



**UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO**

FACULTAD DE INGENIERÍA



**“Optimización Estructural Evolutiva:
Diseño Óptimo de Estructuras Tipo Cascarón
(Shell Structures)”**

T E S I S

Para obtener el título de:

Ingeniero Mecánico

Presenta:

José Luis Sandoval Murillo

Director de Tesis:

Dr. Fernando Velázquez Villegas

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Nacional Autónoma de México por el apoyo proporcionado para la realización de este trabajo a través del proyecto IN108909 “Herramientas Computacionales para el Diseño Óptimo en Proyectos de Ingeniería e Innovación Tecnológica” del Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la Dirección General de Asuntos de Personal Académico (DGAPA).

A los miembros del sínodo, por el tiempo empleado en la revisión del presente trabajo, pues gracias a su experiencia y conocimientos aportados lograron complementarlo y enriquecerlo.

A mi tutor el Dr. Fernando Velázquez Villegas (Fer), quien con su ejemplo y asesoría me ha encaminado a ser un excelente profesional e ingeniero; además, me dio la confianza de contar siempre con su consejo, más allá de lo académico, como amigo.

A mis compañeros del GDMO, por la retroalimentación y la buena relación, que han favorecido al desarrollo de los proyectos dentro del grupo.

No puedo dejar de mencionar a aquellas personas que, a lo largo de mi vida han estado a mi lado y han sido de vital importancia en ella. Finalmente, culmina esta primera etapa en mi vida profesional con la realización de esta tesis; un logro que seguro no será el último, ni quizá el más importante, pero que es imprescindible para emprender nuevos retos y fijar nuevas metas.

Este trabajo está dedicado a ustedes...

...a mi familia, quienes han inculcado en mí el compromiso y la dedicación, entre otras cosas que se requieren para terminar lo que se comienza.

...a ella, con quien “después de tanto tiempo” he compartido tantos buenos momentos, que ha estado conmigo, alentándome, comprendiendo cuando había que sacrificar algo del tiempo juntos por cumplir con los compromisos académicos. Dra. Marisol De La Rosa, siempre ocuparás una parte importante en mi hipotálamo, en mi mente y en mi vida.

...a mis hermanos, quienes han influido en gran medida en quien soy y han puesto “la vara alta” para madurar y superarme profesional y personalmente.

...a mis papas, especialmente, quienes me han brindado su amor y tolerancia; nunca dejaré de agradecerles el apoyo incondicional que me han otorgado a lo largo de todos estos años; sin ustedes esto habría sido imposible. Por esto y mucho más...

iiiiiiiGRACIAS!!!!!!!

CONTENIDO

AGRADECIMIENTOS	III
CONTENIDO	V
INTRODUCCIÓN	IX
OBJETIVOS	XIII
JUSTIFICACIÓN	XV
ORGANIZACIÓN DE LA TESIS	XVII
CAPÍTULO 1. ESTRUCTURAS TIPO CASCARÓN (Shell Structures)	1
1.1 INTRODUCCIÓN	1
1.2 CARACTERÍSTICAS	2
1.3 ESFUERZOS Y DEFORMACIONES	5
1.3.1 Esfuerzos y Deformaciones Planos	5
1.3.2 Esfuerzos y Deformaciones por Flexión	8
1.4 APLICACIONES	16
1.4.1 Construcción de chasises automotrices	16
1.4.2 Vehículos de Competición	17
1.4.3 PAC-Car II	18
CAPÍTULO 2. OPTIMIZACIÓN ESTRUCTURAL EVOLUTIVA	21
2.1 INTRODUCCIÓN	21
2.2 ANTECEDENTES	23
2.3 OPTIMIZACIÓN ESTRUCTURAL	24
2.3.1 Variables de Diseño	24
2.3.2 Función Objetivo	25
2.3.3 Restricciones	25
2.4 MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN ESTRUCTURAL	26
2.4.1 Métodos Indirectos	26
2.4.1.1 Optimización Estructural Evolutiva (ESO)	26
2.4.1.2 Optimización Estructural Evolutiva Aditiva (AESO)	26

2.4.1.3	Optimización Estructural Evolutiva Bidireccional (BESO)	26
2.4.1.4	Optimización Estructural Evolutiva Morfológica (MESO)	27
2.4.1.5	Método de Diseño Totalmente Esforzado (FS)	27
2.4.1.6	Creación Inteligente de Cavidades (ICC)	27
2.4.2	Métodos Formales	27
2.4.3	Métodos Heurísticos	28
2.4.3.1	Algoritmos Genéticos	29
2.5	TIPOS DE OPTIMIZACIÓN ESTRUCTURAL	29
2.5.1	Optimización de Propiedades	30
2.5.2	Optimización de Forma	30
2.5.3	Optimización Topológica	30
2.6	GENERALIDADES DE LA METODOLOGIA ESO	31
2.7	ESO APLICADO A ESTRUCTURAS TIPO CASCARÓN	33
CAPÍTULO 3.	ANÁLISIS POR ELEMENTOS FINITOS	37
3.1	INTRODUCCIÓN	37
3.2	DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO	38
3.3	FEM PARA ESTRUCTURAS TIPO CASCARÓN	40
3.3.1	Sistemas de Referencia Global y Local	44
3.3.2	Ensamble	44
CAPÍTULO 4.	DESARROLLO DEL ALGORITMO	47
4.1	INTRODUCCIÓN	47
4.2	DESCRIPCIÓN DEL ALGORITMO	48
4.2.1	Módulo de Ingreso de Datos	48
4.2.1.1	Propiedades del Material	48
4.2.1.2	Parámetros de Optimización	49
4.2.1.3	Objetivos y/o Restricciones	49
4.2.2	Módulo Importador de Malla	50
4.2.3	Módulo FEA	50
4.2.3.1	Preproceso	50
4.2.3.2	Solución	51
4.2.3.3	Postproceso	51
4.2.4	Módulo de Optimización	51

4.2.5	Módulo de Visualización de Resultados	52
CAPÍTULO 5. CASOS DE ESTUDIO		55
5.1	INTRODUCCIÓN	55
5.2	CASO 1: PLACA CUADRADA CON SOPORTE SIMPLE	56
5.2.1	Malla 1 (100 mm)	57
5.2.2	Malla 2 (50 mm)	59
5.3	CASO 2: ESTRUCTURA CILÍNDRICA DE 180°	62
5.4	CASO 3: ESTRUCTURA CON CURVATURA ESFÉRICA	66
CONCLUSIONES		69
TRABAJO A FUTURO		71
REFERENCIAS		73

INTRODUCCIÓN

Las estructuras de tipo cascarón (o cascarones como también se refiere a ellas a lo largo de la presente tesis y que se definen en el Capítulo I) han existido en la naturaleza mucho antes de que el hombre apareciera en la tierra, léase en insectos, huevos, caparazones de animales, o en las conchas marinas cuyo nombre, en inglés, denomina a este tipo de estructuras. En las construcciones hechas por el hombre han aparecido apenas hace varios siglos atrás; por ejemplo, con el objetivo de proveer de techo a templos, catedrales o palacios; en transportes marinos como canoas y barcos (como la que se observa en la figura I.1) y también se pueden encontrar en utensilios más sencillos como escudos y armaduras militares y hasta en ollas o vasijas.



Figura I.1 Canoa de Corteza de Abedul [33].

En la actualidad estas estructuras encuentran aplicaciones en la ingeniería en edificaciones modernas como en grandes rascacielos o en torres enfriadoras de concreto; además, están presentes en todo tipo de contenedores de gran capacidad como tanques de agua o de petróleo y sus derivados, entre muchos otros fluidos. Por otro lado, este tipo de estructuras son ampliamente utilizadas en la construcción de transportes, ya sean terrestres, marítimos o aéreos, de carga o de pasajeros, como ejemplo la estructura de un automóvil mostrada en la figura I.2.

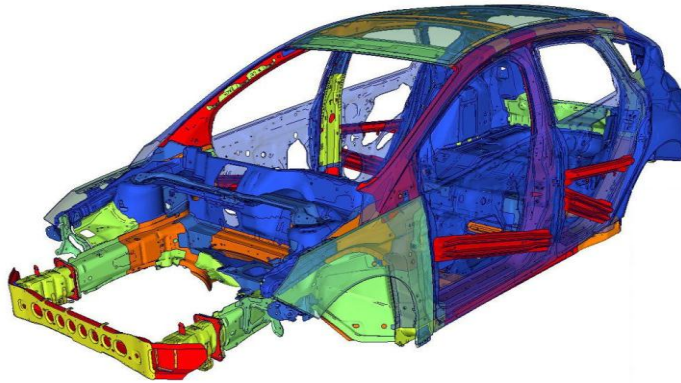


Figura I.2 Estructura Monocasco Ford Focus Wagon 2011/2012 [32].

Además de su gran relevancia en cada una de las áreas mencionadas, se debe hacer énfasis en las aplicaciones de los cascarones en la industria automotriz y aeroespacial; primero, porque es una tesis de ingeniería mecánica, la cual se relaciona más con estas aplicaciones y segundo porque las estructuras cascarón son cada vez más empleadas en la construcción de los medios de transporte. Además, la tecnología de materiales y manufactura ha avanzado considerablemente en estos sectores, máxime en el aeroespacial. Algunos ejemplos son: embarcaciones de tipos y tamaños varios o los chasises de automóviles cada vez más dominados por estructuras de este tipo dejando en el olvido aquellos construidos por pesadas vigas y tubería. Cabe mencionar que en el ámbito del automovilismo deportivo, los vehículos están constituidos básicamente por un monocasco que, en esencia, es una estructura tipo cascarón, empleando materiales avanzados como la de fibra de carbono, así como también sofisticadas aleaciones de aluminio, magnesio y titanio entre otros materiales; esto sin mencionar componentes aerodinámicos que también hacen uso de estas estructuras.

No se pueden dejar de mencionar las aplicaciones en la industria aeroespacial pues, además de los fuselajes de las aeronaves que están enteramente construidos por estructuras del tipo que se aborda en este trabajo, los transbordadores espaciales, cohetes, misiles militares y satélites con la tecnología más avanzada, también hacen extenso uso de éstas.

Las características estructurales que brindan los cascarones son las que hace tan popular su uso, pues brindan una gran rigidez a un relativo bajo peso. No obstante, el uso de estos no garantiza un diseño eficiente y ligero; una errónea configuración, un deficiente diseño o una selección incorrecta del material, pueden derivar en un producto o estructura frágil, de baja resistencia o bien sobre-diseñada y para nada ligera. Es por esto que se requiere un excelente diseño para poder aprovechar al máximo las capacidades que caracterizan a las estructuras tipo cascarón.

Como se dijo anteriormente, fue en seres vivos donde dichas estructuras aparecieron por primera vez y como en todo ser vivo la evolución, con el paso del tiempo, se ha encargado de buscar la forma óptima en cada uno de sus sistemas y aparatos para lograr la preservación de su especie, pues la supervivencia del más fuerte es lo que rige la vida en el planeta.

El método de la Optimización Estructural Evolutiva (ESO por sus siglas en inglés), fue desarrollado hace casi dos décadas por Xie y Steven en 1992 [16]. Aunque, como refiere el autor del método, la evolución ha existido desde el inicio de la vida mientras que los algoritmos evolutivos para la optimización estructural se han desarrollado en diversas ocasiones varios años atrás; la contribución de ESO es que es un método efectivo y sencillo a la vez, lo que facilita su comprensión e implementación.

ESO consiste básicamente en eliminar, de manera lenta y progresiva, el material ineficiente de una estructura, cuyo dominio ha sido discretizado previamente en una *malla* fina de elementos finitos. De tal modo que la forma de la estructura evoluciona hacia la óptima.

Aunque en sus inicios, ESO se aplicó principalmente a estructuras tipo armadura, se ha encontrado que su simplicidad y practicidad, lo hacen adecuado para trabajar con cualquier tipo de estructuras y con múltiples configuraciones de cargas y empotramientos o bien con una combinación de todas estas [16].

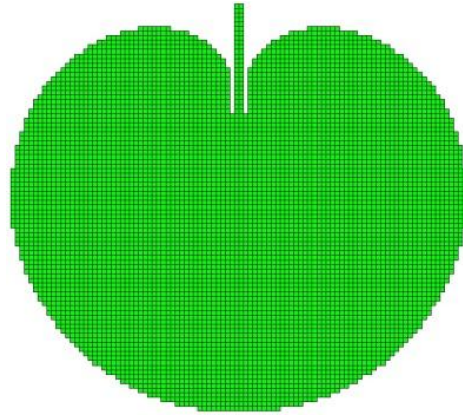


Figura I.2 Solución ESO para un objeto sometido a la gravedad. *Forma de Cereza* [16].

En la figura I.2 se muestra la forma óptima obtenida mediante ESO para un cuerpo sometido a la fuerza de gravedad; como se puede apreciar, asemeja al corte transversal de una cereza.

Debido a la gran importancia que han adquirido las técnicas de optimización, es imprescindible el estudio y desarrollo de éstas, en un centro de diseño de prestigio, como lo es el Centro de Diseño Mecánico e Innovación Tecnológica (CDMIT) de la Facultad de Ingeniería de la UNAM. Por tal motivo surge el Grupo de Diseño Mecánico Óptimo (GDMO), con el objetivo de estudiar las metodologías existentes de optimización, asimismo desarrollar las propias e implementar dichas herramientas a proyectos de innovación tecnológica en los que el CDMIT se involucra, ya sea académicamente o con la industria.

Este trabajo aborda la aplicación de la metodología de ESO en el diseño óptimo de estructuras tipo cascarón, empleando el Método de los Elementos Finitos (FEM por sus siglas en inglés) como herramienta de cálculo para el análisis estructural, obteniendo así un programa de optimización de estructuras de este tipo. Es cierto que ya existen algunos programas comerciales de cómputo especializados en la optimización estructural, sin embargo, existen distintos motivos para llevar a cabo este trabajo de tesis, como se explica en el apartado denominado Justificación.

OBJETIVOS

Implementar la metodología ESO al problema de diseño óptimo de estructuras tipo cascarón (*Shell Structures*). De lo anterior se desglosan los siguientes objetivos:

- Aplicar la teoría del FEM para estructuras tipo cascarón.
- Aplicar la metodología ESO y orientarla al diseño óptimo de dichas estructuras.
- A partir de lo anterior, desarrollar un programa de cómputo para el diseño óptimo de estructuras tipo cascarón.
- Generar nuevos conocimientos y herramientas para el GDMO.

Objetivos Personales

Adquirir un firme entendimiento de los puntos antes mencionados, que sirvan como base para, a la postre, continuar con el estudio de los mismos, ya sea a un nivel de maestría-doctorado e implementarlo en el ámbito laboral.

Alcances

Es preciso aclarar que el presente trabajo no pretende competir con el software comercial que ya existe y que cuenta con años de desarrollo como *Genesis*, *Mother Nature* o el módulo *OptiStruct* de *Hyper Works*, entre otros, sino conocer las metodologías de optimización que existen, en específico la metodología ESO, además de su aplicación en cascarones. Por otro lado, se pretende que tanto los conocimientos como las aplicaciones generadas sean herramientas útiles para el GDMO.

JUSTIFICACIÓN

Las estructuras tipo cascarón son las más comúnmente encontradas, tanto en la naturaleza como en aplicaciones tecnológicas debido a su asombroso desempeño; esto gracias su capacidad de transformar las solicitaciones normales a la estructura en esfuerzos planos distribuidos a lo largo y ancho de la misma, lo que les permite otorgar una gran rigidez y un peso reducido. Y es por esto que en el argot de las estructuras son llamadas “la *prima donna* de las estructuras” [17].

La optimización estructural ha cobrado gran importancia en los últimos años y en la actualidad es imprescindible en un equipo de diseño debido a la competitividad que existe por ofrecer productos eficientes en todos los aspectos, desde los costos de manufactura y distribución hasta su consumo energético y desempeño estructural durante su vida útil.

Tomando en cuenta lo anterior, un trabajo de tesis que involucre estos dos temas se justifica por sí solo. No obstante, existen en este caso algunos argumentos que sin duda validan la realización del presente trabajo, los cuales se enumeran a continuación:

1. No existen trabajos anteriores referentes al diseño óptimo de cascarones dentro de la UNAM, en particular, del CDMIT perteneciente a la Facultad de Ingeniería.
2. La necesidad de generar herramientas y software propio del GDMO, con el objetivo de, a la postre, no sólo se prescindan de costosas licencias de software comercial, sino incluso que nuestras aplicaciones computacionales sean empleadas en el desarrollo de proyectos de trascendencia ya sea académica o industrial.
3. Personalmente, como preludeo para el estudio de un posgrado en Mecánica Computacional.

ORGANIZACIÓN DE LA TESIS

La presente tesis consta de cinco capítulos y aborda tres temas principales: estructuras tipo cascarón, optimización estructural y el método de los elementos finitos aplicado a las primeras; dichos temas se presentan a lo largo de los tres primeros capítulos, respectivamente, mientras que los dos capítulos restantes se destinan al desarrollo del algoritmo de optimización y a los resultados obtenidos en algunos problemas de optimización utilizando la herramienta desarrollada. A continuación se describen brevemente cada uno de los capítulos.

El primer capítulo, dedicado a las estructuras tipo cascarón, está compuesto por cuatro apartados. En el primero se da una breve introducción. En el segundo apartado se dan a conocer las principales características físicas de los cascarones. En el apartado 1.3, se explican los esfuerzos y deformaciones que se presentan en estas estructuras, para lo cual se divide a su vez en dos secciones: Esfuerzos y Deformaciones Planos y Esfuerzos y Deformaciones por Flexión, cuya combinación define su comportamiento. En el último apartado, se presentan algunos ejemplos interesantes del uso de estructuras de este tipo, con el fin de ilustrar la importancia y capacidades de las mismas.

En el segundo capítulo se aborda el tema de la metodología ESO, en la cual se basa el algoritmo desarrollado en este trabajo. Está dividido en siete apartados. El primero corresponde a la introducción; en el segundo se presentan, brevemente, los principales antecedentes de la optimización estructural. En el tercero, se tratan los principales conceptos en los que se basa la optimización estructural. El apartado 2.4 da una breve descripción de la clasificación de las metodologías de optimización, además de dar algunos ejemplos de las más conocidas o aceptadas que existen. Posteriormente, en el apartado 2.5 se presentan los principales tipos de optimización,

de acuerdo a las diferentes propiedades o características de la estructura que se modifican durante el proceso de optimización. En el apartado 2.6 se explica detalladamente en qué consiste la metodología ESO; además, se describen cada uno de los pasos de que consta su algoritmo. En el último apartado (2.7), se explica la aplicación de la metodología al caso de estructuras tipo cascarón.

Debido a que ESO hace uso del FEM, como herramienta de cálculo para el análisis de esfuerzos y deformaciones de la estructura, a partir de lo cual se determina el criterio de optimización, en el capítulo III se presenta dicho método de cálculo. El capítulo se divide en tres apartados: Introducción, Descripción del Método y FEM para estructuras tipo cascarón. La descripción del método es breve, si se requiere profundizar en el tema, se recomienda acudir a literatura especializada en el tema como las que se presentan en las referencias [2], [3], [9], [27], [28]. Mientras que la aplicación del método a las estructuras que aborda el presente trabajo, está explicada más ampliamente; sin embargo, se hace la misma recomendación de acudir a literatura especializada para una explicación detallada.

En el capítulo IV se describe detalladamente el algoritmo desarrollado para la optimización de estructuras tipo cascarón. Primero se da una breve introducción en el apartado 4.1; mientras que el apartado 4.2 se dedica a la descripción de cada uno de los módulos y las respectivas tareas de que consta la aplicación de cómputo.

Finalmente en el capítulo V, se presentan tres problemas de optimización de cascarones. Los dos primeros casos, son problemas ya estudiados con anterioridad en otros trabajos, con lo cual se pretende comparar y validar los resultados obtenidos con la aplicación propia. Mientras que el tercer y último caso de optimización, es una propuesta original de la que no se presentan trabajos anteriores en la literatura, por lo que los resultados se comparan con los obtenidos con un software comercial (*Genesis*).

CAPÍTULO I

ESTRUCTURAS TIPO CASCARÓN (Shell Structures)

1.1 INTRODUCCIÓN

El hombre a lo largo de su historia ha diseñado y construido diversos tipos de estructuras y herramientas para resguardarse del clima adverso, para cazar o recolectar su comida e incluso para transportarse, ya sea por mar, tierra o aire. Debido a esto, consciente o inconscientemente se ha dado a la tarea de estudiar y perfeccionar todo aquello que diseña y manufactura, dando como resultado el estudio de la Ingeniería, de la cual han surgido diversas ramas y éstas a su vez se han subdividido en muchas otras. Tal es el caso de la Mecánica de Sólidos, cuyo objetivo es analizar el comportamiento de múltiples tipos de estructuras bajo los diversos tipos de cargas. Dichas estructuras se clasifican de acuerdo a sus características geométricas y al tipo de excitaciones con las que pueden lidiar.

En este capítulo se describen de manera detallada las estructuras tipo cascarón. En la primera parte se dan a conocer sus características y propiedades físicas. En la segunda parte, se estudian los esfuerzos y las deformaciones que se presentan en éstas, además de las consideraciones y alcances adoptados para este trabajo.

1.2 CARACTERÍSTICAS

Los cascarones se caracterizan por tener una de sus dimensiones muy pequeña en comparación con las otras dos, característica que permite durante el modelado geométrico prescindir de esta dimensión, pudiendo así representarse mediante superficies sin espesor. Estas estructuras, además, pueden presentar curvaturas a lo largo de toda su extensión en cualquier dirección y con valores variables. Es preciso resaltar que la omisión de su grosor aplica sólo en su representación gráfica y modelado geométrico; sin embargo, como se aborda más adelante en este capítulo, su magnitud debe ser incluida en las ecuaciones para el cálculo de esfuerzos y deformaciones.

Aunque estas estructuras, en esencia, están compuestas por diversas superficies curvas, para hacer más práctico el estudio ellas, pueden ser discretizadas en elementos planos que al ser ensamblados otorguen una forma aproximada a dichas superficies. Por lo tanto, entre mayor sea el número de elementos planos en los que se discretiza la estructura, mejor será la aproximación a la forma original. En este sentido, la aproximación será en el aspecto físico o geométrico más que en el matemático, como se muestra en la figura 1.1.

