk}}{\partial S_{g2,ijk}} \right) + \left( T_{g32,ijk} \frac{\partial P_{otg32}}{\partial S_{g2,ijk}} + P_{otg32} \frac{\partial T_{g32,ijk}}{\partial S_{g2,ijk}} \right)$$

Término de Acumulación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\{T.Acum.\}}{\partial S_{g2,ijk}} &= -\frac{Vr_{2,ijk}}{\Delta t} \left\{ \phi \frac{\partial}{\partial S_{g2,ijk}} [b_g S_g + R_s b_o (1 - S_g - S_w)] \right\}_{ijk} \\ &= -\frac{Vp_{2,ijk}}{\Delta t} \left\{ [1 + C_r (p_o^{n+1} - p_o^n)] \left( b_g + S_g \frac{\partial b_g}{\partial p_{o2,ijk}} \frac{\partial P_{cgo}}{\partial S_{g2,ijk}} - R_s b_o^{n+1} \right) \right\}_{ijk} \end{aligned}$$

**Derivada de la función de residuo del gas con respecto a la saturación de agua en el medio 2, en ijk:**

$$\frac{\partial F_{g2,ijk}}{\partial S_{w2,ijk}} = \frac{\partial\{FT21\}}{\partial S_{w2,ijk}} + \frac{\partial\{FT32\}}{\partial S_{w2,ijk}} + \frac{\partial\{T.Acum.\}}{\partial S_{w2,ijk}}$$

Término de transferencia 2-1:

$$\frac{\partial\{FT21\}}{\partial S_{w2,ijk}} = - \left\{ P_{oto21} \frac{\partial(R_s T_o)_{21}}{\partial S_{w2,ijk}} \right\}$$

Término de transferencia 3-2:

$$\frac{\partial\{FT32\}}{\partial S_{w2,ijk}} = P_{oto32} \frac{\partial(R_s T_o)_{32}}{\partial S_{w2,ijk}}$$

Término de acumulación:

$$\frac{\partial \{T.Acum.\}}{\partial S_{w2,ijk}} = -\frac{Vr_{2,ijk}}{\Delta t} \left\{ \phi \frac{\partial}{\partial S_{w2,ijk}} [b_g S_g + R_s b_o (1 - S_g - S_w)] \right\}_{ijk}$$

$$= +\frac{Vp_{2,ijk}}{\Delta t} \left\{ [1 + C_r (p_o^{n+1} - p_o^n)] (R_s b_o^{n+1}) \right\}_{ijk}$$

FUNCIÓN DE RESIDUO DEL GAS PARA EL MEDIO 3:

$$F_{g3,ijk} = -\left[ T_{g32} (p_{o3} - p_{o2} + P_{cgo3} - P_{cgo2}) + (R_s T_o)_{32} (p_{o3} - p_{o2}) \right]_{ijk}^{n+1}$$

$$-\frac{Vr_{3,ijk}}{\Delta t} \Delta_t \left[ \phi b_g S_g + \phi R_s b_o (1 - S_g - S_w) \right]_{3,ijk} = 0$$

**Derivada de la función de residuo del gas con respecto a la presión de aceite en el medio 3, en ijk:**

$$\frac{\partial F_{g3,ijk}}{\partial p_{o3,ijk}} = \frac{\partial \{FT32\}}{\partial p_{o3,ijk}} + \frac{\partial \{T.Acum.\}}{\partial p_{o3,ijk}}$$

Función de transferencia 3-2:

$$\frac{\partial \{FT32\}}{\partial p_{o3,ijk}} = T_{g32} \frac{\partial P_{otg32}}{\partial p_{o3,ijk}} + P_{otg32} \frac{\partial T_{g32}}{\partial p_{o3,ijk}} + (R_s T_o)_{32} \frac{\partial P_{oto32}}{\partial p_{o3,ijk}} + P_{oto32} \frac{\partial (R_s T_o)_{32}}{\partial p_{o3,ijk}}$$

Término de Acumulación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{T.Acum.\}}{\partial p_{o3,ijk}} &= -\frac{Vr_{3,ijk}}{\Delta t} \Delta_r \left\{ \phi \frac{\partial}{\partial p_{o3,ijk}} \left[ b_g S_g + R_s b_o (1 - S_g - S_w) \right] + \left[ b_g S_g + R_s b_o (1 - S_g - S_w) \right] \frac{\partial \phi}{\partial p_{o3,ijk}} \right\}_{ijk} \\ &= -\frac{Vp_{3,ijk}}{\Delta t} \left\{ \left[ 1 + C_r (p_o^{n+1} - p_o^n) \right] \left[ S_g \frac{\partial b_g}{\partial p_{o3,ijk}} + (1 - S_w - S_g)^{n+1} \left( R_s \frac{\partial b_o}{\partial p_{o3,ijk}} + b_o \frac{\partial R_s}{\partial p_{o3,ijk}} \right)^{n+1} \right] + \right. \\ &\quad \left. C_r \left[ b_g S_g + R_s b_o (1 - S_w - S_g) \right]^{n+1} \right\}_{ijk} \end{aligned}$$

**Derivada de la función de residuo del gas con respecto a la saturación de gas en el medio 3, en ijk:**

$$\frac{\partial F_{g3,ijk}}{\partial S_{g3,ijk}} = \frac{\partial \{FT32\}}{\partial S_{g3,ijk}} + \frac{\partial \{T.Acum.\}}{\partial S_{g3,ijk}}$$

Función de transferencia 3-2:

$$\frac{\partial \{FT32\}}{\partial S_{g3,ijk}} = \left( P_{oto32} \frac{\partial (R_s T_o)_{32,ijk}}{\partial S_{g3,ijk}} \right) + \left( T_{g32,ijk} \frac{\partial P_{otg32}}{\partial S_{g3,ijk}} + P_{otg32} \frac{\partial T_{g32,ijk}}{\partial S_{g3,ijk}} \right)$$

Término de Acumulación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{T.Acum.\}}{\partial S_{g3,ijk}} &= -\frac{Vr_{3,ijk}}{\Delta t} \left\{ \phi \frac{\partial}{\partial S_{g3,ijk}} \left[ b_g S_g + R_s b_o (1 - S_g - S_w) \right] \right\}_{ijk} \\ &= -\frac{Vp_{3,ijk}}{\Delta t} \left\{ \left[ 1 + C_r (p_o^{n+1} - p_o^n) \right] \left( b_g + S_g \frac{\partial b_g}{\partial p_{o3,ijk}} \frac{\partial P_{cgo}}{\partial S_{g3,ijk}} - R_s b_o^{n+1} \right) \right\}_{ijk} \end{aligned}$$

**Derivada de la función de residuo del gas con respecto a la saturación de agua en el medio 3, en ijk:**

$$\frac{\partial F_{g3,ijk}}{\partial S_{w3,ijk}} = \frac{\partial \{FT32\}}{\partial S_{w3,ijk}} + \frac{\partial \{T.Acum.\}}{\partial S_{w3,ijk}}$$

Término de transferencia 3-2:

$$\frac{\partial \{FT32\}}{\partial S_{w3,ijk}} = P_{oto32} \frac{\partial (R_s T_o)_{32}}{\partial S_{w3,ijk}}$$

Término de acumulación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{T.Acum.\}}{\partial S_{w3,ijk}} &= -\frac{Vr_{3,ijk}}{\Delta t} \left\{ \phi \frac{\partial}{\partial S_{w3,ijk}} [b_g S_g + R_s b_o (1 - S_g - S_w)] \right\}_{ijk} \\ &= +\frac{Vp_{3,ijk}}{\Delta t} \left\{ [1 + C_r (p_o^{n+1} - p_o^n)] (R_s b_o^{n+1}) \right\}_{ijk} \end{aligned}$$

Donde:

Derivadas de los potenciales con respecto a la presión en el medio 1:

$$\frac{\partial P_{otg21}}{\partial p_{o1,ijk}} = -1$$

$$\frac{\partial P_{oto21}}{\partial p_{o1,ijk}} = -1$$

Derivadas de los potenciales con respecto a la presión en el medio 2:

$$\frac{\partial P_{otg21}}{\partial p_{o2,ijk}} = 1$$

$$\frac{\partial P_{oto21}}{\partial p_{o2,ijk}} = 1$$

$$\frac{\partial P_{otg32}}{\partial p_{o2,ijk}} = -1$$

$$\frac{\partial P_{oto32}}{\partial p_{o2,ijk}} = -1$$

Derivadas de los potenciales con respecto a la presión en el medio 3:

$$\frac{\partial P_{otg32}}{\partial p_{o3,ijk}} = 1$$

$$\frac{\partial P_{oto32}}{\partial p_{o3,ijk}} = 1$$

Derivadas de las transmisibilidades con respecto a la presión en el medio 1:

