



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**DIVISIÓN DE INGENIERÍA MECÁNICA E INDUSTRIAL**

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LA CONVECCIÓN NATURAL  
EN UNA CAVIDAD CUADRADA CON AIRE**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE INGENIERO MECÁNICO**

**PRESENTA:**

**CÉSAR ESPINOZA VÁZQUEZ**

**DIRECTOR DE TESIS**

**Dr. MARTÍN SALINAS VÁZQUEZ**



**Ciudad Universitaria, México D.F.**

**2011**

# Agradecimientos

## **A la Universidad Nacional Autónoma de México**

Por darme el honor de pertenecer a tan distinguida Institución Educativa, y por forjar mi futuro como ingeniero, uno de mis mayores anhelos.

## **Al Dr. Martín**

Por haberme brindado todo su apoyo y orientación para la realización de esta tesis. Es una de las personas que más admiro por sus conocimientos e inteligencia, y que me enseñó implícitamente que el valor de la humildad no se debe de perder por el grado de estudios alcanzado. Gracias Doctor Martín.

## **A mis Padres**

### **Caro**

Gracias Mamá por darme todo tu apoyo todos estos años de mi vida. Mi formación nunca hubiera sido posible sin todo tu esfuerzo puesto en mí. Gracias Mamá por todo tu amor.

### **Daniel**

Por darme tus consejos, por haber confiado en mí, por ser mi guía en mi vida y sobre todo, por ser el mejor padre que la vida me dio. Te quiero Papá.

## **A los sinodales**

**Dr. Francisco Javier Solorio Ordaz**

**M.I. José Esteban Barrios Bonilla**

**Ing. Jesús Javier Cortés Rosas**

**Dr. William Vicente y Rodríguez**

Por hacer posible la culminación de este trabajo con su apoyo y orientación académica.

## **A mi hermano**

Por haberme dado ese apoyo extra en momentos difíciles que dio paso a mi formación profesional. Muchas gracias Dany.

# Índice

## Resumen

### Capítulo 1 Introducción

1.1 Aspectos preliminares .....	3
1.2 Objetivos .....	4
1.3 Motivación .....	4
1.4 Problemática .....	6

### Capítulo 2 Conceptos fundamentales

2.1 Convección natural .....	8
2.2 Capa límite de velocidad de convección natural .....	9
2.3 Capa límite térmica .....	10
2.4 Características generales de la convección natural en una cavidad cuadrada con diferencia de temperatura en las paredes verticales .....	11
2.5 Convección natural turbulenta .....	13
2.6 Números adimensionales del caso en estudio .....	14

### Capítulo 3 Ecuaciones de gobierno

3.1 Ecuaciones de gobierno.....	17
3.2 Esquema numérico y modelo de turbulencia	
3.2.1 Simulación de grandes escalas .....	19
3.2.2 Esquema numérico .....	27

### Capítulo 4 Condiciones iniciales y de frontera

4.1 Condiciones iniciales .....	29
4.2 Condiciones de frontera .....	30
4.2.1 Características de las condiciones de frontera de las ecuaciones de Navier-Stokes .....	31
4.2.2 Pared isotérmica sin deslizamiento .....	36

## **Capítulo 5 Características de la simulación**

5.1 Parámetros de referencia .....	37
5.2 Mallado de la cavidad .....	39

## **Capítulo 6 Análisis de resultados**

6.1 Validación. Comparación con resultados experimentales .....	42
6.2 Distribución de variables promedio en el plano	
6.2.1 Distribución de la temperatura .....	49
6.2.2 Distribución de la velocidad .....	51
6.2.3 Cantidades turbulentas .....	55
6.3 Variables instantáneas	
6.3.1 Estructuras turbulentas .....	64
6.3.2 Distribución de la velocidad .....	65

## **Capítulo 7 Conclusiones**

7.1 Conclusiones .....	68
------------------------	----

## **Fuentes bibliográficas**

# Resumen

En la tesis presente, se realizó una simulación numérica del fenómeno de convección natural en una cavidad cuadrada con aire. Se utilizó la técnica de Simulación de Grandes Escalas L.E.S. (por sus en inglés) para resolver las ecuaciones que gobiernan este fenómeno.

Este estudio numérico está basado en un estudio experimental realizado por Tian, Karayiannis [1], del que se tomaron las mismas condiciones de frontera para poder comparar los resultados y validar el código numérico de la simulación numérica de esta tesis.

En el Capítulo 1 se expone información preliminar acerca de este caso en estudio, los objetivos de la tesis, su problemática y la motivación para su realización.

En el Capítulo 2 se presentan algunos conceptos fundamentales de la convección natural en cavidades, enfocado al régimen turbulento. Después se mencionan los números adimensionales que caracterizan este tipo de flujos.

En el Capítulo 3 se presentan las ecuaciones de gobierno: ecuación de continuidad, conservación de la cantidad, conservación de la energía y la ecuación de gas ideal, la cual cierra el sistema para la resolución de las variables desconocidas que son la presión  $P$ , temperatura  $T$ , densidad  $\rho$  y velocidad en las 3 direcciones espaciales  $U$ ,  $V$  y  $W$ . También se describe el esquema numérico y el modelo de turbulencia de L.E.S., el cual simula las grandes escalas del flujo y las pequeñas son filtradas hacia afuera.

En el Capítulo 4 se definen las condiciones iniciales y de frontera para las ecuaciones de gobierno. Las condiciones de frontera se trataron de manera diferente en comparación con un flujo incompresible para poder lograr resultados congruentes.

Para el Capítulo 5 se muestran las características de la simulación numérica, mencionando los parámetros de referencia utilizados para la misma, así como las dimensiones del mallado en la cavidad.

En el Capítulo 6 se presenta el análisis de los resultados comenzando con la validación del código. La validación se hizo comparando los resultados del estudio experimental mencionado anteriormente con los resultados numéricos. Después se presentan los resultados de las variables promedio de la simulación numérica de esta tesis. Más

## Resumen

---

adelante se muestra el análisis de los resultados para las variables instantáneas, que son las isosuperficies de criterio Q y la distribución de la velocidad horizontal y vertical.

El Capítulo 7 contiene las conclusiones de esta tesis y finaliza con las fuentes bibliográficas que se consultaron para su elaboración.

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Aspectos preliminares

La convección natural en cavidades cerradas se ha estudiado experimental y numéricamente de forma extensa. Las aplicaciones de ingeniería basadas en el fenómeno de convección natural, con frecuencia, implican transferencia de calor entre superficies que están a diferentes temperaturas y se encuentran separadas por un fluido encerrado.

Entre las diversas configuraciones de cavidades cerradas se encuentran las cavidades rectangulares, de las que se tienen: cavidad horizontal con calentamiento en la pared superior, inferior o calentamiento en alguna pared lateral; cavidad vertical con calentamiento superior inferior o lateral; cavidades cuadradas, cavidades con diversas relaciones de forma, cavidades con paredes inclinadas, cavidades triangulares, cavidades trapezoidales, cilindros concéntricos, entre otras. La mayoría de los estudios numéricos y experimentales tienen un interés en particular en aquellas en el que el gradiente de temperatura se encuentra en la dirección normal a las paredes paralelas.

El propósito de este estudio es analizar numéricamente los campos de flujo térmico, movimiento del fluido y las cantidades turbulentas del fenómeno de convección natural turbulenta en una cavidad cuadrada llena con aire, debido a que muchas aplicaciones como por ejemplo cavidades de colectores solares, flujo de aire en cuartos y otras estructuras de edificios como ventanas de doble panel; refrigeración de equipos electrónicos, hornos, etc., pueden ser simplificadas a esta geometría.

Además, se pretende validar el código CFD empleado en esta simulación numérica comparando los resultados obtenidos por un estudio experimental para el mismo caso realizado por Tian, Karayiannis [1], utilizando las mismas condiciones de frontera.

### 1.2 Objetivos

- Comparar los resultados obtenidos de la simulación numérica con el estudio experimental realizado por Y.S. Tian y T.G. Karayiannis [1], a fin de proveer datos de referencia que conlleven a la validación del código CFD para el fenómeno de convección natural en una cavidad cuadrada llena con aire.
- Analizar los resultados de velocidad y temperatura promedio.
- Analizar las cantidades turbulentas derivadas de la simulación, así como de las variables instantáneas.

### 1.3 Motivación

Como se dijo anteriormente, muchas de las aplicaciones en ingeniería corresponden a la cavidad cuadrada debido a que éstas se simplifican a esta geometría.

En estudios numéricos, la convección natural en cavidades cerradas representa un problema de flujo no lineal, además de que proporciona un vehículo conveniente para el desarrollo de nuevos análisis y nuevos algoritmos numéricos. Muchos de los trabajos realizados han sido concentrados en flujos laminares y han logrado un éxito considerable. Sin embargo, el estudio de la convección natural turbulenta sigue atrayendo la atención de investigadores especialmente en el nivel de régimen turbulento bajo. A pesar de la evolución en las técnicas de medición e instrumentación, así como en los métodos numéricos y la mejora en la capacidad de cómputo, el estudio de la convección natural turbulenta sigue siendo un reto tanto en términos numéricos como experimentales.

Avanzadas técnicas experimentales se han utilizado anteriormente, pero no sin dificultades; el trabajo experimental preciso ha sido limitado por los valores bajos de velocidad absoluta y el hecho de que el flujo y la transferencia de calor en el interior de una cavidad rectangular son muy sensibles al experimento y a las condiciones de contorno. En estudios numéricos, lo estricto del acoplamiento de la capa límite y el flujo central hacen que el proceso de cómputo sea difícil. Asimismo, la simulación directa de la convección natural turbulenta en una cavidad es demasiado costosa. Los resultados numéricos de los distintos modelos  $k-\epsilon$  no son únicos. Además, ninguno de los modelos de turbulencia puede predecir correctamente el campo de velocidad y temperatura en su totalidad.



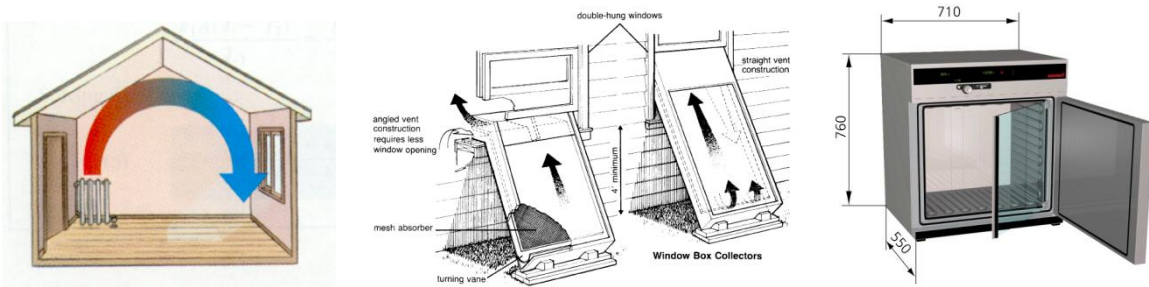


Figura 1.1. Algunas aplicaciones de la convección natural en cavidades

El estudio de la convección natural turbulenta en cavidades puede tener su aplicación en el acondicionamiento de habitaciones o recintos como sistemas de ahorro de energía eléctrica; se pueden utilizar las corrientes de convección libre para lograr una temperatura confortable y un buen suministro de aire dentro de estos, y con ello no depender de un sistema de aire acondicionado, lo que nos ahorraría dinero y una disminución del daño ambiental al no requerir energía eléctrica para estos sistemas.

La cavidad rectangular es la más extensamente estudiada. Actualmente se disponen de revisiones comprensivas y correlaciones de resultados experimentales y teóricos para la cavidad rectangular. Sin embargo las ecuaciones determinadas para esta cavidad sólo son válidas dentro de un rango para los parámetros adimensionales involucrados como el número de Rayleigh, el número de Prandtl y la razón de forma de la cavidad.

Este estudio numérico está enfocado en el fenómeno de convección natural en una cavidad cuadrada llena con aire. Las dimensiones de la cavidad fueron de  $0.75\text{ m} \times 0.75\text{ m} \times 1.5\text{ m}$ , prevaleciendo un flujo bidimensional. Se reportan resultados para la condición de paredes verticales isotérmicas caliente y fría a  $50$  y  $10$  °C respectivamente, dando un número de Rayleigh de  $Ra = 1.58 \times 10^9$  y con paredes horizontales conductivas superior e inferior con un perfil de temperatura cúbico. La distribución de la temperatura velocidad promedio, el número de Nusselt local y las cantidades turbulentas también son reportados.

En términos generales, el estudio de la convección natural turbulenta en cavidades es todavía una etapa temprana. Correlaciones de estudios experimentales están disponibles para la determinación de las características del flujo y la obtención de la relación entre el número de Nusselt (ya sea local o promedio) con el coeficiente de transferencia de calor por convección, y que llevaría a su vez con la predicción de la transferencia de calor a lo largo de la cavidad. Sin embargo, una comparación de entre los perfiles experimentales y numéricos de velocidad y temperatura revela discrepancias. También, como se ha

mencionado, los resultados experimentales son principalmente para condiciones de frontera no idealizadas y los resultados numéricos no son libres de ninguna solución única.

Además, el estudio de las cantidades turbulentas se encuentra en una etapa inicial. Por lo tanto, experimentos y análisis numéricos llevados a cabo cuidadosamente son requeridos para proporcionar datos de referencia confiables.

### 1.4 Problemática

La convección natural turbulenta es difícil de estudiar y analizar ya que sus valores de velocidad son mucho menores que en la convección forzada, además de que es un problema que se rige por ecuaciones no lineales. El flujo en cavidades rectangulares representa una de las más simples geometrías con muchas aplicaciones en la industria y en la naturaleza. Sin embargo, la convección natural turbulenta en cavidades verticales es uno de los problemas de dinámica de fluidos más complicados. Esta complejidad es caracterizada por los siguientes factores: primeramente, el flujo en cavidades verticales puede incluir simultáneamente regiones de flujo laminar, en transición y turbulento con un número de Rayleigh que sobrepasa un valor crítico. En segundo lugar, se tienen condiciones de anisotropía en las regiones turbulentas y próximas a las paredes de la cavidad. Tercero, en el acoplamiento entre la capa límite y la región del núcleo, ni el flujo en la capa límite ni el flujo en la región del núcleo pueden ser determinadas por las condiciones de frontera solamente.

Algunas de las ecuaciones con variables dimensionales permiten conocer resultados característicos del fenómeno de convección natural. Sin embargo en problemas con geometrías más complejas, el conjunto acoplado de las ecuaciones diferenciales de conservación de la masa, cantidad de movimiento y conservación de la energía no pueden integrarse de forma analítica, y es entonces cuando se recurre a la integración numérica o a la realización de experimentos físicos cuidadosamente diseñados, con el inconveniente que requieren altos recursos computacionales, de tiempo y de costo. Es por ello que los números adimensionales que se generan cuando se eliminan las dimensiones de las ecuaciones son extremadamente útiles y pueden ahorrar mucho tiempo y esfuerzo. Las ventajas de los números adimensionales son que se reducen el número de parámetros involucrados del caso en estudio así como una interpretación física que determinan condiciones y propiedades para un sistema.

Existen estudios experimentales que determinan soluciones con correlaciones empíricas de números adimensionales para el caso laminar. Estos estudios se vuelven más complejos cuando se estudia sobre geometrías más complicadas, en el régimen

turbulento y con condiciones de frontera reales, entonces las correlaciones experimentales previamente obtenidas ya no son válidas.

Un número significativo de trabajos experimentales y teóricos se han llevado a cabo en las últimas dos décadas en un intento de comprender el flujo en cavidades cerradas. Catton [2], Hoogendoorn [3], Ostrach [4] y Yang [6] dan conclusiones preliminares muy buenas, abarcando los primeros trabajos en esta área. En 1992, muchos investigadores en el Eurotherm Seminar 11 [9], hicieron su aporte para el caso estándar ( $Ra = 5 \times 10^8$ ,  $Ar_x = 1$ ) con paredes horizontales adiabáticas. La concordancia entre las contribuciones fue particularmente buena para las cantidades en la capa interna (desde la pared hasta la velocidad máxima), por ejemplo, en la mitad de lo alto de la cavidad, la mitad de los resultados obtenidos de la transferencia de calor en la pared y la velocidad vertical máxima difieren por menos del 5% y 1% respectivamente. Sin embargo, en las cantidades turbulentas reportadas, las diferencias fueron significantes. Los resultados numéricos para el caso estándar no son confirmados por ninguno de los resultados experimentales, porque las suposiciones de condiciones de frontera adiabáticas en las paredes horizontales son extremadamente complicadas de realizar en cavidades que encierran un fluido. Hasta ahora, los datos experimentales de convección natural turbulenta siguen siendo escasos por mucho para una cavidad cuadrada con respecto a los experimentos llevados a cabo con cavidades grandes o altas.

## Capítulo 2

# Conceptos fundamentales

### 2.1 Convección natural

La convección natural se origina cuando una fuerza de cuerpo actúa sobre un fluido en el que existen gradientes de densidad. El efecto neto es una fuerza de empuje, que induce corrientes de convección libre (movimiento del fluido). En el caso más común, el gradiente de densidad se debe a un gradiente de temperatura, y la fuerza de cuerpo se debe al campo gravitacional, aunque también puede ser una fuerza centrífuga en una maquinaria de fluido giratoria o una fuerza de Coriolis en movimientos atmosféricos y oceánicos rotacionales.

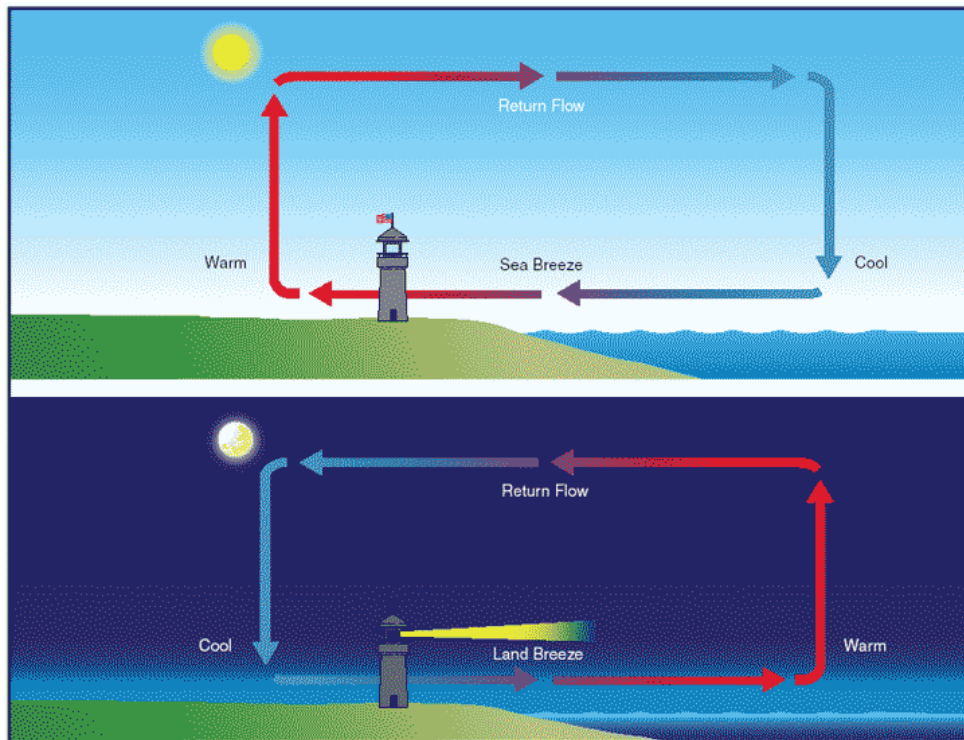


Figura 2.1. Representación del fenómeno de convección natural en un ambiente marino.

Las velocidades del flujo de convección natural generalmente son mucho menores que las de la convección forzada y, por consiguiente, la transferencia de calor por convección natural es menor. Sin embargo, su estudio toma relevancia cuando se desea minimizar la transferencia de calor o minimizar algún costo de producción, además de que este fenómeno (en algunos casos en combinación con otros tipos de movimientos) da origen a los movimientos de fluido más grandes que ocurren en el planeta.

Los flujos de convección libre se originan principalmente de una inestabilidad térmica; el fluido caliente y de baja densidad sube y el fluido frío baja por acción de la gravedad debido a que su densidad es mayor en relación con el fluido caliente.\* A partir de un valor de referencia, las condiciones son inestables y las fuerzas de empuje o de flotación son capaces de vencer la influencia de retardo de las fuerzas viscosas. Las fuerzas de flotación dan como resultado el movimiento del fluido al actuar un campo de fuerzas de cuerpo como la gravedad. Sin la acción de este campo de fuerzas, las fuerzas de empuje no estarían presentes y por lo tanto el fluido permanecería en un estado estacionario. La distribución de la velocidad de la capa límite de convección natural que resulta es diferente de la que se asocia con capas límite de convección forzada.

### 2.2 Capa límite de velocidad de convección natural

La capa límite de velocidad, como en la convección forzada, se define como aquella región de la corriente donde se manifiestan las fuerzas de viscosidad. Como se dijo, el perfil de velocidades en la capa límite de convección natural es completamente distinto al perfil de velocidades en la capa límite de la convección forzada. Considérese la figura 1.2, la pared vertical se encuentra a una temperatura  $T_p$  y la temperatura del fluido en reposo es  $T_\infty$ , con  $T_p > T_\infty$ , y cuya densidad es  $\rho_\infty$ . En la pared a  $x = 0$  la velocidad es nula  $v(x) = 0$ , por la condición de no deslizamiento; aumenta hasta un valor máximo y después disminuye hasta cero en el borde de la capa límite, ya que las condiciones de la corriente libre están en reposo en el sistema de convección natural. El desarrollo inicial de la capa límite es laminar; pero a una cierta distancia del inicio de la capa, dependiendo de las propiedades del fluido y de la diferencia de temperaturas entre la pared y el ambiente, se forman torbellinos, y comienza la transición a capa límite turbulenta. Más arriba, sobre la superficie de la pared, la capa límite puede alcanzar un nivel de turbulencia, que dependerá de las condiciones de frontera del caso en estudio.

\* Excluyendo el caso en el que la densidad no disminuye en la dirección de la fuerza gravitacional.

