

CAPÍTULO 7

FLUIDOS VISCOSOS NEWTONIANOS

7.1 CONCEPTOS GENERALES

En los sólidos, tales como los metales, se ha observado que su deformación es proporcional a las sollicitaciones aplicadas; sin embargo, medios como el agua y el aire presentan comportamientos muy diferentes, ya que éstos no son capaces de soportar ni siquiera los esfuerzos de corte, producto de su propio peso. Por ejemplo, al aplicarse una sollicitación a corte entre dos placas (figura 7.1), el fluido continuará su deformación a corte mientras la sollicitación permanezca. Queda claro, entonces, que cualquier fluido será incapaz de soportar sollicitaciones de corte sin deformarse de manera permanente. La velocidad de desplazamiento será proporcional a la sollicitación aplicada y al eliminarse la carga, la deformación permanecerá.

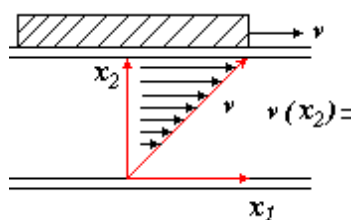


FIGURA 7.1 SOLICITACIÓN A CORTE ENTRE DOS PLACAS ENTRE LAS QUE SE ENCUENTRA UN FLUIDO

En presencia de la gravedad un fluido como el agua, tomará la forma del recipiente que la contiene, resultando imposible que mantenga su forma al retirar las paredes del recipiente. Lo anterior significa que no soporta esfuerzos cortantes generados por su propio peso, siendo entonces que en presencia de estos cortantes el fluido se deformará de manera permanente y continua, limitada esta deformación solo por la tensión superficial existente

entre el fluido y la superficie sobre la cual se extiende. Con base en las condiciones de movimiento del fluido, se define a éste como un medio idealizado que durante su movimiento como cuerpo rígido (considerando el propio estado de reposo) es incapaz de soportar cualquier tipo de solicitaciones a corte. Asimismo, se tiene que para algunos casos la densidad del fluido es aproximadamente constante. Esta situación aplica, por ejemplo, para el agua, en la cual en condiciones de carga muy variadas se considera que su densidad no se altera (por lo tanto se describe como incompresible), por otra parte, el aire, como todos los gases, se analiza sobre la premisa de que al variar la presión su densidad también se ve afectada. Sin embargo, la descripción de compresibilidad o invariabilidad de la densidad en un fluido depende de las condiciones del estudio; por ejemplo, el aire a bajo número de Mach se le analiza como si se tratara de un fluido incompresible; por lo contrario, cuando se estudia la propagación de ondas elásticas en el agua se describe a ésta como un fluido compresible.

En los fluidos se observa que la resistencia al flujo depende de la velocidad y, por consecuencia, de su velocidad de deformación, esto de manera análoga a lo que sucede en los sólidos con relación a su deformación. Análisis más detallados revelan que existen fluidos en los que la relación de las cargas aplicadas con la velocidad de deformación es lineal; tal como pasa en los sólidos de Hooke con la deformación. Por otra parte, fluidos como la miel o la propia sangre no presentan relaciones lineales. Es entonces que se pueden clasificar a los fluidos como:

- 1. Fluidos newtonianos.** Son aquellos en los que la relación esfuerzo de corte-velocidad de deformación es lineal $\tau = c\dot{\epsilon}$. A esta relación de proporcionalidad se le denomina como viscosidad, razón por la cual este tipo de fluidos se describen como *linealmente viscosos*.
- 2. Fluidos no newtonianos.** En este caso la relación es no lineal, presentándose fenómenos de almacenamiento de energía a la vez de los disipativos característicos de los fluidos, a este tipo de medios se les denomina como *fluidos viscosos no lineales* ($\tau = c\dot{\gamma}^n; n \neq 1$)

Desde el punto de vista de la variación de su densidad se describen como:

a) Fluidos compresibles

$$\frac{D\rho}{Dt} \neq 0$$

b) Fluidos incompresibles. Se puede considerar idealmente que la densidad del fluido bajo estudio permanece constante

