



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN
INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA

ANÁLISIS DE MODOS DESLIZANTES DE SEGUNDO
ORDEN EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

DOCTOR EN INGENIERÍA

INGENIERÍA ELÉCTRICA - CONTROL

PRESENTA:

MANUEL IVÁN CASTELLANOS GARCÍA

TUTOR:

DR. LEONID FRIDMAN.



2008

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. POZNYAK ALEXANDER S.
Secretario: Dr. ALVAREZ ICAZA LONGORÍA LUIS A.
1^{er.} Vocal: Dr. FRIDMAN LEONID
1^{er.} Suplente: Dr. ESPINOSA PERÉZ GERARDO RENÉ
2^{do.} Suplente: Dr. MORENO PÉREZ JAIME

Lugar donde se realizó la tesis:

FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM

TUTOR DE TESIS:

Dr. FRIDMAN LEONID

FIRMA

Índice general

Capítulo

1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Motivación	3
1.3. Objetivos de la tesis	4
1.4. Metodología	4
1.5. Contribución	5
1.6. Contenido de la tesis	7
2. Análisis de esquemas de control por modos deslizantes de segundo orden en el dominio de la frecuencia	9
2.1. Introducción	9
2.2. Análisis del algoritmo <i>twisting</i> con funciones descriptivas	10
2.3. Análisis LPRS [Boiko 2005]	15
2.3.1. Cálculo del LPRS para un sistema descrito en espacio de estados (planta lineal no integrante)	22
2.3.2. Cálculo del LPRS para un sistema descrito mediante una función de transferencia (planta lineal no integrante)	24

2.3.3.	Cálculo del LPRS para un sistema es espacio de estados (planta lineal integrante)	26
2.3.4.	Cálculo del LPRS para un sistema basado en la función de transferencia (planta lineal integrante)	31
2.4.	Análisis del algoritmo <i>twisting</i> con LPRS	32
2.5.	Ejemplo de análisis y comparación de resultados	36
2.6.	Conclusiones	40
3.	Análisis entrada-salida en el dominio de la frecuencia de controladores por modos deslizantes de segundo orden	42
3.1.	Introducción	42
3.2.	Propagación de entradas lentas a través de un sistema con algoritmo <i>twisting</i>	44
3.3.	Análisis por medio de funciones descriptivas del algoritmo <i>super twisting</i> [Boiko y Fridman 2005]	52
3.3.1.	<i>Existencia de la solución periódica</i>	54
3.4.	Propagación de señales lentas a través de un sistema con el algoritmo <i>super twisting</i>	57
3.5.	Análisis en el dominio de la frecuencia de un diferenciador basado en el algoritmo <i>super twisting</i>	60
3.6.	Conclusiones	62
4.	Análisis de observadores basados en modos deslizantes de segundo orden por medio de funciones descriptivas	63
4.1.	Introducción	63
4.2.	Modelo del observador de modos deslizantes de segundo orden	65
4.3.	Propagación de entradas lentas a través de la dinámica del observador (Ganancia Equivalente)	67

4.4. Ejemplos	69
4.5. Conclusiones	75
5. Identificación de parámetros vía el algoritmo <i>twisting</i> modificado	76
5.1. Introducción	76
5.2. Modificación del algoritmo <i>twisting</i>	78
5.3. Identificación de parámetros mediante el algoritmo <i>twisting</i> modificado	79
5.4. Ejemplos	83
5.5. Conclusiones	88
6. Conclusiones finales	90
Apéndice	
A. Inestabilidad de un sistema de grado relativo tres, controlado mediante el algoritmo <i>twisting</i>	92
B. Artículos publicados	94
B.1. Artículos arbitrados en revistas internacionales	94
B.2. Artículos en congresos internacionales	95
B.3. Artículos en congresos nacionales	95
Bibliografía	96

Índice de tablas

Tabla

2.1. Análisis de las características de oscilación y frecuencia con algoritmos de control por SOSM	41
3.1. Ganancias equivalentes para el sistema controlado por el algoritmo <i>twisting</i> y <i>twisting</i> como filtro	48
3.2. Resultados de simulaciones, análisis por FD y ganancias equivalente para sistemas controlados por el algoritmo <i>super twisting</i>	58
3.3. Resultados de simulaciones y análisis por FD para el diferenciador basado en el algoritmo <i>super twisting</i>	61
5.1. Análisis de oscilaciones en el sistema del carro péndulo	85
5.2. Resultados experimentales	87
5.3. Tabla de identificación paramétrica del circuito eléctrico	88
5.4. Resultados para validar la identificación del circuito eléctrico	89

Índice de figuras

Figura

2.1.	Diagrama del algoritmo <i>twisting</i>	11
2.2.	Solución periódica en un sistema con el algoritmo <i>twisting</i>	14
2.3.	Sistema retroalimentado con relé	16
2.4.	Oscilaciones asimétricas	17
2.5.	LPRS para un sistema relevado	19
2.6.	Sistema integrante con relé	28
2.7.	Sistema transformado para el algoritmo <i>twisting</i>	33
2.8.	LPRS para actuador-planta $\omega \in [0; \infty)$	37
2.9.	LPRS para actuador-planta $\omega \in [7s^{-1}; \infty)$	38
2.10.	Parte imaginaria del LPRS para el sistema actuador-planta $\omega \in [50; 100]$	38
2.11.	LPRS equivalente del actuador-planta para $\omega \in [50s^{-1}; \infty)$	39
3.1.	Diagrama de bloque del sistema con el algoritmo <i>twisting</i> linealizado	46
3.2.	Respuesta a la frecuencia en lazo cerrado para el caso de la planta con grado relativo dos $W_p(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$ y actuador con grado relativo uno $W_a(s) = \frac{1}{0,01s+1}$, controlado por el algoritmo <i>twisting</i>	50
3.3.	Respuesta a la frecuencia en lazo cerrado para el caso de la planta con grado relativo dos $W_p(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$ y actuador con grado relativo dos $W_a(s) = \frac{1}{0,0001s^2+0,01s+1}$, controlado por el algoritmo <i>twisting</i>	50

3.4. Respuesta a la frecuencia en lazo cerrado para el caso de la planta con grado relativo uno $W_p(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}$ y actuador con grado relativo uno $W_a(s) = \frac{1}{0,01s+1}$, controlado por el algoritmo *twisting* como filtro. . . . 51

3.5. Respuesta a la frecuencia en lazo cerrado para el caso de la planta con grado relativo uno $W_p(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}$ y actuador con grado relativo dos $W_a(s) = \frac{1}{0,0001s^2+0,01s+1}$, controlado por el algoritmo *twisting* como filtro. 51

3.6. Gráficas de la función $-1/N$, 54

3.7. Respuesta a la frecuencia en lazo cerrado para el caso de la planta con grado relativo uno $W_p(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}$ y actuador de grado relativo uno $W_a(s) = \frac{1}{0,01s+1}$, controlado por el algoritmo *super twisting*. 59

3.8. Respuesta a la frecuencia en lazo cerrado para el caso de la planta con grado relativo uno $W_p(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}$ y actuador de grado relativo dos $W_a(s) = \frac{1}{0,0001s^2+0,01s+1}$, controlado por el algoritmo *super twisting*. . . 59

3.9. Modelo linealizado del diferenciador ($W(s) = 1$ caso ideal). 60

3.10. Respuesta a la frecuencia del diferenciador con dinámicas parásitas $W(s) = \frac{1}{0,0001s^2+0,01s+1}$ (línea inferior) y $W(s) = \frac{1}{0,01s+1}$ (línea superior). 61

4.1. Modelo de la planta con el observador 66

4.2. Diagrama a bloques del algoritmo *super-twisting* 67

4.3. Modelo linealizado del algoritmo *super-twisting* 68

4.4. Error de observación $\sigma = y - \hat{y}$ (con la condición inicial $y = 0,5$ y $u(t) = \text{sen}(t)$) 70

4.5. Trayectoria *super-twisting* para el sistema del observador 71

4.6. Punto de intersección de la traza $1/N(a_y)$ y la gráfica de Nyquist $W_l(j\omega)$ para el ejemplo 71

4.7. Salida del observador de la planta $\hat{y}(t)$ para $u(t) = 0$ 72

4.8. Salida v del algoritmo *super-twisting* para $u(t) = 0$ 72

4.9. Salida de la planta $y(t)$ y seguimiento de la salida del observador $\hat{y}(t)$. 74

4.10. Magnitud del error de salida	74
4.11. Error de observación para el estado x_1 (gráfica inferior) y para x_2 (línea superior) contra la frecuencia	75
5.1. Diagrama del algoritmo <i>twisting</i>	79
5.2. Region de oscilaciones para un sistema lineal controlado mediante el algoritmo <i>twisting</i> modificado	80
5.3. Diagrama del carro péndulo invertido	83
5.4. Gráfica de Nyquist para la función de transferencia del péndulo invertido	86
5.5. Circuito RC pasa bajas pasivo de tercer orden	86
5.6. Gráfica de Nyquist de la función de transferencia identificada del circuito pasivo pasa baja de tercer orden	88

Resumen

Se presenta un análisis de algoritmos de modos deslizantes de segundo orden (SOSM), se determinan las características de respuesta en el dominio de la frecuencia de éstas técnicas de control al utilizarse como controladores y observadores de sistemas lineales.

El análisis que se propone está basado en la adaptación de los métodos de función descriptiva (FD), y lugar de las raíces de un sistema relevado perturbado LPRS (*locus perturbed relay system*) para encontrar las frecuencias y amplitudes que se generan de forma autónoma en los sistemas controlados u observados por SOSM. De ello se determinan los parámetros que logran reducir el problema de las oscilaciones periódicas por el uso de SOSM. Debido a este problema de oscilaciones periódicas, en muchas aplicaciones no ha sido posible explotar esta forma de control a pesar de todas las ventajas inherentes, tales como: robustez, estabilidad e insensibilidad a perturbaciones, entre otras.

Los algoritmos de SOSM analizados son: el *twisting*, el *super-twisting*, así como el *twisting* y el *super-twisting* en forma de filtro. Se comparan las diferentes respuestas de todos estos tipos de controladores con la forma tradicional del control por modos deslizantes. También se analizan los observadores y diferenciadores basados en el algoritmo *super twisting*, y se determinan las características de propagación de señales lentas, obteniéndose las funciones de transferencia en el dominio de la frecuencia para los controladores y observadores antes descritos.

Como aplicación de estos análisis a los SOSM mediante FD y LPRS se encontró la posibilidad de identificar los parámetros de la función de transferencia en plantas.

Se propone un método para la identificación de cualquier número par de parámetros de una función de transferencia, que implica la modificación del algoritmo *twisting*. Se proponen las ecuaciones para determinar los parámetros desconocidos, y se reduce el problema a la solución de un sistema de ecuaciones algebraicas.

Abstract

A frequency domain analysis of the second order sliding mode (SOSM) algorithms (SOSM) is performed, to determine the responses in the frequency domain of these control techniques when used as controllers and observers for linear systems.

The proposed analysis is based in the adaptation of the describing function method (DF) and locus perturbed relay system (LPRS) to find the frequencies and amplitudes in the controlled or observed systems, to determine the parameters that can reduce the problem of periodic oscillations (chattering) by the use of SOSM. The presence of chattering does not allow to implement SOSM algorithm in many applications

SOSM algorithms analyzed are: twisting, super-twisting and their filter forms. A comparison between the periodic solutions in the systems driven by second order sliding mode controllers and the oscillations that occur in classical sliding mode systems with actuators is presented. The results are obtained in the form of the conventional amplitude and phase frequency response.

The second order sliding mode observers and differentiators dynamics are analyzed in the frequency domain. The so- called super-twisting algorithm is utilized for generating the second-order sliding mode in the observer dynamical system. The frequency response of the observer dynamics is obtained and used as a characteristic of the observer. The analysis proposed is based on the describing function method and the concept of the equivalent gains of nonlinear functions of the super-twisting algorithm.

The analysis of SOSM by FD and LPRS is applied for identify the parameters of the transfer functions. A method for identification of any even number of parameters of the process transfer function from the test on the process, which involves a modified twisting algorithm, is proposed. Equations for determining the unknown parameters can be written separately for the magnitude and the argument of the transfer function that simplifies the task of identification. As a result, the problem can be reduced to the iterative

solution of a system algebraic equations.

Dedicatoria

A mis padres

Agradecimientos

Deseo agradecer a la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez que colaboró para ampliar mis horizontes, a la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México, a mi tutor El Dr. Leonid Fridman por su apoyo y dedicación en el desarrollo de esta tesis, Al Dr. Igor Boiko por su valiosa colaboración, Al Dr. Tang, y El Dr. Espinosa, por sus revisiones y evaluaciones, además de ser parte del jurado también comprendido por El Dr. Poznyak, El Dr. Álvarez-Icaza y El Dr. Moreno, a quienes agradezco todas sus sugerencias y ayuda en la revisión de la tesis. También deseo agradecer a los amigos y compañeros por su apoyo durante el desarrollo de este trabajo.

Notación

A, B, C, L	Matrices.
A_1	Amplitud de y .
A_2	Amplitud de \dot{y} .
α	Variable de convergencia.
b	Fricción del carro.
b	Histéresis del relevador.
a_y	Amplitud de la oscilación de entrada.
C_1, C_2	Matrices.
C_{R1}, C_{R2}, C_{R3}	Capacitancia eléctrica.
$c_1, c_2, c, \gamma, \lambda$	Amplitud del relevador.
$\det(\cdot)$	Determinante.
F	Fuerza aplicada al carro.
FD	Función descriptiva.
f_0	Entrada de referencia externa al sistema.
$f(t)$	Entrada de referencia.
$f(\chi_j)$	Función de parámetros.

g	Constante de la gravedad.
HOSM	<i>Higher-order sliding modes</i> Modos deslizantes de orden superior.
h_1, h_2	Variables de la solución periódica.
IEEE	<i>Institute of Electrical and Electronics Engineers.</i> Instituto de Ingenieros Eléctricos y Electrónicos.
$Im(\cdot)$	Componente imaginaria de una variable compleja.
$J(\omega)$	Función LPRS (<i>locus perturbed relay system</i>).
j	Variable compleja.
K	Ganancia de la función de transferencia $W(s)$.
k	Número de polos de la función de transferencia $W(s)$.
K_m	Constante de fuerza contraelectromotriz del motor.
k_n	Ganancia equivalente del relevador.
$k_{n1(2)}$	Ganancias equivalentes 1 y 2.
K_t	Constante de par del motor.
LPRS	(<i>locus perturbed relay system</i>) Lugar de las raíces de un sistema relevado perturbado.
$L(\cdot)$	Salida de la planta lineal cuando $t = \theta T$.
l	Longitud del péndulo al centro de la masa.
l_p	Longitud del brazo del péndulo.
J_{eq}	Momento de inercia equivalente del motor.
J_p	Momento de inercia del péndulo.
M	Respuesta de la magnitud.
M_c	Masa del carro.
m_p	Masa del péndulo.
m	Número de ceros de la función de transferencia $W(s)$.
N_1, N_2	Función descriptiva FD.

N^{-1}	Inverso de la función descriptiva.
n	Cantidad de procesos a identificar.
R_1, R_2, R_3	Resistencia eléctrica.
$Re(\cdot)$	Parte real de una variable compleja.
r	Longitud del brazo rotatorio del péndulo.
ρ	Parámetro del algoritmo <i>super twisting</i> .
SOSM	“ <i>Second order sliding modes</i> ” Modos deslizantes de segundo orden.
s	Variable en el dominio de Laplace.
T	Período.
T_k	Polo k -ésimo de la función de transferencia $W(s)$.
t	Tiempo
τ	Tiempo de retardo.
$u(t)$	Señal de control.
u_1, u_2	Salidas de los relevadores.
v	Salida del algoritmo de SOSM.
$v(t)$	Control para el observador.
v_1, v_2	Componentes de v .
v_{10} y v_{20}	Salidas promedio de las no linealidades.
$W_1(s), W_l(s), W(\cdot)$	Funciones de transferencia.
$W_{u-\sigma}(s)$	Función de transferencia desde $u(t)$ a $\sigma(t)$.
$W_{u-\Delta x_1}(s), W_{u-\Delta x_2}(s)$	Función de transferencia del error de la observación para x_1 y x_2 .
\mathbf{x}	Posición del carro.
x	Estados del sistema.
x_1, x_2	Variables observadas.
\dot{x}	Derivada de los estados del sistema.

$\chi_j = [(K_j, \Upsilon_{1j} \dots \Upsilon_{mj}, T_{1j} \dots T_{kj})]^T$	Vector de parámetros traspuesto a identificar.
χ_{j+1}	Nuevos valores de los parámetros.
y	Salida de sistema.
$\hat{y}(t)$	Salida del observador.
$\sigma(t)$	Señal del error en el dominio del tiempo.
σ_0	Entrada promedio.
Ω	Frecuencia de la solución periódica.
ϑ	Ángulo del péndulo respecto a la vertical.
θ	Tiempo de corrimiento entre conmutaciones.
Ω	Frecuencia solución $rad.s^{-1}$.
ω	Frecuencia $rad.s^{-1}$.
φ	Respuesta de fase.
Γ	Función Gamma.
γ	Amplitud del relevado.
Υ_m	Cero m -ésimo de la función de transferencia $W(s)$.
s_0	Parámetro del algoritmo <i>super twisting</i> .
$\Psi(\cdot)$	Ecuación de balance armónico.
$\frac{\partial}{\partial s}$	Derivada parcial respecto a s .
$ \cdot $	Valor absoluto.

Capítulo 1

Introducción

1.1 Antecedentes

Modos deslizantes de segundo orden

Al principio de los 80's la comunidad de control había percibido las principales ventajas de los modos deslizantes, es decir, robustez ante perturbaciones acopladas y convergencia en tiempo finito, con el inconveniente de un efecto secundario, denominado *chattering* [Utkin 1983], causado principalmente por las dinámicas no modeladas. Estas últimas incrementan el grado relativo del sistema y perturban el modo deslizante ideal, el cual existe en el sistema con la dinámica entrada-salida original (ideal) [Utkin 1983, Bondarev *et al.* 1985, Fridman 1985].

Se sabe que en la implementación de los modos deslizantes de primer orden (SM) en sistemas con actuadores de segundo grado relativo o superior, se presentan **oscilaciones periódicas** [Fridman 1985, Fridman 1986]. Esto sucede debido a la presencia de la dinámica parásita (no modelada) en el sistema. Los SOSM presentan un comportamiento similar. Puesto que estos contienen la función “*signo*”, se espera de ellos una convergencia a un movimiento periódico de frecuencia finita en presencia de dinámicas parásitas. Esto es típico en sistemas retroalimentados con relevadores en plantas de primero, segundo,

tercer orden o superior. Estas oscilaciones han sido estudiadas en sistemas de primer orden controlados con un relevador en [Tsytkin 1984, Anosov 1959]. Para una planta de tercer orden o superior, controlada por el algoritmo *twisting*, el origen no puede ser un punto de equilibrio estable como se ve en el apéndice A. Así son de esperarse oscilaciones periódicas en un sistema controlado por un algoritmo de modos deslizantes de segundo orden.

Para superar el problema de *chattering*, los modos deslizantes de orden superior (HOSM, por sus siglas en inglés), se presentaron en la disertación de doctorado de Arie Levant (Levantovsky) [Levant 1987] (véase también [Emelyanov *et al.* 1986] y [Emelyanov *et al.* 1986b]). Levant [Levant 1993] sistematizó los algoritmos de modos deslizantes de segundo orden y obtuvo estimaciones de su exactitud.

Los HOSM atrajeron la atención de la comunidad internacional de control después de la presentación en el Tercer Taller de IEEE sobre Estructura Variable y Teoría de Lyapunov [Fridman y Levant 1994], dando como resultado la publicación del primer documento tutorial sobre HOSM [Fridman y Levant 1996].

Desde 1996, el número de publicaciones, así como el número de usos y aplicaciones de HOSM y SOSM, ha crecido enormemente. Como ejemplo los artículos del Profesor Bartolini *et al.*, [Bartolini *et al.* 1997, 1999, 2000, 2000a, 2001, 2002, 2003], o de otros investigadores como [Shtessel *et al.* 2000], [Sira-Ramírez *et al.* 2002], [Fridman 2002a], [Orlov *et al.* 2000] y [Levant 2005] entre otros.

Las principales razones para el uso de los algoritmos SOSM son: una alta exactitud de las trayectorias resultantes; la posibilidad de usar leyes de control SOSM continuas (*super twisting* y *twisting* como filtro); la posibilidad de utilizar la fricción de Coulomb en el algoritmo de control [Orlov *et al.* 2003], y la convergencia en tiempo finito para sistemas con grado relativo arbitrario.

El diferenciador por modos deslizantes de segundo orden, basado en el algoritmo *super twisting*, se propone en 1998 [Levant 1998]. Esto impulsó el desarrollo de la teoría

matemática y la aplicación de los algoritmos de SOSM a algunos tipos de observadores. Otras dos importantes contribuciones de Levant son: control HOSM de orden arbitrario [Levant 1993] y los diferenciadores exactos robustos de orden arbitrario [Levant 2003] que permiten el diseño y la puesta en práctica de HOSM universales de orden arbitrario en sistemas retroalimentados por salida [Levant 2003].

1.2 Motivación

Los análisis de oscilaciones periódicas en sistemas lineales controlados u observados con un algoritmo no lineal se basan en la aplicación de la técnica de la función descriptiva (FD) [Atherton 1975], y la técnica del Lugar de las raíces de un sistema relevado perturbado LPRS [Boiko 1999, Boiko 2000]. Sin embargo, todos estos métodos tienen el inconveniente que han sido desarrollados generalmente para analizar sistemas con una sola no linealidad en el lazo de control u observación y es necesario que cumplan con condiciones muy específicas sobre el tipo de no linealidades del sistema. Debido a esto es necesario hacer algunas adaptaciones a los métodos propuestos de solución para poder aplicarse al análisis de SOSM.

Antes del desarrollo de este trabajo, las técnicas de análisis no eran las adecuadas para el análisis en el dominio de la frecuencia de los algoritmos de modos deslizantes de segundo orden (SOSM). Al momento de hacer el análisis y seguir toda la metodología para implementar un controlador u observador mediante SOSM no era posible conocer, sin una simulación previa o implementación real, si el sistema iba a funcionar acorde con los requerimientos de frecuencia y amplitud que necesita la planta para ser controlada u observada.

La importancia de esta investigación radica en que hace posible conocer con anterioridad, mediante métodos analíticos, las características de respuesta en el dominio de la frecuencia para determinar el ancho de banda, las características de las oscilaciones y finalmente, mediante un análisis inverso es posible identificar los parámetros de un sistema.

1.3 Objetivos de la tesis

Los objetivos para el análisis de los algoritmos de modos deslizantes de segundo orden en el dominio de la frecuencia son:

- Analizar los algoritmos por modos deslizantes de segundo orden en presencia de dinámicas no modeladas.
- Proponer las fórmulas matemáticas que permitan encontrar las características de las oscilaciones periódicas en sistemas lineales con dinámicas parásitas controlados por algoritmos de modos deslizantes de orden superior.
- Comparar la amplitud y la frecuencia de las oscilaciones periódicas al utilizar las diversas formas de control por modos deslizantes.
- Adaptar las técnicas de función descriptiva y ganancia equivalente a un modelo de propagación de las señales lentas a través de los elementos no lineales, y así analizar los controladores de modos deslizantes de segundo orden, para encontrar la respuesta dinámica del controlador en el dominio de la frecuencia.
- Analizar las propiedades de respuesta en el dominio de la frecuencia de observadores y modificar el diseño para evitar las frecuencias de resonancia.
- Identificar parámetros por medio del uso del algoritmo *twisting* modificado.

1.4 Metodología

Para el análisis de las oscilaciones en SOSM se utilizan técnicas de función descriptiva y LPRS. Considerando que los algoritmos de SOSM no son un simple relevador, es necesario modificar las técnicas de FD y LPRS para su uso en los algoritmos de SOSM. Se utilizan FD y el concepto de ganancia equivalente de una función no lineal para analizar los algoritmos *twisting* y *super twisting* como controladores. Con esta linealización

se sustituyen las funciones no lineales y se analiza la propagación de señales lentas a través del sistema en el dominio de la frecuencia.

Para el análisis de observadores de segundo orden también se utilizan funciones descriptivas para determinar la respuesta en el dominio de la frecuencia del sistema observado. Esto se realiza mediante la transformación del sistema discontinuo no lineal en un sistema dinámico lineal con variables promedio, vía el concepto de ganancia equivalente. El análisis del observador toma en cuenta un retraso equivalente para obtener las características dinámicas del observador en el dominio de la frecuencia.

Finalmente se presenta el método de identificación, donde se modifica el algoritmo *twisting* para aumentar el ancho de banda del proceso de identificación usando los métodos de FD y LPRS.

1.5 Contribución

- 1 Se proponen nuevas herramientas matemáticas basadas en el uso de FD y LPRS que permiten analizar en el dominio de la frecuencia los controladores SOSM para determinar los parámetros de las oscilaciones periódicas.
- 2 Para el diseño de observadores y controladores por SOSM se presenta un análisis para determinar la respuesta en el dominio de la frecuencia del sistema considerando las dinámicas no modeladas.
- 3 Finalmente, mediante la inversión de los métodos de análisis de LPRS y FD se logra la identificación de parámetros mediante SOSM reduciendo el problema de identificación a la solución de un sistema de ecuaciones algebraicas.

Problema	Solución	Resultado
Características de las oscilaciones en sistemas con dinámica parásita controlados por SOSM, MD y MD de segundo orden asintóticos.	Adaptar las técnicas FD , y LPRS .	Método para determinar la amplitud y frecuencia de las oscilaciones periódicas.
Análisis en el dominio de la frecuencia de sistemas controlados por SOSM.	Analizar mediante FD y LPRS los algoritmos <i>twisting</i> y <i>super twisting</i> y el concepto de ganancia equivalente .	Se determina la respuesta entrada salida en el dominio de la frecuencia en sistemas controlados por SOSM.
Análisis en el dominio de la frecuencia de sistemas observados por SOSM.	Analizar con FD el algoritmo <i>super twisting</i> .	Se determina la respuesta entrada salida en el dominio de la frecuencia en sistemas observados por SOSM.
Identificación paramétrica de sistemas.	diseño del algoritmo twisting modificado .	Identificación de parámetros, mediante la solución de un sistema de ecuaciones algebraicas.

1.6 Contenido de la tesis

La tesis se encuentra dividida en 4 partes principales que son:

- I Análisis de oscilaciones periódicas en sistemas controlados por modos deslizantes de segundo orden en el dominio de la frecuencia.
- II Análisis entrada-salida en el dominio de la frecuencia de controladores por modos deslizantes de segundo orden.
- III Análisis de observadores por modos deslizantes de segundo orden por medio de funciones descriptivas.
- IV Identificación de parámetros vía el algoritmo *twisting* modificado.

Para el primer punto se desarrolla el análisis en el dominio de la frecuencia de algoritmos de modos deslizantes de segundo orden, en particular el algoritmo *twisting* con el uso de FD y LPRS (el lugar de las raíces de un sistema relevado perturbado). Se demuestra que en la presencia de un actuador el proceso transitorio puede converger a un movimiento periódico. Se hace la comparación de las soluciones periódicas entre sistemas considerando la dinámica del actuador, cuando estos son controlados por modos deslizantes de segundo orden (SOSM), modos deslizantes asintóticos de segundo orden y modos deslizantes clásicos.

En el siguiente capítulo, se analiza la respuesta en el dominio de la frecuencia de sistemas controlados por SOSM, a una excitación armónica externa. El análisis se hace mediante el uso del concepto de ganancia equivalente de una función no lineal. Se utiliza la ganancia equivalente como un modelo de propagación de los valores promedio de las señales, a través de los elementos no lineales del sistema. Se analizan dos algoritmos SOSM el *twisting* y el *super twisting*. Los resultados se presentan en el formato convencional de respuesta en frecuencia: amplitud y fase.

Para el tercer capítulo se hace un análisis del observador por SOSM y se obtienen las características dinámicas en el dominio de la frecuencia del error de observación, esto permite hacer un análisis cuantitativo de la exactitud de la observación para entradas de diferentes frecuencias. El análisis de las oscilaciones se hace vía la aplicación del método de FD, y se presenta el concepto de ganancia equivalente.

En el capítulo final se propone un método para la identificación de cualquier número par de parámetros de una función de transferencia, la identificación implica el uso del algoritmo *twisting* modificado. Se proponen las ecuaciones algebraicas para determinar los parámetros desconocidos, éstas se pueden escribir por separado para la magnitud y el argumento de la función de transferencia, lo que simplifica la tarea de identificación. Consecuentemente, el problema se reduce a la solución de un sistema de ecuaciones algebraicas.