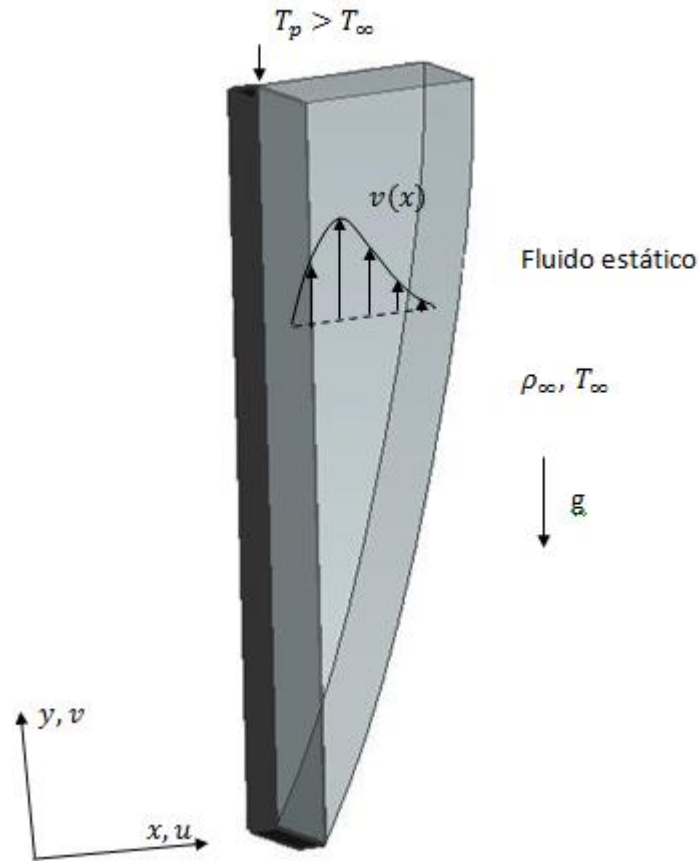


Figura 1.2. Distribución de la velocidad en la capa límite de convección natural en una superficie vertical con temperatura  $T_p > T_\infty$ .

### 2.3 Capa límite térmica

La capa límite térmica se puede definir como la región de la corriente donde se presentan gradientes de temperatura. Estos gradientes de temperatura pueden estar originados por un proceso de intercambio de calor entre el fluido y la pared. Considérese el sistema mostrado en la figura 1.3. La temperatura de la pared es  $T_p$  y la temperatura del fluido fuera de la capa límite térmica es  $T_\infty$ , con  $T_p > T_\infty$ . El perfil de temperatura es uniforme al inicio de la pared con  $T(x) = T_\infty$ . Sin embargo, las partículas que hacen contacto con la placa alcanzan el equilibrio térmico a la temperatura de la superficie de la placa. A su vez estas partículas intercambian energía con las de la capa contigua del fluido, y se producen en el fluido gradientes de temperatura. El espesor de la capa límite térmica se le designa como  $\delta_t$ . En la pared, la velocidad es cero, y la transferencia de calor hacia el

fluido tiene lugar por conducción. Al aumentar la distancia desde el inicio de la capa límite térmica, los efectos de transferencia de calor penetran más en el flujo libre.

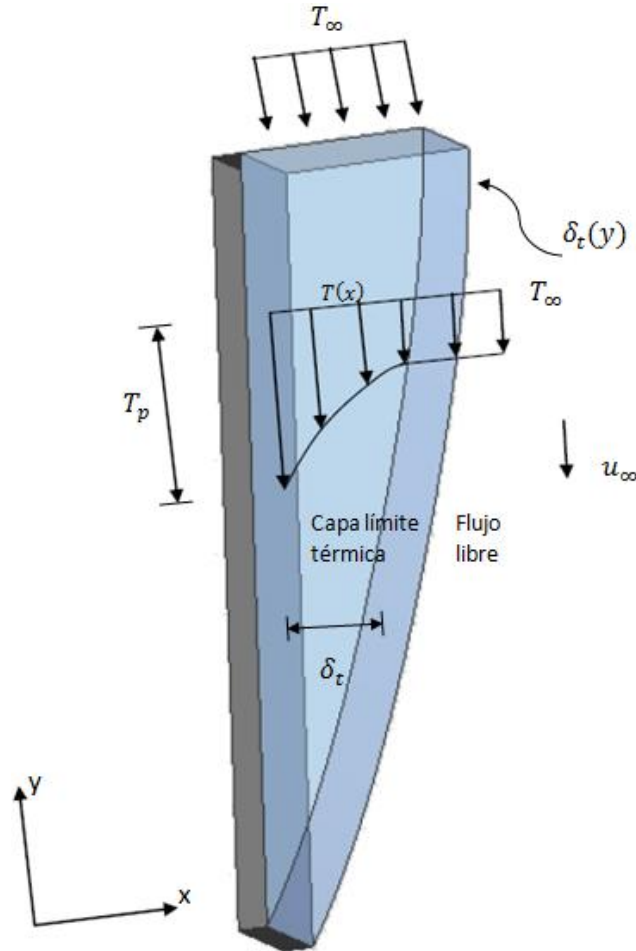


Figura 1.3. Distribución de la temperatura en la capa límite térmica sobre una pared vertical plana isotérmica.

#### 2.4. Características generales de la convección natural en una cavidad cuadrada con diferencia de temperatura en las paredes verticales

Como sabemos, el fenómeno de convección natural en una cavidad cuadrada llena con aire con un gradiente de temperatura en las paredes verticales con  $T_{pc} > T_{pf}$  en presencia de una fuerza de cuerpo, producirá un patrón de circulación esencial, como se muestra en la figura 1.4. En la cavidad, el aire más pesado descenderá debido al aumento de su densidad al estar en contacto con la pared vertical fría y con temperatura  $T_{pf}$ , enfriándose a lo largo de esta pared, mientras que el fluido más ligero se elevará al

intercambiar calor con la pared vertical caliente con temperatura  $T_{pc}$ , calentándose conforme se mueve a lo largo de esta pared y su vez, disminuyendo su densidad. Las fuerzas de empuje actuando sobre el aire más denso de las regiones contiguas a la pared fría serán menores a las que actúa sobre el fluido más ligero en las regiones cercanas a la pared caliente.

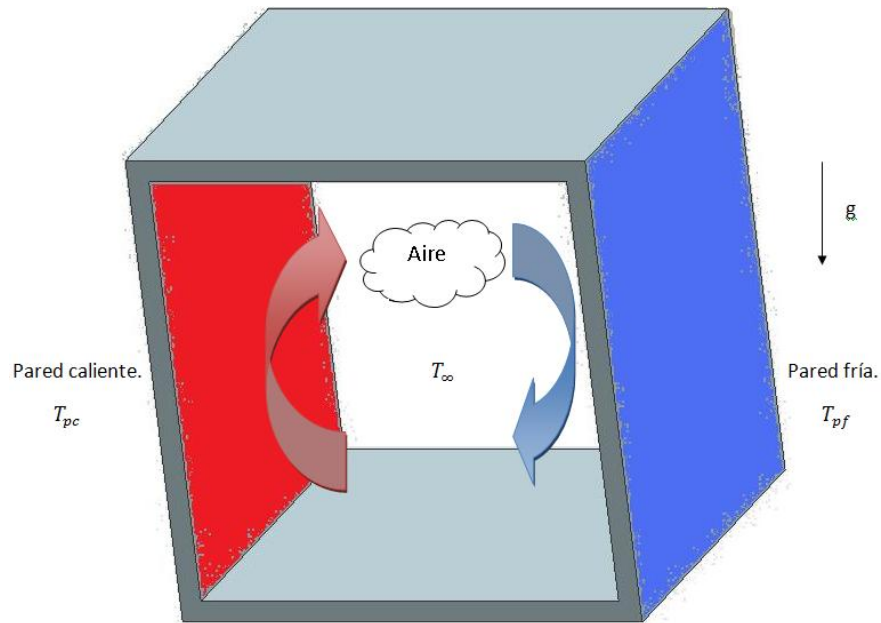


Figura 1.4. Representación de una cavidad cuadrada llena con aire con paredes verticales a diferentes temperaturas. Se muestra la estructura principal del flujo de aire.

En un estado estacionario, en la pared vertical isotérmica con temperatura  $T_{pc} > T_{\infty}$ , el fluido próximo a esta es de menor densidad que el fluido de la región en reposo (núcleo de la cavidad). Las fuerzas de flotación inducen por lo tanto una capa límite de convección natural en la que el fluido caliente se eleva verticalmente.

En la pared vertical isotérmica con  $T_{pf} < T_{\infty}$ , ahora el fluido adyacente es de mayor densidad que el fluido cercano a la pared caliente y que el fluido en reposo. Las fuerzas de flotación ahora son menores e inducen una capa límite de convección natural en la que el fluido tiene un movimiento vertical hacia abajo, produciéndose la estructura de recirculación del fluido desde la región en reposo.



## 2.5 Convección natural turbulenta

La transferencia de calor por convección depende en gran medida si se tiene la condición de flujo laminar o flujo turbulento. En la capa límite laminar, el movimiento del fluido se caracteriza por un movimiento *ordenado* del fluido en forma de “*láminas*” a lo largo de las cuales se mueven las partículas. La componente de velocidad normal a la superficie contribuirá de manera significativa a la transferencia de momento, energía o especies a través de la capa límite.

El movimiento del fluido en la capa límite turbulenta es altamente irregular y se caracteriza por fluctuaciones de algunas propiedades del campo de flujo dependientes de las características del mismo. La evolución al inicio de la capa límite es laminar, pero a una distancia crítica desde el principio de la capa y dependiendo del campo de flujo y de las propiedades del fluido, comienzan a amplificarse pequeñas perturbaciones dentro de la capa límite, fluctuando algunas propiedades del campo de flujo, por ejemplo, las fluctuaciones en la velocidad aumentan la transferencia de momento, energía y especies. La mezcla del fluido que resulta de las fluctuaciones produce espesores de la capa límite turbulenta más grandes y perfiles de la capa límite (velocidad, temperatura y concentración) más planos que en el flujo laminar. En la región completamente turbulenta, las condiciones se caracterizan por un movimiento tridimensional aleatorio de porciones grandes de fluido.

Una región muy delgada cercana a la superficie de la placa tiene carácter viscoso, y la acción de la viscosidad y la transferencia de calor, tienen lugar en circunstancias parecidas a las que se dan en el flujo laminar. A una distancia mayor sobre la placa, el flujo es parcialmente turbulento, pero las fuerzas de viscosidad y la conducción del calor todavía son importantes. A esta zona se la llama *capa de transición*. Todavía más lejos, el flujo es completamente turbulento, y el mecanismo principal de intercambio de cantidad de movimiento y de calor implica porciones de fluido moviéndose de un lado a otro por la corriente. En esta región completamente turbulenta, se habla de *viscosidad turbulenta* y de *conductividad térmica turbulenta*. Estas propiedades turbulentas pueden ser 10 veces mayores que los valores moleculares. El mecanismo físico de la transferencia de calor con flujo turbulento es bastante parecido al del flujo laminar; la principal diferencia es que se debe trabajar con las propiedades turbulentas en lugar de la conductividad térmica y la viscosidad ordinarias. La principal dificultad en un tratamiento analítico es que esas propiedades turbulentas varían a lo largo de la capa límite, y la variación específica solo puede determinarse a partir de datos experimentales. De esta manera, todos los análisis del flujo turbulento deben apoyarse finalmente en datos experimentales, porque no

existe ninguna teoría completamente adecuada para predecir el comportamiento del flujo turbulento.

## 2.6 Números adimensionales del caso en estudio

### *Razón de forma*

La razón de forma para una cavidad determina si esta es vertical u horizontal. Es la razón de la altura  $H$  con el ancho  $L$  de la cavidad:

$$Ar_x = \frac{H}{L}$$

### *Número de Grashof*

El número de Grashof proporciona una medida de la razón de las fuerzas de empuje a las fuerzas viscosas en la capa límite hidrodinámica. Su papel en la convección natural es el mismo que tiene el número de Reynolds en la convección forzada. Se determina como:

$$Gr = \frac{g\beta(T_h - T_c)L^3}{\nu^2}$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad ( $m/s^2$ ),  $\beta$  es el coeficiente de expansión térmica ( $K^{-1}$ ),  $\nu$  es la viscosidad cinemática del fluido ( $m^2/s$ ) y  $L$  (m) es una longitud característica del caso en estudio.

### *Número de Prandtl*

El número de Prandtl es la razón de las difusividades de momento y térmica para un fluido, y se expresa como:

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$

donde  $\nu$  es la viscosidad cinemática ( $\text{m}^2/\text{s}$ ) y  $\alpha$  es el coeficiente de difusividad térmica ( $\text{m}^2/\text{s}$ ).

Si el número de Prandtl es bajo, el fluido tiene una mayor transferencia de calor por conducción que por convección como sucede con el mercurio. Si este número es alto, la transferencia de calor será mayor por convección que por conducción, como lo es con el aceite.

### **Número de Rayleigh**

El número de Rayleigh es el parámetro adimensional que correlaciona la transición en una capa límite de convección natural de laminar a turbulenta, dependiente de la magnitud relativa de las fuerzas de empuje y viscosa en el fluido. Se calcula como:

$$Ra = Gr_{x,c} Pr = \frac{g\beta(T_h - T_c)L^3}{\alpha\nu}$$

Número de Rayleigh basado en la altura:

$$Ra_H = \frac{g\beta(T_h - T_c)H^3}{\alpha\nu}$$

donde  $H$  (m) es la altura de la cavidad.

### **Número de Nusselt**

Este parámetro es igual al gradiente de temperatura adimensional en la superficie y proporciona una medida de la transferencia de calor por convección que ocurre en la superficie.

$$Nu = \frac{hL}{k_f} = -\frac{L}{T_h - T_c} \frac{\partial T}{\partial x_i} \Big|_w$$

donde  $k_f$  es la conductividad térmica del fluido (W/m·K) y  $h$  es el coeficiente local de transferencia de calor por convección.

El número de Nusselt es para la capa límite térmica lo que el coeficiente de fricción es a la capa límite de velocidad.

### ***Velocidad de flotación***

La velocidad de flotación es una velocidad de referencia arbitraria, ya que las condiciones del flujo libre en la convección natural están en reposo. Para este estudio está definida como:

$$U_0 = \sqrt{g\beta\Delta TH}$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad ( $m/s^2$ ),  $\beta$  es el coeficiente de expansión térmica ( $K^{-1}$ ),  $T$  es la temperatura (K) y  $H$  es la altura de la cavidad (m).

## Capítulo 3

# Ecuaciones de gobierno

### 3.1 Ecuaciones de gobierno del fenómeno.

En un marco de referencia cartesiano  $x, y, z$  las ecuaciones de flujo compresible de Navier – Stokes pueden ser escritas de la forma:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} = \mathbf{S} \quad (3.1)$$

Donde  $\mathbf{U}$  es un vector de cinco componentes definido por:

$$\mathbf{U} = {}^T (\rho, \rho u_1, \rho u_2, \rho u_3, \rho e) \quad (3.2)$$

Se considera además que  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  es el vector velocidad,  $\rho$  es la densidad. También el vector velocidad se escribe como  $\mathbf{u} = (u, v, w)$ . La ecuación (3.1) representa la evolución de la densidad (ecuación de continuidad), cantidad de movimiento y energía total definida para un gas ideal como:

$$\rho e = \rho C_v T + \frac{1}{2} \rho (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) \quad (3.3)$$

$\mathbf{F}_i$  son flujos donde  $\forall i \in \{1, 2, 3\}$ , y para un fluido Newtoniano esta dado por:

$$F_i = \begin{pmatrix} \rho u_i \\ \rho u_i u_1 + p \delta_{i1} - 2\mu S_{i1} \\ \rho u_i u_2 + p \delta_{i2} - 2\mu S_{i2} \\ \rho u_i u_3 + p \delta_{i3} - 2\mu S_{i3} \\ (\rho e + p) u_i - 2\mu u_j S_{ij} - k \frac{\partial T}{\partial x_i} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

$k = \rho C_p \kappa$  es la conductividad térmica y  $\kappa$  la difusividad térmica.  $\delta_{ij}$  es el índice de Kronecker y  $S_{ij}$  es el componente divergencia del tensor deformación. Despreciando la viscosidad,  $S_{ij}$  se escribe:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \delta_{ij} \right) \quad (3.5)$$

La viscosidad molecular se establece a través de la ley empírica Sutherland:

$$\mu(T) = \mu(T_{ref}) \left( \frac{T}{T_{ref}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1 + \frac{S}{T_{ref}}}{1 + \frac{S}{T}} \quad (3.6)$$

Donde  $S$ ,  $T_{ref}$  y  $\mu(T_{ref})$  son funciones del gas. La conductividad  $k(T)$  se obtiene asumiendo que el número molecular de Prandtl es:

$$Pr = \frac{\nu}{k} = \frac{C_p \mu(T)}{k(T)} \quad (3.7)$$

Para este análisis se considera de 0.7. La ecuación clásica de estado para gas ideal referente a la presión estática  $p$ , la temperatura  $T$ , y la densidad  $\rho$ :

$$p = R\rho T \quad (3.8)$$

la cual cierra el sistema, con  $R = C_p - C_v$ . También se debe recordar que  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  es constante.

Debe observarse que el término forzado es equivalente a la imposición de un gradiente de presión de un flujo medio y constituye un camino conveniente y convencional para alcanzar de manera numérica la homogeneidad en la dirección del flujo.

### 3.2 Esquema numérico y modelo de turbulencia

#### 3.2.1 Simulación de Grandes Escalas (L.E.S.)

La técnica L.E.S. (Large-Eddy Simulation) consiste en hacer pruebas para simular únicamente las grandes escalas del flujo; las pequeñas escalas son filtradas hacia fuera, pero estadísticamente influye en el movimiento la escala grande. Las ecuaciones de LES son encontradas por la aplicación de un filtro espacial de bajo transcurso  $G_\Delta(x)$  de tamaño  $\Delta$  en las ecuaciones de Navier – Stokes. Esto elimina las escalas más pequeñas que el filtro de tamaño  $\Delta$  llamado escala sub – malla. Matemáticamente, la operación de filtrado corresponde a la integral de convolución de alguna cantidad  $f(x,t)$  del flujo por la función filtro  $G_\Delta(x)$ , en la forma:

$$\bar{f}(x,t) = \int f(y,t)G_\Delta(x-y)dy \quad (2.9)$$

La parte submalla es la desviación del flujo actual con respecto al campo filtrado.

$$f = \bar{f} + f' \quad (2.10)$$

La aplicación del filtro a las ecuaciones compresibles de Navier – Stokes produce:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \bar{F}_3}{\partial x_3} = 0 \quad , \quad (2.11)$$

con

$$\bar{\rho e} = \bar{\rho C_v T} + \frac{1}{2} \overline{\rho (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)} \quad , \quad (2.12)$$

Y

$$\bar{\rho} = \overline{\rho R T} \quad . \quad (2.13)$$

Para derivar un formalismo tan cercano como sea posible al formalismo incompresible, es común en modelos de turbulencia estadística y en LES introducir el promedio de Favre. Se denota por  $\tilde{f}$  el peso – densidad filtrado de  $f$ , definido como:

$$\tilde{f} = \frac{\overline{\rho f}}{f} \quad (2.14)$$

Entonces se tiene que:

$$U = {}^T (\bar{\rho}, \bar{\rho} \tilde{u}_1, \bar{\rho} \tilde{u}_2, \bar{\rho} \tilde{u}_3, \bar{\rho} \tilde{e}) \quad (2.15)$$

y la energía total resuelta se escribe:

$$\bar{\rho e} = \bar{\rho} \tilde{e} = \bar{\rho C_v \tilde{T}} + \frac{1}{2} \overline{\rho (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)} \quad (2.16)$$

Los flujos resueltos  $\bar{F}_i$  son:



$$\bar{\mathbf{F}}_i = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \tilde{u}_i \\ \overline{\rho u_i u_1} + \bar{p} \delta_{i1} - \overline{2\mu S_{i1}} \\ \overline{\rho u_i u_2} + \bar{p} \delta_{i2} - \overline{2\mu S_{i2}} \\ \overline{\rho u_i u_3} + \bar{p} \delta_{i3} - \overline{2\mu S_{i3}} \\ \overline{(\rho e + p) u_i} - \overline{2\mu u_j S_{ij}} - k \frac{\partial T}{\partial x_i} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

con la ecuación filtrada de estado:

$$\bar{p} = \bar{\rho} R \bar{T} \quad (2.18)$$

Se puede introducir el tensor esfuerzo – submalla  $\bar{\mathcal{F}}$  con componentes:

$$\mathcal{F}_{ij} = -\overline{\rho u_i u_j} + \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j, \quad (2.19)$$

el cual se puede dividir en sus partes isotrópica y desviador, la siguiente ecuación lo denota:

$$\mathcal{F}_{i,j} = \underbrace{\mathcal{F}_{ij} - \frac{1}{3} \mathcal{F}_{ll} \delta_{ij}}_{\tau_{i,j}} + \frac{1}{3} \mathcal{F}_{ll} \delta_{ij} \quad (2.20)$$

Entonces, las ecuaciones (2.17) y (2.18) pueden ser leídas como:

$$\bar{\mathbf{F}}_i = \begin{pmatrix} \bar{\rho}\tilde{u}_i \\ \bar{\rho}\tilde{u}_1\tilde{u}_i + (\bar{p} - \frac{1}{3}\mathcal{J}_{ll})\delta_{i1} - \tau_{i1} - \overline{2\mu S_{i1}} \\ \bar{\rho}\tilde{u}_1\tilde{u}_2 + (\bar{p} - \frac{1}{3}\mathcal{J}_{ll})\delta_{i2} - \tau_{i2} - \overline{2\mu S_{i2}} \\ \bar{\rho}\tilde{u}_1\tilde{u}_3 + (\bar{p} - \frac{1}{3}\mathcal{J}_{ll})\delta_{i3} - \tau_{i3} - \overline{2\mu S_{i3}} \\ (\rho e + p)u_i - \overline{2\mu u_j S_{ij}} - k\frac{\partial T}{\partial x_i} \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

y

$$\bar{\rho}\tilde{e} = \bar{\rho}C_v\tilde{T} + \frac{1}{2}\bar{\rho}(\tilde{u}_1^2 + \tilde{u}_2^2 + \tilde{u}_3^2) - \frac{1}{2}\mathcal{J}_{ll} \quad (2.22)$$

Una formulación elegante fue propuesta por Comte & Lesieur (1997), a través de la introducción de una macro – presión y una macro – temperatura definida como:

$$\varpi = \bar{p} - \frac{1}{3}\mathcal{J}_{ll} \quad (2.23)$$

y la macro – temperatura,

$$\vartheta = \tilde{T} - \frac{1}{2C_v\bar{\rho}}\mathcal{J}_{ll} \quad (2.24)$$

La ecuación filtrada de estado (2.18) puede ser escrita como:

$$\varpi = \bar{\rho}R\vartheta + \frac{3\gamma - 5}{6}\mathcal{J}_{ll} \quad (2.25)$$

La ventaja principal de esta ecuación es que podemos derivar un sistema cerrado de ecuaciones en las cuales el desconocido  $\mathcal{J}_{ll}$  del tensor submalla no aparece

explícitamente más extenso. De hecho, puede ser demostrado que la energía total resuelta se escribe:

$$\overline{\rho \tilde{e}} = \overline{\rho} C_v \mathcal{G} + \frac{1}{2} \overline{\rho} \left( \tilde{u}_1^2 + \tilde{u}_2^2 + \tilde{u}_3^2 \right) \quad (2.26)$$

Además, para  $\gamma = 1.4$ , fue demostrado por Comte y Lesieur (1997) que se justifica completamente despreciar el segundo término del lado derecho de la ecuación (2.25). Podemos entonces escribir:

$$\varpi \approx \overline{\rho} R \mathcal{G} \quad (2.27)$$

Esto hace que  $\varpi$  sea calculable si  $\overline{\rho}$  y  $\mathcal{G}$  son conocidas.