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad \therefore \quad \nabla \cdot v = 0$$

$$\Rightarrow \quad \nabla \cdot u = 0$$

Como ya ha sido mencionado un fluido es un medio idealizado, el cual en cualquier punto, durante movimiento de cuerpo rígido o en reposo, no es capaz de soportar esfuerzos de corte, por lo que con cualquier base que se analice el sistema, el estado de esfuerzos siempre se presentará como

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Esto debido a que el fluido en reposo o en movimiento de cuerpo rígido no presenta ningún esfuerzo de corte; por otro lado, partiendo de la misma lógica se tiene que para un elemento diferencial cualquiera en el seno del fluido al cortar éste con cualquier plano, solamente se presentarán esfuerzos normales, lo que se expresa entonces como:

$$Tn = \lambda n$$

Para cualquier n , el esfuerzo en cualquier punto y para cualquier plano es normal al plano. Considerando que el punto (elemento diferencial de fluido) es cortado por dos planos cualesquiera cuyas normales son n_1, n_2 , entonces se cumplirá que

$$Tn_1 = \lambda_1 n_1$$

$$Tn_2 = \lambda_2 n_2$$

$$\Rightarrow n_1 T n_1 = \lambda_1 n_1 \cdot n_2$$

Por otra parte,

$$n_1 T n_2 = \lambda_2 n_1 \cdot n_2$$

dado que $T = T^T$

$$\Rightarrow n_1 T n_2 - n_2 T n_1 = 0 = (\lambda_2 - \lambda_1) n_1 \cdot n_2$$

Existen entonces dos posibilidades:

a) $n_1 \cdot n_2 = 0$

b) $\lambda_2 - \lambda_1 = 0$

Ya que los planos no necesariamente son perpendiculares $\Rightarrow n_1 \cdot n_2 \neq 0$

En otras palabras, en todos los planos que pasan a través del punto no sólo no existen esfuerzos de corte, además todos los esfuerzos normales son iguales, a estos se les denomina como esfuerzos hidrostáticos y representan una componente esférica. Como los esfuerzos en el seno del fluido deben ser compresivos, entonces

$$\sigma_H = -p$$

p = presión atmosférica

$$T = -pI$$

En notación índice se expresa

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (7.1)$$

donde el escalar p representa la magnitud de los esfuerzos normales compresivos y por consecuencia se define como presión hidrostática.

7.2 FLUIDOS COMPRESIBLES E INCOMPRESIBLES

Como ya fue explicado, en diversos fluidos, como el agua, al variar la presión hidrostática su densidad se modifica en magnitudes tan pequeñas que se definen a éstos como incompresibles, por lo cual se cumple que

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

razón por la que la ecuación de conservación de la masa

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

se reduce a

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

O en notación índice

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

Un fluido, aun cuando se considere como incompresible, no necesariamente deberá presentar uniformidad espacial en la densidad, de ser así se considerará como homogéneo. Resulta evidente que la suposición de incompresibilidad simplificará el análisis y por consecuencia la solución de los problemas, simplemente es necesario en cada caso evaluar la conveniencia de considerar al fluido como compresible o incompresible, de tal forma que se obtengan soluciones simples y con un alto grado de aproximación.

7.3 ECUACIONES DE LA HIDROSTÁTICA

Un fluido, como todo medio continuo, deberá cumplir con las ecuaciones generales, entre éstas la ecuación de Cauchy, la cual considerando condiciones de equilibrio queda como

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho B_i = 0$$

Por otra parte, se ha definido que el estado de esfuerzos para un fluido en reposo se representa por

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$$

por lo que sustituyendo ésta en la Ecuación de Cauchy, se tiene

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} + \rho B_i &= 0 \\ \therefore -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho B_i &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x_i} &= \rho B_i \end{aligned} \tag{7.2}$$

Lo que en notación general se expresa como

$$\Rightarrow \nabla p = \rho B$$

EJERCICIO 7.1 Determine la variación de la presión de un objeto que se encuentra sumergido en un líquido de densidad ρ , si se conoce que la presión sobre la superficie del fluido se describe como p_0 .