Capítulo 2

Análisis de esquemas de control por modos deslizantes de segundo orden en el dominio de la frecuencia

Se desarrolla el análisis en el dominio de la frecuencia de algoritmos de modos deslizantes de segundo orden, en particular el algoritmo *twisting* con el uso de FD y LPRS. Se demuestra que en la presencia de un actuador, el proceso puede converger a un movimiento periódico. Los parámetros de este movimiento periódico se analizan con el uso de las técnicas antes propuestas. Se hace la comparación de la solución periódica entre diferentes plantas incluyendo sus actuadores, cuando estos son controlados por modos deslizantes de primer orden, SOSM y modos deslizantes asintóticos de segundo orden.

2.1 Introducción

En este capítulo se analizan y se hace una comparación de los parámetros de las trayectorias periódicas que ocurren cuando un sistema es controlado por los algoritmos *twisting* [Levant 1993], modos deslizantes de segundo orden asintótico [Anosov 1959], [Shtessel *et al.* 2000] y modos deslizantes de primer orden [Utkin 1992]. El estudio se

Análisis de esquemas de control por modos deslizantes de segundo orden en el dominio de la frecuencia

realiza en una planta lineal controlada por diferentes esquemas de control a la cual se le agrega una dinámica parásita lineal.

El método de FD [Atherton 1975] proporciona una solución simple y eficiente del problema para modos deslizantes de primer orden. Sin embargo, no deja de ser una solución aproximada y por esa razón para el análisis se utiliza LPRS [Boiko 1999, Boiko 2005]. El LPRS no requiere la hipótesis del filtro ¹ y proporciona una solución exacta al problema de las oscilaciones autoexcitadas y de movimientos forzados en un sistema retroalimentado con relevadores. Sin embargo, el algoritmo *twisting* no es equivalente al control retroalimentado con un solo relevador y son necesarias algunas modificaciones a la metodología de LPRS para adecuar este método al algoritmo analizado. El capítulo se organiza como sigue: al principio se analiza el algoritmo *twisting* mediante la adaptación de la técnica de funciones descriptivas. Luego se aplica la técnica de LPRS, con las modificaciones necesarias para su aplicación al algoritmo *twisting*. Finalmente, se presentan algunos ejemplos y se muestra una tabla comparativa de los análisis realizados.

2.2 Análisis del algoritmo *twisting* con funciones descriptivas

El algoritmo *twisting* [Levant 1998], [Levant 1993] es uno de los más simples y conocidos algoritmos de modos deslizantes de segundo orden. Existen dos formas para utilizar el algoritmo *twisting*: una es aplicarlo directamente a la dinámica principal de un sistema de grado relativo dos y la otra aplicarlo a la dinámica principal de grado relativo uno a la cual se le agrega un integrador a la entrada de la planta (*twisting* como filtro).

Para dinámica de grado relativo tres o superior, el problema se fórmula como sigue: se tiene una planta (o la planta más el actuador), dada por la siguiente ecuación diferencial,

¹ La hipótesis de filtro es necesaria en el método de FD, esto es una aproximación que toma en cuenta solo la primer armónica de la oscilación causada por la no linealidad, e implica que los armónicos superiores se desprecian a la salida de la planta [Gelb y Vander Velde 1968], así que está se debe comportar como un filtro pasa-bajas.

Análisis de esquemas de control por modos deslizantes de segundo orden en el dominio de la frecuencia

en la cual se incluye la dinámica parásita,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^1$, $y \in \mathbb{R}^1$ es la salida de la planta, A , B y C son matrices de las dimensiones correspondientes, se supone que la matriz A no tiene polos imaginarios, y se cumple que $CA^2B \neq 0$ y $CAB = CB = 0$. El control $u(t)$ para el algoritmo *twisting* [Levant 1993] es el siguiente:

$$u(t) = c_1 \cdot \text{sign}(\sigma) + c_2 \cdot \text{sign}(\dot{\sigma}) \tag{2.2}$$

donde c_1 y c_2 son positivos, $c_1 > c_2 > 0$, y σ es la señal de error definida como $\sigma = f_0 - y$, donde se asume la señal de referencia $f_0 = 0$, como se muestra en la figura 2.1

La figura 2.1 muestra el sistema de la ecuaciones (2.1) y (2.2). Se supone que la planta es un sistema lineal estrictamente propio, pasa bajas, asintóticamente estable y el grado relativo es de uno o superior. Se puede usar la descripción de la planta en la forma de función de transferencia $W(s)$, mediante la fórmula (2.3):

$$W(s) = C(Is - A)^{-1}B \tag{2.3}$$

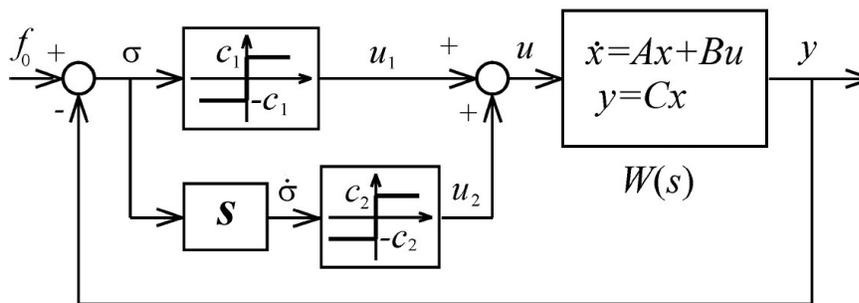


Figura 2.1: Diagrama del algoritmo *twisting*

Análisis de esquemas de control por modos deslizantes de segundo orden en el dominio de la frecuencia

Se supone que para el modo autónomo, (el caso donde la entrada de referencia $f_0 \equiv 0$), puede existir un movimiento periódico en el sistema controlado por el algoritmo *twisting* y para encontrar los parámetros del movimiento periódico se analiza mediante FD (ver [Atherton, 1975], por ejemplo).

Cuando un sistema tiene una no linealidad, la salida del sistema puede exhibir una oscilación armónica de amplitud A_1 y frecuencia ω , la función descriptiva N de esta no linealidad se define como sigue:

$$N = \frac{\omega}{\pi A_1} \int_0^{2\pi/\omega} u(t) \text{sen} \omega t dt + j \frac{\omega}{\pi A_1} \int_0^{2\pi/\omega} u(t) \text{cos} \omega t dt \quad (2.4)$$

La FD N es la primera armónica de la señal de control periódica dividida entre la magnitud A_1 que está dada por la amplitud de $\sigma(t)$ (o la salida $y(t)$ en este caso). El algoritmo *twisting* puede ser analizado como la interconexión paralela de dos relevadores ideales donde la entrada del primer relevador es la variable deslizante y la entrada al segundo relevador es la derivada de la variable deslizante. Se asume que el sistema cumple con la hipótesis de filtro de la misma manera como el método de FD es utilizado en la forma convencional, es decir para un solo relevador. La oscilación a la entrada del primer relé es armónica y por lo tanto la oscilación a la entrada del segundo relé también es armónica, por lo que no es necesario asumir nuevas condiciones a las que convencionalmente utiliza el método de FD. La FD para estas dos no linealidades se presenta en [Boiko *et al.* 2004].

Al aplicar el análisis de FD a este sistema se sustituyen los relevadores por la función descriptiva de cada relevador. Para el primer relé es

$$N_1 = \frac{\omega}{\pi A_1} \int_0^{2\pi/\omega} u_1(t) \text{sen} \omega t dt + j \frac{\omega}{\pi A_1} \int_0^{2\pi/\omega} u_1(t) \text{cos} \omega t dt \quad (2.5)$$

sustituyendo y evaluando se tiene

$$N_1 = \frac{4c_1}{\pi A_1} \quad (2.6)$$

y para el segundo relé:

$$N_2 = \frac{\omega}{\pi A_2} \int_0^{2\pi/\omega} u_2(t) \text{sen} \omega t dt + j \frac{\omega}{\pi A_2} \int_0^{2\pi/\omega} u_2(t) \text{cos} \omega t dt \quad (2.7)$$

se obtiene

$$N_2 = \frac{4c_2}{\pi A_2}, \quad (2.8)$$

donde A_2 es la amplitud de $d\sigma/dt$ (o de la derivada de la salida dy/dt). La relación entre y y dy/dt en el dominio de Laplace, está dada por la relación de amplitudes entre A_1 y A_2 : $A_2 = A_1\Omega$, donde Ω es la frecuencia de las oscilaciones a la salida del sistema controlado por el algoritmo *twisting*. Así la FD del algoritmo *twisting* es:

$$N = N_1 + sN_2 = \frac{4c_1}{\pi A_1} + j\Omega \frac{4c_2}{\pi A_2} = \frac{4}{\pi A_1} (c_1 + jc_2), \quad (2.9)$$

donde $s = j\Omega$. Se observa que el análisis de FD del algoritmo *twisting* depende sólo de las amplitudes y no depende de la frecuencia Ω . La técnica para encontrar los parámetros del ciclo límite es a través de la solución de la ecuación de **balance armónico**

[Atherton 1975]:

$$W(j\Omega)N(A_1) = -1, \quad (2.10)$$

donde $W(j\omega)$, $\omega \in [0; \infty)$ es la respuesta en frecuencia de la planta. La ecuación de balance armónico se reescribe como sigue:

$$W(j\Omega) = -\frac{1}{N(A_1)}, \quad (2.11)$$

donde la parte derecha de la ecuación es:

$$-\frac{1}{N(A_1)} = \pi A_1 \frac{-c_1 + jc_2}{4(c_1^2 + c_2^2)}. \quad (2.12)$$

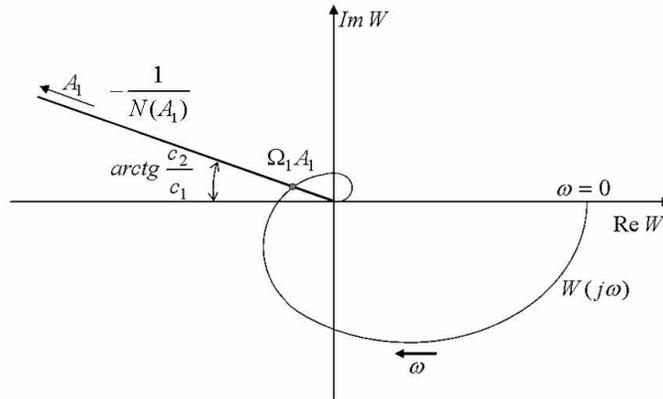


Figura 2.2: Solución periódica en un sistema con el algoritmo *twisting*

El recíproco negativo de la FD es una función que depende solamente de la amplitud y no de la frecuencia de la oscilación. La ecuación (2.10) corresponde a la intersección del diagrama de Nyquist de $W(j\Omega)$ y $-N(A_1)^{-1}$. La gráfica de la técnica de solución de la ecuación (2.10) se muestra en la figura 2.2. La función $-1/N$ es una línea recta, y la pendiente depende de la relación de c_2/c_1 . Esta línea se encuentra localizada en el segundo cuadrante del plano complejo.

El punto de intersección de esta función y del diagrama de Nyquist $W(j\omega)$ proporciona la solución del problema. Este punto da la frecuencia de oscilación Ω y la amplitud A_1 . El ángulo de $\angle W(j\Omega)$ se define en la ecuación (2.13):

$$\angle W(j\Omega) = \angle -\frac{1}{N} = -\pi - \arctan \frac{c_2}{c_1}. \quad (2.13)$$

Por lo tanto, si la función de transferencia de la planta (o de la planta más el actuador) tiene grado relativo dos o superior puede ocurrir un movimiento periódico en el sistema. Es decir, si un actuador de grado relativo mayor o igual a uno se agrega a una planta de grado relativo dos, y este arreglo es controlado por el algoritmo *twisting*, puede ocurrir un movimiento periódico en el sistema. Se observa en la ecuación (2.13) y en la figura 2.2 que la frecuencia de oscilación de la planta depende de la relación de c_2/c_1 . Las condiciones para la existencia de una solución periódica en un sistema controlado con el algoritmo *twisting* se derivan del análisis de la figura 2.2. Obviamente, un sistema

Análisis de esquemas de control por modos deslizantes de segundo orden en el dominio de la frecuencia

con una planta de grado relativo tres o superior tiene un punto de intersección con el recíproco negativo de la FD del algoritmo *twisting* y por lo tanto, puede existir una solución periódica.

Cuando un sistema tiene una función de transferencia de fase no monotónica es posible tener varios cruces con el recíproco negativo de la FD. En este caso es necesario considerar cuales oscilaciones son estables y factibles como se determina en [Gelb y Vander Velde 1968].

Otra modificación del algoritmo *twisting* para su aplicación a una planta con grado relativo uno, es la introducción de un integrador, esto es denominado comúnmente “*twisting* como filtro”. El integrador en serie con la planta incrementa el grado relativo a dos. Consecuentemente, cualquier actuador introducido en el lazo de control aumenta el grado relativo total del sistema por lo menos a tres. En este caso, siempre existe un punto de intersección con el diagrama de Nyquist de la conexión en serie del actuador, la planta y el integrador con el recíproco negativo de la FD del algoritmo *twisting*, como se muestra en la figura 2.2. Así, si un actuador de primer orden se agrega a la planta, donde está tiene grado relativo uno, puede existir un movimiento periódico en el sistema controlado con el algoritmo *twisting* como filtro.

2.3 Análisis LPRS [Boiko 2005]

Se sabe que el control por modos deslizantes es de naturaleza discontinua y en el caso del modo deslizante ideal, éste es esencialmente un relé retroalimentado mediante la variable deslizantes como se muestra en la figura 2.3.

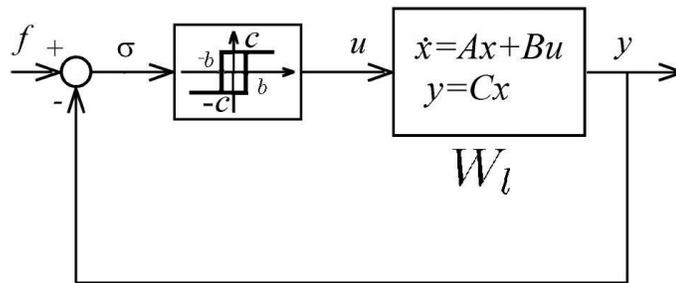


Figura 2.3: Sistema retroalimentado con relé

En la figura 2.3 f es la entrada (la cual puede considerarse como una perturbación) en la entrada del relé, u es el control, y es la variable deslizante, σ es la señal de error (que es la variable deslizante afectada por las perturbaciones) c es la amplitud de la señal de salida del relé, $2b$ es la histéresis de la función $u = u(\sigma)$ y $W_l(s)$ es la función de transferencia de la parte lineal (del actuador, la planta y la superficie deslizante). Normalmente la histéresis en un control por modos deslizantes es cero. sin embargo, en este análisis si se considera el relé con histéresis. El actuador, la planta y la superficie deslizante pueden representarse mediante una matriz de ecuaciones diferenciales como se considera mas adelante.

El método de FD es simple y a menudo bastante preciso para el análisis entrada salida de las trayectorias periódicas(en el marco de asumir una entrada senoidal a la entrada del relé). estas trayectorias son normalmente analizadas en dos subsistemas dinámicos: un subsistema lento y otro rápido. El subsistema lento analiza los movimientos con condiciones iniciales en el sistema diferentes de cero, los cambios en la superficie deslizante y las trayectorias forzadas causadas por una señal de entrada o una perturbación. el subsistema rápido se refiere al análisis de las oscilaciones que se generan de forma autónoma en el sistema controlado mediante modos deslizantes. esta separación es posible si la dinámica de las señales externas es mas lenta que las oscilaciones auto excitadas, que es el caso típico. Como en el método de FD se considera que las señales externas que se aplican son lentas en comparación con las oscilaciones, es decir, que se tienen

Análisis de esquemas de control por modos deslizantes de segundo orden en el dominio de la frecuencia

las siguientes condiciones: la señal externa puede considerarse constante a lo largo del periodo de la auto oscilación sin pérdida significativa en la precisión de la estimación de las oscilaciones. Aunque esta no es una definición rigurosa, esboza el marco para el siguiente análisis, y es comúnmente aceptado en el análisis de FD. Se asume que la señal de entrada al sistema es constante f_0 (el subíndice cero enfatiza el hecho de una entrada constante).

$$f(t) \equiv f_0 \quad (2.14)$$

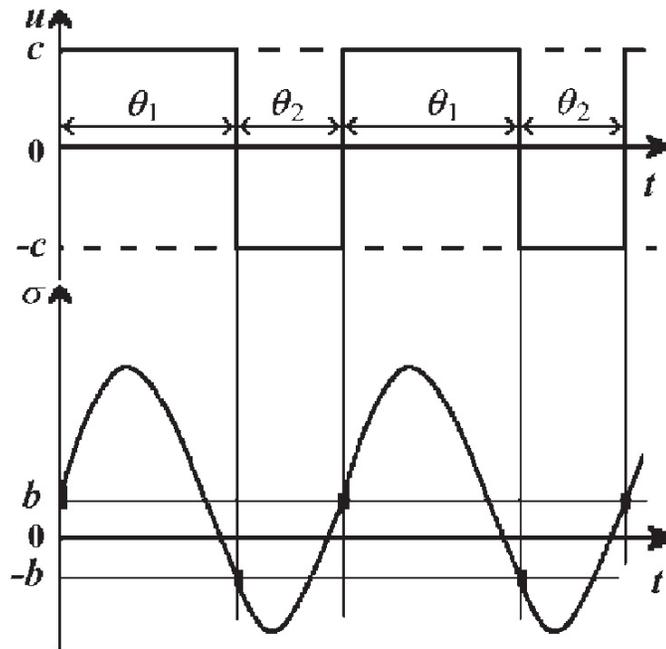


Figura 2.4: Oscilaciones asimétricas

Entonces, ocurre un movimiento periódico asimétrico en el sistema de la figura 2.4, de manera que cada señal tiene ahora un término constante y otro periódico:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 + u_p, \\ y(t) &= y_0 + y_p, \\ \sigma(t) &= \sigma_0 + \sigma_p, \end{aligned} \quad (2.15)$$

Análisis de esquemas de control por modos deslizantes de segundo orden en el dominio de la frecuencia

El subíndice “0” se refiere a los términos constantes en la serie de Fourier y el subíndice “p” se refiere a los términos periódicos de la serie de Fourier.

El término constante es la media o valor promedio de la señal en el periodo. Si la entrada cambia de un cierto valor negativo a uno positivo y medimos el valor del término constante del control (media del control) y el término constante de la señal de error (media del error), se puede determinar el término constante de la señal de control, como una función del término constante de la señal de error, la que puede no ser discontinua pero si una función suave: $u_0 = u(\sigma_0)$. la que se denomina como una función de sesgo. Esto se conoce como el “*efecto de suavizado*”. La derivada de la media del control con respecto a la media del error, evaluada cuando la media del error es cero $\sigma_0 = 0$ (que corresponde a una entrada constante de cero) provee la denominada *ganancia equivalente* del relé k_n .

$$k_n = \left. \frac{\partial u_0}{\partial \sigma_0} \right|_{\sigma_0=0} = \lim_{f_0 \rightarrow 0} \frac{u_0}{\sigma_0} \quad (2.16)$$

Así, las entradas lentas en el sistema relevado se comportan de manera similar a como lo hacen en un sistema lineal, el punto principal del análisis entrada salida es encontrar el valor de la *ganancia equivalente*, una vez que se tiene, se hacen los análisis para trayectorias lentas de la misma forma que para un sistema lineal donde es reemplazada la no linealidad por la *ganancia equivalente*. El modelo que se obtiene via el reemplazo del relé por la *ganancia equivalente* representa el modelo promediado de las trayectorias del sistema (en un periodo de las oscilaciones). Para un análisis de un sistema controlado por modos deslizantes es pertinente decir que la desviación o sesgo de la variable deslizante respecto a el valor de cero es pequeña, y la *ganancia equivalente* es una aproximación local de la función de sesgo. El modelo obtenido según lo descrito anteriormente no es un modelo de orden reducido. Se mantendría el orden del sistema original. El modelo de orden reducido se pueden obtener a través del ajuste de la ganancia equivalente para infinito. El mecanismo de la reducción del modelo se analizan a continuación.

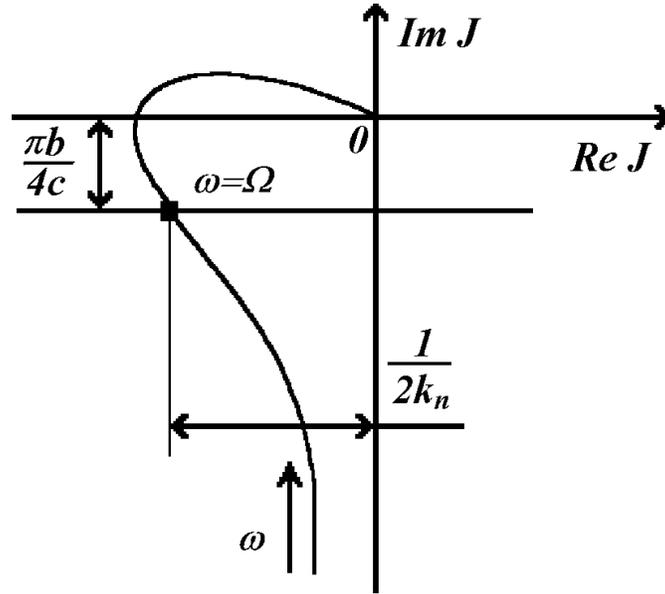


Figura 2.5: LPRS para un sistema relevado

El siguiente desarrollo tiene por objeto el diseño de una herramienta de análisis que nos permita encontrar los parámetros de la oscilación y la ganancia equivalente a través de la linealización del relé para construir un modelo de las trayectorias lentas del sistema oscilatorio. Para entender el significado de la función, primero se considera el análisis con FD [Atherton 1975] de un sistema relevado retroalimentado como se muestra en la figura 2.3. La FD de un sistema relevado perturbado con histéresis con una entrada senoidal con sesgo se representa por la conocida formula

$$N(a, \sigma_0) = \frac{2c}{\pi a} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{b + \sigma_0}{a}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{b - \sigma_0}{a}\right)^2} \right] - j \frac{4cb}{\pi a^2}, \quad (2.17)$$

donde a es la amplitud de la oscilación. La media de control en función de las variables a y σ_0 está dada por la siguiente fórmula

$$u_0(a, \sigma_0) = \frac{c}{\pi} \arcsin \frac{b + \sigma_0}{a} - \arcsin \frac{b - \sigma_0}{a}. \quad (2.18)$$

A partir de esas dos fórmulas, podemos obtener la FD del relé y derivar la media del

Análisis de esquemas de control por modos deslizantes de segundo orden en el dominio de la frecuencia

control con respecto a la media del error para el caso de una entrada senoidal simétrica

$$N(a) = \frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{A}\right)^2} - j \frac{4cb}{\pi a^2};$$

$$\left. \frac{\partial u(0)}{\partial \sigma(0)} \right|_{\sigma_0=0} = \frac{2c}{\pi a} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{b}{A}\right)^2}} = k_{n(DF)} \quad (2.19)$$

La parte derecha de la ultima formula $k_{n(DF)}$, determina el valor de la *ganancia equivalente calculado mediante FD*. Las oscilaciones en el sistema relevado se encuentran mediante la ecuación

$$W(j\Omega) = -\frac{1}{N(a)}. \quad (2.20)$$

mediante la sustitución de la FD $N(a)$ se tiene

$$W(j\Omega) = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}}{\frac{2c}{\pi a}} - j \frac{\pi b}{4c} \quad (2.21)$$

Se nota que la fracción de la parte real es el recíproco de la *ganancia equivalente*, y también que la condición para la conmutación del relé de menos a mas (definida en el tiempo cero) es igual para la salida del sistema en la parte negativa de la histéresis ($-b$). Si se toma lo anterior en cuenta y reescribiendo se tiene la expresión

$$W(j\Omega) = -\frac{1}{2} \frac{1}{k_{n(DF)}} + j \frac{\pi}{4c} y_{(DF)}(0). \quad (2.22)$$

De la anterior formula para el sistema relevado retroalimentado se observa para la parte imaginaria, que la respuestas es el valor de la salida en el tiempo cero (con un coeficiente), y la parte real es el recíproco negativo de la ganancia equivalente (también con un coeficiente), Esto es solo verdad cuando se cumple que $y(t)$ es una *señal armónica*. Ahora se define una función J que sirve para los mismos propósitos que $W(j\Omega)$, pero requiere que la parte derecha de la nueva ecuación sean los valores exactos de la *ganancia equivalente* y de la salida en el tiempo t igual a cero, lo que da como resultado la siguiente definición:

$$J(\omega) = -\frac{1}{2} \lim_{f_0 \rightarrow 0} \frac{\sigma_0}{u_0} + j \frac{\pi}{4c} \lim_{f_0 \rightarrow 0} y(t)|_{t=0} \quad (2.23)$$

Análisis de esquemas de control por modos deslizantes de segundo orden en el dominio de la frecuencia

cuando $t = 0$ es el tiempo de conmutación del relevador de “ $-c$ ” a “ $+c$ ”, ω es la frecuencia de auto oscilación la cual varía cuando cambia la histéresis $2b$ mientras los demás parámetros del sistema son considerados constantes σ_0 , u_0 y $y(t)|_{t=0}$, son funciones de ω . En la definición 2.23, se asume que el ciclo limite es simétrico si la función de entrada f_0 tiende a cero. Por lo tanto, $J(\omega)$ se define como la respuesta característica de la parte lineal para valores de control de entrada $u(t)$ en forma de pulsos desiguales, así $f_0 \rightarrow 0$ cuando la frecuencia ω varía. La parte real de $J(\omega)$ contiene la información de la ganancia equivalente del relevador, la parte imaginaria de $J(\omega)$ da la información respecto a las conmutaciones del relevador y en consecuencia la frecuencia de las oscilaciones.

La función $J(\omega)$ definida anteriormente, se gráfica en el plano complejo (variando la frecuencia ω) a lo que se le denomina sistema relevado perturbado o LPRS (por sus siglas en inglés), si se calcula el LPRS de un sistema dado, entonces (al igual que con el análisis de FD) es posible determinar la frecuencia de las oscilaciones así como la amplitud y la *ganancia equivalente* k_n como se muestra en la figura 2.5. El punto de intersección de LPRS con la línea recta, la cual esta a una distancia de $\frac{\pi b}{4c}$ debajo del eje horizontal (si $b > 0$ y arriba si $b < 0$) y el eje paralelo (a la línea $\frac{\pi b}{4c}$) permite calcular la frecuencia de oscilación y la *ganancia equivalente* k_n del relé.

De la ecuación 2.23, la frecuencia de oscilación Ω se calcula resolviendo la ecuación

$$\text{Im}(\Omega) = -\frac{\pi b}{4c} \quad (2.24)$$

(es decir para $y(0) = -b$ es la condición para la conmutación del relé,) la ganancia k_n se puede calcular como

$$k_n = -\frac{1}{2 \text{Re} J(\Omega)} \quad (2.25)$$

2.3.1 Cálculo del LPRS para un sistema descrito en espacio de estados (planta lineal no integrante)

Se deriva las formula para encontrar el LPRS donde se utiliza solo los parámetros de la planta lineal no integrante, dada está por la ecuación 2.26 que describe el sistema de la figura 2.3

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{2.26}$$

$$u = \begin{cases} +c & \text{si } \sigma = f_0 - y > b \text{ o } \sigma > -b, \dot{\sigma} < 0 \\ -c & \text{si } \sigma = f_0 - y < -b \text{ o } \sigma < -b, \dot{\sigma} > 0 \end{cases}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, la matriz A , no es singular.