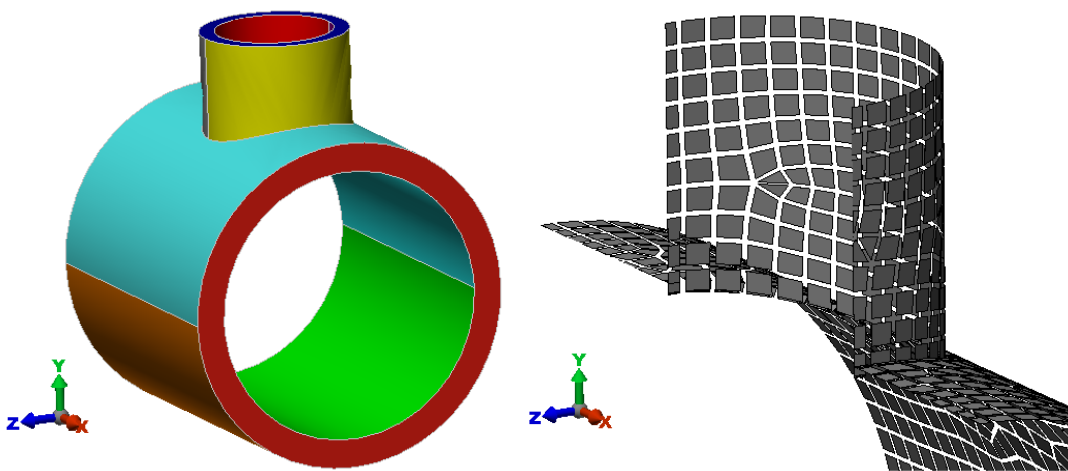


Figura 1.1 Ejemplo de la simplificación de un sólido a elementos planos. a) Sólido que puede ser analizado como un cascarón. b) Discretización en elementos finitos 2D de una sección de la pieza [1].

Por ende, se pueden emplear las ecuaciones matemáticas que definen a un elemento plano y así evitar la complejidad que implica el cálculo de esfuerzos y deformaciones de elementos con geometría curva. Por lo anterior es pertinente definir los elementos estructurales planos y sus propiedades. A continuación se presenta una breve descripción de estos.

Elementos Planos. Su principal característica es que, al igual que en las estructuras tipo cascarón, una de sus dimensiones es muy pequeña en comparación con las otras dos. Estos elementos están representados por un polígono definido en un plano; dicho plano se toma como el plano medio del elemento estructural y, de acuerdo con las excitaciones que se presenten en el elemento, su estudio se divide en dos, Esfuerzo Plano y Flexión. La figura 1.2 ilustra la acción de ambos fenómenos en un elemento plano.

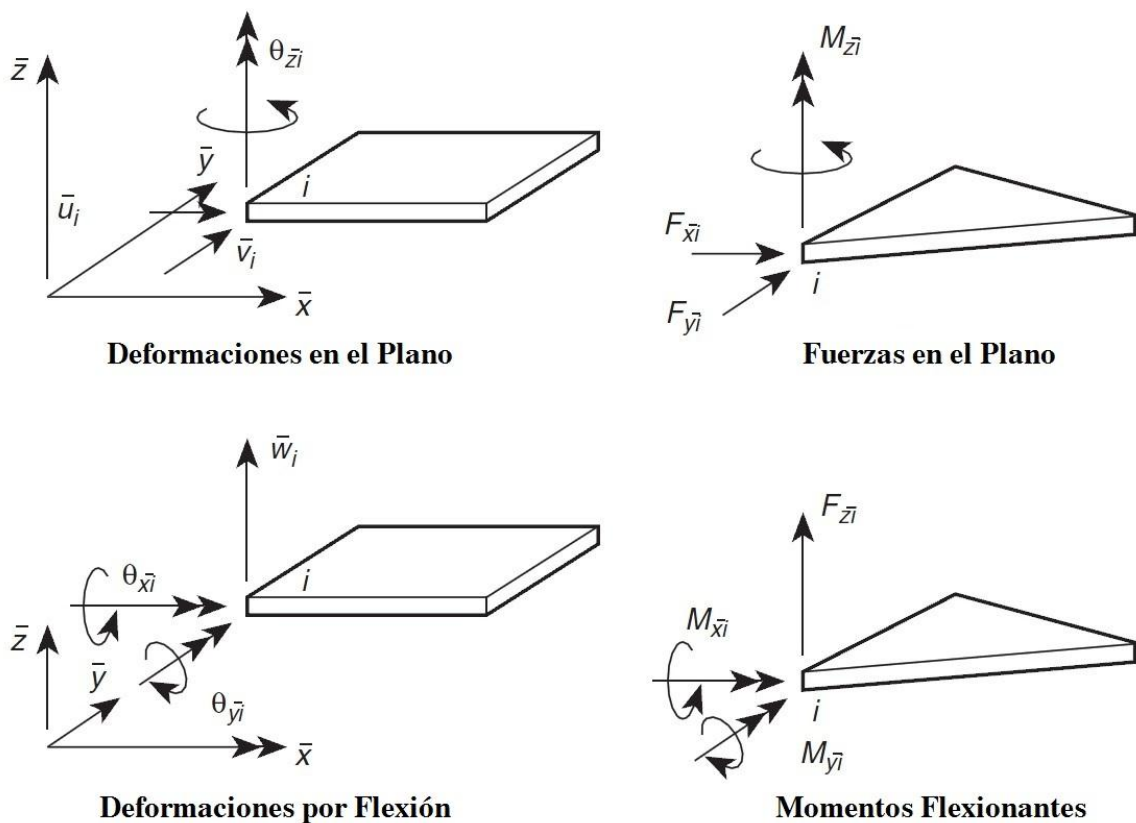


Figura 1.2 Elemento Plano sujeto a Esfuerzo Plano y a Flexión [28].

En el primer caso las excitaciones se presentan sólo en direcciones paralelas al plano medio. En el segundo caso las cargas sólo se presentan en dirección normal al plano, o bien, momentos flexores a lo largo de los ejes que definen a éste y análogamente a la distribución de esfuerzos en una viga a partir de su eje neutro, en la flexión de elementos planos existe una distribución de esfuerzos y deformaciones a partir del plano medio o neutro y en dirección transversal a éste.

Por lo tanto, es posible calcular los esfuerzos y deformaciones de una estructura tipo cascarón como un ensamble de una cantidad finita de elementos planos. Puesto que cada elemento plano que conforma la estructura tiene una orientación diferente (tal como sucede con un vector normal a la superficie curva original en diferentes puntos de la misma), tanto los esfuerzos planos como los debidos a la flexión están presentes en cada elemento. Por ejemplo, si existe una carga en dirección paralela a uno de los elementos, ésta no será transmitida de la misma forma a los que lo rodean, pues dicha carga tendrán dos componentes paralelas y una perpendicular para cada uno de ellos.

De esta manera, se tiene que emplear un sistema de coordenadas *Local* para cada elemento que conforma la estructura y un sistema de coordenadas *Global* donde están ensamblados todos los elementos.

Es importante resaltar que, considerando deformaciones muy pequeñas en términos locales para un elemento, las deformaciones en el plano y las deformaciones por flexión son independientes; es decir, los efectos del esfuerzo plano no afectan las deformaciones por flexión y los efectos de flexión no influyen en las deformaciones por esfuerzo plano. La interacción entre estos dos fenómenos sólo se lleva a cabo cuando dichos elementos se encuentran ensamblados con diferentes orientaciones, formando así estructuras de tipo cascarón.

1.3 ESFUERZOS Y DEFORMACIONES

Para poder aplicar el FEM y calcular los esfuerzos y deformaciones en una estructura, primero es necesario conocer las ecuaciones constitutivas de los elementos que la conforman. Por tal motivo a continuación se explica detalladamente el desarrollo de las ecuaciones constitutivas para esfuerzo plano y para flexión.

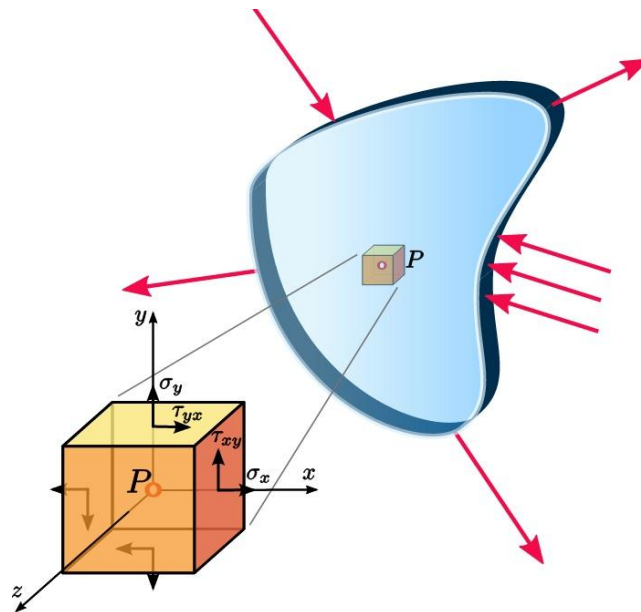


Figura 1.3 Cuerpo sometido a esfuerzo plano [30].

1.3.1 Esfuerzos y Deformaciones Planos

Un caso de esfuerzo plano se presenta cuando un cuerpo tiene un espesor muy pequeño con respecto a sus otras dos dimensiones; asimismo, las solicitaciones a que está sujeto están contenidas en el plano, como se muestra en la figura 1.3. Por tanto, se puede deducir que el esfuerzo normal y los esfuerzos cortantes en dirección transversal son iguales a cero.

Partiendo de la ecuación constitutiva general para esfuerzos y considerando lo anterior, se obtiene la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ 0 \\ \tau_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde:

E es el Modulo de Young,

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ es el Modulo de Cortante,

ν es el Coeficiente de Poisson,

ϵ_i es la deformación normal en dirección de i ,

γ_{ij} es la deformación cortante en el plano i en dirección j (igual a γ_{ji}),

σ_i es el esfuerzo normal en dirección i y

τ_{xy} es el esfuerzo cortante en el plano x en dirección y (igual a τ_{yx}).

Simplificando se tiene:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} \epsilon_z = \frac{\nu(\sigma_x + \sigma_y)}{E} \\ \gamma_{yz} = 0 \\ \gamma_{zx} = 0 \end{pmatrix}$$

En este sistema de ecuaciones se tienen seis incógnitas: tres deformaciones y tres esfuerzos. Para poder resolver el sistema es necesario calcular las deformaciones planas a partir de los desplazamientos en dirección x y y respectivamente en función de la posición dentro del elemento generados por las cargas actuantes sobre el plano,

definidos por $u[x, y]$ y $v[x, y]$, como se muestra en la figura 1.4.

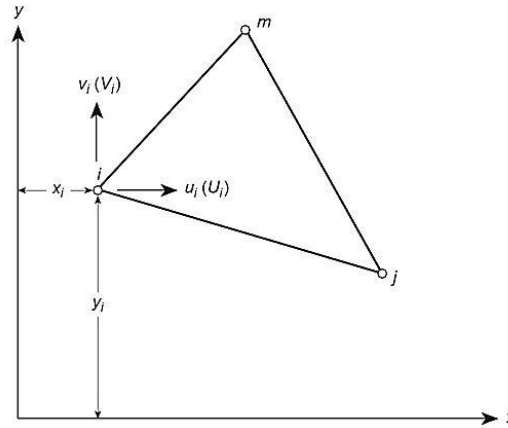


Figura 1.4 Desplazamientos en un elemento sometido a esfuerzo plano [28].

Conocidos estos desplazamientos las deformaciones planas se calculan de la siguiente forma:

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx}; \quad \epsilon_y = \frac{dv}{dy}; \quad \gamma_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}$$

Obtenidas las deformaciones se procede con el cálculo de los esfuerzos de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

y se define la matriz de propiedades \mathbf{C} como:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{pmatrix}$$

1.3.2 Esfuerzos y Deformaciones por Flexión

Existen dos teorías que explican o definen el comportamiento de una placa bajo flexión: la Teoría de *Placas de Kirchhoff* y la de *Rissner-Mindlin* ([3], [28]). La implementación de una u otra depende del grosor de la placa, es decir, que tan grande es la relación de sus dimensiones respecto a su espesor. Para “placas delgadas” la teoría de Kirchhoff es la más apropiada pues los esfuerzos cortantes son despreciables, lo cual hace que esta teoría converja satisfactoriamente. Mientras que para las “placas gruesas”, donde las deformaciones cortantes se vuelven relevantes y deben ser incluidas en el análisis, la teoría de Rissner-Mindlin (una extensión de la Teoría de Vigas de Timoshenko [3]) es la más apropiada. Con el objetivo de obtener resultados confiables una placa se puede considerar como “delgada” o “gruesa” a partir de una relación de su longitud respecto de su espesor igual a 100 ($\frac{L}{t} = 100$), si dicha relación tiene un valor menor a 100 se considera delgada y si es mayor a 100 se considera gruesa [28]. Aunque en la referencia [3] se menciona un valor de 20 o mayor ($\frac{L}{t} \geq 20$) para que una placa se considere “gruesa”.

Este trabajo se concentra en estructuras “delgadas” mientras que las “gruesas” se reservan para un trabajo futuro. Por lo tanto, sólo se aborda el análisis de placas según la teoría de Kirchhoff.

Teoría de Placas de Kirchhoff. Esta teoría asume que una línea normal al plano medio o neutral permanece normal después de la deformación. Partiendo de una placa cuyo plano medio coincide con el plano xy en una configuración indeformable, se considera un punto a una distancia z del plano medio que presenta un desplazamiento w en dirección z . De esta manera los desplazamientos en las direcciones x , y y z se expresan de la siguiente manera [3]:

$$u(x, y, z) = -z \frac{\partial}{\partial x} w(x, y); \quad v(x, y, z) = -z \frac{\partial}{\partial y} w(x, y); \quad w = w(x, y)$$

Usando las relaciones de deformación-desplazamiento obtenemos las deformaciones:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(x, y)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2}{\partial y^2} w(x, y)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} w(x, y)$$

El resto de las deformaciones son cero. Empleando la matriz constitutiva de esfuerzo plano para materiales isotrópicos, se obtienen los esfuerzos:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y); \quad \sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x); \quad \tau_{xy} = G \gamma_{xy}$$

Es importante mencionar que, aunque el patrón de desplazamientos asumido implica que los esfuerzos cortantes τ_{xz} y τ_{yz} no existen, en el análisis del diagrama de cuerpo libre de la figura 1.5 se demuestra posteriormente que esto es incorrecto.

La figura 1.5 muestra las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes que actúan en un elemento diferencial plano, donde las flechas simples representan las fuerzas y las dobles los momentos, cuyas direcciones están dadas por la “regla de la mano derecha”. Donde:

V_x = Fuerza cortante por unidad de longitud en dirección “z” sobre una cara normal a “x”.

V_y = Fuerza cortante por unidad de longitud en dirección “z” sobre una cara normal a “y”.

M_x = Momento por unidad de longitud alrededor de “y” sobre una cara normal a “x”.

M_y = Momento por unidad de longitud alrededor de “x” sobre una cara normal a “y”.

M_{xy} = Momento por unidad de longitud alrededor de “x” sobre una cara normal a “x”.

M_{yx} = Momento por unidad de longitud alrededor de “y” sobre una cara normal a “y”.

q = Carga distribuida sobre la superficie del elemento.

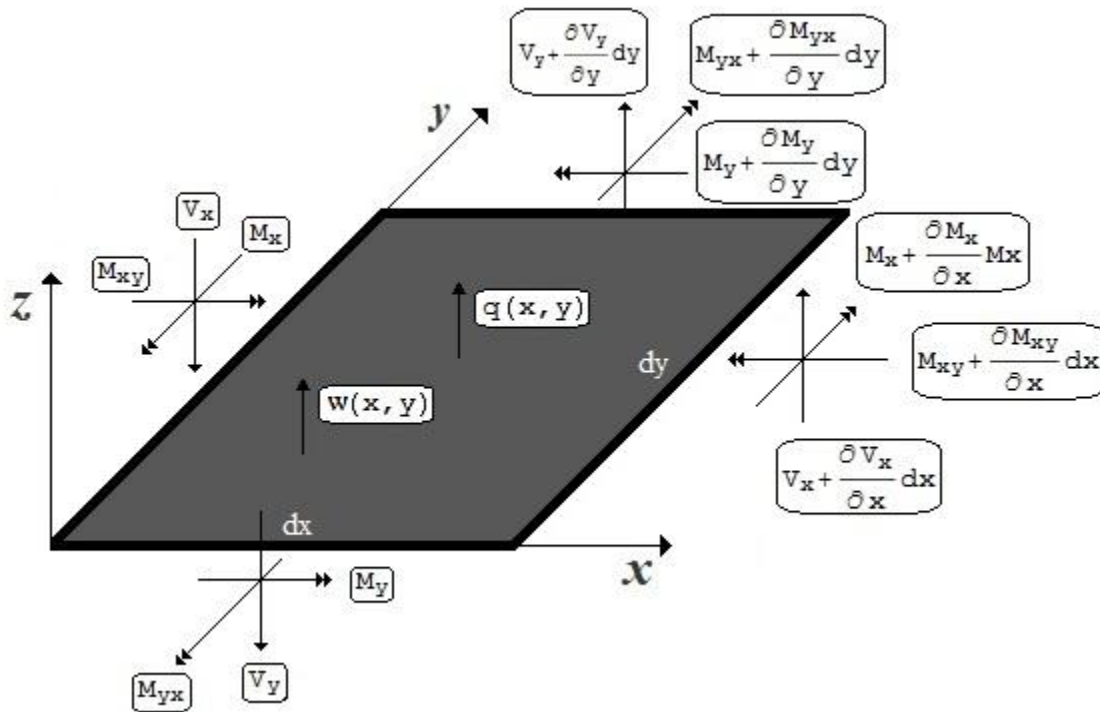


Figura 1.5 Diagrama de Cuerpo Libre de un elemento diferencial plano bajo flexión.

A continuación, a partir de la figura 1.5, se lleva a cabo el análisis de equilibrio con el fin de obtener la ecuación constitutiva que define el comportamiento de las placas “delgadas” bajo flexión. En primera instancia es necesario mencionar que en la teoría de placas es común utilizar las resultantes de esfuerzo por unidad de longitud las cuales son obtenidas integrando las componentes de esfuerzo a lo largo del espesor “ t ” [3]. De tal manera que las magnitudes de las fuerzas cortantes se expresan como:

$$V_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xz} dz ; \quad V_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{yz} dz \quad \text{----- 1}$$

Las magnitudes de los momentos flexionantes se expresan como:

$$M_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x z dz ; \quad M_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_y z dz \quad \text{----- 2}$$

Empleando las ecuaciones constitutivas de esfuerzo y las relaciones de deformación-desplazamientos, se obtiene:

$$M_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu\epsilon_y) z \, dz$$

$$M_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \frac{E}{1-\nu^2} \left(-z \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(x,y) - \nu z \frac{\partial^2}{\partial y^2} w(x,y) \right) z \, dz$$

Evaluando la integral M_x se obtiene:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad \text{--- --- 3}$$

De manera análoga M_y es:

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad \text{--- --- 4}$$

Por último, se obtienen las magnitudes de los momentos torsionantes de la siguiente forma:

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xy} z \, dz = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \frac{E}{2(1+\nu)} \left(-2z \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} w(x,y) \right) z \, dz$$

$$M_{xy} = M_{yx} = -(1-\nu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad \text{--- --- 5}$$

donde D es la rigidez a la flexión que se obtiene de la siguiente manera:

$$D = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)}$$

Las tres expresiones de momento son conocidas como las relaciones de momento-

curvatura y pueden ser expresadas en forma matricial, que generalmente tiene la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = -D \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{D} = -D \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}$$

donde \mathbf{D} es la matriz de propiedades del material para flexión. Ahora bien, sumando las fuerzas en dirección z en el diagrama de cuerpo libre se tiene:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + q = 0$$

Considerando los momentos en dirección x y despreciando los términos con $(dy)^2$ se tiene:

$$V_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y}$$

Considerando los momentos en dirección y y despreciando los términos con $(dx)^2$ se tiene:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q = 0$$

Substituyendo las expresiones de momento obtenidas anteriormente, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(-D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(-D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) \\ + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(-(1-\nu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + q = 0 \end{aligned}$$

Simplificando, se obtiene la ecuación diferencial parcial de cuarto orden que define el comportamiento de las placas “delgadas”:

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) - q = 0$$

Los esfuerzos σ_z , τ_{yz} , τ_{xz} no pueden ser calculados directamente, pues se requiere de las ecuaciones de equilibrio en tres dimensiones deducidas de la figura 1.5 [3]. Por tanto, partiendo de la primera ecuación de equilibrio [3]:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

y sustituyendo σ_x y τ_{xy} en la ecuación anterior se tiene:

$$\frac{E z}{1 - \nu^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{E z}{1 + \nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

Simplificando y reordenando:

$$\frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{E z}{1 - \nu^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

Integrando respecto a z desde un punto arbitrario z hasta la superficie de la placa:

$$\int_z^{\frac{t}{2}} \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial z} dz = \int_z^{\frac{t}{2}} \frac{E z}{1 - \nu^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dz$$

$$\tau_{xz} \left(\frac{t}{2} \right) - \tau_{xz}(z) = \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{t^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

Sabiendo que el esfuerzo cortante en la superficie equivale a cero:

$$\tau_{xz} = \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{t^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

Procediendo de la misma manera con la segunda ecuación de equilibrio [3], se obtiene el esfuerzo τ_{yz} :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\tau_{yz} = \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{t^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

Empleando las relaciones de momento-curvatura (ecs. 3, 4, 5) además de las relaciones entre momentos y fuerzas cortantes se expresan de manera más sencilla los esfuerzos, quedando estos últimos en términos de los momentos. Comenzando con las relaciones de esfuerzo-deformación y expresando las deformaciones en términos de las derivadas de w se procede de la siguiente manera para σ_x :

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) = \frac{E}{1 - \nu^2} \left(-z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -\frac{Ez}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$\sigma_x = \frac{Ez}{1 - \nu^2} \frac{M_x}{D} = \frac{12M_x z}{t^3}$$

Procediendo de la misma forma para σ_x y τ_{xy} se obtiene:

$$\sigma_y = \frac{12M_y z}{t^3} \quad \text{y} \quad \tau_{xy} = \frac{12M_{xy} z}{t^3}$$

Ahora bien, empleando las relaciones de momentos y fuerzas cortantes (ecs. 1 y 2) se procede como sigue:

$$V_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right)$$

$$V_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad \text{ó} \quad \frac{V_x}{D} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

Usando esta expresión en τ_{xz} :

$$\tau_{xz} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{t^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) \frac{V_x}{D} = \frac{12V_x}{t^3} \left(\frac{t^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) \quad \rightarrow \quad \tau_{xz} = \frac{6V_x}{t^3} \left(\frac{t^2}{4} - z^2 \right)$$

Similarmente se obtiene:

$$\tau_{yz} = \frac{6V_y}{t^3} \left(\frac{t^2}{4} - z^2 \right)$$

Con respecto al esfuerzo σ_z , aunque puede ser deducido del diagrama de cuerpo libre, su relevancia es trivial, por lo que puede ser excluido. De cualquier forma a continuación se muestra el procedimiento por el cual se obtiene dicho esfuerzo; aunque se advierte que es omitido de los cálculos durante el postproceso del Análisis por Elementos Finitos (FEA). Comenzando con la tercera ecuación de equilibrio [3] y utilizando las expresiones τ_{xz} y τ_{yz} antes obtenidas, se tiene:

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\frac{3}{2t} \left(1 - \left(\frac{2z}{t} \right)^2 \right) \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) = \frac{3q}{2t} \left(1 - \left(\frac{2z}{t} \right)^2 \right)$$

Integrando respecto de z, se obtiene:

$$\int_t^{\frac{t}{2}} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz = \sigma_z \left(\frac{h}{2} \right) - \sigma_z(z) = \int_t^{\frac{t}{2}} \frac{3q}{2t} \left(1 - \left(\frac{2z}{t} \right)^2 \right) dz$$

donde $\sigma_z \left(\frac{h}{2} \right) = q$. Realizando la integral, finalmente, se obtiene:

$$\sigma_z = \frac{3q}{2t} \left(\frac{2}{3} + \frac{2z}{t} - \frac{1}{3} \left(\frac{2z}{t} \right)^3 \right)$$

Una vez que se tienen las expresiones que definen cada uno de los esfuerzos generados por esfuerzo plano y flexión de manera independiente, obtener los esfuerzos de un elemento que conforma una estructura tipo cascarón es tarea fácil,

pues estos últimos corresponden a la suma de los primeros en cada una de las direcciones teniendo así:

$$\sigma_x = \sigma_x^{(ep)} + \sigma_x^{(f)}; \quad \sigma_y = \sigma_y^{(ep)} + \sigma_y^{(f)}; \quad \sigma_z = \sigma_z^{(ep)} + \sigma_z^{(f)} \approx 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}^{(ep)} + \tau_{xy}^{(f)}; \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}^{(ep)} + \tau_{yz}^{(f)}; \quad \tau_{zx} = \tau_{zx}^{(ep)} + \tau_{zx}^{(f)}$$

Donde los superíndices (ep) y (f) refieren al esfuerzo plano y la flexión respectivamente. Por lo tanto, los esfuerzos totales están en función de la coordenada transversal z , debido a que así lo es con los esfuerzos por flexión.

