

CAPÍTULO 9

MATERIALES POROSOS

9.1 INTRODUCCIÓN

En un principio puede resultar incongruente el análisis de los materiales porosos (MP) con base en la Mecánica de Medios Continuos, ya que es por demás evidente que los MP al estar constituidos de dos o más fases no son continuos. Sin embargo, es necesario recordar lo mencionado al inicio de este texto en que se indicó que los MC son medios idealizados en los que no se consideraría, para el modelado de su comportamiento, su estructura atómica o molecular; en consecuencia y habiendo ya estudiado el comportamiento de fluidos y sólidos es ahora factible modelar un medio idealizado como continuo que se encuentra compuesto por un sólido deformable (matriz o esqueleto) y un fluido. De lo anterior, se tiene que para el modelado de un material poroso, éste se considera constituido de una estructura sólida o matriz (esqueleto sólido deformable) que se puede describir como un sólido elástico, elastoplástico o viscoelástico, y de un fluido que se encuentra en los poros. La descripción de la deformación y de la cinemática de cada uno de los medios continuos que conforman el material poroso no difiere de un continuo considerado monofásico, ya sea sólido o fluido.

En términos generales, los materiales porosos se relacionan con materiales tales como rocas, suelos, tejidos vivos, espumas, cerámicos y productos de papel. Por ejemplo, para analizar el comportamiento de un suelo al extraerle agua o el análisis del comportamiento de un yacimiento de gas o petróleo durante su explotación, es necesario evaluar la interacción del fluido con la matriz porosa, por lo que los MP son de particular importancia en diversos ámbitos de la ingeniería.

En los siguientes párrafos se presentarán las ecuaciones generales y constitutivas para materiales porosos y en dichas expresiones lo único que se expresará es el efecto que cada fase (sólido o fluido) tiene sobre el comportamiento del cuerpo, es entonces que las

propiedades del MP estarán en función de las propiedades de sus medios constitutivos y de la proporción de éstos, la cual se indica mediante la porosidad del MC.

9.2 PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

Hipótesis de continuidad

Como ya ha sido mencionado, un medio poroso puede ser estudiado mediante la superposición de dos medios continuos: un esqueleto y un fluido. Cualquier volumen infinitesimal puede ser tratado mediante la superposición de dos partículas (figura 9.1): una es el esqueleto, el cual se compone de la matriz y de la conexión de espacios porosos, y la otra corresponde a las partículas de fluido las cuales llenan los poros.

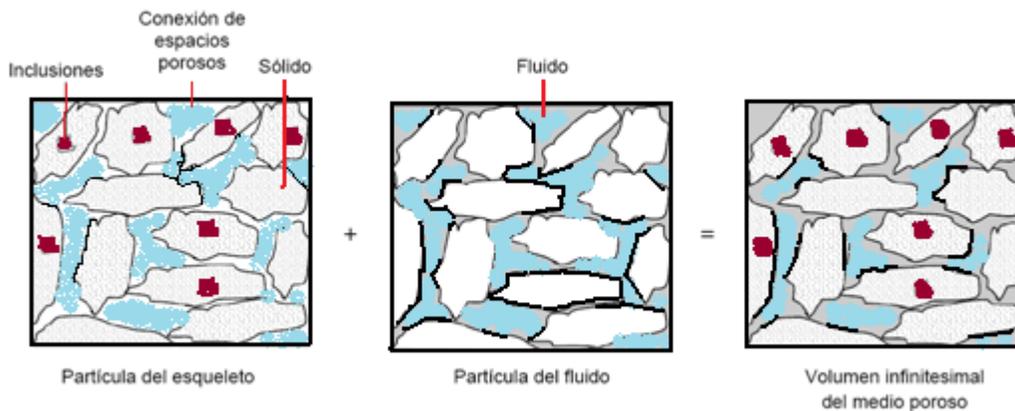


FIGURA 9.1 MEDIO POROSO REPRESENTADO MEDIANTE LA SUPERPOSICIÓN DE DOS MEDIOS CONTINUOS

Al aplicarse cargas externas y variaciones en la presión al fluido, el esqueleto se deforma. La descripción de dicha deformación no difiere de la planteada para un sólido.

Porosidades lagrangiana y euleriana

Se considera dV_t el volumen del esqueleto en un tiempo t y n la porosidad euleriana, de tal manera que el fluido ocupa un volumen ndV_t para un tiempo t . Al aplicar cierta deformación, el volumen dV_t cambia, por lo que la porosidad n no se relaciona apropiadamente con el cambio de volumen ocupado por los poros con el volumen inicial dV_0 . Esta relación se describe de manera más adecuada utilizando la porosidad lagrangiana ζ , mediante la siguiente relación:

$$\zeta dV_0 = ndV_t$$

$$\zeta = |F|n$$

Donde $J = |F|$ es el jacobiano del gradiente de deformación $F = \nabla_X x$.