Si se tiene una solución periódica para el sistema 2.26 con conmutaciones desiguales, causadas por una señal de entrada distinta de cero, una forma común de encontrar la solución es utilizando mapas de Poincare. Dado que las conmutaciones del control no son simétricas las oscilaciones tampoco, lo que se debe considerar en el mapa de Poincare, Si se supone que existe un proceso periódico asimétrico de periodo T . Entonces, la solución para un control u constante es

$$x(t) = e^{At}x(0) + A^{-1}(e^{At} - I)Bu \tag{2.27}$$

es posible determinar el punto de retorno en el mapa de Poincare y encontrar la solución periódica del sistema 2.26, como se expresa enseguida

$$\eta_p = e^{A\theta_1}\rho_p + A^{-1}(e^{A\theta_1} - I)Bc, \tag{2.28}$$

$$\rho_p = e^{A\theta_2}\eta_p + A^{-1}(e^{A\theta_2} - I)Bc \tag{2.29}$$

donde $\rho_p = x(0) = x(T)$, $\eta_p = x(\theta_1)$ para la solución periódica con los pulsos de control $u(t)$, positivo y negativo de duración θ_1, θ_2 respectivamente

Análisis de esquemas de control por modos deslizantes de segundo orden en el dominio de la frecuencia

La solución de 2.28, 2.29 resulta en

$$\rho_p = (I - e^{At})^{-1} A^{-1} [e^{AT} - 2e^{A\theta_2} + I] Bc, \quad (2.30)$$

$$\eta_p = (I - e^{At})^{-1} A^{-1} [2e^{A\theta_1} - e^{AT} + I] Bc. \quad (2.31)$$

ahora si se considera la solución periódica de 2.30 y 2.31 como resultado de la acción de retroalimentación, Las condiciones de conmutación de el relé son

$$\begin{cases} f_0 - y(0) > b \\ f_0 - y(\theta_1) > -b \end{cases} \quad (2.32)$$

al resolver el conjunto de ecuaciones 2.32 para encontrar f_0 se tiene:

$$f_0 = \frac{y(0) - y(\theta_1)}{2} \quad (2.33)$$

Por lo tanto,, el término constante de $\sigma(t)$ es:

$$\sigma_0 = f_0 - y_0 = \frac{y(0) - y(\theta_1)}{2} - y_0. \quad (2.34)$$

La parte real de la formula de LPRS se determina mediante

$$\text{Re } J(\omega) = -0,5 \lim_{\iota \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{0,5[y(0) - y(\theta_1)] - y_0}{u_0} \quad (2.35)$$

donde

$$\iota = \frac{\theta_1}{\theta_1 + \theta_2} = \frac{\theta_1}{T}. \quad (2.36)$$

Entonces $\theta_1 = \iota T$, $\theta_2 = (1 - \iota)T$, $u_0 = c(2\iota - 1)$. Así la ecuación 2.35 se reescribe como

$$\text{Re } J(\omega) = -0,5 \lim_{\iota \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{0,5C[\rho_p + \eta_p] - y_0}{c(2\iota - 1)} \quad (2.37)$$

Análisis de esquemas de control por modos deslizantes de segundo orden en el dominio de la frecuencia

donde ρ_p y η_p están dadas por las ecuaciones 2.30 y 2.31 . La parte imaginaria de la formula de $J(\omega)$ se define como sigue.

$$\text{Im } J(\omega) = \frac{\pi}{4c} C \lim_{\iota \rightarrow \frac{1}{2}} \rho_p \quad (2.38)$$

Finalmente , la fórmula LPRS basada en espacio de estados derivada de las fórmulas 2.30 y 2.31 . es la siguiente:

$$\begin{aligned} J(\omega) = & -0,5C \left[A^{-1} + \frac{2\pi}{\omega} (I - e^{\frac{2\pi}{\omega}A})^{-1} e^{\frac{\pi}{\omega}A} \right] B \\ & + j\frac{\pi}{4} C \left(I + e^{\frac{\pi}{\omega}A} \right)^{-1} \left(I - e^{\frac{\pi}{\omega}A} \right) A^{-1} B. \end{aligned} \quad (2.39)$$

2.3.2 Cálculo del LPRS para un sistema descrito mediante una función de transferencia (planta lineal no integrante)

Otra manera de calcular la fórmula de $J(\omega)$ para el caso de un sistema lineal es mediante la función de transferencia. Se supone una sistema *tipo 0* (la función de transferencia no tiene parte integrante). Se escribe la señal de control $u(t)$ representado en la figura 2.4 en la forma de serie de Fourier:

$$\begin{aligned} u(t) = & u_0 + \frac{4c}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi k \theta_1 / (\theta_1 + \theta_2))}{k} \\ & \times \left\{ \cos\left(\frac{k\omega\theta_1}{2}\right) \cos(k\omega t) \right. \\ & \left. + \sin\left(\frac{k\omega\theta_1}{2}\right) \sin(k\omega t) \right\} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{c(\theta_1 - \theta_2)}{(\theta_1 + \theta_2)} \\ \omega &= \frac{2\pi}{(\theta_1 + \theta_2)} \end{aligned}$$

Así, $y(t)$ es la respuesta de salida de la función de transferencia de la parte lineal

Análisis de esquemas de control por modos deslizantes de segundo orden en el dominio de la frecuencia

$W_l(s)$

$$y(t) = y_0 + \frac{4c}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(\pi k \theta_1 / (\theta_1 + \theta_2))}{k} \times \left\{ \cos\left(\frac{k\omega\theta_1}{2}\right) \cos[k\omega t + \varphi_1(k\omega)] + \text{sen}\left(\frac{k\omega\theta_1}{2}\right) \text{sen}[k\omega t + \varphi_1(k\omega)] \right\} A_1(k\omega) \quad (2.40)$$

donde

$$\varphi_1(k\omega) = \arg W_l(jk\omega),$$

$$A_1(k\omega) = |W_l(jk\omega)|,$$

$$y_0 = u_0 |W_l(j0)|.$$

Las condiciones de conmutación de el relé están dados en la ecuación 2.32 donde $y(0)$ y $y(\theta_1)$ se obtienen evaluando la ecuación 2.40 para $t = 0$ y $t = \theta_1$ respectivamente

$$y(0) = y_0 + \frac{4c}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[0,5 \text{sen} \frac{2\pi k \theta_1}{\theta_1 + \theta_2} \text{Re} W_l(jk\omega) + \text{sen}^2 \frac{\pi k \theta_1}{\theta_1 + \theta_2} \text{Im} W_l(jk\omega) \right] / k \quad (2.41)$$

$$y(\theta_1) = y_0 + \frac{4c}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[0,5 \text{sen} \frac{2\pi k \theta_1}{\theta_1 + \theta_2} \text{Re} W_l(jk\omega) - \text{sen}^2 \frac{\pi k \theta_1}{\theta_1 + \theta_2} \text{Im} W_l(jk\omega) \right] / k \quad (2.42)$$

Diferenciando 2.32 con respecto a f_0 (donde se consideran las ecuaciones 2.41 y 2.42)) se obtienen las fórmulas que contienen las derivadas en punto $\theta_1 = \theta_2 = \theta = \pi/\omega$:

$$\begin{aligned} & \frac{c|W_l(0)|}{2\theta} \left(\frac{d\theta_1}{df_0} - \frac{d\theta_2}{df_0} \right) \\ & + \frac{c}{\theta} \left(\frac{d\theta_1}{df_0} - \frac{d\theta_2}{df_0} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \cos(\pi k) \text{Re} W_l(\omega_k) \\ & - \frac{2c}{\theta^2} \left(\frac{d\theta_1}{df_0} + \frac{d\theta_2}{df_0} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \text{sen}^2 \frac{\pi k}{2} \frac{d \text{Im} w_l(\omega_k)}{d\omega_k} - 1 = 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} & \frac{c|W_l(0)|}{2\theta} \left(\frac{d\theta_1}{df_0} - \frac{d\theta_2}{df_0} \right) \\ & + \frac{c}{\theta} \left(\frac{d\theta_1}{df_0} - \frac{d\theta_2}{df_0} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \cos(\pi k) \text{Re} W_l(\omega_k) \\ & + \frac{2c}{\theta^2} \left(\frac{d\theta_1}{df_0} + \frac{d\theta_2}{df_0} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \text{sen}^2 \frac{\pi k}{2} \frac{d \text{Im} w_l(\omega_k)}{d\omega_k} - 1 = 0 \end{aligned} \quad (2.44)$$

donde $\omega_k = \pi k/\omega$. Resolviendo el conjunto de ecuaciones 2.43 y 2.44 para encontrar $d(\theta_1 - \theta_2)/df_0$ y $d(\theta_1 + \theta_2)/df_0$ se tiene:

$$\left. \frac{d(\theta_1 + \theta_2)}{df_0} \right|_{f_0=0} = 0 \quad (2.45)$$

Lo que corresponde a la derivada de un período de las oscilaciones, y:

$$\left. \frac{d(\theta_1 - \theta_2)}{df_0} \right|_{f_0=0} = \frac{2\theta}{c \left(|W_l(0)| + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos(\pi k) \operatorname{Re} W_l(\omega_k) \right)} \quad (2.46)$$

Si se considera el sistema en lazo cerrado la fórmula para la función de transferencia es

$$\left. \frac{d(\theta_1 - \theta_2)}{df_0} \right|_{f_0=0} = \frac{2\theta k_n}{c(1 + k_n |W_l(0)|)} \quad (2.47)$$

La solución de las ecuaciones 2.46 y 2.47 para encontrar k_n es:

$$k_n = \frac{1}{2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{Re} W_l(k\pi/\theta)} \quad (2.48)$$

Si se toma en cuenta la ecuación 2.48 y la definición para el LPRS en la ecuación 2.23 se obtiene la expresión para $\operatorname{Re} J(\omega)$, de igual forma, se resuelve el conjunto de ecuaciones 2.32 para $\theta_1 = \theta_2$ donde $y(0)$ y $y(\theta_1)$ tienen la forma 2.41 y 2.42 respectivamente, para obtener la fórmula de $\operatorname{Im} J(\omega)$. Al tener la parte real e imaginaria juntas, se tiene la fórmula para determinar el LPRS $J(\omega)$ para un sistema tipo 0

$$J(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \operatorname{Re} W_l(k\omega) + j \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} \frac{W_l[(2k-1)\omega]}{2k-1} \quad (2.49)$$

2.3.3 Cálculo del LPRS para un sistema es espacio de estados (planta lineal integrante)

Si la planta tiene un integrador la parte lineal resultante del sistema controlado por MD (que incluye el actuador, la planta, y la superficie deslizante) contiene también la parte integrante. Para la parte lineal integrante, la fórmula derivada antes no puede ser usada sin ciertas transformaciones. Aunque como se menciona en [Varigonda y Georgiou 2001], la solución de $x(t)$ para el sistema esta definida, aún si la matriz A no tiene una inversa definida y, por lo tanto, los resultados anteriores se

Análisis de esquemas de control por modos deslizantes de segundo orden en el dominio de la frecuencia

pueden también aplicar a la parte lineal integrante, la entrada constante f_0 puede no producir conmutaciones desiguales ya que la parte del integrador puede compensar la entrada constante y producir conmutaciones iguales. Para obtener conmutaciones desiguales una entrada rampa debe ser aplicada a la entrada del sistema representado en la figura 2.3. Sin embargo, el proceso que ocurre en este sistema, estrictamente hablando, puede no ser un proceso periódico. El movimiento resultante en tal sistema podría ser una combinación de un movimiento periódico y un movimiento de rampa debido a la integración no limitada. Este análisis requiere un modelo diferente del sistema, que da lugar a una forma diferente de solución periódica. Para habilitar el sistema y tener un movimiento periódico asimétrico, se transpone la señal constante de entrada a la entrada de la parte integrante (figura 2.6). Se debe alcanzar el equilibrio de los términos constantes de las señales en varios puntos del sistema para que ocurra el movimiento periódico. De manera similar, se deriva la fórmula del $J(\omega)$ para el caso de la parte lineal integrante (servo sistema relevado tipo 1). La descripción en el estado de espacios del sistema (figura 2.6). tiene la siguiente forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.50)$$

$$y = Cx - f_0 \quad (2.51)$$

$$u = \begin{cases} +c & \text{si } \sigma = -y > b \text{ o } \sigma > -b, \dot{\sigma} < 0 \\ -c & \text{si } \sigma = -y > -b \text{ o } \sigma < b, \dot{\sigma} > 0 \end{cases}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$, $B \in \mathbb{R}^{(n-1) \times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1 \times (n-1)}$, f_0 es una entrada constante al sistema, σ es la señal de error, $2b$ es la histéresis de la función del relé, la matriz A es no-singular.

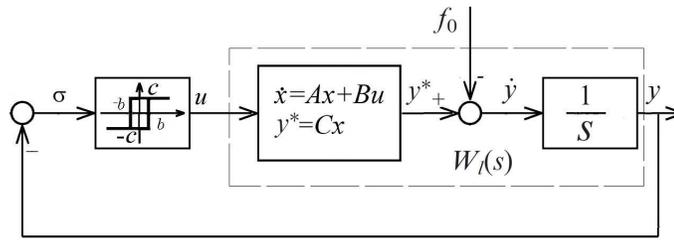


Figura 2.6: Sistema integrante con relé

Una consideración distinta de $y(t)$ respecto al de las otras variables de estado, es posible debido a la propiedad integrante de la parte lineal. Eso nos permite encontrar una solución periódica para $x(t)$ primero (para conmutaciones desiguales), y después para determinar la solución periódica de la salida de sistema. La solución periódica para $x(t)$ antes de la parte integrante se da en las fórmulas 2.28 y 2.29. La salida y periódica de $y(t)$ se obtiene al integrar la ecuación 2.51 para los estados iniciales determinados por las fórmulas 2.28 y 2.29. Como consecuencia, para el control $u = c$ la salida de sistema puede ser escrita como:

$$y_1(t) = y_1(0) - CA^{-1}Bct - f_0t + CA^{-1} \left[(e^{At} - 1)\rho_p + A^{-1}(e^{At} - 1)Bc \right], \quad (2.52)$$

y para el control $u = -c$ como la fórmula siguiente:

$$y_2(t) = y_2(\theta_1) - CA^{-1}Bct - f_0t + CA^{-1} \left[(e^{At} - 1)\eta_p - A^{-1}(e^{At} - 1)Bc \right], \quad (2.53)$$

donde $y_1(t) = y(t)$, $y_2(t) = y(t + \theta_1)$..

El tiempo t en la fórmula 2.52 y 2.53 es independiente y en $t = 0$ en la fórmula 2.52 es el tiempo de conmutación de menos a más, y en la fórmula 2.53 cuando $t = 0$ es el tiempo de conmutación de más a menos. Para tener un movimiento periódico, las ecuaciones siguientes deben cumplirse:

$$y(\theta_1) = y(0) - (CA^{-1}Bc - f_0)\theta_1 + CA^{-1} \left[(e^{A\theta_1} - 1)p - A^{-1}(e^{A\theta_1} - 1)Bc \right], \quad (2.54)$$

$$y(\theta_2) = y(0) - (CA^{-1}Bc - f_0)\theta_2 + CA^{-1} \left[(e^{A\theta_2} - 1)\eta - A^{-1}(e^{A\theta_2} - 1)Bc \right], \quad (2.55)$$

El análisis de ecuaciones 2.54 y 2.55 muestran que el conjunto de ecuaciones puede tener una solución si y sólo si

$$f_0 = -CA^{-1}Bc(2\iota - 1), \quad (2.56)$$

donde

$$\iota = \frac{\theta_1}{\theta_1 + \theta_2} = \frac{\theta_1}{T}, \quad (2.57)$$

que corresponde a la situación cuando el término constante de señal $y^*(t)$ (véase la figura 2.6) es igual a f_0 y, por lo tanto, el término constante a la entrada del integrador es cero. Sólo en este caso la salida del integrador no contiene una componente rampa y un movimiento periódico ocurre en el sistema. Además, las ecuaciones 2.54 y 2.55 son equivalente y tienen un número infinito de soluciones. Una explicación de este hecho es la siguiente. Si una señal periódica con término constante cero, se aplica a la entrada del integrador, su señal de salida no es única y esta depende de la condición inicial y este valor representa un número infinito de señales periódicas con sesgo. Para definir una solución única se introduce un condición adicional

$$y(\theta_1) = -y(0). \quad (2.58)$$

La solución de las ecuaciones 2.54 y 2.58 resulta en

$$\begin{aligned} y(0) = & CA^{-1}Bc\iota(1 - \iota)T + \frac{1}{4}CA^{-2} \left\{ (1 - e^{AT})^{-1} \right. \\ & \times 6e^{AT} - \left[3(e^{A\theta_1} + e^{A\theta_2}) - e^{AT}(e^{A\theta_1} + e^{A\theta_2}) + 2I \right] \\ & \left. - (e^{A\theta_1} + e^{A\theta_2}) + 2I \right\} Bc \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y(0) = & CA^{-1}Bc\iota(1-\iota)T + \frac{1}{4}CA^{-2} \left\{ (1-e^{AT})^{-1} \right. \\
 & \times 6e^{AT} - \left[3(e^{A\theta_1} + e^{A\theta_2}) - e^{AT}(e^{A\theta_1} + e^{A\theta_2}) + 2I \right] \\
 & \left. - (e^{A\theta_1} + e^{A\theta_2}) + 2I \right\} Bc
 \end{aligned} \quad (2.59)$$

La salida para cuando $t = \theta_1$ tiene un valor negativo en la fórmula. Entonces, se encuentra la solución periódica del sistema 2.50 , 2.51.

La fórmula de LPRS puede ser derivada del análisis del sistema en lazo cerrado mediante un control con conmutaciones desiguales de una asimetría infinitesimalmente pequeña. El término constante y_0 de la salida $y(t)$ puede ser determinado como la suma de integrales de las funciones 2.52 y 2.53 entre el periodo T

$$y_0 = \frac{1}{T} \left\{ \int_0^{\theta_1} y_1(\tau) d\tau + \int_0^{\theta_2} y_2(\tau) d\tau \right\}, \quad (2.60)$$

donde $y_1(\tau)$ está dado por 2.52 y $y_2(\tau)$ está dado por 2.53.

La fórmula de la parte real de $J(\omega)$ se puede transformarse en

$$\text{Re } J(\omega) = -0,5 \lim_{\iota \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{y_0}{c(2\iota - 1)} \quad (2.61)$$

Las transformaciones adicionales son bastante directas si los límites siguientes se toman en cuenta:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\iota \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{e^{A\theta_1} - e^{A\theta_2}}{2\iota - 1} &= AT e^{AT/2}; \\
 \lim_{\iota \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\iota(e^{A\theta_1} + e^{A\theta_2})}{2\iota - 1} &= \left(I - \frac{AT}{2} \right) e^{AT/2}.
 \end{aligned}$$

La fórmula de la parte imaginaria de $J(\omega)$ se determina por 2.59 con un coeficiente, el cual proviene de la definición de LPRS. Finalmente, el LPRS para el caso de una parte lineal integrante puede ser escrito de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 J(\omega) = & \frac{1}{4}CA^{-2} \left\{ (I - D^2)^{-1} \right. \\
 & \times \left[D^2 - \left(I - \frac{4\pi}{\omega}A \right) D + D^3 - I \right] + D - I \left. \right\} B \\
 & + j\frac{\pi}{8}CA^{-1} \left\{ \frac{\pi}{\omega} + A^{-1} \left[(I - D^2)^{-1} \right. \right. \\
 & \left. \left. \times (3D^2 - 3D - D^3 + I) - D + I \right] \right\} B,
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

donde $D = e^{(\pi/\omega)A}$.

2.3.4 Cálculo del LPRS para un sistema basado en la función de transferencia (planta lineal integrante)

Se presenta la fórmula de LPRS para el caso de una parte lineal integrante, que se da por una función de transferencia. el modelo del siguiente análisis esta dado por la figura 2.6. se hace notar que los términos periódicos de las señales del sistema de la figura 2.6 son iguales que los términos periódicos de las señales respectivas del sistema de figura 2.3. Por esa razón, se usan algunos resultados del análisis anterior para el caso de la parte lineal no integrante. La constante de entrada f_0 causa una asimetría en el movimiento periódico. En un movimiento periódico estable, el término constante de la señal de entrada de la parte integrante es cero. Sin embargo, la entrada $\sigma(t)$ al rele tiene dos términos: el constante σ_0 y el periódico $\sigma_p(t)$. El término periódico $\sigma_p(t)$ coincide con el término periódico de la fórmula 2.40 (con valor negativo de este último). El término constante σ_0 se puede expresar como

$$\sigma_0 = -0,5(\sigma_p(0) + \sigma_p(\theta_1)),$$

si se toma en cuenta 2.41 y 2.42 da como resultado

$$\sigma_0 = \frac{2c}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \text{sen} \frac{2\pi k \theta_1}{\theta_1 + \theta_2} \text{Re} W_l(jk\omega) \tag{2.63}$$

La *ganancia equivalente* k_n se obtiene como el valor inverso de la derivadas $d\sigma_0/du_0$ para $\theta_1 = \theta_2 = \pi/\omega$. La parte imaginaria del LPRS permanece igual para el caso

Análisis de esquemas de control por modos deslizantes de segundo orden en el dominio de la frecuencia

de la parte lineal integrante. Y finalmente, la fórmula del LPRS se puede construir al basarse en la definición 2.23 y del análisis anterior. Enseguida, la fórmula final de LPRS también incorpora los resultados obtenidos exteriormente para el caso de la parte lineal no integrante

$$J(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^m (-1)^{k+1} \operatorname{Re} W_l(k\omega) + j \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} \frac{W_l[(2k-1)\omega]}{2k-1} \quad (2.64)$$

donde $m = 0$ para un sistema no integrante y $m = 1$ para una planta lineal integrante.

Para un cálculo exacto de un punto del $J(\omega)$ los primeros términos de la serie 2.64 son suficientes por regla general. Se puede mostrar que la serie 2.64 siempre **converge** para funciones de transferencia **estrictamente propias**. Generalmente, al utilizar una mayor cantidad de términos de la serie el cálculo de LPRS es más exacto. Tomar sólo un término para el cálculo de la parte real y la parte imaginaria es equivalente a usar el método de FD. La fórmula 2.64 se usa en el cálculo de LPRS en forma de respuesta a la frecuencia (gráfico de Bode, grafico de Nyquist) de la parte lineal.

2.4 Análisis del algoritmo *twisting* con LPRS

Para utilizar el método LPRS en el análisis del algoritmo *twisting*, es necesario transformar el problema original en uno equivalente, como se muestra figura 2.7.

Análisis de esquemas de control por modos deslizantes de segundo orden en el dominio de la frecuencia

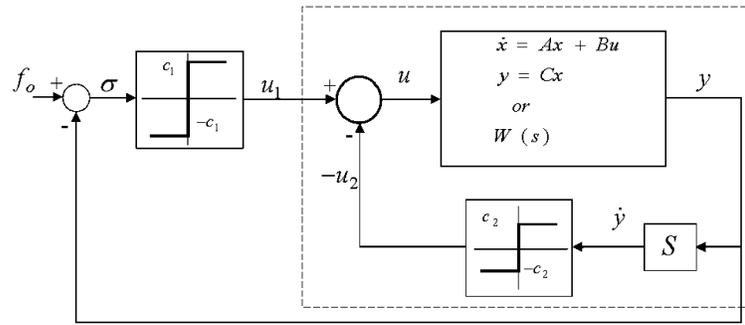


Figura 2.7: Sistema transformado para el algoritmo *twisting*

En la figura 2.7, se trata la parte encerrada entre líneas punteadas como la planta equivalente que cumple con la estructura del sistema relevado. Ésta es no lineal, por esta razón es necesario ordenar las no linealidades de la planta en (2.64).

De acuerdo a la ecuación (2.64) la parte imaginaria del LPRS es el valor a la salida de la planta en el instante en que el relevador conmuta de “ - ” a “ + ” (con algún coeficiente). De esta manera, la parte imaginaria del LPRS se encuentra a la salida de la planta en el instante de conmutación de la señal periódica cuadrada u_1 aplicada a la entrada de la planta. La señal u_2 es también aplicada a la entrada de la planta, así la salida de la planta y , se considera como la suma de las dos salidas y_1 e y_2 , dadas de la respuesta al control u_1 y u_2 respectivamente. De otra manera, y_2 se obtiene por medio del corrimiento de tiempo en la escala de y_1 .

Se introduce la siguiente función auxiliar para calcular el LPRS. Si tenemos $L(\omega, \theta)$ que denota la salida de la planta lineal en el instante $t = \theta T$ (donde T es el periodo de la frecuencia ω) así, si una señal cuadrada periódica de amplitud c se aplica a la planta: $L(\omega, \theta) = y(t)/4c|_{t=2\pi\theta/\omega}$, donde $\theta \in [-1; +1]$, $\omega \in [0, \infty]$. Los valores positivos de θ corresponden al tiempo después del instante de la conmutación del relé, mientras que antes de la misma los valores son negativos. Si se compara esta fórmula con la de LPRS, se encuentra que: $\text{Im}J(\omega) = L(\omega, 0)$. Por análisis de series de Fourier a la salida de la planta se tiene la siguiente expresión para $L(\omega, \theta)$:

$$L(\omega, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \{ \text{sen}[(2k-1)2\pi\theta] \cdot \text{Re}W[(2k-1)\omega] + \text{cos}[(2k-1)2\pi\theta] \cdot \text{Im}W[(2k-1)\omega] \} \quad (2.65)$$

Con la fórmula de $L(\omega, \theta)$ disponible, se puede escribir fácilmente la ecuación para $\text{Im } J(\omega)$ de la planta equivalente:

$$\text{Im}J(\omega) = L(\omega, 0) + \frac{c_2}{c_1} L(\omega, \theta) \quad (2.66)$$

en la fórmula (2.66), el valor del tiempo de corrimiento de θ entre la conmutación del primer y segundo relevador es desconocido y se encuentra de la siguiente ecuación:

$$\dot{\theta} = 0, \quad (2.67)$$

lo cual puede ser expresado a través de la función $L(\omega, \theta)$ como se ve:

$$c_1 L_1(\omega, -\theta) + c_2 L_1(\omega, 0) = 0 \quad (2.68)$$

En (2.68), L_1 es la función $L(\omega, \theta)$ para la función de transferencia de la fórmula (2.68), así $W_1(s) = sW(s)$. La metodología del análisis de los movimientos periódicos en un sistema con algoritmo *twisting* es como sigue: Para cada punto de frecuencia del LPRS, la ecuación (2.68) se resuelve para encontrar el tiempo de corrimiento (en partes o fracciones del periodo) entre las conmutaciones de los dos relevadores, donde la función $L(\omega, \theta)$ se calcula como en la ecuación (2.68). Después la parte imaginaria del LPRS se calcula mediante la ecuación (2.66). Con la parte imaginaria disponible, la frecuencia de las oscilaciones se encuentra según la ecuación (2.24) con $c = c_1$.

Aunque la parte real no está explícitamente utilizada en el análisis se presenta una técnica computacional para calcular la parte real del LPRS. Es interesante observar como el segundo relevador modifica la ubicación del LPRS en el plano complejo. Se supone que la función de transferencia de la planta no tiene integradores es decir $m = 0$

Análisis de esquemas de control por modos deslizantes de segundo orden en el dominio de la frecuencia

para la ecuación (2.64) que consta de dos series que convergen, en la que cada parte de la serie añade más precisión al calcular el LPRS. Por lo general, la convergencia a altas frecuencias (cercana a la frecuencia de la solución periódica) es muy rápida, e incluso el primer término proporciona una alta precisión. si se usan sólo los primeros términos de la serie esto es igual al método de FD. Considerando lo anterior es valido usar sólo el primer término de la ecuación (2.64) para calcular la parte real. Se debe señalar que la frecuencia de las oscilaciones se calcula exactamente con esta propuesta. Por lo tanto, la parte real del LPRS se puede calcular como sigue:

$$ReJ(\omega) \approx Re [W(j\omega)/(1 + j\omega \cdot N_2(A_2) \cdot W(j\omega))] \quad (2.69)$$

donde $N_2 = 4c_2/(\pi A_2)$, $A_2 = 4c_1\omega |W(j\omega)|/\pi$.

En un análisis cualitativo de la solución periódica para la ecuación (2.66) el segundo término en la suma representa un incremento del LPRS(en la frecuencia ω), causado por la introducción del segundo relevador. La señal de entrada al segundo relé es la derivada de la salida de la planta, el corrimiento de fase entre la conmutación de los dos relevadores es cercana a $\pi/2$, el signo de θ es positivo cuando la derivada de la señal de la salida de la planta adelanta a la salida misma, pero ambas a la salida y su derivada se invierten. A partir de la ecuación (2.65), se observa que a una frecuencia cercana a la frecuencia de las oscilaciones se cumple lo siguiente: $L(\omega, \theta) < 0$. Esto significa que el LPRS del sistema con el algoritmo *twisting* está localizado siempre debajo del LPRS correspondiente al sistema controlado con un relevador. Esto confirma totalmente la conclusión del análisis mediante FD: *La frecuencia periódica de la solución para el algoritmo twisting es siempre más alta que la frecuencia para un sistema controlado por modos deslizantes asintótico de segundo orden* [Anosov 1959, Tsytkin 1984] y [Shtessel *et al.* 2003]. Esto se muestra claramente en la figura 2.2, el recíproco negativo inverso de la FD del algoritmo *twisting* intercepta la gráfica de Nyquist en el tercer cuadrante. en cambio para un modo deslizante asintótico de segundo orden la intercepción es con el eje real donde la frecuencia es menor que el tercer cuadrante para un sistema

monotónico decreciente. Así, el efecto del segundo relé depende solo de la relación de c_2/c_1 .

De manera similar se muestra que la introducción de un segundo relé no cambia el cuadrante donde se localiza el segmento de altas frecuencias para el LPRS. En efecto, si se toma, por ejemplo, una planta de grado relativo tres, el segmento de alta frecuencia para el LPRS se sitúa en el segundo cuadrante, y tiene el eje imaginario como una asíntota [Boiko 2000]. Debido a esta razón para altas frecuencias la desigualdad $|Imj(\omega)| \gg |Rej(\omega)|$ se mantiene, y como resultado, $c_2L(\omega, \theta)/c_1$ (segundo término de la ecuación (2.66) tiene un valor pequeño que prácticamente no cambia el resultado de $Imj(\omega)$. Por lo tanto, *la introducción de un segundo relé no cambia el grado relativo de la planta*. Así, todas las conclusiones de el análisis mediante FD se mantienen y son confirmadas mediante el análisis por LPRS.