1.4 APLICACIONES

1.4.1 Construcción de Chasises Automotrices

Aunque en sus inicios los principales elementos estructurales de un automóvil constaban de vigas y/o elementos tubulares, desde hace varios años, en la industria automotriz el uso de estructuras tipo cascarón para la construcción de chasises es muy amplio y sus aplicaciones se extienden cada vez más. Actualmente la rigidez del vehículo no es tarea de elementos estructurales aislados, sino todo el vehículo es un elemento estructural conformado por cascarones en su mayoría (Aunque también se emplean otro tipo de elementos estructurales, como piezas de fundición). Por esta razón también son llamados, comúnmente, *monocascos*.

En cuanto a los materiales empleados, usualmente se recurre a las aleaciones de acero y de aluminio, donde la elección de uno u otro depende de la aplicación para la que son destinados de acuerdo con sus propiedades físicas (resistencia, rigidez, dureza, etc.). Como se puede observar en la figura 1.6, el monocasco perteneciente a la última generación de un vehículo comercial, es básicamente un ensamble de estructuras tipo cascarón, donde cada color representa un material diferente.

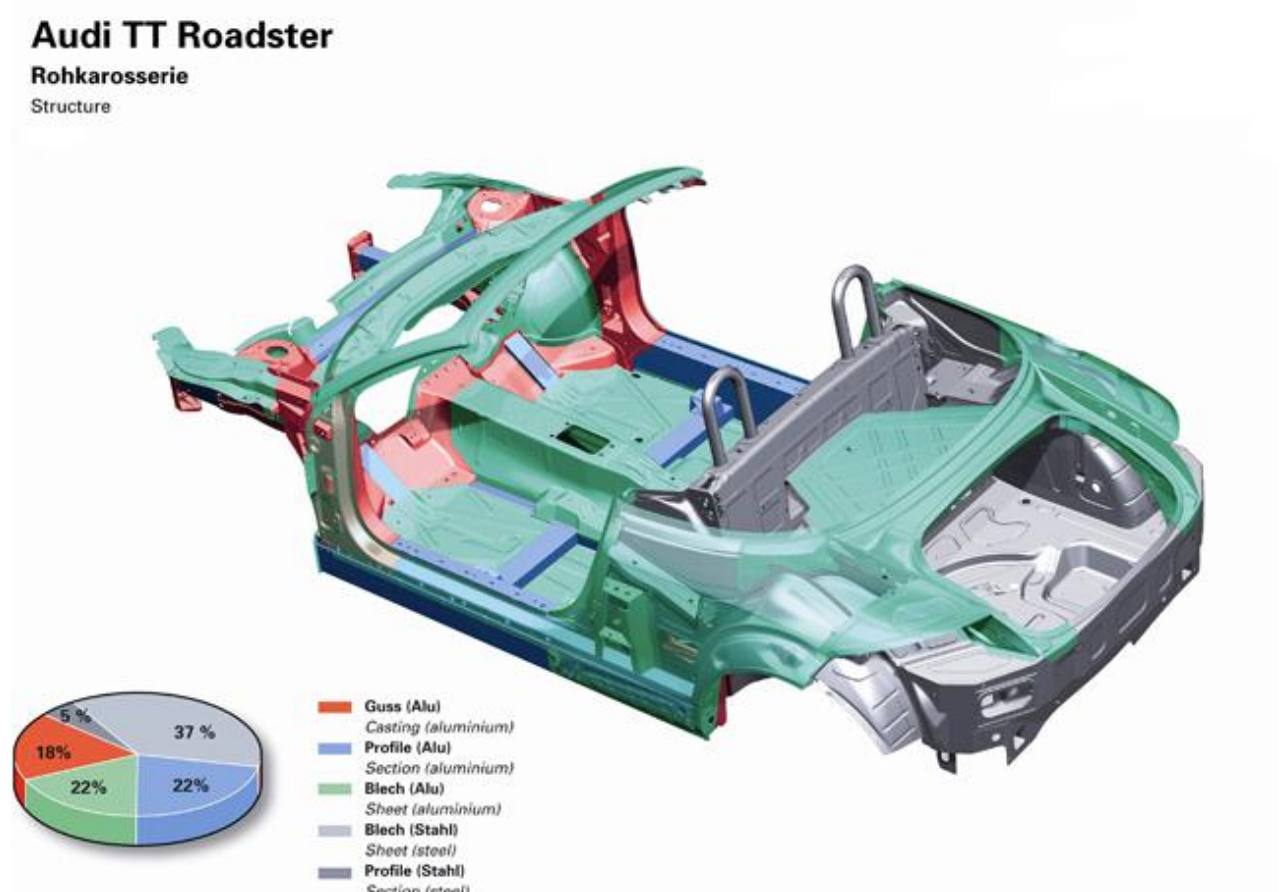


Figura 1.6 Distribución de materiales de la estructura monocasco de un automóvil *Audi TT Roadster 2009*; construido con la tecnología ASF (*Audi Space Frame*) [31].

1.4.2 Vehículos de Competición

Gran parte de la tecnología empleada en los autotransportes, ya sea de uso industrial o particular, proviene del desarrollo tecnológico llevado a cabo en la competición, donde los fabricantes ponen a prueba sus más novedosas tecnologías antes de implementarlas en vehículos de producción en serie. *Formula 1*, *Moto GP*, *Word Rally Championship*, son sólo algunos ejemplos; el primero de ellos es uno muy interesante sobre el uso de estructuras tipo cascarón. Los vehículos que participan, consisten principalmente de un monocasco o cascarón, fabricado con materiales compuestos (plástico reforzado con fibra de carbono, CBRP por sus siglas en inglés) principalmente, empleando, para su diseño, sofisticado software tanto de FEA como

de optimización. En la figura 1.7 se muestra la distribución de espesores de la capsula de seguridad del monocasco de un vehículo de competición Formula 1, optimizado empleando el software de análisis y optimización estructural *Genesis*.

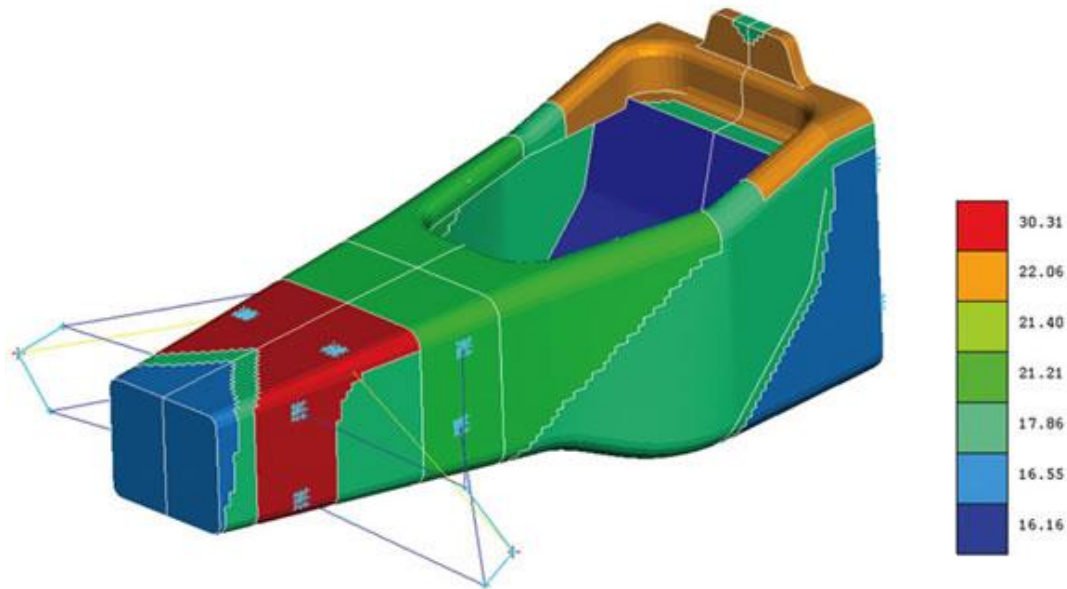


Figura 1.7 Distribución de espesores de la capsula de seguridad del monocasco de un vehículo de competición Formula 1 [23].

1.4.3 PAC-Car II

Un excelente ejemplo del potencial que tienen las estructuras tipo casarón es el vehículo desarrollado por el *Swiss Federal Institute Of Technology Zurich* en colaboración con otras instituciones académicas y de la industria. El objetivo fue construir un vehículo energizado por un sistema de celdas de hidrógeno que use la menor cantidad de combustible posible. En junio de 2005, el prototipo estableció una nueva marca en eficiencia de combustible durante la competencia *Shell Eco-marathon* en Ladoux, Francia. El cuerpo o carrocería del vehículo es en sí una estructura tipo cascarón soportada por sí misma, es decir, no tiene más elementos estructurales que le proporcionen rigidez. Está construido con CBRP y mediante el uso de paquetes

computacionales de FEA se buscó la mejor orientación de las fibras en las capas de fibra de carbono que forman el cascarón, con el objetivo de minimizar el peso de la estructura. La figura 1.8a presenta el modelo de FEA que muestra las diferentes orientaciones de las fibras de carbono; cada color representa una dirección distinta, mientras que el color rojo representa las ventanillas del vehículo.

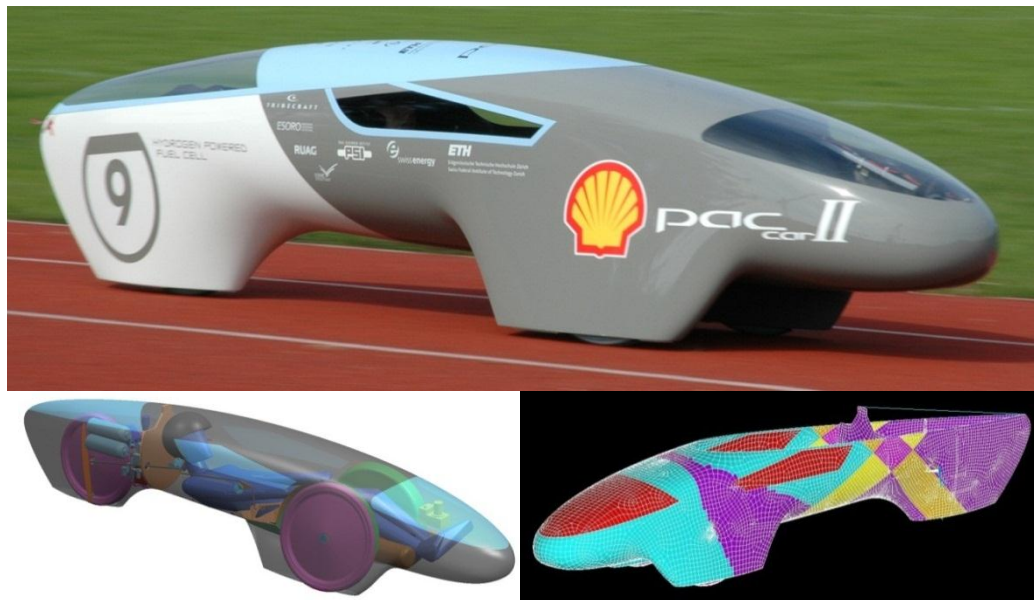


Figura 1.8 a) *PAC-Car II*; b) Modelo en CAD del vehículo; c) Modelado en ANSYS de la orientación de las fibras en las láminas de fibra de carbono [34].

CAPÍTULO II

OPTIMIZACIÓN ESTRUCTURAL EVOLUTIVA (ESO)

2.1 INTRODUCCIÓN

Un ingeniero desempeña diversas tareas durante el proceso de diseño, de las cuales se pueden presentar algunas de las más representativas [24]:

- Definir las especificaciones del problema.
- Elegir criterios de diseño adecuados.
- Modelar y evaluar.
- Realizar cálculos empleando técnicas como FEA.
- Interpretar y evaluar los resultados del paso anterior.
- Elegir la mejor de las soluciones e incluso proponer mejoras.

Al final, el desempeño del producto depende tanto de la experiencia como de las aptitudes del ingeniero en cada una de las partes del proceso, principalmente en la última, pues dichas cualidades serán cruciales en la búsqueda de la mejor solución. Ya que no es posible evaluar todo el espectro de posibles soluciones, el ingeniero no cuenta con parámetros que aseguren que la su solución elegida ha sido la óptima.

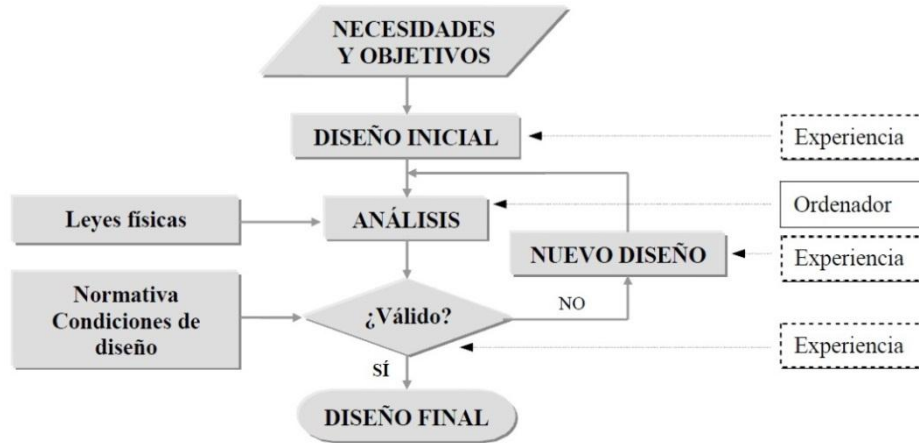


Figura 2.1 Diseño a prueba y error [10].

Por esta razón es conveniente contar con herramientas que se encarguen de buscar la solución óptima, o en su defecto la más aproximada a ésta, y que no dependa de las habilidades del ingeniero de diseño [24]. En las últimas décadas han surgido diversas metodologías o técnicas de optimización cuyo campo de aplicación y contundencia se van incrementando día con día, todo esto con el propósito de reducir tiempos en la etapa de diseño y por ende costos desde esta etapa y hasta el final de la vida útil del producto. Las figuras 2.1 y 2.2 muestran los diagramas de flujo de los procesos de diseño a prueba y error y de diseño optimizado respectivamente.

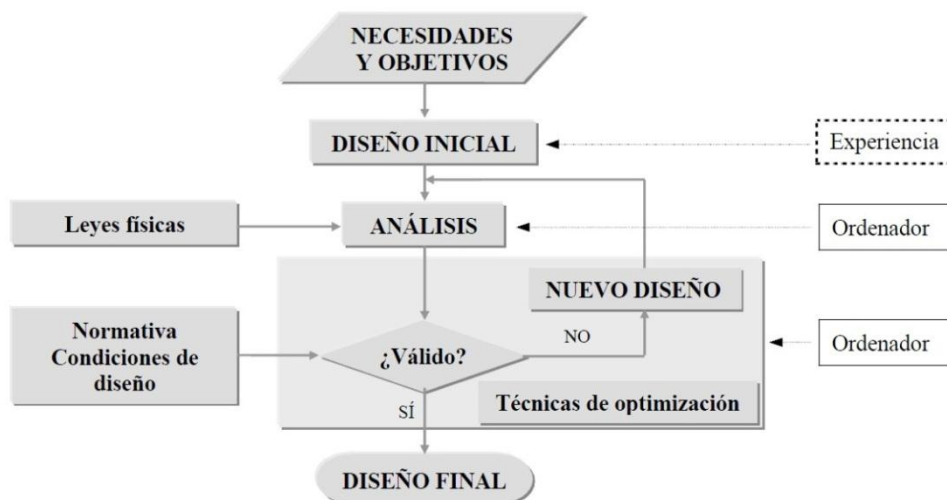


Figura 2.2 Diseño Optimizado [10].

2.2 ANTECEDENTES

La evolución ha existido desde hace millones de años, mientras que el ser humano, consciente o inconscientemente ha buscado siempre la optimización de su entorno [16]. Los estudios de matemáticas y de ingeniería sentaron las bases para que en el siglo XIX el estudio formal de la optimización se llevara a cabo. Tal es el caso de Maxwell [11] quien en 1872 fue el primero en conjuntar los conocimientos en cálculo analítico con los principios de optimización para minimizar el peso de estructuras tipo armadura. Sin embargo, su trabajo no era aplicable a todo tipo de armaduras y fue hasta 1904 que Michell [13] introdujo los principios básicos de la ahora bien establecida *Optimal Layout Theory*, método analítico de optimización de armaduras, el cual ha sido ampliamente estudiado en el siglo pasado por numerosos científicos. Paralelamente han sido desarrollado métodos de optimización basados en el cálculo analítico, los cuales sólo han sido aptos para problemas simples y para obtener soluciones estándar usadas para comparar los resultados de otros métodos de optimización [16].

El poder de cálculo que los grandes avances en la tecnología computacional proporcionan, aunado a los métodos numéricos de cálculo como lo es el Método de Elemento Frontera o el FEM, han traído consigo el desarrollo de nuevos y mejores métodos de optimización, gracias a la capacidad para realizar numerosos cálculos iterativos en un tiempo razonable.

Aunque han surgido varios métodos destacados de optimización, el desarrollado por Xie y Steven en 1992, llamado Optimización Estructural Evolutiva (ESO) ha sido estudiado ampliamente y en los últimos años su aplicabilidad ha crecido de manera importante [16].

El método consiste en remover gradualmente el material ineficiente de la estructura, cuyo dominio fue previamente discretizado, en un proceso evolutivo. La metodología

ESO puede aplicarse a cualquier tipo de estructura (armaduras, marcos, elementos planos, placas bajo flexión, cascarones, sólidos 3D, etc.); a pesar de su simplicidad ha demostrado ser un método bastante confiable y con el que se obtienen excelentes resultados. Además puede ser empleado sin problema en casos de diseño cuyos criterios de optimización son los esfuerzos, los desplazamientos, la rigidez, las frecuencias o el pandeo, entre otros; incluso puede tratar con casos en los que se combinen diferentes tipos de estructuras, casos de carga o restricciones.

2.3 OPTIMIZACIÓN ESTRUCTURAL

Un problema de optimización consiste en encontrar el valor más satisfactorio para la función que define el desempeño del diseño, mediante la búsqueda de los valores adecuados para las variables que la definen y cumpliendo con un conjunto de restricciones y requerimientos. En general, una metodología de optimización parte de tres conceptos principales: variables de diseño, función objetivo y restricciones.

2.3.1 Variables de Diseño

En este apartado es necesario considerar que existen dos tipos de variables durante el diseño, los *parámetros* que serán fijos durante todo el proceso y las *variables* que podrán ir evolucionando durante la optimización. Existen cuatro tipos principales de variables de diseño [25]:

- Geométricas: largo, ancho, espesor, etc.
- Propiedades de la sección de la pieza: área, momentos de inercia, etc.
- Topología de la estructura: densidad del material, perímetro, etc.
- Propiedades constitutivas: módulo de elasticidad, coeficiente de Poisson, etc.

Estas son las variables a considerar en el proceso de diseño donde usualmente se toman como parámetros la topología y las propiedades del material.

2.3.2 Función Objetivo

Ya que se ha establecido y limitado el problema, se requiere de un criterio con el cual evaluar el diseño. Este criterio es, generalmente, una función escalar de las variables que intervienen. El criterio que más se ha empleado es el de la masa total del diseño debido a que habitualmente entre menor masa tenga la estructura menos material requiere para su construcción y por ende menor costo; además, los primeros problemas de optimización se dieron en el campo de la aeronáutica, donde es bien sabido que el peso de las estructuras es crucial. Aunque también es posible tener como criterios el volumen, la rigidez, la frecuencia natural, el desplazamiento máximo, o el esfuerzo o deformación máxima en puntos críticos así como también factores de costo beneficio, entre otros.

2.3.3 Restricciones

En todos los problemas se establecen restricciones tanto para delimitar el campo de soluciones como para cumplir ciertas condiciones que determinarán si el diseño es válido o no lo es. Existen dos formas de clasificación de las restricciones: por restricciones *esenciales* o *naturales* y por restricciones de *igualdad* o de *desigualdad*. Las restricciones esenciales imponen condiciones directamente sobre las variables y las restricciones naturales imponen las condiciones sobre magnitudes que dependen de las variables. Las restricciones de igualdad, que usualmente están asociadas a las relaciones que fijan el comportamiento de la estructura (como las propiedades del material) o a las relaciones entre las variables (como las condiciones de simetría) y las restricciones de desigualdad que suelen estar asociadas con las limitaciones impuestas a las respuestas de la estructura, como los esfuerzos, desplazamientos o frecuencias entre otros. Además, estas últimas también pueden delimitar el rango de los valores de las variables [25].