Si  $poto21 \geq 0$  y  $potg21 \geq 0$

$$\frac{\partial T_{g21}}{\partial p_{o1,ijk}} = 0$$

$$\frac{\partial (R_s T_o)_{21}}{\partial p_{o1,ijk}} = 0$$

Si  $poto21 < 0$  y  $potg21 < 0$

$$\frac{\partial T_{g21}}{\partial p_{o1,ijk}} = T_{g21} \left( \frac{1}{b_{g1}} \frac{\partial b_{g1}}{\partial p_{o1,ijk}} - \frac{1}{\mu_{g1}} \frac{\partial \mu_{g1}}{\partial p_{o1,ijk}} \right)$$

$$\frac{\partial (R_s T_o)_{21}}{\partial p_{o1,ijk}} = R_{s21} \frac{\partial T_{o21}}{\partial p_{o1,ijk}} + T_{o21} \frac{\partial R_{s21}}{\partial p_{o1,ijk}}$$

Derivadas de las transmisibilidades con respecto a la presión en el medio 2:

Si  $poto21 \geq 0$  y  $potg21 \geq 0$

$$\frac{\partial T_{g21}}{\partial p_{o2,ijk}} = T_{g21} \left( \frac{1}{b_{g2}} \frac{\partial b_{g2}}{\partial p_{o2,ijk}} - \frac{1}{\mu_{g2}} \frac{\partial \mu_{g2}}{\partial p_{o2,ijk}} \right)$$

$$\frac{\partial (R_s T_o)_{21}}{\partial p_{o2,ijk}} = R_{s21} \frac{\partial T_{o21}}{\partial p_{o2,ijk}} + T_{o21} \frac{\partial R_{s21}}{\partial p_{o2,ijk}}$$

$$\frac{\partial T_{o21}}{\partial p_{o2,ijk}} = T_{o21} \left( \frac{1}{b_{o2}} \frac{\partial b_{o2}}{\partial p_{o2,ijk}} - \frac{1}{\mu_{o2}} \frac{\partial \mu_{o2}}{\partial p_{o2,ijk}} \right)$$

Si  $poto21 < 0$  y  $potg21 < 0$

$$\frac{\partial T_{g21}}{\partial p_{o2,ijk}} = 0$$

$$\frac{\partial (R_s T_o)_{21}}{\partial p_{o2,ijk}} = 0$$

Si  $poto32 \geq 0$  y  $potg32 \geq 0$

$$\frac{\partial T_{g32}}{\partial p_{o2,ijk}} = 0$$

$$\frac{\partial (R_s T_o)_{32}}{\partial p_{o2,ijk}} = 0$$

Si  $poto32 < 0$  y  $potg32 < 0$

$$\frac{\partial T_{g32}}{\partial p_{o2,ijk}} = T_{g32} \left( \frac{1}{b_{g2}} \frac{\partial b_{g2}}{\partial p_{o2,ijk}} - \frac{1}{\mu_{g2}} \frac{\partial \mu_{g2}}{\partial p_{o2,ijk}} \right)$$

$$\frac{\partial (R_s T_o)_{32}}{\partial p_{o2,ijk}} = R_{s32} \frac{\partial T_{o32}}{\partial p_{o2,ijk}} + T_{o32} \frac{\partial R_{s32}}{\partial p_{o2,ijk}}$$

$$\frac{\partial T_{o32}}{\partial p_{o2,ijk}} = T_{o32} \left( \frac{1}{b_{o2}} \frac{\partial b_{o2}}{\partial p_{o2,ijk}} - \frac{1}{\mu_{o2}} \frac{\partial \mu_{o2}}{\partial p_{o2,ijk}} \right)$$

Derivadas de las transmisibilidades con respecto a la presión en el medio 3:

Si  $poto32 \geq 0$  y  $potg32 \geq 0$

$$\frac{\partial T_{g32}}{\partial p_{o3,ijk}} = T_{g32} \left( \frac{1}{b_{g3}} \frac{\partial b_{g3}}{\partial p_{o3,ijk}} - \frac{1}{\mu_{g3}} \frac{\partial \mu_{g3}}{\partial p_{o3,ijk}} \right)$$

$$\frac{\partial (R_s T_o)_{32}}{\partial p_{o3,ijk}} = R_{s32} \frac{\partial T_{o32}}{\partial p_{o3,ijk}} + T_{o32} \frac{\partial R_{s32}}{\partial p_{o3,ijk}}$$

$$\frac{\partial T_{o32}}{\partial p_{o3,ijk}} = T_{o32} \left( \frac{1}{b_{o3}} \frac{\partial b_{o3}}{\partial p_{o3,ijk}} - \frac{1}{\mu_{o3}} \frac{\partial \mu_{o3}}{\partial p_{o3,ijk}} \right)$$

Si  $poto32 < 0$  y  $potg32 < 0$

$$\frac{\partial T_{g32}}{\partial p_{o3,ijk}} = 0$$

$$\frac{\partial (R_s T_o)_{32}}{\partial p_{o3,ijk}} = 0$$

Derivadas de los potenciales con respecto a la saturación de gas en el medio 1:

$$\frac{\partial P_{otg21}}{\partial S_{g1,ijk}} = - \frac{\partial P_{cgo1}}{\partial S_{g1,ijk}}$$

$$\frac{\partial P_{oto21}}{\partial S_{g1,ijk}} = 0$$

Derivadas de los potenciales con respecto a la saturación de gas en el medio 2:

$$\frac{\partial P_{oto21}}{\partial S_{g2,ijk}} = 0$$

$$\frac{\partial P_{otg21}}{\partial S_{g2,ijk}} = \frac{\partial P_{cgo2}}{\partial S_{g2,ijk}}$$

$$\frac{\partial P_{oto32}}{\partial S_{g2,ijk}} = 0$$

$$\frac{\partial P_{otg32}}{\partial S_{g2,ijk}} = - \frac{\partial P_{cgo2}}{\partial S_{g2,ijk}}$$

Derivadas de los potenciales con respecto a la saturación de gas en el medio 3:

$$\frac{\partial P_{oto32}}{\partial S_{g3,ijk}} = 0$$

$$\frac{\partial P_{otg32}}{\partial S_{g3,ijk}} = \frac{\partial P_{cgo3}}{\partial S_{g3,ijk}}$$

Derivadas de las transmisibilidades con respecto a la saturación de gas en el medio 1:

Si  $poto21 \geq 0$  y  $potg21 \geq 0$

$$\frac{\partial T_{g21}}{\partial S_{g1,ijk}} = 0$$

$$\frac{\partial (R_s T_o)_{21}}{\partial S_{g1,ijk}} = 0$$

Si  $poto21 < 0$  y  $potg21 < 0$

$$\frac{\partial T_{g21}}{\partial S_{g1,ijk}} = F_{21} \frac{kb_{g1}}{\mu_{g1}} \frac{\partial k_{rg1}}{\partial S_{g1,ijk}} \frac{\partial T_{g21}}{\partial p_{o1,ijk}} \frac{\partial p_{cgo1}}{\partial S_{g1,ijk}}$$

$$\frac{\partial (R_s T_o)_{21}}{\partial S_{g1,ijk}} = R_{s21} \frac{\partial T_{o21}}{\partial S_{g1,ijk}}$$

$$\frac{\partial T_{o21}}{\partial S_{g1,ijk}} = F_{21} \frac{kb_{o1}}{\mu_{o1}} \frac{\partial k_{ro}}{\partial S_{g1,ijk}}$$

Derivadas de las transmisibilidades con respecto a la saturación de gas en el medio 2:

Si  $poto21 \geq 0$  y  $potg21 \geq 0$

$$\frac{\partial T_{g21}}{\partial S_{g2,ijk}} = F_{21} \frac{kb_{g2}}{\mu_{g2}} \frac{\partial k_{rg2}}{\partial S_{g2,ijk}} \frac{\partial T_{g21}}{\partial p_{o2,ijk}} \frac{\partial p_{cgo2}}{\partial S_{g2,ijk}}$$

$$\frac{\partial (R_s T_o)_{21}}{\partial S_{g2,ijk}} = R_{s21} \frac{\partial T_{o21}}{\partial S_{g2,ijk}}$$

$$\frac{\partial T_{o21}}{\partial S_{g2,ijk}} = F_{21} \frac{kb_{o2}}{\mu_{o2}} \frac{\partial k_{ro2}}{\partial S_{g2,ijk}}$$