Por su parte, el grado de compactación del material poroso es bien definido por la relación de vacíos ψ , la cual se define como la relación entre el volumen del espacio poroso con respecto al volumen de la matriz, todo para un tiempo t

$$\psi = \frac{n}{1-n}$$

donde ψ es una descripción espacial.

A partir de las definiciones de porosidad euleriana y lagrangiana se puede establecer una relación entre el volumen ocupado por la matriz dV_t^s (volumen ocupado por el esqueleto sólido) y el volumen total

$$dV_t^s = (1-n)dV_t = dV_t - \zeta dV_0$$

Ecuación de continuidad

Sean ρ_s y ρ_f las densidades de la matriz (sólido) y del fluido respectivamente, se tiene entonces que $\rho_s(1-n)dV_t$ y $\rho_f ndV_t$ son las masas del sólido y del fluido para un tiempo t , respectivamente. Si no se tienen cambios de masa, ni en la matriz ni en el fluido, contenidos en el volumen dV_t , se puede expresar el balance de masa como

$$\frac{D}{Dt} \int \rho_s (1-n) dV_t = 0$$

$$\frac{D}{Dt} \int \rho_f n dV_t = 0$$

Considerando lo expresado en el capítulo 5 (Ecuaciones generales), se tiene:

$$\int \left(\frac{D}{Dt} [\rho_s (1-n)] + \rho_s (1-n) \nabla \cdot \mathbf{v}_s \right) dV_t = 0$$

$$\frac{D}{Dt} [\rho_s (1-n)] + \rho_s (1-n) \nabla \cdot \mathbf{v}_s = 0$$

$$\int \left[\frac{D}{Dt} (\rho_f n) + \rho_f n \nabla \cdot \mathbf{v}_f \right] dV_t = 0$$

$$\Rightarrow \frac{D}{Dt} (\rho_f n) + \rho_f n \nabla \cdot \mathbf{v}_f = 0$$

donde \mathbf{v}_s y \mathbf{v}_f representan el campo de velocidades para las partículas de la matriz (sólido) y del fluido, respectivamente.

Balance de masa considerando una discontinuidad

Para algunas aplicaciones es necesario considerar que un medio poroso contiene discontinuidades, razón por la cual es necesario obtener una ecuación de balance de masa que tome en cuenta lo anterior.

Se define S como la superficie de la discontinuidad que se desplaza a lo largo de un volumen V_t , dicho volumen se divide en V_1 y V_2 , el vector normal a la superficie S es n_S , (figura 9.2). La velocidad normal de desplazamiento v_N de la superficie de discontinuidad, es la velocidad a la cual un punto contenido en S se mueve a lo largo de la normal n_S

$$(v_N = v \cdot n_S)$$

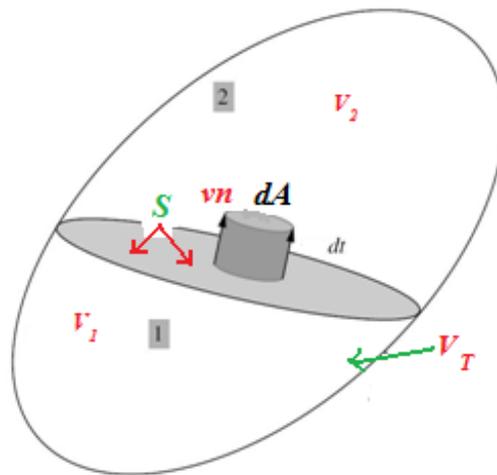


FIGURA 9.2 SUPERFICIE DE DISCONTINUIDAD S QUE SE DESPLAZA A TRAVÉS DE UN VOLUMEN INFINITESIMAL dV_T

A partir de lo anterior es posible establecer las ecuaciones de continuidad para un volumen con una superficie de discontinuidad (Condición de salto de Rankine - Hugoniot)

$$\int \left[\frac{\partial(\rho_s(1-n))}{\partial t} + \nabla_x \cdot (\rho_s(1-n)\mathbf{v}_s) \right] dV_t + \int \left[[\rho_s(1-n)(\mathbf{v}_s - \mathbf{v})] \right] \cdot \mathbf{n} dA = 0$$

$$\int \left[\frac{\partial(\rho_f n)}{\partial t} + \nabla_x \cdot (\rho_f n \mathbf{v}_f) \right] dV_t + \int \left[[\rho_f n(\mathbf{v}_f - \mathbf{v})] \right] \cdot \mathbf{n} dA = 0$$

La condición de salto implica que las partículas pasan a través de la superficie de discontinuidad sin presentar cambio de masa alguno. Esta condición de salto puede aplicarse a materiales donde la superficie S representa la interfase entre dos diferentes medios porosos.