2.4 MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN ESTRUCTURAL

Actualmente existen tres clasificaciones para los métodos de optimización: los indirectos, los formales y los heurísticos. A continuación se explica brevemente en qué consisten y se presentan algunos de los más representativos para cada una de las categorías.

2.4.1 Métodos Indirectos

Estos métodos tienen como propósito obtener un diseño, satisfaciendo un criterio específico y cumpliendo también con el objetivo buscado. Este criterio puede ser deducido intuitiva o matemáticamente de las características del problema. En esta clasificación se encuentran los siguientes métodos.

2.4.1.1 Optimización Estructural Evolutiva (ESO)

Introducida por Xie y Steven en 1993. Consiste en eliminar el material menos eficiente de la estructura mediante un proceso lento y progresivo donde la forma de la misma va evolucionando hacia la óptima. Esto se consigue mediante un criterio de rechazo que decide el lugar y la cantidad de material a eliminar por iteración.

2.4.1.2 Optimización Estructural Evolutiva Aditiva (AESO)

Desarrollada por Querin, Steven y Xie. En este caso el material se agrega a la estructura en los lugares donde más se requiere mediante un criterio similar al de ESO.

2.4.1.3 Optimización Estructural Evolutiva Bidireccional (BESO)

Es una combinación de los métodos anteriores, donde el material puede ser añadido o eliminado de la estructura según se requiera. La combinación de ambos métodos reduce significativamente el tiempo de optimización, sin embargo, sus ecuaciones deben modificarse para un buen funcionamiento del método.

2.4.1.4 Optimización Estructural Evolutiva Morfológica (MESO)

En los métodos anteriores de optimización evolutiva, en cada iteración se eliminan o añaden una cantidad discreta de elementos finitos, lo cual significa que cada elemento en la estructura sólo tienen dos opciones, estar o no estar. En la optimización Morfológica existe la posibilidad de eliminar o añadir el elemento gradualmente y no en una forma binaria como en los métodos anteriores, pues en algunos casos se requiere un diseño con espesor variable, de acuerdo a las necesidades de la pieza.

2.4.1.5 Diseño Totalmente Esforzado (FS)

Para una estructura sometida a un único estado de cargas el método FS ofrece la solución de mínima relación masa/resistencia (Gellatly, 1973). Por tanto este método carece de una función objetivo, lo que significa que no hay una cantidad a minimizar además de que no puede asegurar una convergencia al diseño de mínima masa.

2.4.1.6 Creación Inteligente de Cavidades (ICC)

En ocasiones el ingeniero en diseño debe cumplir con ciertas restricciones no estructurales sino estéticas o de manufactura, por ejemplo. Este método tiene como objetivo conseguir la optimización de una estructura formando una cantidad determinada de cavidades en ella (Kim, Querin, Steven, Xie, 2000). Aunque carece de una formulación matemática, al aplicarlo a problemas clásicos de optimización, se obtienen resultados satisfactorios.

2.4.2 Métodos Formales

A diferencia de los métodos indirectos que se basan en aspectos “físicos” del problema, los métodos formales buscan una formulación matemática generalizada. Son menos eficientes que los métodos indirectos, pues no pueden ser generalizados, por lo que es necesario elegir el método apropiado para cada problema lo que en ocasiones requiere de un mínimo de experiencia del diseñador.

Uno de los principales inconvenientes de estos métodos es que no en todos los casos se tiene la información necesaria para aplicar una programación matemática. Por ejemplo, hay algunos métodos que requieren la primera o segunda derivada de la función objetivo, como el método del gradiente conjugado o el de Newton, respectivamente; mientras que la función objetivo no siempre es derivable, por lo que para estos casos es imposible implementar una formulación matemática.

2.4.3 Métodos Heurísticos

En esta clasificación se encuentran los algoritmos genéticos, los cuales cuentan con una mayor base teórica y están mejor adaptados a un modelo biológico. Debido a que la formulación de estos algoritmos es independiente del problema, tienen la ventaja de ser robustos por ser útiles para cualquier tipo de problema, pero débiles por no estar especializados. Las principales características de estos métodos que los diferencian de las dos clasificaciones anteriores son [25]:

- Algoritmos sencillos y fáciles de implementar.
- No necesitan conocimiento específico del problema a resolver.
- Consideran de manera simultánea varias soluciones y no de manera secuencial como los métodos tradicionales, por lo que son menos sensibles a los óptimos locales.
- Presentan un balance adecuado entre explotación y exploración de las soluciones.
- Pueden utilizar variables de tipo continuo, discreto o entero, pues trabajan con variables de diseño codificadas.
- Sólo consideran una función de aptitud sin requerir de sus derivadas.
- El usar operadores probabilísticos les confieren una búsqueda muy amplia, algo mucho mejor que sólo funcionar de forma análoga a una búsqueda aleatoria simple.

Las grandes capacidades de estos métodos se deben a su técnica robusta que le

permite tratar incluso con problemas donde otros métodos no funcionan adecuadamente. Aunque tampoco garantizan una solución óptima, los resultados que se obtienen son aceptables y su costo computacional es muy competitivo.

2.4.3.1 Algoritmos Genéticos

Están basados en la forma en la que los organismos vivos evolucionan, es decir, de acuerdo a los postulados de Darwin de la selección natural y supervivencia de los más fuertes. Koza (1992) propone una definición bastante completa y aceptable de un algoritmo genético:

“Es un algoritmo matemático altamente paralelo que transforma un conjunto de objetos matemáticos individuales con respecto al tiempo, usando operaciones modeladas de acuerdo al principio Darwiniano de reproducción y supervivencia del más apto, y tras haberse realizado una serie de operaciones genéticas entre las que se destaca la recombinación sexual. Cada uno de estos objetos matemáticos suele ser una cadena de caracteres (letras o números) de longitud fija que se ajustan al modelo de las cadenas de cromosomas, y se les asocia con una cierta función matemática que refleja su aptitud”.

2.5 TIPOS DE OPTIMIZACIÓN ESTRUCTURAL

Anteriormente se habló de los cuatro tipos de variables de diseño involucrados en la optimización; también se dijo que las variables pertenecientes a las propiedades del material, generalmente quedan preestablecidas como parámetros por el diseñador. Por lo tanto, la elección de uno u otro tipo de variables de diseño, de los tres restantes, define el tipo de optimización que se llevará a cabo. A continuación se describe cada uno de ellos.

2.5.1 Optimización de Propiedades

Este es el tipo de optimización estructural más sencillo y con fundamentos muy bien

establecidos. Para este tipo de optimización, las variables de diseño son aquellas relacionadas con las propiedades geométricas de la sección transversal de los elementos que conforman la estructura (como área transversal, espesor, ancho, etc.). Una dificultad a superar en este tipo de optimización es el número de variables de diseño que serán generadas, pues comúnmente el análisis es llevado a cabo por el método de los elementos finitos, lo que implica que sea asignada una variable por cada elemento finito.

2.5.2 Optimización de Forma

En este tipo de optimización las variables de diseño son las asociadas a la forma o geometría (como también se le denomina a este tipo de optimización) de la estructura. Debido a esto usualmente se requiere de un método de análisis que se readapte a la estructura a lo largo del proceso de optimización. Los resultados que proporciona son significativamente mejores que los que se obtienen de la optimización de propiedades.

2.5.3 Optimización Topológica

El término *topología* se refiere a las cavidades de las que está conformada una estructura, lo que es un factor de vital importancia en la búsqueda del diseño óptimo. En muchos casos es conveniente o incluso necesario formar cavidades en la estructura, con lo que se podrá, por ejemplo, reducir la masa final sin que por ello signifique violar alguna de las restricciones impuestas, como el contorno o la geometría externa.

La diferencia entre la optimización de forma y la topológica es que la primera tendrá control sobre la geometría externa, mientras que la segunda lo hará sobre el número y forma de cavidades dentro de la estructura, durante la búsqueda del diseño óptimo

2.6 GENERALIDADES DE LA METODOLOGÍA ESO

Esta metodología está basada en un concepto simple: mediante un proceso lento y secuencial, eliminar el material ineficiente de la estructura tiene como resultado que ésta evolucione hacia la forma óptima.

Para esto primero es necesario establecer qué es lo que se define como “*material ineficiente*”. Ahora bien, una estructura puede estar sujeta a distintas restricciones de diseño, tales como la rigidez, la frecuencia, el pandeo o el esfuerzo. Por ende, el criterio bajo el cual se determina en qué parte de la estructura se encuentra el material ineficiente depende de las restricciones a las que está sujeta la estructura.

Por otro lado, un factor determinante en la falla de una estructura es un excesivo valor de esfuerzo o deformación en la misma. Por lo que de manera inversa, valores mínimos de esfuerzo o deformación son un signo de ineficiencia en la estructura. Esto define el criterio de optimización basado en el nivel de esfuerzo local, donde el material con un bajo nivel de esfuerzo es considerado como innecesario y por consecuencia removido de la estructura. De esta manera se forma gradualmente una estructura cuyo nivel de esfuerzo es cada vez más uniforme.

Considerando lo anterior, el método ESO cuenta con las siguientes ventajas: una facilidad de programación y un acoplamiento rápido con programas de análisis por elementos finitos [25]. A continuación se presentan los pasos que definen el Método ESO, mientras que la figura 2.3 muestra el diagrama de flujo del algoritmo.

1. Se parte de una pieza de material con un tamaño suficiente para abarcar el área del diseño final y se procede a dividirla en una *malla* fina de elementos finitos.
2. Se establecen las cargas y las condiciones de frontera a las que está sometida la estructura así como las propiedades del material.

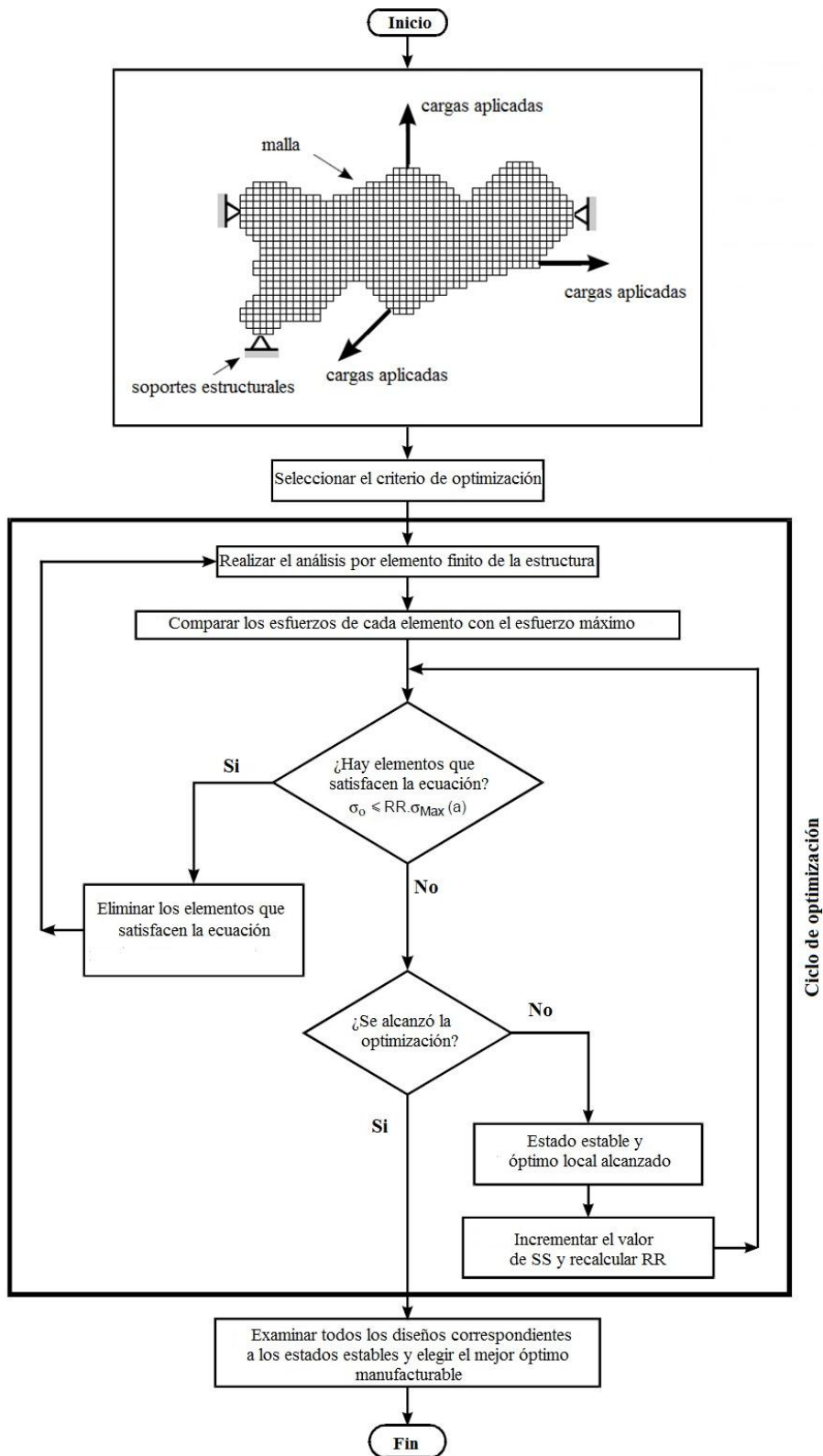


Figura 2.3 Diagrama de Flujo del Método ESO [16].

3. Se define el criterio que determina cuál es el material ineficiente que será eliminado de la estructura, el cual recibe el nombre de *criterio de rechazo* o *criterio de optimización*. Por ejemplo, el *esfuerzo equivalente* (σ_e).
4. Se realiza el análisis por elementos finitos (FEA).
5. Eliminar los elementos finitos de la estructura que satisfagan la siguiente ecuación [26]:

$$\frac{\sigma_e}{\sigma_{max}} < RR_i$$

donde:

σ_e es el *esfuerzo equivalente* del elemento finito.

σ_{max} es el esfuerzo máximo de la estructura.

RR_i es la *tasa de rechazo* i .

6. Si se alcanza un “*estado estable*”, lo que significa que no hay elementos que cumplan con la ecuación del paso 5 (es decir, no hay elementos a eliminar o rechazar), se incrementa la *tasa de rechazo* mediante una *tasa evolutiva* (ER) de acuerdo con la siguiente relación.

$$RR_{i+1} = RR_i + ER ; \quad \text{Donde: } i = 0,1,2,3, \dots$$

7. Realizar los pasos 4 a 6 hasta que se satisfaga un *criterio de paro*.

Los valores de RR y ER se refieren una proporción con respecto a un esfuerzo de referencia que en este caso es el esfuerzo máximo de la estructura. Estos valores son expresados, generalmente, como porcentajes.

El *esfuerzo equivalente* es una magnitud escalar a través de la cual se puede determinar el nivel de esfuerzo en cada elemento finito y se define a partir de las componentes de esfuerzo de este último. También conocidos como *criterios de cedencia*, los dos más

conocidos y aceptados para materiales dúctiles son el Criterio de von Mises (o Criterio de Máxima Energía de Deformación) y el Criterio de Tresca. En el caso de ESO la teoría más ampliamente usada es la de von Mises [25], por lo que también será empleada en el desarrollo del presente trabajo. El esfuerzo equivalente de von Mises está definido por la siguiente expresión:

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}{2}}$$

El *criterio de paro* es una condición, establecida por el diseñador, que determina la finalización del algoritmo cuando ésta se cumple. Al igual que el criterio de optimización, se establece de acuerdo a las necesidades del problema, por lo que diferentes criterios de paro pueden ser adoptados de acuerdo a la función objetivo y a las restricciones que fueron definidos anteriormente. Para una discusión más amplia de este concepto, consultar la referencia [5], en el apartado “Stopping criteria”.

2.7 ESO APLICADO A ESTRUCTURAS TIPO CASCARÓN

Durante el proceso de optimización se requiere calcular el estado de esfuerzos para cada elemento finito. Esta idealización supone un nivel de esfuerzo uniforme en todo el elemento, lo cual es válido para casos de esfuerzo plano, por ejemplo. Sin embargo, en el caso de las estructuras tipo cascarón, la magnitud de las componentes de esfuerzo varían a lo largo del espesor del elemento (como se demuestra en la parte final del capítulo I). Por esta razón se complica la elección adecuada del criterio de esfuerzo debido a que no existe un valor único para el esfuerzo equivalente en cada elemento, sino que varía a lo largo del espesor de este último.

Tomando en cuenta la forma en que trabaja ESO, para este caso el criterio que se requiere es el valor máximo del esfuerzo equivalente para cada elemento. Partiendo de las expresiones para el esfuerzo equivalente de elementos tipo cascarón y

sustituyendo los esfuerzos por flexión:

$$\sigma_x = \sigma_x^{(ep)} + \frac{12M_x z}{t^3}; \quad \sigma_y = \sigma_y^{(ep)} + \frac{12M_y z}{t^3}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}^{(ep)} + \frac{12M_{xy} z}{t^3}; \quad \tau_{xz} = \frac{6V_{xz}}{t^3} \left(\frac{t^2}{4} - z^2 \right); \quad \tau_{yz} = \frac{6V_{yz}}{t^3} \left(\frac{t^2}{4} - z^2 \right)$$

Las ecuaciones que varían linealmente en dirección de la coordenada transversal z , correspondientes a los esfuerzos σ_x , σ_y y τ_{xy} , adquieren sus valores máximos en $z = +\frac{t}{2}$ y en $z = -\frac{t}{2}$, en otras palabras, en los puntos más alejados del plano medio. Por otro lado las ecuaciones que varían en proporción al cuadrado de z que corresponden a los esfuerzos cortantes τ_{xz} y τ_{yz} , presentan sus valores máximos justo en el plano medio del elemento, es decir en $z = 0$. Debido a esto, el esfuerzo equivalente debe ser calculado en cada una de las posiciones mencionadas con el objetivo de determinar el esfuerzo equivalente máximo dentro del elemento. Dicho valor es el que se toma como criterio de optimización en la implementación de ESO.

CAPÍTULO III

MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS (FEM)

3.1 INTRODUCCIÓN

Debido a las limitantes de la mente humana, el hombre siempre ha tendido a estudiar y comprender lo que se encuentra en su entorno a partir de la subdivisión de sistemas en sus partes más esenciales, lo que le facilita la tarea.

El hombre se ha topado principalmente con dos tipos de problemas: los “*discretos*” que pueden ser estudiados a través de un modelo conformado por un número finito de componentes bien definidos; y los “*continuos*” para los cuales lo anterior es imposible y sólo pueden ser estudiados usando modelos matemáticos, como las ecuaciones diferenciales. En ocasiones estos modelos matemáticos son muy complejos y no pueden ser simplificados debido a que se requiere un modelo exacto del fenómeno. Para lidiar con estas situaciones, han surgido diferentes métodos de discretización tanto ingenieriles como matemáticos que, aunque implican una aproximación, simplifican la solución sin merma significativa en la exactitud de los resultados o pudiendo controlar el error mediante el número de variables discretas empleadas.

En el ámbito matemático se han desarrollado técnicas de aproximación aplicadas a las ecuaciones diferenciales que gobiernan el fenómeno, mientras que en la ingeniería se han desarrollado técnicas más intuitivas de discretización creando analogías entre elementos discretos reales y porciones finitas de un dominio continuo [27]. Por ejemplo, en el área de mecánica de sólidos McHenry [12], Hrenikoff [7], Newmark [14], y principalmente Southwell [18], en la década de 1940 demostraron que reemplazando pequeñas partes de un cuerpo continuo por un arreglo de barras elásticas simples, podían obtenerse resultados satisfactorios en la solución de problemas de sólidos elásticos continuos [27].

Aunque es difícil determinar los inicios o la fecha precisa del surgimiento de este método, debido a los numerosos trabajos relacionados sobre el tema, tanto en el campo matemático como en el ingenieril, desde el enfoque de este último, el término “*elemento finito*” apareció por primera vez con los trabajos de Clough [6], que introdujo el uso directo de una *metodología estándar aplicable a sistemas discretos*. Esta aportación es la de mayor importancia, no sólo conceptualmente sino también desde el punto de vista computacional, debido a que trajo consigo un mejor entendimiento del tema y además una aproximación unificada para una variedad de problemas y el desarrollo de procedimientos computacionales estándar. A partir de la década de 1960, los avances en este campo han crecido considerablemente y a un ritmo exponencial logrando acoplar las metodologías matemáticas con las técnicas análogas de aproximación y discretización [27].

3.2 DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO

El *método de los elementos finitos* es un método numérico que sirve para obtener soluciones aproximadas a ecuaciones diferenciales ya sean ordinarias o parciales, el cual se caracteriza por su amplio potencial en la aplicación a problemas que lidian con condiciones de frontera definidas sobre geometrías complejas y que, generalmente,

son de carácter práctico. También puede ser visto como una variante o modificación a los métodos de Galerkin y de Rayleigh-Ritz para superar las dificultades que presentan éstos en la solución de problemas de 2D y 3D que involucran geometrías y condiciones de frontera complejas. Con este fin, el FEM introduce dos conceptos básicos que se describen a continuación [3]:

1. El dominio de solución es dividido en elementos discretos. El dominio es dividido en varios subdominios simples que son llamados *elementos* los cuales tienen una geometría simple y su solución puede ser obtenida fácilmente. Además, como el elemento sólo cubre una pequeña parte de todo el dominio de solución, un polinomio de grado bajo puede describir la solución a lo largo del elemento. Las ecuaciones diferenciales son convertidas en su forma integral equivalente, la cual es llamada *forma débil*. De esta manera la forma débil puede ser evaluada en cada elemento y después ensamblada para obtener la solución total.
2. Los coeficientes de la solución asumida sobre un elemento representan la solución y sus respectivas derivadas en los nodos. En los métodos clásicos los coeficientes desconocidos de la solución supuesta, no tienen significado físico. En el FEM dichos coeficientes son definidos en términos de soluciones desconocidas en puntos preestablecidos del elemento (comúnmente son las aristas del mismo) y los cuales son llamados *nodos*. Las soluciones obtenidas en los nodos son llamadas *grados de libertad* (DOF por sus siglas en inglés.)

Los grados de libertad nodales dependen del orden de las derivadas en las condiciones de frontera esenciales (EBC). Por ejemplo, para un problema de segundo orden, las EBC no involucran ninguna derivada, por lo que las incógnitas nodales son las variables de la solución. Mientras que para una ecuación diferencial de cuarto orden, se tienen como grados de libertad las variables de la solución y su primera derivada debido a que las EBC están dadas en los mismos términos. Por lo tanto los

grados de libertad nodales son iguales a las EBC correspondientes para cada nodo.