Si  $poto21 < 0$  y  $potg21 < 0$

$$\frac{\partial T_{g21}}{\partial S_{g2,ijk}} = 0$$

$$\frac{\partial (R_s T_o)_{21}}{\partial S_{g2,ijk}} = 0$$

Si  $poto32 \geq 0$  y  $potg32 \geq 0$

$$\frac{\partial T_{g32}}{\partial S_{g2,ijk}} = 0$$

$$\frac{\partial (R_s T_o)_{32}}{\partial S_{g2,ijk}} = 0$$

Si  $poto32 < 0$  y  $potg32 < 0$

$$\frac{\partial T_{g32}}{\partial S_{g2,ijk}} = F_{32} \frac{kb_{g2}}{\mu_{g2}} \frac{\partial k_{rg2}}{\partial S_{g2,ijk}} \frac{\partial T_{g32}}{\partial p_{o2,ijk}} \frac{\partial p_{cgo2}}{\partial S_{g2,ijk}}$$

$$\frac{\partial (R_s T_o)_{32}}{\partial S_{g2,ijk}} = R_{s32} \frac{\partial T_{o32}}{\partial S_{g2,ijk}}$$

$$\frac{\partial T_{o32}}{\partial S_{g2,ijk}} = F_{32} \frac{kb_{o2}}{\mu_{o2}} \frac{\partial k_{ro2}}{\partial S_{g2,ijk}}$$

Derivadas de las transmisibilidades con respecto a la saturación de gas en el medio 3:

Si  $poto32 \geq 0$  y  $potg32 \geq 0$

$$\frac{\partial T_{g32}}{\partial S_{g3,ijk}} = F_{32} \frac{kb_{g3}}{\mu_{g3}} \frac{\partial k_{rg3}}{\partial S_{g3,ijk}} \frac{\partial T_{g32}}{\partial p_{o3,ijk}} \frac{\partial p_{cgo3}}{\partial S_{g3,ijk}}$$

$$\frac{\partial (R_s T_o)_{32}}{\partial S_{g3,ijk}} = R_{s32} \frac{\partial T_{o32}}{\partial S_{g3,ijk}}$$

$$\frac{\partial T_{o32}}{\partial S_{g3,ijk}} = F_{32} \frac{kb_{o3}}{\mu_{o3}} \frac{\partial k_{ro3}}{\partial S_{g3,ijk}}$$

Si  $poto32 < 0$  y  $potg32 < 0$

$$\frac{\partial T_{g32}}{\partial S_{g3,ijk}} = 0$$

$$\frac{\partial(R_s T_o)_{32}}{\partial S_{g^3,ijk}} = 0$$

**AGUA:**

ECUACIÓN PARA EL MEDIO 1:

$$\underbrace{\Delta [T_w (\Delta p_w + \gamma_w \Delta D)]_{1,ijk}^{n+1}}_{\text{Término de flujo}} + \underbrace{[b_w q_w]_{1,ijk}^{n+1}}_{\text{Término Fuente}} + \underbrace{[\tau_{w21}]_{ijk}^{n+1}}_{\text{Término Transferencia 2-1}} = \underbrace{\frac{V_{r1,ijk}}{\Delta t} \Delta_t [\phi b_w S_w]_{1,ijk}}_{\text{Término de acumulación}}$$

ECUACIÓN PARA EL MEDIO 2:

$$\underbrace{-[\tau_{w21}]_{ijk}^{n+1}}_{\text{Término Transferencia a}} + \underbrace{[\tau_{w32}]_{ijk}^{n+1}}_{\text{Término Transferencia 3-2}} = \underbrace{\frac{V_{r2,ijk}}{\Delta t} \Delta_t [\phi b_w S_w]_{2,ijk}}_{\text{Término de acumulación}}$$

ECUACIÓN PARA EL MEDIO 3:

$$\begin{array}{c}
 \text{Término} \\
 \text{Transferenci} \\
 \text{a} \\
 \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\
 -[\tau_{w32}]_{ijk}^{n+1} \\
 \\
 \text{Término de} \\
 \text{acumulación} \\
 \underbrace{\hspace{3.5cm}} \\
 = \frac{V_{r3,ijk}}{\Delta t} \Delta_t [\phi b_w S_w]_{3,ijk}
 \end{array}$$

Donde:

$$\tau_{w21} = \sigma \left[ \frac{b_w k k_{rw}}{\mu_w} \right]_{21} (p_{w2} - p_{w1}) = T_{w21} (p_{o2} - p_{o1} - P_{cwo2} + P_{cwo1})$$

$$\tau_{w32} = \sigma \left[ \frac{b_w k k_{rw}}{\mu_w} \right]_{32} (p_{w3} - p_{w2}) = T_{w32} (p_{o3} - p_{o2} - P_{cwo3} + P_{cwo2})$$

FUNCIÓN DE RESIDUO DEL AGUA PARA EL MEDIO 1:

$$F_{w1,ijk} = \Delta [T_w (\Delta p_w - \gamma_w \Delta D)]_{1,ijk}^{n+1} + [b_w q_w]_{1,ijk}^{n+1} + [\tau_{w21}]_{ijk}^{n+1} - \frac{V_{r1,ijk}}{\Delta t} \Delta_t [\phi b_w S_w]_{1,ijk}$$

Expansión de la función de residuo del medio 1:

$$\begin{aligned}
 F_{w1,ijk} = & \left[ T_{w_{i+\frac{1}{2},jk}} \left( p_{o_{i+1,jk}} - p_{o_{ijk}} - P_{cwo_{i+1,jk}} + P_{cwo_{ijk}} - (\gamma_w \Delta D)_{i+\frac{1}{2},jk} \right) \right]_1^{n+1} - \\
 & \left[ T_{w_{i-\frac{1}{2},jk}} \left( p_{o_{ijk}} - p_{o_{i-1,jk}} - P_{cwo_{ijk}} + P_{cwo_{i-1,jk}} - (\gamma_w \Delta D)_{i-\frac{1}{2},jk} \right) \right]_1^{n+1} + \\
 & \left[ T_{w_{i,j+\frac{1}{2},k}} \left( p_{o_{i,j+1,k}} - p_{o_{ijk}} - P_{cwo_{i,j+1,k}} + P_{cwo_{ijk}} - (\gamma_w \Delta D)_{i,j+\frac{1}{2},k} \right) \right]_1^{n+1} - \\
 & \left[ T_{w_{i,j-\frac{1}{2},k}} \left( p_{o_{ijk}} - p_{o_{i,j-1,k}} - P_{cwo_{ijk}} + P_{cwo_{i,j-1,k}} - (\gamma_w \Delta D)_{i,j-\frac{1}{2},k} \right) \right]_1^{n+1} + \\
 & \left[ T_{w_{ijk+\frac{1}{2}}} \left( p_{o_{ijk+1}} - p_{o_{ijk}} - P_{cwo_{ijk+1}} + P_{cwo_{ijk}} - (\gamma_w \Delta D)_{ijk+\frac{1}{2}} \right) \right]_1^{n+1} - \\
 & \left[ T_{w_{ijk-\frac{1}{2}}} \left( p_{o_{ijk}} - p_{o_{ijk-1}} - P_{cwo_{ijk}} + P_{cwo_{ijk-1}} - (\gamma_w \Delta D)_{ijk-\frac{1}{2}} \right) \right]_1^{n+1} \\
 & + [b_w q_w]_{1,ijk}^{n+1} + [\tau_{w21}]_{ijk}^{n+1} - \frac{Vp_{1,ijk}}{\Delta t} \left\{ \left[ [1 + C_r (p_o^{n+1} - p_o^n)] (b_w S_w)^{n+1} \right] - (b_w S_w)^n \right\}_{1,ijk} = 0
 \end{aligned}$$

**Derivada de la función de residuo del agua con respecto a la presión de aceite en el medio 1, en ijk:**

$$\frac{\partial F_{w1,ijk}}{\partial p_{o1,ijk}} = \frac{\partial \{T.Flujo\}}{\partial p_{o1,ijk}} + \frac{\partial \{T. Fuente\}}{\partial p_{o1,ijk}} + \frac{\partial \{FT21\}}{\partial p_{o1,ijk}} + \frac{\partial \{T.Acum.\}}{\partial p_{o1,ijk}}$$