Balance de cantidad de movimiento

Para la mayoría de las aplicaciones, las fuerzas externas aplicadas a un material poroso, ya sean fuerzas de cuerpo o de superficie, son las mismas tanto en el esqueleto como en el fluido. Las fuerzas de cuerpo infinitesimales $d\mathbf{B}$ que actúan sobre un volumen elemental dV_t , se definen como

$$d\mathbf{B} = \rho \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) dV_t$$

donde ρ es la densidad equivalente para el material poroso (compuesto de una matriz sólida y un fluido en sus poros), esto para un tiempo t .

$$\rho = \rho_s(1-n) + \rho_f n$$

Se asume que las fuerzas de cuerpo son únicamente función del vector de posición y del tiempo, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$.

Se considera que las fuerzas de superficie f son función de la posición, del tiempo y del vector normal a la superficie sobre la que éstas actúan, a partir de lo anterior es posible

definir las fuerzas infinitesimales de superficie df , donde f tiene unidades de esfuerzo y es una representación del vector de esfuerzos, entonces

$$df = f(x, t, n)dA$$

Ahora es posible plantear las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento para un material poroso

$$\frac{D}{Dt} \int \rho_s (1-n) v_s dV_t + \frac{D}{Dt} \int \rho_f n v_f dV_t = \int \rho B(x, t) dV_t + \int f(x, t, n) dA$$

donde $\rho_s (1-n) v_s dV_t$ y $\rho_f n v_f dV_t$ representan la cantidad de movimiento de las partículas de la matriz y del fluido respectivamente, ambos contenidos en un volumen elemental dV_t .

Considerando el teorema de transporte y de la divergencia, así como los resultados obtenidos en el capítulo 4, se tiene

$$\nabla \cdot T + \rho_s (1-n)(B - a_s) + \rho_f n(B - a_f) = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho_s (1-n)(B_i - a_{is}) + \rho_f n(B_i - a_{if}) = 0$$

donde a_s y a_f son las aceleraciones de la matriz y el fluido respectivamente, esto es

$$\frac{Dv_s}{Dt} = a_s \quad ; \quad \frac{Dv_f}{Dt} = a_f$$

En un material poroso las fuerzas de superficie se dividen en la suma de las fuerzas actuantes sobre la matriz f_s y las fuerzas actuantes sobre el fluido f_f , $\Rightarrow f = f_s + f_f$

A partir de lo antes expuesto es posible definir el estado de esfuerzos en el medio poroso

$$\sigma_{ij} = (1-n)\sigma_{ijs} + n\sigma_{ijf}$$

Energía cinética

Sean EC_s y EC_f la energía cinética asociada al esqueleto y al fluido, contenidos en un volumen V_t , respectivamente:

$$EC_s = \frac{1}{2} \int \rho_s (1-n) \mathbf{v}_s^2 dV_t$$

$$EC_f = \frac{1}{2} \int \rho_f n \mathbf{v}_f^2 dV_t$$

Se puede establecer que la rapidez de trabajo realizado por las fuerzas externas al material cuyo volumen es V_t , se consume en un cambio de forma y dimensiones y en una variación de la EC asociada.

$$\dot{W}(\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_f) = \dot{W}_{def}(\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_f) + \frac{d(EC)_f}{dt} + \frac{d(EC)_s}{dt}$$

donde \dot{W} es la rapidez de trabajo total producido por las fuerzas externas y \dot{W}_{def} es la rapidez de trabajo de deformación.

Conservación de energía y balance de entropía

La Primera Ley de la Termodinámica se puede representar con la siguiente ecuación:

$$\frac{DU}{Dt} = \frac{DW}{Dt} + \frac{DQ}{Dt}$$

donde U es la energía interna, esto es $U = \int u \rho dV$; $u = C_v \theta$. Por otra parte, W representa el trabajo mecánico y Q es la energía en tránsito (calor), ésta como ya se mencionó en el capítulo 5, se refiere al calor por conducción más el calor generado al interior del MC,

$\dot{Q} = -\int q \cdot n dA + \frac{D}{Dt} \int h \rho dV$; donde q representa el flujo de calor por conducción a través de las fronteras del MC y h es el calor generado al interior del MC.