La implementación del FEM consiste en 6 pasos, que se enumeran a continuación [3]:

1. Desarrollo de las ecuaciones constitutivas del elemento.
2. Discretización del dominio en una malla de elementos finitos.
3. Ensamble de las ecuaciones de los elementos.
4. Inclusión de las condiciones de frontera (EBC y NBC).
5. Obtención de la solución para las incógnitas nodales (*grados de libertad*).
6. Interpolación de la solución a lo largo de cada elemento.

En el siguiente apartado, se describe el proceso para el caso específico de cascarones.

3.3 FEM PARA ESTRUCTURAS TIPO CASCARÓN

Dentro de los elementos finitos, ya sean 1D, 2D o 3D, existen una gran variedad de elementos de acuerdo a su geometría, número de nodos por elemento y número de grados de libertad por nodo; y la elección de uno u otro depende de la aplicación o el grado de aproximación que se desea tener. Los elementos finitos tipo cascarón (elementos 2D) no son la excepción, sin embargo, es imposible abordar cada uno de ellos, además, no tiene sentido para el presente trabajo, pues no se pretende hacer un estudio especializado del tema, sino simplemente aplicar los conocimientos que ya se tienen a la implementación de una aplicación de computo de optimización. Por esta razón es necesario aclarar los siguientes puntos:

- El procedimiento para llegar a las ecuaciones del elemento finito para cascarones, es abreviado. Por lo que si se requiere profundizar en el tema, se recomiendan las referencias [3] y [28]; o bien, literatura avanzada de FEM.
- El desarrollo y las ecuaciones obtenidas sólo aplican para elementos planos definidos por la Teoría de Placas de Kirchhoff (abordada en el Capítulo I).

- El elemento finito está definido por un triángulo con tres nodos localizados en sus vértices y con cinco *grados de libertad* (DOF) por nodo.

Se considera un elemento plano en un sistema *local* de coordenadas $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ sujeto, simultáneamente, a esfuerzo plano y a flexión, como se ve en la figura 3.1:

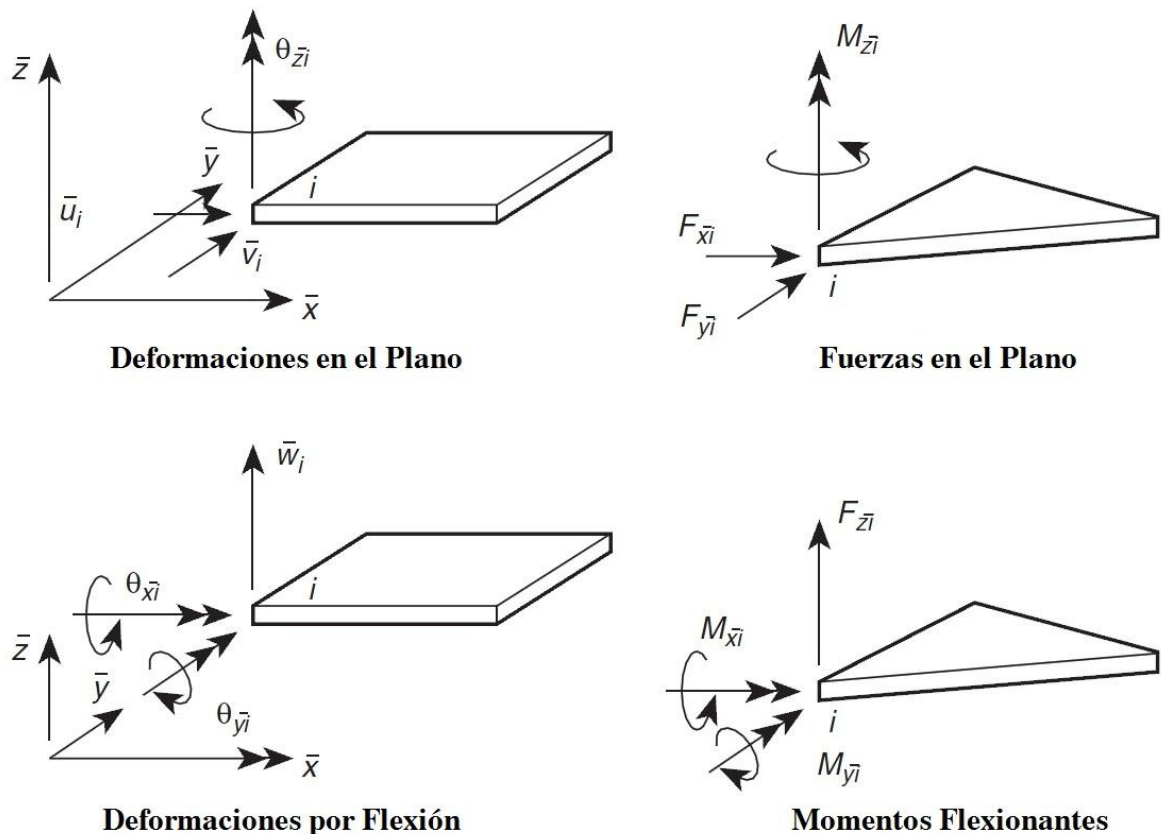


Figura 3.1 Elemento Plano sujeto simultáneamente a esfuerzo plano y flexión [28].

Considerando primero la acción del esfuerzo plano, las deformaciones están dadas en términos de los desplazamientos \bar{u} y \bar{v} para cada nodo i . Asimismo, se tienen las fuerzas nodales $F_{\bar{x}i}$ y $F_{\bar{y}i}$ debidas a los desplazamientos. La ecuación del elemento finito para esfuerzo plano es:

$$\bar{\mathbf{k}}^{ep} \cdot \bar{\mathbf{d}}^{ep} = \bar{\mathbf{r}}^{ep}$$

donde:

$$\bar{\mathbf{d}}_i^{ep} = \begin{pmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathbf{d}}^{ep} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{d}}_i^{ep} \\ \bar{\mathbf{d}}_j^{ep} \\ \bar{\mathbf{d}}_m^{ep} \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathbf{r}}_i^{ep} = \begin{pmatrix} F_{\bar{x}i} \\ F_{\bar{y}i} \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathbf{r}}^{ep} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{r}}_i^{ep} \\ \bar{\mathbf{r}}_j^{ep} \\ \bar{\mathbf{r}}_m^{ep} \end{pmatrix}$$

Procediendo de manera similar para el caso de flexión, el estado de deformaciones está dado por el desplazamiento \bar{w} en dirección \bar{z} y las dos rotaciones $\theta_{\bar{x}}$ y $\theta_{\bar{y}}$. Obteniendo, en coordenadas locales, la siguiente ecuación del elemento para flexión:

$$\bar{\mathbf{k}}^f \cdot \bar{\mathbf{d}}^f = \bar{\mathbf{r}}^f$$

donde:

$$\bar{\mathbf{d}}_i^f = \begin{pmatrix} \bar{w}_i \\ \theta_{\bar{x}i} \\ \theta_{\bar{y}i} \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathbf{d}}^{ep} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{d}}_i^f \\ \bar{\mathbf{d}}_j^f \\ \bar{\mathbf{d}}_m^f \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathbf{r}}_i^f = \begin{pmatrix} F_{\bar{z}i} \\ M_{\bar{x}i} \\ M_{\bar{y}i} \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathbf{r}}^{ep} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{r}}_i^f \\ \bar{\mathbf{r}}_j^f \\ \bar{\mathbf{r}}_m^f \end{pmatrix}$$

Donde $F_{\bar{z}i}$, $M_{\bar{x}i}$ y $M_{\bar{y}i}$ son la fuerza y los momentos debidos al desplazamiento \bar{w} y las rotaciones $\theta_{\bar{x}}$ y $\theta_{\bar{y}}$. Como puede notarse, el término $\theta_{\bar{z}}$ no aparece en las ecuaciones. Si bien existen modelos más sofisticados que lo incluyen, con un modelo como el que aquí se presenta se obtienen resultados satisfactorios y suficientes para los objetivos de la presente tesis.

Por otro lado, como se explica en el primer capítulo, las estructuras tipo cascarón presentan los fenómenos de esfuerzo plano y flexión simultáneamente, cuyas ecuaciones, en el sistema de referencia local de cada elemento finito, están desacopladas (asumiendo deformaciones muy pequeñas); sin embargo, una vez que se ensamblan las ecuaciones en un sistema de referencia global, se presenta la interacción entre ambos fenómenos.

Reordenando y combinando los desplazamientos nodales y las fuerzas nodales:

$$\bar{\mathbf{d}}_i = (\bar{u}_i \quad \bar{v}_i \quad \bar{w}_i \quad \theta_{\bar{x}i} \quad \theta_{\bar{y}i})^T; \quad \bar{\mathbf{r}}_i = (F_{\bar{x}i} \quad F_{\bar{y}i} \quad F_{\bar{z}i} \quad M_{\bar{x}i} \quad M_{\bar{y}i})^T$$

o bien:

$$\bar{\mathbf{d}}_i = (\bar{\mathbf{d}}_i^{ep} \quad \bar{\mathbf{d}}_i^f)^T ; \quad \bar{\mathbf{r}}_i = (\bar{\mathbf{r}}_i^{ep} \quad \bar{\mathbf{r}}_i^f)^T$$

De esta manera la matriz de rigidez para un elemento tipo cascarón está ensamblada a partir de las sub-matrices correspondientes a los nodos i, j y m de la siguiente forma:

$$\bar{\mathbf{k}}_i = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{k}}^{ep} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mathbf{k}}^f & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix} \rightarrow \bar{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{k}}_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{k}}_j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{k}}_m \end{pmatrix}$$

donde la matriz de rigidez y el vector de fuerzas para esfuerzo plano y flexión, respectivamente, están expresados como:

$$\bar{\mathbf{k}}^{ep} = tA(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}^T) ;$$

$$\bar{\mathbf{k}}^f = \iint_A \mathbf{B} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}^T dA ; \quad \bar{\mathbf{r}}_q^f = \iint_A q\mathbf{N} dA$$

donde:

A es el área del elemento finito.

\mathbf{C} y \mathbf{D} son las matrices de propiedades del material para esfuerzo plano y flexión respectivamente (definidas en el primer capítulo).

\mathbf{N} son las funciones de interpolación

\mathbf{B} son las derivadas de las funciones de interpolación

q es la carga normal distribuida sobre la superficie del elemento.

Las ecuaciones obtenidas sólo consideran cargas puntuales y cargas distribuidas normales sobre el elemento. La inclusión en el análisis de fuerzas y momentos distribuidos a lo largo de las aristas de los elementos se reserva para un trabajo a futuro. Por otro lado, es importante resaltar que las funciones de interpolación son

diferentes para esfuerzo plano que para flexión y pueden consultarse en las referencias [2], [3], [27] y [28]. Cabe mencionar que las empleadas para este trabajo son las que se presentan en la referencia [28].

3.3.1 Sistemas de Referencia Global y Local

Teniendo la matriz de rigidez y el vector de fuerzas en el sistema *local* para cada elemento, el siguiente paso es la transformación al sistema *global*, mediante la matriz de transformación \mathbf{T} que a su vez está formada por la matriz de rotación \mathbf{R} (también conocida como matriz de cosenos directores), teniendo así:

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{T}^T \cdot \bar{\mathbf{k}}_i \cdot \mathbf{T}; \quad \mathbf{d}_i = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{d}}_i; \quad \mathbf{r}_i = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{r}}_i$$

donde:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{red} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{R}_{red} = \mathbf{R} \text{ reducida debido a la ausencia del } DOF \theta_z$$

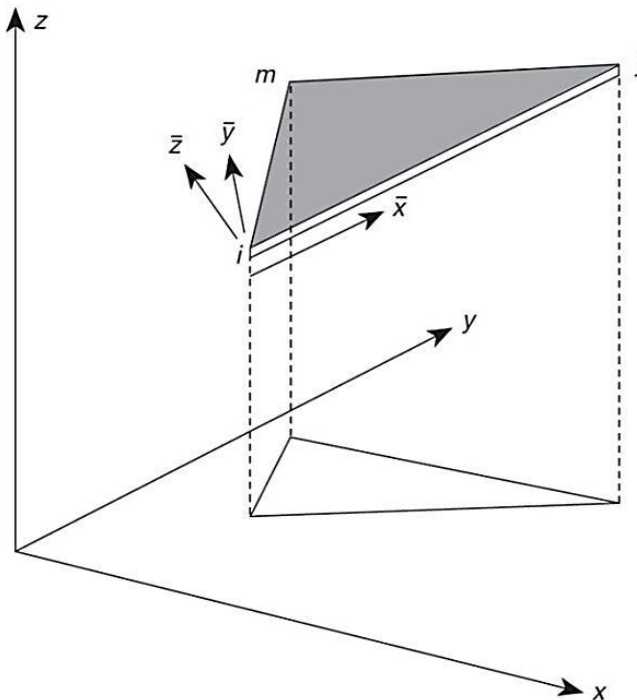


Figura 3.2 Sistemas de Referencia Local ($\bar{x}\bar{y}\bar{z}$) y Global (xyz) [28].

La figura 3.2 muestra el sistema de referencia *local* (\overline{xyz}) de un elemento finito arbitrario que a su vez está definido dentro de un sistema de referencia *global* (xyz) donde es ensamblado con otros elementos finitos con sistemas de referencia propios referenciados también al sistema xyz .

3.3.2 Ensamble

Una vez que se tienen en coordenadas globales las matrices de rigidez k^e , los vectores de grados de libertad d^e y los vectores de fuerzas r^e de cada elemento finito e , el último paso a realizar, antes de proceder a la solución del sistema, es *ensamblar* las matrices y vectores correspondientes a cada elemento en un solo sistema:

$$K \cdot d = r$$

donde:

K es el ensamble de $k^1, k^2, k^3, \dots, k^n$

d es el ensamble de $d^1, d^2, d^3, \dots, d^n$

r es el ensamble de $r^1, r^2, r^3, \dots, r^n$

n es el número de elementos finitos que conforman la estructura.

El proceso de ensamble consiste en un reordenamiento de las matrices y vectores correspondientes a cada uno de los elementos en un solo sistema de ecuaciones. En otras palabras, se tiene una matriz de rigidez, un vector de grados de libertad y un vector de fuerzas, donde cada una de las columnas de la matriz, o posiciones de los vectores están referidas a cada uno de los grados de libertad. Por ejemplo, si se tiene una estructura con 10 nodos, se tiene un sistema de 50 grados de libertad (donde el nodo 1 contiene los grados de libertad 1 a 5 y así sucesivamente); por ende, una matriz de rigidez de 50×50 , un vector de fuerza de 50 posiciones y un vector de grados de libertad de la misma dimensión que el anterior. Para que esto sea posible, cada elemento de la estructura debe estar asociado a un vector que contiene los quince

grados de libertad correspondientes a los tres nodos que lo conforman (cinco DOF por nodo); dicho vector recibe el nombre de *conectividad*.

La figura 3.3 ejemplifica, físicamente, el ensamble de una estructura tipo cascarón a partir de un conjunto de elementos finitos con sistemas de referencia local propios que a su vez están definidos en un mismo sistema de referencia global xyz .

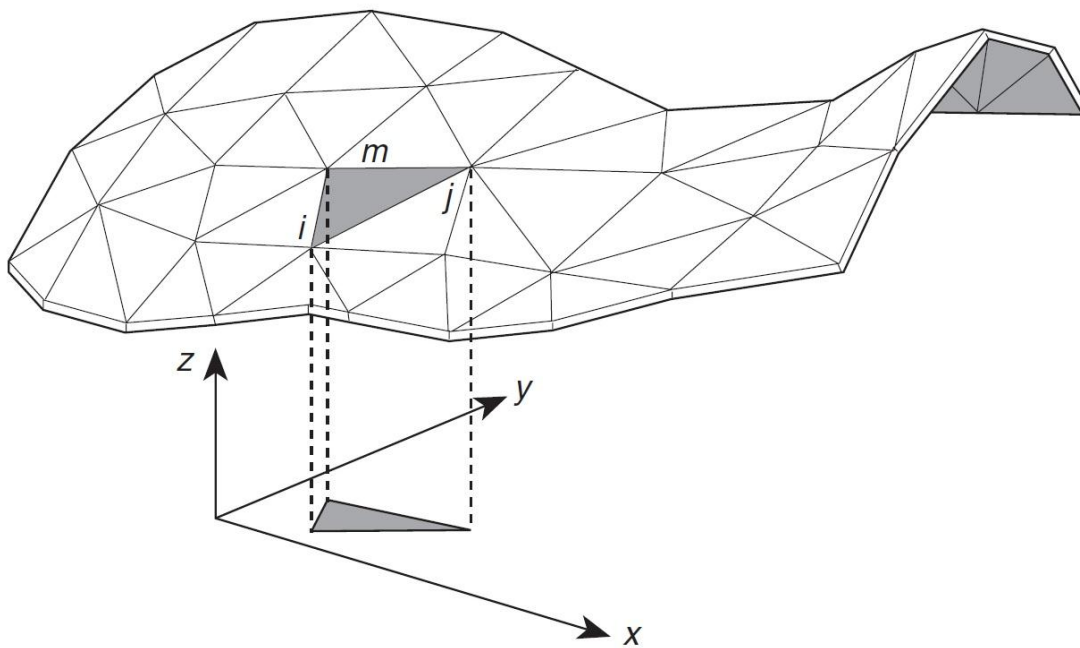


Figura 3.3 Estructura arbitraria tipo cascarón ensamblada por EF triangulares planos [28].

Finalmente, a partir de la solución total del sistema, se procede al cálculo de los esfuerzos para cada elemento, como se explica en los capítulos anteriores.

CAPÍTULO IV

DESARROLLO DEL ALGORITMO

4.1 INTRODUCCIÓN

A lo largo del presente capítulo se lleva a cabo la explicación de las partes o módulos que conforman el algoritmo. Además se aclaran los alcances así como también las limitantes del mismo.

Los algoritmos de optimización consisten básicamente en un módulo de FEA y otro de optimización, sin embargo, como se ha mencionado en capítulos anteriores, tanto los métodos de optimización como el método de los elementos finitos requieren de una discretización de la estructura (*malla*). Mientras mayor es el número de elementos que conforman la *malla*, la aproximación a la forma de la superficie original es mejor y por ende, la descripción de su comportamiento también lo es. Este es el primer paso o requisito con el que tiene que cumplir el método de optimización, por lo tanto, es indispensable contar con una herramienta que se ocupe de esta tarea.

Por otro lado, estas herramientas requieren de una metodología compleja, máxime cuando se trata de geometrías en 3D, por lo que desarrollar una aplicación de esta naturaleza para la presente tesis conllevaría un extenso trabajo que sería irrelevante

tomando en cuenta los propósitos de la misma. Por tal motivo, se optó por delegar esta tarea a software de Ingeniería Asistida por Computadora (CAE). Pues desarrollar un programa o módulo que se encargue de “importar” el archivo obtenido del CAE al lenguaje de programación empleado, significa una considerable reducción en tiempo de programación y la posibilidad de un “mallado” más especializado.

Además de lo mencionado anteriormente, el presente trabajo cuenta con dos módulos más correspondientes al entorno gráfico o visualización de los resultados que son de vital importancia para el análisis y la comprobación de los mismos.

4.2 DESCRIPCIÓN DEL ALGORITMO

Cómo se mencionó con anterioridad, el algoritmo está subdividido en módulos que se encargan de tareas específicas. Estos módulos son: Módulo de Ingreso de Datos, Módulo Importador de Malla, Modulo FEA, Modulo de Optimización y Módulo Gráfico o de Visualización de Resultados. A continuación se describe brevemente cada uno de ellos y el diagrama de flujo del algoritmo se ilustra en la figura 4.1.

4.2.1 Módulo de Ingreso de Datos.

Para este algoritmo de optimización se requiere una serie de datos, los cuales serán usados por el módulo FEA, por el módulo de Optimización y por el Módulo de gráficos. Los datos están divididos en tres categorías y son ingresados en una ventana diferente para cada una de ellas.

4.2.1.1 Propiedades del Material

Esta es la primera ventana de ingreso de datos que se despliega al ejecutar el programa. En ella se pide ingresar los siguientes valores:

- Módulo de Elasticidad (E)

- Módulo de Poisson (ν)
- Esfuerzo de Cedencia (Y_s)
- Factor de Seguridad (SF)

Estos deben ser ingresados en forma de vector en el orden siguiente: $\{E, \nu, Y_s, SF\}$

4.2.1.2 Parámetros de Optimización

A esta categoría corresponden los datos requeridos por la metodología ESO:

- Taza de Rechazo Inicial (RR_i)
- Taza Evolutiva (ER)
- Zona de NO diseño

Estos deben ingresarse de la siguiente forma: $\{RR, ER, \{NDE_1, NDE_2, \dots, NDE_n\}\}$ donde NDE_n es un elemento n que no podrá ser eliminado durante la optimización.

4.2.1.3 Objetivos y/o Restricciones

En el caso de que un objetivo sea alcanzado o una restricción sea violada el proceso de optimización finaliza. Es importante aclarar que aunque los objetivos pueden o no cumplirse, las restricciones nunca pueden ser violadas. El objetivo y las restricciones consideradas son:

- *Objetivo*: Porcentaje de Volumen ($\%V$)
- *Restricción*: Esfuerzo Máximo (σ_{max})
- *Restricción*: Desplazamiento Máximo (U_{max})

La forma de ingreso es la siguiente: $\{\%V, \sigma_{max}, U_{max}\}$

Es importante agregar, que el SF también funciona como restricción, pues si el valor máximo de esfuerzo viola dicho factor el proceso finaliza.

4.2.2 Módulo Importador de Malla

Este módulo se encarga de extraer datos de un archivo generado por un software de CAE, el cual debe tener una extensión o formato DAT (archivocae.dat). Los datos obtenidos son:

- Coordenadas de los nodos.
- Conectividades de los nodos.
- Las EBC.
- Las NBC.

Adicionalmente este módulo obtendrá las conectividades de grados de libertad (DOF) a partir de las conectividades de los nodos.

4.2.3 Módulo FEA

El análisis de la estructura está dividida a su vez en tres secciones: *preproceso*, *solución* y *postproceso*. A continuación se explica brevemente cada uno de ellos.

4.2.3.1 Preproceso

Esta sección del FEA tiene como objetivos:

- Generar las matrices de Propiedades D y C .
- Generar las Matrices de Rotación (R) y Transformación (T).
- Generar las Funciones de Interpolación (N).
- Generar las Matrices de Rigidez y Vector de Fuerzas locales y globales (\bar{k}^e , k^e , \bar{r}^e , r^e).
- Ensamblar la Matriz de Rigidez y el Vector de Fuerzas Globales de la estructura.
- Incluir las NBC y reducir el sistema a través de las EBC.