Necesitamos introducir después el vector de flujo de calor, denotado por  $\mathbf{Q}$ , con componentes:

$$Q_i = -\overline{(\rho e + p) u_i} + (\overline{\rho \tilde{e}} + \varpi) u_i \quad (2.28)$$

La expresión exacta para los flujos filtrados entonces se convierte en:

$$\overline{F}_i = \begin{pmatrix} \overline{\rho} \tilde{u}_i \\ \overline{\rho \tilde{u}_i \tilde{u}_1} + \varpi \delta_{i1} - \tau_{i1} - \overline{2\mu S_{i1}} \\ \overline{\rho \tilde{u}_i \tilde{u}_2} + \varpi \delta_{i2} - \tau_{i2} - \overline{2\mu S_{i2}} \\ \overline{\rho \tilde{u}_i \tilde{u}_3} + \varpi \delta_{i3} - \tau_{i3} - \overline{2\mu S_{i3}} \\ (\overline{\rho \tilde{e}} + \varpi) \tilde{u}_i - Q_i - \overline{2\mu u_j S_{ij}} - k \frac{\partial T}{\partial x_i} \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

El sistema descrito arriba se puede cerrar haciendo uso de los modelos submalla comunes basados en una viscosidad turbulenta:

$$\tau_{ij} \approx \bar{\rho} \nu_t \tilde{S}_{ij} \quad (2.30)$$

$$Q_i \approx \bar{\rho} C_p \frac{\nu_t}{Pr_t} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_i} \quad (2.31)$$

Los términos restantes no calculables son los términos de viscosidad molecular y difusivo, que se pueden considerar de menor importancia cuando el número de Reynolds es suficientemente grande. Por lo tanto simplemente reemplazamos (2.29) por:

$$\bar{F}_i \approx \left( \begin{array}{c} \bar{\rho} \tilde{u}_i \\ \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_1 + \varpi \delta_{i1} - 2(\bar{\mu} + \bar{\rho} \nu_t) \tilde{S}_{i1} \\ \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_2 + \varpi \delta_{i2} - 2(\bar{\mu} + \bar{\rho} \nu_t) \tilde{S}_{i2} \\ \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_3 + \varpi \delta_{i3} - 2(\bar{\mu} + \bar{\rho} \nu_t) \tilde{S}_{i3} \\ (\bar{\rho} \tilde{e} + \varpi) \tilde{u}_i - 2(\bar{\mu} + \bar{\rho} \nu_t) \tilde{S}_{ij} \tilde{u}_j - \left[ \bar{k} + \bar{\rho} C_p \frac{\nu_t}{Pr_t} \right] \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_i} \end{array} \right) \quad (2.32)$$

En donde  $\bar{\mu}$  y  $\bar{k}$  son ligadas con  $\mathcal{G}$  a través de la relación de Sutherland (2.6), un número de Prandtl molecular constante es asumido  $Pr = C_p \frac{\bar{\mu}(\mathcal{G})}{\bar{k}(\mathcal{G})} = 0.7$ . Obsérvese que

uno de los aspectos notables de esta formulación es que el sistema LES se puede deducir fácilmente de las ecuaciones compresibles de Navier – Stokes originales con los cambios siguientes:

$$u_i \rightarrow \tilde{u}_i, \quad \rho \rightarrow \bar{\rho}, \quad T \rightarrow \mathcal{G}, \quad p \rightarrow \varpi, \quad e \rightarrow \tilde{e}, \quad \mu \rightarrow \bar{\mu} + \bar{\rho} \nu_i, \quad k \rightarrow \bar{k} + \bar{\rho} C_p \frac{\nu_i}{Pr_i}$$

Esto proporciona al código numérico un fácil uso para el LES sin modificaciones severas.

Las expresiones para  $\nu_i$  y  $Pr_i$  utilizadas en las siguientes simulaciones compresibles corresponden a los modelos incompresibles descritos en Métails y Lesieur (1996), la única diferencia es que aquí se utiliza un promedio de Favre, antes descrito. Nuestro modelo submalla es el modelo selectivo de la función de la estructura propuesto por David (1993), la viscosidad local del remolino, esta dado por:

$$\nu_i(x, \Delta, t) = C_{ssf} \Delta \sqrt{\tilde{F}_2(x, \Delta, t)} \quad (2.33)$$

Donde  $C_{ssf}$  puede ser expresado como función de la constante de Kolmogorov  $C_K$ :  $C_{ssf} = f(C_K^{-\frac{3}{2}})$ .  $C_{ssf}$  toma el valor de 0.104 para  $C_K = 1.4$ .  $\Delta$  se toma igual a  $(\Delta x \Delta y \Delta z)^{\frac{1}{3}}$ , donde  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  y  $\Delta z$ , son los tamaños de la malla locales en las tres direcciones espaciales.

$\tilde{F}_2(x, \Delta, t)$  es la función de estructura de segundo orden de la velocidad construida con el campo  $\tilde{\mathbf{u}}$ .  $\tilde{F}_2$  es calculado en el punto  $\mathbf{x}$  con un promedio estadístico local de las diferencias de la velocidad de cuadro de los seis puntos más cercanos que rodean al punto  $\mathbf{x}$  en la malla computacional. La interpolación se basó sobre la ley de  $\frac{2}{3}$  de Kolmogorov que se usa para la función estructura de la velocidad.

Según lo propuesto por David (1993), la viscosidad turbulenta se apaga cuando la turbulencia no es lo suficientemente tridimensional. El criterio para tres dimensiones es definido como sigue: considérese en un momento dado que el ángulo entre el vector de vorticidad en un punto dado de la malla y su medio aritmético de los seis puntos vecinos más cercanos. La viscosidad turbulenta se cancela en los puntos donde este ángulo es más pequeño que  $20^\circ$ . Finalmente, el número de Prandtl turbulento se toma igual a 0.6, con lo que cierra la ecuación de la energía.

El código numérico usa coordenadas generalizadas. La adaptación a las coordenadas generalizadas se realiza introduciendo una matriz Jacobiana que transforma una geometría compleja de malla no uniforme o geometría curvilínea, en un sistema de coordenadas Cartesiano  $(x, y, z)$ , dentro de una geometría ortogonal simple con malla uniforme en el sistema de coordenadas generalizadas  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  donde las ecuaciones se pueden resolver más fácilmente. Para este caso, simplemente consiste en una transformación de una malla no uniforme en el espacio físico  $(x, y, z)$  dentro de una malla uniforme en el espacio computacional  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ . Cada término en la matriz Jacobiana inversa  $(\mathbf{J}^{-1})$  se expresa como funciones analíticas de las medidas  $\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}$ . Las medidas son introducidas y calculadas por el esquema interno de primer orden, entonces la matriz  $(\mathbf{J})$  es calculada directamente de  $(\mathbf{J}^{-1})$ .

La ecuación (2.1) se puede volver a escribir como:

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \hat{H}}{\partial \xi_3} = \hat{S} \quad (2.34)$$

Con

$$\left. \begin{aligned} \hat{U} &= \frac{U}{J}, \\ \hat{F} &= \frac{1}{J} \left[ \left( \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \mathbf{F} \right) + \left( \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \mathbf{G} \right) + \left( \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} \mathbf{H} \right) \right], \\ \hat{G} &= \frac{1}{J} \left[ \left( \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \mathbf{F} \right) + \left( \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \mathbf{G} \right) + \left( \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} \mathbf{H} \right) \right], \\ \hat{H} &= \frac{1}{J} \left[ \left( \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} \mathbf{F} \right) + \left( \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} \mathbf{G} \right) + \left( \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \mathbf{H} \right) \right], \\ \hat{S} &= \frac{1}{J} \mathbf{S}. \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

$J$  es el determinante de la matriz  $(J)$  y  $U$  es función de las coordenadas cartesianas y del tiempo.

### 3.2.2 Esquema Numérico

El sistema en coordenadas generalizadas se resuelve por medio de una extensión del completo esquema explícito McCormack, de segundo orden en el tiempo y cuarto orden en el espacio, desarrollado por Gottlieb & Turkel (1976). Debe observarse que cuando se usa  $U$  tiende a ser reemplazada por  $\bar{U}$  definida por la ecuación (2.16) cuando la técnica LES es considerada. El esquema numérico es un esquema corrector – predictor definido en una dimensión por,

Predictor:

$$U_j^{(1)} = U_j^{(n)} + \frac{1}{6} \lambda \left( -f_{j+2}^{(n)} + 8f_{j+1}^{(n)} - 7f_j^{(n)} \right) + (\delta t) S_j^{(n)}, \quad (2.36)$$

Corrector:

$$U_j^{(n+1)} = \frac{1}{2} \left( U_j^{(n)} + \left( U_j^{(1)} \right) \right) + \frac{1}{12} \lambda \left( 7f_{j-2}^{(1)} - 8f_{j-1}^{(1)} + f_j^{(1)} \right) + \frac{1}{2} (\delta t) S_j^{(1)}. \quad (2.37)$$

Los índices  $(n)$ ,  $(n+1)$  y  $(1)$  simbolizan respectivamente para los valores de la función al tiempo  $t$ , tiempo  $t + \delta t$  y al paso – sub – tiempo. Obsérvese que las discretizaciones espaciales intermedias son esquemas no centrados de primer orden con un predictor adelantado (*upwind*) y un corrector atrasado (*downwind*). Como se especifica arriba el esquema resultante es de cuarto orden en el espacio.

La formulación generalizada en tres dimensiones se escribe:

Predictor:

$$\begin{aligned}
 U_{i,j,k}^1 = U_{i,j,k}^n - J_{i,j,k}^P & \left[ \frac{\Delta t}{\Delta \xi_1} \left[ \frac{7}{6} (\hat{\mathbf{F}}_{i+1,j,k}^n - \hat{\mathbf{F}}_{i,j,k}^n) - \frac{1}{6} (\hat{\mathbf{F}}_{i+2,j,k}^n - \hat{\mathbf{F}}_{i+1,j,k}^n) \right] \right. \\
 & + \frac{\Delta t}{\Delta \xi_2} \left[ \frac{7}{6} (\hat{\mathbf{G}}_{i+1,j,k}^n - \hat{\mathbf{G}}_{i,j,k}^n) - \frac{1}{6} (\hat{\mathbf{G}}_{i+2,j,k}^n - \hat{\mathbf{G}}_{i+1,j,k}^n) \right] \\
 & \left. + \frac{\Delta t}{\Delta \xi_3} \left[ \frac{7}{6} (\hat{\mathbf{G}}_{i+1,j,k}^n - \hat{\mathbf{G}}_{i,j,k}^n) - \frac{1}{6} (\hat{\mathbf{G}}_{i+2,j,k}^n - \hat{\mathbf{G}}_{i+1,j,k}^n) \right] \right] \quad (2.38)
 \end{aligned}$$

Corrector:

$$\begin{aligned}
 U_{i,j,k}^{n+1} = \frac{1}{2} [U_{i,j,k}^1 + U_{i,j,k}^n] - \frac{1}{2} J_{i,j,k}^C & \left[ \frac{\Delta t}{\Delta \xi_1} \left[ \frac{7}{6} (\hat{\mathbf{F}}_{i,j,k}^1 - \hat{\mathbf{F}}_{i-1,j,k}^1) - \frac{1}{6} (\hat{\mathbf{F}}_{i-1,j,k}^1 - \hat{\mathbf{F}}_{i-2,j,k}^1) \right] \right. \\
 & + \frac{\Delta t}{\Delta \xi_2} \left[ \frac{7}{6} (\hat{\mathbf{G}}_{i,j,k}^1 - \hat{\mathbf{G}}_{i-1,j,k}^1) - \frac{1}{6} (\hat{\mathbf{G}}_{i-1,j,k}^1 - \hat{\mathbf{G}}_{i-2,j,k}^1) \right] \\
 & \left. + \frac{\Delta t}{\Delta \xi_3} \left[ \frac{7}{6} (\hat{\mathbf{G}}_{i,j,k}^1 - \hat{\mathbf{G}}_{i-1,j,k}^1) - \frac{1}{6} (\hat{\mathbf{G}}_{i-1,j,k}^1 - \hat{\mathbf{G}}_{i-2,j,k}^1) \right] \right] \quad (2.39)
 \end{aligned}$$



## Capítulo 4

# Condiciones iniciales y de frontera

### 4.1 Condiciones iniciales

Para iniciar la simulación numérica fue necesario definir las características del fenómeno estableciendo las condiciones iniciales y de frontera con el fin de resolver adecuadamente las ecuaciones de gobierno.

La velocidad del flujo cuyas componentes son  $U$ ,  $V$ , y  $W$  fueron dadas para las condiciones iniciales como:

$$U = 0$$

$$V = 0$$

$$W = 0$$

Para la presión y la temperatura, las condiciones iniciales fueron:

$$P = P_{ref} = P_{atm}$$

$$T = T_{ref} = T_{atm}$$

donde  $U$  es considerada la velocidad de referencia en todo el dominio. Del mismo modo la presión  $P$  y la temperatura  $T$  también fueron consideradas con el valor adimensional.

Conforme transcurre el tiempo de cómputo los valores de tales variables se ven modificadas hasta que converjan a un valor y se estabilicen.

## 4.2 Condiciones de frontera

Para llevar a cabo una simulación numérica la definición de las condiciones de frontera es una parte crucial en el trabajo. En este caso se utilizó el método conocido como N.S.C.B.C. (Navier-Stokes Characteristic Boundary Conditions) y muy particularmente las condiciones de frontera elaboradas por Poinsoy y Lele [31], las cuáles son válidas tanto para las ecuaciones de Euler como para las ecuaciones de Navier-Stokes. El método N.S.C.B.C. parte de las ecuaciones de Euler para después hacer extensivo el análisis a las ecuaciones de Navier-Stokes, es decir, el método reduce a las condiciones de frontera de Euler cuando el término viscoso desaparece.

La idea principal al utilizar este método consiste en que una vez cerca de la frontera las ecuaciones no sean resueltas como en el resto del dominio sino de una manera distinta basándose en la propagación en forma de ondas de las variables. Esto puede modelarse matemáticamente al descomponer una ecuación hiperbólica, como la ecuación compresible de Navier-Stokes, en ondas acústicas (Thompson, 1990) por medio de las cuales se propagan las variables. Dichas ondas, las cuales corresponden en número a la cantidad de variables resueltas, poseen ciertas velocidades características asociadas a las amplitudes de las ondas. Estas velocidades son desde el punto de vista matemático los valores característicos locales del sistema hiperbólico. Las cinco velocidades características están dadas por  $u+c$ ,  $u-c$  y tres de ellas con velocidad  $u$ , donde  $c$  corresponde a la velocidad local del sonido y  $u$  a la velocidad local del flujo. Esto significa que tres variables viajan a una misma velocidad  $u$  mientras que otra lo hace a una velocidad mayor (dada por la cantidad  $c$ ) pero anticipándose a las otras y “recabando” información sobre las condiciones del dominio de “adelante”. La última variable, la cuál viaja a una velocidad  $u-c$ , lo hace en dirección contraria. Dicha variable es muchas ocasiones la más difícil de determinar.

Para resolver las ecuaciones de onda para las condiciones del flujo que es subsónico y compresible, el método propone que tanto las velocidades como la temperatura se conozcan. De esta manera se tiene cuatro condiciones de frontera físicas (para  $u_1, u_2, u_3$  y  $T$ ) y otra conocida como condición de frontera “suave” a resolver que corresponde a la variable  $\rho$  necesaria para el método numérico. Es necesario para aventajar la solución en el tiempo determinar las amplitudes  $L$  de las diferentes ondas que cruzan las fronteras, cuyo desarrollo aparece en el siguiente apartado.

### 4.2.1 Características de las condiciones de frontera de las ecuaciones de Navier-Stokes

Para un flujo viscoso compresible las ecuaciones de dinámica de fluidos en coordenadas cartesianas son:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (m_i) = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [(\rho E + p)u_i] = \frac{\partial}{\partial x_i} (u_j \tau_{ij}) - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial m_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (m_i u_j) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (4.3)$$

donde

$$\rho E = \frac{1}{2} \rho u_k u_k + \frac{p}{\gamma - 1} \quad (4.4)$$

$$m_i = \rho u_i \quad (4.5)$$

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \quad (4.6)$$

Aquí,  $p$  es la presión termodinámica,  $m_i$  es la cantidad de movimiento  $\rho u_i$  en la dirección  $x_i$ ,  $\rho E$  es la energía total (cinética e interna). El flujo de calor a lo largo de  $x_i$  llamado  $q_i$  esta dado por:

$$q_i = \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (4.7)$$

La conductividad térmica  $\lambda$  es obtenida del coeficiente de viscosidad  $\mu$  conforme a:

$$\lambda = \mu \frac{C_p}{P_r} \quad (4.8)$$

donde  $Pr$  es el número de Prandtl.

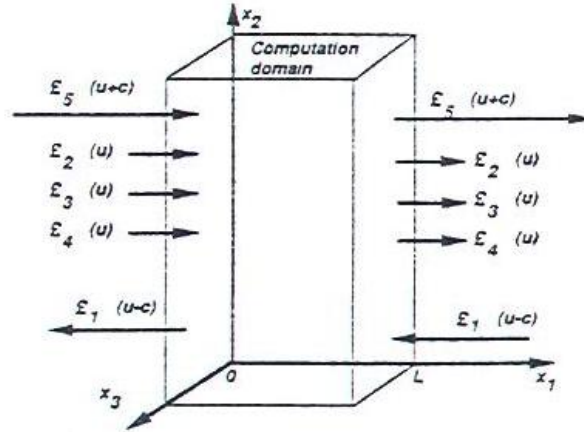


Figura 4.1. Ondas acústicas dejando y entrando al dominio computacional a través del plano de entrada ( $x_1=0$ ) y el plano de salida ( $x_1=L$ ).

Se considera ahora una frontera localizada en  $x_1 = L$  (figura 4.1) Usando el análisis para modificar los térmicos hiperbólicos (convectivos) en las fronteras el sistema se reescribe:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + d_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} (m_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (m_3) = 0 \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{1}{2} (u_k u_k) d_1 + \frac{d_2}{\gamma - 1} + m_1 d_3 + m_2 d_4 + m_3 d_5 + \frac{\partial}{\partial x_2} [(\rho E + p) u_2] + \frac{\partial}{\partial x_3} [(\rho E + p) u_3] \\ = \frac{\partial}{\partial x_i} (u_j \tau_{ij}) - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial m_1}{\partial t} + u_1 d_1 + \rho d_3 + \frac{\partial}{\partial x_2} (m_1 u_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (m_1 u_3) = \frac{\partial \tau_{1j}}{\partial x_j} \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial m_2}{\partial t} + u_2 d_1 + \rho d_4 + \frac{\partial}{\partial x_2} (m_2 u_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (m_2 u_3) + \frac{\partial p}{\partial x_2} = \frac{\partial \tau_{2j}}{\partial x_j} \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial m_3}{\partial t} + u_3 d_1 + \rho d_5 + \frac{\partial}{\partial x_2} (m_3 u_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (m_3 u_3) + \frac{\partial p}{\partial x_3} = \frac{\partial \tau_{3j}}{\partial x_j} \quad (4.13)$$

Los términos diferentes entre los sistema de ecuaciones (4.9 – 4.13) se modelan a partir de una descomposición local de las ecuaciones de Navier-Stokes en ecuaciones de onda. El vector  $\mathbf{d}$  esta dado por el análisis de características (Thompson) y puede ser expresado como:

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c^2} \left[ \mathcal{L}_2 + \frac{1}{2} (\mathcal{L}_5 + \mathcal{L}_1) \right] \\ \frac{1}{2} (\mathcal{L}_5 + \mathcal{L}_1) \\ \frac{1}{2\rho c} (\mathcal{L}_5 - \mathcal{L}_1) \\ \mathcal{L}_3 \\ \mathcal{L}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial m_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial(c^2 m_1)}{\partial x_1} + (1-\gamma)\mu \frac{\partial p}{\partial x_1} \\ u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} \\ u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \\ u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

donde las  $L_i$  son las amplitudes de las ondas características asociadas con cada velocidad característica  $\lambda_i$ . Estas velocidades están dadas por:

$$\lambda_1 = u_1 - c \quad (4.15)$$

$$\lambda_5 = u_i - c, \quad (4.16)$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = u_1, \quad (4.17)$$

donde  $c$  es la velocidad del sonido para un gas ideal:

$$c^2 = \frac{\gamma P}{\rho} \quad (4.18)$$

$\lambda_1$  y  $\lambda_5$  son las velocidades de ondas acústicas moviéndose en el dominio en la dirección  $x_1$ ;  $u$  es la velocidad convectiva (la velocidad a la cuál el fluido localmente viajará en la dirección  $x_1$ ) donde  $\lambda_2$  es la velocidad de convección de la entropía y  $\lambda_3$  y  $\lambda_4$  son las velocidades de convección  $u_2$  y  $u_3$  respectivamente.