La Primera Ley de la Termodinámica se puede aplicar a un material poroso cuyo volumen es V_t :

$$\frac{D}{Dt} \int \rho_s (1-n) \left(u_s + \frac{1}{2} \mathbf{v}_s^2 \right) dV_t + \frac{D}{Dt} \int \rho_f n \left(u_f + \frac{1}{2} \mathbf{v}_f^2 \right) dV_t = \dot{W}(\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_f) + \dot{Q}$$

En la ecuación anterior u_s representa la energía interna por unidad de masa de la matriz, u_f la energía interna por unidad de fluido, y \dot{Q} , la rapidez de intercambio de energía en forma de calor. Considerando el desarrollo realizado en el capítulo 5, la ecuación se puede presentar como

$$\frac{D}{Dt} \int \rho_s (1-n) u_s dV_t + \frac{D}{Dt} \int \rho_f n u_f dV_t = \dot{W}(\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_f) - \int (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) dA + \int \rho \frac{Dq_s}{Dt} dV_t$$

En la Segunda Ley de la Termodinámica se plantea que existe una función creciente η llamada entropía específica (entropía por unidad de masa). Por consecuencia, la desigualdad entrópica para un medio poroso se expresa

$$\frac{D}{Dt} \int \rho_s (1-n) \eta_s dV_t + \frac{D}{Dt} \int \rho_f n \eta_f dV_t \geq \int -\frac{\mathbf{q}_c \cdot \mathbf{n}}{\theta} dA + \int \rho \frac{D \left(\frac{q_s}{\theta} \right)}{Dt} dV$$

El flujo de calor se puede expresar como $\mathbf{q} = -k \nabla_x \theta$, lo cual es una representación de la Ley de Fourier, donde k es la conductividad térmica del material poroso y η_s, η_f representan la entropía por unidad de masa de la matriz y del fluido respectivamente.

La variación de entropía, excluyendo transformaciones irreversibles, durante un proceso cuasiestático puede ser expresada como

$$dS = \frac{dQ}{\theta}$$

donde θ es la temperatura absoluta.

9.3 COMPORTAMIENTO POROELÁSTICO

De igual forma que un material viscoelástico (modelo de Kelvin) muestra una dependencia de la deformación con el tiempo, un material poroelástico tendrá un comportamiento $\varepsilon = \varepsilon(t, f)$. Este tipo de comportamiento se presenta en tejidos vivos, como por ejemplo el cartilaginoso. En sí, los modelos poroelásticos describen la interacción entre el movimiento del fluido y la interacción en el medio poroso. Por ejemplo, si se bombea un fluido de manera significativa, se reducirá evidentemente la presión del fluido en los poros y se incrementará la carga en el esqueleto.

La ecuación constitutiva de un material poroelástico es:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} + M_{ij}\alpha^{-1}p$$

donde el primer término representa el efecto de la matriz (isotrópica o anisotrópica) y el segundo, el efecto del fluido que se encuentra entre los poros con una presión p . A su vez, la presión se puede definir como

$$p = M_{ij}\varepsilon_{ij} + \alpha \frac{\partial u_k^r}{\partial x_k}$$

donde el término u^r representa el desplazamiento relativo entre la matriz y el fluido y α es un término relativo a la viscosidad. Ahora bien, la ley de Darcy se expresa como

$$K_{ij} \frac{\partial p}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i^r}{\partial t}$$

Por consecuencia, considerando que el sólido de la matriz es elástico isotrópico, la ecuación constitutiva queda

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} + \beta \delta_{ij} p.$$

La disipación de energía que se presenta en el esqueleto del sólido poroso es nula, ya que se le considera un medio elástico

$$\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + p d\phi - \eta_s d\theta - dh_s = 0$$

Para la energía libre de Gibbs:

$$\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} - \phi dp - \eta_s d\theta - dg_s = 0$$

Separando la parte desviadora S_{ij} e hidrostática σ_H del tensor de esfuerzos, así como las componentes de dilatación ε_{kk} y desviadora e_{ij} del tensor de deformaciones se tiene

$$\sigma_H d\varepsilon_{kk} + s_{ij} de_{ij} - \phi dp - \eta_s dT - dg_s = 0$$

Con respecto a la termoelasticidad, la termoporoelasticidad tiene un número mayor de variables de estado, éstas lógicamente ligadas con la porosidad del medio $b_{ij} = -\frac{\partial^2 g_s}{\partial \varepsilon_{ij} \partial p}$, el cual es un tensor simétrico que relaciona de manera lineal el cambio en la porosidad con la variación de deformación, cuando la presión y la temperatura se mantienen constantes.