4.2.3.2 Solución

Una vez que se tiene el sistema ensamblado y reducido, se procede a obtener la solución lineal del sistema; al vector solución resultante se le agregan las EBC en las posiciones correspondientes para así obtener la solución total del sistema. Con esto y las conectividades se obtiene una solución distribuida para cada elemento.

4.2.3.3 Postproceso

En esta última parte se calculan los esfuerzos y deformaciones para cada elemento. Estos valores varían en magnitud a lo largo del elemento de acuerdo a las funciones de interpolación. Sin embargo, de acuerdo a la última sección del Capítulo II, se toma el valor máximo de esfuerzo de cada elemento. Al final del postproceso se tienen como salida del módulo FEA los siguientes datos:

- Desplazamiento Máximo
- Esfuerzo de *von Mises* de cada elemento finito.
- Esfuerzo de *von Mises* Máximo de la estructura.
- Esfuerzo de *von Mises* Promedio de la estructura.
- Esfuerzo de *von Mises* Mínimo de la estructura.

4.2.4 Módulo de Optimización

Este módulo se encarga de localizar las zonas de mínimo nivel de esfuerzos en la estructura con el fin de ser eliminadas gradualmente en un proceso iterativo de acuerdo a las reglas evolutivas de ESO, donde se establece una tasa de rechazo inicial (*RR*) que determina los elementos a eliminar y la cual se va incrementando mediante una tasa evolutiva (*ER*), hasta que se alcanza una estructura óptima con base en los objetivos y restricciones establecidos. El módulo de optimización consiste en un ciclo de 6 pasos principales que se ilustran mediante el diagrama de flujo de la figura 4.1. A continuación se hace una breve descripción de cada uno de ellos:

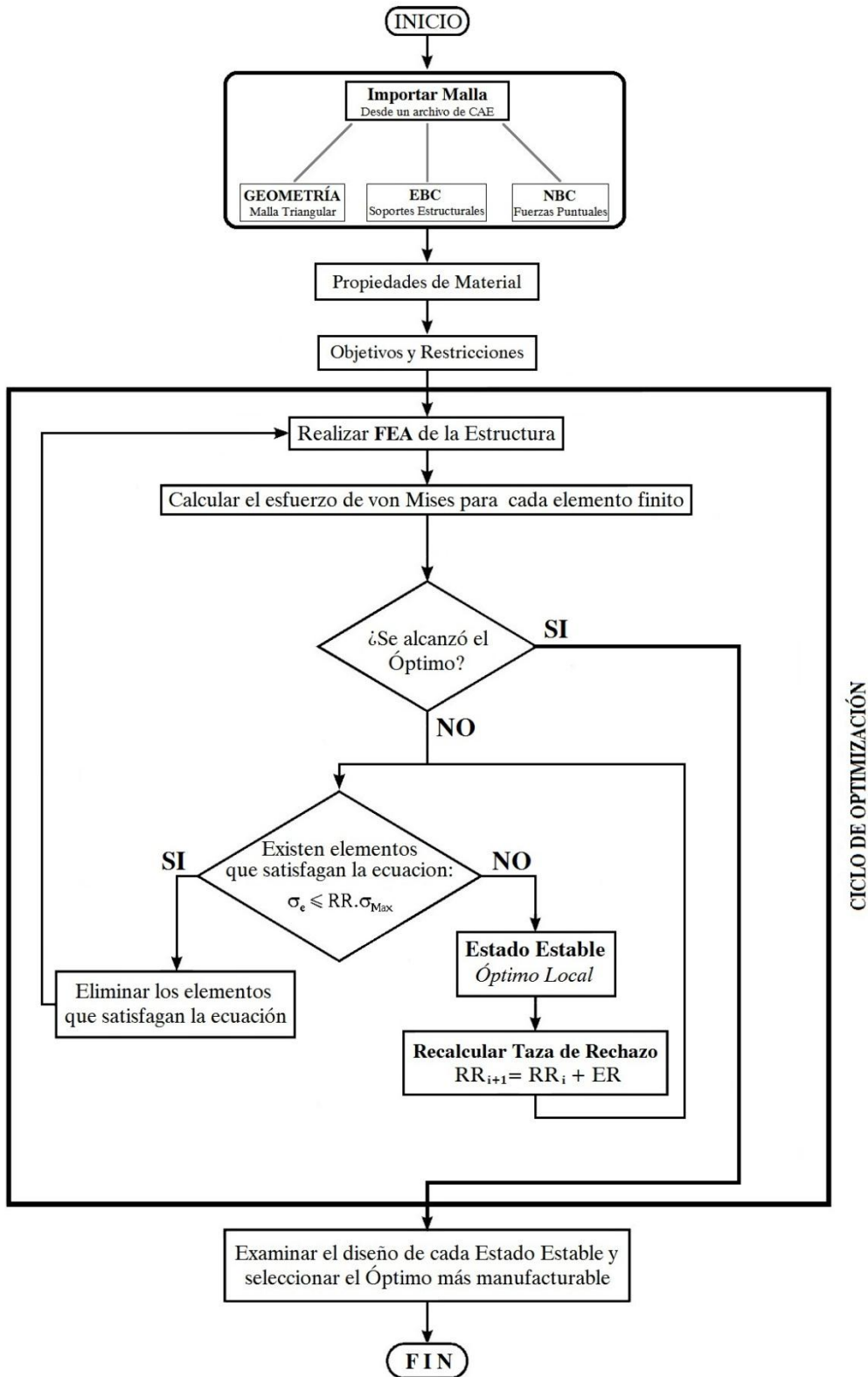


Figura 4.1 Diagrama de Flujo del Algoritmo Implementado.

1. A partir de los resultados del FEA, verificar si alguna de las siguientes condiciones se cumplen; si al menos una de ellas se cumple el proceso de optimización finaliza.
 - a. El objetivo es alcanzado
 - b. Alguna restricción es violada
 - c. El Esfuerzo Máximo de la estructura excede el SF
2. Eliminar los elementos que cumplan con la condición ESO (matemáticamente, eliminar elementos de la estructura significa desensamblar de la matriz global, las matrices y vectores correspondientes a dichos elementos):

$$\frac{\sigma_e}{\sigma_{max}} < RR_i.$$

Si se alcanza un *estado estable* (significa que NO hay elementos que cumplan con esta condición), proceder con el paso 3. De lo contrario saltar al paso 4.

3. Actualizar los gráficos correspondientes al módulo de Visualización de Resultados. Incrementar la Taza de Rechazo sumando la tasa evolutiva mediante la ecuación $RR_{i+1} = RR_i + ER$ y regresar al paso 2.
4. Si al ejecutar el paso 2 quedan nodos desconectados o segregados de la estructura, estos también deben ser eliminados. Esto es, eliminar los renglones y columnas que correspondan a los grados de libertad contenidos en los nodos desconectados.
5. Haciendo uso del concepto de “*malla fija*”, se ejecutan sólo la segunda y tercera parte del Módulo FEA (solución y postproceso).
6. Se genera la imagen que ilustra los resultados del FEA y se regresa al paso 1.

4.2.5 Módulo de Visualización de Resultados

La visualización gráfica de todos los resultados está a cargo de este módulo. Básicamente desempeña dos tareas principales:

- Generar la imagen de la estructura a partir de los nodos y conectividades, asignando a cada elemento un color de acuerdo a su nivel de esfuerzo con respecto a los esfuerzos máximo y mínimo de toda la estructura, teniendo una escala de colores RGB donde el azul representa el mínimo esfuerzo y el rojo representa el máximo.
- Generar los gráficos con respecto a cada estado estable de la tasa de rechazo, del porcentaje de volumen, del desplazamiento máximo y de los esfuerzos de *von Mises* (el máximo, el mínimo y el promedio).

Dentro de la ventana de ejecución del programa se pueden observar los gráficos del segundo punto, además de guardarse como un archivo de imagen en el directorio de trabajo; estos gráficos se actualizan en la ventana cada vez que se alcanza un estado estable, además de reescribirse los archivos de los mismos; mientras que las imágenes del primer punto son almacenados también en el directorio de trabajo, generando así, una imagen por cada iteración y por cada estado estable, aunque no se presentan en la ventana de ejecución, excepto el gráfico del FEA inicial y el gráfico correspondiente a la última iteración una vez finalizado el proceso.

La inclusión de este módulo juega un papel de vital importancia en la interpretación y el análisis de los resultados.

Nota:

Es importante aclarar que, como lo hacen algunos paquetes comerciales de CAE o FEA, el programa NO trabaja con ningún sistema de unidades, por lo cual los gráficos de esfuerzo y de desplazamiento NO presentan unidades, sin embargo esto da libertad al usuario para emplear el sistema de unidades que convenga para cada caso, no obstante tiene que ser cuidadoso al ingresar los valores, debido a que la congruencia de los resultados depende de ello.

CAPÍTULO V

CASOS DE ESTUDIO

5.1 INTRODUCCIÓN

Los primeros dos casos que se presentan, son problemas de optimización estudiados previamente por otros autores como Querin [16] o Xie [26]. Esto permite comparar (con base en la geometría y el volumen de las estructuras) los resultados aquí obtenidos con los presentados por otros autores. El tercer caso es una propuesta original donde la estructura óptima obtenida empleando el software desarrollado es comparada con la que un software comercial (*Genesis*) proporciona. Los tres casos sob abordados detalladamente en los apartados 5.2, 5.3 y 5.4 respectivamente, no obstante, se describen brevemente a continuación:

El primer caso es una placa cuadrada con soporte simple en los extremos y una fuerza puntual en el centro. Si bien no es una estructura en 3D, como se pretende en un cascarón, permite interpretar, de manera intuitiva, los resultados.

Para el segundo caso, se expone el proceso de optimización de una estructura semicilíndrica empotrada en sus bordes longitudinales y con una fuerza puntual

transversal en la parte central superior. No es una estructura compleja, pero demuestra las capacidades del algoritmo para lidiar con estructuras tridimensionales.

Finalmente, para el tercer caso se propone una estructura de sección cuadrada con curvatura esférica; cuenta con soportes tipo rotula en los cuatro vértices y al igual que en los casos anteriores, con una fuerza puntual en el centro. Aunque ya no es una forma tan trivial como en el primer caso, aún se pueden apreciar, de forma clara, los resultados.

Para el primer caso se realizó dos veces el proceso de optimización: primero con una malla “gruesa” y posteriormente con una malla “fina”. Esto con la finalidad de comprobar la convergencia tanto del módulo de FEA como el módulo de Optimización. A continuación se da una descripción completa de cada uno de los casos y sus respectivos resultados.

5.2 CASO 1: PLACA CUADRADA CON SOPORTE SIMPLE

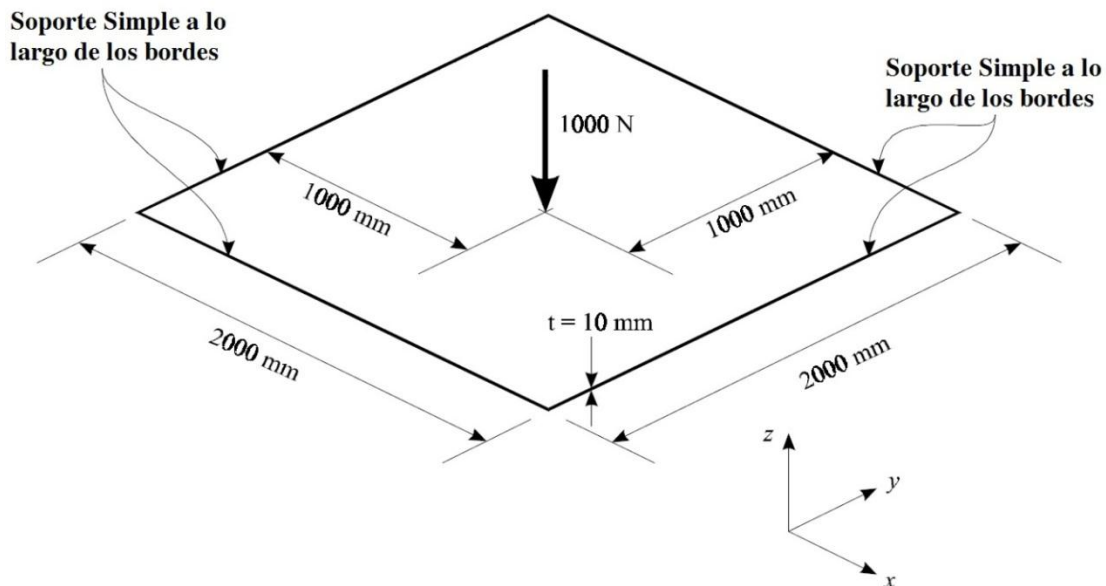


Figura 5.1 Condiciones de carga de una Placa con Soporte Simple en el Contorno y Fuerza Transversal.

Se obtuvo el diseño óptimo para una estructura de acero, como la mostrada en la figura 5.1, con Módulo de Young de 210000 $\left[\frac{N}{mm^2}\right]$ y Coeficiente de Poisson de 0.3.

Se llegó a la forma óptima usando dos mallas diferentes, es decir, primero se realizó el proceso de optimización con un *tamaño de malla absoluto* de 100 mm y posteriormente con un tamaño de malla absoluto de 50 mm para el nuevo proceso. El tamaño absoluto de malla (*Absolute Mesh Size* como se designa en *Algor*) se refiere al tamaño aproximado de las aristas de los elementos finitos [1].

5.2.1 Malla 1 (100 mm)

Para este tamaño nominal de elemento finito se obtuvo en una malla formada por una “nube” de 441 nodos y 800 elementos triangulares. En cuanto a los parámetros ESO, se estableció una Tasa de Rechazo inicial del 8% y una Tasa Evolutiva del 1%. Mientras que el Objetivo planteado fue el 60% del volumen original. En la figura 5.2 se muestra una serie de las imágenes más representativas que ilustran la secuencia del proceso de optimización, partiendo de la figura 5.2a que corresponde al FEA de la estructura original, hasta la figura 5.3f corresponde a la iteración donde el objetivo es alcanzado. Mientras que el resto de las imágenes corresponden a *óptimos locales* (en otras palabras estados estables) o bien, a iteraciones del proceso.

Se presentan también, los gráficos que describen el comportamiento de la estructura en cada estado estable a lo largo de la optimización (*historial evolutivo*); el grafico 5.5a muestra el incremento en la tasa de rechazo. El grafico 5.5b corresponde al desplazamiento máximo; el grafico 5.5c muestra el porcentaje de volumen. En el grafico 5.5.d se comparan los esfuerzos: máximo, mínimo y promedio de la estructura; estos dos últimos se incrementan significativamente en una proporción similar a lo largo de la optimización, no obstante, en el esfuerzo máximo no se aprecia un incremento relevante.

También se puede apreciar que a través del proceso de optimización se va logrando una distribución de esfuerzos más uniforme.

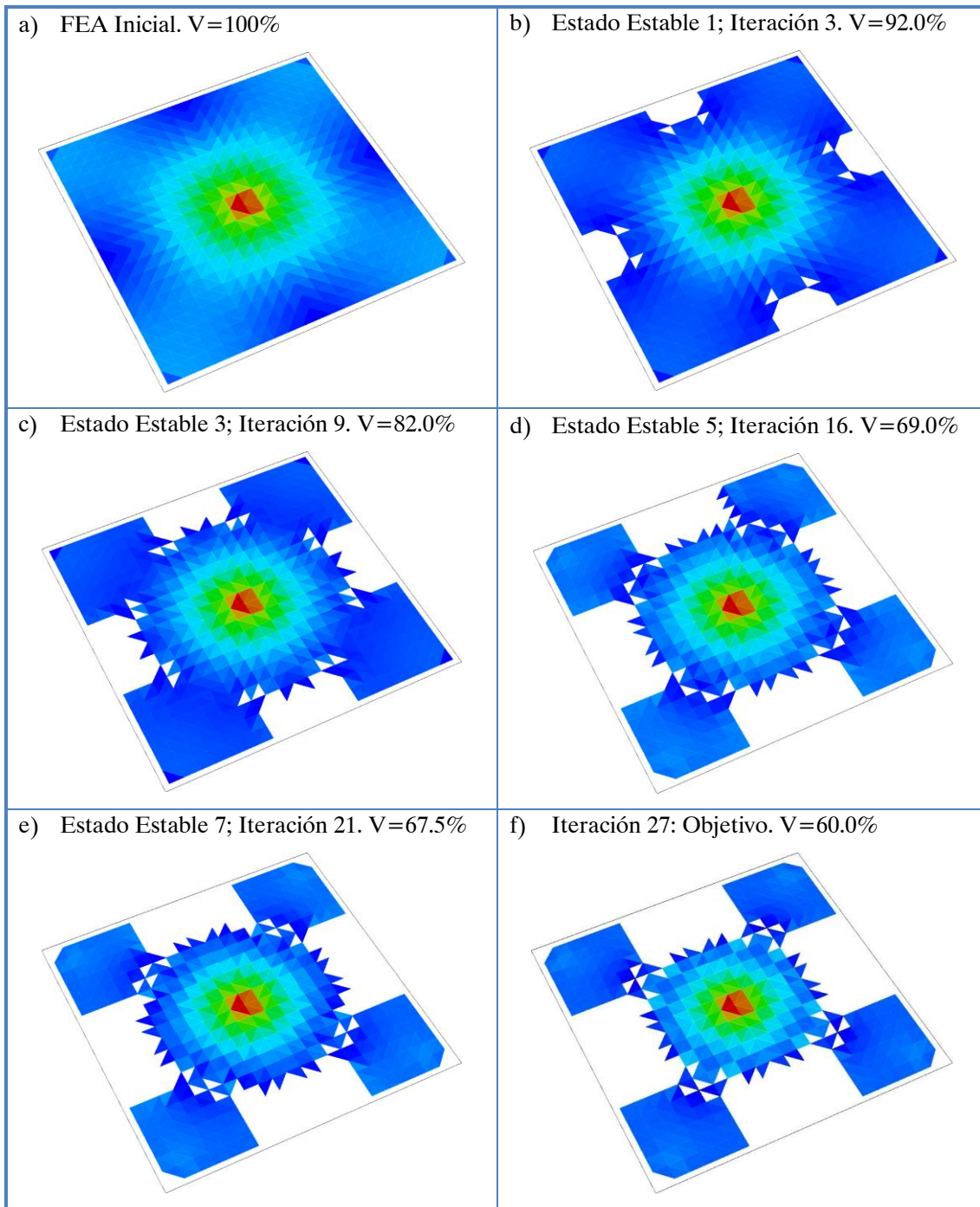


Figura 5.2 Secuencia de optimización de la Placa con Soporte Simple para la Malla 1.

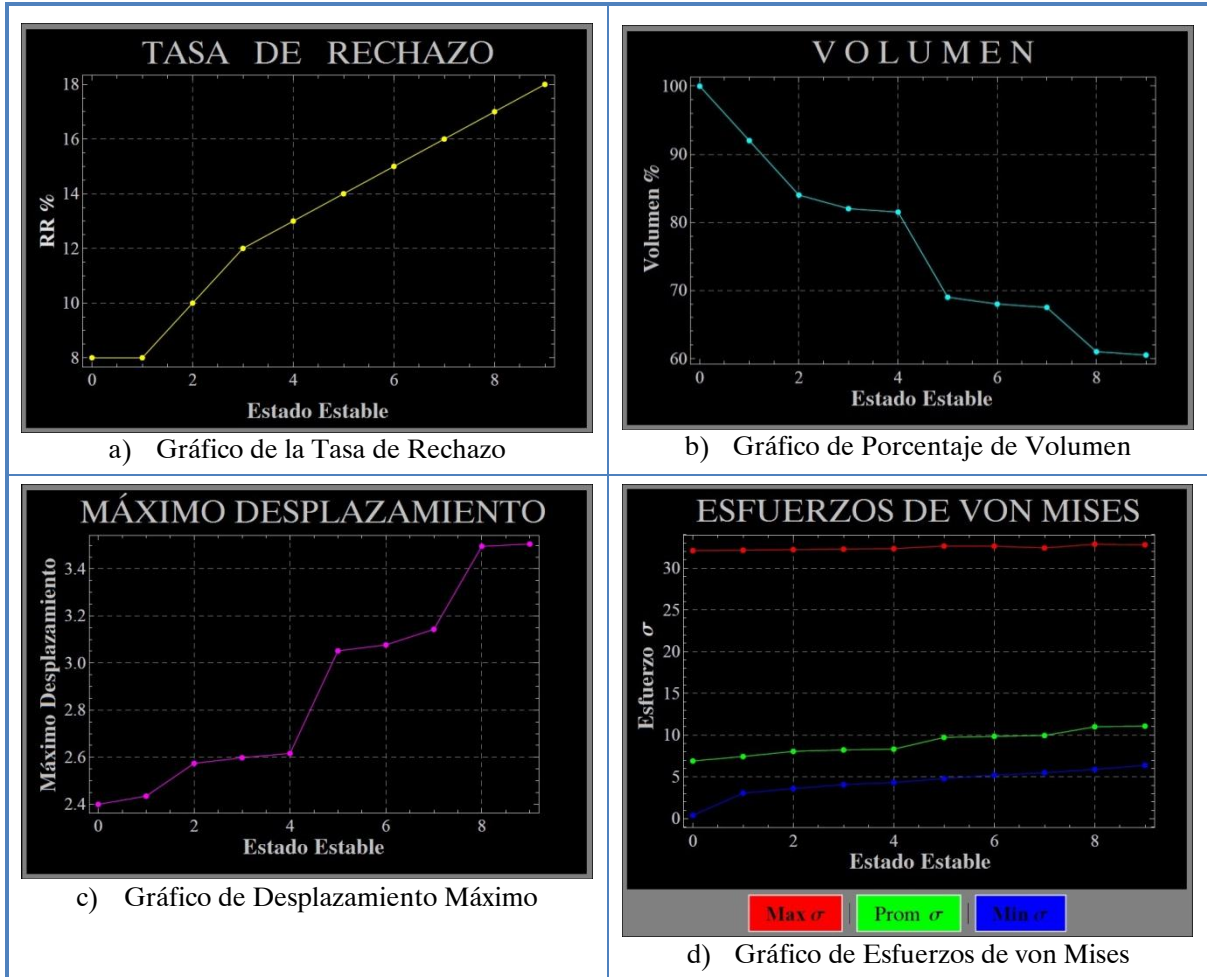


Figura 5.3 Gráficos del Historial Evolutivo de la Placa con Soporte Simple para la Malla 1, generados por el programa. Esfuerzos en $[\frac{N}{mm^2}]$ y Desplazamientos en [mm].