Con base en la ecuación 7.2, se puede determinar la variación de la presión en función de la profundidad a la que se encuentra inmerso el medio al interior del fluido. Considérese que la única fuerza de cuerpo es producto del campo gravitacional y que el eje x_3 corresponde con la vertical, mientras que el plano horizontal está dado por x_1x_2 ; la aceleración producto de las fuerzas de cuerpo será

$$B_i = 0\hat{e}_1 + 0\hat{e}_2 + g\hat{e}_3.$$

El fluido como cualquier otro medio deberá cumplir con las ecuaciones de Cauchy en equilibrio:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho B_i = 0$$

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho B_i$$

$$\nabla p = \rho B$$

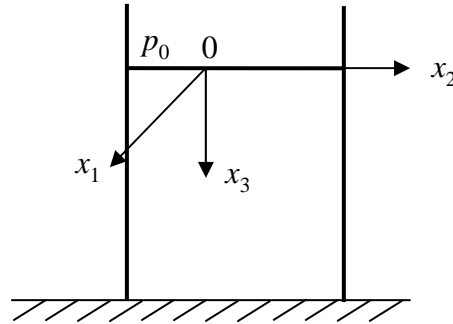
Considerando la aceleración gravitatoria

$$B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = g$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = \rho g$$



Por lo tanto, se tiene que $p(x_1, x_2) = \text{cte}$ para cualquier x_1, x_2 ; por otra parte:

$$p = \rho g x_3 + c$$

dado que en $x_3 = 0 \rightarrow p = p_0$, se tiene que

$$p = \rho g h + p_0$$

EJERCICIO 7.2 Cuando se presentan diferencias de altitud menores, se puede considerar que la atmósfera se encuentra a temperatura constante. Con base en lo anterior, determine las ecuaciones que describan la variación de presión y densidad de la atmósfera.

Con base en la ecuación de la hidrostática $-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho B_i = 0$, se tiene que, para el eje x_1

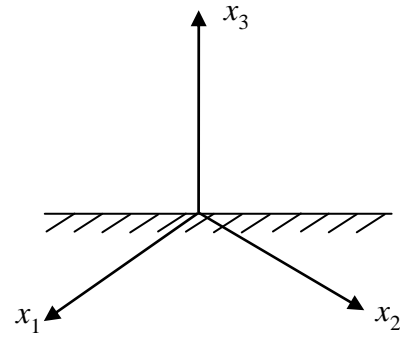
$$\left(\frac{\partial p}{\partial x_1} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \text{cte}$$

Para el eje x_2

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x_2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \text{cte}$$

Para el eje x_3

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x_3}\right) = -\rho g$$



Considerando la ecuación de estado para un gas ideal, y además que la temperatura es constante

$$pV = mR\theta$$

$$p = \rho R\theta, \text{ con } \theta = \text{cte}$$

$$\rho = \frac{p}{R\theta}$$

Sustituyendo resulta entonces que

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x_3}\right) = \left(-\frac{p}{R\theta}\right)g$$

Resolviendo la ecuación diferencial se tiene

$$\left(\frac{dp}{p}\right) = \left(-\frac{gdx_3}{R\theta}\right)$$

$$\text{Ln } p = -\frac{g}{R\theta}x_3 + c$$

Para $x_3 = 0 \Rightarrow p = p_0$ (presión de referencia)

$$\text{Ln } p_0 = \frac{-g}{R\theta}(0) + c$$

$$\Rightarrow \quad p = p_0 \exp\left(\frac{-g}{R\theta}\right)x_3$$

De forma análoga se puede proceder para determinar la razón de variación de la densidad con la altura

$$p = \rho R\theta$$

$$\left(\frac{\partial \rho R\theta}{\partial x_3} \right) = -\rho g$$

$$\left(\frac{d\rho}{\rho} \right) = -\frac{g}{R\theta} dx_3$$

$$\text{Ln } \rho = -\frac{g}{R\theta} x_3 + c$$

Para $x_3 = 0 \Rightarrow \rho = \rho_0$ (densidad inicial o de referencia)