Términos de flujo:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \{T.Flujo\}}{\partial p_{o1,ijk}} = & \left( T_{wx2} \frac{\partial P_{otwx2}}{\partial p_{o1,ijk}} + P_{otwx2} \frac{\partial T_{wx2}}{\partial p_{o1,ijk}} \right) - \left( T_{wx1} \frac{\partial P_{otwx1}}{\partial p_{o1,ijk}} + P_{otwx1} \frac{\partial T_{wx1}}{\partial p_{o1,ijk}} \right) + \\
 & \left( T_{wy2} \frac{\partial P_{otwy2}}{\partial p_{o1,ijk}} + P_{otwy2} \frac{\partial T_{wy2}}{\partial p_{o1,ijk}} \right) - \left( T_{wy1} \frac{\partial P_{otwy1}}{\partial p_{o1,ijk}} + P_{otwy1} \frac{\partial T_{wy1}}{\partial p_{o1,ijk}} \right) + \\
 & \left( T_{wz2} \frac{\partial P_{otwz2}}{\partial p_{o1,ijk}} + P_{otwz2} \frac{\partial T_{wz2}}{\partial p_{o1,ijk}} \right) - \left( T_{wz1} \frac{\partial P_{otwz1}}{\partial p_{o1,ijk}} + P_{otwz1} \frac{\partial T_{wz1}}{\partial p_{o1,ijk}} \right)
 \end{aligned}$$

Término fuente:

$$\frac{\partial \{T. Fuente\}}{\partial p_{o1,ijk}} = b_w \frac{\partial q_{w,ijk}}{\partial p_{o1,ijk}} + q_{w,ijk} \frac{\partial b_{w,ijk}}{\partial p_{o1,ijk}}$$

Función de transferencia 2-1:

$$\frac{\partial \{FT21\}}{\partial p_{o1,ijk}} = T_{w21} \frac{\partial P_{otw21}}{\partial p_{o1,ijk}} + P_{otw21} \frac{\partial T_{w21}}{\partial p_{o1,ijk}}$$

Término de Acumulación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{T.Acum.\}}{\partial p_{o1,ijk}} &= -\frac{V_{r,ijk}}{\Delta t} \frac{\partial}{\partial p_{o1,ijk}} [\phi b_w S_w]_{ijk} \\ &= -\frac{V p_{ijk}}{\Delta t} \left\{ S_w \left[ 1 + C_r (P_o^{n+1} - P_o^n) \right] \frac{\partial b_w}{\partial p_{o1,ijk}} + b_w C_r \right\}_{ijk} \end{aligned}$$

Derivadas de potenciales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{otwx2}}{\partial p_{o1,ijk}} &= \frac{\partial}{\partial p_{o1,ijk}} \left[ p_{o_{i+1,jk}} - p_{o_{ijk}} - P_{cwo_{i+1,jk}} + P_{cwo_{ijk}} - \gamma_{w_{i+\frac{1}{2},jk}} (D_{i+1,jk} - D_{ijk}) \right] \\ &= -1 - \frac{1}{2} (D_{i+1,jk} - D_{ijk}) \frac{\partial \gamma_{w_{ijk}}}{\partial p_{o1,ijk}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{otwx1}}{\partial p_{o1,ijk}} &= \frac{\partial}{\partial p_{o1,ijk}} \left[ p_{o_{ijk}} - p_{o_{i-1,jk}} - P_{cwo_{ijk}} + P_{cwo_{i-1,jk}} - \gamma_{w_{i-\frac{1}{2},jk}} (D_{ijk} - D_{i-1,jk}) \right] \\ &= 1 - \frac{1}{2} (D_{ijk} - D_{i-1,jk}) \frac{\partial \gamma_{w_{i,jk}}}{\partial p_{o1,ijk}} \end{aligned}$$

Derivadas de las transmisibilidades:

$$T_w = F \frac{b_w k_{rw}}{\mu_w}$$

$$\frac{\partial T_w}{\partial p_{o1,ijk}} = T_w \left( \frac{1}{b_w} \frac{\partial b_w}{\partial p_{o1,ijk}} - \frac{1}{\mu_w} \frac{\partial \mu_w}{\partial p_{o1,ijk}} \right)$$

**Derivada de la función de residuo del agua con respecto a la saturación de gas en el medio 1, en ijk:**

$$\frac{\partial F_{w1,ijk}}{\partial S_{g1,ijk}} = \frac{\partial \{T.\text{Flujo}\}}{\partial S_{g1,ijk}} + \frac{\partial \{T.\text{Fuente}\}}{\partial S_{g1,ijk}} + \frac{\partial \{FT21\}}{\partial S_{g1,ijk}} + \frac{\partial \{T.\text{Acum.}\}}{\partial S_{g1,ijk}}$$

Términos de flujo:

$$\frac{\partial \{T.\text{Flujo}\}}{\partial S_{g1,ijk}} = 0$$

Función de transferencia matriz fractura (FTMF):

$$\frac{\partial \{FT21\}}{\partial S_{g1,ijk}} = 0$$

Término Fuente:

$$\frac{\partial \{T.\text{Fuente}\}}{\partial S_{g1,ijk}} = 0$$

Término de Acumulación:

$$\frac{\partial \{T.\text{Acum.}\}}{\partial S_{g1,ijk}} = 0$$

**Derivada de la función de residuo del agua con respecto a la saturación de agua en el medio 1, en ijk:**

$$\frac{\partial F_{w1,ijk}}{\partial S_{w1,ijk}} = \frac{\partial \{T.\text{Flujo}\}}{\partial S_{w1,ijk}} + \frac{\partial \{T.\text{Fuente}\}}{\partial S_{w1,ijk}} + \frac{\partial \{FT21\}}{\partial S_{w1,ijk}} + \frac{\partial \{T.\text{Acum.}\}}{\partial S_{w1,ijk}}$$

Términos de flujo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{T.\text{Flujo}\}}{\partial S_{w1,ijk}} = & \left( T_{wx2} \frac{\partial P_{otwx2}}{\partial S_{w1,ijk}} + P_{otwx2} \frac{\partial T_{wx2}}{\partial S_{w1,ijk}} \right) - \left( T_{wx1} \frac{\partial P_{otwx1}}{\partial S_{w1,ijk}} + P_{otwx1} \frac{\partial T_{wx1}}{\partial S_{w1,ijk}} \right) + \\ & \left( T_{wy2} \frac{\partial P_{otwy2}}{\partial S_{w1,ijk}} + P_{otwy2} \frac{\partial T_{wy2}}{\partial S_{w1,ijk}} \right) - \left( T_{wy1} \frac{\partial P_{otwy1}}{\partial S_{w1,ijk}} + P_{otwy1} \frac{\partial T_{wy1}}{\partial S_{w1,ijk}} \right) + \\ & \left( T_{wz2} \frac{\partial P_{otwz2}}{\partial S_{w1,ijk}} + P_{otwz2} \frac{\partial T_{wz2}}{\partial S_{w1,ijk}} \right) - \left( T_{wz1} \frac{\partial P_{otwz1}}{\partial S_{w1,ijk}} + P_{otwz1} \frac{\partial T_{wz1}}{\partial S_{w1,ijk}} \right) \end{aligned}$$

Función de transferencia 2-1:

$$\frac{\partial \{FT21\}}{\partial S_{w1,ijk}} = \left[ T_{w21} \frac{\partial P_{otw21}}{\partial S_{w1,ijk}} + P_{otw21} \frac{\partial T_{w21}}{\partial S_{w1,ijk}} \right]$$

Término fuente:

$$\frac{\partial \{T.\text{Fuente}\}}{\partial S_{w1,ijk}} = b_w \frac{\partial q_w}{\partial S_{w1,ijk}} - q_w \frac{\partial b_w}{\partial p_{o1,ijk}} \frac{\partial P_{cow}}{\partial S_{w1,ijk}}$$

Término de acumulación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{T.\text{Acum.}\}}{\partial S_{w1,ijk}} = & -\frac{V_{r1,ijk}}{\Delta t} \left[ \phi \frac{\partial}{\partial S_{w1,ijk}} (b_w S_w) \right]_{ijk} \\ = & -\frac{V p_{1,ijk}}{\Delta t} \left\{ \left[ 1 + C_r (p_o^{n+1} - p_o^n) \right] \left( b_w - S_{w_{ijk}} \frac{\partial b_w}{\partial p_o} \frac{\partial P_{cow}}{\partial S_{w1,ijk}} \right) \right\}_{ijk} \end{aligned}$$