5.2.2 Malla 2 (50 mm)

En este proceso la malla adquirió una densidad de 1681 nodos y 3200 elementos. Los parámetros ESO se definieron por una Tasa de Rechazo inicial del 1% y una Tasa Evolutiva del 0.4%. Por otro lado, el objetivo establecido fue de 60% de volumen, al igual que en la optimización con la malla gruesa. Los cambios en las variables ESO, así como el aumento en el número de elementos, dieron como resultado un aumento en la cantidad de iteraciones así como en los estados estables. La forma final difiere ligeramente de la obtenida con el mallado anterior, a pesar de ello se aprecia

claramente que la forma de la estructura evoluciona hacia la misma geometría. La figura 5.6 muestra la forma óptima obtenida por Querin [16].

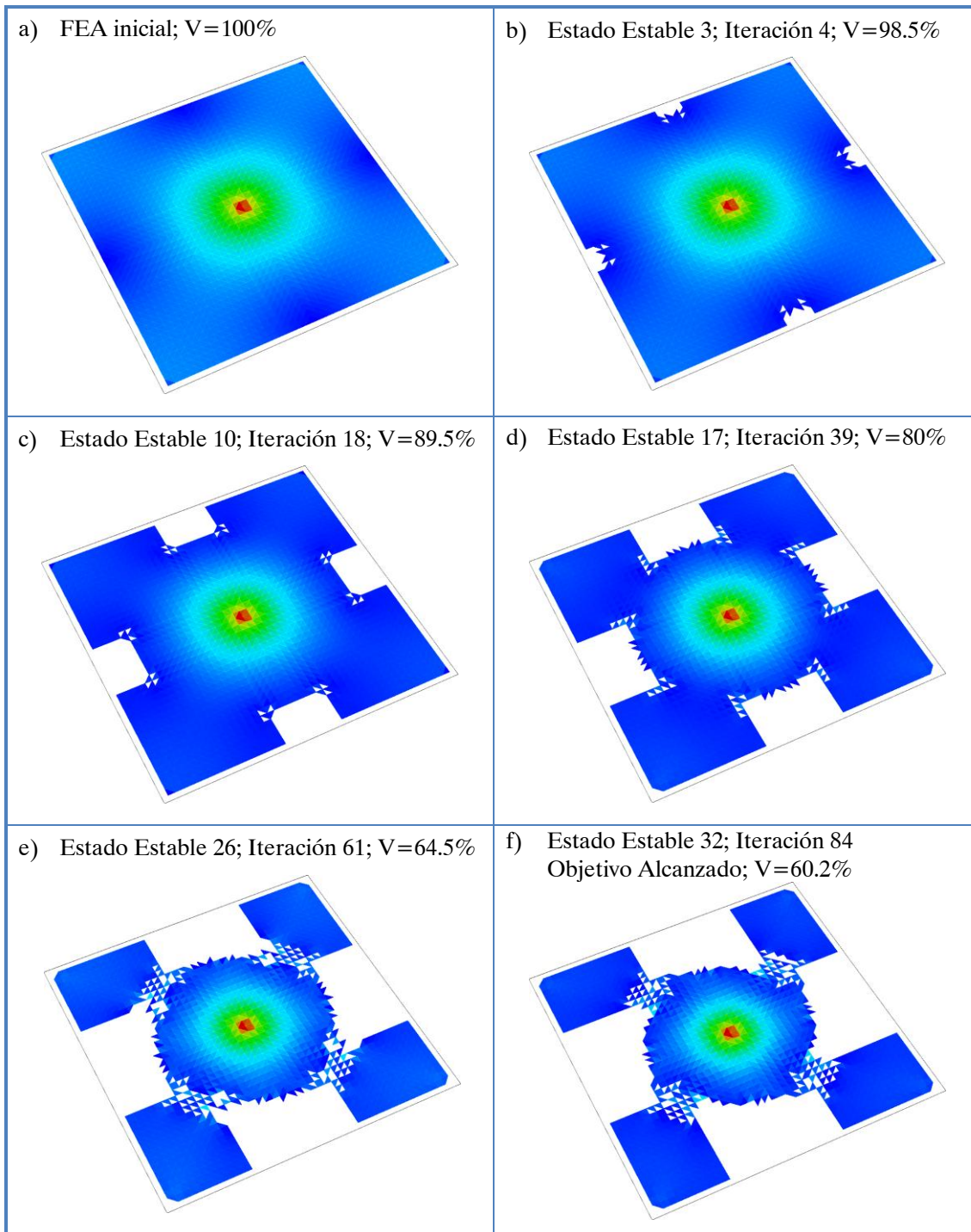


Figura 5.4 Secuencia de Optimización de la Placa con Soporte Simple para la Malla 2.

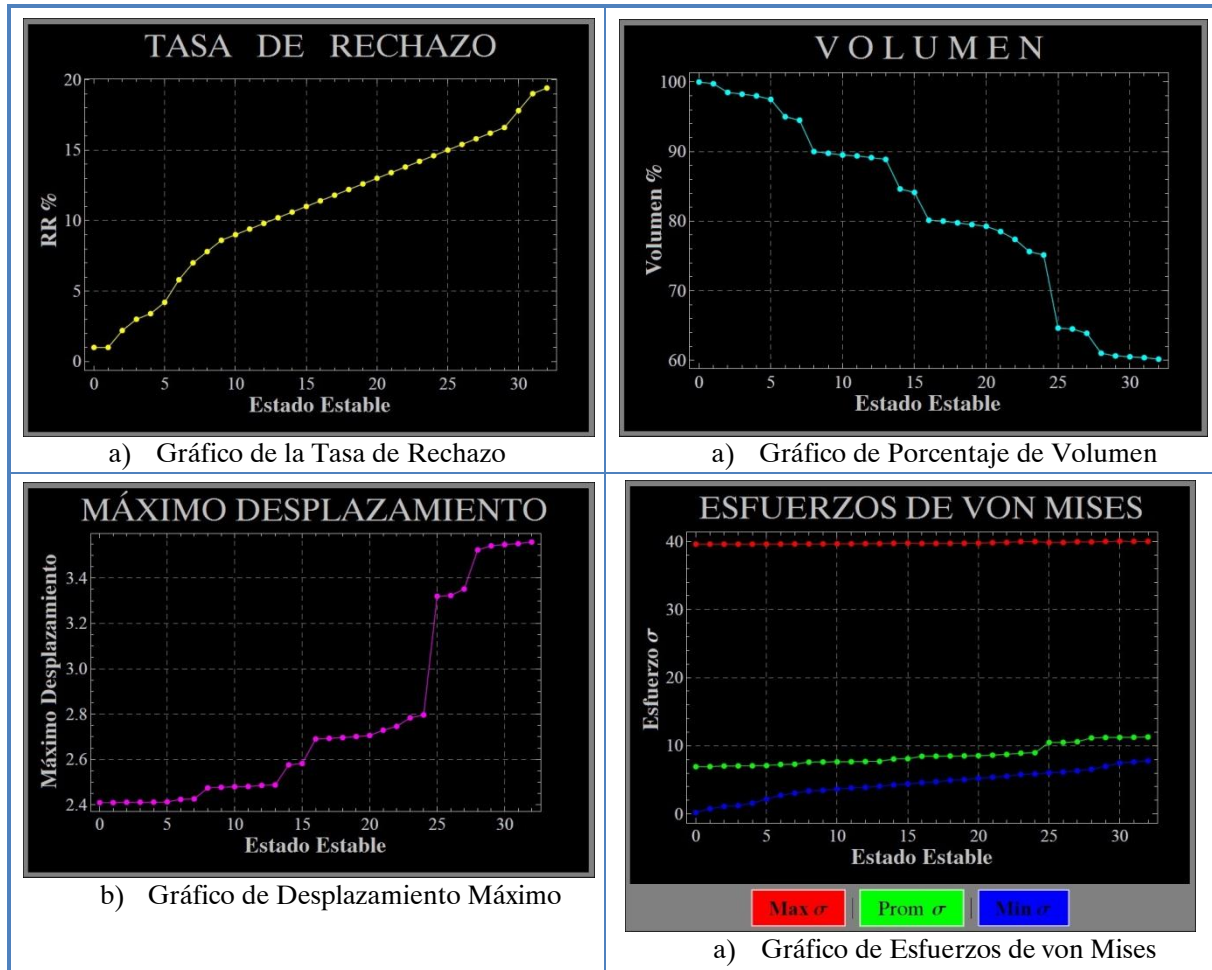
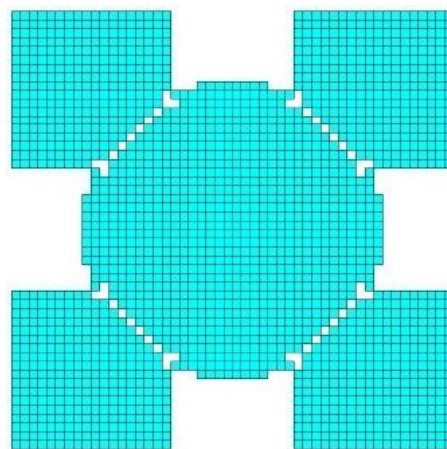


Figura 5.5 Gráficos del Historial Evolutivo de la Placa con Soporte Simple para la Malla 2, generados por el programa. Esfuerzos en $[\frac{N}{mm^2}]$ y Desplazamientos en [mm].



Volumen = 79.20%

Figura 5.6 Forma óptima obtenida por Querin [16].

Se puede observar que las figuras 5.2c, 5.4d y 5.6, cuyos porcentajes de volumen respecto de la estructura original, tienen valores cercanos (82%, 80% y 79.2% respectivamente), poseen una geometría semejante, a pesar de la diferencia en tamaño y tipo de malla, lo que indica la convergencia del algoritmo desarrollado.

5.3 CASO 2: ESTRUCTURA CILINDRICA DE 180°

La estructura de este caso de estudio y sus condiciones de carga se muestran en la figura 5.9; se considera como material un acero con Módulo de Young de 210000 $[\frac{N}{mm^2}]$ y Coeficiente de Poisson de 0.3. La malla que se empleó para este caso tienen un tamaño de malla absoluto de 87.5 milímetros y consta de 1369 nodos y 2592 elementos; los valores de parámetros ESO empleados son: 0.95% para la Tasa de Rechazo inicial y 1% para la Tasa Evolutiva. El volumen objetivo establecido fue de 60% del volumen inicial.

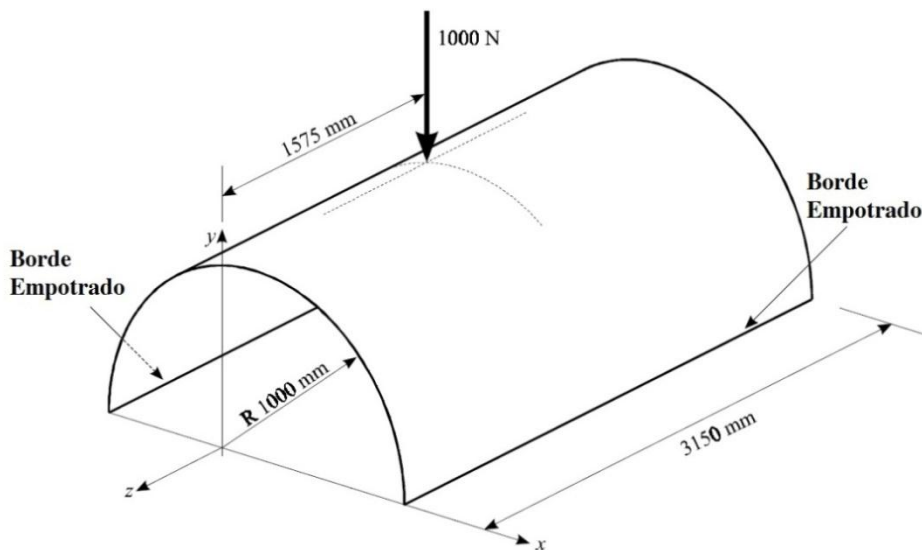


Figura 5.7 Condiciones de Carga de una estructura cilíndrica de 180° con carga transversal al centro y empotrada en sus extremos rectos.

A continuación se ilustran los resultados obtenidos a través de la secuencia de imágenes y los gráficos generados por el programa.

Asimismo, la figura 5.10 muestra la forma óptima obtenida por Querin [16] con la que se comparan los resultados obtenidos en cuanto a geometría y porcentaje de volumen.

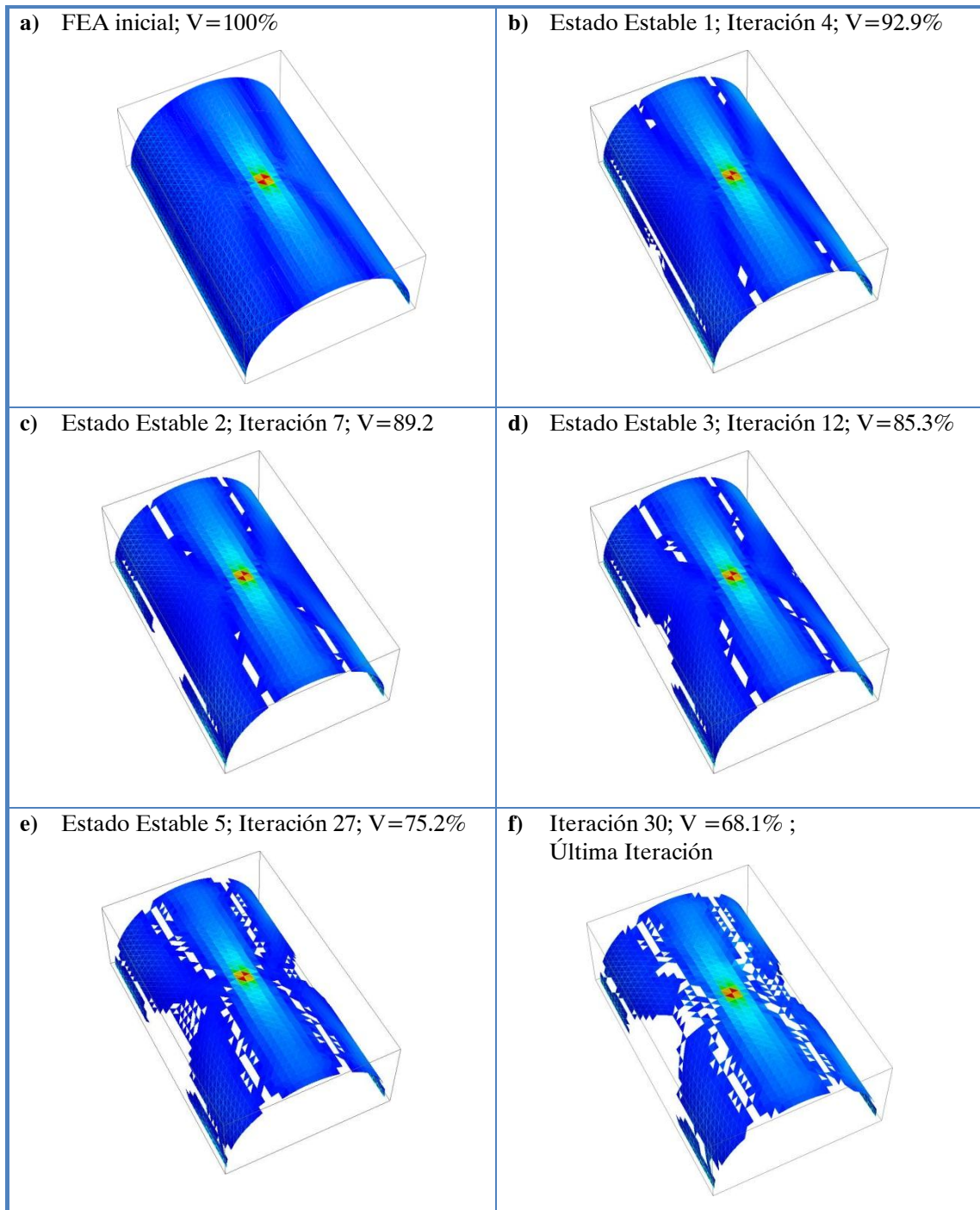


Figura 5.8 Secuencia de optimización de la Estructura Cilíndrica Empotrada.

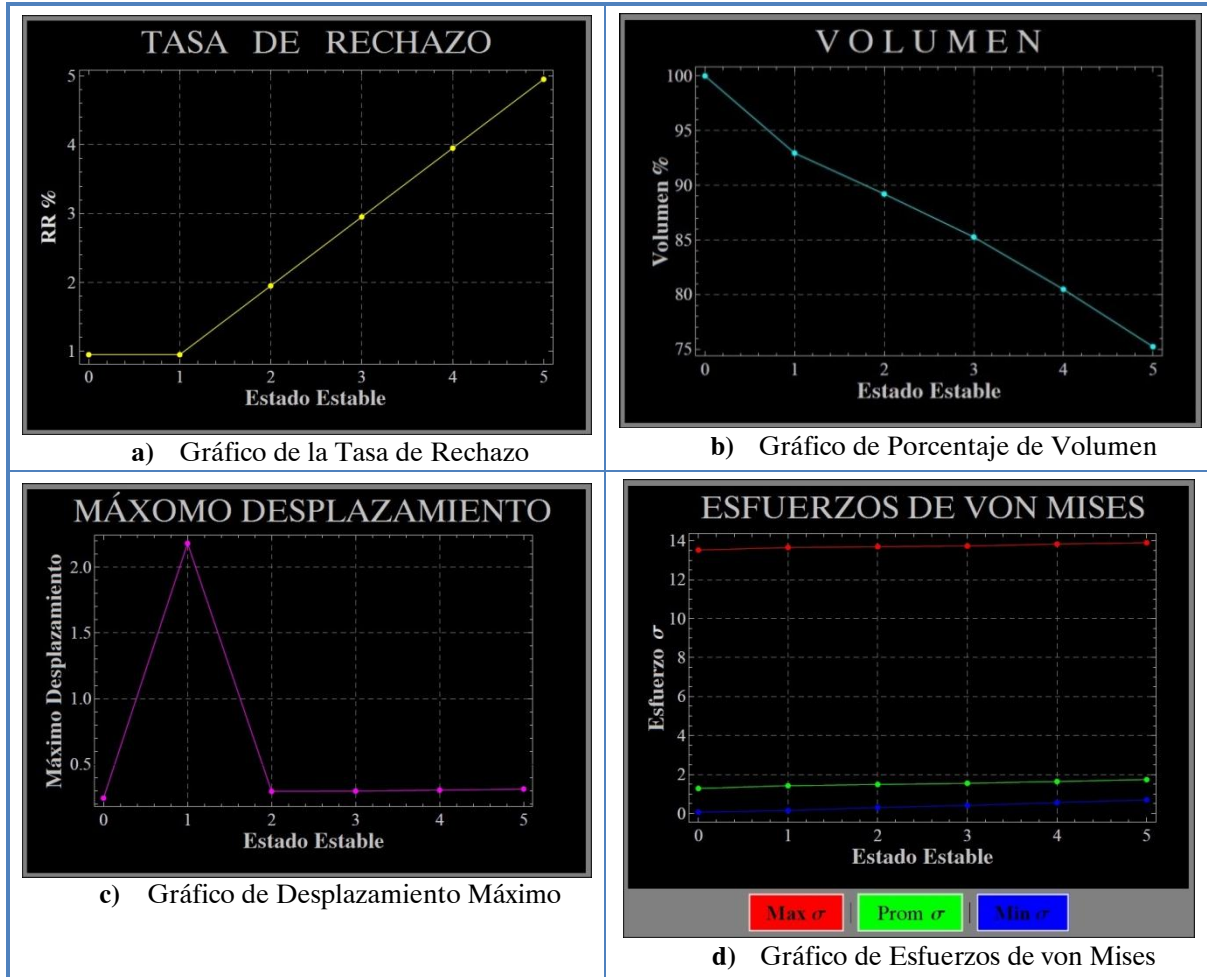
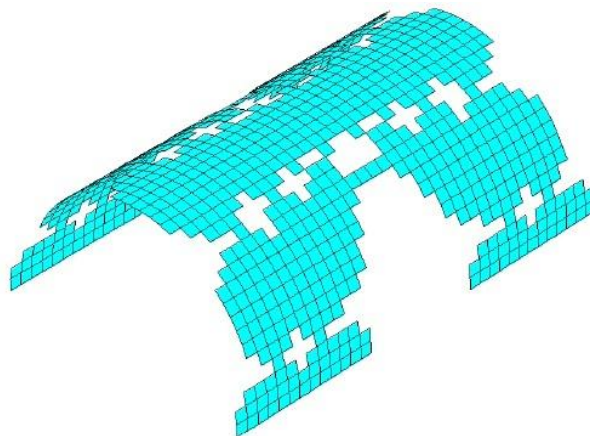


Figura 5.9 Gráficos del Historial Evolutivo de la Estructura Cilíndrica Empotrada para la Malla 2, generados por el programa. Esfuerzos en $[\frac{N}{mm^2}]$ y Desplazamientos en [mm].



Volumen = 62.7%

Figura 5.10 Forma óptima obtenida por Querin [16]

Como se puede apreciar en las figuras 5.8 y 5.9, no se consigue el volumen objetivo propuesto, debido a que durante el proceso de rechazo, se llega a la eliminación de elementos que ocasionan una discontinuidad en la estructura. Sin embargo, la manipulación de los parámetros evolutivos, puede evitar dicha situación.

Si bien los resultados obtenidos en el presente trabajo y los de la referencia con que se comparan no son idénticos, la semejanza es evidente en cuanto a geometría y volumen. Por otro lado, es conveniente señalar que existen diferentes factores que intervienen, a los cuales puede deberse que los resultados obtenidos difieran de los presentados por Querin [16]; de estos destacan: la geometría del elemento finito empleado y los parámetros ESO, pues la calibración en estos últimos influye determinantemente en las formas óptimas que resulten del proceso de optimización.

5.4 CASO 3: ESTRUCTURA CON CURVATURA ESFÉRICA

La estructura propuesta para este caso, consiste en un cascarón de sección cuadrada con curvatura esférica cuyas dimensiones se indican en la figura 5.11; asimismo se muestran las restricciones y la fuerza a la que está sometida. Las características del material son: Modulo de Young de $210000 \left[\frac{N}{mm^2} \right]$ y Coeficiente de Poisson de 0.3. En esta ocasión sólo se consideró un tipo de mallado, el cual consta de 729 nodos y 1352 elementos, teniendo así un tamaño de malla absoluto de 70 mm. Los parámetros establecidos para el proceso de optimización son los siguientes: como objetivo se fijó el 55% del volumen inicial; se usó una tasa de rechazo del 1.5% y una tasa evolutiva del 0.05%.