$$\Rightarrow \rho = \rho_0 \exp\left(\frac{-g}{R\theta} x_3\right)$$

7.4 MOVIMIENTO DE CUERPO RÍGIDO DEL FLUIDO

En los casos anteriores se consideró que el fluido se encontraba en reposo o en condiciones de equilibrio, por lo que se definió que su aceleración era igual a cero, ahora se analizará considerando que se trata de un movimiento de cuerpo rígido, por lo cual $\nabla v = 0$, es decir, las deformaciones y velocidades de deformación son cero, por lo que la ecuación de Cauchy para este caso se expresa como

$$-\frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} + \rho B_i = \rho a_i$$

$$\therefore -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho B_i = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t}$$

$$\Rightarrow -\nabla p + \rho B = \rho a \quad (7.3)$$

EJERCICIO 7.3 Un recipiente con un fluido incompresible en su interior se mueve verticalmente hacia arriba con una aceleración constante a . Determine la presión en un punto que se encuentra a una profundidad H de la superficie. Considere que en la superficie $H = 0$ la presión está dada por p_0 . La densidad se expresa como ρ_0 .

El sistema coordenado se define considerando que la dirección positiva del eje x_3 es hacia abajo, mientras que los ejes x_1, x_2 corresponden al plano horizontal. La aceleración producto de las fuerzas de cuerpo queda (sólo se considera el campo gravitacional).

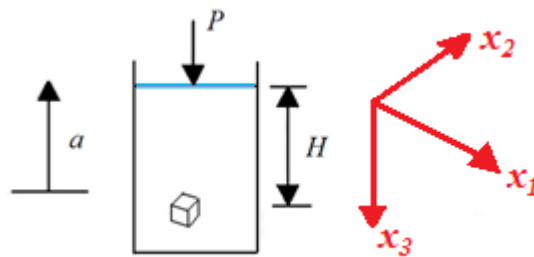


FIGURA 7.2 RECIPIENTE MOVIÉNDOSE EN DIRECCIÓN VERTICAL

$$B_i = 0\hat{e}_1 + 0\hat{e}_2 + 0\hat{e}_3$$

Movimiento de cuerpo rígido

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0$$

Eje x_3

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} + \rho g = -\rho a_3$$

La solución de la ecuación diferencial queda

$$p = \rho(g + a_3)x_3 + p_0$$

EJERCICIO 7.4 Un vehículo arrastra una pipa de sección cilíndrica (figura 7.3), la cual tiene una división central. El tanque tiene una longitud de 15 m por 2 m de diámetro. El fluido dentro del tanque ocupa un 50 % del volumen de éste. Al ponerse la luz del semáforo en verde el vehículo debe acelerar con una magnitud constante (aceleración en dirección horizontal). Considerando movimiento de cuerpo rígido, determine el ángulo de la superficie libre del tanque (θ) con relación a la horizontal; asimismo, desarrolle la ecuación que define la presión para cualquier punto del tanque, tal que $p = p(x_1, x_2)$. Calcule la altura máxima que alcanza el fluido al chocar con la pared vertical si $a = g/4$.

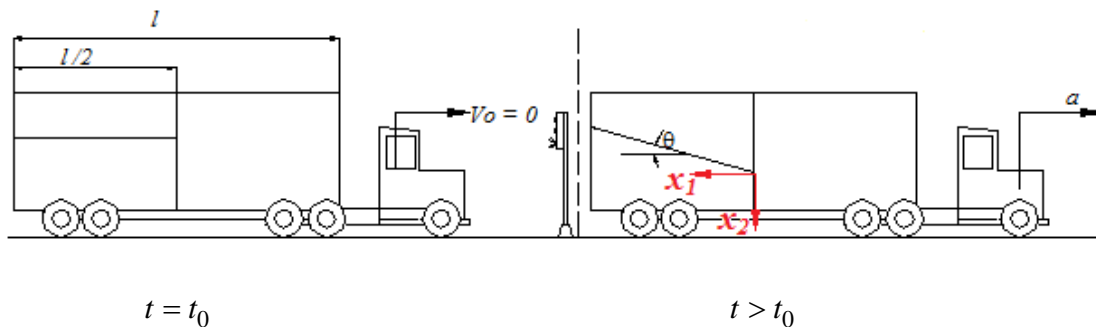
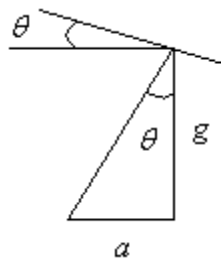