Las  $L_i$  están dadas por:

$$\mathcal{L}_1 = \lambda_1 \left( \frac{\partial p}{\partial x_1} - \rho c \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \quad (4.19)$$

$$\mathcal{L}_2 = \lambda_2 \left( c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} - \frac{\partial p}{\partial x_1} \right) \quad (4.20)$$

$$\mathcal{L}_3 = \lambda_3 \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \quad (4.21)$$

$$\mathcal{L}_4 = \lambda_4 \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \quad (4.22)$$

$$\mathcal{L}_5 = \lambda_5 \left( \frac{\partial p}{\partial x_1} + \rho c \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \quad (4.23)$$

Una simple interpretación física de las  $L_i$  puede ser dado como la linealización de las ecuaciones de Navier-Stokes para ondas acústicas no viscosas unidimensionales. Consideremos ondas propagándose a la velocidad  $\lambda = u_1 - c$ . Si  $p'$  y  $u'$  son las perturbaciones de presión y de velocidad, las amplitudes de onda  $A_1 = p' - \rho c u'$  se conservan a lo largo de la línea característica  $x + \lambda_1 t = const$ , así que:

$$\frac{\partial A_1}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial A_1}{\partial x_1} = 0 \quad \text{ò} \quad \frac{\partial A_1}{\partial t} + \mathcal{L}_1 = 0.$$

En una localización dada ( $-L_1$ ) representa la variación en el tiempo de la amplitud de onda  $A_1$ . Por analogía, llamaremos a las  $L$  "s la variación de amplitud de las ondas características cruzando la frontera. Esta relación entre las  $L$  y la amplitud de ondas cruzando las fronteras es la mayor ventaja de los modelos de ecuaciones de conservación.

La aproximación usada en la técnica NSCBC es para inferir valores para la variación de la amplitud de las ondas en casos multidimensionales viscosos examinando un problema no viscoso unidimensional (LODI por sus siglas en inglés) asociado localmente.

En cada punto de la frontera se pueden obtener tales sistemas LODI considerando el sistema de ecuaciones (4.9 – 4.13) y omitiendo el término viscoso transversal. Las ecuaciones resultantes son fáciles de interpretar y nos permiten inferir valores para las variaciones de amplitud de onda considerando el flujo localmente como no viscoso y unidimensional.

El sistema LODI puede ser lanzado en muchas diferentes formas dependiendo de la elección de las variables. En términos de variables primitivas, el sistema LODI es:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \left[ \mathcal{L}_2 + \frac{1}{2} (\mathcal{L}_5 + \mathcal{L}_1) \right] = 0 \tag{4.24}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{2} (L_5 + L_1) = 0 \tag{4.25}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1}{2\rho c} (\mathcal{L}_5 - \mathcal{L}_1) = 0 \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \mathcal{L}_3 = 0 \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + \mathcal{L}_4 = 0 \quad (4.28)$$

#### 4.2.4 Pared isotérmica sin deslizamiento.

Las paredes deslizantes son condiciones de frontera útiles en algunas soluciones computacionales. Están caracterizados por cuatro condiciones no viscosa: las velocidades en la pared son cero  $(u_1(L, x_2, x_3, t) = u_2(L, x_2, x_3, t) = u_3(L, x_2, x_3, t) = 0)$ . y la temperatura tiene un valor constante. Como las velocidades son cero, las amplitudes de onda  $L_2, L_3$  y  $L_4$  son cero.

Paso 1: Las velocidades  $u_1, u_2, u_3$  se fijan igual a cero las ecuaciones (4.11, 4.12 y 4.13) no son necesaria. La temperatura se fija igualmente, la ecuación (4.10) no es necesaria.

Paso 2: La relación de LODI (4.26) sugiere que la amplitud de la onda reflejada sea:  $L_1 = L_5$ .

Paso 3:  $L_5$  es obtenida de puntos interiores y  $L_1 = L_5$ . La densidad se obtiene de de la ecuación (4.9).



# Capítulo 5

## Características de la simulación

### 5.1 Parámetros de referencia

#### *Longitud*

La longitud de referencia puede ser en nuestro caso tanto la altura de la cavidad como lo ancho, las cuales son de 0.75 (m). La longitud adimensionada se calcula como:

$$X = \frac{x}{L_{ref}}$$

#### *Temperatura*

La temperatura de referencia es la diferencia entre la temperatura de la pared caliente y la pared fría.

$$T_{ref} = T_{pc} - T_{pf}$$

y es igual a:

$$50 - 10 \text{ } ^\circ\text{C} = 40 \text{ } ^\circ\text{C}$$

La temperatura adimensionada en la cavidad es:

$$T = \frac{T}{T_{ref}}$$

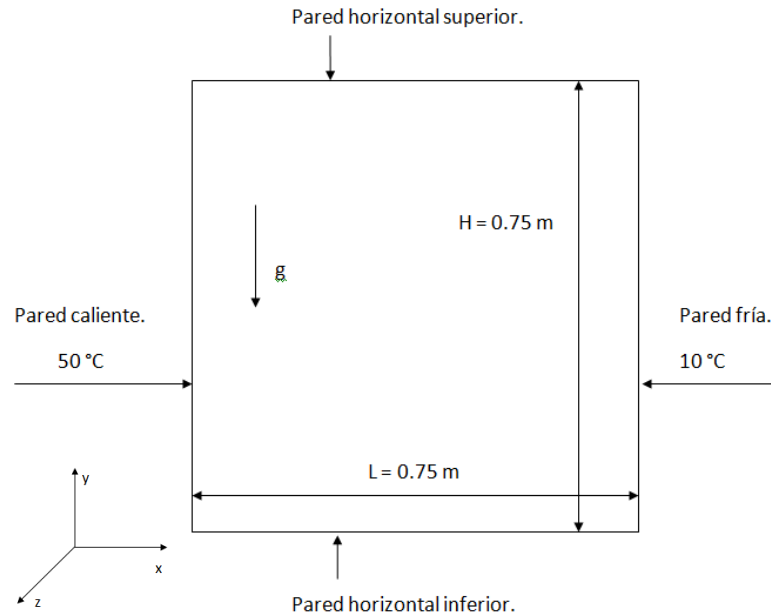


Figura 5.1. Esquema de la cavidad cuadrada llena con aire. Se muestran las temperaturas de las paredes verticales y la dirección que actúa la gravedad. El origen del sistema de referencia se encuentra en el vértice inferior izquierdo de la cavidad.

Para la simulación, en las paredes horizontales superior e inferior se empleó un perfil cúbico para la distribución de temperatura que, en base a Tian, Karayiannis [1], es recomendado para el modelado numérico de este caso, ya que representa las condiciones de frontera reales a lo largo de las paredes horizontales superior e inferior (paredes simulando la transferencia de calor por conducción desde la pared vertical isotérmica caliente).

Para la pared horizontal superior:

$$j = ny$$

$$t_w = \left(1 - \frac{20}{273.15}\right) + \left(\frac{40}{273.15}\right)(0.9324 - 2.7649x + 4.4710x^2 - 2.6309x^3)$$

Para la pared horizontal inferior:

$$j = 1$$

$$t_w = \left(1 - \frac{20}{273.15}\right) + \left(\frac{40}{273.15}\right)(0.9639 - 1.7106x + 3.5597x^2 - 2.7545x^3)$$

### **Velocidad**

La velocidad de referencia es la velocidad de flotación y se define como:

$$U_0 = \sqrt{g\beta\Delta T H}$$

Para nuestro caso es de  $U_0 \approx 1$  (m/s)

### **Número de Rayleigh**

El número de referencia adimensional es el número de Rayleigh. Para este caso es el mismo que en el estudio experimental.

$$Ra = 1.58 \times 10^9.$$

## **5.2 Mallado de la cavidad**

El número de nodos para generar la malla en la cavidad son: 130 x 130 x 95, dando un total de 1,605,500. Las dimensiones de la celda más pequeña y de la más grande son:

$$\begin{aligned}(\Delta_x, \Delta_y)_{min} &= 3.0065 \times 10^{-4} L \quad (0.2254875 \times 10^{-3} \text{ m}) \\(\Delta_x, \Delta_y)_{max} &= 0.0223644 L \quad (0.0167733 \text{ m})\end{aligned}$$

En la dirección  $z$ , el espacio entre los nodos es constante y la longitud de las celdas en esta dirección es:

$$\Delta_z = 0.0105263 L (0.007894736 \text{ m})$$

La celda más pequeña se encuentra en cada esquina de la cavidad y forma el primer nodo del mallado dentro de la misma. La celda más grande del mallado se encuentra en el centro de la cavidad. En la figura 5.2 se presenta el mallado completo de la cavidad en la dirección  $x$  y  $y$ . En la figura 5.3 se muestra un acercamiento en la esquina inferior izquierda de la cavidad.

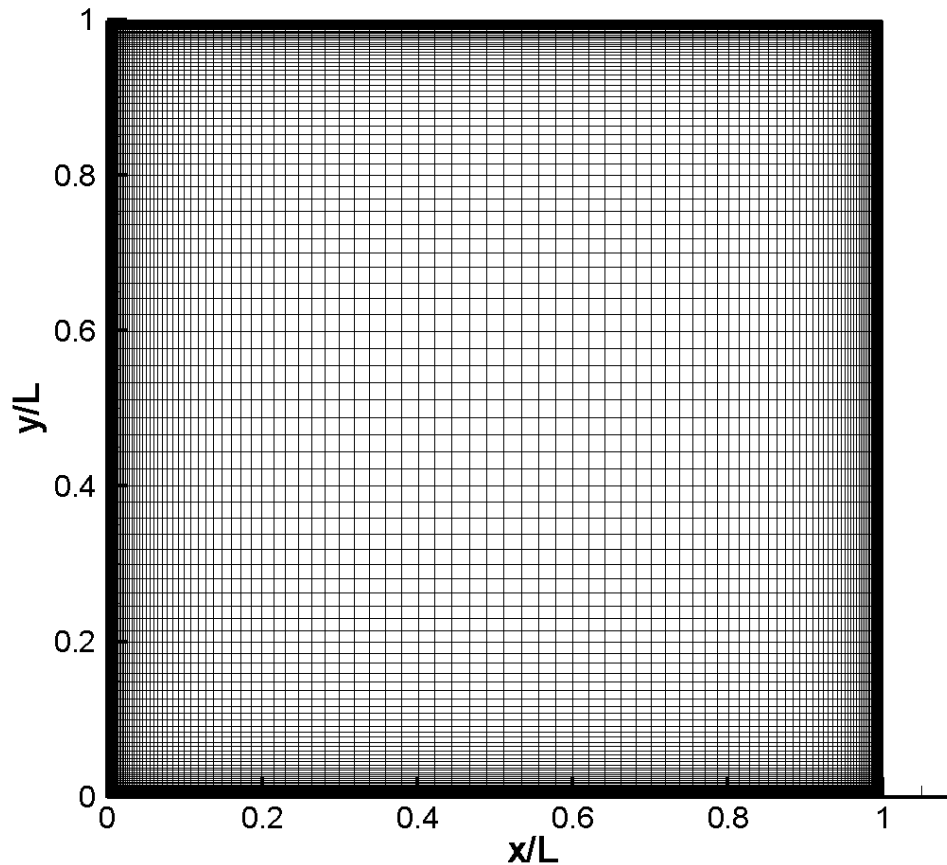


Figura 5.2. Mallado de la cavidad cuadrada. Se puede apreciar que el mallado se vuelve más fino conforme se aproxima a las paredes. Las medidas de la cavidad están adimensionalizadas.

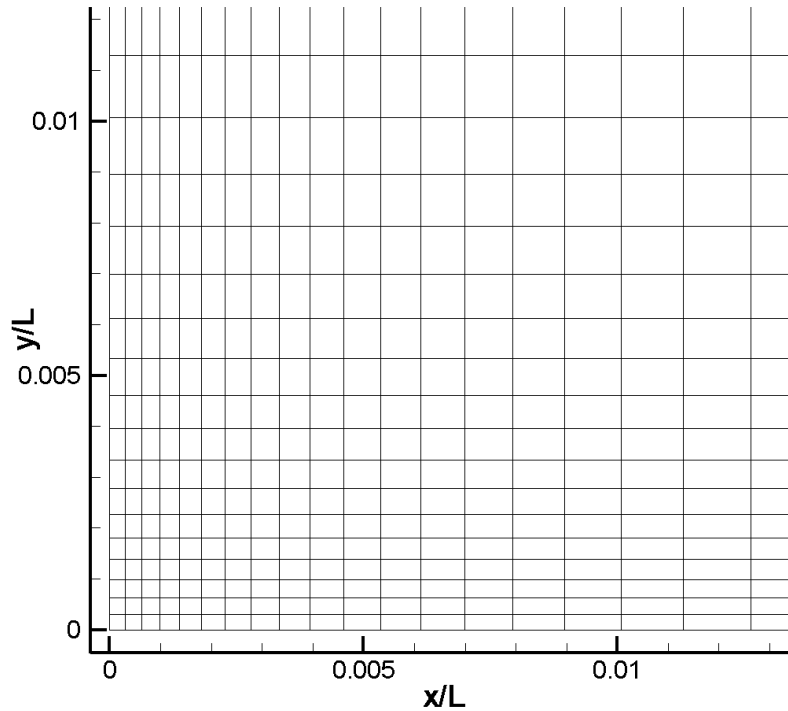


Figura 5.3. Acercamiento sobre la malla en la esquina inferior izquierda.

En el modelado de la turbulencia, una hipótesis importante es la isotropía (Paolucci [27]), ya que esta suposición nos ayuda a ahorrar tiempo de cómputo en resolver las ecuaciones que gobiernan el fenómeno. Para la convección natural en cavidades, el flujo es anisotrópico particularmente cerca de las fronteras sólidas. Esta es la razón por la que el mallado en las paredes se vuelve más fino. El modelo de turbulencia empleado en esta simulación, considera las condiciones del fluido homogéneas isotrópicas; dichas consideraciones son válidas para el centro de la cavidad, pero conforme el fluido es contiguo a las paredes, ya no es válida esa consideración ya que el fluido es no homogéneo y su nivel de anisotropía se incrementa, principalmente a la mitad de la capa viscosa, lo que provoca que el modelo de turbulencia ya no tenga validez en esta zona. Por lo que se debe de tener una mayor resolución en esta zona para con esto tener una simulación casi directa.

# Capítulo 6

## Análisis de resultados

### 6.1 Validación. Comparación con resultados experimentales

Este estudio está basado en un estudio experimental realizado por Tian, Karayiannis [1], el cual fue llevado a cabo con alta precisión. Estos resultados experimentales pueden establecerse como una referencia para la validación del código CFD efectuado para la simulación numérica de la tesis presente. Los resultados experimentales se presentan en cada gráfica en forma de círculos ( $\circ$ ), y los resultados de la simulación numérica se representan en forma de una línea continua ( $\text{—}$ ).

Los resultados experimentales y numéricos se conforman para su comparación de la velocidad horizontal y vertical promedio  $U$  y  $V$  respectivamente, siendo la componente de velocidad  $V$  la de mayor magnitud, la temperatura promedio  $T$ , el número de Nusselt  $Nu$ , el esfuerzo de Reynolds cortante  $U'V'$  y las fluctuaciones de las variables promedio de temperatura  $T'_{rms}$  y velocidad  $u'_{rms}$  y  $v'_{rms}$ . Los valores promedio son adimensionalizados por la temperatura de referencia  $T_{ref}$ , la velocidad de referencia  $U_0$  para los resultados de velocidad promedio y  $U_0^2$  para el esfuerzo de Reynolds. Todas las comparaciones se realizan en el plano  $x - y$ .

En la simulación numérica de la tesis presente, el promedio de las variables se hace en el tiempo y en la variable  $Z$  (planos periódicos); la longitud en esta dirección es lo suficientemente grande para despreciar su efecto, es decir, que en la simulación en realidad no hay paredes en esta dirección; es una técnica que se puede hacer numéricamente, ya que si se deseara hacer un análisis promedio en 3 dimensiones con paredes verdaderas de la cavidad en la dirección  $z$ , se requeriría mucho más tiempo de cómputo para resolver las ecuaciones de gobierno, puesto que cada plano presentaría diferentes distribuciones de velocidad, temperatura, etc. Es por ello que todos los resultados promedio se presentan para el plano  $x - y$  (flujo bidimensional).

Si bien el flujo bidimensional no existe, se toma este plano para analizar las características promedio del flujo. En el estudio experimental se tomaron las mediciones en la cavidad cuadrada sobre el plano que se encuentra a la mitad en la dirección  $z$ . Numéricamente esto no tiene mayores inconvenientes, pero en el caso experimental se

tiene que corroborar que las paredes en la longitud  $z$  no tengan una influencia considerable en el comportamiento del flujo. La suposición de flujo bidimensional fue verificada por Tian y Karayiannis [1]. Muchos de los estudios experimentales son asumidos bidimensionales incluso aunque las dimensiones de la cavidad experimental sean tales que el flujo tridimensional sea prevaeciente. Penot y N'Dame [13] señalan que la aproximación bidimensional de la convección natural experimental en cavidades debe ser válida si la relación de aspecto horizontal ( $Ar_z$ ) de la cavidad es más grande que 1.8. Los estudios experimentales de Lankhorst [14], Mergui y colaboradores [15,16], y Opstelten y otros [17] no cumplen este requerimiento y por lo tanto sus resultados son afectados por la pequeña profundidad de la cavidad. Además, inclusive si la profundidad es grande, el calor perdido a través de las paredes verticales pasivas y el techo pueden causar flujo en 3D [18,19]. Como consecuencia de esta pérdida de calor, el flujo en la cavidad tiene las características de fuerte asimetría, alta turbulencia y bajo promedio de temperatura en el centro de la cavidad. En el estudio experimental, la relación de aspecto en la dirección de la profundidad es de 2.

En la figura 6.1 se muestra la distribución de la temperatura media adimensionalizada en la cavidad. Los dos perfiles experimental y numérico tienen poca diferencia, pero su forma sigue siendo similar. Diferencias se pueden apreciar en los perfiles  $y/L = 0.9, 0.8$  y  $0.7$  en la región de la capa límite térmica, en donde la temperatura decrece súbitamente desde la pared caliente hasta  $x/L = 0.1$ . El perfil de capa límite térmica puede ser claramente identificado en las paredes isotérmicas caliente y fría. Se pueden apreciar dos picos cercanos a las paredes isotérmicas de cada perfil; uno a la pared caliente y otro a la pared fría. Estos picos se incrementan (son más notorios) a lo largo de la dirección del flujo, y son debidos a la estratificación de fluido.

La distribución de la temperatura media muestra estratificación del fluido. En el núcleo de la cavidad, se tiene el valor de la temperatura media adimensionalizada  $(T - T_C)/(T_H - T_C) \approx 0.5$ , la cual es congruente con el estudio experimental.

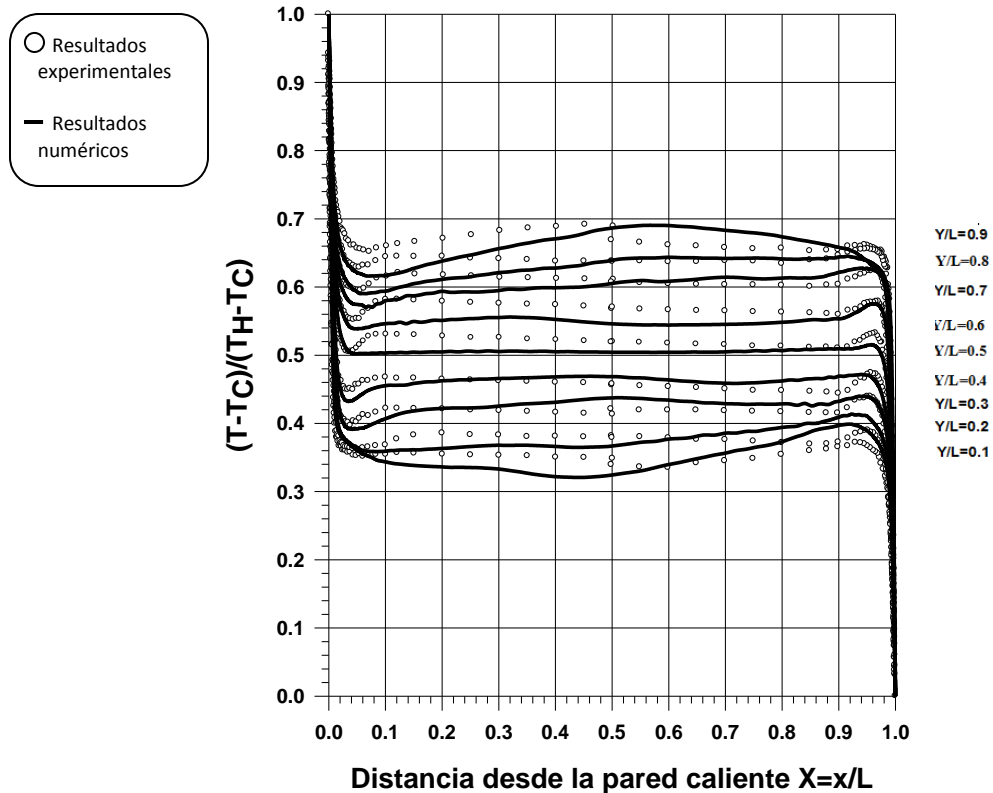


Figura 6.1. Distribución de la temperatura media a diferentes alturas.

La distribución de la velocidad media vertical y horizontal se muestra en la figura 6.12. Una constante fue agregada al valor de la velocidad media vertical y horizontal a diferentes alturas de la cavidad para evitar la superposición de los datos. Los perfiles de la velocidad vertical de la simulación numérica son completamente congruentes con los del estudio experimental (figura 6.2 a)). Los perfiles de la velocidad media horizontal numéricos y experimentales muestran pequeñas diferencias entre ellos, pero tienden de manera similar. Se aprecian dos picos en la distribución de la velocidad vertical, uno para la pared caliente y otro para la pared fría. Estos picos son característicos del perfil de velocidad dentro de la capa límite de convección natural. En algunos perfiles tanto para la velocidad media vertical como para la velocidad media horizontal, se observan valores negativos. Esto indicaría que existen zonas de recirculación del flujo en la cavidad, pero esto se analizará más adelante.