- $\frac{1}{N} = \frac{\partial^2 g_s}{\partial p^2}$ Relaciona la variación en la presión con la variación en la porosidad cuando la deformación y la temperatura se mantienen constantes.
- $3\alpha_\phi = \frac{\partial^2 g_s}{\partial p \partial \theta}$ Es el coeficiente de dilatación térmica en función de la porosidad.

Relaciona la energía térmica por unidad de presión que el material intercambia con sus alrededores cuando la deformación y la temperatura son constantes.

A partir de la definición de las variables de estado, se plantean las siguientes ecuaciones:

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} - b_{ij}dp - C_{ijkl}A_{kl}d\theta$$

$$d\phi = b_{ij}d\varepsilon_{ij} + \frac{dp}{N} - 3\alpha_\phi d\theta$$

$$dS_s = C_{ijkl}\alpha_{kl}d\varepsilon_{ij} - 3\alpha_\phi dp + C \frac{d\theta}{\theta}$$

Donde C_{ijkl} es el tensor de constantes elásticas de la matriz, A_{kl} es el tensor de dilatación térmica y C es el calor específico del material.

Las ecuaciones constitutivas del esqueleto son independientes de las que definen el fluido saturado. Sin embargo, las variables de estado para el fluido se pueden obtener de forma similar a lo hecho para el esqueleto partiendo de las siguientes relaciones:

$$g_f = g_f(p, T): \quad \frac{1}{\rho_f} = \frac{\partial g_f}{\partial p}; \quad \eta_f = \frac{\partial g_f}{\partial \theta}$$

donde g_f es el potencial de Gibbs (entalpía libre específica del fluido).

9.4 CASOS DE ESTUDIO PARA MATERIALES POROSOS

Inyección de un fluido

La inyección de un líquido y su progresiva difusión es un problema de considerable interés en geotecnia y en la industria petrolera para la recuperación de hidrocarburos. Esto motiva a considerar una inyección instantánea en un tiempo $t=0$ de un fluido de masa m_f y volumen $V_f = m_f / \rho_0$ en el origen del sistema coordenado. Debido a la simetría esférica del sistema se cumple que $V_f = V_f(r, t)$, entonces la ecuación de difusión queda:

$$\frac{\partial(rv_f)}{\partial t} = c_f \frac{\partial^2(rv_f)}{\partial r^2}$$

cuya solución debe satisfacer la condición de inyección instantánea

$$\int_0^r v_f(r, t) 4\pi r^2 dr \quad | \quad t \rightarrow 0 = V_f$$

donde

$$v_f = f(r, t, V_f, c_f)$$

Dado que v_f es adimensional, los argumentos (r, t, V_f, c_f) se combinan para formar cantidades adimensionales.

$$v_f = \frac{V_f}{(c_f t)^{3/2}} v(u)$$

$$u = \frac{r}{\sqrt{c_f t}}$$

Con lo que la ecuación diferencial queda de la forma:

$$\frac{d}{du} \left(u^2 \frac{dv}{du} + \frac{1}{2} u^3 v \right) = 0$$

Definiendo $v \rightarrow 0$ cuando $u \rightarrow 0$, una primera integración describe:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{2} u$$

Integrando la ecuación anterior y tomando en cuenta la condición de inyección instantánea se tiene:

$$v_f = \frac{V_f}{(4\pi c_f t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4c_f t}\right)$$

En este problema, el campo de desplazamientos es radial e irrotacional, por lo tanto, p puede ser expresado de la forma:

$$p = M \frac{K + \frac{4}{3}\mu}{K_u + \frac{4}{3}\mu} \frac{V_f}{8(\pi c_f t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4c_f t}\right)$$

Sedimentación no lineal

Con el efecto de la gravedad, las partículas sólidas de una suspensión se precipitan y progresivamente se acumulan sobre una base impermeable, formando capa a capa un material poroso. Bajo el peso de capas consecutivas el esqueleto formado se consolida, dando como resultado que la porosidad disminuya con la profundidad. A un tiempo medio el esqueleto se asienta y la cantidad de partículas que se precipitan disminuye. Finalmente, la zona de precipitación desaparece y se presenta el asentamiento debido al peso del propio esqueleto.