Derivadas de potenciales con respecto a la saturación de agua:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{otwx2}}{\partial S_{w1,ijk}} &= \frac{\partial}{\partial S_{w1,ijk}} \left[ p_{o_{i+1,jk}} - p_{o_{ijk}} - P_{cwo_{i+1,jk}} + P_{cwo_{ijk}} - \gamma_{w_{i+\frac{1}{2},jk}} (D_{i+1,jk} - D_{ijk}) \right] \\ &= \frac{\partial P_{cwo_{ijk}}}{\partial S_{w1,ijk}} + \frac{1}{2} (D_{i+1,jk} - D_{ijk}) \frac{\partial \gamma_{w_{ijk}}}{\partial p_{o1,ijk}} \frac{\partial P_{cwo_{ijk}}}{\partial S_{w1,ijk}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{otwx1}}{\partial S_{w1,ijk}} &= \frac{\partial}{\partial S_{w1,ijk}} \left[ p_{o_{ijk}} - p_{o_{i-1,jk}} - P_{cwo_{ijk}} + P_{cwo_{i-1,jk}} - \gamma_{w_{i-\frac{1}{2},jk}} (D_{ijk} - D_{i-1,jk}) \right] \\ &= -\frac{\partial P_{cwo_{ijk}}}{\partial S_{w1,ijk}} + \frac{1}{2} (D_{ijk} - D_{i-1,jk}) \frac{\partial \gamma_{w_{ijk}}}{\partial p_{o1,ijk}} \frac{\partial P_{cwo_{ijk}}}{\partial S_{w1,ijk}} \end{aligned}$$

Derivadas de transmisibilidades con respecto a la saturación de agua:

$$\frac{\partial T_w}{\partial S_{w1,ijk}} = T_w \left\{ \frac{1}{k_{rg}} \frac{\partial k_{rw}}{\partial S_{w1,ijk}} + \frac{1}{\mu_w} \frac{\partial \mu_w}{\partial p_{o1,ijk}} \frac{\partial P_{cwo}}{\partial S_{w1,ijk}} - \frac{1}{b_w} \frac{\partial b_w}{\partial p_{o1,ijk}} \frac{\partial P_{cwo}}{\partial S_{w1,ijk}} \right\}$$

**Derivada de la función de residuo del agua en el nodo i-1,j,k:**

$$\frac{\partial F_{w1}}{\partial p_{o1,i-1,jk}} = - \left( T_{wx1} \frac{\partial P_{otwx1}}{\partial p_{o1,i-1,jk}} + P_{otwx1} \frac{\partial T_{wx1}}{\partial p_{o1,i-1,jk}} \right)$$

$$\frac{\partial F_{w1}}{\partial S_{w1,i-1,jk}} = - \left( T_{wx1} \frac{\partial P_{otwx1}}{\partial S_{w1,i-1,jk}} + P_{otwx1} \frac{\partial T_{wx1}}{\partial S_{w1,i-1,jk}} \right)$$

**Derivada de la función de residuo del agua en el nodo i,j-1,k:**

$$\frac{\partial F_{w1}}{\partial p_{o1,ij-1k}} = - \left( T_{wy1} \frac{\partial P_{otwy1}}{\partial p_{o1,ij-1k}} + P_{otwy1} \frac{\partial T_{wy1}}{\partial p_{o1,ij-1k}} \right)$$

$$\frac{\partial F_{w1}}{\partial S_{w1,ij-1k}} = - \left( T_{wy1} \frac{\partial P_{otwy1}}{\partial S_{w1,ij-1k}} + P_{otwy1} \frac{\partial T_{wy1}}{\partial S_{w1,ij-1k}} \right)$$

**Derivada de la función de residuo del agua en el nodo i,j,k-1:**

$$\frac{\partial F_{w1}}{\partial p_{o_{ijk-1}}} = - \left( T_{wz1} \frac{\partial P_{otwz1}}{\partial p_{o_{ijk-1}}} + P_{otwz1} \frac{\partial T_{wz1}}{\partial p_{o_{ijk-1}}} \right)$$

$$\frac{\partial F_{w1}}{\partial S_{w_{ijk-1}}} = - \left( T_{wz1} \frac{\partial P_{otwz1}}{\partial S_{w_{ijk-1}}} + P_{otwz1} \frac{\partial T_{wz1}}{\partial S_{w_{ijk-1}}} \right)$$

**Derivada de la función de residuo del pseudo componente aceite en el nodo i+1,j,k:**

$$\frac{\partial F_{w1}}{\partial p_{o1_{i+1,jk}}} = \left( T_{wx2} \frac{\partial P_{otwx2}}{\partial p_{o1_{i+1,jk}}} + P_{otwx2} \frac{\partial T_{wx2}}{\partial p_{o1_{i+1,jk}}} \right)$$

$$\frac{\partial F_{w1}}{\partial S_{w1_{i+1,jk}}} = \left( T_{wx2} \frac{\partial P_{otwx2}}{\partial S_{w1_{i+1,jk}}} + P_{otwx2} \frac{\partial T_{wx2}}{\partial S_{w1_{i+1,jk}}} \right)$$

**Derivada de la función de residuo del pseudo componente aceite en el nodo i,j+1,k:**

$$\frac{\partial F_{w1}}{\partial p_{o_{ij+1k}}} = \left( T_{wy2} \frac{\partial P_{otwy2}}{\partial p_{o_{ij+1k}}} + P_{otwy2} \frac{\partial T_{wy2}}{\partial p_{o_{ij+1k}}} \right)$$

$$\frac{\partial F_{w1}}{\partial S_{w1_{ij+1k}}} = \left( T_{wy2} \frac{\partial P_{otwy2}}{\partial S_{w1_{ij+1k}}} + P_{otwy2} \frac{\partial T_{wy2}}{\partial S_{w1_{ij+1k}}} \right)$$

**Derivada de la función de residuo del pseudo componente aceite en el nodo i,j,k+1:**

$$\frac{\partial F_{w1}}{\partial p_{o1_{ijk+1}}} = \left( T_{wz2} \frac{\partial P_{otwz2}}{\partial p_{o1_{ijk+1}}} + P_{otwz2} \frac{\partial T_{wz2}}{\partial p_{o1_{ijk+1}}} \right)$$

$$\frac{\partial F_{w1}}{\partial S_{w1_{ijk+1}}} = \left( T_{wz2} \frac{\partial P_{otwz2}}{\partial S_{w1_{ijk+1}}} + P_{otwz2} \frac{\partial T_{wz2}}{\partial S_{w1_{ijk+1}}} \right)$$

**FUNCIÓN DE RESIDUO DEL AGUA PARA EL MEDIO 2:**

$$F_{w2} = - \left[ T_{w21} (p_{o2} - p_{o1} - P_{cwo2} + P_{cwo1}) \right]_{ijk}^{n+1} + \left[ T_{w32} (p_{o3} - p_{o2} - P_{cwo3} + P_{cwo2}) \right]_{ijk}^{n+1}$$

$$- \frac{V_{r2,ijk}}{\Delta t} \Delta_t [\phi b_w S_w]_{2,ijk} = 0$$

**Derivada de la función de residuo del agua con respecto a la presión de aceite en el medio 2, en ijk:**

$$\frac{\partial F_{w2,ijk}}{\partial p_{o2,ijk}} = \frac{\partial \{FT21\}}{\partial p_{o2,ijk}} + \frac{\partial \{FT32\}}{\partial p_{o2,ijk}} + \frac{\partial \{T.ACUM.\}}{\partial p_{o2,ijk}}$$

Función de Transferencia 2-1:

$$\frac{\partial \{FT21\}}{\partial p_{o2,ijk}} = - \left[ T_{w21} \frac{\partial P_{otw21}}{\partial p_{o2,ijk}} + P_{otw21} \frac{\partial T_{w21}}{\partial p_{o2,ijk}} \right]$$

Función de transferencia 3-2:

$$\frac{\partial \{FT32\}}{\partial p_{o2,ijk}} = T_{w32} \frac{\partial P_{otw32}}{\partial p_{o2,ijk}} + P_{otw32} \frac{\partial T_{w32}}{\partial p_{o2,ijk}}$$

Término de acumulación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{T.ACUM.\}}{\partial p_{o2,ijk}} &= - \frac{V_{r2,ijk}}{\Delta t} \frac{\partial}{\partial p_{o2,ijk}} [\phi b_w S_w]_{2,ijk} \\ &= - \frac{V_{p2,ijk}}{\Delta t} \left\{ S_w \left[ 1 + C_r (p_o^{n+1} - p_o^n) \right] \frac{\partial b_w}{\partial p_{o2,ijk}} + b_w C_r \right\}_{2,ijk} \end{aligned}$$

**Derivada de la función de residuo del agua con respecto a la saturación de gas en el medio 2, en ijk:**

$$\frac{\partial F_{w2,ijk}}{\partial S_{g2,ijk}} = \frac{\partial \{FT21\}}{\partial S_{g2,ijk}} + \frac{\partial \{FT32\}}{\partial S_{g2,ijk}} + \frac{\partial \{T.ACUM.\}}{\partial S_{g2,ijk}}$$