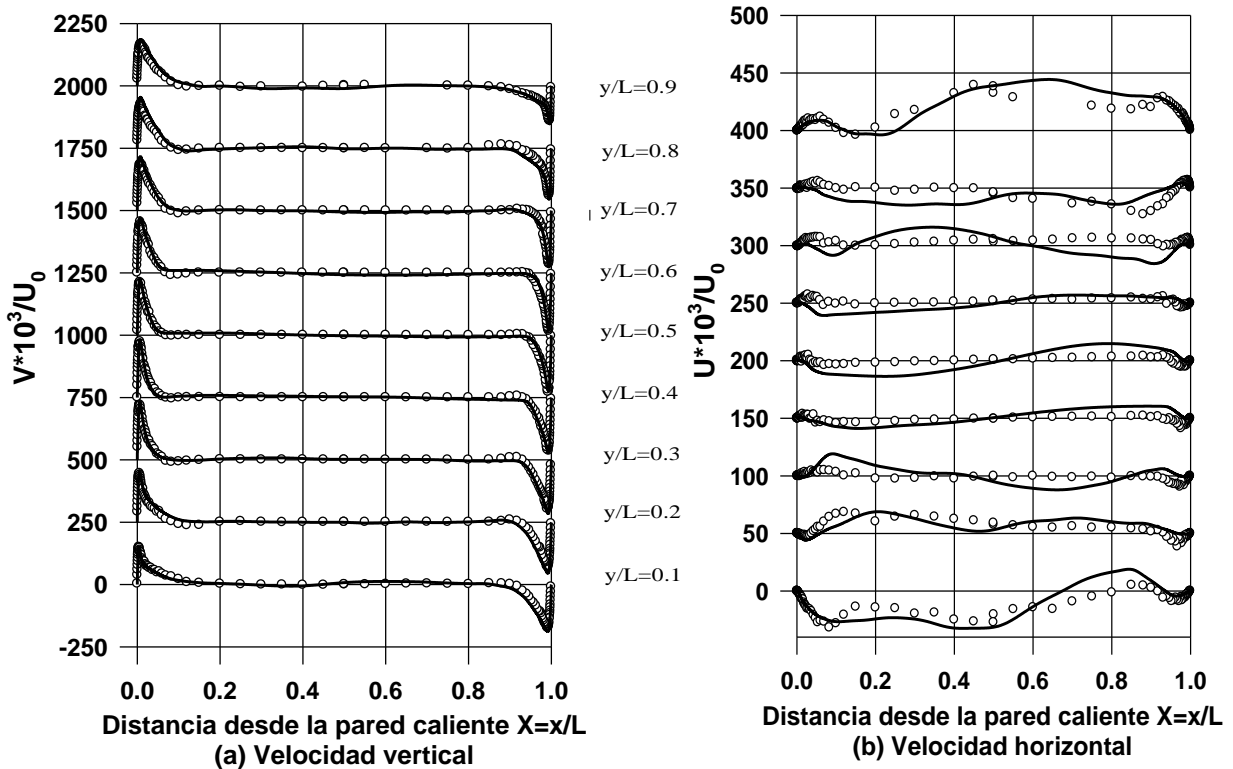


Figura 6.2. Distribución de la velocidad media a diferentes alturas de la cavidad.

En términos generales, las cantidades promedio se aproximan bastante, teniendo muy pocas diferencias entre los resultados experimentales y numéricos.

En la figura 6.3 se muestran los resultados experimentales y numéricos rms para la fluctuación de la temperatura a diferentes alturas. Nuevamente, una constante fue agregada a cada grupo sucesivo de  $T'_{rms}$ ,  $u'_{rms}$  y  $v'_{rms}$  para evitar la superposición de los datos y con ello se pueda tener una apreciación clara de estos. Los perfiles experimentales y numéricos son coincidentes y tienen una tendencia similar, con una pequeña diferencia de 1.269 (K) entre los perfiles  $T'_{rms}$  a una altura de  $y/L = 0.1$ . A pesar de esto, la comparación de la distribución de la fluctuación de la temperatura promedio es aceptable.

La comparación de los resultados para la fluctuación de la componente vertical y horizontal de la velocidad es mostrada en la figura 6.4. Recordando, el valor de la velocidad de referencia es  $U_0 \approx 1$  (m/s). La fluctuación de la componente vertical compara perfectamente entre los dos estudios. Para la componente horizontal, la

distribución  $u'_{rms}$  muestra el mismo comportamiento experimental y numérico, por lo que se puede decir que su comparación es admisible.

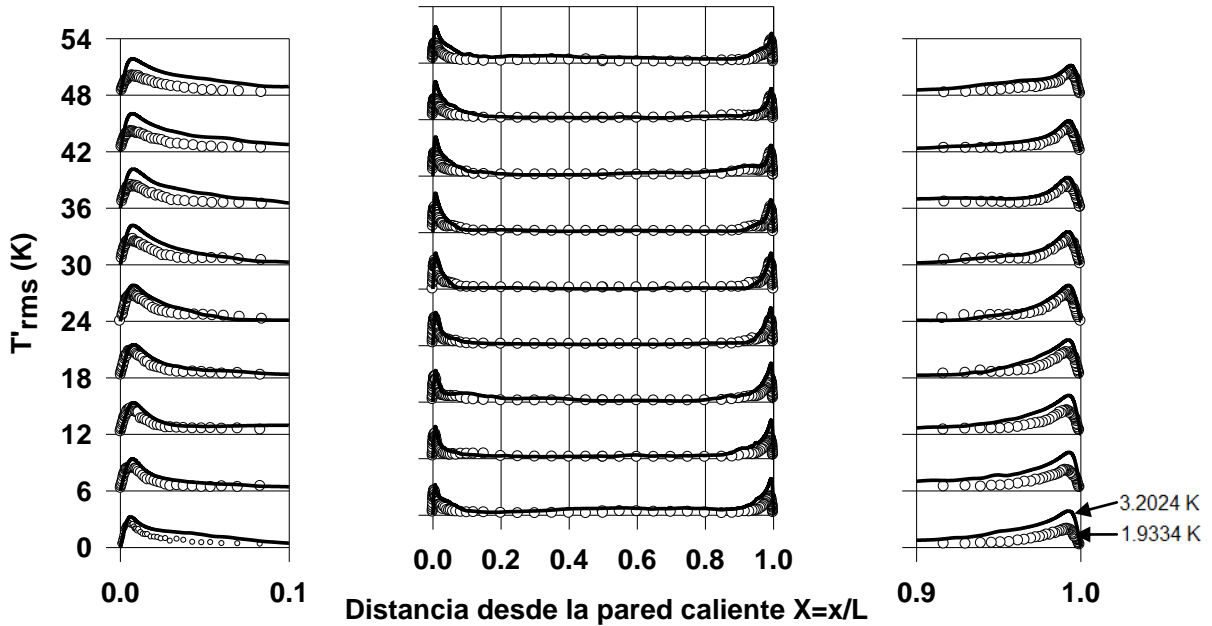
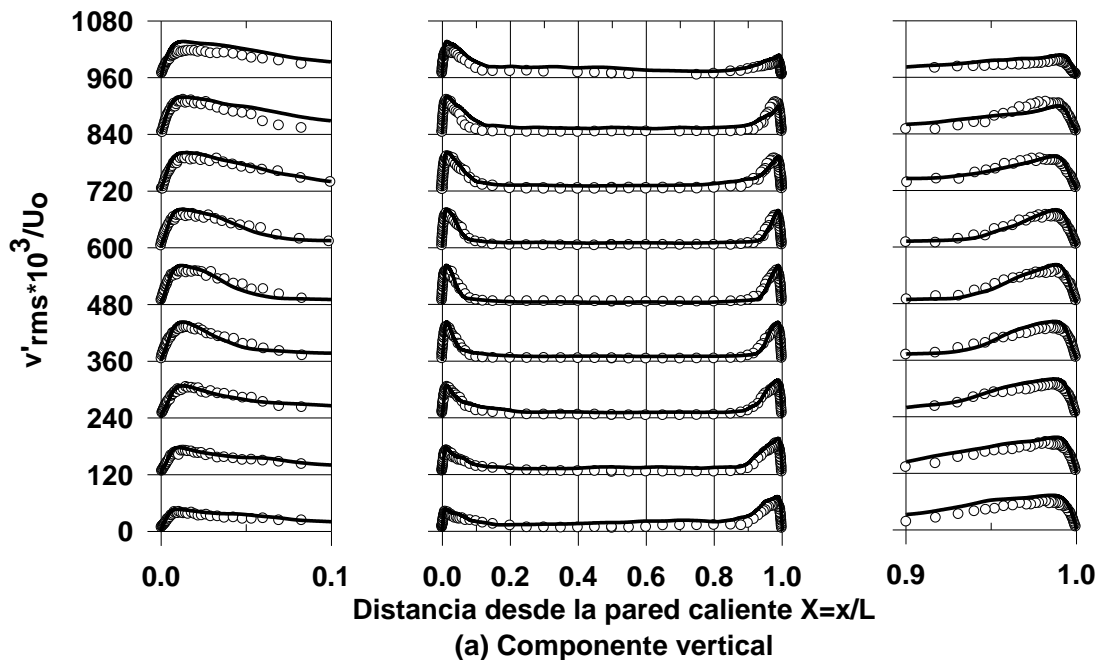


Figura 6.3. Fluctuación de la temperatura a diferentes alturas.



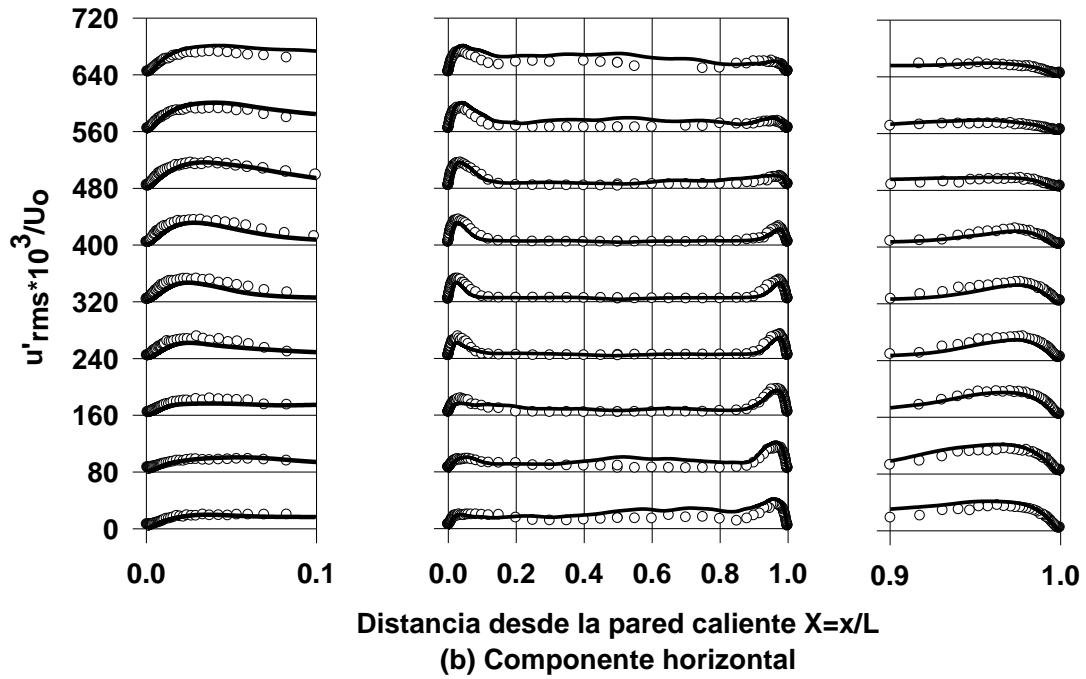


Figura 6.4. Fluctuación de la velocidad a diferentes alturas.

La distribución de los esfuerzos de Reynolds se presenta en la figura 6.5. Solo se tienen pequeñas diferencias en  $x/L \approx 0.04$  en los perfiles de  $y/L = 0.7, 0.8$  y  $0.9$ , y en  $x/L \approx 0.96$  a una altura de  $y/L = 0.1, 0.2$  y  $0.3$  para la pared caliente y fría respectivamente. El pico que se distingue en los perfiles es característico de flujo de capa límite turbulenta.

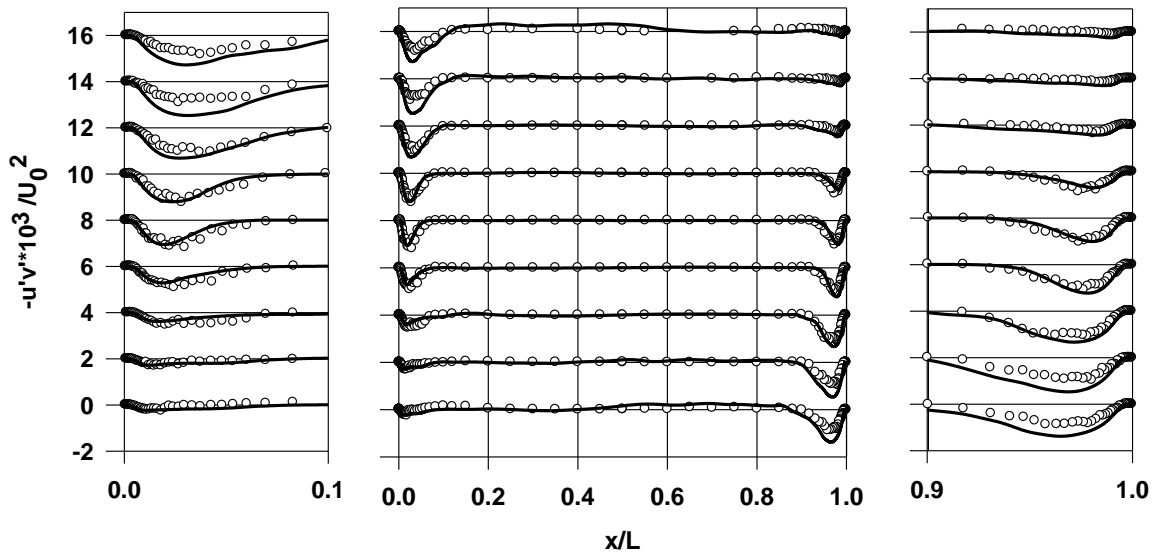


Figura 6.5. Distribución del esfuerzo de Reynolds a diferentes alturas.

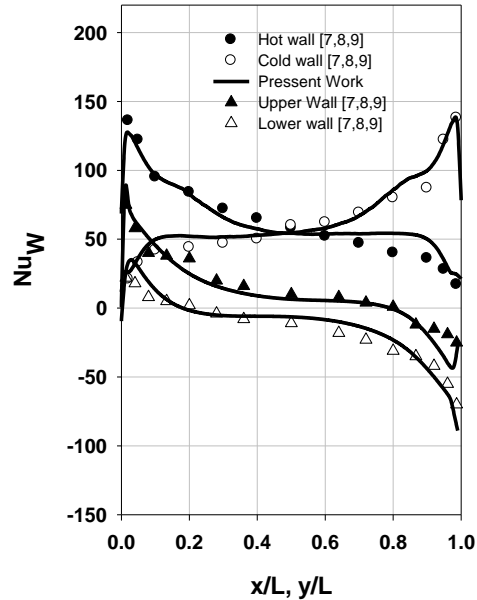


Figura 6.6. Comparación del número de Nusselt local entre resultados experimentales y numéricos a lo largo de las paredes verticales y horizontales.

La comparación del número de Nusselt local experimental y numérico medido a lo largo de las paredes se muestra en la figura. Este parámetro integral puede ser determinado usando la temperatura medida en la capa conductiva térmica, donde la transferencia de calor es constante. De la definición, el flujo de calor es positivo en la dirección de los ejes, por ejemplo, la transferencia de calor desde la pared caliente hacia la cavidad y desde la cavidad hacia la pared fría es positiva. La transferencia de calor desde la pared inferior hacia el interior de la cavidad y desde el interior de la cavidad hacia la pared horizontal superior es también positiva. Alcanza su máximo valor en el fondo de la pared caliente y en la parte superior de la pared fría debido al espesor delgado de la capa límite térmica que se tiene en esa región.

Los valores del número de Nusselt experimentales y numéricos se comparan correctamente para las paredes verticales y horizontales de la cavidad, y difieren muy poco entre ellos.

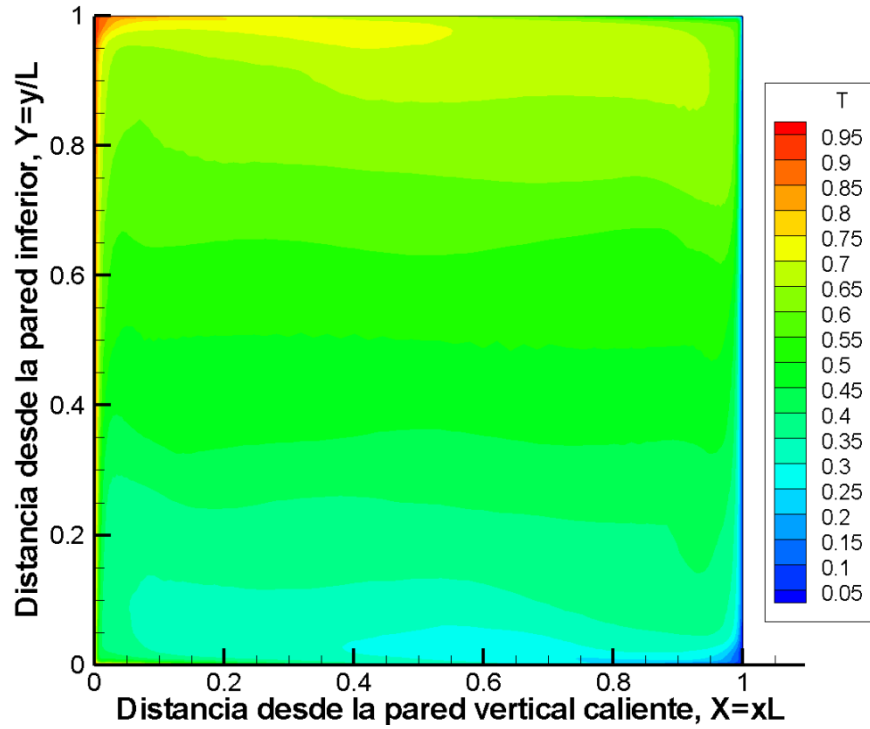
## 6.2 Distribución de variables promedio en el plano

### 6.2.1 Distribución de la temperatura

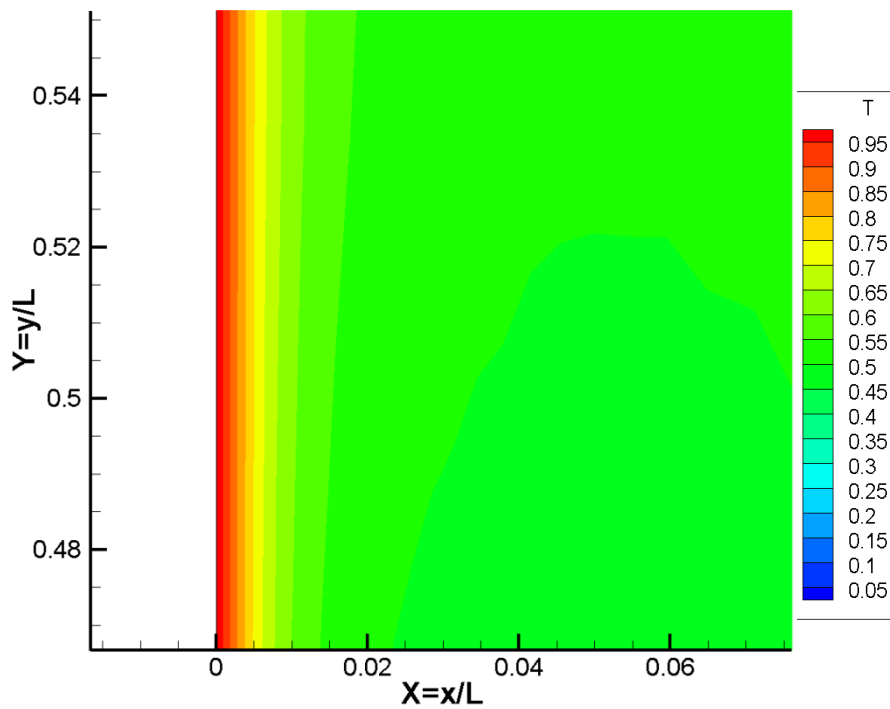
La distribución de la temperatura se muestra en el gráfico de contorno de la figura 6.7 a). En el centro de la cavidad, se tiene un valor de la temperatura adimensionada alrededor de  $T = 0.55$ , y esto nos indicaría que en el centro de la cavidad se tiene la temperatura media y está en perfecto acuerdo con el estudio experimental. En la dirección  $x$ , la temperatura decrece ligeramente desde  $x/L = 0.1$  hasta 0.9, indicando que el fluido en la región del centro de la cavidad es cercanamente estacionario. La capa límite térmica se puede apreciar en la figura 6.7 b).

Se presentaron dos picos en los perfiles de temperatura a diferentes alturas en la cavidad: uno en la pared vertical caliente y otro en la pared vertical fría. La distancia desde la pared vertical en la dirección  $x$  hasta el punto pico se incrementa en la dirección del flujo. Este incremento de la distancia es debido a que la velocidad del flujo es mayor conforme se aproxima a las paredes horizontales, y los efectos de la transferencia de calor tienen un mayor efecto en el flujo libre. Aunado a esto, como se mencionó en el Capítulo 5, en la simulación se estableció un perfil cúbico de temperatura a lo largo de las paredes horizontales superior e inferior, con el objetivo de simular que estas paredes son altamente conductivas, lo que induce que la región estratificada del fluido sea más notoria en la cavidad.

La región de mayor temperatura se encuentra en la esquina superior izquierda (color rojo). Esto se debe a que el fluido conforme se mueve hacia arriba, gana calor a lo largo de la pared vertical caliente desde el fondo de la cavidad hasta la pared superior horizontal, alcanzando un máximo. Después la región de menor temperatura se tiene en la esquina inferior derecha (color azul) debiéndose al mismo intercambio de calor entre la pared vertical fría con el fluido, enfriándose en el proceso.



a)



b)

Figura 6.7: a) Gráfico de contorno de la distribución de la temperatura en la cavidad. b) Acercamiento sobre la pared isotérmica caliente a la mitad de la altura de la cavidad  $y/L \approx 0.5$ .

### 6.2.2 Distribución de la velocidad

El flujo característico de una capa límite de velocidad de convección natural puede ser fácilmente identificado y corroborado por el gráfico de contorno para las velocidades  $U$  y  $V$  de las figuras 6.8, y por el gráfico de vectores de velocidad de la figura 6.9. Las capas límite de la velocidad promedio  $V$  comienzan en el fondo de la pared caliente y en la parte superior de la pared fría. En la dirección del flujo, la capa límite se vuelve más delgada y su velocidad se incrementa debido a la transferencia de calor entre las paredes y el fluido. Su mínimo espesor sucede alrededor de  $Y = 0.4$  en la pared caliente y en  $Y = 0.6$  en la pared fría.