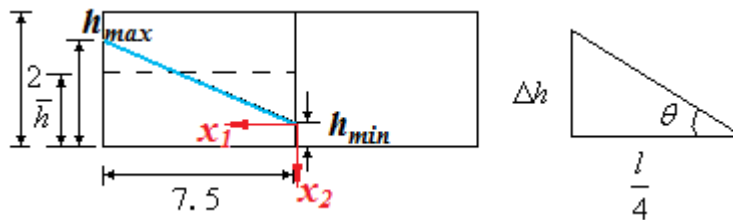
FIGURA 7.3 MOVIMIENTO DEL AGUA AL PRESENTARSE UNA ACELERACIÓN

La superficie del agua es normal a la resultante de la fuerza, si solo existe la aceleración producto del campo gravitacional, la superficie permanecerá horizontal; sin embargo, al acelerar el vehículo el agua, por efecto de su inercia, tiende a desplazarse hacia atrás dando lugar a una superficie inclinada con ángulo θ con respecto a la horizontal. Esta superficie será perpendicular a la componente de la aceleración resultante, por lo que



$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{g}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = 14^\circ$$

A partir de lo anterior y considerando las dimensiones del tanque (ξ, ϕ) , donde ξ representa la longitud de la cámara y ϕ su diámetro, se calcula fácilmente la altura que alcanza el líquido durante la aceleración del vehículo. Además, a partir de la ecuación de movimiento de cuerpo rígido de un fluido se puede determinar la ecuación que defina la presión para cualquier coordenada.



Tomando como referencia la superficie del fluido

$$p(x_1, x_2) = p_0 + \rho g x_2 + \rho g x_1 \tan \theta$$

$$h_{\text{máx}} = \bar{h} + \Delta h = \bar{h} + \frac{\xi}{2} \tan \theta = 1 + \frac{7.5}{2} \tan 14^\circ = 1.9375 \text{ m}$$

$$h_{\text{mín}} = \bar{h} - \Delta h = \bar{h} - \frac{\xi}{2} \tan \theta = 1 - \frac{7.5}{2} \tan 14^\circ = 0.065 \text{ m}$$

$$\Rightarrow p_{\text{máx}} = p_0 + \rho g \left(h_{\text{mín}} + \frac{\xi}{2} \tan \theta \right)$$

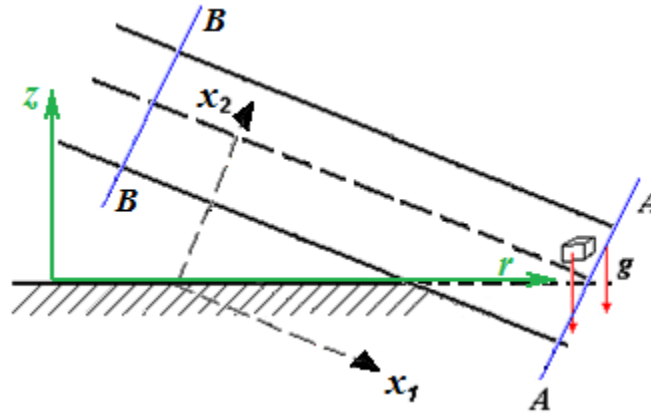
EJERCICIO 7.5 Demuestre que para un flujo unidireccional (figura 7.4) que corre en un plano inclinado con relación a la vertical, la cabeza piezométrica h es constante en cualquier punto dentro del flujo (se considera que el cambio de alturas z es mucho mayor que la dimensión en dirección del eje x_3).