Función de Transferencia 2-1:

$$\frac{\partial \{FT21\}}{\partial S_{g2,ijk}} = 0$$

Función de Transferencia 3-2:

$$\frac{\partial \{FT32\}}{\partial S_{g2,ijk}} = 0$$

Término de Acumulación:

$$\frac{\partial\{T.ACUM.\}}{\partial S_{g2,ijk}} = 0$$

**Derivada de la función de residuo del agua con respecto a la saturación de agua en el medio 2, en ijk:**

$$\frac{\partial F_{w2,ijk}}{\partial S_{w2,ijk}} = \frac{\partial\{FT21\}}{\partial S_{w2,ijk}} + \frac{\partial\{FT32\}}{\partial S_{w2,ijk}} + \frac{\partial\{T.ACUM.\}}{\partial S_{w2,ijk}}$$

Término de transferencia 2-1:

$$\frac{\partial\{FT21\}}{\partial S_{w2,ijk}} = - \left[ T_{w21} \frac{\partial P_{otw21}}{\partial S_{w2,ijk}} + P_{otw21} \frac{\partial T_{w21}}{\partial S_{w2,ijk}} \right]$$

Término de transferencia 3-2:

$$\frac{\partial\{FT32\}}{\partial S_{w2,ijk}} = T_{w32} \frac{\partial P_{otw32}}{\partial S_{w2,ijk}} + P_{otw32} \frac{\partial T_{w32}}{\partial S_{w2,ijk}}$$

Término de acumulación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\{T.ACUM.\}}{\partial S_{w,ijk}} &= - \frac{V_{r,ijk}}{\Delta t} \left[ \phi_m \frac{\partial}{\partial S_{w,ijk}} (b_w S_w) \right]_{ijk} \\ &= - \frac{V_{p,ijk}}{\Delta t} \left[ 1 + C_r (P_{om}^{n+1} - P_{om}^n) \right] \left( b_{wm_{ijk}} - S_{wm_{ijk}} \frac{\partial b_{wm}}{\partial P_{om_{ijk}}} \frac{\partial P_{cwom}}{\partial S_{wm_{ijk}}} \right) \end{aligned}$$

**FUNCIÓN DE RESIDUO DEL AGUA PARA EL MEDIO 3:**

$$F_{w3} = - \left[ T_{w32} (p_{o3} - p_{o2} - P_{cwo3} + P_{cwo2}) \right]_{ijk}^{n+1} - \frac{V_{r3,ijk}}{\Delta t} \Delta_t [\phi b_w S_w]_{3,ijk} = 0$$

**Derivada de la función de residuo del agua con respecto a la presión de aceite en el medio 3, en ijk:**

$$\frac{\partial F_{w3,ijk}}{\partial p_{o3,ijk}} = \frac{\partial\{FT32\}}{\partial p_{o3,ijk}} + \frac{\partial\{T.ACUM.\}}{\partial p_{o3,ijk}}$$

Función de transferencia 3-2:

$$\frac{\partial\{FT32\}}{\partial p_{o3,ijk}} = - \left\{ T_{w32} \frac{\partial P_{otw32}}{\partial p_{o3,ijk}} + P_{otw32} \frac{\partial T_{w32}}{\partial p_{o3,ijk}} \right\}$$

Término de acumulación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\{T.ACUM.\}}{\partial p_{o3,ijk}} &= - \frac{V_{r3,ijk}}{\Delta t} \frac{\partial}{\partial p_{o3,ijk}} [\phi b_w S_w]_{3,ijk} \\ &= - \frac{V_{p3,ijk}}{\Delta t} \left\{ S_w \left[ 1 + C_r (p_o^{n+1} - p_o^n) \right] \frac{\partial b_w}{\partial p_{o3,ijk}} + b_w C_r \right\}_{3,ijk} \end{aligned}$$

**Derivada de la función de residuo del agua con respecto a la saturación de gas en el medio 3, en ijk:**

$$\frac{\partial F_{w3,ijk}}{\partial S_{g3,ijk}} = \frac{\partial\{FT32\}}{\partial S_{g3,ijk}} + \frac{\partial\{T.ACUM.\}}{\partial S_{g3,ijk}}$$

Función de Transferencia 3-2:

$$\frac{\partial\{FT32\}}{\partial S_{g3,ijk}} = 0$$

Término de Acumulación:

$$\frac{\partial\{T.ACUM.\}}{\partial S_{g3,ijk}} = 0$$

**Derivada de la función de residuo del agua con respecto a la saturación de agua en el medio 3, en ijk:**

$$\frac{\partial F_{w3,ijk}}{\partial S_{w3,ijk}} = \frac{\partial\{FT32\}}{\partial S_{w3,ijk}} + \frac{\partial\{T.ACUM.\}}{\partial S_{w3,ijk}}$$

Término de transferencia 3-2:

$$\frac{\partial \{FT32\}}{\partial S_{w3,ijk}} = - \left\{ T_{w32} \frac{\partial P_{otw32}}{\partial S_{w3,ijk}} + P_{otw32} \frac{\partial T_{w32}}{\partial S_{w3,ijk}} \right\}$$

Término de acumulación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{T.ACUM.\}}{\partial S_{w3,ijk}} &= - \frac{V_{r3,ijk}}{\Delta t} \left[ \phi \frac{\partial}{\partial S_{w3,ijk}} (b_w S_w) \right]_{3,ijk} \\ &= - \frac{V_{p3,ijk}}{\Delta t} \left\{ \left[ 1 + C_r (p_o^{n+1} - p_o^n) \right] \left( b_w - S_w \frac{\partial b_w}{\partial p_{o3,ijk}} \frac{\partial P_{cwo}}{\partial S_{w3,ijk}} \right) \right\}_{3,ijk} \end{aligned}$$

Donde:

Derivadas del potencial con respecto a la presión en el medio 1:

$$\frac{\partial P_{otw21}}{\partial p_{o1,ijk}} = -1$$

Derivadas de los potenciales con respecto a la presión en el medio 2:

$$\frac{\partial P_{otw21}}{\partial p_{o2,ijk}} = 1$$

$$\frac{\partial P_{otw32}}{\partial p_{o2,ijk}} = -1$$

Derivadas de los potenciales con respecto a la presión en el medio 3:

$$\frac{\partial P_{otw32}}{\partial p_{o3,ijk}} = 1$$

Derivadas de las transmisibilidades con respecto a la presión en el medio 1:

Si  $potw21 \geq 0$

$$\frac{\partial T_{w21}}{\partial p_{o1,ijk}} = 0$$

Si  $poto21 < 0$

$$\frac{\partial T_{w21}}{\partial p_{o1,ijk}} = T_{w21} \left( \frac{1}{b_w} \frac{\partial b_w}{\partial p_{o1,ijk}} - \frac{1}{\mu_w} \frac{\partial \mu_w}{\partial p_{o1,ijk}} \right)$$

Derivadas de las transmisibilidades con respecto a la presión en el medio 2:

Si  $\text{potw21} \geq 0$

$$\frac{\partial T_{w21}}{\partial p_{o2,ijk}} = T_{w21} \left( \frac{1}{b_w} \frac{\partial b_w}{\partial p_{o2,ijk}} - \frac{1}{\mu_w} \frac{\partial \mu_w}{\partial p_{o2,ijk}} \right)$$

Si  $\text{potw21} < 0$

$$\frac{\partial T_{w21}}{\partial p_{o2,ijk}} = 0$$

Si  $\text{potw32} \geq 0$

$$\frac{\partial T_{w32}}{\partial p_{o2,ijk}} = 0$$

Si  $\text{potw32} < 0$

$$\frac{\partial T_{w32}}{\partial p_{o2,ijk}} = T_{w32} \left( \frac{1}{b_w} \frac{\partial b_w}{\partial p_{o3,ijk}} - \frac{1}{\mu_w} \frac{\partial \mu_w}{\partial p_{o3,ijk}} \right)$$

Derivadas de las transmisibilidades con respecto a la presión en el medio 3:

Si  $\text{potw32} \geq 0$

$$\frac{\partial T_{w32}}{\partial p_{o3,ijk}} = T_{w32} \left( \frac{1}{b_w} \frac{\partial b_w}{\partial p_{o3,ijk}} - \frac{1}{\mu_w} \frac{\partial \mu_w}{\partial p_{o3,ijk}} \right)$$

Si  $\text{potw32} < 0$

$$\frac{\partial T_{w32}}{\partial p_{o3,ijk}} = 0$$

Derivadas de los potenciales con respecto a la saturación de agua en el medio 1:

$$\frac{\partial P_{otw21}}{\partial S_{w1,ijk}} = \frac{\partial P_{cwo1}}{\partial S_{w1,ijk}}$$