Los valores promedio de velocidad  $U$  y  $V$  presentados en las figuras 6.8 a) y 6.8 b), muestran zonas de recirculación del fluido en sentido horario dadas por los valores negativos de estos mismos y también apreciado en la figura 6.9 de vectores de velocidad. Esto sucede fuera de las capas límite de velocidad de cada componente. Este movimiento circulatorio se da en el límite exterior de la capa límite para la componente  $V$  y en las regiones externas de la capa límite de velocidad para la componente  $U$ , es decir, que el movimiento giratorio de recirculación es más notorio en la dirección  $x$  que en la dirección  $y$ . Esta circulación horaria es producida por la interacción de la porción del fluido desprendida de la capa límite con el flujo libre en la cavidad y por la conservación de la cantidad de movimiento del fluido entre el flujo de capa límite y el flujo libre.

La zonas donde se presentan los mayores valores absolutos de la velocidad  $U$  es a partir de una distancia  $x/L \approx 0.05$  y  $y/L \approx 0.98$ , y  $x/L \approx 0.8$  y  $y/L \approx 0.25$  para los valores positivos y negativos respectivamente. Ocurren en estas zonas debido al transporte de cantidad de movimiento de la componente  $V$  de velocidad del fluido en la dirección  $y$  hacia la dirección  $x$  cuando este se encuentra próximo a las paredes horizontales superior e inferior.

En general, el valor de la velocidad horizontal es de un poco menos de un orden de magnitud más pequeño que el de la velocidad vertical debido a la dirección en la que actúa el campo de gravedad. Tanto para la velocidad horizontal como para la vertical, en el centro de la cavidad se tiene un movimiento nulo del fluido (color verde), lo que nos indica que el flujo en la región central de la cavidad es estacionario y que el movimiento está limitado en las capas límite de velocidad y en las zonas de recirculación fuera de ellas como se puede apreciar en las líneas de trayectoria de la figura 6.10.

Se tienen dos pequeños vórtices en la cavidad: uno en la esquina superior izquierda y otro en la esquina inferior derecha (figuras 6.9 a) y b) respectivamente), los cuales giran en sentido anti-horario y tienen un diámetro aproximado de  $d/L = 0.014$ . Estos vórtices también son reportados por Tian, Karayiannis [1] en su estudio experimental. La formación de estos vórtices en las esquinas señaladas es debida a las condiciones de frontera que impiden el movimiento del fluido en la dirección  $y$ , produciéndose un pequeño “estancamiento” en las esquinas mencionadas transportando cantidad de movimiento hacia la dirección  $x$  en sentido positivo y negativo.



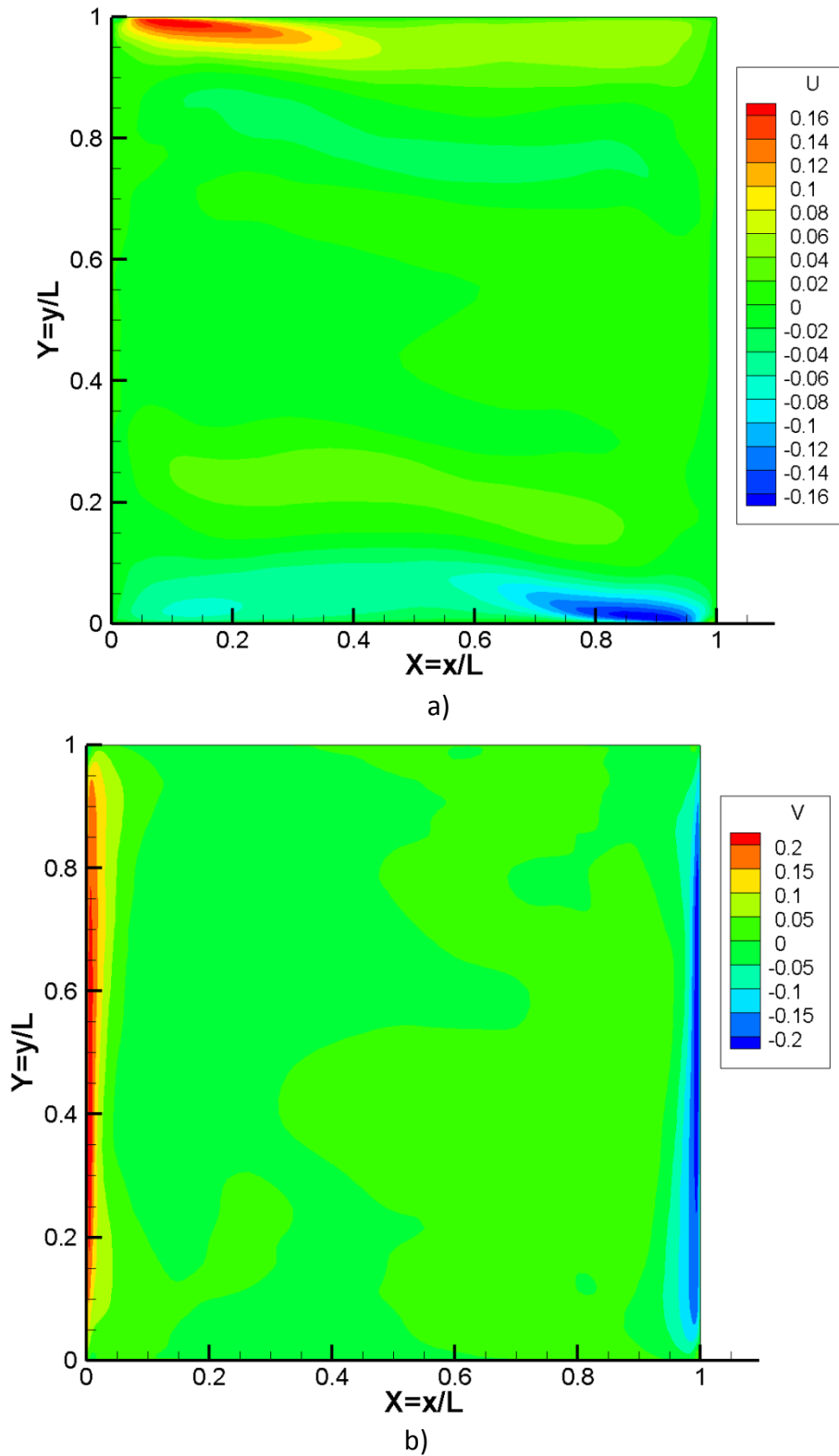


Figura 6.8. Distribución de la velocidad promedio. a) Velocidad horizontal  $U$ . b) Velocidad vertical  $V$ .

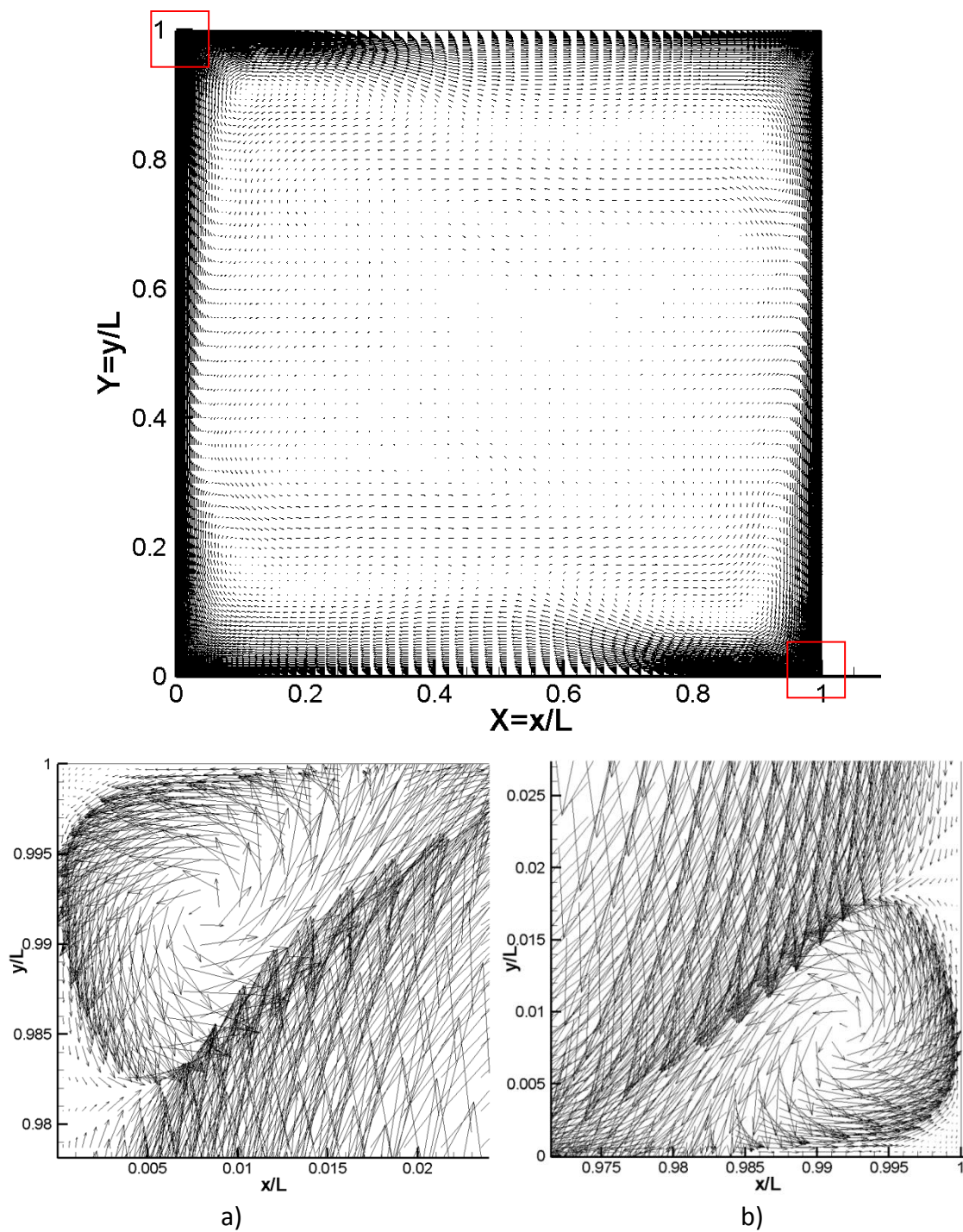


Figura 6.9. Vectores de velocidad y regiones de acercamiento para las figuras 6.9 a) y 6.9 b).

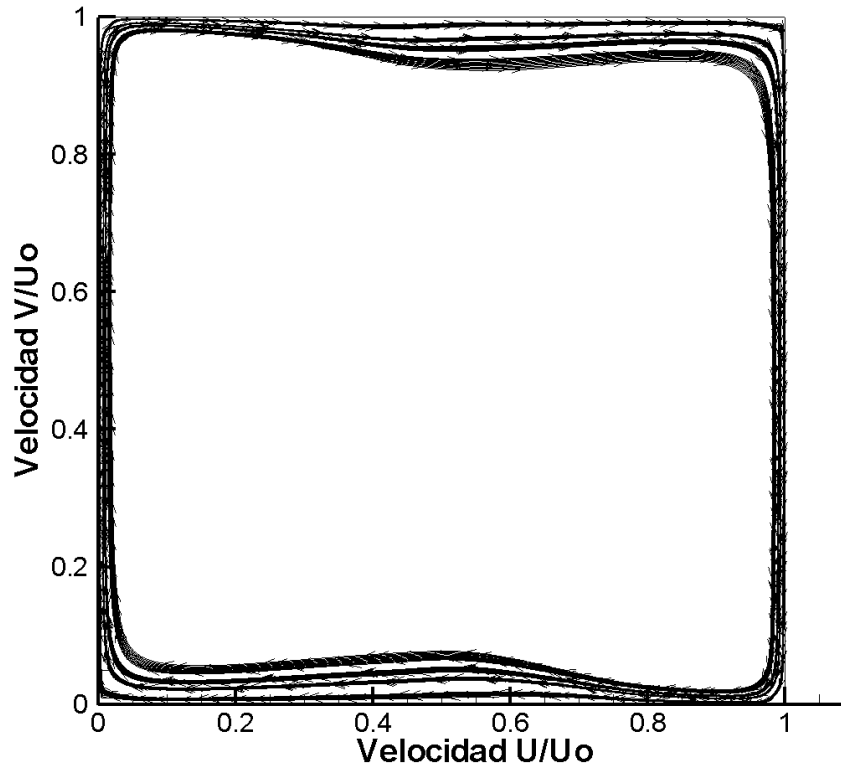


Figura 6.10. Líneas de trayectoria del flujo promedio en la cavidad.

### 6.2.3 Cantidades turbulentas

El modelado de la turbulencia requiere ecuaciones que relacionen la fluctuación de los valores promedio, además de las ecuaciones básicas de gobierno. En el análisis del flujo turbulento, las fluctuaciones promedio descritas por  $T_{rms}$ ,  $u_{rms}$  y  $v_{rms}$  son importantes para caracterizar y describir dicho flujo. Un gráfico de contorno de la fluctuación de la temperatura promedio  $T_{rms}$  es presentado en la figura 6.11. La intensidad de la fluctuación de la temperatura se incrementa (tanto para la pared caliente como para la pared fría) desde las paredes verticales isotérmicas en la dirección del flujo; por supuesto esto es esperado debido al desarrollo en esas zonas de la capa límite turbulenta. La fluctuación de la temperatura promedio es en su mayoría concentrada en el área cercana a las paredes isotérmicas, es decir, en la capa límite térmica desde la pared hasta un valor aproximado de  $x/L = 0.1$  y  $x/L = 0.9$ . En consecuencia, la región del centro de la cavidad es estacionaria.

Se pueden distinguir dos picos en el gráfico de contorno de la fluctuación  $T_{rms}$  en la dirección  $x$ , a una altura de  $y/L \approx 0.3$  y  $y/L \approx 0.7$  para las paredes caliente y fría respectivamente. En el contorno 6.11 b) se puede observar la relación de esta penetración de la fluctuación de la temperatura en el flujo libre con la variación de la velocidad promedio  $u_{rms}$  y  $v_{rms}$ . En esta región en específico, las tres fluctuaciones de temperatura y velocidad vertical y horizontal, fluctúan de manera dependiente.

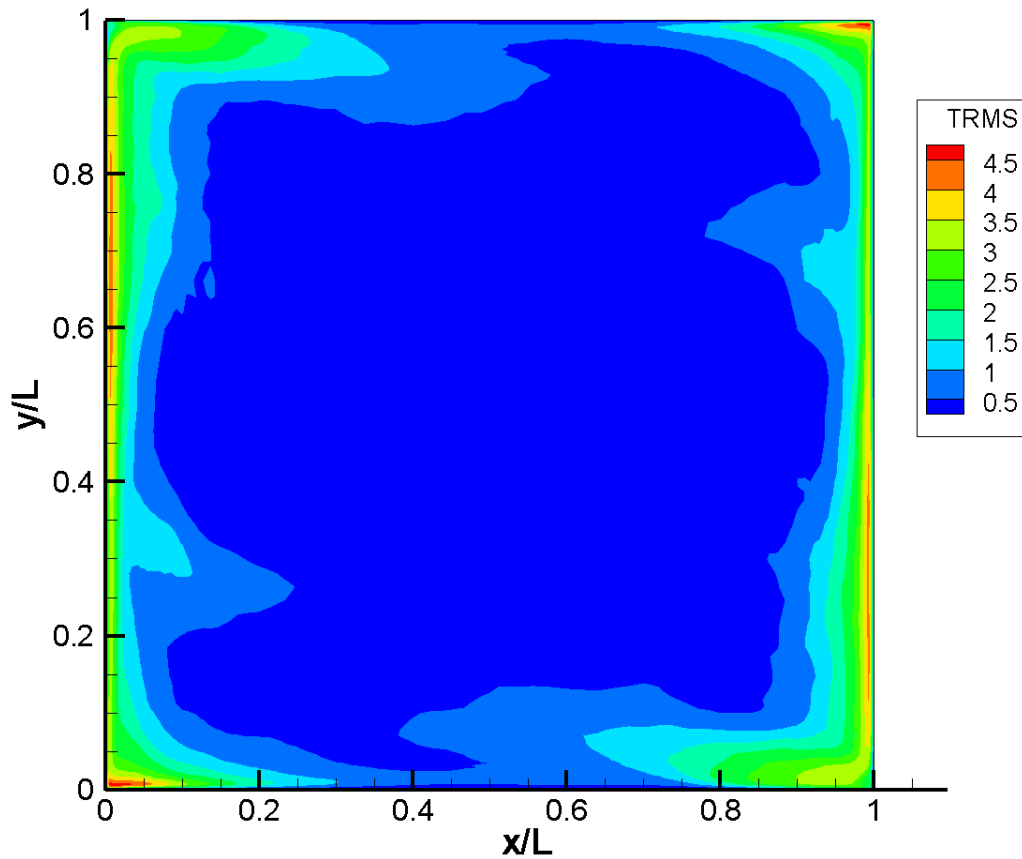


Figura 6.11 a). Gráfico de contorno de la fluctuación de la temperatura promedio  $T_{rms}$ .

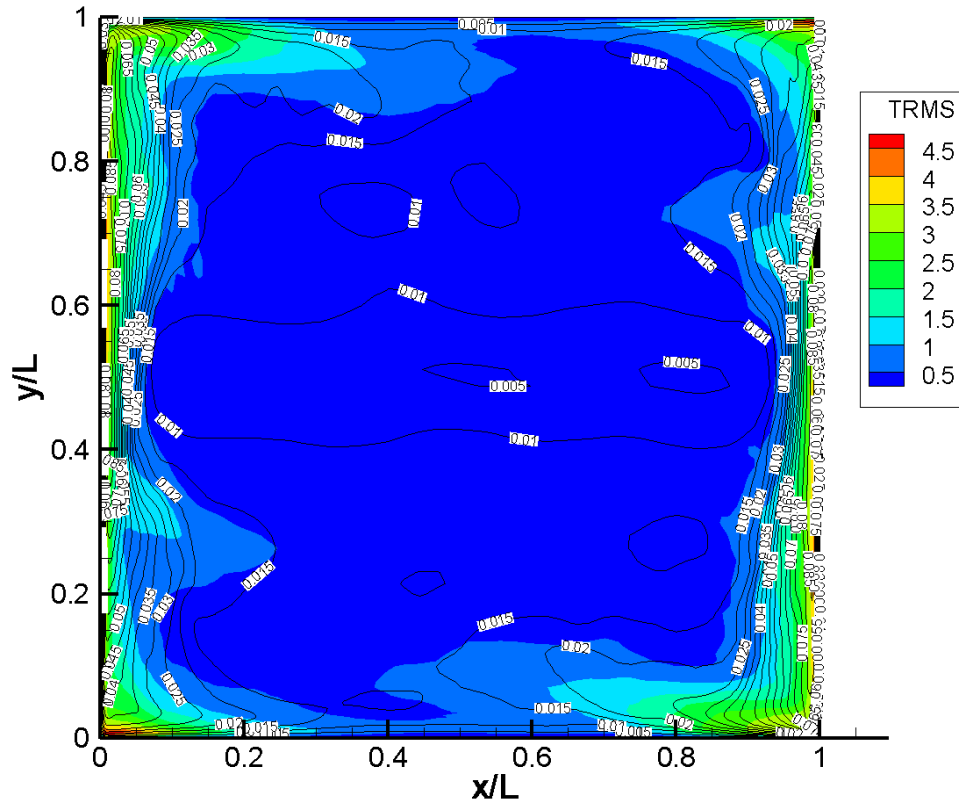
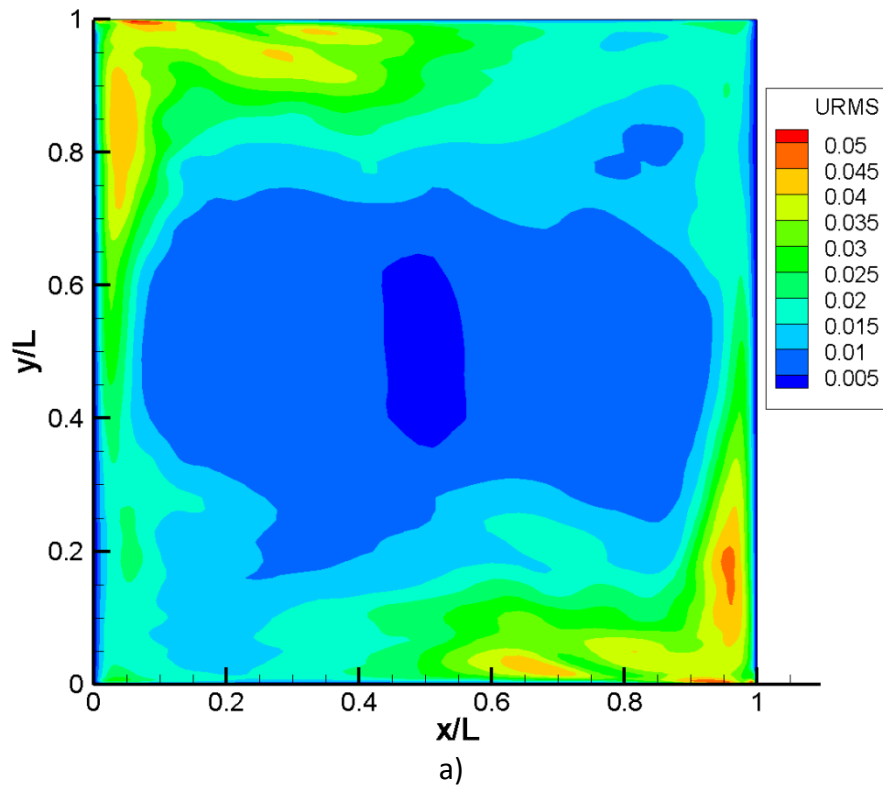


Figura 6.11 b). Gráfica de comparación de la fluctuación de la temperatura promedio  $T_{rms}$  (contorno en colores) con la fluctuación promedio de la velocidad vertical  $v_{rms}$  (líneas negras).