2.5 Ejemplo de análisis y comparación de resultados

Para los ejemplos se considera el análisis de un sistema con controlador de segundo orden asintótico de modos deslizantes, el cual sirve como referencia para los otros tipos de control. Con la planta dada por: $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + u_a$, la salida $y = x_1 + x_2$ y el actuador como: $\dot{u}_a + u_a = u$. Se analiza el movimiento periódico en un sistema controlador por un relevado de segundo orden asintótico por modos deslizantes y por el algoritmo *twisting*. Se calcula y gráfica el LPRS de ambos. Se calcula el LPRS en el rango de frecuencias de $[0; \infty)$ como se ve en la figura 2.8. El actuador más la planta tiene grado relativo tres. Por esta razón el segmento de alta frecuencia está localizado en el segundo cuadrante. En la figura 2.9, se muestra claramente el efecto. La frecuencia del proceso periódico se encuentra como solución a la ecuación (2.24), usando LPRS es $\omega=9.357s^{-1}$.

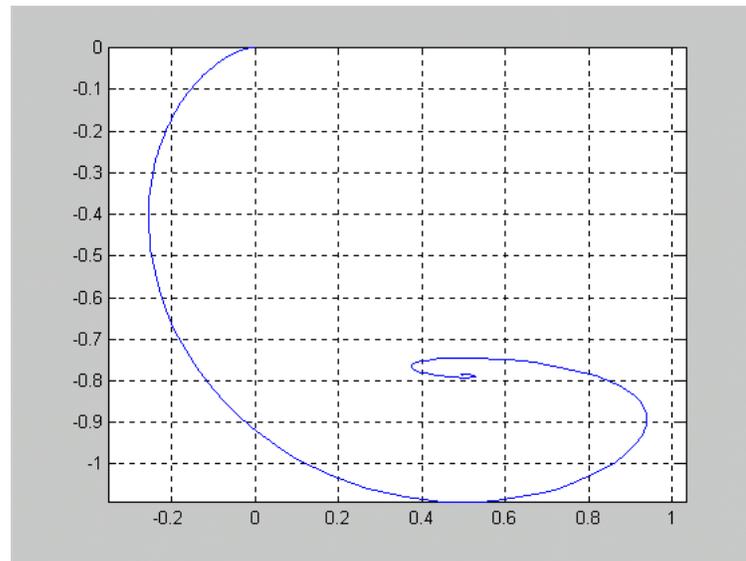


Figura 2.8: LPRS para actuador-planta $\omega \in [0; \infty)$

Ahora el análisis para el algoritmo *twisting*. Se suponen las amplitudes del relevador como $c_1 = 0,8$ y $c_2 = 0,6$ (así la amplitud de la frecuencia fundamental de la señal de control es unitaria, esto es importante para hacer las comparaciones de amplitud de las oscilaciones). La gráfica de LPRS del actuador-planta equivalente (junto con el relevador) calculado con las ecuaciones 2.66 para la parte imaginaria y para la parte real la ecuación 2.69 evaluadas en un rango de $[50s^{-1}; \infty)$, como se muestra en la figura 2.11.

Análisis de esquemas de control por modos deslizantes de segundo orden en el dominio de la frecuencia

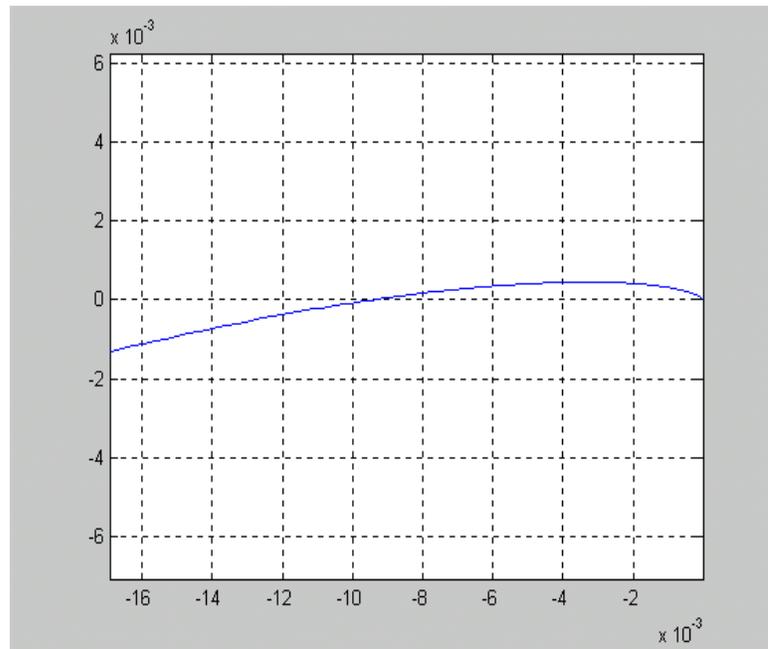


Figura 2.9: LPRS para actuador-planta $\omega \in [7s^{-1} ; \infty)$

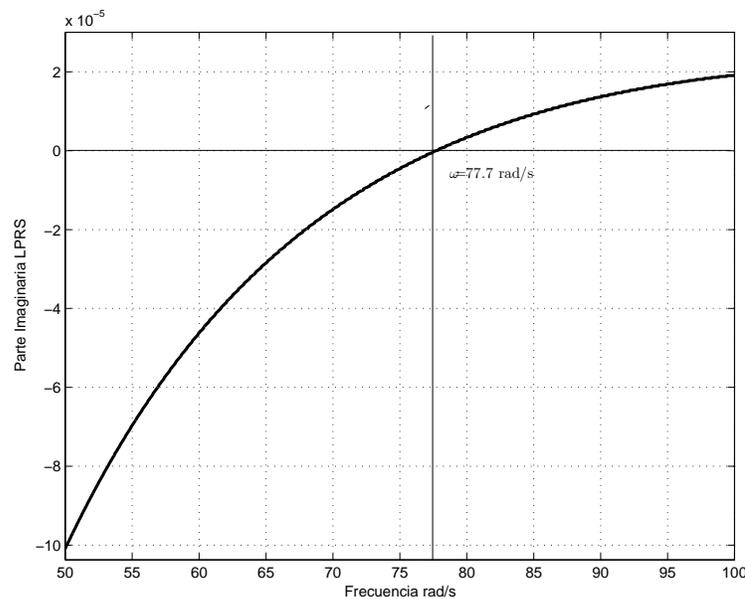


Figura 2.10: Parte imaginaria del LPRS para el sistema actuador-planta $\omega \in [50; 100]$

La frecuencia encontrada mediante LPRS para un sistema de grado relativo uno maars el actuador de grado relativo uno, es de $\omega=77.70 s^{-1}$, como se muestra en la

figura 2.10.

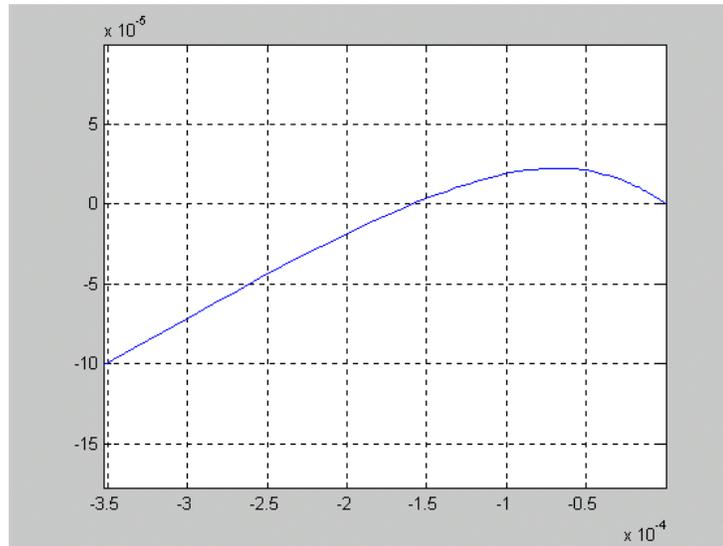


Figura 2.11: LPRS equivalente del actuador-planta para $\omega \in [50s^{-1}; \infty)$

En la tabla 2.1 se comparan las amplitudes y frecuencias que se presentan para los diferentes esquemas de control por modos deslizantes. En esta tabla se muestra como una planta de segundo grado relativo controlada por cualquiera de los esquemas de control se ve como las frecuencias de las oscilaciones de reducen al incrementar el grado relativo del sistema y las amplitudes de las mismas se incrementan. También se observa como el algoritmo *twisting* utilizado como filtro presenta una disminución considerable de la amplitud de las oscilaciones y las frecuencias de esta oscilación disminuyen de forma prácticamente imperceptible. La frecuencia obtenida mediante los análisis utilizando FD y LPRS muestran resultados con diferencias dentro del rango de error que tiene la técnica de FD ya que los resultados obtenidos mediante LPRS son los valores exactos que el sistema presenta. Para el controlador por MD con un actuador de primer grado relativo se observa como el análisis mediante FD y LPRS presenta oscilaciones de valor infinito y una amplitud de cero, cuando el grado relativo del actuador se incrementa para este sistema, las frecuencia es finita.

2.6 Conclusiones

Para el algoritmo *twisting* analizado con funciones descriptivas y LPRS, se prueba que **si** la suma de los grados relativos de la planta más el actuador es superior a un grado relativo de dos, entonces puede existir un movimiento periódico, incluso cuando el control es mediante el algoritmo *twisting*. Se propuso una forma para determinar los parámetros del movimiento periódico en un controlador *twisting*, por medio de la modificación en el método LPRS. Con estos métodos se muestra que la frecuencia de la solución periódica para el algoritmo *twisting* es superior y la amplitud es menor que para sistemas por control relevado de segundo orden asintótico por modos deslizantes.

Sistemas de grado relativo dos con actuadores				
	Controlador <i>twisting</i>	Controlador <i>twisting</i>	Controlador relevado asintótico por modos deslizantes de segundo orden	Controlador relevado asintótico por modos deslizantes de segundo orden
Planta $W_p(s)$	$W_p(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$	$W_p(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$	$W_p(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$	$W_p(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$
Actuador $W_a(s)$	$W_a(s) = \frac{1}{0,01s+1}$	$W_a(s) = \frac{1}{0,0001s^2+0,01s+1}$	$W_a(s) = \frac{1}{0,01s+1}$	$W_a(s) = \frac{1}{0,0001s^2+0,01s+1}$
W	$W = W_a W_p$	$W = W_a W_p$	$W = W_a W_p$	$W = W_a W_p$
(análisis por FD) Ω	77,05	54,64	10,05	10,00
(análisis por LPRS) Ω	77,70	54,53	9,36	9,12
(simulaciones) Ω	77,68	54,53	9,36	9,13
Amplitud de las oscilaciones a la salida de la planta	1,67e-4	4,83e-4	0,0146	0,0155
Sistemas de grado relativo uno con actuadores				
	<i>Twisting</i> como filtro	<i>Twisting</i> como filtro	controlador por MD	controlador por MD
Planta $W_p(s)$	$W_p(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$	$W_p(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$	$W_p(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$	$W_p(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$
Actuador $W_a(s)$	$W_a(s) = \frac{1}{0,01s+1}$	$W_a(s) = \frac{1}{0,0001s^2+0,01s+1}$	$W_a(s) = \frac{1}{0,01s+1}$	$W_a(s) = \frac{1}{0,0001s^2+0,01s+1}$
$W_\sigma(s)$	$W_\sigma(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}$	$W_\sigma(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}$	$W_\sigma(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}$	$W_\sigma(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}$
W	$W_l = \frac{W_\sigma W_a}{s}$	$W_l = \frac{W_\sigma W_a}{s}$	$W_l = W_\sigma W_a$	$W_l = W_\sigma W_a$
(análisis por FD) Ω	75,00	53,52	<i>infinito</i>	100,00
(análisis por LPRS) Ω	75,62	53,44	<i>infinito</i>	99,27
(simulaciones) Ω	75,51	53,41		99,26
Amplitud de las oscilaciones a la salida de la planta	2,53e-6	9,48e-6	0	1,30e-4

Tabla 2.1: Análisis de las características de oscilación y frecuencia con algoritmos de control por SOSM

Capítulo 3

Análisis entrada-salida en el dominio de la frecuencia de controladores por modos deslizantes de segundo orden

Se analiza la respuesta de sistemas controlados por modos deslizantes de segundo orden (SOSM) a una excitación armónica externa en el dominio de la frecuencia. El análisis se hace mediante el uso del concepto de **ganancia equivalente** de una función no lineal. Se utiliza esta como un modelo de propagación de los valores promedio de las señales a través de los elementos no lineales del sistema. Se analizan dos algoritmos SOSM: el *twisting* y el *super twisting*. Los resultados se presentan en el formato convencional de respuesta a la frecuencia en amplitud y fase.

3.1 Introducción

El *chattering* es generalmente un deterioro indeseable del funcionamiento del sistema en comparación con el modos deslizante ideal [Tsytkin 1984], [Utkin 1992]. Sin embargo, este deterioro no sólo se manifiesta por la presencia de dinámicas parásitas. En sistemas de control por modos deslizantes de primer orden (SM), este deterioro del funcionamiento puede no ser autónomo, también puede deberse a las entradas de referencia externas [Boiko 2005].

Análisis entrada-salida en el dominio de la frecuencia de controladores por modos deslizantes de segundo orden

Los algoritmos de modos deslizantes de segundo orden (SOSM) fueron originalmente diseñados como una herramienta de atenuación del *chattering* [Emelyanov *et al.* 1986], [Levant 1993]. Sin embargo, en [Boiko *et al.* 2004], [Boiko y Fridman 2005] se demostró que los sistemas controlados por algoritmos de SOSM exhiben *chattering* en la presencia de dinámicas parásitas. Puesto que cada sistema real posee siempre dinámicas parásitas, el fenómeno de *chattering* es una característica inevitable en sistemas reales de control con SOSM [Boiko *et al.* 2007], [Boiko *et al.* 2007a] y [Boiko y Fridman 2005].

El análisis del funcionamiento en lazo cerrado de los sistemas controlados por SOSM, con respecto al seguimiento de entradas externas, es también interesante. En modo autónomo, un sistema con SOSM exhibe movimientos periódicos rápidos o *chattering* [Boiko *et al.* 2004], [Boiko y Fridman 2005].

Si una entrada relativamente lenta se aplica al sistema, éste puede exhibir un modo que sería la combinación del *chattering* y del efecto de la entrada externa (propagación), tal que la salida del controlador por SOSM puede ser una señal modulada de ancho de pulso y la salida del sistema sería una combinación (suma), un poco distorsionada (retrasada y atenuada) de la entrada y de la componente de *chattering* [Boiko 2000]. El objetivo es determinar esas distorsiones de propagación de la señal de entrada.

Particularmente, es interesante determinar la respuesta del sistema de control por SOSM a las señales armónicas de diversas frecuencias y amplitudes.

El análisis de las características entrada-salida del sistema de SOSM se puede hacer vía linealización, debido al “efecto de suavizado” de las señales en las no linealidades del algoritmo [Boiko 1999], [Boiko 2000] que hace que las no linealidades tengan una respuesta similar a un sistema lineal para entradas comparativamente lentas de entrada. Para el análisis de las características entrada-salida del sistema con respecto a entradas externas, las funciones no lineales se substituyen con **ganancias equivalentes** que describen la propagación de los valores promedio en esas funciones no lineales [Boiko 2005b], [Boiko 1999], [Boiko 2000]. Los algoritmos por SOSM: *twisting* y *super twisting* se

analizan a continuación.

3.2 Propagación de entradas lentas a través de un sistema con algoritmo *twisting*

Se describe la propagación de señales promediada a través de las funciones no lineales usando el concepto de ganancia equivalente que se detalla en [Atherton 1975] y [Gelb y Vander Velde 1968]. Para el sistema representado por las ecuaciones (2.1) y (2.2) representado en la figura 2.1 si se considera que se tiene una señal armónica asimétrica a la entrada del primer relevador de la forma

$$\sigma_1(t) = \sigma_1 + A_1 \cdot \text{sen}(\Omega t). \quad (3.1)$$

Se define la ganancia equivalente como la derivada del promedio de la señal de salida de la no linealidad con respecto al promedio de la señal de entrada σ_1 .

$$k_{n1(2)} = \left. \frac{\partial u_{10(20)}}{\partial \sigma_{10(20)}} \right|_{\sigma_{10(20)}=0} \quad (3.2)$$

donde u_{10} y u_{20} son las salidas promedio de la primera y segunda no linealidades respectivamente, σ_{10} y σ_{20} son las entradas promedio para estas no linealidades. Los valores promedio de σ_{10} se calculan como sigue:

$$\sigma_{10} = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma_1(t) dt = \sigma_1 \quad (3.3)$$

el cálculo de la señal promedio u_{10} es

$$u_{10} = \frac{1}{T} \int_0^T c_1 \text{sign}(\sigma_1(t)) dt \quad (3.4)$$

al sustituir se tiene

$$u_{10} = \frac{c_1}{T} \int_0^T \text{sign}(\sigma_1 + A_1 \cdot \text{sen}(\Omega t)) dt \quad (3.5)$$

se define el periodo $T = \frac{2\pi}{\Omega}$, el tiempo $t_0 = \frac{1}{\Omega} \text{asin}(\frac{-\sigma_1}{A})$ es donde la función $\sigma_1(t_0) = 0$, ahora se modifican los límites para mayor facilidad del análisis e integrando por partes

Análisis entrada-salida en el dominio de la frecuencia de controladores por modos deslizantes de segundo orden

la ecuación (3.5)

$$u_{10} = \frac{\Omega c_1}{2\pi} \left(\int_{\frac{1}{\Omega} \text{sen}^{-1}\left(\frac{-\sigma_1}{A}\right)}^{\frac{\pi}{\Omega} - \frac{1}{\Omega} \text{sen}^{-1}\left(\frac{-\sigma_1}{A}\right)} 1 dt - \int_{\frac{\pi}{\Omega} - \frac{1}{\Omega} \text{sen}^{-1}\left(\frac{-\sigma_1}{A}\right)}^{\frac{2\pi}{\Omega} + \frac{1}{\Omega} \text{sen}^{-1}\left(\frac{-\sigma_1}{A}\right)} 1 dt \right) \quad (3.6)$$

para σ_1 pequeño se tiene una función $u_{10}(\sigma_{10})$: promedio de u_1 como función de σ_1

$$u_{10} = \frac{2c_1}{\pi} \text{sen}^{-1} \frac{1}{A} \sigma_1 \quad (3.7)$$

Para el primer relevador la ganancia equivalente es como se presenta en [Atherton 1975] y [Gelb y Vander Velde 1968]:

$$k_{n1} = \left. \frac{\partial u_{10}}{\partial \sigma_{10}} \right|_{\sigma_{10}=0} = \left. \frac{\partial \frac{2c_1}{\pi} \text{sen}^{-1} \frac{1}{A} \sigma_1}{\partial \sigma_1} \right|_{\sigma_{10}=0} \quad (3.8)$$

evaluando la derivada parcial con respecto a σ_1

$$k_{n1} = \left. \frac{2c_1}{\pi A_1 \left(1 - \frac{\sigma_{10}^2}{A_1^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \right|_{\sigma_{10}=0} \quad (3.9)$$

Así, la ganancia equivalente para el primer relé es

$$k_{n1} = \frac{2c_1}{\pi A_1} \quad (3.10)$$

Para el segundo relevador se supone también una entrada armónica asimétrica de amplitud $A_1\Omega$, esto debido a el efecto de la parte del diferenciador del algoritmo *twisting* que afecta al segundo relé.

$$\sigma_2(t) = \sigma_{20} + A_1\Omega \cdot \text{sen}(\Omega t). \quad (3.11)$$

y la salida promedio de u_2 se define como

$$u_{20} = \frac{1}{T} \int_0^T c_2 \text{sign}(\sigma_2(t)) dt \quad (3.12)$$

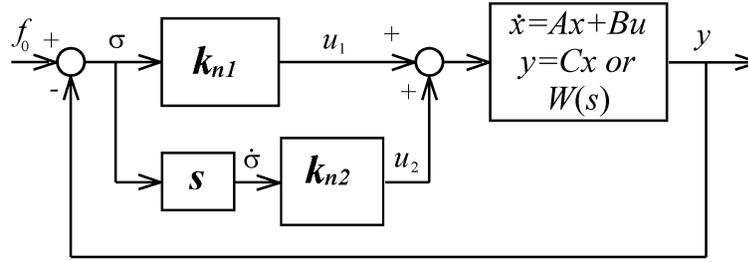


Figura 3.1: Diagrama de bloque del sistema con el algoritmo *twisting* linealizado

el tiempo $t_0 = \frac{1}{\Omega} \text{sen}^{-1}\left(\frac{-\sigma_2}{\Omega A_1}\right)$ que es donde la función $\sigma_2(t_0) = 0$, luego expandiendo para integrar por partes

$$u_{10} = \frac{\Omega c_2}{2\pi} \left(\int_{\frac{1}{\Omega} \text{sen}^{-1}\left(\frac{-\sigma_2}{\Omega A_1}\right)}^{\frac{\pi}{\Omega} - \frac{1}{\Omega} \text{sen}^{-1}\left(\frac{-\sigma_2}{\Omega A_1}\right)} 1 dt - \int_{\frac{\pi}{\Omega} - \frac{1}{\Omega} \text{sen}^{-1}\left(\frac{-\sigma_2}{\Omega A_1}\right)}^{\frac{2\pi}{\Omega} + \frac{1}{\Omega} \text{sen}^{-1}\left(\frac{-\sigma_2}{\Omega A_1}\right)} 1 dt \right) \quad (3.13)$$

da como resultado

$$u_{20} = \frac{2c_2}{\pi} \text{sen}^{-1}\left(\frac{-\sigma_2}{\Omega A_1}\right) \quad (3.14)$$

La ganancia equivalente para el segundo relé se define como sigue:

$$k_{n2} = \left. \frac{\partial u_{20}}{\partial \sigma_{20}} \right|_{\sigma_{20}=0} = \frac{2c_2}{\pi A_1 \Omega} \quad (3.15)$$

Con esas ganancias disponibles, se puede ahora construir el modelo linealizado de los movimientos promedio en el sistema con el algoritmo *twisting* como se muestra en la figura 3.1. La función de transferencia del sistema en lazo cerrado es:

$$W_{f_0-y}(s) = \frac{(k_{n1} + s k_{n2}) C (sI - A)^{-1} B}{1 + (k_{n1} + s k_{n2}) C (sI - A)^{-1} B} \quad (3.16)$$

Esta función de transferencia, proporciona todas las características de la respuesta en frecuencia en lazo cerrado. Los ejemplos de algunas respuestas de la magnitud a la frecuencia se muestran en los diagramas de Bode en las figuras 3.2, 3.3, 3.4 y 3.5. Las amplitudes de los relevadores se seleccionaron como $c_1 = 0,8$ y $c_2 = 0,6$.

Análisis entrada-salida en el dominio de la frecuencia de controladores por modos deslizantes de segundo orden

Como ejemplo se determina un par de funciones de transferencia primero la función de transferencia para la figura 3.2 donde la planta es de grado relativo dos $W_p(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$ y actuador con grado relativo uno $W_a(s) = \frac{1}{0,01s+1}$, controlado por el algoritmo *twisting*, queda como sigue

$$W_{TW1f_0-y}(s) = \frac{k_{n1} + k_{n2}s}{k_{n1} + k_{n2}s + (s + s^2 + 1)(0,01s + 1)} \quad (3.17)$$

y la función de transferencia de la figura 3.5 para el caso de la planta con grado relativo uno $W_p(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}$ y actuador con grado relativo dos $W_a(s) = \frac{1}{0,0001s^2+0,01s+1}$, controlado por el algoritmo *twisting* como filtro, es:

$$W_{TW2INf_0-y}(s) = \frac{k + qs}{k + qs + (s + s^2 + s^3)(0,01s + 0,0001s^2 + 1)} \quad (3.18)$$

En la tabla 3.1 se muestra el análisis de los parámetros de las oscilaciones necesarias para calcular las ganancias equivalentes y determinar la respuesta del sistema en el dominio de la frecuencia.

El análisis de estas características muestra que en ciertas frecuencias, el sistema controlado por el algoritmo *twisting* tiene un buen desempeño en lazo cerrado (calidad en el seguimiento de señales externas). Sin embargo, en frecuencias altas, la calidad se deteriora y mientras más alta es la frecuencia más baja es la calidad del seguimiento. Los análisis entrada salida para el algoritmo *twisting*, en el diagrama de Bode la magnitud es mayor en las figuras 3.2 y 3.3, que en las figuras 3.4 y 3.5 donde el algoritmo *twisting* como filtro es utilizado, la desventaja de el uso de este último es el ancho de banda se ve reducido en mayor grado.

Una de las aportaciones de este trabajo, es la posibilidad de determinar el rango de frecuencias donde los algoritmos de control funcionan y así, evitar errores de seguimiento cuando la amplitud del diagrama de Bode se incrementa, o peor aún evitar que el controlador funcione en frecuencias donde es posible encontrar un pico de resonancia o atenuación excesiva de la señal de referencia, como lo muestran los diagramas de bode a altas frecuencias.

Análisis entrada-salida en el dominio de la frecuencia de controladores por modos deslizantes de segundo orden

	Controlador Twisting	Controlador Twisting
Planta $W_p(s)$	$W_p(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$	$W_p(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$
Actuador $W_a(s)$	$W_a(s) = \frac{1}{0,01s+1}$	$W_a(s) = \frac{1}{0,0001s^2+0,01s+1}$
W	$W = W_a W_p$	$W = W_a W_p$
Análisis por FD Ω	77,05	54,64
Análisis por LPRS Ω	77,70	54,53
Simulaciones Ω	77,68	54,53
Amplitude a_y	$1,67e-4$	$4,83e-4$
Ganancia equivalente k_{n1}	3049,67	1054,44
Ganancia equivalente k_{n2}	29,44	14,50
	Twisting como filtro	Twisting como filtro
Planta $W_p(s)$	$W_p(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$	$W_p(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$
Actuador $W_a(s)$	$W_a(s) = \frac{1}{0,01s+1}$	$W_a(s) = \frac{1}{0,0001s^2+0,01s+1}$
$W_\sigma(s)$	$W_\sigma(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}$	$W_\sigma(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}$
W_l	$W_l = \frac{W_\sigma W_a}{s}$	$W_l = \frac{W_\sigma W_a}{s}$
Análisis por FD Ω	75,00	53,52
Análisis por LPRS Ω	75,62	53,44
Simulaciones Ω	75,51	53,41
Amplitude a_y	$2,53e-6$	$9,48e-6$
Ganancia equivalente k_{n1}	20130, 26	53723,18
Ganancia equivalente k_{n2}	1999,43	754,39

Tabla 3.1: Ganancias equivalentes para el sistema controlado por el algoritmo *twisting* y *twisting* como filtro

Estos picos generalmente se encuentran cerca de los valores de la frecuencia de auto-oscilación del algoritmo. Para cuestiones de diseño es necesario considerar que

Análisis entrada-salida en el dominio de la frecuencia de controladores por modos deslizantes de segundo orden

la ganancia equivalente, la amplitud del relé y las oscilaciones auto-generadas en el sistema son proporcionales. Así, la selección apropiada de los valores de amplitud de los relevadores determina el funcionamiento del controlador. El uso del algoritmo *twisting* como filtro, tiene la ventaja de que la magnitud de los movimientos periódicos son mucho menores que los generados en el algoritmo *twisting*. El inconveniente de utilizar este algoritmo, es el ancho de banda, que es en las frecuencias donde el controlador funciona adecuadamente antes de empezar a perder calidad en el seguimiento de la señal. En el algoritmo *twisting* como filtro el ancho de banda disminuye mas cuando se tiene un actuador de grado relativo dos en comparación a cuando el grado relativo del actuador es uno como se muestra en 3.4 y 3.5. Las dinámicas del actuador en este controlador afectan en mayor medida.

Para el caso del algoritmo *twisting* el efecto del actuador ya sea de grado relativo uno o dos no afecta tanto el ancho de banda aunque la magnitud de la señal de salida es mucho mayor como se ve en las gráficas de Bode 3.2 y 3.3.

La linealización de estos algoritmos y su diagrama de Bode son confiables solo hasta el punto donde la magnitud empieza a incrementarse. Para frecuencias superiores a la frecuencias de auto oscilación del sistema, el seguimiento a una referencia de entrada se hace imposible.