El análisis es no lineal debido a que

- a) Los desplazamientos y las deformaciones son finitas.
- b) La relación esfuerzo-deformación es no lineal.
- c) La permeabilidad depende de la porosidad instantánea.
- d) Existe una discontinuidad móvil formada entre las partículas que se siguen precipitando y las capas ya consolidadas.

Considere una capa de material poroso inicial de espesor h_0 sobre una base rígida impermeable, la cual es el origen de la coordenada vertical x_3 . Para el equilibrio en la dirección vertical se requiere:

$$\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} - \left((1-n)\rho_s + n\rho_f \right) g = 0$$

La ley de Darcy toma la forma:

$$\frac{w_3}{\rho_f} = k_0 \delta(n) \left(-\frac{\partial p}{\partial x_3} - \rho_f g \right)$$

donde k_0 es la permeabilidad de referencia y $\delta(n)$ representa la dependencia de la permeabilidad en la porosidad euleriana. Se asume además que las partículas del esqueleto tienen cambios de volumen despreciables

$$\sigma'_{33} = \sigma_{33} + p = E\varpi(n)$$

donde E es el módulo endométrico de referencia. Combinando las tres ecuaciones anteriores, se obtiene

$$\frac{w_3}{\rho_f} = k_0 \delta(n) \left(E \frac{\partial \varpi}{\partial x_3}(n) + (1-n)(\rho_s - \rho_f)g \right)$$

Una partícula sólida que está localizada en X_3 a un tiempo inicial $t = 0$, es localizada en $x_3 = x(X, t)$ a un determinado instante

$$J = \frac{\partial x_3}{\partial X_3} = 1 + \phi - \phi_0 = \frac{1-n_0}{1-n}$$

Dado que la superficie del esqueleto normal al flujo no sufre ningún cambio $w_{x_3} = M_{X_3}$, y combinando las ecuaciones anteriores

$$\frac{M_{X_3}}{\rho_f} = k_0 \frac{1-n}{1-n_0} \delta(n) \left(E \frac{\partial \varpi}{\partial x_3}(n) + (1-n)(\rho_s - \rho_f)g \right)$$

Se asume al fluido como incompresible

$$\rho_f \frac{\partial \phi}{\partial t} = - \frac{\partial M_{X_3}}{\partial X_3}$$

Además, debido a que ambos son considerados incompresibles implica que el volumen de las partículas que fluyen hacia abajo es opuesto al volumen de fluido que sube, esto es,

$$V_{x_3}^s = - \frac{M_{X_3}}{\rho_f}$$

Lo cual se expresa

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{1-n} \right) + \frac{\partial}{\partial X_3} \left[(1-n) \delta(n) \left(\frac{\partial \varpi}{\partial X_3}(n) + \alpha \right) \right] = 0$$

Durante el proceso las partículas superiores del esqueleto de la columna de sedimentación permanecen sujetas a la presión del líquido, entonces, el esfuerzo efectivo es $\sigma'_{33} = 0$ en la parte superior de la columna. Asumiendo además una porosidad uniforme inicial, se añaden una condición de frontera y una inicial

$$n(t=0) = n_0 ; \quad \varpi(X_3=1) = 0$$

Las cuales son completadas por la condición de impermeabilidad de la base

$$\left(\frac{\partial \varpi}{\partial X_3}(n) + \alpha \right) = 0 ; \quad \text{cuando} \quad X_3 = 0$$

Para porosidades mayores que un umbral n_{cr} , el esqueleto está formado por partículas aisladas o conjuntos de partículas aisladas sujetas a la presión del fluido; entonces, el esfuerzo parcial intrínseco relacionado a ambos resulta en la misma presión hidrostática

$$n \geq n_{cr} : \sigma^s = \sigma^f = -pI$$

Para porosidades mayores al umbral señalado, el esqueleto es formado por partículas unidas capaces de soportarse a sí mismas

$$\varpi(n \geq n_{cr}) = 0 ; \quad \varpi(n < n_{cr}) > 0$$

Nótese que n_0 no puede ser menor que n_{cr} , ya que de otra manera la condición en $X_3 = 0$ no podría ser considerada. De hecho se espera que n_{cr} sea la porosidad de la superficie al final de la sedimentación. Entonces, se tiene,

$$1 \geq X_3 > \zeta(t) : V_{X_3}^s = -\frac{M_{X_3}}{\rho_f} = -k_0 \delta(n_0)(1-n_0)(\rho_s - \rho_f)g$$

Para materiales permeables tales como piedras y arena, la curva de presión capilar es determinada experimentalmente. Si bien ésta se puede medir a través del incremento gradual de la presión, para que el fluido no húmedo desaloje al húmedo, también se puede

obtener de una forma sencilla, la cual consiste en observar el perfil obtenido de colocar un material seco sobre un material húmedo y observar como el efecto capilar actúa en contra de la gravedad.