Derivadas de los potenciales con respecto a la saturación de agua en el medio 2:

$$\frac{\partial P_{otw21}}{\partial S_{w2,ijk}} = -\frac{\partial P_{cwo2}}{\partial S_{w2,ijk}}$$

$$\frac{\partial P_{otw32}}{\partial S_{w2,ijk}} = \frac{\partial P_{cwo2}}{\partial S_{w2,ijk}}$$

Derivadas de los potenciales con respecto a la saturación de agua en el medio 3:

$$\frac{\partial P_{otw32}}{\partial S_{w3,ijk}} = -\frac{\partial P_{cwo3}}{\partial S_{w3,ijk}}$$

Derivadas de las transmisibilidades con respecto a la saturación de agua en el medio 1:

Si  $potw21 \geq 0$

$$\frac{\partial T_{w21}}{\partial S_{w1,ijk}} = 0$$

Si  $potw21 < 0$

$$\frac{\partial T_{w21}}{\partial S_{w1,ijk}} = F \frac{\partial}{\partial S_{w1,ijk}} \left( \frac{k_{rw} b_w}{\mu_w} \right) = F \frac{b_w}{\mu_w} \frac{\partial k_{rw}}{\partial S_{w1,ijk}} - \frac{\partial P_{cwo}}{\partial S_{w1,ijk}} \frac{\partial T_{w21}}{\partial p_{o1,ijk}}$$

Derivadas de las transmisibilidades con respecto a la saturación de agua en el medio 2:

Si  $potw21 \geq 0$

$$\frac{\partial T_{w21}}{\partial S_{w2,ijk}} = F \frac{\partial}{\partial S_{w2,ijk}} \left( \frac{k_{rw} b_w}{\mu_w} \right) = F \frac{b_w}{\mu_w} \frac{\partial k_{rw}}{\partial S_{w2,ijk}} - \frac{\partial P_{cwo}}{\partial S_{w2,ijk}} \frac{\partial T_{w21}}{\partial p_{o2,ijk}}$$

Si  $potw21 < 0$

$$\frac{\partial T_{w21}}{\partial S_{w2,ijk}} = 0$$

Si  $potw32 \geq 0$

$$\frac{\partial T_{w32}}{\partial S_{w2,ijk}} = 0$$

Si  $\text{potw32} < 0$

$$\frac{\partial T_{w32}}{\partial S_{w2,ijk}} = F \frac{\partial}{\partial S_{w2,ijk}} \left( \frac{k_{rw} b_w}{\mu_w} \right) = F \frac{b_w}{\mu_w} \frac{\partial k_{rw}}{\partial S_{w2,ijk}} - \frac{\partial P_{cwo}}{\partial S_{w2,ijk}} \frac{\partial T_{w32}}{\partial p_{o2,ijk}}$$

Derivadas de las transmisibilidades con respecto a la saturación de agua en el medio 3:

Si  $\text{potw32} \geq 0$

$$\frac{\partial T_{w32}}{\partial S_{w3,ijk}} = F \frac{\partial}{\partial S_{w3,ijk}} \left( \frac{k_{rw} b_w}{\mu_w} \right) = F \frac{b_w}{\mu_w} \frac{\partial k_{rw}}{\partial S_{w3,ijk}} - \frac{\partial P_{cwo}}{\partial S_{w3,ijk}} \frac{\partial T_{w32}}{\partial p_{o3,ijk}}$$

Si  $\text{potw32} < 0$

$$\frac{\partial T_{w32}}{\partial S_{w3,ijk}} = 0$$

## REFERENCIAS

1. Abdassah, D. y Ershaghi, I.: "Triple Porosity Systems for Representing Naturally Fractured Reservoirs", *SPEFE*, 1, 113-127, Abril, 1986.
2. Aifantis, E. C.: "On the Problem of Diffusion in Solids", *Acta Mechanica*, 1980.
3. Ausbrooks, R. y Hurley, N.: "Pore-Size Distributions in Vuggy Carbonates From Core Images, NMR, and Capillary Pressure", *SPE 56506*, Octubre 1999.
4. Barenblatt, G.I., Zheltov, I.P., y Kochina, I.N.: "Basic Concepts in the Theory of Seepage of Homogenous Liquid in Fissured Rocks", *PMM, Sov. Appl. Math. Mech.* 24-5, 1960.
5. Barenblatt, G.I.: "The Matematical Model of Nonequilibrium Effects in Water-Oil Displacement", *SPE 75169*, 2002.
6. Blaskovich, F. T. y cols.: "Numerical Simulation of Naturally Fractured Reservoirs", *SPE 15627*, 1983.
7. Bourdet, D.: "Pressure Behavior of Layered Reservoirs with Crossflow", paper *SPE 13628* presentado en la SPE California Regional Meeting, Bakersfield, California, 27-29 Marzo, 1985.
8. Camacho, V. R., Vásquez, C. M., Castrejón A. R. y Arana, O. V. : "Pressure Transient and Decline Curve Behaviors in Naturally Fractured Vuggy Carbonate Reservoirs", *SPE 77689*, 2002.
9. De la Porte, J.J., Kossack, C.A. y Zimmerman, R.W.: "The Effect of Fracture Relative Permeabilities and Capillary Pressures on the Numerical Simulation of Naturally Fractured Reservoirs", *SPE 95241*, Octubre, 2005.
10. Diodato, D.M.: "A Compendium of Fracture Flow Models", Training Center, Hohenfels, Germany, 1994.
11. Grupo de Simulación Numérica de Yacimientos: "Desarrollo de un Simulador Multifásico Multipropósito", PEMEX-UNAM, 2006.
12. Ertekin, T. : Basic Applied Reservoir Simulation, *SPE Textbook Series*, USA, 2001.
13. Hill, A.C. y Thomas, G.W.: "A New Approach for Simulating Complex Fractured Reservoirs", *SPE 13537*, 1985.
14. Iffly, R., Rousselet, D.C. y Vermeulen, J.L.: "Fundamental Study of Imbibition in Fissured Oil Field", *SPE 4102*, 1962.
15. Infante del Rio, J.A.: Metodos Numericos. Teoria, Problemas y Practicas con Matlab, Piramide, Mexico, 1999.
16. Kang, Z. y Wu, Y.S.: "Modeling Multiphase flow in Naturally Fractured Vuggy Petroleum Reservoirs", *SPE 102356*, 2006.
17. Kazemi, H. : "Pressure-Transient Analysis of Naturally Fractured Reservoirs with Uniform Fracture Distribution", *SPEJ* 451-462, Diciembre, 1969.
18. Kazemi, H. y Gilman, J.: "Improvements in Simulation of Naturally Fractured Reservoirs", *SPE 10511*, 1993.
19. Kossack, C. A., y Gurpinar, O.: "A Methodology for Simulation of Vuggy and Fractured Reservoirs", *SPE 66366*, 2001.
20. Lucia, F.J.: "Petrophysical Parameters Estimated From Visual Descriptions of Carbonate Rocks: A Field Classification of Carbonate Pore Space", *SPE 10073*, 1983.