Análisis entrada-salida en el dominio de la frecuencia de controladores por modos deslizantes de segundo orden

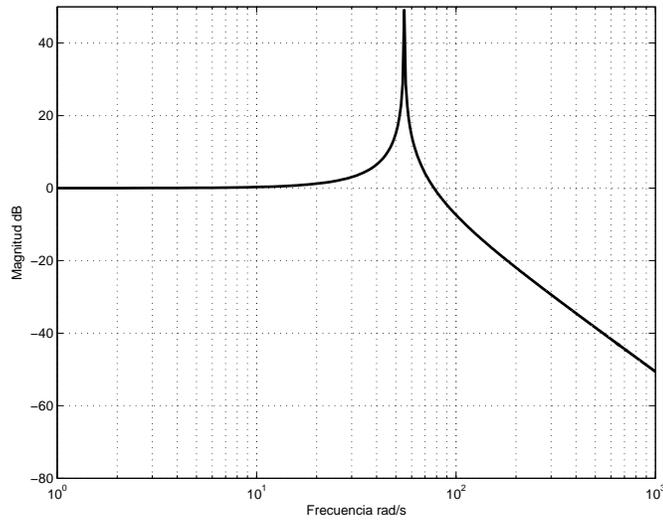


Figura 3.2: Respuesta a la frecuencia en lazo cerrado para el caso de la planta con grado relativo dos $W_p(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$ y actuador con grado relativo uno $W_a(s) = \frac{1}{0,01s+1}$, controlado por el algoritmo *twisting*.

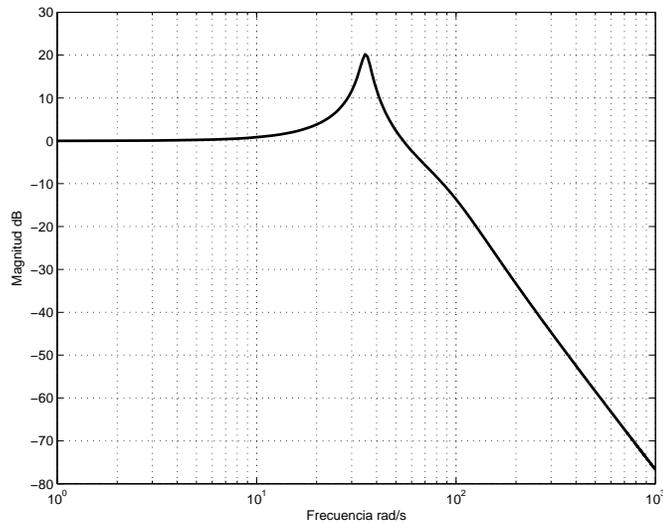


Figura 3.3: Respuesta a la frecuencia en lazo cerrado para el caso de la planta con grado relativo dos $W_p(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$ y actuador con grado relativo dos $W_a(s) = \frac{1}{0,0001s^2+0,01s+1}$, controlado por el algoritmo *twisting*.

Análisis entrada-salida en el dominio de la frecuencia de controladores por modos deslizantes de segundo orden

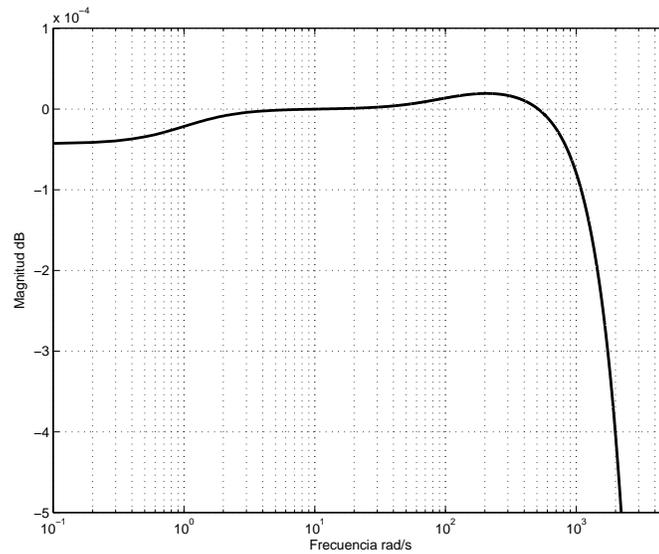


Figura 3.4: Respuesta a la frecuencia en lazo cerrado para el caso de la planta con grado relativo uno $W_p(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}$ y actuador con grado relativo uno $W_a(s) = \frac{1}{0,01s+1}$, controlado por el algoritmo *twisting* como filtro.

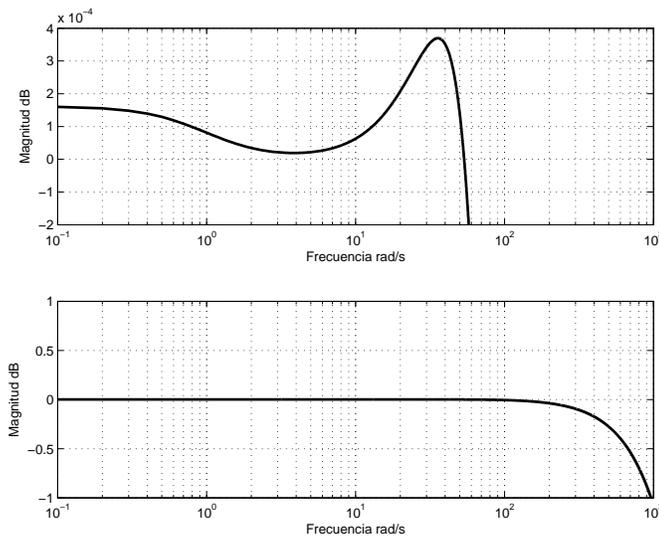


Figura 3.5: Respuesta a la frecuencia en lazo cerrado para el caso de la planta con grado relativo uno $W_p(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}$ y actuador con grado relativo dos $W_a(s) = \frac{1}{0,0001s^2+0,01s+1}$, controlado por el algoritmo *twisting* como filtro.

3.3 Análisis por medio de funciones descriptivas del algoritmo *super twisting* [Boiko y Fridman 2005]

El algoritmo *super-twisting* es uno de los más populares entre los algoritmos de modos deslizantes de segundo orden y se utiliza en plantas con grado relativo uno. El control u para este algoritmo está dado como la suma de dos componentes [Levant 1993]:

$$u = u_1 + u_2,$$

$$\dot{u}_1 = -\gamma \operatorname{sign}(\sigma) \quad (3.19)$$

$$u_2 = \begin{cases} -\lambda |s_0|^\rho \operatorname{sign}(\sigma), & \text{si } |\sigma| > s_0, \\ -\lambda |\sigma|^\rho \operatorname{sign}(\sigma), & \text{si } |\sigma| \leq s_0, \end{cases}$$

donde γ , ρ y s_0 son parámetros de diseño, $0 \leq \rho < 0,5$, [Fridman y Levant 2002]. Para un valor arbitrario de la potencia de ρ en (3.19) y la amplitud de a_y en el intervalo $a_y \leq s_0$, la expresión de la FD se utiliza para determinar el valor de la amplitud de a_y . Así, la FD de esta función no lineal está dada en [Boiko y Fridman 2005] de la siguiente manera:

$$N_2 = \frac{2\lambda a_y^{\rho-1}}{\pi} \int_0^\pi (\operatorname{sen}\psi)^{\rho+1} d\psi = \frac{2\lambda a_y^{\rho-1}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{\rho}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{\rho}{2} + 1,5)}, \quad 0 < \rho < 0,5. \quad (3.20)$$

donde a_y es la amplitud de la variable σ (de y), $a_y \leq s_0$ que se considera el rango más importante de valores para la amplitud en el análisis en estado estable) y Γ es la función gamma

$$\Gamma(x_G) = \int_0^\infty t^{x_G-1} e^{-t} dt \quad (3.21)$$

Con la no linealidad de la raíz cuadrada ($\rho = 0,5$) se calcula la FD, obteniéndose:

$$N_2 = \frac{2\lambda}{\pi a_y} \int_0^\pi \sqrt{a_y \operatorname{sen}\psi} \operatorname{sen}\psi d\psi =$$

$$= \frac{2\lambda}{\sqrt{\pi a_y}} \frac{\Gamma(1,25)}{\Gamma(1,75)} \approx \frac{1,1128\lambda}{\sqrt{a_y}}. \quad (3.22)$$

Análisis entrada-salida en el dominio de la frecuencia de controladores por modos deslizantes de segundo orden

La FD del primer componente del algoritmo *super-twisting* se define en [Atherton 1975] como:

$$N_1 = \frac{4\gamma}{\pi a_y} \frac{1}{j\omega}, \quad (3.23)$$

que es el resultado de la conexión en cascada de la FD del relevador ideal $\frac{4\gamma}{\pi a_y}$ y la función de transferencia del integrador $1/s$ (para la respuesta en frecuencia la variable de Laplace s es reemplazada por $j\omega$). Tomando en cuenta ambos componentes del control, la FD del algoritmo *super-twisting* se escribe de la siguiente forma:

$$N(a_y, \omega) = N_1 + N_2 = \frac{4\gamma}{\pi a_y} \frac{1}{j\omega} + \frac{1,1128\lambda}{\sqrt{a_y}}. \quad (3.24)$$

Los parámetros de Ω y a_y necesarios para determinar la ganancia equivalente de las no linealidades del algoritmo *super twisting* se encuentran mediante la solución de la ecuación de balance armónico (3.25),

$$W(j\Omega) = -\frac{1}{N(a_y, \Omega)}, \quad (3.25)$$

donde la FD, N está dada por (3.24). El recíproco negativo de la FD está dado por la siguiente expresión:

$$-\frac{1}{N(a_y, \omega)} = \frac{1}{1,1128 \frac{\lambda}{\sqrt{a_y}} + \frac{4\gamma}{\pi a_y} \frac{1}{j\omega}} = -\frac{0,8986 \frac{\sqrt{a_y}}{\lambda} + j1,1329 \frac{\gamma}{\lambda^2} \frac{1}{\omega}}{1 + 1,3092 \frac{\gamma^2}{\lambda^2} \frac{1}{a_y \omega^2}}. \quad (3.26)$$

La función $-1/N(a_y, \omega)$ es una función de dos variables, la amplitud y la frecuencia; está se representa como una familia de curvas que dependen de la amplitud y de la frecuencia. El rango de frecuencias de interés, se encuentra debajo de la frecuencia de la intersección de la traza de Nyquist y el eje real, es decir en el tercer cuadrante de la gráfica de Nyquist. Las gráficas de la función $-1/N(a_y, \omega)$ se presentan en la figura 3.6, Las gráficas 1, 2, 3 y 4 corresponden a cuatro diferentes frecuencias con la siguiente relación: $\omega_1 > \omega_2 > \omega_3 > \omega_4$. Cada una de esas gráficas representa la dependencia de la FD con respecto al valor de la amplitud.

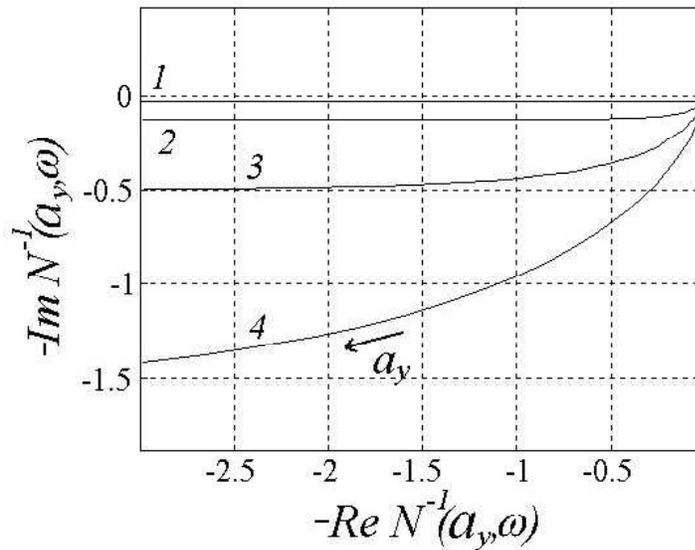


Figura 3.6: Gráficas de la función $-1/N$,

La función $-N^{-1}(a_y, \omega)$ (donde ω es constante) tiene una asíntota cuando $a_y \rightarrow \infty$, que es una línea horizontal ubicada en $-j1.1329 \gamma/(\lambda^2 \omega)$. Es fácil mostrar también que:

$$\lim_{\substack{a_y \rightarrow 0 \\ \omega = \text{const}}} \arg(-N^{-1}(a_y, \omega)) = -\pi/2.$$

3.3.1 Existencia de la solución periódica

La solución de la ecuación de balance armónico (3.25) puede hacerse exclusivamente aplicando diferentes técnicas; sin embargo, la ecuación compleja (3.25) con dos incógnitas, a_y y Ω puede reducirse a una ecuación real, donde se tiene solamente la incógnita Ω , de la siguiente manera: la ecuación (3.25) se escribe en la forma $N(a_y, \Omega) = -W^{-1}(j\Omega)$, donde $N(a_y, \Omega)$ está dada por la ecuación (3.24):

$$\frac{4\gamma}{\pi a_y} \frac{1}{j\Omega} + 1,1128 \frac{\lambda}{\sqrt{a_y}} = -W^{-1}(j\Omega)$$

Análisis entrada-salida en el dominio de la frecuencia de controladores por modos deslizantes de segundo orden

considerando la parte real de ambos lados de la ecuación se obtiene:

$$\frac{1,1128\lambda}{\sqrt{a_y}} = -Re\{W^{-1}(j\Omega)\}$$

Se despeja a_y de la ecuación anterior y se sustituye en la ecuación que se obtiene al igualar las partes imaginarias de la ecuación compleja, finalmente se llega a una ecuación con solamente la incógnita Ω :

$$\Psi(\Omega) = \frac{4\gamma}{\pi\Omega} \frac{1}{ImW^{-1}(j\Omega)} - \left(\frac{1,1128 \lambda}{ReW^{-1}(j\Omega)} \right)^2 = 0. \quad (3.27)$$

Una vez resuelta la ecuación (3.27), la amplitud a_y puede calcularse como sigue:

$$a_y = \frac{4\gamma}{\pi\Omega} \frac{1}{ImW^{-1}(j\Omega)}. \quad (3.28)$$

Por lo tanto, si existe un movimiento periódico, sus parámetros pueden obtenerse al resolver la ecuación (3.27), para la frecuencia y al sustituir ese dato en la ecuación (3.28), se obtiene la amplitud.

La existencia de la solución periódica puede probarse a través de la ecuación (3.27).

Proposición 1. Si el grado relativo de la planta es dos o mayor y la planta no tiene polos dobles en el origen, existe entonces al menos una intersección de la traza de Nyquist de la planta con el recíproco negativo de la función descriptiva del algoritmo *super-twisting*.

Prueba: Para empezar se prueba la proposición 1 para una planta con grado relativo tres o mayor se deduce de la expresión de la FD de la ecuación (3.24), que la solución periódica se encuentra siempre dentro del rango de frecuencias que corresponden a una fase característica de la planta entre $-\pi/2$ y $-\pi$ (véase la figura 3.6). Sea la frecuencia Ω_1 en la que la fase característica de la planta es $-\pi/2$ (se asume que existe solo una frecuencia con dicha característica), entonces el $\arg W(j\Omega_1) = -\pi/2$. Considerando $J(\omega)$ la función de transferencia de la planta con un integrador (tiene un polo en cero). De manera similar, sea la frecuencia Ω_2 la frecuencia en la cual la fase característica de la planta es el $\arg W(j\Omega_2) = -\pi$. Ambas frecuencias son finitas (excepto en el caso de

Análisis entrada-salida en el dominio de la frecuencia de controladores por modos deslizantes de segundo orden

una planta con un integrador para la cual Ω_2 no está definida). Si buscamos los límites de la función $\Psi(\omega)$ dada en 3.27, resulta en $\Psi(\Omega_1+) = -\infty$ y $\Psi(\Omega_2-) = \infty$, observando que los signos son diferentes. La función $\Psi(\omega)$ es continua dentro del rango $\omega \in (\Omega_1; \Omega_2)$, esto se deduce de (3.27). Por lo tanto, dentro del rango especificado, existe al menos una solución de la ecuación (3.27).

Considérese ahora que el grado relativo de la planta es dos, en este caso podemos definir la frecuencia Ω_1 en la misma manera que en el caso anterior, pero la frecuencia Ω_2 se hace infinita. Si escribimos una representación asintótica de la función de transferencia de la planta para entradas de alta frecuencia en la forma polinomial:

$$W(s) \approx \frac{1}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

entonces, se sustituye s por $j\omega$ tenemos que $W^{-1}(j\omega) \approx -a_2 \omega^2 + a_0 + ja_1 \omega$ es fácil observar que para valores suficientemente grandes de ω :

$$\Psi(\omega) = \frac{4\gamma}{\pi} \frac{1}{a_1 \omega^2} - \frac{1,1128^2 \lambda^2}{(a_0 - a_2 \omega^2)^2} > 0.$$

Así, entre Ω_1 y Ω_2 existe siempre una cierta frecuencia Ω , que proporciona una solución a la ecuación 3.27. Con esto se completa la prueba.

3.4 Propagación de señales lentas a través de un sistema con el algoritmo *super twisting*

Se describe la propagación de la señal promedio a través de las funciones no lineales del algoritmo super twisting de la misma forma que con el *algoritmo twisting*, usando el concepto de ganancia equivalente [Gelb y Vander Velde 1968], [Hsu y Meyer 1968], [Atherton 1975], [Boiko 1999] y [Boiko 2000]. Se supone que la entrada al controlador es una señal armónica asimétrica:

$$\sigma(t) = \sigma_0 + a_y \cdot \text{sen}(\omega t). \quad (3.29)$$

La ganancia equivalente k_n para la primera no linealidad (el relé) del algoritmo twisting definido en la ecuación 3.19 es:

$$k_{n1} = \left. \frac{\partial u_{10}}{\partial \sigma_0} \right|_{\sigma_0=0} = \frac{2\gamma}{\pi a_y}, \quad (3.30)$$

donde γ es la amplitud a la salida del relevador. La ganancia, k_{n2} se obtiene de acuerdo a la definición 3.31.

$$k_{n1(2)} = \left. \frac{\partial u_{10(20)}}{\partial \sigma_0} \right|_{\sigma_0=0} \quad (3.31)$$

La salida promedio de la segunda no linealidad del algoritmo twisting formada por una potencia fraccionaria es

$$u_{20} = \frac{1}{T} \int_0^T |\sigma(t)|^\rho \text{sign}(\sigma) dt, \quad (3.32)$$

si $\rho = 0,5$ (valor típico) entonces

$$v_{20} = \left. \frac{\lambda}{T} \int_0^T |(\sigma_0 + a_y \cdot \text{sen}(\omega t))|^{1/2} \text{sign}(\sigma_0 + a_y \cdot \text{sen}(\omega t)) dt \right|_{\sigma_0=0}, \quad (3.33)$$

al derivar (3.33) da como resultado lo siguiente:

$$k_{n2} = \left. \frac{\partial v_{20}}{\partial \sigma_0} \right|_{\sigma_0=0} = \lambda \frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{2\sqrt{a_y}\Gamma(\frac{3}{4})} \approx \lambda \frac{0,8346}{\sqrt{a_y}}. \quad (3.34)$$

Análisis entrada-salida en el dominio de la frecuencia de controladores por modos deslizantes de segundo orden

con ambas ganancias equivalente disponibles, fácilmente se puede construir un modelo linealizado de la dinámica del sistema. Las funciones no lineales del controlador *super twisting* son reemplazadas con su respectiva ganancia equivalente y el análisis subsecuente puede ser hecho como el de un sistema lineal. La función de transferencia entrada-salida para el sistema se define como

$$W_{f_0-y}(s) = \frac{(k_{n1}/s + k_{n2})C(sI - A)^{-1}B}{1 + (k_{n1}/s + k_{n2})C(sI - A)^{-1}B}. \quad (3.35)$$

La respuesta en frecuencia para el controlador *super twisting* para $\rho = 0,5$, $\gamma = 0,8$ y $\lambda = 0,6$ se muestra en las figuras 3.7 y 3.8.

En la tabla 3.2 se dan los valores de frecuencia, amplitud y las ganancias equivalentes que se calcularon para el algoritmo. Los valores de la ganancia equivalente en cada caso son diferentes para valores de ρ , γ y λ , esto muestra que la ganancia también depende de la planta y las dinámicas parásitas en el lazo de control.

	Controlador <i>super twisting</i>	
Planta $W_p(s)$	$\frac{s+1}{s^2+s+1}$	$\frac{s+1}{s^2+s+1}$
Actuador $W_a(s)$	$\frac{1}{0,01s+1}$	$\frac{1}{0,0001s^2+0,01s+1}$
$W(s)$	$W_p(s)W_a(s)$	$W_p(s)W_a(s)$
Amplitud a_y	$2,33 \times 10^{-4}$	$4,81 \times 10^{-4}$
Análisis DF frecuencia $\Omega(rad/s)$	66,16	55,18
Simulación frecuencia $\Omega(rad/s)$	64,96	54,24
Ganancia equivalente k_{n1}	2185,81	1058,88
Ganancia equivalente k_{n2}	32,80	22,83

Tabla 3.2: Resultados de simulaciones, análisis por FD y ganancias equivalente para sistemas controlados por el algoritmo *super twisting*

Análisis entrada-salida en el dominio de la frecuencia de controladores por modos deslizantes de segundo orden

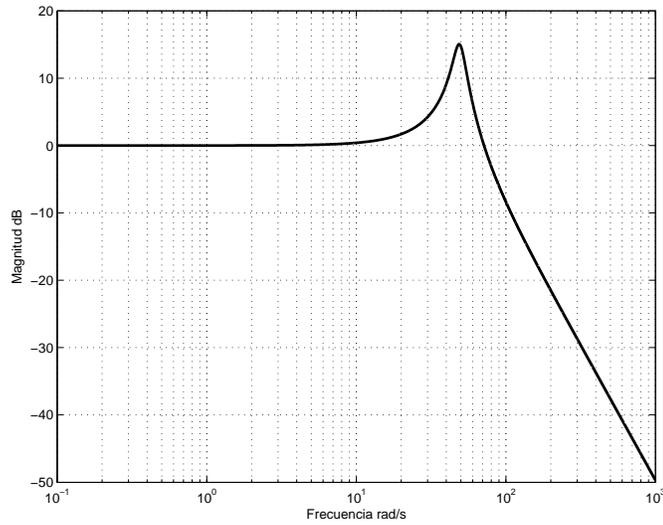


Figura 3.7: Respuesta a la frecuencia en lazo cerrado para el caso de la planta con grado relativo uno $W_p(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}$ y actuador de grado relativo uno $W_a(s) = \frac{1}{0,01s+1}$, controlado por el algoritmo *super twisting*.

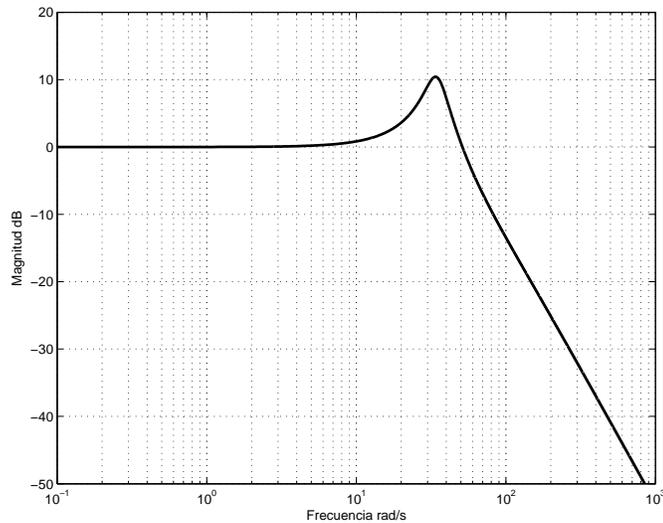


Figura 3.8: Respuesta a la frecuencia en lazo cerrado para el caso de la planta con grado relativo uno $W_p(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}$ y actuador de grado relativo dos $W_a(s) = \frac{1}{0,0001s^2+0,01s+1}$, controlado por el algoritmo *super twisting*.

3.5 Análisis en el dominio de la frecuencia de un diferenciador basado en el algoritmo *super twisting*

Se considera ahora un problema de diferenciación en tiempo real. La señal de entrada $f(t)$ debe ser una función continua diferenciable, localmente acotada y medible definida en $[0, \infty)$. Se aplica el algoritmo *super twisting* [Levant 1993], [Levant 1998] para mantener $f(t) - y = 0$. El control promedio $u_0(t)$ se deriva de $f(t)$ considerando que se selecciona la planta como un integrador. La dinámica principal es el integrador, y la dinámica parásita está en la función de transferencia $W(s)$ [Shtessel *et al.* 2000]. Por lo tanto, la dinámica de la planta (que incluye la dinámica principal y parásita) está dada por la siguiente función de transferencia: $W(s)/s$. Si se calcula la respuesta en frecuencia del diferenciador para $\gamma = 1,5$ y $\lambda = 1,1$. Según la ecuación (3.35), la función de transferencia del diferenciador linealizado (ver figura 3.9) (afectado por dinámica parásita $W(s)$). La función de transferencia entrada-salida del sistema se ve enseguida:

$$W_{f(t)-y}(s) = \frac{(k_{n1} + sk_{n2})sW(s)}{s^2 + (k_{n1} + sk_{n2})W(s)} \quad (3.36)$$

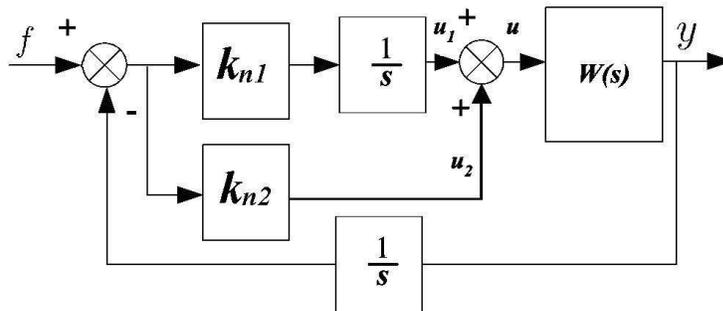


Figura 3.9: Modelo linealizado del diferenciador ($W(s) = 1$ caso ideal).

La respuesta en frecuencia del diferenciador (tomando en cuenta las dinámicas

Análisis entrada-salida en el dominio de la frecuencia de controladores por modos deslizantes de segundo orden

parásitas) se presenta en la figura 3.10. Como se observa a bajas frecuencias, el efecto de las dinámicas parásitas es pequeño y la respuesta en frecuencia del diferenciador coincide con la de un diferenciador ideal, a altas frecuencias el efecto de las dinámicas parásitas se manifiestan como una caída en la magnitud de la respuesta, lo que indica que el diferenciador tiene un ancho de banda limitado. El resultado de las simulaciones y el análisis mediante FD para el diferenciador basado en el algoritmo *super twisting* [Levant 1998], se muestran en la tabla 3.3.

$W(s)$	Simulación		Análisis por FD	
	$\frac{1}{0,01s+1}$	$\frac{1}{0,0001s^2+0,01s+1}$	$\frac{1}{0,01s+1}$	$\frac{1}{0,0001s^2+0,01s+1}$
Amplitud a_y	$2,45 \times 10^{-4}$	$7,84 \times 10^{-4}$	$2,43 \times 10^{-4}$	$7,75 \times 10^{-4}$
Frecuencia $\Omega(rad/s)$	87,69	65,80	88,58	66,31
Ganancia equivalente k_{n1}	3897,7	1218,0	3929.8	1232,2
Ganancia equivalente k_{n2}	58,65	32,79	58.89	32.98

Tabla 3.3: Resultados de simulaciones y análisis por FD para el diferenciador basado en el algoritmo *super twisting*.