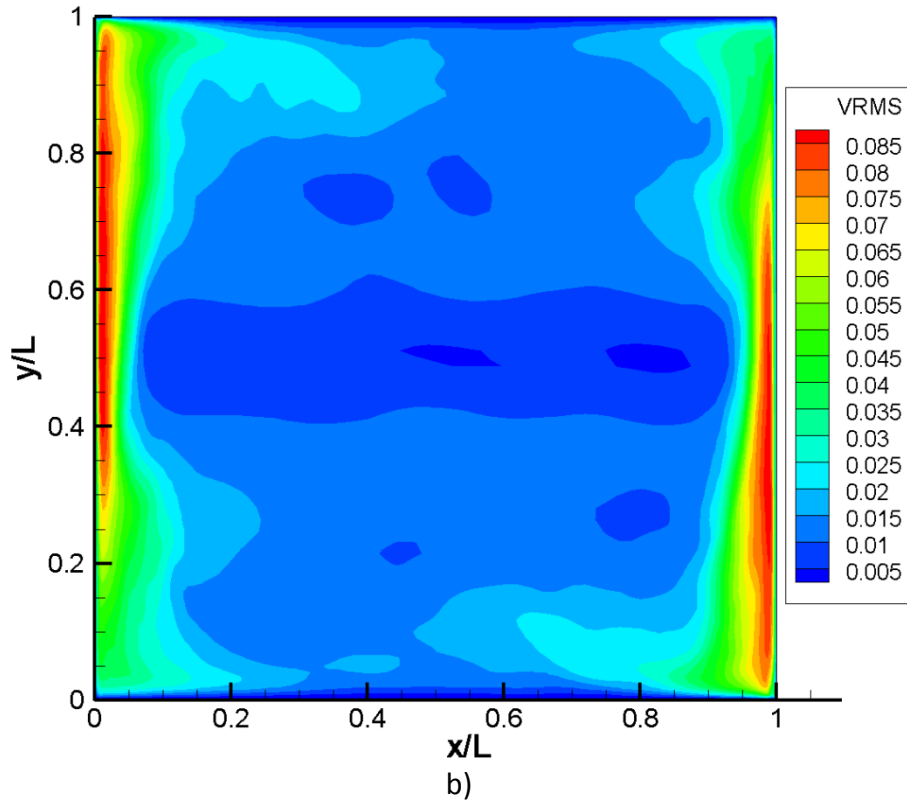


Figura 6.12. Gráfica de contorno de la fluctuación promedio de la velocidad: a) componente horizontal  $u_{rms}$ , b) componente vertical  $v_{rms}$ .

Las fluctuaciones promedio de la velocidad vertical y horizontal  $v_{rms}$  y  $u_{rms}$  respectivamente, se muestran en la figura 6.12. Dichas fluctuaciones están relacionadas como se puede ver en la figura 6.13. En la región interna de la capa límite y en el límite exterior de esta, la fluctuación es generalizada en la dirección vertical y horizontal.

Nuevamente en la región central de la cavidad, el flujo es estacionario debido a que no se aprecia fluctuación de la velocidad en alguna de las dos componentes. La turbulencia generada desde la pared vertical caliente es amortiguada debido al cambio de dirección del flujo cuando este es próximo a la pared horizontal superior. Aunque de una magnitud menor, las fluctuaciones de la velocidad promedio se siguen dando en la capa límite horizontal para que después, parte de la turbulencia se “destruya” al cambiar de dirección nuevamente en la pared vertical fría; siguiendo el mismo comportamiento similar en la parte inferior de la cavidad.

Si la pared horizontal fuera adiabática, la turbulencia sería amortiguada casi por completo, ya que no se seguiría transfiriendo calor hacia el fluido en esas zonas, y las fluctuaciones de las variables promedio tenderían a cero.

Las fluctuaciones de la velocidad son concentradas en la capa límite y decrecen casi hasta cero fuera de esta. El valor de  $u_{rms}$  es menor que la mitad del valor de  $v_{rms}$  en la capa límite a la mitad de la altura de la cavidad. En cavidades verticales, el flujo de capa límite es esperado en las paredes activas. La transferencia de calor en las paredes horizontales crea flujo de capa límite en estas paredes también. El cambio en la dirección del flujo en cuanto el flujo se encuentra con las paredes verticales causa alguna baja turbulencia en las regiones de las esquinas. La fluctuación de la velocidad es detectada en cualquier lugar a lo largo de las paredes, con la fluctuación vertical dominando cerca de las paredes isotérmicas. La fluctuación de la velocidad horizontal es predominante cerca de la esquina superior caliente y de la esquina inferior de la pared fría.

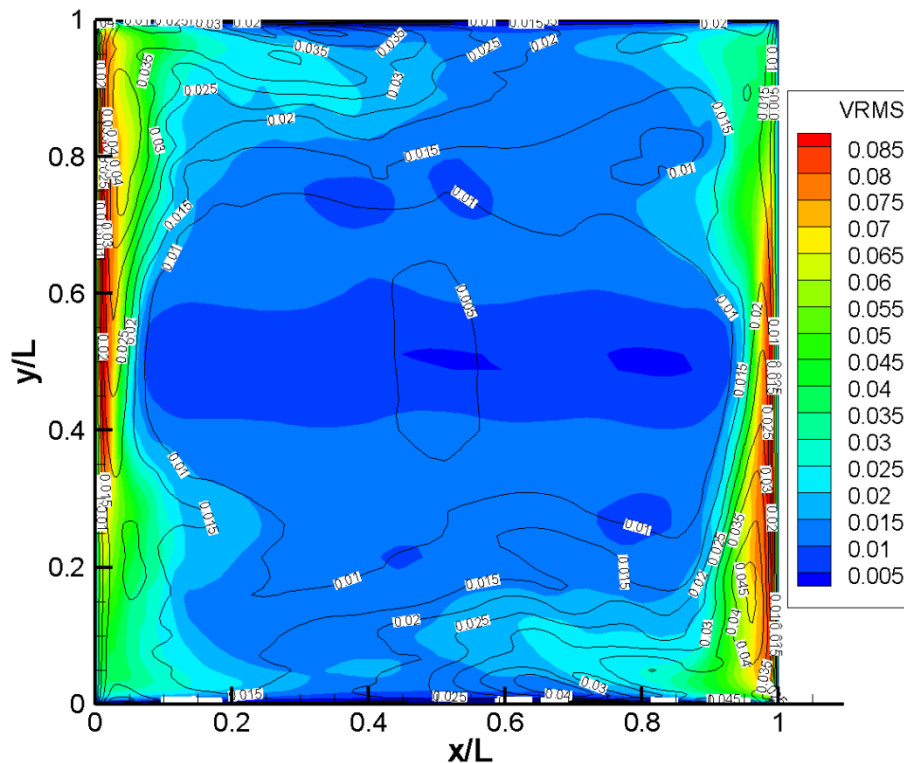


Figura 6.13. Gráfica de comparación de la fluctuación de la velocidad promedio vertical  $v_{rms}$  (contorno en colores) con la fluctuación promedio de la velocidad horizontal  $u_{rms}$  (líneas negras).

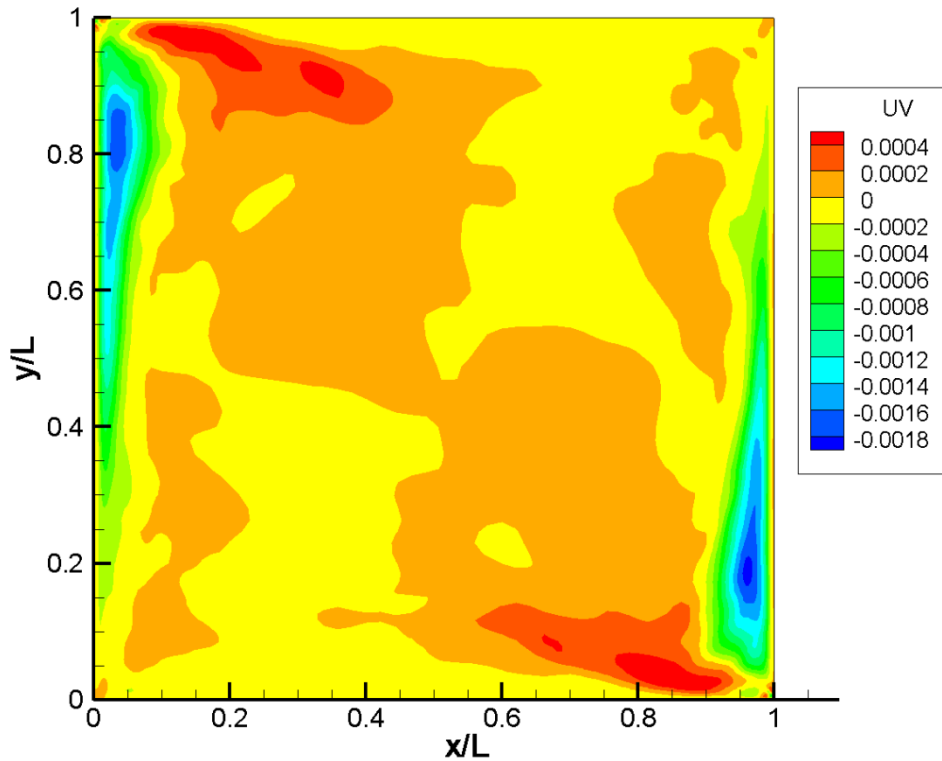
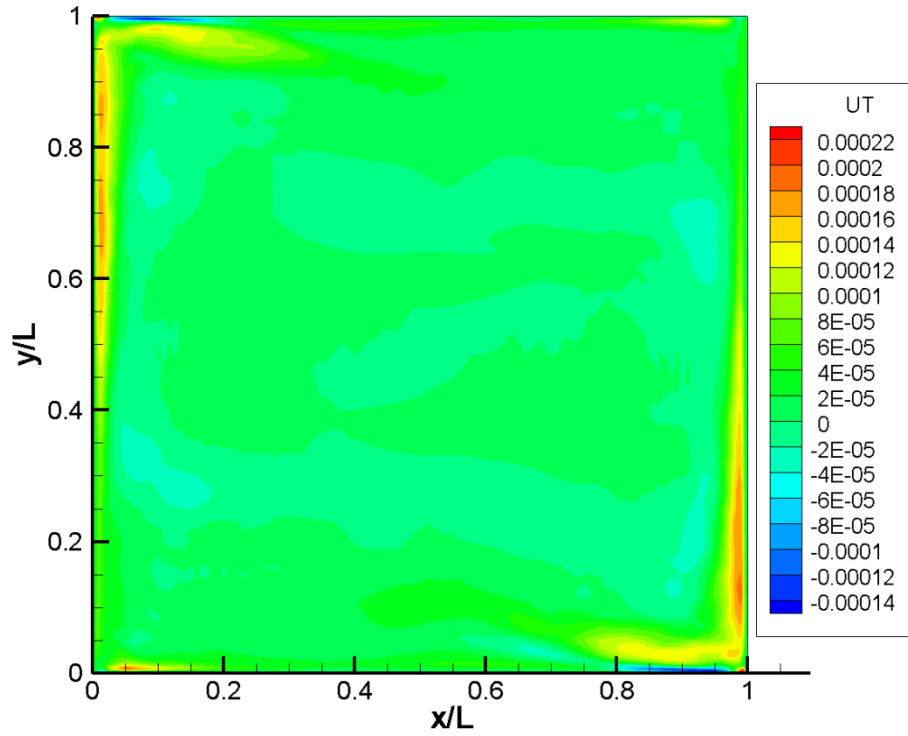


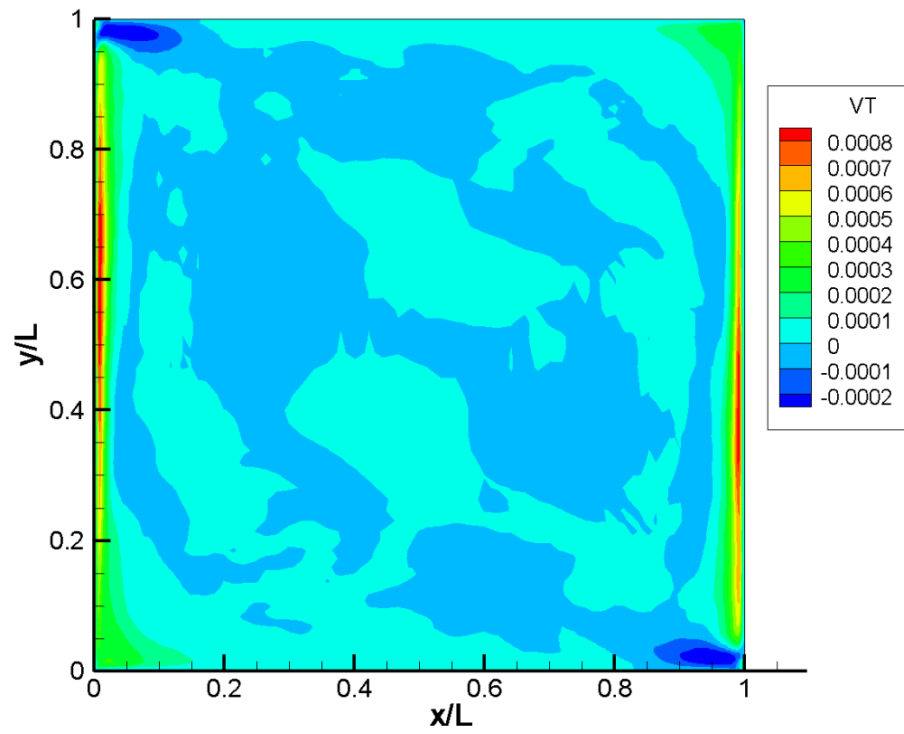
Figura 6.14. Esfuerzos cortantes de Reynolds.

Los esfuerzos de Reynolds  $u'v'$  representan una medida temporal del flujo de momento debido a las fluctuaciones. En la gráfica 6.14 se puede observar que la tensión ejercida al fluido por las fluctuaciones turbulentas es más significativa en las paredes isotérmicas verticales (mancha oscura). Su puede distinguir claramente el desarrollo de la capa límite de velocidad en las mismas paredes y el incremento de su espesor a medida que el fluido adquiere mayor velocidad en la dirección vertical. Se observa que el transporte de cantidad de movimiento se vuelve nulo en una pequeña región en  $x/L \approx 0.05$ ,  $y/L \approx 0.96$  y  $x/L \approx 0.95$ ,  $y/L \approx 0.05$ . Los esfuerzos de Reynolds son menos significativos en la dirección  $x$  ya que las fluctuaciones de la velocidad promedio son menores en esta dirección; sin embargo se aprecian zonas de transporte de momento cuando la velocidad del fluido cambia de dirección desde  $y$  hacia la dirección  $x$  (manchas blancas), con un valor de  $u'v' \approx 0.0004$ . En el resto de la cavidad, los esfuerzos de Reynolds valen prácticamente cero debido a que, como se ha mencionado anteriormente, la turbulencia es concentrada en las regiones de capa límite.





a)



b)

Figura 6.15. Contorno de la transferencia de calor turbulenta en la cavidad: a) dirección  $x$ , b) dirección  $y$ .

En la figura 6.15 se presenta un gráfico de contorno de la transferencia de calor turbulenta en la dirección  $X$  y  $Y$ . Para los dos casos, los mayores valores se dan sobre las paredes caliente y fría conforme la turbulencia se desarrolla. Al igual que las fluctuaciones de los valores promedio, la transferencia de calor turbulenta es limitada en las zonas de capa límite, y por consiguiente, en el centro de la cavidad los valores son nulos.

Un fenómeno interesante observado en los vectores de transferencia de calor turbulenta de las figuras 6.16, es el sentido en el que calor fluye en ciertas zonas contiguas a las paredes horizontales superior e inferior, a una distancia aproximada de  $x/L \approx 0.18$ ,  $y/L \approx 0.99$  y  $x/L \approx 0.82$ ,  $y/L \approx 0.01$  respectivamente. Se puede distinguir una especie de “vórtice” en las figuras 6.16 a) y 6.16 b). Una suposición para explicar este fenómeno podría basarse en el perfil cúbico de temperatura utilizado en las paredes horizontales o en algún efecto de la turbulencia en estas zonas.

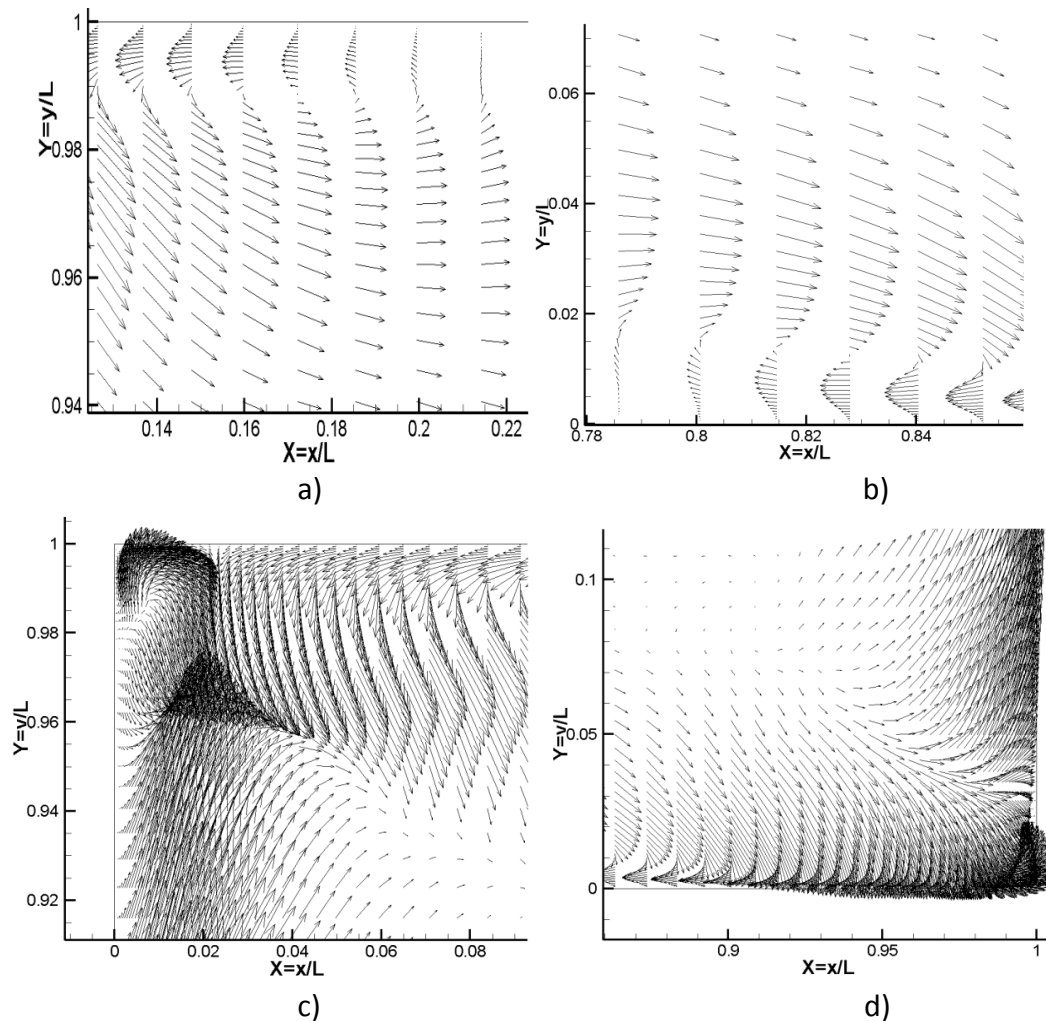


Figura 6.16. Vectores de transferencia de calor: a) pared horizontal superior, b) pared horizontal inferior, c) esquina superior izquierda, d) esquina inferior derecha.

En las figuras 6.16 c) y 6.16 d) se puede apreciar la condición de conductividad de las paredes horizontales superior e inferior. En la figura 6.16 a) la transferencia de calor turbulenta es en la dirección del flujo dentro de la capa límite. Cuando parte de la turbulencia se “destruye” al cambiar el flujo de dirección, la transferencia es ahora hacia el centro de la cavidad. En la misma figura se puede observar que en el vórtice de la esquina superior izquierda, la transferencia de calor turbulenta se lleva a cabo desde el centro del vórtice hacia afuera. En la figura 6.16 b), esto no es muy notorio para el vórtice ubicado en el esquina inferior derecha, pero sigue el mismo comportamiento.

## 6.3 Variables instantáneas

### 6.3.1 Estructuras turbulentas

Las estructuras turbulentas se pueden interpretar como zonas en donde el fluido está girando en un instante de tiempo. En la figura 6.17 se muestran isosuperficies de criterio Q, el cual se obtiene del segundo invariante del tensor gradiente de velocidad que se define como:  $Q = \frac{1}{2}(\Omega_{ij}\Omega_{ij} - L_{ij}L_{ij})$ , en donde  $\Omega_{ij}$  es la parte antisimétrica y  $L_{ij}$  la parte simétrica del tensor gradiente de velocidad. Como resultado de valores positivos de Q, se pueden observar las estructuras turbulentas, y mientras el valor de Q sea mayor, la visualización arrojará las estructuras más energéticas.