En el caso de materiales con permeabilidad reducida, tales como el cemento y arcillas, la presión capilar es difícil de obtener por los métodos anteriores, por lo que es determinado por experimentos de absorción isotérmica.

Histéresis capilar de materiales porosos

Cuando una muestra de un material poroso es sometido a un ciclo de drenado-embebimiento, una curva de histéresis se observa en el plano saturación-presión de capilaridad, es decir, cuando se parte de una saturación completa y se incrementa progresivamente la presión de capilaridad, el grado de saturación decae progresivamente, cuando al final del drenado se disminuye la presión capilar, la saturación se recupera a valores mayores que para cuando se realizaba el drenado.

Drenado de materiales porosos de baja permeabilidad

El drenado de materiales porosos de baja permeabilidad se realiza como una primera aproximación, considerando que la temperatura permanece constante. La permeabilidad y la curva de capilaridad son propiedades macroscópicas, las cuales resultan de la geometría de la red porosa.

Para obtener la permeabilidad relativa a un material poroso con permeabilidad reducida, se requiere de la solución de las ecuaciones diferenciales no lineales que lo rigen, ya que la determinación experimental no resulta del todo apropiada.

9.5 POROPLASTICIDAD

La poroplasticidad es la capacidad que un material poroso tiene para deformarse permanentemente, así como para tener cambios permanentes en la porosidad, esto último como consecuencia de un cambio permanente en el contenido de masa de fluido.

Estas técnicas se desarrollaron a fines del siglo XIX para el análisis del comportamiento de presas en las que se presentó infiltración de líquido a través de los poros y cuarteaduras formados en la cortina. Estos modelos permiten la representación de una estructura multifásica formada por la roca y el concreto; incorporan, también, el efecto de la presión en los poros formados en la estructura y consideran las condiciones de fractura del material bajo carga. Este tipo de métodos son particularmente apropiados para el análisis del comportamiento de cortinas de gravedad en presas y arcos, así como de túneles profundos. De acuerdo con los conceptos desarrollados, el incremento en el espacio de poros interconectados se considera irreversible. Las principales direcciones de la deformación plástica corresponden con las de agrietamiento. El criterio de fractura de un material está en función de su plasticidad, para lo cual se considera porosidad y esfuerzos. Asimismo, se pueden considerar variaciones anisotrópicas de la permeabilidad del material.

Debido al carácter permanente de las deformaciones y de los cambios en la porosidad, la evolución del comportamiento poroplástico es irreversible y a diferencia del comportamiento poroelástico, las deformaciones y la porosidad lagrangiana no bastan para caracterizar la energía en el esqueleto; por ello se deben introducir otras variables para describir el carácter irreversible de la plasticidad. Estas variables internas son la deformación plástica ε_{ij}^p y la porosidad plástica ϕ^p .

Ya que el comportamiento viscoso del material no se toma en cuenta para el estudio de la poroplasticidad, se considera que este comportamiento es independiente del tiempo.

La evolución del comportamiento poroplástico puede ser vista como una sucesión de estados termodinámicamente en equilibrio y que dependen sólo del historial de cargas que se le han aplicado al material.

Considérese un material poroso sujeto a un esfuerzo σ_{ij} y a una presión p . A partir del estado descrito se tiene una variación incremental del esfuerzo y de la presión $d\sigma_{ij}$ y dp , respectivamente, lo cual a su vez produce variaciones incrementales en la deformación $d\varepsilon_{ij}$ y en la porosidad $d\phi$. El proceso de descarga definido a partir de los incrementos negativos $d\sigma_{ij}$ y dp permite tener registro de la deformación elástica $-d\varepsilon_{ij}^e$ y porosidad elástica $-d\phi^e$.

Los incrementos en la deformación y porosidad plástica, es decir $d\varepsilon_{ij}^p$ y $d\phi^p$, se definen a través de

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p$$

$$d\phi = d\phi^e + d\phi^p$$

La deformación plástica ε_{ij} y la porosidad plástica ϕ^p se definen como la integral de los incrementos a través del patrón de cargas aplicadas desde un valor inicial de esfuerzo y presión, en consecuencia,

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p$$

$$\phi - \phi_0 = \phi^e + \phi^p$$

Eventualmente, ϕ^p se define como el cambio irreversible en el volumen de porosidad por unidad de volumen inicial.