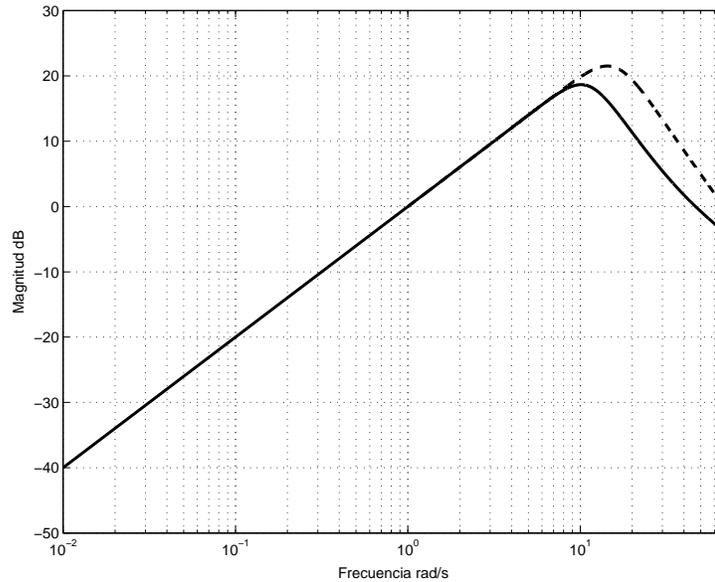


Figura 3.10: Respuesta a la frecuencia del diferenciador con dinámicas parásitas

$$W(s) = \frac{1}{0,0001s^2+0,01s+1} \text{ (línea inferior) y } W(s) = \frac{1}{0,01s+1} \text{ (línea superior).}$$

3.6 Conclusiones

Se presentó el análisis de la respuesta a las señales externas de un controlador de SOSM en el dominio de la frecuencia. Este se analiza mediante el concepto de linealización vía “el efecto de suavizado” que permite utilizar la ganancia equivalente. Se demuestra que los sistemas en lazo cerrado exhiben un deterioro de su funcionamiento en presencia de dinámicas parásitas. Este deterioro es dependiente de la frecuencia. En bajas frecuencias el deterioro es menor que a altas frecuencias. La metodología del análisis de funcionamiento del controlador de SOSM, afectado por la dinámica parásita se analizó adaptando técnicas clásicas como las funciones de transferencia y el análisis de respuesta en el dominio de la frecuencia.

Capítulo 4

Análisis de observadores basados en modos deslizantes de segundo orden por medio de funciones descriptivas

4.1 Introducción

Desde la introducción del observador de [Luenberger 1966], el problema del diseño de observadores se ha convertido en un campo de investigación muy activo, debido a sus numerosas aplicaciones industriales. La característica más atractiva del observador está en la conveniencia de su uso debido a la imposibilidad de medir algunas variables y el menor costo debido al reemplazo de sensores y transmisores con lo que son esencialmente algoritmos de computadora. Uno de los usos más importantes para modos deslizantes (MD), son los observadores por MD [Utkin 1992, Edwards *et al.* 1998, Barbot *et al.* 2002, Edwards *et al.* 2002, Poznyak 2004, Walcott y Zak 1998]. En este tipo de observador, el sistema está diseñado de una manera tal que la diferencia entre la salida del observador y la de la planta es la variable deslizante. El control discontinuo se diseña para proporcionar la existencia de MD en el sistema dinámico del observador. Una vez que el MD genera los estados estimados del observador, estos llegan a ser igual a los estados no medibles del sistema observado.

Análisis de observadores basados en modos deslizantes de segundo orden por medio de funciones descriptivas

Algunas características de los algoritmos por modos deslizantes de segundo orden SOSM los hacen convenientes para su uso en observadores, además de su uso como controladores convencionales con relevadores [Levant 1998], [Bartolini *et al.* 2003], [Pisano y Usai 2004], [Shtessel *et al.* 2003], [Alvarez *et al.* 2000], [Levant 2003], [Orlov *et al.* 2003], [Dávila y Fridman 2004], [Dávila *et al.* 2005], [Rosas *et al.* 2007], [Merzouki *et al.* 2007], [Bejarano *et al.* 2007], [Bejarano *et al.* 2007a], [Fridman *et al.* 2007]. Estas características son: alta exactitud de los estados observados mediante MD, tiempo finito de convergencia, y amplitudes más pequeñas de las oscilaciones [Boiko *et al.* 2004], [Boiko y Fridman 2005].

Las propiedades del análisis dinámico de las características del observador SOSM se estudian en el dominio de la frecuencia, particularmente, se determina la respuesta del observador a las entradas armónicas de varias frecuencias. El concepto general del análisis se basa en el método de funciones descriptivas (FD) [Atherton 1975]. El análisis en el dominio de la frecuencia se hace posible debido a la transformación del sistema discontinuo no lineal original en un sistema dinámico lineal para variables promedio vía el concepto de la ganancia equivalente [Atherton 1975], [Boiko 2005b].

La realización discreta del observador se considera que es equivalente a un retraso como en [Astrom y Wittenmark 1997], [Milosavljevic 2004], [Fridman *et al.* 2004]. Como resultado de tal análisis, se obtienen las características dinámicas en el dominio de la frecuencia del error de observación. esto permite un análisis cuantitativo de la exactitud de la observación para entradas de diferentes frecuencias. En la siguiente sección se detalla el modelo dinámico del observador y se considera la planta. El análisis de las oscilaciones se hace mediante la aplicación del método de FD, y se presenta el concepto de ganancia equivalente derivado del modelo de FD y al final se da un ejemplo del análisis en el dominio de la frecuencia.

4.2 Modelo del observador de modos deslizantes de segundo orden

Se considera el observador de dimensión n propuesto por Utkin [Utkin 1992], para una planta lineal

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4.1)$$

$$y = Cx, \quad (4.2)$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ son matrices. El par (C, A) se asume observable.

El observador de SOSM puede ser diseñado en la misma forma que el sistema original 4.1, 4.2, con una entrada adicional del control que depende del error entre las salidas del observador y la planta y es de la forma

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + Lv \quad (4.3)$$

$$\hat{y} = C\hat{x} \quad (4.4)$$

donde \hat{x} es un estimado del vector de estado del sistema, \hat{y} es una estimación del sistema, $L \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es una matriz de ganancia, v es la salida del algoritmo de SOSM. El vector del estado del observador \hat{x} es conocido, debido a que el observador es implementado como un algoritmo en el controlador. Con el fin de llevar la variable \hat{y} a y , se usa el algoritmo *super-twisting* de SOSM, definido por [Levant 1998, Levant 2003], para reescribir v como

$$v = v_1 + v_2 \quad (4.5)$$

$$\dot{v}_1 = \gamma \text{sign}(\sigma) \quad (4.6)$$

$$v_2 = \begin{cases} \lambda |s_0|^{1/2} \text{sign}(\sigma) & \text{si } |\sigma| > s_0 \\ \lambda |y|^{1/2} \text{sign}(\sigma) & \text{si } |\sigma| \leq s_0 \end{cases} \quad (4.7)$$

Análisis de observadores basados en modos deslizantes de segundo orden por medio de funciones descriptivas

$$\sigma = y - \hat{y} \quad (4.8)$$

donde γ , λ y s_0 son parámetros de diseño, σ es la variable deslizante. Se demuestra que con el elemento L lo suficientemente grande [Levant 1998], la variable deslizante σ converge a cero en tiempo finito. Si se toma en cuenta al observador como un sistema dinámico que tiene dos entradas y una salida, una de esas dos entradas $y(t)$ debe ser seguida muy de cerca por la salida del observador $\hat{y}(t)$ tan precisamente como sea posible, la otra entrada $u(t)$ puede ser tratada como una perturbación. De esta manera, se considera al observador como un sistema retroalimentado que usa el algoritmo *super twisting* como controlador como se muestra en la figura 4.1.

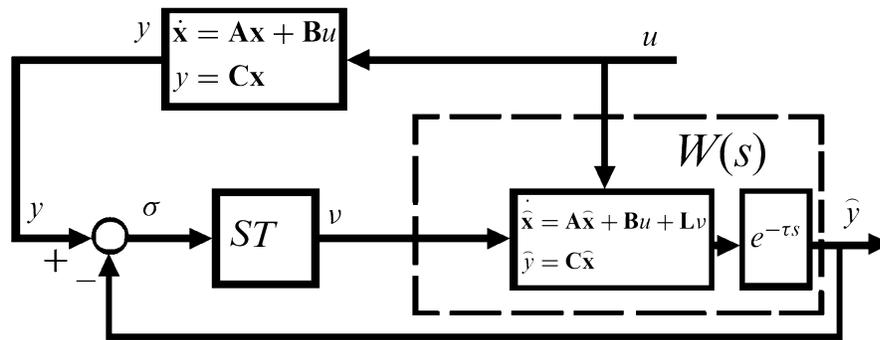


Figura 4.1: Modelo de la planta con el observador

En el modelo dinámico del algoritmo *super-twisting*, la implementación en tiempo discreto se considera como un tiempo de retardo equivalente [Astrom y Wittenmark 1997], [Milosavljevic 2004], [Fridman *et al.* 2004].

Primero, se realiza el análisis de oscilaciones autoexcitadas (*chattering*) que ocurre en el lazo del observador debido al uso de un algoritmo de control discontinuo. Así, la FD de la primera componente del algoritmo *super-twisting* se puede desarrollar en forma similar a la sección 3.3, sólo que esta vez el algoritmo es aplicado a observadores. Así en lugar de un control u aplicado a la planta, se tiene un control v aplicado al observador. Por lo tanto, si sucede un movimiento periódico, la frecuencia y la amplitud

del *chattering* se calculan como en (3.27) y (3.28).

4.3 Propagación de entradas lentas a través de la dinámica del observador (Ganancia Equivalente)

El *chattering* representa la componente rápida del movimiento en la dinámica del observador. Los movimientos lentos existen junto el *Chattering* debido a las entradas externas. Se sabe que las oscilaciones rápidas tienen un efecto linealizador en la propagación de los movimientos lentos [Gelb y Vander Velde 1968] y [Atherton 1975]. Este efecto es conocido como el fenómeno de “suavizado de *chattering*”. Por lo tanto, es conveniente describir la propagación de las señales lentas a través del sistema oscilatorio usando al concepto de ganancia equivalente de la no linealidad [Hsu y Meyer 1968], [Gelb y Vander Velde 1968] y [Atherton 1975].

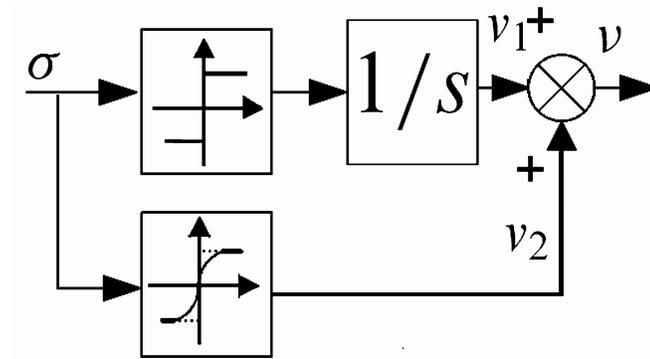


Figura 4.2: Diagrama a bloques del algoritmo *super-twisting*

Esencialmente, la ganancia equivalente es la relación de las señales promedio (en el período de las oscilaciones) de los valores de salida y entrada a la no linealidad. Primero se transforma la dinámica original del algoritmo *super-twisting* en la figura 4.2, en una dinámica equivalente para los movimientos promedio, como se ilustra en la figura 4.3. Ahora el objetivo, por lo tanto, es obtener los valores de las ganancias equivalentes k_{n1}

y k_{n2} para las dos no linealidades del algoritmo *super twisting*.

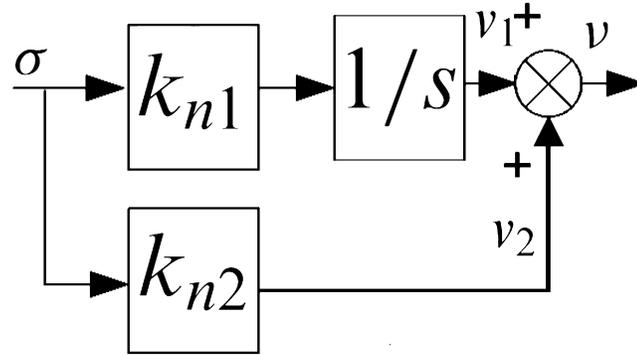


Figura 4.3: Modelo linealizado del algoritmo *super-twisting*

La ganancia equivalente k_n para cada no linealidad puede definirse como sigue:

$$k_{n1(2)} = \left. \frac{\partial v_{10(20)}}{\partial \sigma_0} \right|_{\sigma_0=0} \quad (4.9)$$

donde v_{10} y v_{20} son las salidas promedio de la primera y segunda no linealidades respectivamente y σ_0 es la entrada promedio para estas no linealidades. Esto resulta, para la función de la primera no linealidad en

$$k_{n1} = \frac{2\gamma}{\pi a_y} \quad (4.10)$$

donde γ es la amplitud del relevador y a_y es la amplitud del *chattering* en la entrada al relevador. Para la segunda no linealidad

$$v_{20} = \left. \frac{\lambda}{T} \int_0^T (\sigma_0 + a_y \cdot \text{sen}(\omega \cdot t))^{1/2} dt \right|_{\sigma_0=0} \quad (4.11)$$

si se resuelve (4.9) resulta la siguiente fórmula:

$$k_{n2} = \lambda \frac{\Gamma(1/4)}{2\sqrt{a_y}\sqrt{\pi}\Gamma(3/4)} \approx \lambda \frac{0.8346}{\sqrt{a_y}} \quad (4.12)$$

con ambas ganancias equivalentes disponibles, puede construirse fácilmente el modelo linealizado del sistema dinámico de el observador-planta. Las funciones no lineales del

controlador *super-twisting* se sustituyen para este propósito. Así, el siguiente análisis puede hacerse de la misma manera que para un sistema lineal. Sin embargo, las ganancias equivalente son funciones que dependen de la amplitud de las oscilaciones, que a su vez depende de parámetros del observador.

4.4 Ejemplos

Al considerar para el ejemplo del análisis de funcionamiento del observador de SOSM, se tiene la planta como un sistema de segundo orden:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4.13)$$

$$y = Cx,$$

donde $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$

La dinámica del observador está dada por:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + Lv \quad (4.14)$$

$$\hat{y} = C\hat{x}$$

donde v esta definido por la ecuación 4.5 y L es:

$$L = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Se tiene un retraso equivalente a la salida del observador (que corresponde a un periodo de ejecución del algoritmo) de $\tau=0.01s$.

Escribiendo una expresión para la función de transferencia de la parte lineal de la dinámica del sistema servo relevado del observador:

$$W_l(s) = C(sI - A)^{-1}Le^{-\tau s} = \frac{5s + 6}{s^2 + 3s + 1}e^{-0.01s} \quad (4.15)$$

Análisis de observadores basados en modos deslizantes de segundo orden por medio de funciones descriptivas

Se aplica a la entrada del sistema, representado en la figura 4.1 una oscilación armónica:

$$u(t)=\text{sen}(\omega t).$$

Analizando los movimientos periódicos en el sistema con el observador *super-twisting*, si los parámetros están dados como: $\gamma=0.8$, $\lambda=0.6$, la ecuación de balance armónico $W(j\Omega) \cdot N(a_y) = -1$, con la función de transferencia dada por (4.15) tiene como solución a la ecuación (3.27): una frecuencia $\Omega=118.73 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, y de la ecuación (3.28) la amplitud de las oscilaciones es $a_y=9.30\cdot 10^4$. Esto concuerda con los resultados obtenidos por simulación que son: $\Omega_{sim}=117.24 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, $a_{y_{sim}}=9.76\cdot 10^4$. La convergencia del error de observación se muestra en la figura 4.4.

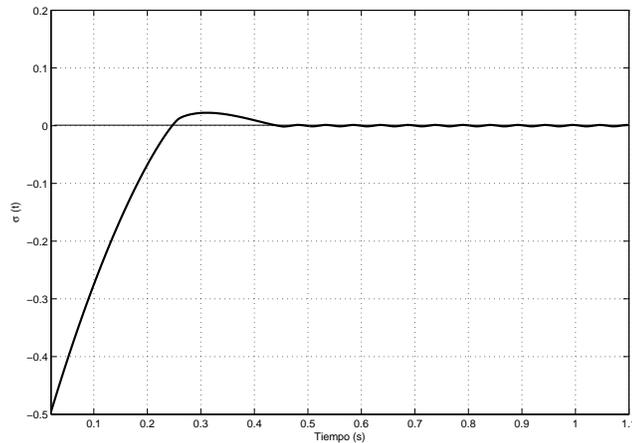


Figura 4.4: Error de observación $\sigma = y - \hat{y}$ (con la condición inicial $y = 0,5$ y $u(t) = \text{sen}(t)$)

En la figura 4.5 se muestra el diagrama de fase de las variables σ y $\dot{\sigma}$, y en la figura 4.6 se tiene en forma gráfica la solución de la ecuación de balance armónico.

El modo de oscilación estable para la salida observada de la planta y las salida del controlador *super-twisting* se muestra en las figuras 4.7 y 4.8, respectivamente

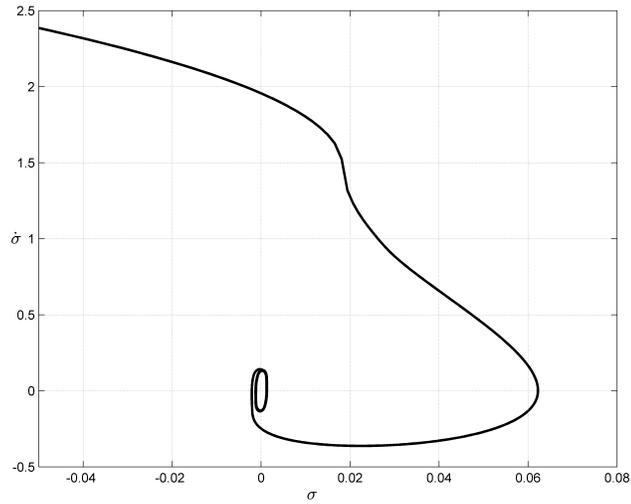


Figura 4.5: Trayectoria *super-twisting* para el sistema del observador

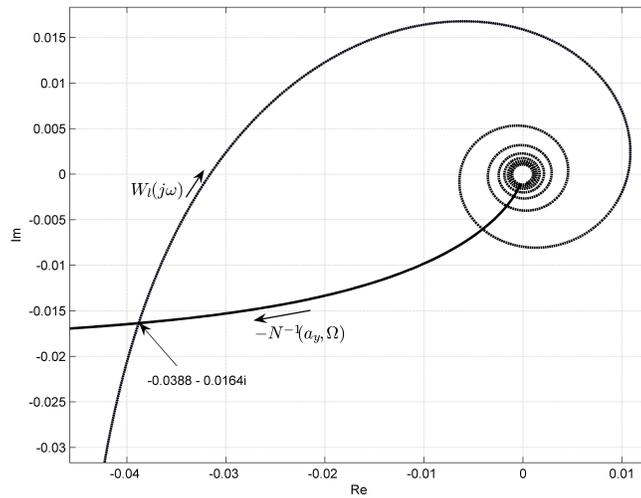


Figura 4.6: Punto de intersección de la traza $1/N(a_y)$ y la gráfica de Nyquist $W_l(j\omega)$ para el ejemplo

Análisis de observadores basados en modos deslizantes de segundo orden por medio de funciones descriptivas

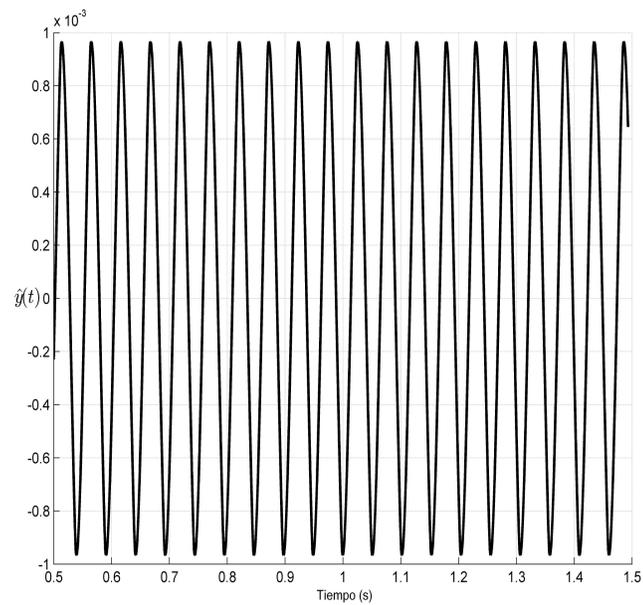


Figura 4.7: Salida del observador de la planta $\hat{y}(t)$ para $u(t) = 0$

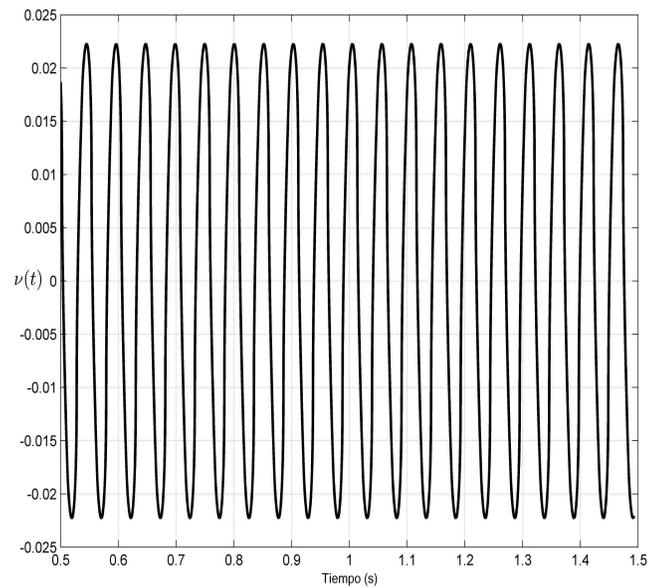


Figura 4.8: Salida v del algoritmo *super-twisting* para $u(t) = 0$

Análisis de observadores basados en modos deslizantes de segundo orden por medio de funciones descriptivas

Al obtener el modelo linealizado de la dinámica del observador para movimientos promedio vía el reemplazo de las dos no linealidades con las dos ganancias equivalentes, se calculan los valores de las ganancias según las ecuaciones (4.10) y (4.12): $k_{n1} = 547.63$ y $k_{n2} = 16.42$.

Con las funciones no lineales substituidas por las ganancias equivalentes, se realiza el análisis de la respuesta del observador como una señal armónica de frecuencia variable. Si se escribe una expresión para la función de transferencia de la entrada $u(t)$ a la señal de error $\sigma(t)$; $W_{u-\sigma}(s)$ se obtiene:

$$W_{u-\sigma}(s) = C(sI - A)^{-1}B \frac{1 - e^{-\tau s}}{1 + (k_{n2} + k_{n1} \cdot 1/s)C(sI - A)^{-1}Le^{-\tau s}} \quad (4.16)$$

Las figuras 4.9 y 4.4, muestran la respuesta transitoria del observador de SOSM y la figura 4.10, muestra la respuesta en frecuencia del observador. Las características principales, como el ancho de banda y la frecuencia de resonancia, entre otras pueden ser fácilmente obtenidas de la función de transferencia (4.16) del modelo linealizado observador-planta, el error de observación también puede ser calculado para x_1 y x_2 usando la función de transferencia, desde la entrada del sistema a la variable y su estimado, (4.17) para x_1 y (4.18) para x_2 . La amplitud las oscilaciones correspondientes a las ecuaciones (4.17) y (4.18) se presentan en la figura 4.11.

$$W_{u-\Delta x_1}(s) = \frac{C(sI - A)^{-1}B(1 - e^{-\tau s})(k_{n2} + k_{n1}/s)C_1(sI - A)^{-1}Le^{-\tau s}}{1 + (k_{n2} + k_{n1}/s)C(sI - A)^{-1}Le^{-\tau s}} \quad (4.17)$$

$$W_{u-\Delta x_2}(s) = \frac{C(sI - A)^{-1}B(1 - e^{-\tau s})(k_{n2} + k_{n1}/s)C_2(sI - A)^{-1}Le^{-\tau s}}{1 + (k_{n2} + k_{n1}/s)C(sI - A)^{-1}Le^{-\tau s}} \quad (4.18)$$

donde $C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$

Análisis de observadores basados en modos deslizantes de segundo orden por medio de funciones descriptivas

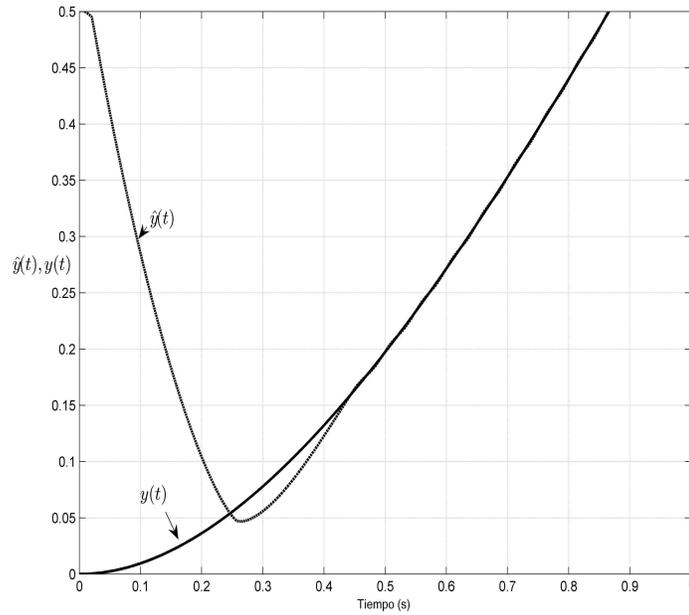


Figura 4.9: Salida de la planta $y(t)$ y seguimiento de la salida del observador $\hat{y}(t)$

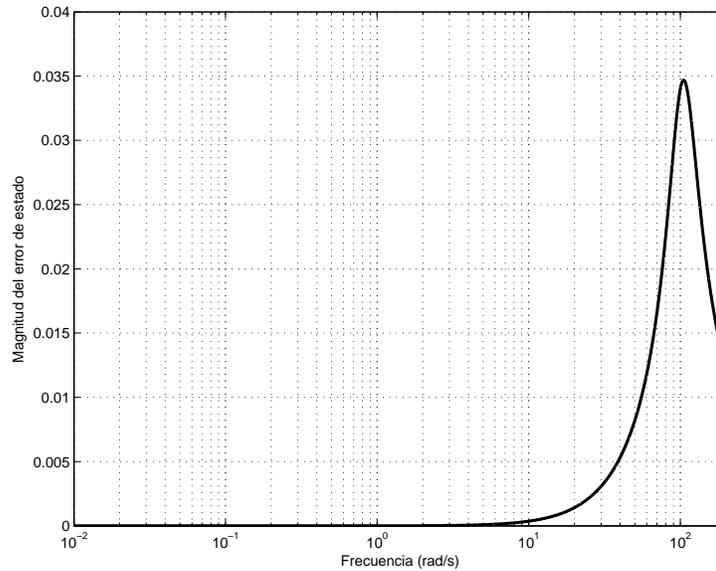


Figura 4.10: Magnitud del error de salida

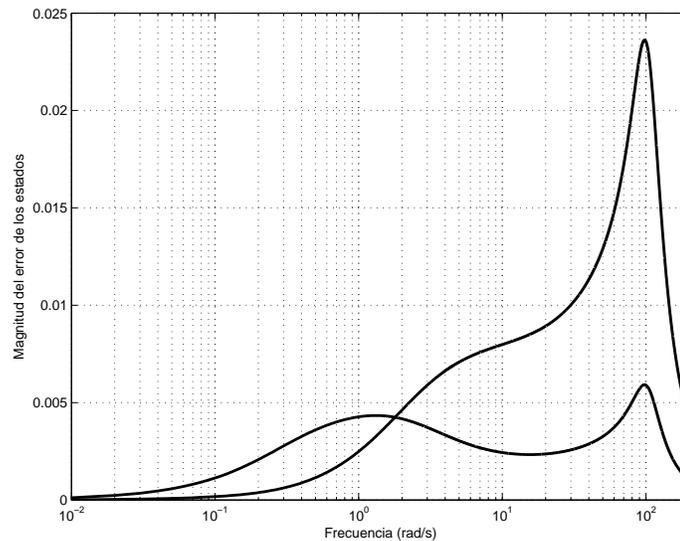


Figura 4.11: Error de observación para el estado x_1 (gráfica inferior) y para x_2 (línea superior) contra la frecuencia

4.5 Conclusiones

El problema de obtener las características en el dominio de la frecuencia de la exactitud dinámica del observador, controlado por algoritmos de modos deslizantes de segundo orden, se resuelve con el uso del método de funciones descriptivas y el concepto de la ganancia equivalente. Este concepto es extendido a los algoritmos de modos deslizantes de segundo orden.

El problema se resuelve por medio de un procedimiento de dos pasos. El primero es encontrar los parámetros de las oscilaciones y una vez resuelto esto, la segunda parte consiste en resolver el problema entrada-salida con respecto a la dinámica oscilatoria del observador. Esta se resuelve por medio del concepto de ganancia equivalente.

Consecuentemente, las características del observador, como su función de transferencia y la respuesta en frecuencia para la observación de los errores, pueden ser obtenidas.

Esto proporciona una metodología robusta del comportamiento del observador por modos deslizantes de segundo orden así como guía para su diseño.

Capítulo 5

Identificación de parámetros vía el algoritmo *twisting* modificado

En este capítulo se propone un método para la identificación de cualquier número par de parámetros de una función de transferencia. La identificación implica el uso del algoritmo *twisting* modificado. Se proponen las ecuaciones que determinan los parámetros desconocidos, estas describen por separado la magnitud y el argumento de la función de transferencia, lo que simplifica la tarea de identificación. Consecuentemente, el problema se reduce a la solución de un sistema de ecuaciones algebraicas. Finalmente se proporcionan ejemplos teóricos y experimentales.