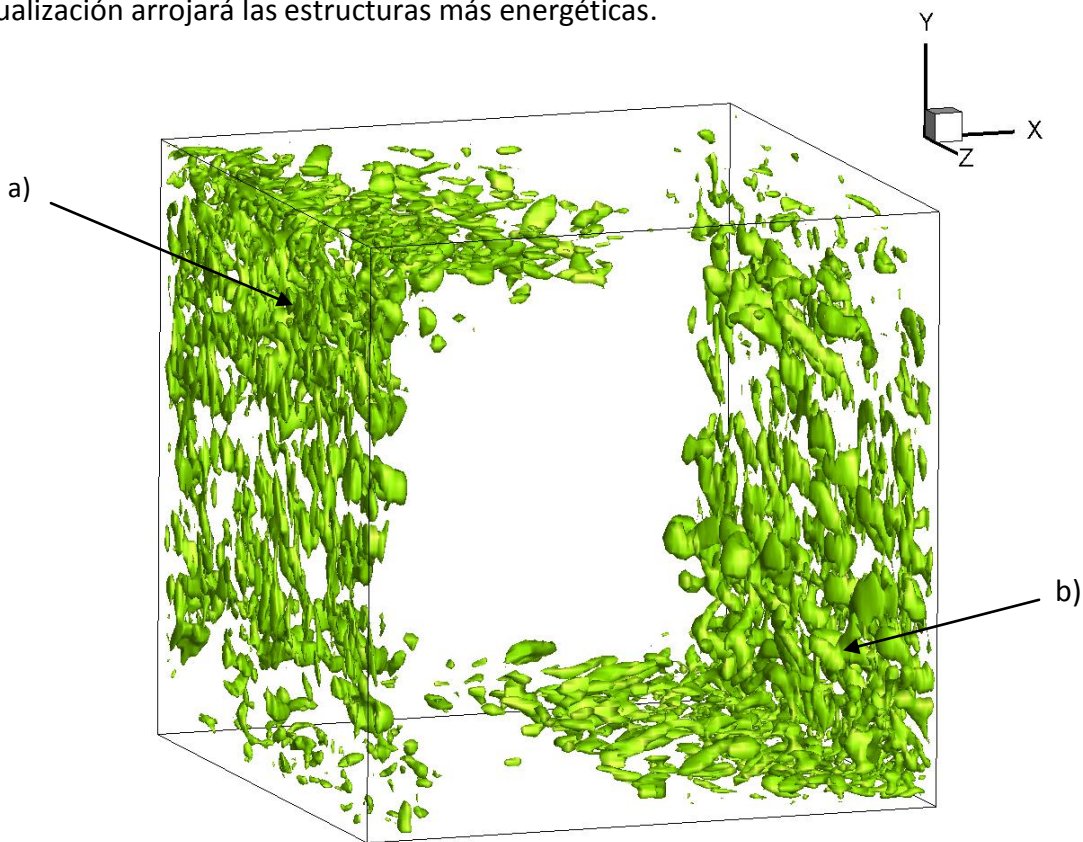


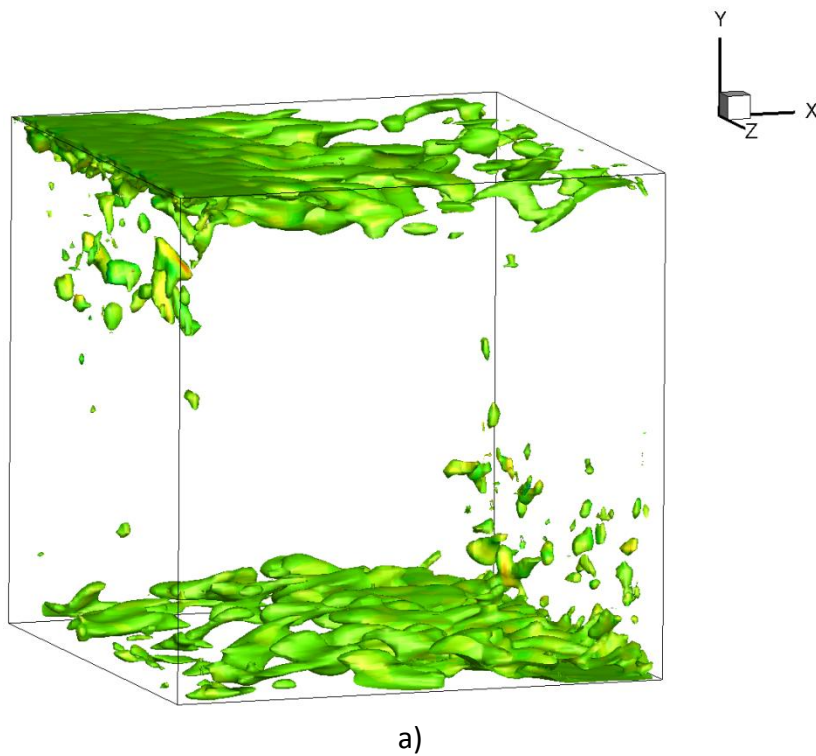
Figura 6.17. Estructuras turbulentas. Isosuperficies de criterio Q ( $Q = 5.0 U_0^2 / L^2$ ). Concentración de la turbulencia: a) pared isotérmica caliente, b) pared isotérmica fría y estructura de capa límite.

Como también se ha mencionado en las variables promedio, en la variable instantánea Q se observa que la turbulencia no es generalizada en el flujo; está concentrada en las zonas de capa límite de velocidad horizontal y vertical (regiones contiguas a las paredes horizontales y verticales), pero a su vez, estas estructuras tienen una mayor concentración

en las zonas donde se tiene la mayor velocidad promedio tanto para la componente  $U$  como para la componente  $V$ .

### 6.3.2 Distribución de la velocidad

En la figura 6.18 se presentan los valores instantáneos de velocidad  $u$  y  $v$ . Las estructuras de capa límite de velocidad se pueden apreciar en las dos componentes. Para la velocidad horizontal  $u$ , su magnitud disminuye en la dirección del flujo conforme se aproxima a las paredes verticales, y la apreciación de la estructura de capa límite se tiene hasta un poco más de la mitad de la cavidad en la dirección  $x$  (figura 6.18 a)), teniendo mayores zonas de esta velocidad en las regiones próximas a las esquinas superior izquierda e inferior derecha de la cavidad debida al transporte de cantidad de movimiento desde la dirección  $y$  hacia la dirección  $x$ . La estructura de capa límite es más clara en la velocidad instantánea vertical  $v$ , con el incremento de su espesor conforme el fluido adquiere velocidad (figuras 6.18 b) y c)). En el centro de la cavidad, prácticamente no existe movimiento del fluido, lo que ya fue corroborado anteriormente con los valores promedio de velocidad.



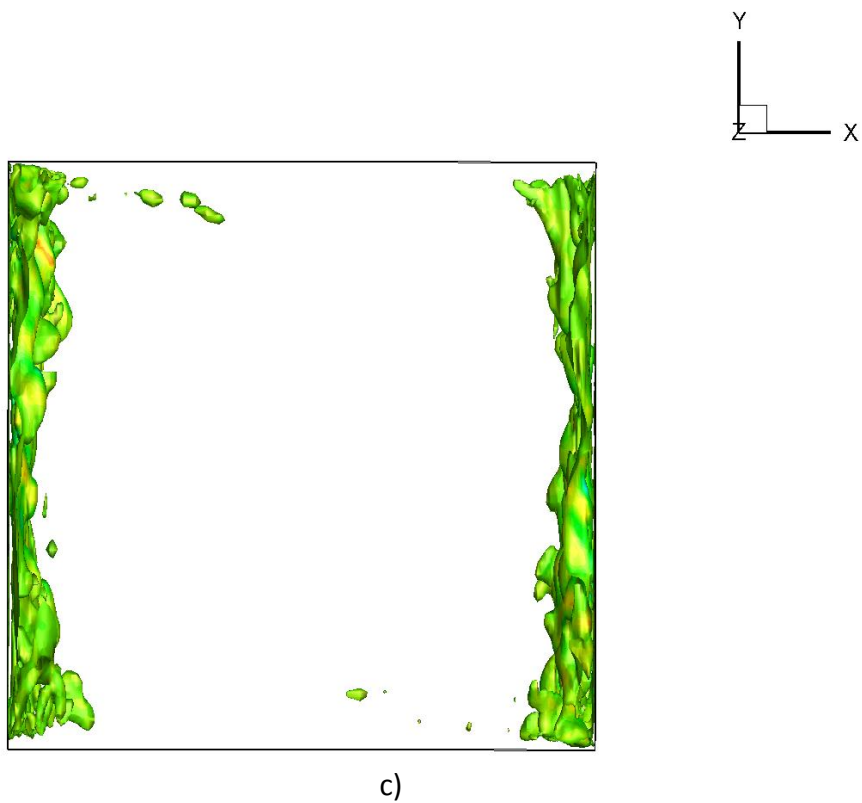
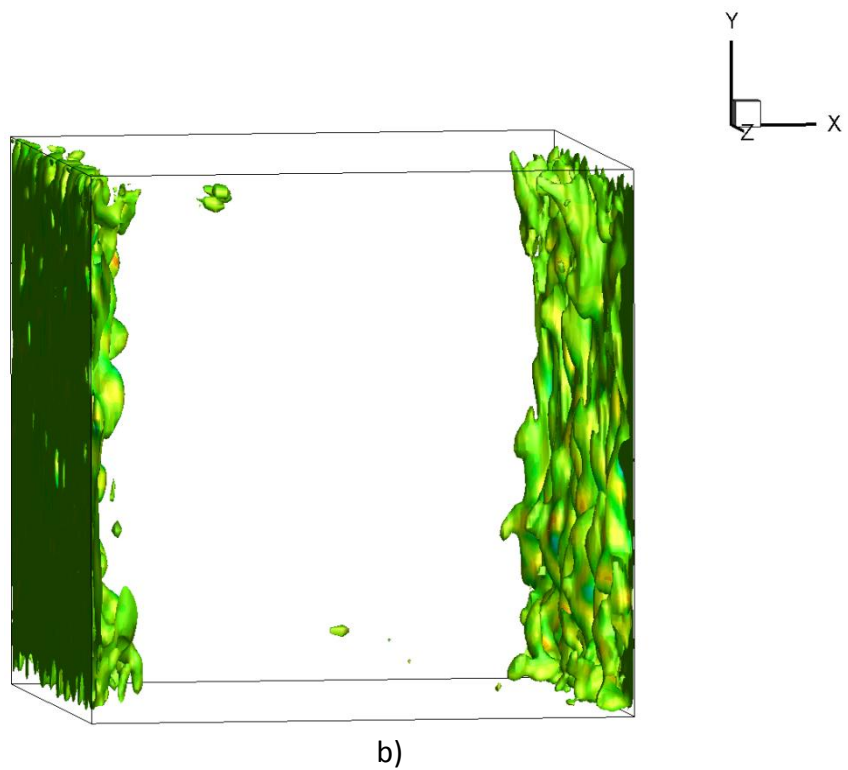


Figura 6.18. Velocidad instantánea: a) velocidad horizontal  $u$ , b) velocidad vertical  $v$ , c) velocidad vertical  $v$  en el plano  $x - y$ .



En la figura 6.19 se presentan en conjunto los resultados instantáneos para  $Q$  y la velocidad vertical instantánea  $v$ . En las regiones señaladas con círculos rojos, aparecen algunas de las estructuras tipo pasador, las cuales son típicas del desarrollo de capa límite turbulenta. La velocidad vertical y la formación de las estructuras turbulentas tipo pasador se encuentran relacionadas como se puede apreciar en la misma figura de abajo.

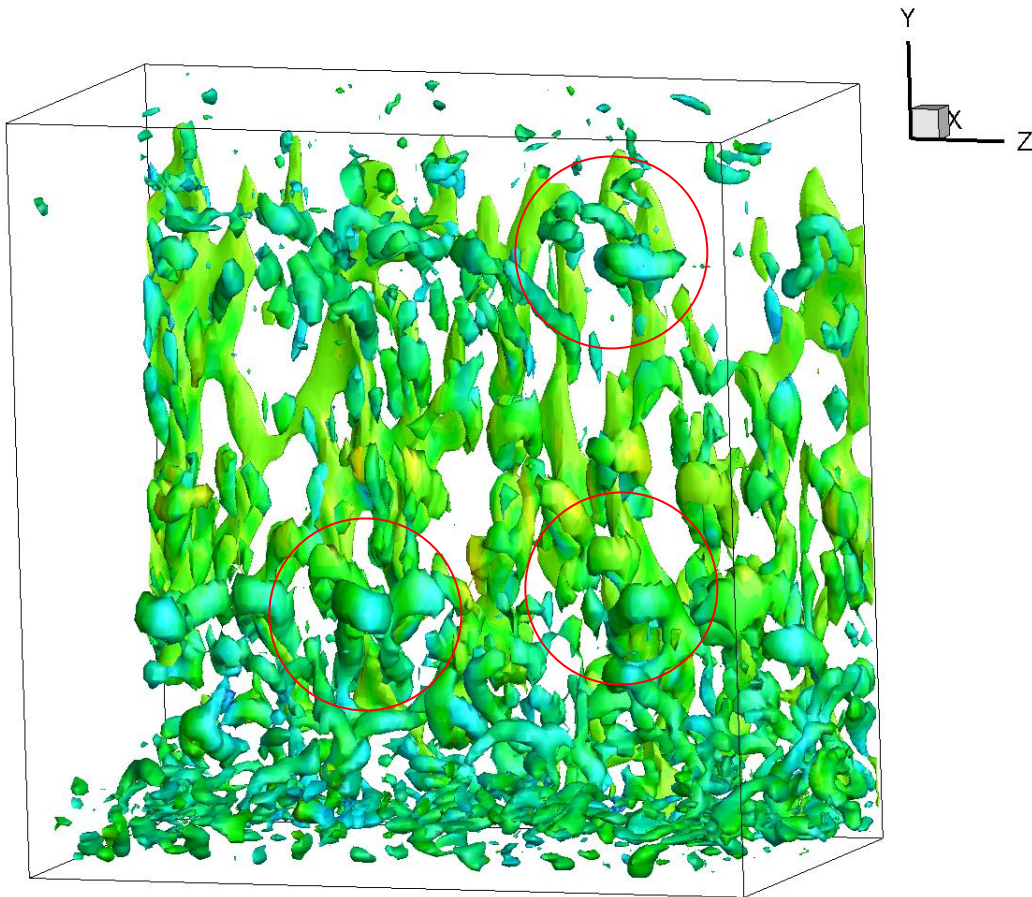


Figura 6.19. Estructuras turbulentas (color azul turquesa) y velocidad  $v$  instantánea (color verde) en la pared isotérmica fría.

# Capítulo 7

## Conclusiones

Se realizó la simulación numérica del fenómeno de convección natural en una cavidad cuadrada llena con aire. El modelado numérico se realizó con la Simulación de Grandes Escalas (LES). Las condiciones de frontera y las características del flujo fueron las mismas que las del estudio experimental llevado a cabo por Tian y Karayiannis [1]:  $Ra = 1.58 \times 10^9$ , paredes isotérmicas verticales a 50 y 10 °C, con dimensiones de  $0.75 \text{ m} \times 0.75 \text{ m} \times 1.5 \text{ m}$  y paredes horizontales conductivas. La comparación de las variables promedio, de los esfuerzos de Reynolds, de las fluctuaciones promedio y del número de Nusselt entre el estudio experimental y los resultados de la simulación numérica de esta tesis es buena, teniendo pequeñas diferencias en algunos perfiles, pero corroborando su comportamiento similar. Debido a que el estudio experimental fue realizado con alta precisión, que la simulación numérica presenta las mismas condiciones de frontera y que la comparación de los resultados es correcta, se puede concluir que el código CFD del fenómeno en cuestión queda validado.

Se presentan resultados para las variables promedio de temperatura, velocidad, esfuerzos de Reynolds y de las fluctuaciones promedio en el plano  $x - y$ , y de las variables instantáneas de velocidad e isosuperficies de criterio Q (estructuras turbulentas). El movimiento del fluido se encuentra limitado en las regiones de capa límite y en el límite exterior de esta. La turbulencia sólo se encuentra en las zonas de capa límite y contiguas a ellas. El flujo en la zona central de la cavidad se encuentra en un estado estacionario. La estratificación del flujo también fue comprobada. Se verificó la existencia de dos pequeños vórtices en la esquina superior izquierda y en la esquina inferior derecha en la cavidad girando en sentido anti-horario.

Los valores negativos de la velocidad promedio indican zonas de recirculación del flujo generando cuatro vórtices: dos en las paredes verticales y dos en las paredes horizontales girando en sentido horario contiguos a las capas límite verticales y horizontales.

La validación del código CFD de esta simulación sentará las bases para el estudio de las diversas aplicaciones de ingeniería del fenómeno de convección natural en cavidades cuadradas con diferencia de temperatura en las paredes verticales.



## Fuentes bibliográficas

[1] Y.S. Tian, T.G. Karayiannis, Low turbulence natural convection in an air filled square cavity Part I: the thermal and fluid flow fields, *Int J. of Heat Mass Transfer* 43 (2000) 849-866.

[2] I. Catton, Natural Convection in enclosures, in: *Proc. Sixth, Int. Heat Transfer Conf.*, vol. 2, Toronto, Canada, 1978, pp. 13-20.

[3] C.J. Hoogendoorn, Natural convection in enclosures, in: *Proc. Eighth Int. Heat Transfer Conf.*, vol. 1, San Francisco, USA, 1996, pp. 111-120.

[3] A. Bejan, *Convection Heat Transfer*, Third Edition, Jhon Wiley & Sons, United States 2003, p.p. 243-271.

[4] S. Ostrach, Natural convection in enclosures, *Trans. of ASME, J. Heat Transfer* 110 (1988) 1175-1190.

[5] J.P. Holman, *Transferencia de calor*, Octava edición, Mc Graw Hill, España 1998, p.p. 245-248.

[6] K.T. Yang, Natural convection in enclosures, in: S. Kakac, R.K. Shah, W. Aung (Eds.), *Handbook of Single-Phase Convective Heat Transfer*, Wiley, New York, 1987 (Chapter 13).

[7] F.P. Incropera, *Fundamentos de Transferencia de calor*, Cuarta Edición, Prentice Hall México 1999, p.p. 284-291, 293-295, 482-487, 490, 509-511

[8] K.T. Yang, Transitions and bifurcations in laminar buoyant flows in confined enclosures, *Trans. ASME, Journal of Heat Transfer* 110 (1988) 1191-1204.

[9] R.A.W.M. Henkes, C.J. Hoogendoorn (Eds.), Turbulent Natural Convection in Enclosures – A Computational and Experimental Benchmark Study, Editions Europeennes Thermique et Industrie, 1993.

[10] Y.S. Tian, T.G. Karayiannis, Low turbulence natural convection in an air filled square cavity Part II: the turbulence quantities, Int J. of Heat Mass Transfer 43 (2000) 867- 884.

[11] Y.S. Tian, Low turbulence natural convection in an air filled square cavity, Ph.D. thesis, South Bank University, London, UK, 1997.

[12] F. Allard, Effects of thermal boundary conditions on natural convection in thermally-driven cavities, in: R.A.W.M. Henkes, C.J. Hoogendoorn (Eds.), Turbulent Natural Convection in Enclosures – A Computational and Experimental Benchmark Study, Editions Europeennes Thermique et Industrie, 1993, pp. 214–233.

[13] F. Penot, A. N´Dame, Succesive bifurcations of natural convection in a vertical enclosure heated from the side, in: Heat Transfer, Third UK National Conference and First European Conference on Thermal Sciences, vol. I, Birmingham, UK, 1992, PP. 507-513.

[14] A.M. Lankhorst, Laminar and turbulent natural convection in cavities – numerical modeling and experimental validation, Ph.D. thesis, Techonolgy University of Delft, The Netherlands, 1991.

[15] S. Mergui, F. Penot, Natural convection in a differentially heated square cavity – experimental investigation at  $Ra = 1.69 \times 10^9$ , Int. J. Heat Mass Transfer 39 (1996) 563-574.

[16] S. Mergui, F. Penot, J.L. Tuhault , Experimental natural convection in an air-filled square cavity at  $Ra = 1.69 \times 10^9$ , in: R.A.W.M. Henkes, C.J. Hoogendoorn (Eds.), Turbulent Natural Convection in Enclosures – A Computational and Experimental Benchmark Study, Editions Europeennes Thermique et Industrie, 1993, pp. 97-108.

[17] I.J. Opstelten, C.M. Zhang, H.S. Dol, C.J. Hoogendoorn, Turbulent quantities of natural convection flow in a side-heated enclosure; experiments and calculations, in: Proc of Second European Thermal-Sciences and Fourteenth UIT National Heat Transfer Conference, 1996, pp. 795-802.

- [18] S. Ziai, Turbulent natural convection in a large rectangular air cavity, Ph.D. thesis, Queen Mary and Westfield College, University of London, London, UK, 1983.
- [19] K.J. King, Turbulent natural convection in rectangular air cavities, Ph.D. thesis, Queen Mary and Westfield College, University of London, London, UK, 1989.
- [20] W.K. George, S.P. Capp, A theory for natural convection turbulent boundary layer next to heated vertical surfaces, *Int. J. Heat Mass Transfer* 22 (1979) 813-826.
- [21] J.T. Davies, *Turbulence Phenomena*, Academic Press, New York, 1972.
- [22] C. Beghein, F. Penot, S. Mergui, F. Allard, Numerical and Experimental evaluation of turbulent models for natural convection simulation in a thermally driven square cavity, in: *Proc. of the ASME Conf., 93-WA/HT-46*, 1993, pp. 1-12.
- [23] T. Fusegui, J.M. Hyun, K. Kuwahara, Three dimensional simulations of natural convection in sidewall-heated cube, *Int. J. for Numerical Methods* 13 (1991) 857-867.
- [24] C. Beghein, F. Allard, A. Draoui, Numerical modelling of turbulent convection in a thermally-driven square cavity, R.A.W.M. Henkes, C.J. Hoogendoorn (Eds.), *Turbulent Natural Convection in Enclosures – A Computational and Experimental Benchmark Study*, Editions Europeennes Thermique et Industrie, 1993, pp. 31-42
- [25] D.D. Gray A. Giorgini, The validity of the Boussinesq approximation for liquids and gases, *Int. J. Heat Mass Transfer* 19 (1976) 545- 551.
- [26] R.A.W.M. Henkes, C.J. Hoogendoorn, Turbulent natural convection in enclosures, in: R.A.W.M. Henkes, C.J. Hoogendoorn (Eds.), *Turbulent Natural Convection in Enclosures – A Computational and Experimental Benchmark Study*, Editions Europeennes Thermique et Industrie, 1993, pp. 64-75.
- [27] S. Paolucci, Direct numerical simulation of two-dimensional turbulent natural convection in an enclosed cavity, *J. Fluid Mech* 215 (1990) 229-262.
- [28] G.S. Barozzi, E. Nobile, A.C.M. Sousa, Contribution to the numerical simulation of turbulent natural convection in rectangular enclosures, in: R.A.W.M. Henkes, C.J. Hoogendoorn (Eds.), *Turbulent Natural Convection in Enclosures – A Computational and*

[29] Experimental Benchmark Study, Editions Europeennes Thermique et Industrie, 1993, pp. 19-30.

[30] C. Beghein, F. Allard, A Draoui, Numerical modelling turbulent convection in a thermally-driven square cavity, in: R.A.W.M. Henkes, C.J. Hoogendoorn (Eds.), Turbulent Natural Convection in Enclosures – A Computational and Experimental Benchmark Study, Editions Europeennes Thermique et Industrie, 1993, pp. 31-42.

[31] T. Poinso and S.K. Lele, Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows, Journal of Computational Physics, 1992, pp. 1(101): 104-129.

Imágenes tomadas para el subtema 1.3 de los sitios:

[http://www.physics.arizona.edu/~thews/reu/the science behind it all.html](http://www.physics.arizona.edu/~thews/reu/the%20science%20behind%20it%20all.html)

[http://www.knowledgerepublications.com/heat/solar air heating full product.htm](http://www.knowledgerepublications.com/heat/solar%20air%20heating%20full%20product.htm)

[http://wb9.itrademarket.com/pdimage/60/2229460 memmertunb200basic.jpg](http://wb9.itrademarket.com/pdimage/60/2229460_memmertunb200basic.jpg)