Considerando ε^p como el cambio de volumen provocado por la deformación plástica, el cual se debe al cambio plástico en la porosidad y al cambio de volumen irreversible en la matriz ε_s^p , se tiene:

$$\varepsilon^p = (1 - \phi_0)\varepsilon_s^p + \phi^p$$

Ecuaciones de estado para el comportamiento poroplástico de la matriz

Del análisis termodinámico presentado previamente, se tiene

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi_s}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad p = \frac{\partial \Psi_s}{\partial \phi}$$

Considerando que la energía libre es sólo función de la deformación y porosidad reversibles, entonces $\Psi_s = \Psi_s(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p, \phi - \phi^p)$. Se llega a las siguientes ecuaciones de estado para la matriz del material poroso:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p) - b_{ij} p$$

$$\phi - \phi^p - \phi_0 = b_{ij}(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p) + \frac{p}{N}$$

Ecuaciones de estado para el comportamiento poroplástico del estado poroso

Con base en la última ecuación y al combinarla con las ecuaciones respectivas para termoporelasticidad, es factible eliminar la variación de la porosidad para dar paso a la variación en la masa del fluido dm_f , donde da como resultado:

$$\frac{dm_f}{\rho_f} = d\phi^p + b(d\varepsilon - d\varepsilon^p + \frac{dp}{M})$$

donde $\frac{1}{M} = \frac{1}{N} + \frac{\phi}{p}$, asumiendo que se tienen pequeñas perturbaciones. Al integrar se llega a

$$p = M(-b(\varepsilon - \varepsilon^p) + v_f - \phi^p)$$

donde v_f es el cambio en el volumen del fluido por unidad de volumen inicial. Para un material poroplástico, v_f se puede dividir en una parte correspondiente al comportamiento elástico y una correspondiente al comportamiento plástico.

$$v_f = \frac{m_f - m_f^0}{\rho_f^0} = v_f^e + v_f^p$$

y

$$v_f^e = \phi^e + \frac{\rho_f - \rho_f^0}{\rho_f^0} \quad ; \quad v_f^p = \phi^p$$

9.6 POROVISCOELASTICIDAD

Mientras los efectos viscosos no sean considerados, el comportamiento del esqueleto no depende de la velocidad de las cargas y la evolución del sistema puede ser considerada como una secuencia de estados de equilibrio. Cuando los fenómenos viscosos son considerados, la respuesta es parcialmente retrasada.

Al realizar una serie de sollicitaciones a un material poroso, sólo las partes elásticas tanto de la deformación ϵ_{ij}^e como de la red porosa ϕ^e , se recuperan inmediatamente. Las partes viscoelásticas ϵ_{ij}^v y ϕ^v se definen como:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^v \quad ; \quad \phi - \phi_0 = \phi^e + \phi^v$$

La dilatación volumétrica viscosa

$$\epsilon^v = (1 - \phi_0) \epsilon_s^v + \phi^v$$

En el caso de suelo y rocas, las evoluciones viscoelásticas son causadas por el deslizamiento relativo entre los granos sólidos que conforman la matriz; entonces, el cambio de volumen es despreciable en ausencia de poros ocluidos, por tanto:

$$\epsilon_s^v = 0 \quad ; \quad \epsilon^v = \phi^v$$

Sin embargo, se considera la inclusión de un parámetro β

$$\epsilon^v = \beta \phi^v$$

Cuando $\beta=1$ se refiere a una matriz viscosa incompresible, pudiendo β tomar los valores $\phi_0 \leq \beta \leq 1$.

Consolidación primaria y secundaria de suelos

La consolidación de un suelo por medio de un proceso de reducción de volumen de los componentes finos cohesivos, tales como arcillas y arenas sedimentarias, provocada por las cargas aplicadas, se produce en periodos grandes de tiempo. Estos fenómenos dan lugar a hundimientos y hundimientos diferenciales, los cuales pueden producir la falla de las estructuras.

La consolidación de una capa de arcilla es el resultado de dos procesos: la primera etapa se produce por efecto de la transferencia progresiva de la carga del fluido saturado a la matriz sólida, mientras que la segunda se produce como consecuencia de pequeños desplazamientos de las capas que forman la matriz de arcilla. La consolidación es un fenómeno en donde interactúa el flujo del fluido y la deformación de la matriz sólida (medio continuo poroso) cuando se considera que ésta se encuentra totalmente saturada.

En el caso de suelos será necesario determinar la velocidad del proceso para así evaluar sus efectos en el tiempo.