5.1 Introducción

El control PID es el tipo de control más extensamente usado en la industria. Los controladores PID son generalmente implementados en módulos configurables mediante software en los sistemas de control distribuidos (SDC). El software de configuración para los SDC está desarrollándose constantemente para obtener de ellos nuevas características. Una característica útil es el autosintonizado del controlador. Esta tendencia se considera en el desarrollo de nuevo software para los SDC. Que utilizan la característica de autosintonización mediante algoritmos de identificación. Hoy en día el uso de algoritmos

Identificación de parámetros vía el algoritmo *twisting* modificado

de identificación para plantas de primer orden más tiempo muerto u otros modelos no son suficientes. Por otra parte, hay una fuerte demanda en los métodos de identificación para modelos de orden superior. Una de las pruebas más convenientes para identificación de un proceso en términos de simplicidad y exactitud es mediante el uso de relevadores retroalimentados como se propone en el artículo de [Astrom y Hagglund 1984]. Este método ha recibido especial atención de la comunidad de investigación mundial y de la industria. En Astrom-Hagglund se obtienen los valores de la ganancia y limita la frecuencia para el sintonizado del algoritmo PID de acuerdo con las reglas de Ziegler-Nichols [Ziegler y Nichols 1942]. En el artículo [Luyben *et al.* 1987] se propone el uso de pruebas con relevadores retroalimentados para la identificación de los parámetros de los procesos. La idea fue desarrollada y ampliada más a fondo para varios modelos y tipos de procesos. En [Kaya y Atherton 1999], por ejemplo, se propone utilizar la amplitud de las oscilaciones además de la parte imaginaria del LPRS [Tsytkin 1984]. Esto da por resultado un modelo preciso de dos funciones. En [Kaya y Atherton 2001] y [Kaya y Atherton 1998], se demuestra cómo se encuentran exactamente los parámetros de funciones de transferencia de procesos de primer y segundo orden con retraso mediante el uso de lugar geométrico de las medidas del ciclo límite asimétrico. En el artículo [Majhi y Atherton 1999], se encuentran los parámetros exactos para la identificación de sistemas de primer y segundo orden con tiempo muerto, mediante medidas del ciclo límite asimétrico. En [Majhi *et al.* 1987], propone un método para la estimación de procesos desconocidos basado en un sistema relevador retroalimentado y *wavelets*. En [Boiko 2006], se propone un método de identificación de un modelo de primer orden más tiempo muerto que se logra en una sola prueba. Se utiliza un relevador retroalimentado, y está basado en el método LPRS, al igual que en [Boiko 2005b]. Los métodos de sintonizado disponibles basados en técnicas de pruebas con relevador retroalimentado se presentan en [Astrom y Hagglund 1984]. Estos métodos de identificación, utilizan, la función descriptiva (FD) [Atherton 1975] y modelos exactos de las oscilaciones en el

Identificación de parámetros vía el algoritmo *twisting* modificado

sistema relevado retroalimentado. Sin embargo, a pesar del éxito obvio de las pruebas de identificación mediante la retroalimentación en el relevador, se sabe que solo ofrece encontrar dos parámetros del modelo para cada prueba. Identificar un número mayor de parámetros requiere más pruebas, que pueden ser realizadas introduciendo y variando la histéresis del relevador. Sin embargo, es difícil predecir el valor de la histéresis para hacer la prueba más eficiente. El uso del parámetro que refleja el ángulo (fase) de un punto en particular en el diagrama de Nyquist puede ser más conveniente.

En este capítulo se presenta la idea de una modificación del algoritmo *twisting* de modos deslizantes de segundo orden [Levant 1993] para modificar el ancho de banda del proceso de identificación utilizando el análisis mediante FD y LPRS, para encontrar los valores exactos de los parámetros. Se presenta la metodología de identificación. Y finalmente, se ilustra el procesos mediante simulaciones y pruebas experimentales de los resultados obtenidos.

5.2 Modificación del algoritmo *twisting*

Si se considera el sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}\tag{5.1}$$

donde las matrices A y B son de dimensiones correspondientes, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^1$ y $y \in \mathbb{R}^1$ se puede tratar como la variable deslizante a la salida de la planta. También se utilizara la descripción de la planta bajo la forma de función de transferencia $W(s)$, que se puede obtener de la ecuación (5.1) como sigue:

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B\tag{5.2}$$

Considerando el algoritmo de control:

$$u(t) = -c_1 \text{sign}(y) - c_2 \text{sign}(\dot{y}), c_1 > 0.\tag{5.3}$$

Identificación de parámetros vía el algoritmo *twisting* modificado

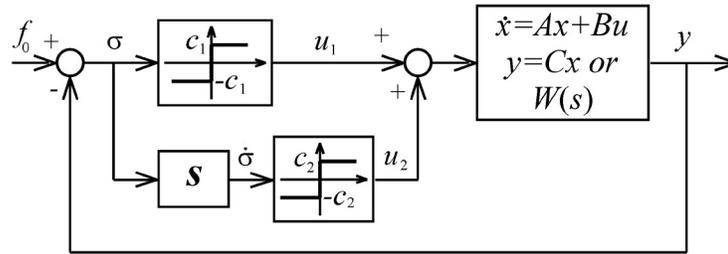


Figura 5.1: Diagrama del algoritmo *twisting*

Llamaremos a 5.3, algoritmo *twisting* modificado. Para el caso donde $c_1 > c_2 > 0$, este es el algoritmo *twisting* [Levant 1993]. Utilizaremos el análisis de FD y LPRS del sistema (5.1), (5.2) como se detalla en el análisis del algoritmo *twisting* por medio de funciones descriptivas en la sección 2.2 y LPRS en la sección 2.4.

5.3 Identificación de parámetros mediante el algoritmo *twisting* modificado

Variando c_1 y c_2 se cambian los parámetros de las oscilaciones (como se observa en la figura 2.2). Con estos valores c_1 y c_2 se puede encontrar la frecuencia y magnitud de las oscilaciones periódicas. En esta forma, son necesarias n pruebas para identificar $2n$ parámetros.

Una forma de elegir la amplitud de los relevadores es utilizar la relación de c_1/c_2 de la misma magnitud pero de signos diferentes para dos diferentes pruebas. Esto permitirá identificar la planta (proceso) en las características de fase a distancias iguales de $-\pi$ rad. Como ejemplo, si es necesario identificar 6 parámetros es posible seleccionar los valores de $\frac{c_2}{c_1} = \frac{1}{2}, 0$ y $-\frac{1}{2}$ correspondiente a un ángulo de $-\frac{7\pi}{6}$ rad. $-\pi$ rad. y $-\frac{5\pi}{6}$ rad. Aproximadamente.

La selección de la magnitud de los valores de c_1 y c_2 se hacen dependiendo del tipo de los parámetros de la planta que se desean identificar y así obtener las oscilaciones

Identificación de parámetros vía el algoritmo *twisting* modificado

y amplitudes estables a la salida de la planta para cada punto de prueba, por ello es preferible la aplicación de este método de identificación a plantas de tipo monótonico decrecientes en amplitud, para sistemas no monótonicos es necesario hacer una cantidad mayor de pruebas para asegurar un mejor ajuste de los parámetros obtenidos. Para sistema de grado relativo mayor a tres o con retardo, cualquier intersección de la gráfica de Nyquist con el inverso negativo de la función descriptiva en un ángulo mayor a 270° es inestable y como resultado las oscilaciones son inestables o inexistentes como se puede ver en la figura 5.2.

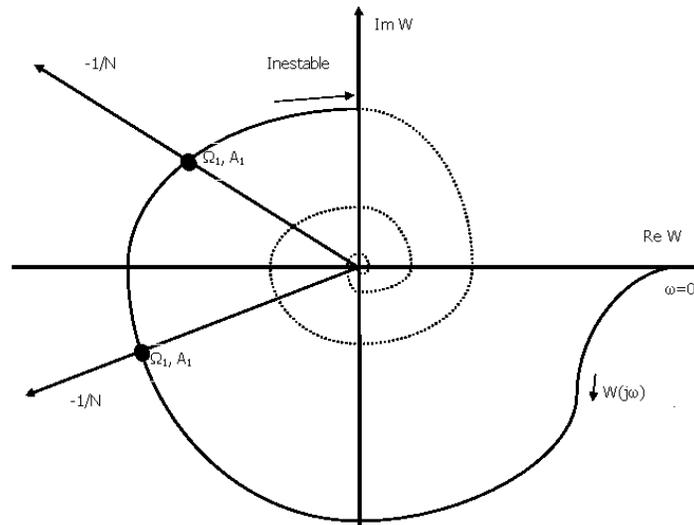


Figura 5.2: Region de oscilaciones para un sistema lineal controlado mediante el algoritmo *twisting* modificado

Suponemos que cada prueba proporciona una amplitud A_i , y frecuencia Ω_i . ($i = 1, \dots, n$) de las oscilaciones, donde la función de transferencia del proceso está dada en la siguiente forma:

$$W(s) = \frac{K(\Upsilon_1 s + 1) \dots (\Upsilon_m s + 1)}{(T_1 s + 1) \dots (T_k s + 1)} \quad (5.4)$$

donde $m < k$, $m + k = 2n - 1$. Es una función con k polos, m ceros y ganancia K . Si se reescriben las ecuaciones (2.9) y (2.11) se tiene la ecuación de balance armónico para

Identificación de parámetros vía el algoritmo *twisting* modificado

cada punto de prueba. $W(j\Omega_i)N(A_i) = -1$, y se sustituye para cada punto de prueba así se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$W(j\Omega_i) = -N(A_i)^{-1} \quad (5.5)$$

Se separa la ecuación en magnitud y fase respectivamente

$$|W(j\Omega_i)| = \left| -N(A_i)^{-1} \right| = \frac{A_{1i}\pi}{4\sqrt{c_{1i}^2 + c_{2i}^2}} \quad (5.6)$$

$$\angle W(j\Omega_i) = -\pi - \arctan\left(\frac{c_{2i}}{c_{1i}}\right) \quad (5.7)$$

Se aplica logaritmo a ambas partes de la ecuación de magnitud (5.6) para obtener lo siguiente

$$\ln |W(j\Omega_i)| = \ln \left| \frac{K(\Upsilon_1 i\Omega_i + 1) \dots (\Upsilon_m i\Omega_i + 1)}{(T_1 i\Omega_i + 1) \dots (T_k i\Omega_i + 1)} \right| \quad (5.8)$$

que simplificado es

$$\begin{aligned} \ln |W(j\Omega_i)| &= \ln K + \sum_{l=1}^m \ln \sqrt{\Upsilon_l^2 \Omega_i^2 + 1} - \\ &\sum_{l=1}^k \ln \sqrt{T_l^2 \Omega_i^2 + 1} = \ln \frac{A_{1i}\pi}{4\sqrt{c_{1i}^2 + c_{2i}^2}} \end{aligned} \quad (5.9)$$

así se obtiene:

$$\begin{aligned} \ln K + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m \ln (\Upsilon_l^2 \Omega_i^2 + 1) - \\ \frac{1}{2} \sum_{l=1}^k \ln (T_l^2 \Omega_i^2 + 1) = \ln \frac{1}{4} \frac{A_{1i}\pi}{\sqrt{c_{1i}^2 + c_{2i}^2}} \end{aligned} \quad (5.10)$$

de la misma forma, se escribe para la fase de (5.5):

$$\sum_{l=1}^m \phi(\Upsilon_l j\Omega_i + 1) - \sum_{l=1}^k \phi(T_l j\Omega_i + 1) = \pi - \arctan\left(\frac{c_{2i}}{c_{1i}}\right) \quad (5.11)$$

al evaluar para el ángulo en cada punto de prueba y se simplifica se tiene,

$$\sum_{l=1}^m \arctan \Upsilon_l \Omega_i - \sum_{l=1}^k \arctan T_l \Omega_i = \pi - \arctan\left(\frac{c_{2i}}{c_{1i}}\right) \quad (5.12)$$

Se resuelve el conjunto de ecuaciones (5.10) y (5.12) es posible obtener los parámetros $K, \Upsilon_1, \dots, \Upsilon_m, T_1, \dots, T_k$. Una desventaja de la técnica de identificación mediante FD es que no se obtienen los resultados exactos, mediante el uso de la técnica de LPRS se tienen la solución exacta.

Identificación de parámetros vía el algoritmo *twisting* modificado

Una vez que se sabe la amplitud y la frecuencia de oscilación en cada punto de prueba, se resuelven las ecuaciones para la parte imaginaria (2.66) y la parte real de LPRS (2.69) para encontrar los parámetros de la planta (5.4).

Para cada punto de prueba i , c_{2i} y c_{1i} , deben resolverse las siguientes ecuaciones:

$$L(\Omega_i, 0) + \frac{c_{2i}}{c_{1i}} L(\Omega_i, \theta) = 0 \quad (5.13)$$

se sustituye (2.65) en (2.66)

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \cdot \text{Im}W[(2k-1)\Omega_i + \\ & \frac{c_{2i}}{c_{1i}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \{ \text{sen}[(2k-1)2\pi\theta] \cdot \text{Re}W[(2k-1)\Omega_i] + \\ & \cos[(2k-1)2\pi\theta] \cdot \text{Im}W[(2k-1)\Omega_i] \} = 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

La solución de la ecuación (2.69) para la amplitud A_i y la frecuencia Ω_i de cada punto de prueba:

$$\text{Re}J(\Omega_i) \approx \text{Re} \left[\frac{W(j\Omega_i)}{1 + j\Omega_i \cdot q_{2i}(A_{20i}) \cdot W(j\Omega_i)q_{2i}} \right] \quad (5.15)$$

donde $q_{2i} = \frac{4c_{2i}}{\pi A_{20i}}$

$$A_{20i} = \frac{4c_{1i}}{\pi} \Omega_i |W(j\Omega_i)| \quad (5.16)$$

y $W(j\Omega_i)$ está dada por (5.4). Así para cada punto de prueba se tiene un sistema de ecuaciones que permite encontrar los parámetros de la planta.

El conjunto de ecuaciones para la identificación mediante FD (5.10) y (5.12) o la identificación mediante LPRS con el conjunto de ecuaciones (5.14) y (5.15), puede resolverse mediante el método de Newton-Raphson:

$$x_{j+1} = x_j - \alpha \cdot J(f(x_j))^{-1} \cdot f(x_j) \quad (5.17)$$

donde $f(K, \Upsilon_1 \dots \Upsilon_m, T_1 \dots T_k) = 0$, $J(f(x_j))$, es el jacobiano de f , en los puntos $x_j = [(K_j, \Upsilon_{1j} \dots \Upsilon_{mj}, T_{1j} \dots T_{kj})]^T$, α determina la velocidad de convergencia.

El algoritmo converge, si $\det |J(f(x_j))| \neq 0$.

5.4 Ejemplos

Identificación de los parámetros de carro péndulo invertido

La ventaja de usar el algoritmo *twisting* modificado, es la facilidad para interceptar la gráfica de Nyquist de la planta en el segundo y tercer cuadrante del plano complejo, y no solo en el eje real, como cuando la función relevador se usa. Para la identificación de los parámetros del carro péndulo invertido como se ve en la figura 5.3, con los siguientes parámetros: M masa del carro 0,5 kg; m_p masa del péndulo 0,2 kg; b fricción del carro 0,1 N/m/s; l longitud al centro de la masa del péndulo 0,3 m; I inercia del péndulo 0,006 kgm^2 ; F fuerza aplicada al carro; x posición del carro, ϑ ángulo del péndulo con la vertical. El sistema de ecuaciones linealizadas en los punto de equilibrio $\vartheta = \pi$ y $x = 0$, se presenta en la forma de espacio de estados:

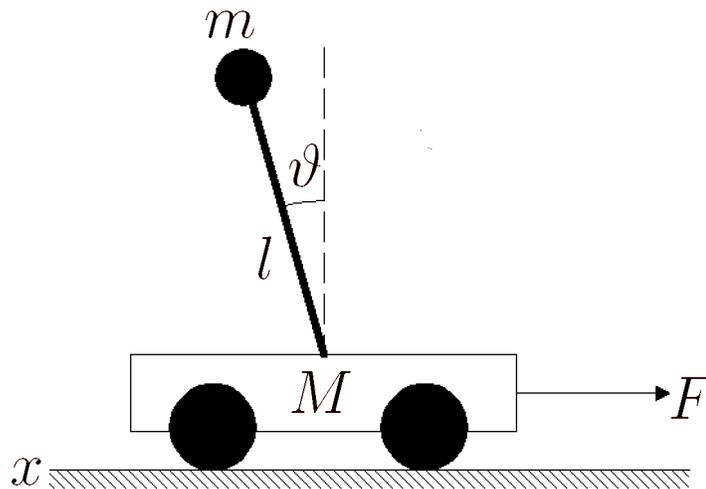


Figura 5.3: Diagrama del carro péndulo invertido

Identificación de parámetros vía el algoritmo *twisting* modificado

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(I+m_p l^2)b}{(I(M+m_p)+M m_p l^2)} & \frac{m_p^2 * g * l^2}{(I(M+m)+M m l^2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{m_p l b}{(I(M+m_p)+M m_p l^2)} & \frac{m g l (M+m_p)}{(I(M+m_p)+M m_p l^2)} & 0 \end{bmatrix} \\
 B &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{i+m_p l^2}{I(M+m_p)+M m_p l^2} \\ 0 \\ \frac{m_p l^2}{I(M+m_p)+M m_p l^2} \end{bmatrix} \\
 C &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

La función de transferencia es:

$$\begin{aligned}
 P &= (M + m_p)(I + m_p l^2) - (m_p l)^2 \\
 \frac{\vartheta(s)}{U(s)} &= \frac{\frac{m l}{P} s}{s^3 + \frac{b(I+m_p l^2)}{P} s^2 - \frac{(M+m_p)m_p g l}{P} s - \frac{b m_p g l}{P}}
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

se sustituyen los parámetros del carro péndulo en la ecuación 5.19, nos queda:

$$\frac{\vartheta(s)}{U(s)} = \frac{4,5455s}{s^3 + 0,1818s^2 - 31,1818s - 4,4545} \tag{5.20}$$

expresado en la forma de la ecuación 5.4, tenemos:

$$\frac{\vartheta(s)}{U(s)} = -\frac{1.0204s}{(-0,1858s + 1)(0,17844s + 1)(7.0013s + 1)} \tag{5.21}$$

Se hace la prueba para dos diferentes combinaciones de c_1 y c_2 . y se analiza el sistema de la planta (5.21) mediante FD y LPRS los valores de frecuencia y amplitud que se obtienen se muestran en la tabla 5.1. Se sustituye la frecuencia y la amplitud en (5.10) y (5.12) para el primer punto de prueba, con $c_1 = 5$, $c_2 = -1$

$$\frac{1}{2} \ln(0,9884^2 \cdot \Upsilon_l^2) - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 \ln(0,9884^2 \cdot T_l^2 + 1) = \ln \frac{\pi \cdot 0,1408}{4\sqrt{5^2 + 1^2}} \tag{5.22}$$

$$-\frac{\pi}{2} - \sum_{l=1}^3 \arctan(0,9884 \cdot T_l) + \pi + \arctan\left(\frac{-1}{5}\right) = 0 \tag{5.23}$$

Identificación de parámetros vía el algoritmo *twisting* modificado

		Análisis mediante FD			
Punto de prueba		Frecuencia rad/s			Amplitud
i	c_1	c_2	Ω_i		A
1	5	-1	0,717		0,140 6
2	10	-1	1,453		0,135 9
		Análisis con LPRS			
Punto de prueba		Frecuencia rad/s			Amplitud
i	c_1	c_2	Ω_i		A
1	5	-1	0.9884		0,1408
2	10	-1	1,8162		0,1316

Tabla 5.1: Análisis de oscilaciones en el sistema del carro péndulo

para el segundo punto de prueba $c_1 = 10$, $c_2 = -1$.

$$\frac{1}{2} \ln \left(1,8162^2 \cdot \Upsilon_l^2 \right) - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 \ln \left(1,8162^2 \cdot T_l^2 + 1 \right) = \ln \frac{\pi \cdot 0,1316}{4\sqrt{10^2 + 1^2}} \quad (5.24)$$

$$\frac{\pi}{2} - \sum_{l=1}^3 \arctan \left(1,8162 \cdot T_l \right) + \pi + \arctan \left(\frac{-1}{10} \right) = 0 \quad (5.25)$$

se resuelve el sistema de ecuaciones (5.22)-(5.25), los parámetros que se obtienen son $\Upsilon_1 = -0.7122$, $T_1 = -0.1858$, $T_2 = 0.1920$, $T_3 = 4.823$, la función de transferencia de la planta identificada mediante FD es:

$$W_{DF1}(s) = \frac{-0,7122s}{(-0,1858s + 1)(0,192s + 1)(4,823s + 1)} \quad (5.26)$$

ahora mediante la solución de el conjunto de ecuaciones (5.14), (5.15) para la identificación mediante LPRS tenemos los parámetros $K = -1.0204$, $T_1 = -0.1796$, $T_2 = 0.1796$, $T_3 = 7.001$, prácticamente idénticos a los valores de la función de transferencia original, así, La función de transferencia identificada mediante LPRS es:

$$W_{LPRS1}(s) = \frac{-1,0204s}{(-0,1796s + 1)(0,1796s + 1)(7,001s + 1)} \quad (5.27)$$

Identificación de parámetros vía el algoritmo *twisting* modificado

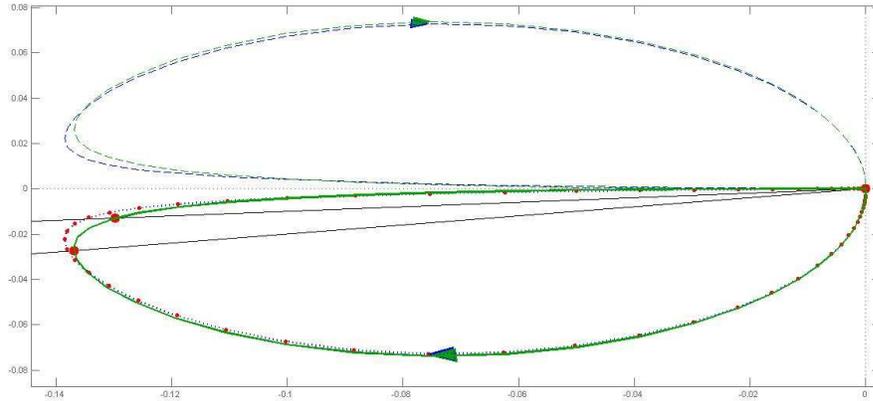


Figura 5.4: Gráfica de Nyquist para la función de transferencia del péndulo invertido

Identificación de parámetros de una circuito RC pasa bajas pasivo de tercer orden

Se considera un circuito con amplificadores operacionales RC pasa bajas pasivo de tercer orden como se muestra en la figura 5.4.

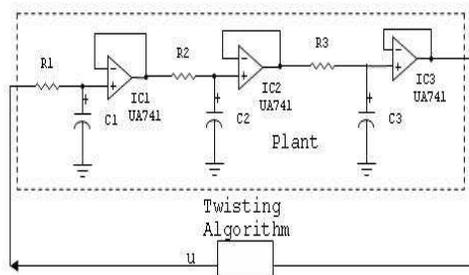


Figura 5.5: Circuito RC pasa bajas pasivo de tercer orden

la función de transferencia es la siguiente:

$$W_{RCLP}(s) = \frac{1}{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)(R_3 C_3 s + 1)} \quad (5.28)$$

La identificación mediante la medición directa de los capacitores y las resistencias del

Identificación de parámetros vía el algoritmo *twisting* modificado

circuito son: $R_1 = 9,947 K\Omega$, $R_2 = 9,886 K\Omega$, $R_3 = 9,887 K\Omega$, $C_1 = 0,968 \mu F$, $C_2 = 1,381 \mu F$ y $C_3 = 1,968 \mu F$, así los parámetros de la función de transferencia son $K = 1,0204$, $T_1 = 0,0096$, $T_2 = 0,0136$ y $T_3 = 0,0194$. La función de transferencia es:

$$W_{REAL}(s) = \frac{1}{(0,0096 \cdot s + 1)(0,0136 \cdot s + 1)(0,0194 \cdot s + 1)} \quad (5.29)$$

Se consideran dos puntos de prueba, en los cuales los valores para c_1 y c_2 son 5 y 0 respectivamente, para la primera prueba, $c_1 = 5$ y $c_2 = -1$ para la segunda prueba, en la tabla 5.2 se muestran los resultados experimentales a la salida de la planta:

Punto de prueba		Frecuencia rad/s		Amplitud
i	c_1	c_2	Ω_i	A
1	5	0	125,72	0,78
2	5	-1	113,09	0,96

Tabla 5.2: Resultados experimentales

Los parámetros de la identificación obtenidos mediante FD son $K = 1,043$, $T_1 = 0,0108$, $T_2 = 0,0108$, $T_3 = 0,0228$, la función de transferencia de la planta identificada es:

$$W_{DF}(s) = \frac{1,043}{(0,0108s + 1)(0,0108s + 1)(0,0228s + 1)} \quad (5.30)$$

y los parámetros identificado con LPRS son $K = 1,0204$, $T_1 = 0,0104$, $T_2 = 0,0104$ y $T_3 = 0,0238$.

En la tabla 5.3 se muestra los parámetros identificados de el circuito eléctrico.

$$W_{LPRS}(s) = \frac{1,0204}{(0,0104s + 1)(0,0104s + 1)(0,0238s + 1)} \quad (5.31)$$

Identificación de parámetros vía el algoritmo *twisting* modificado

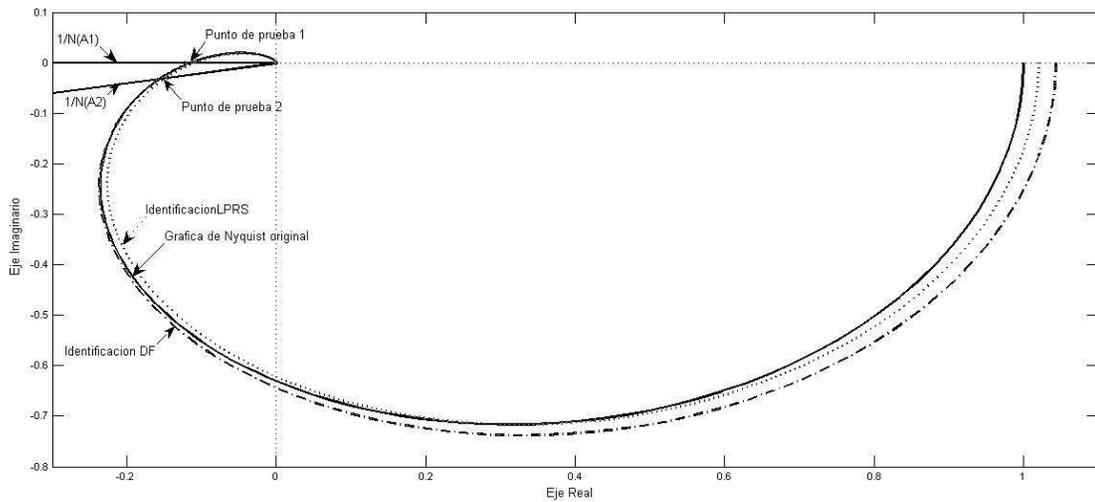


Figura 5.6: Gráfica de Nyquist de la función de transferencia identificada del circuito pasivo pasa baja de tercer orden

	Parámetros			
	K	T_1	T_2	T_3
parámetros originales	1,0204	0,0096	0,0136	0,0194
Identificación DF	1,0430	0,0108	0,0108	0,0228
Identificación LPRS	1,0204	0,0104	0,0104	0,0238

Tabla 5.3: Tabla de identificación paramétrica del circuito eléctrico

Se utilizan las funciones de transferencia identificadas mediante LPRS y FD para encontrar la amplitud y la frecuencia de un punto de prueba arbitrario como validación del método de identificación, donde $c_1 = 5$ y $c_2 = -2,5$ es el punto de prueba, los resultados experimentales y los análisis se muestra en el tabla 5.4.

5.5 Conclusiones

Se propuso el algoritmo *twisting* modificado para utilizarse en procesos de identificación. La ventaja de la técnica propuesta es la excitación de las oscilaciones mientras la prueba está corriendo para los argumentos dados.