21. Naimi-Tajdar, R., C. Han, K. Sepehrnoori, T.J. Arbogast and M.A. Miller: "A Fully Implicit, Compositional, Parallel Simulator for IOR Processes in Fractured Reservoirs", *SPE 100079*, 2006.
22. Nelson, R.: *Geological Analysis of Naturally Fractured Reservoirs*, Gulf Professional Publishing, USA, 2001.
23. Prats, M.: Thermal Recovery Monograph, Society of Petroleum Engineers, USA, 1986.
24. Peña, O. y Resendiz, J.T.: Simulación Multifásica Tridimensional en Yacimientos Naturalmente Fracturados, F.I. UNAM, 2006.
25. Pruess, K. y Narasimhan, T. N.: "A Practical Method for Modeling Heat and Flow in Fractured Porous Media", *SPEJ*, 1985.
26. Reiss, L.H.: "Reservoir Engineering in Fractured Reservoirs", 1976.
27. Rodriguez, F., Arana, O.V. y Cinco, L. H.: "Well Test Characterization of Small and Large Scale Secondary Porosity in Naturally Fractured Reservoirs", *SPE 90287*, 2004.
28. Rodríguez de la Garza, F.: Fundamentos de Simulación Numérica de Yacimientos, notas de la material, DEPMI, UNAM, 2005.
29. Rodríguez de la Garza, F.: Apuntes del Curso Simulación Avanzada de yacimientos, DEPMI, UNAM, (2005).
30. Rubin, B.: "Simulating Gravity Drainage and Reinfiltration with a Subdomain-Dual-Permeability Hybrid Fracture Model", *SPE 106191-MS*, Febrero, 2007.
31. Siavoshi, J.: "Triple Porosity Systems Bring New Insight to Naturally Fractured Reservoirs", work presented in the Eleventh Oil, Gas and Petrochemical congress, Oct. 2001, Teheran, Iran.
32. Thomas, L.K., Dixon, T.N. y Pierson, R.G. : "Fractured Reservoir Simulation" , *SPEJ* (1983).
33. Thomas, G.W., "A New Approach for Simulating Complex Fractured Reservoirs", *SPE 13537*, 1985.
34. Van Golf-Racht, T: Fundamentals of Fractured Reservoir Engineering, Elsevier, New York, 1982.
35. Warren, J.E. y Root, P.J.: "The Behavior of Naturally Fractured Reservoirs", *SPEJ*, 245-255, Septiembre, 1963.
36. Wu, Y. S. y cols.: "A Physically Based Approach for Modeling Multiphase Fracture-Matrix Interaction in Fractured Porous Media", *Advances in Water Resources*, Elsevier, 2004.
37. Wu, Y. S. y cols.: "A Triple-Continuum Approach for Modeling Flow and Transport Processes in Fractured Rock", *Journal of Contaminant Hydrology*, Elsevier, Enero, 2004.
38. Wu, Y. S. y cols.: "Analysis of Flow Behavior in Fractured Lithophysal Reservoirs", *Journal of Contaminant Hydrology*, Lawrence Berkeley National Laboratory, 2006.
39. Yamamoto, R.H., y cols.: "Compositional Reservoir Simulator for Fissured Systems – The Single Block Model", *SPEJ* (1971).
40. Zhang, F.: The Schur Complement and its Applications, Numerical Methods and Algorithms, Springer Science, USA, 2005.

## LISTA DE TABLAS

TABLA	PÁGINA
<b>Tabla 2.1</b> Posibles Configuraciones de un sistema de Triple Porosidad.	17
<b>Tabla 4.1</b> Datos Generales Utilizados para la Validación del Modelo Propuesto.	58
<b>Tabla 4.2</b> Datos PVT Utilizados para la Validación del Modelo Propuesto.	58
<b>Tabla 5.1</b> Datos Generales Utilizados para la Simulación del Caso 1.	60
<b>Tabla 5.2</b> Datos Utilizados para la Simulación del Modelo de Triple Porosidad.	60
<b>Tabla 5.3</b> Datos Utilizados para la Simulación del Modelo de Doble Porosidad; Promedio Aritmético.	61
<b>Tabla 5.4</b> Datos Utilizados para la Simulación del Modelo de Doble Porosidad; Promedio Armónico.	61
<b>Tabla 5.5</b> Datos Utilizados para la Simulación del Modelo de Doble Porosidad; Promedio Geométrico.	61
<b>Tabla 5.6</b> Datos Generales Utilizados para la Simulación del Caso 2.	63
<b>Tabla 5.7</b> Datos PVT para el Aceite Utilizados para la Simulación del Caso 2.	63
<b>Tabla 5.8</b> Datos PVT para el Gas Utilizados para la Simulación del Caso 2.	64
<b>Tabla 5.9</b> Datos PVT para el Agua Utilizados para la Simulación del Caso 2.	64
<b>Tabla 5.10</b> Datos Generales Utilizados para la Simulación del Caso 3.	74

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA	PÁGINA
<b>Figura 2.1</b> a) Espacio Poroso Consolidado (matriz), b) Representación Simplificada del Espacio Poroso de Vúgulos y Fracturas.	6
<b>Figura 2.2</b> Curvas de Presión Capilar para los Procesos de Drene e Imbibición.	10
<b>Figura 2.3</b> Curvas de Presión Capilar si el Promedio de los Diámetros de Poros es: a) Uniforme, b) Disperso.	11
<b>Figura 2.4</b> Permeabilidad Relativa de un Sistema Agua-Aceite (curvas de imbibición).	13
<b>Figura 2.5</b> Permeabilidad Relativa de un Sistema Gas-Aceite (curvas de drene).	13
<b>Figura 2.6</b> Idealización de un Yacimiento Naturalmente Fracturado (modelo de Warren y Root).	15
<b>Figura 2.7</b> Idealización de un Sistema de Triple Porosidad.	15
<b>Figura 2.8</b> Representación Gráfica del Modelo de Una Porosidad – Una Permeabilidad.	17
<b>Figura 2.9</b> Representación Gráfica del Modelo de Doble Porosidad – Una Permeabilidad.	17
<b>Figura 2.10</b> Representación Gráfica del Modelo de Doble Porosidad – Doble Permeabilidad.	17
<b>Figura 2.11</b> Representación Gráfica del Modelo de Triple Porosidad – Doble Permeabilidad.	18
<b>Figura 2.12</b> Representación Gráfica del Modelo de Triple Porosidad – Triple Permeabilidad.	18
<b>Figura 2.13</b> Representación Gráfica del Modelo de Triple Porosidad – Una Permeabilidad.	18
<b>Figura 2.14</b> Distribución de Presiones en el Yacimiento.	24
<b>Figura 3.1</b> Diagrama de flujo del Simulador Camaleón <sup>(11)</sup> .	48
<b>Figura 4.1</b> Resultados Obtenidos para las Soluciones Numérica y Analítica.	59
<b>Figura 5.1</b> Resultados de la Simulación para los Modelos de Triple y Doble Porosidad.	62
<b>Figura 5.2</b> Gráficas de Presión Capilar y Permeabilidad Utilizados en la Simulación del Caso 2.	65
<b>Figura 5.3</b> Gráfica de $p_{wf}$ contra Tiempo para la Simulación de Flujo Multifásico en un Sistema de Triple Porosidad con y sin Presiones Capilares.	67
<b>Figura 5.4</b> Gráfica de $Q_o$ contra Tiempo para la Simulación de Flujo Multifásico en un Sistema de Triple Porosidad con y sin Presiones Capilares.	67
<b>Figura 5.5</b> Gráfica de $Q_g$ contra Tiempo para la Simulación de Flujo Multifásico en un Sistema de Triple Porosidad con y sin Presiones Capilares.	68

<b>Figura 5.6</b> Gráfica de RGA contra Tiempo para la Simulación de Flujo Multifásico en un Sistema de Triple Porosidad con y sin Presiones Capilares.	68
<b>Figura 5.7</b> Gráfica de $Q_w$ contra Tiempo para la Simulación de Flujo Multifásico en un Sistema de Triple Porosidad con y sin Presiones Capilares.	69
<b>Figura 5.8</b> Resultados de Presión de Aceite para el Medio 1 con y sin $P_c$ .	70
<b>Figura 5.9</b> Resultados de Saturación de Agua para el Medio 1 con y sin $P_c$ .	71
<b>Figura 5.10</b> Resultados de Saturación de Gas para el Medio 1 con y sin $P_c$ .	72
<b>Figura 5.11</b> Resultados de Saturación de Aceite para el Medio 1 con y sin $P_c$ .	73
<b>Figura 5.12</b> Malla Utilizada en la Simulación del Caso 3.	74
<b>Figura 5.13</b> Gráficas de Permeabilidad Utilizadas en la Simulación del Caso 3.	75
<b>Figura 5.14</b> Gráficas de Presión Capilar Utilizadas en la Simulación del Caso 3.	75
<b>Figura 5.15</b> Gráfica de $p_{wf}$ contra Tiempo para la Simulación de Flujo Multifásico en un Sistema de Triple Porosidad (Caso 3).	76
<b>Figura 5.16</b> Gráfica de $Q_o$ contra Tiempo para la Simulación de Flujo Multifásico en un Sistema de Triple Porosidad (Caso 3).	76
<b>Figura 5.17</b> Gráfica de $Q_g$ contra Tiempo para la Simulación de Flujo Multifásico en un Sistema de Triple Porosidad (Caso 3).	77
<b>Figura 5.18</b> Gráfica de $Q_w$ contra Tiempo para la Simulación de Flujo Multifásico en un Sistema de Triple Porosidad (Caso 3).	78
<b>Figura 5.19</b> Gráfica de RGA contra Tiempo para la Simulación de Flujo Multifásico en un Sistema de Triple Porosidad (Caso 3).	78
<b>Figura 5.20</b> Distribución de Presiones de Aceite, $p_o$ (Caso 3).	79
<b>Figura 5.21</b> Distribución de Saturaciones de Aceite, $S_o$ (Caso 3).	79
<b>Figura 5.22</b> Distribución de Saturaciones de Gas, $S_g$ (Caso 3).	80
<b>Figura 5.23</b> Distribución de Saturaciones de Agua, $S_w$ (Caso 3).	80