Como se observa en las imágenes y gráficos que ilustran el proceso de optimización (figuras 5.12 y 5.13), aunque el volumen final no es exactamente el que se planteó como objetivo (55%), se puede decir que el volumen objetivo es alcanzado en la iteración 188, pues en la iteración que le sigue el proceso finaliza debido a que el

objetivo es superado. Lo anterior indica que la estructura final no alcanzó el óptimo absoluto y que el proceso evolutivo podría continuar si el objetivo establecido de volumen es menor.

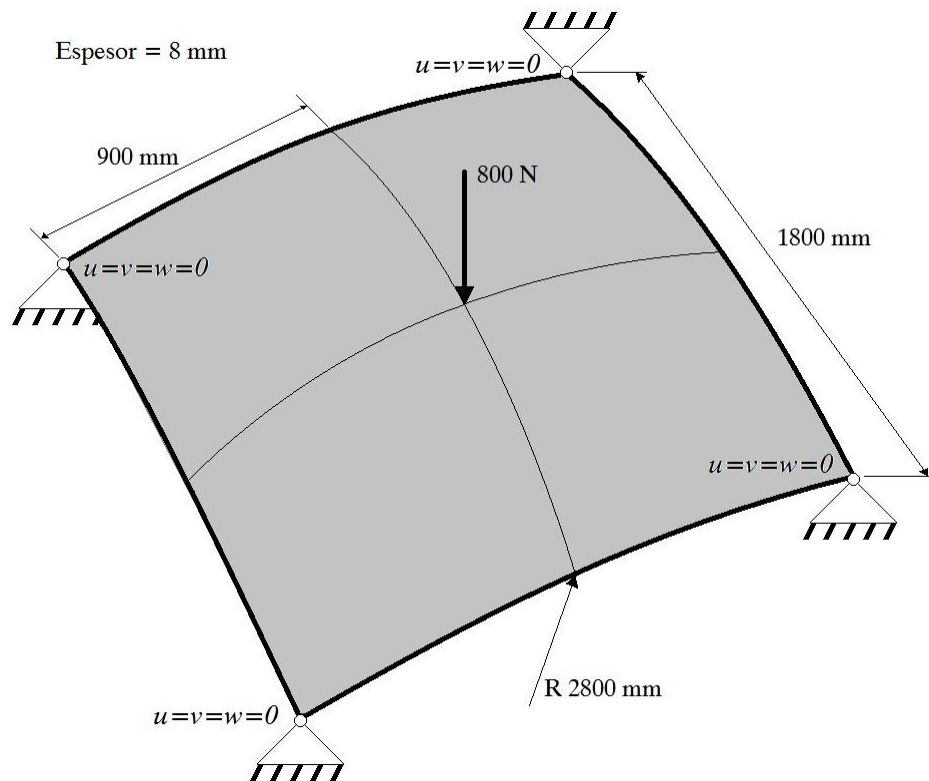


Figura 5.11 Estructura tipo cascarón con curvatura esférica. Fuerza puntual en el centro en dirección normal. Las restricciones en los soportes están definidos por $u=v=w=0$.

En la figura 5.1, donde se exponen los gráficos de evolución de la estructura, se observa que el porcentaje de volumen disminuye considerablemente, no obstante, los esfuerzos presentan una variación trivial, lo mismo que sucede con el desplazamiento máximo. En las imágenes de los FEA se puede apreciar, de mejor manera que en los casos anteriores, las cualidades de las estructuras tipo cascarón; se observa que los esfuerzos más relevantes se presenta en una pequeña zona alrededor de donde es aplicada la carga y en las zonas contiguas a las restricciones, mientras que el resto de la estructura presenta una distribución de esfuerzos uniforme (según la escala de

colores RGB). Dicha distribución uniforme de esfuerzos, es la característica que le brinda las ventajas por las que son ampliamente usadas.

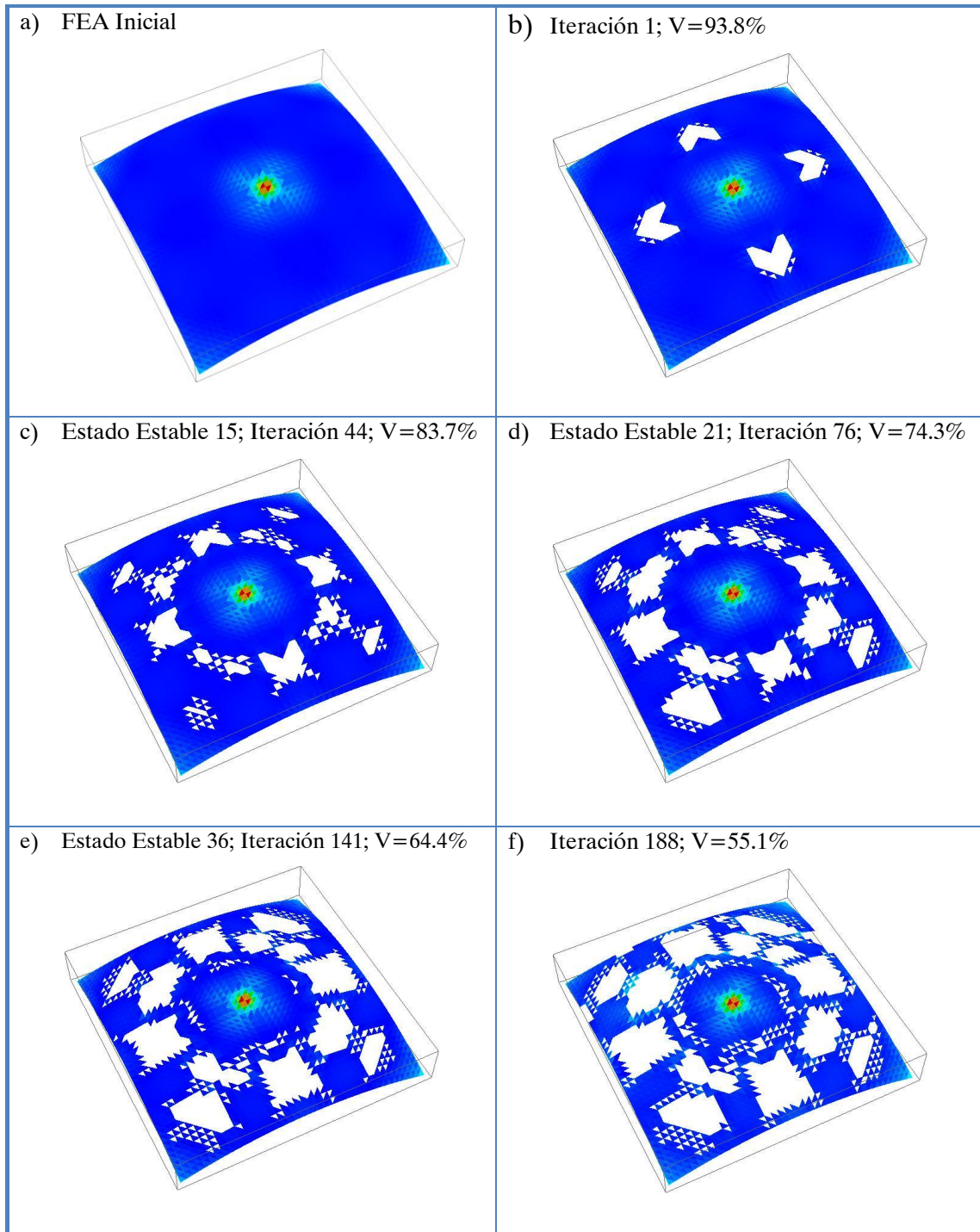


Figura 5.12 Secuencia de optimización de la Estructura Esférica.

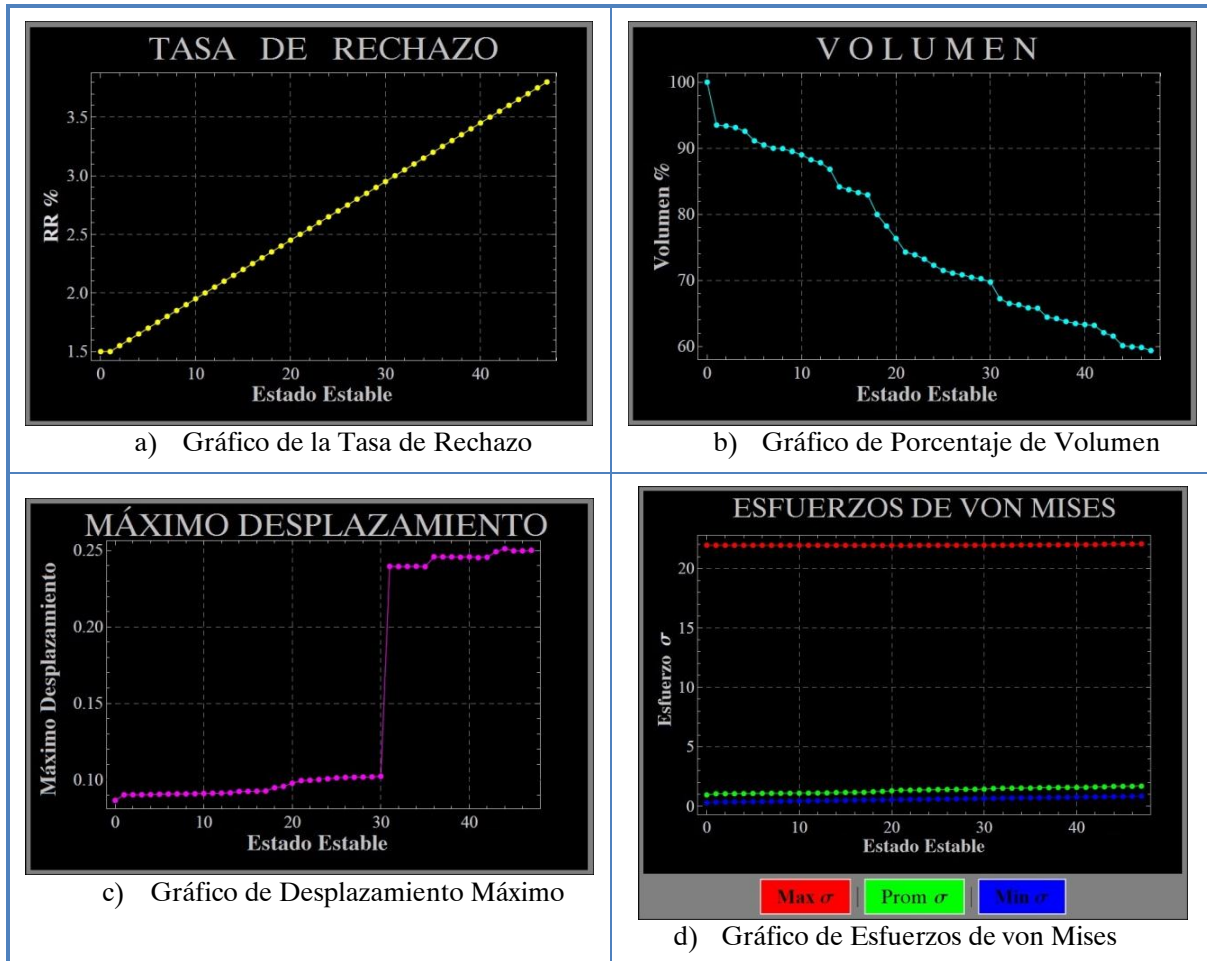


Figura 5.13 Gráficos del Historial Evolutivo de la Estructura tipo cascarón esférica para la Malla 2, generados por el programa. Esfuerzos en $[\frac{N}{mm^2}]$ y Desplazamientos en [mm].

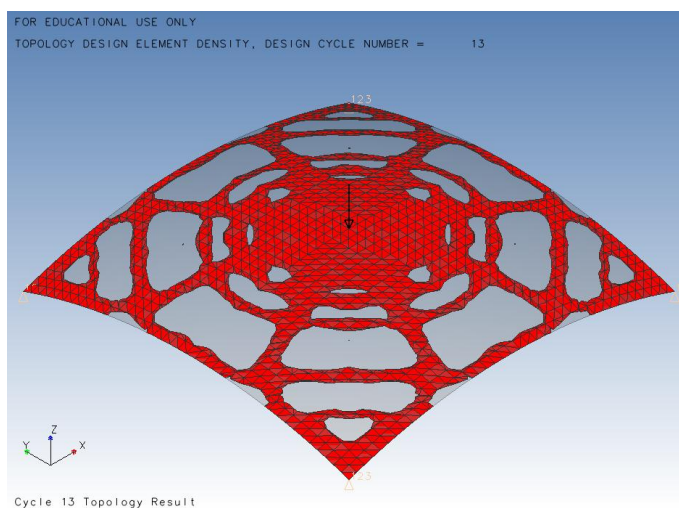


Figura 5.14 Geometría óptima obtenida usando *Genesis*.

La figura 5.12 muestra la geometría óptima obtenida usando *Genesis*. Si bien las geometrías óptimas obtenidas no son idénticas, a pesar de que se emplea la misma malla, presentan una configuración muy similar en cuanto al número de cavidades generadas en la estructura y la ubicación y forma de las mismas. Usando *Genesis*, sus sofisticadas metodologías y herramientas de aproximación topológica, dan como resultado una forma final mejor definida para el mismo porcentaje de volumen, 55%.

De los tres casos de optimización, se puede concluir que la calibración de los parámetros ESO es un factor crucial en el proceso de optimización, que define cuán satisfactoria es la forma final; además, aunque originalmente se proponían valores pequeños, del orden del 1% [26] para facilitar la convergencia a la forma óptima, la calibración adecuada depende de cada caso en particular, por lo que estos parámetros requieren de un análisis independiente. A pesar de esto, sin una gran manipulación de las tasas de rechazo y evolutiva, se obtuvieron resultados satisfactorios, pues se lograron reducciones en el volumen de las estructuras de hasta el 45% y, a la vez, la distribución de esfuerzos más homogénea posible, reflejándose en el aumento del valor de esfuerzo promedio de, aproximadamente, 75% en el caso más crítico.

CONCLUSIONES

A lo largo de este trabajo se aplicó el FEM y la metodología ESO a las estructuras tipo cascarón (Shell Structures). Dichos conocimientos se implementaron en el desarrollo de un programa computacional para el diseño óptimo de estructuras tipo cascarón delgadas, considerando materiales homogéneos isotrópicos dúctiles.

Este programa proporciona resultados satisfactorios, tanto del módulo FEA como del de optimización, de acuerdo con los casos de estudio presentados en el último capítulo. Los resultados fueron validados mediante la comparación, en cuanto a la geometría y el volumen, con los presentados por Querin [16] (cuyas herramientas tienen ya, varios años de desarrollo) y con los obtenidos empleando *Genesis*; además, se equiparan a otros trabajos (por ejemplo, el que aparece en la página 48 de la referencia [25]).

Durante los casos de estudio se obtuvieron reducciones en el volumen de las estructuras de hasta el 45% con la distribución de esfuerzo más homogénea posible; lo que se refleja en el aumento del esfuerzo promedio de aproximadamente 75% en el caso más crítico (con la posibilidad de mejorar el rendimiento del software manipulando los parámetros de optimización).

Con base en lo anterior y de acuerdo con los objetivos y alcances planteados, se concluye lo siguiente:

- Se aplicó la teoría del FEM para estructuras tipo cascarón.
- Se aplicó la metodología ESO orientándola al diseño óptimo de cascarones.
- Dichos conocimientos se implementaron en el desarrollo de un software para el diseño óptimo de estructuras tipo cascarón delgadas y considerando materiales homogéneos isotrópicos dúctiles.

- Nuevos conocimientos y herramientas para el GDMO, que son vitales para las funciones que cumple dentro del CDMIT de la FI de la UNAM.
- Adquisición personal de conocimientos sólidos en los temas de y estructuras tipo cascarón, optimización estructural y FEM, con el fin de continuar con el estudio de los mismos a nivel de posgrado; asimismo, los conocimientos adquiridos son un instrumento poderoso para la participación en proyectos académicos o laborales.

A pesar de que las formas obtenidas del proceso de optimización no representan un diseño final, sin duda, el software desarrollado puede ser usado como guía en el proceso de diseño a detalle de estructuras. Esto deriva en la reducción de material al mínimo, por ende, se tienen estructuras lo más ligeras y, a la vez, con la distribución de esfuerzo más homogénea posible; económicamente, representa ahorros en todo el ciclo de vida del producto, factor prioritario en las industrias.

Tanto para la universidad como personalmente, el desarrollo de este proyecto significa estar al nivel de las mejores universidades del mundo, pues incluso en éstas, los temas abordados en este trabajo corresponden más a un nivel de maestría o doctorado que de licenciatura.

TRABAJO A FUTURO

A pesar de que el trabajo realizado ha cumplido con los objetivos y alcances planteados, aún restan algunas tareas a realizar que pueden mejorar el desempeño de la aplicación creada, las cuales pueden ser clasificadas según las tres partes principales del programa: Modulo FEA, módulo de Optimización y Código de Programación. A continuación se presentan las correspondientes a cada una de ellas.

Módulo FEA

- Incluir en el análisis el sexto grado de libertad (θ_z) también llamado *Drilling* [27].

Módulo de Optimización

- Incluir la metodología BESO.
- Incluir la metodología MESO.

Código de Programación

- En este sentido se propone la mejora del código con el fin de disminuir el tiempo del proceso de optimización, o incluso cambiar de lenguaje de programación con el fin de tener más y/o mejores herramientas de programación.

Asimismo, se propone para un futuro inmediato el uso del programa de cómputo en el proceso de diseño de proyectos reales, así como también la publicación de artículos que den a conocer el trabajo realizado.

REFERENCIAS

- [1] Algor User's Guide
- [2] Bhatti M.A. *Fundamental Finite Element Analysis and Applications: With Mathematica and MATLAB Computations*. John Wiley & Sons, 2005. Print.
- [3] Bhatti M.A. *Advanced Topics in Finite Element Analysis of Structures: With Mathematica and MATLAB Computations*. John Wiley & Sons 2006. Print.
- [4] Calladine C.R. *The Theory of Shell Structures*. Cambridge University Press, 2007. Print.
- [5] Cervera E., Trevelyan J. "Evolutionary structural optimization based on boundary representation of NURBS. Part I: 2D algorithms". *Computer & Structures* 83 (2005): 1902-1916. *Science Direct*. Web. 19 de Abril, 2005.
- [6] Clough, R.W. "The finite element in plane stress analysis". *Proc. 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation*. Pittsburg, Pa., Sept. 1960.
- [7] Hrenikoff, A. *Solution of problems in elasticity by the framework method*. J. Appl. Mech., **A8**, 169-75, 1941.
- [8] Kienzler R., Altenbach H., Ott I. *Theories of Plates and Shells: Critical Review and New Applications*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1997. Print.
- [9] Kwon Y.W., Bang H. *The Finite Element Method Using MATLAB*. 2nd ed. Boca Raton: CRC, 2000. Print.
- [10] Martínez-Castejón, P.J. 2003. *Diseño Óptimo Simultáneo de Topología y Geometría de Estructuras Articuladas Mediante Técnicas de Crecimiento*. Tesis Doctoral. Departamento de Estructuras y Construcción, Universidad Politécnica de Cartagena, Colombia.
- [11] Maxwell, J.C., 'On reciprocal figures, frames and diagrams of force,' *Trans Roy Soc Edinb*, 26, 1, 1872.
- [12] McHenry, D. *A lattice analogy for the solution of plane stress problems*. J. Inst. Civ. Eng., **21**, 59-82, 1943.

- [13] Michell, A.G.M., 'The limits of economy of material in frame-structures,' *Phil Mag*, 8, pp 589-597, 1904.
- [14] Newmark, N.M. "Numerical methods of analysis in bars, plates and elastic bodies", in *Numerical Methods in Analysis in Engineering* (ed. L.E. Grinter), Macmillan, 1949.
- [15] Petchsasithon A., Gosling P. "Integrated thickness and shape optimization of linear shells". *13th ACME conference (2005): University of Sheffield*. School of Civil Engineering and Geosciences, University of Newsactle-upon-Tyne.
- [16] Querin O.M. 1997. *Evolutionary Structural Optimization: Stress Based Formulation and Implementation*. Tesis Doctoral. Department of Aeronautical Engineering, University of Sydney, Australia.
- [17] Ramm E., Wall W.A. "Shell Structures – A sensitive Interrelation between Physics and Numerics". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. Institute of Structural Mechanics, University of Stuttgart, Germany.
- [18] Southwell, R.V. *Relaxation Methods in Theoretical Physics*. Clarendon Press, 1496.
- [19] Stegmann J. 2005. *Analysis and Optimization of Laminated Composite Shell Structures*. Tesis Doctoral. Institute of Mechanical Engineering, Aalborg University, Denmark.
- [20] Tanskanen P. "The evolutionary structural optimization method: theoretical aspects". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 191 (2002): 5485-5498. Lappeenranta University of Technology, Finland.
- [21] Tanskanen P. "A multiobjective and fixed elements based modification of the evolutionary structural optimization method". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 196 (2006): 76-90. Lappeenranta University of Technology, Finland.
- [22] Ugural A.C., Fenster S.K. *Advanced Strength and Applied Elasticity*. 4th ed. Prentice Hall, 2003. Print.

- [23] Vanderplaats G. N. *Multidiscipline Design Optimization*. Vanderplaats Research & Development Inc., 2007. Print.
- [24] Velázquez-Villegas F., Santillán-Gutiérrez S.D. “Diseño óptimo evolutivo”. *INGENIERÍA Investigación y Tecnología* VII.3 (2006): 139-150. Centro de Diseño y Manufactura, Facultad de Ingeniería, UNAM. México.
- [25] Victoria-Nicolás M. 2006. *Optimización de forma y topología con malla fija y algoritmos genéticos*. Tesis Doctoral. Departamento de Estructuras y Construcción, Universidad Politécnica de Cartagena, Colombia.
- [26] Xie Y.M., Steven G.P. *Evolutionary Structural Optimization*. Great Britain: Springer-Verlag London Limited, 1997. Print.
- [27] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The Finite Element Method Volume 1: The Basis*. 5th ed. Butterworth-Heinemann, 2000. Print.
- [28] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The Finite Element Method Volume 2: Solid Mechanics*. 5th ed. Butterworth-Heinemann, 2000. Print.
- [29] Zingoni A. *Shell Structures in Civil and Mechanical Engineering*. Thomas Telford Publishing, 1997. Print.

MESOGRAFÍA

- [30] http://en.wikipedia.org/wiki/Stress_analysis
- [31] <http://www.automobilesreview.com/auto-news/lightweight-design-its-an-art-the-audi-asf-design-principle/7386/>
- [32] http://www.caranddriver.com/news/car/10q1/2011_2012_ford_focus_wagon-auto_shows/gallery/2012_ford_focus_chassis_cutaway_photo_32
- [33] <http://www.cowleytimberwork.co.uk/shellstructures.html>
- [34] <http://www.paccar.ethz.ch/>