Identificación de parámetros vía el algoritmo *twisting* modificado

Datos experimentales			
Punto de prueba	Frecuencia rad/s	Amplitud	
c_1	c_2	Ω_i	A
5	-2,5	96,8	1,45
Datos obtenidos del análisis mediante FD			
		Frecuencia rad/s	Amplitud
c_1	c_2	Ω_i	A
5	-2,5	91	1,63
Datos obtenidos del análisis mediante LPRS			
		Frecuencia rad/s	Amplitud
c_1	c_2	Ω_i	A
5	-2,5	91,8	1,42

Tabla 5.4: Resultados para validar la identificación del circuito eléctrico

Con el segundo ejemplo se demuestra que los análisis para la identificación paramétrica de un sistema real es factible mediante FD y LPRS obteniéndose resultados con una exactitud satisfactoria incluso con el uso de la técnica de FD que no es exacta.

Conclusiones finales

Se presentó el análisis de los modos deslizantes de segundo orden (SOSM), para determinar las características de la respuesta en el dominio de la frecuencia de observadores y controladores por SOSM. Se propusieron técnicas de análisis y la adaptación del uso de Funciones Descriptivas FD técnicas de LPRS (*locus perturbed relay system*) para encontrar las frecuencias y amplitudes que se generan de forma autónoma en los sistemas controlados u observados por SOSM. Se determinaron los parámetros que logran reducir o eliminar el problema de las oscilaciones periódicas por el uso de SOSM.

Los algoritmos de segundo orden de modos deslizantes analizados son los algoritmos de control *twisting*, el *super-twisting*, así como el *twisting* y el *super-twisting* en forma de filtro, donde se comparan las diferentes respuestas de todos estos tipos de controladores con la forma tradicional del control por modos deslizantes. También se analizó el algoritmo *super twisting* usado en observadores y diferenciadores donde se determinan las características de propagación de señales lentas, obteniéndose las funciones de transferencia en el dominio de la frecuencia para los controladores y observadores antes descritos.

Como aplicación de estos análisis a los SOSM mediante FD y LPRS se encontró la posibilidad de identificar los parámetros de la función de transferencia en plantas. Así se propone un método para la identificación de cualquier número par de parámetros de una función de transferencia. La identificación implica el uso del algoritmo *twisting*

Conclusiones finales

modificado. Se proponen las ecuaciones para determinar los parámetros desconocidos, y se reduce el problema a la solución de un sistema de ecuaciones algebraicas.

Apéndice A

Inestabilidad de un sistema de grado relativo tres, controlado mediante el algoritmo *twisting*

Se sabe que en sistemas controlados mediante un relé son inestables cuando el grado relativo es superior a dos [Tsytkin 1984, Fridman y Levant 2002 y 2004]. Es razonable esperar que el mismo comportamiento inestable sucede en sistemas controlados por el algoritmo *twisting* de SOSM. La prueba de esta idea es la siguiente. Se considera un sistema lineal invariante en el tiempo de grado relativo tres controlado por el algoritmo *twisting* [Levant 1993].

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + u \quad (\text{A.1})$$

$$u = -c_1 \text{sign}x_1 - c_2 \text{sign}x_2 \quad (\text{A.2})$$

$$c_1 > c_2 > 0$$

Si se considera la función candidata de Lyapunov como $V = x_1x_3 - x_2^2/2$

[Levant y Fridman 2004]. Entonces, su derivada es

$$\dot{V} = x_1(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 - c_1 \text{sign}x_1 - c_2 \text{sign}x_2) \leq -a|x_1| \leq 0 \text{ donde } 0 < a < c_1 - c_2.$$

Para toda vecindad en el origen existe un conjunto de puntos por ejemplo $x_3 = 0$ y $x_1, x_2 \neq 0$

para el cual se cumple el teorema de inestabilidad de Lyapunov [Vidyasagar 1978], donde el punto de equilibrio 0 en el tiempo t_0 para el sistema (A.1), existe una función continua diferenciable decreciente V , tal que (i) \dot{V} es una función definida positiva de Lyapunov, (ii) $V(t, 0) = 0$ y si existen puntos de x en la vecindad de 0 tal que $V(t_0, x) > 0$

$$\dot{V} > 0 \tag{A.3}$$

Apéndice B

Artículos publicados

B.1 Artículos arbitrados en revistas internacionales

- M. I. Castellanos, I. Boiko y L. Fridman. “*Parameter Identification Via Modified Twisting Algorithm.*” **International Journal of Control**. Vol. 8, No. 5, pp. 788-796, 2008. DOI: 10.1080/00207170701636559
- I. Boiko , I. Castellanos y L. Fridman. “*Analysis of Response of Second-Order Sliding Mode Controllers to External Inputs in Frequency Domain.*” **International Journal of Robust and Nonlinear Control** Vol. 18, No. 4-5, pp. 502-514, 2008. DOI: 10.1002/rnc.1206. Publicado en línea Wiley InterScience (www.interscience.wiley.com). Abril de 2007.
- I. Boiko, I. Castellanos y L. Fridman. “*Describing functions analysis of second order sliding mode observers*”, **International Journal of Systems Science**. Vol. 38, No. 10, pp. 817-824. 2007. DOI: 10.1080/00207720701620118
- I.Boiko, L. Fridman y M.I. Castellanos. “*Analysis of Second Order Sliding Mode Algorithms in the Frequency Domain*”. **IEEE Transaction on Automatic Control**, Vol. 49, No. 6, pp. 946-950. 2004. DOI: 10.1109/ TAC.2004.829615.

B.2 Artículos en congresos internacionales

- M. I. Castellanos Garcia, I. Boiko y L. Fridman. “*Parameter Identification Via Second Order Sliding Modes.*” **45th Conference on Decision in Control**, San Diego, CA, pp. 1605-1610. 2006.
- I. Boiko, I. Castellanos y L. Fridman. “*Analysis of Response of Second-Order Sliding Mode Control Systems to External Inputs,*” **9th. IEEE Workshop on Variable Structure Systems**, Alghero, Italia, pp. 172-177. 2006. ISBN: 1-4244-0208-5, Digital Object Identifier: 10.1109/VSS.2006.1644513.
- I.Boiko, M.I. Castellanos y L. Fridman. “*Describing function analysis of second order sliding mode observers.*” **Proceedings of the 2006 American Control Conference** Minneapolis, Minnesota, USA, pp. 2616-2621. 2006. Digital Object Identifier 10.1109/ACC.2006.1656617, E-ISBN: 1-4244-0210-7.
- I.Boiko, M.I. Castellanos y L. Fridman. “*Analysis of Second Order Sliding Mode Algorithms in the Frequency Domain.*” **Proceedings of 42th conference on Decision in Control**, Maui, Hawaii,pp.4575-4580. 2003. ISSN: 0191-2216, ISBN: 0-7803-7924-1. Digital Object Identifier: 10.1109/CDC.2003.1272278.

B.3 Artículos en congresos nacionales

- I.Boiko, L. Fridman y M.I. Castellanos. “*Parameter Identification Vía Second Order Sliding Modes,*” **AMCA 2006**. Mexico, pp.363-368 ISBN:970-32-4025-9.
- I.Boiko, L. Fridman y M.I. Castellanos. “*Frequency Domain Input-Output Analysis of Sliding Mode Observers*”, **AMCA 2005**, Mexico, 2005, ISBN: 970-32-2974-3.

Bibliografía

- [Alvarez *et al.* 2000] J. Alvarez, Y. Orlov, y L. Acho, “An invariance principle for discontinuous dynamic systems with application to a Coulomb friction oscillator,” *Journal of Dynamic Systems, Measurements and Control*, Vol. 122, pp. 687-690, 2000.
- [Anosov 1959] [13] D.V. Anosov, “On Stability of Equilibrium Points of Relay Systems,” *Automation and Remote Control*, No. 2, pp.135-149, 1959.
- [Astrom y Furuta 2000] Astrom, K.J., Furuta K. “Swinging up a Pendulum by Energy Control,” *Automatica*, Vol. 36, pp. 287-295. 2000.
- [Astrom y Wittenmark 1997] K. Astrom y B. Wittenmark, “Computer-Controlled Systems – Theory and Design,” Ed. *Prentice Hall*, Englewood Cliffs, NJ, 1997.
- [Astrom y Hagglund 1995] K.J. Astrom y T. Hagglund, “PID Controllers: Theory, Design and Tuning,” Ed. Research Triangle Park, NC: *Instrument Society America*, 1995.
- [Astrom y Hagglund 1984] K. I. Astrom y T. Hagglund, “Automatic Tuning of Simple Regulators with Specifications on Phase and Amplitude Margins,” *Automatica*, Vol. 20, pp. 645-651, 1984.
- [Atherton 1975] D. P. Atherton, “Nonlinear Control Engineering –Describing Function Analysis and Design,” Ed. *Van Nostrand Company Limited*, Workingham, Berks, UK. 1975.
- [Barbot *et al.* 2002] J. Barbot, M. Djemai, y T. Boukhobza, “Sliding mode observers,” *en Sliding Mode Control in Engineering*. Editores W. Perruquetti y J. Barbot, Control Engineering, New York, MarcelDekker, pp. 103-130. 2002.
- [Bartolini *et al.* 2003] G.Bartolini, A. Pisano, E. Punta, y E. Usai, “A survey of applications of second-order sliding mode control to mechanical systems,” *International Journal of Control*, Vol. 76, pp. 875-892. 2003.

- [Bartolini *et al.* 2003] G. Bartolini, A. Damiano, G. L. Gatto, I. Marongiu, A. Pisano y E.Usai “Robust Speed and Torque Estimation in Electrical Drives by Second Order Sliding Modes,”*IEEE Trans. on Control Systems Technology*, Vol. 11, No. 1, pp. 84-90, 2003.
- [Bartolini *et al.* 2002] G. Bartolini, A. Levant, A. Ferrara y E. Usai, “Higher-Order Sliding Modes for the Output-Feedback Control of Nonlinear Uncertain Systems In Variable Structure Systems:” Towards the 21st Century. Editores X.Yu y J.-X.Xu, *Lecture Notes in Control and Information Science*, Vol. 274, Springer Verlag, London, pp. 83-108, 2002.
- [Bartolini *et al.* 2001] G. Bartolini, A. Pisano, y E. Usai, “Second Order Sliding Mode Control for Container Cranes,” *Automatica*, Vol. 38, pp. 1783-1790, 2001.
- [Bartolini *et al.* 2001a] G. Bartolini, A. Pisano, y E. Usai, “Digital Second Order Sliding Mode Control for Uncertain Nonlinear Systems,”*Automatica*, Vol. 37, No. 9, pp. 1371-1377, 2001.
- [Bartolini *et al.* 2000] G. Bartolini, A. Pisano, y E. Usai, V.I. Utkin. “On multi-input chattering-free second order sliding mode control,”*IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, No. 9, pp. 1711-1717, 2000.
- [Bartolini *et al.* 1999a] G. Bartolini, A. Levant, A., Ferrara y E. Usai, “Variable Structure Control of Sampled Data Systems by Second Order Sliding Modes,”Editores I. Young y U. Ozguner, *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, vol. 247, pp. 43-68, Springer Verlag, (1999).
- [Bartolini *et al.* 1999] G. Bartolini, A. Ferrara, A. Levant, E. Usai, “On Second Order Sliding Mode Controllers,”Editores I. Young y U. Ozguner en *Variable Structure Systems, Sliding Mode and Nonlinear (Lecture Notes in Control and Information Science*, Vol. 247, London: Springer-Verlag, pp.329-350, 1999.
- [Bartolini *et al.* 1998] G. Bartolini, A. Ferrara, E. Usai, “Chattering Avoidance by Second-Order Sliding Mode Control,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.43, No.2, pp. 241-246, 1998.
- [Bartolini *et al.* 1997] Bartolini G, Ferrara A, Usai E. “Output tracking control of uncertain nonlinear second-order systems,” *Automatica*, Vol. 33 No. 12, pp.2203-2212, 1997.
- [Bejarano *et al.* 2007] F. J. Bejarano, L. Fridman, A. Poznyak. “Output integral sliding mode control based on algebraic hierarchical observer,” *International Journal of Control*, Vol. 80, No.3, pp. 443-453. 2007.
- [Bejarano *et al.* 2007a] F.J. Bejarano, L. Fridman, A. Poznyak. “Exact state estimation for linear systems with unknown inputs based on hierarchical super-twisting algorithm,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. Vol. 17, No.18. pp. 1734-1753, 2007

- [Boiko *et al.* 2007] I. Boiko, L. Fridman, A. Pisano y E. Usai, "Analysis of Chattering in Systems With Second-Order Sliding Modes," *Automatic Control, IEEE Transactions* Vol. 52, No. 11. pp.2085-2102. 2007.
- [Boiko *et al.* 2007a] I.Boiko, M.I. Castellanos, L. Fridman. "Analysis of response of second-order sliding mode controllers to external inputs in frequency domain," *International Journal on Robust and Nonlinear Control*, Publicacion en linea: 2007.
- [Boiko *et al.* 2007] I Boiko, L Fridman, A Pisano y E Usai. "Performance Analysis of Second-Order Sliding-Mode Control Systems With Fast Actuators," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 52, No. 6, pp.1053-1059. 2007.
- [Boiko 2006] I. Boiko, "Method and apparatus for tuning a PID controller," *US Patent No. 7035695*, 2006.
- [Boiko y Fridman 2005] I. Boiko y L. Fridman, "Analysis of Chattering in Continuous Sliding-Mode Controllers," *Automatic Control, IEEE Transactions*, Vol. 50, No. 9, pp. 1442 – 1446. 2005.
- [Boiko 2005] Boiko I. "Analysis of sliding modes in the frequency domain," *International Journal of Control*. Vol. 78. No. 13, pp. 969-981, 2005.
- [Boiko 2005b] I. Boiko, "Oscillations and transfer properties of relay servo systems – the locus of a perturbed relay system approach," *Automatica*, Vol. 41, No. 4, pp. 677-683. 2005.
- [Boiko *et al.* 2004] I. Boiko, M. I. Castellanos, L. Fridman. "Analysis of Second Order Sliding Mode algorithms in the Frequency Domain," *IEEE Transactions On Automatic Control*, Vol. 49, No. 6, pp. 946-950. 2004
- [Boiko 2004] I. Boiko, "Analysis of sliding modes in the frequency domain," *Variable Structure Systems: from Principles to Implementation*. (Editores, A. Sabanovic, L. Fridman, y S. Spurgeon.), London, UK: IEE, pp. 177-195. 2004.
- [Boiko 2003] I. Boiko, "Frequency domain analysis of fast and slow motions in sliding modes," *Asian Journal of Control*, Vol. 5, No. 4, pp. 445-453. 2003.
- [Boiko *et al.* 2003] I. Boiko, M. I. Castellanos, L. Fridman. "Analysis of Second Order Sliding Mode algorithms in the Frequency Domain," *Proceedings of the 42nd IEEE conference on Decision and Control*, Maui, Hawaii USA, 2003.
- [Boiko 2000] I. Boiko, "Application of the locus of a perturbed relay system to sliding mode relay control design," en *Proc. 2000 IEEE Conf. On Control Applications*, Anchorage, USA, pp. 542-547, 2000.
- [Boiko 1999] I. Boiko, "Input-output Analysis of Limit Cycling Relay Feedback Control Systems," en *Proc. 1999 American Control Conference*, San Diego, CA, USA, pp. 542-546, 1999.

- [Burlington 1973] R.S. Burlington, “Handbook of mathematical tables and formulas,” *McGraw-Hill*, N.Y, 1973.
- [Bondarev *et al.* 1985] Bondarev AG, Bondarev SA, Kostilyeva NY, Utkin VI. “Sliding modes in systems with asymptotic state observers,” *Automatica i Telemekhanika (Automation and Remote Control)*, Vol. 46, No. 5, pp. 679-684. 1985.
- [Burton y Zinober 1988] J. A. Burton, A. S. I. Zinober, “Continuous self-adaptive control using a smoothed variable structure controller,” *Internat. J. Systems Sci.* Vol. 19, No. 8, pp. 1515-1528. 1988.
- [Dávila *et al.* 2005] J. Dávila, L. Fridman y A. Levant “Second-Order Sliding-Mode Observer for Mechanical Systems,” *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 50, No. 11, pp.1785-1789, 2005.
- [Dávila y Fridman 2004] J. Dávila y L. Fridman, “Observation and identification of mechanical systems via second order sliding modes,” *8th International Workshop on Variable Structure Systems*, Barcelona, 2004.
- [Edwards *et al.* 2002] C. Edwards, S. Spurgeon, y R.G. Hebden, “On development and application of sliding mode observers,” *Variable Structure Systems: Towards XXIst Century* (editpores J Xu y Y.Yu), *Lecture Notes in Control and Information Science*, Berlin, Germany: Springer Verlag, pp. 253-282. 2002.
- [Edwards *et al.* 1998] C. Edwards, y S. Spurgeon, “Sliding Mode Control: Theory and Application,” *Taylor & Francis*, London, 1998.
- [Emelyanov *et al.* 1986] Emelyanov SV, Korovin SK, Levantovsky LV. (Levant A.) “Higher order sliding modes in binary control systems,” *Soviet Physics Doklady*. Vol. 31. No.4, pp. 291–293. 1986.
- [Emelyanov *et al.* 1986b] Emelyanov SV, Korovin SK, Levantovsky LV. (Levant A.) “Second order sliding modes in controlling uncertain processes,” *Soviet Journal of Computer and System Science*, Vol. 24. No.4, pp. 63–68. 1986.
- [Fridman *et al.* 2007] Fridman, A. Levant, J. Davila, “Observation of Linear Systems with Unknown Inputs via High-Order Sliding-Mode,” *International Journal of Systems Science*, Vol. 38, No. 10, pp. 773-791, 2007.
- [Fridman *et al.* 2004] E. Fridman, A. Seuret, y J.-P. Richard, “Robust sampled-data stabilization of linear systems: an input delay approach,” *Automatica*, Vol. 40, No. 8, pp. 1441-1446. 2004.
- [Fridman 2003] L. Fridman. “Chattering analysis in sliding mode systems with inertial sensors,” *International Journal of Control*, Vol 76, No. 9/10, pp.906-912. 2003.
- [Fridman 2002a] L. Fridman “Singularly perturbed analysis of chattering in relay control systems,” *IEEE transactions on automatic Control*, Vol., 47, No. 12, pp. 2079-2084. 2002.

- [Fridman 2002] L. Fridman. “Sliding Mode Control for Systems with Fast Actuators: Singularly Perturbed Approach,” *Variable Structure Systems: Towards the 21st Century*. Editores X. Yu y J.-X. Xu, *Lecture Notes in Control and Information Science*, Vol. 274, Springer Verlag, London, pp. 391-415. 2002.
- [Fridman y Levant 2002] L. Fridman. y A. Levant, “Higher Order Sliding Modes,” Capítulo 3, Editores Barbot J.P. y W. Perruquetti, *Sliding Mode Control in Engineering*, Marcel Dekker: New York, pp.53-102. 2002.
- [Fridman 2001] L. Fridman, “An averaging approach to chattering,” *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 46, No. 8, pp.1260-1264, 2001.
- [Fridman y Levant 1996] L. Fridman, A. Levant. “Higher order sliding modes as the natural phenomena of control theory,” en *Robust Control Variable Structure and Lyapunov Techniques*. Editores Garafalo F, y Glielmo G, *Lecture Notes in Control and Information Science*, Vol. 217. Springer: London, pp. 107–133. 1996.
- [Fridman y Levant 1994] Fridman L, Levant A. “Higher order sliding modes as the natural phenomena of control theory,” *Proceedings of the Workshop Variable Structure and Lyapunov Technique*, Benevento, pp. 302–309. 1994.
- [Fridman 1986] L. Fridman. “Singular extension of the definition of discontinuous systems”, *Differentialnye uravnenija (Differential equations)*, No. 10, pp. 1461-1463. 1986.
- [Fridman 1985] L. Fridman. “Roughness analysis of sliding mode systems with discontinuous control function,” *Automatika i Telemekhanika (Automation & Remote Control)*, No.11, P. 172-176. 1985.
- [Gelb y Vander Velde 1968] A. Gelb, W.E. Vander Velde. *Multiple-Input Describing Functions and Nonlinear System Design*, McGraw-Hill, New York, 1968.
- [Gille *et al.* 1959] J.C. Gille, M.J. Pelegrin, P. Decaulne. “Feedback Control System Analysis Synthesis, and design *Feedback Control Systems: Analysis, synthesis, and design*,” McGraw-Hill, New York 1959.
- [Hsu y Meyer 1968] J.C. Hsu y A.U. Meyer. “Modern Control Principles and Applications,” McGraw Hill, New York, 1968.
- [Khalil 2002] H. K. Khalil, “Nonlinear Systems,” Tercera edicion *Prentice Hall*, 2002.
- [Kaya y Atherton 2001] I. Kaya y D.P. Atherton, “Parameter estimation from relay autotuning with asymmetric limit cycle data,” *J. Process Control*, No. 11, pp. 429-439, 2001.
- [Kaya y Atherton 1999] Kaya y D. P. Atherton, “A PI-PD Controller Design for Integrating Processes,” en *Proc. 1999 American Control Conference*, San Diego, CA, USA, pp. 258-262, 1999.

- [Kaya y Atherton 1998] I. Kaya y D.P. Atherton, "An improved parameter estimation method using limit cycle data," *UKACC Internat. Conf. on Control, IEE*, pp. 682-687, 1998.
- [Levant 2005] Levant A, "Principles of 2-sliding mode design," *Automatica*. Vol. 43, No. 4, pp.576-586. 2007.
- [Levant 2005] Levant A, "Homogeneity approach to high-order sliding mode design," *Automatica*. Vol. 41, No. 5, pp.823-830. 2005.
- [Levant y Fridman 2004] A. levant y L. Fridman, "Robustness issues of 2-sliding mode control," en *Variable Structure Systems: from Principles to Implementation*, (Editores A. Sabanovic, L. Fridman, y S. Spurgeon,eds.), London, UK: IEE, pp. 131-153. 2004.
- [Levant 2003] A. Levant, "High-order sliding modes: differentiation and output-feedback control," *International Journal of Control*, Vol. 76, No. 9-10, pp. 924-941 2003.
- [Levant 1998] A. Levant, "Robust exact differentiation via sliding mode technique," *Automatica*, Vol. 34, No. 3, , pp. 379-384. 1998.
- [Levant 1993] A. Levant, "Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control," *Int. J. Control*, Vol. 58, pp. 1247-1263, 1993.
- [Levant 1987] Levantovsky LV. (Levant A.), " Higher order sliding modes and their application for controlling uncertain processes," Disertacion de doctorado en el Intituto para Estudios de Sistemas de la URSS, Academia de Ciencias de Moscu, 1987.
- [Levant 1985] Levantovsky LV. (Levant A.), "Second Order Sliding Algorithms: Their Realization," en *Dynamic of Heterogeneous Systems*, Instituto para Estudios de Sistemas, Moscu., pp. 32-43, 1985.
- [Luenberger 1966] D.G. Luenberger, "Observers for multivariable systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 11, pp. 190-197. 1966.
- [Luyben *et al.* 1987] 19 W. L. Luyben et al., "Derivation of Transfer Functions For Highly Nonlinear Distillation Columns," *Ind. Eng. Chem. Res.* Vol.v26, pp. 2490-2495, 1987.
- [Majhi y Atherton 1999] S. Majhi y D.P. Atherton, "Autotuning and controller design for processes with small time delays," *IEE Proc. – Control Theory Appl*, Vol. 146, No. 5, pp. 415-425, 1999.
- [Majhi *et al.* 1987] S. Majhi, J.S. Sahmbi, y D.P. Atherton, "Relay feedback and wavelet based estimation of plant model parameters," *Proc. 40 IEEE Conf. on Decision and Control*, Florida, USA, pp. 3326-3331, 2001.

- [Man *et al.* 1994] Z. Man, A.P. Poplinsky y H.R. Wu, “A robust terminal sliding mode control scheme for rigid robot manipulators,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 39, No. 12, pp. 2465-2469, 1994.
- [Merzouki *et al.* 2007] R. Merzouki, J.A. Dávila, L. Fridman, y J.C. Cadiou. “Backlash Phenomenon Observation and Identification in electromechanical systems,” *Control Engineering Practice*, 15(4), pp.447-457. 2007.
- [Milosavljevic 2004] C. Milosavljevic, “Discrete-time VSS,” *en Variable Structure Systems: from Principles to Implementation*. Editores A. Sabanovic, L. Fridman, y S. Spurgeon, Londres, UK: IEE, pp. 99-128. 2004.
- [Orlov 2005] Orlov Y. “Finite-time stability and robust control synthesis of uncertain switched systems,” *SIAM Journal on Control and Optimization*. Vol. 43, No. 4, pp.1253–1271. 2005.
- [Orlov *et al.* 2003] Y. Orlov, L. Aguilar, y J. Cadiou, “Switched chattering control vs. backlash/friction phenomena in electrical servo-motors,” *International Journal of Control*, Vol. 76, No. 9-10, pp. 959-967. 2003.
- [Orlov *et al.* 2000] Y. Orlov, J. Alvarez, L. Acho. “An Invariance Principle for Discontinuous Dynamical Systems With Application to a Coulomb Friction Oscillator,” *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control, Special Issue on Variable Structure Systems*. Vol. 122, No. 4, pp. 687-690, 2000.
- [Palmor *et al.* 1995] Z. J. Palmor, Y. Halevi, y T. Efrati. “A general and exact method for determining limit cycles in decentralized relay systems,” *Automatica*, vol. 31, No. 9, pp. 1333–1339, 1995.
- [Pisano y Usai 2004] A. Pisano y E. Usai. “Output-feedback control of an underwater vehicle prototype by higher-order sliding modes,” *Automatica*, Vol. 40, pp. 1525-1531. 2004.
- [Pisano *et al.* 2003] A. Pisano y E. Usai. “An improved second-order sliding-mode control scheme robust against the measurement noise,” *Proc. on 42nd Conference on Decision and Control*, Maui, Hawaii, pp. 3519.3525, 2003.
- [Poznyak 2004] A.S. Poznyak, “Deterministic output noise effects in sliding mode observation”, *en Variable Structure Systems: from Principles to Implementation*. Editores A. Sabanovic, L. Fridman, y S. Spurgeon, Londres, UK: IEE, pp. 45-79. 2004.
- [Rosas *et al.* 2007] D. Rosas Almeida, J. Alvarez, L. Fridman. “Robust observation and identification of nDOF Lagrangian systems,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 17, No. 9, pp. 842-861, 2007.
- [Shtessel *et al.* 2003] Y. Shtessel, I. Shkolnikov, y M. Brown, “An asymptotic second-order smooth sliding mode control,” *Asian Journal of Control*, Vol. 5, No. 4, pp.498-504. 2003.

- [Shtessel *et al.* 2000] Y.B. Shtessel, D.R. Krupp y I.A. Shkolnikov, “2-Sliding Mode Control for Nonlinear Plants with Parametric and Dynamic Uncertainties,” *2000 Conf. AIAA*, pp.1-9, 2000.
- [Shtessel y Lee 1996] Y. B. Shtessel y Y. J. Lee, “New Approach to Chattering Analysis in Systems with Sliding Modes,” *Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control*, Kobe, Japon, pp. 4014-4019, 1996.
- [Sira-Ramírez *et al.* 2002] H. Sira-Ramírez, “Dynamic Second-Order Sliding Mode Control of the Hovercraft Vessel,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 10, No. 6, pp. 860–865, 2002.
- [Tsytkin 1984] Ya.Z. Tsytkin, “Relay Control Systems,” *Cambridge University Press*. Cambridge, Inglaterra, 1984.
- [Utkin *et al.* 1999] Utkin, V., Guldner, J, y SHI, J, “Sliding Modes in Control in Electromechanical System,” *Taylor & Francis*. Berlin. 1999.
- [Utkin 1992] V. Utkin, “Sliding Modes in Control and Optimization,” *Springer-Verlag*, Berlin, 1992.
- [Utkin 1983] VI. Utkin, “Sliding mode control; present and future,” *Automatika i Telemekhanika (Automation and Remote Control.)* Vol. 44, No. 3, pp.1105–1120.1983.
- [Varigonda y Georgiou 2001] S. Varigonda y T.T. Georgiou, “Dynamics of relay relaxation oscillator,” *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 46, No.1, pp. 6577. 2001.
- [Vidyasagar 1978] M. Vidyasagar, “Nonlinear system Analysis,” *Ed. Prentice-Hall, Inc.* Englewood Cliffs, New Jersey, 1978.
- [Walcott y Zak 1998] B.L. Walcott, y H. Zak, “Combined observer-controller synthesis for uncertain dynamical systems with applications,” *IEEE Trans. On Systems, Man and Cybernetics*, Vol. 18, pp. 88-104. 1988.
- [Yu 1998] T. Yu, “Terminal sliding mode control for rigid robots,” *Automatica*, Vol. 34, No. 1, pp. 51-56. 1998.
- [Ziegler y Nichols 1942] J.G. Ziegler y N.B. Nichols, “Optimum settings for automatic controllers,” *Trans. Amer. Soc. Mech. Eng.*, Vol. 64, pp. 759-768, 1942.