$$h = \frac{p}{\rho g} + z$$

ρ - densidad

g - aceleración gravitacional

h - cabeza piezométrica


FIGURA 7.4 FLUJO UNIAxIAL EN DIRECCIÓN DEL EJE x_1

$$v_1 \neq 0 \quad v_2 = v_3 = 0$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_2} + \rho B_2 = 0 \quad (7.4)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_3} + \rho B_3 = 0$$

Como z apunta hacia arriba (figura 7.4), las fuerzas de cuerpo por unidad de masa se expresan como

$$B = 0\hat{e}_r + 0\hat{e}_\theta - g\hat{e}_z$$

Entonces la proyección del campo gravitacional en dirección del eje x_2 está dada por

$$B_2 = B \cdot \hat{e}_2 = -g(\hat{e}_z \cdot \hat{e}_2)$$

El vector de posición de cualquier elemento diferencial del fluido queda

$$r = (x_1\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2 + x_3\hat{e}_3)$$

Entonces la proyección del vector de posición con respecto del eje vertical es

$$z = \hat{e}_z \cdot \mathbf{r} = ((\hat{e}_z \cdot \hat{e}_1)x_1 + (\hat{e}_z \cdot \hat{e}_2)x_2 + (\hat{e}_z \cdot \hat{e}_3)x_3)$$

Es evidente que

$$(\hat{e}_z \cdot \hat{e}_3) = 0$$

Por otra parte la variación de

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \hat{e}_z \cdot \mathbf{r} = \hat{e}_z \cdot \hat{e}_2$$

Se puede escribir entonces que

$$\therefore B_2 = -g \frac{\partial}{\partial x_2} (\hat{e}_z \cdot \hat{e}_2) = -g \frac{\partial z}{\partial x_2} = -\frac{\partial gz}{\partial x_2}$$

Sustituyendo en la ecuación 7.4

$$\rho \frac{\partial}{\partial x_2} (gz) - \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} (\rho gz + p) = 0$$

Entonces, para todos los puntos de un mismo plano el cual es perpendicular a la dirección de flujo se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) = 0$$

Por lo tanto

$$\left(z + \frac{p}{\rho g} \right) = \text{cte}$$

7.5 FLUIDO NEWTONIANO

Como ya ha sido mencionado, se define como fluido newtoniano al medio continuo que se caracteriza porque la relación de los esfuerzos de corte a la velocidad de deformación es lineal, por consecuencia el estado de esfuerzos se podrá describir como

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij} \quad (7.5)$$

donde el tensor σ'_{ij} depende de la velocidad de deformación y representa la componente viscosa del estado de esfuerzos; en un fluido newtoniano, en cualquier punto asociado al medio continuo, el esfuerzo σ'_{ij} depende en forma lineal de las componentes del tensor de rapidez de deformación (D_{ij})

$$\sigma_{ij} = \sigma(D_{ij})$$

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

No existe ninguna razón experimental por la cual se pueda considerar que las propiedades del fluido se modifican con la posición, así como que éstas dependen de la dirección. De lo antes mencionado, se describe a éste como un fluido homogéneo e isotrópico. Por analogía con un sólido elástico, homogéneo, lineal e isotrópico, se define un fluido viscoso, homogéneo, lineal e isotrópico (fluido newtoniano); por lo tanto

$$\sigma'_{ij} = C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}$$

Realizando las mismas consideraciones que fueron efectuadas para el sólido elástico homogéneo e isotrópico, se tiene que:

El tensor de esfuerzos y el de rapidez de deformación son simétricos

$$\sigma'_{ij} = \sigma'_{ji}; \quad \dot{\epsilon}_{kl} = \dot{\epsilon}_{lk}$$

El tensor de constantes viscosas es simétrico

$$C_{ijkl} = C_{jikl}; C_{ijkl} = C_{ijlk}$$

$$C_{ijkl} = C_{klij}$$

Por otra parte, el tensor de constantes viscosas C_{ijkl} es isotrópico, esto es no se modifica bajo cualquier base, razón por la que el sistema se puede representar en la forma

$$\sigma'_{ij} = \lambda \dot{\varepsilon}_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \dot{\varepsilon}_{ij}$$

lo cual representa que solo existen dos constantes viscosas linealmente independientes:

$$\lambda, \mu = \frac{f-t}{l^2}$$

Como a través de la Segunda ley de Newton se encuentran relacionadas la fuerza, masa, longitud y tiempo, se tiene que

$$\lambda, \mu = \frac{f-t}{l^2} = \frac{m-l}{t^2} \left[\frac{t}{l^2} \right] = \frac{m}{l-t}$$

donde μ representa la razón de proporcionalidad entre el esfuerzo de corte y la rapidez con la que decrece el ángulo entre dos líneas materiales mutuamente perpendiculares. A esta constante se le denomina como primer coeficiente de viscosidad o simplemente viscosidad. Por su parte, λ no tiene un significado físico, ambas en el Sistema Internacional tienen unidades de pascal-segundo, unidades que para la mayoría de las aplicaciones prácticas resultan muy elevadas. Es por lo anterior que se define el **Poise** $\left[\frac{\text{g}}{\text{cm s}} \right]$, en sistema inglés

las unidades son $\left[\frac{\text{lb}_f \cdot \text{s}}{\text{pie}^2} \right]$ o $\left[\frac{\text{slug}}{\text{pie} \cdot \text{s}} \right]$.

En la mecánica de fluidos es muy común el empleo de la viscosidad cinemática

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

entidad que proviene del cociente de la viscosidad μ , con respecto a la densidad ρ . La viscosidad cinemática ν tiene unidades de $\left[\frac{l^2}{t}\right]$. En sistema métrico la unidad de la viscosidad cinemática recibe el nombre de **Stoke** $\left[\frac{\text{cm}^2}{\text{s}}\right] = 10^{-4} \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}}\right]$.

Retomando la expresión a través de la cual se define el estado de esfuerzos, el tensor total de esfuerzos queda

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda D_{kk}\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}$$

$$\sigma_{11} = -p + \lambda D_{kk} + 2\mu D_{11}$$

$$\sigma_{22} = -p + \lambda D_{kk} + 2\mu D_{22}$$

$$\sigma_{33} = -p + \lambda D_{kk} + 2\mu D_{33}$$

$$\sigma_{ii} = -3p + (3\lambda + 2\mu) D_{kk}$$

$$\therefore \sigma_H = -p + \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right) D_{kk}$$

Donde

$$D_{kk} = \frac{1}{dV} \frac{D}{Dt}(dV)$$

representa la rapidez de cambio de volumen y está dada por

$$D_{kk} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22} + \dot{\epsilon}_{33}$$

$$\text{o} \quad D_{kk} = D_{11} + D_{22} + D_{33}$$

Si el fluido es incompresible $D_{kk} = 0$, el esfuerzo hidrostático estará dado por la presión, sin embargo, en el caso de que $D_{kk} \neq 0$, la presión p representará solo parte de la presión hidrostática, siendo necesario definir el coeficiente de viscosidad volumétrica

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

Por otra parte, si el fluido es compresible y $\sigma_H = -p$, solamente si $\lambda + \frac{2}{3}\mu = 0$, lo cual se define como Condición de Stokes.

Fluido newtoniano incompresible

Para el caso de un fluido newtoniano incompresible, el estado de esfuerzos se expresa como

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}$$

Por lo que

$$\sigma_{kk} = -3p + 2\mu D_{kk}$$

$$D_{kk} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{kk} = -3p$$

$$\therefore \quad \sigma_H = -p$$

Es por tanto que en un fluido viscoso incompresible la presión hidrostática no depende de ninguna cantidad cinemática y es indeterminada con relación al comportamiento mecánico de éste; por otra parte, para un fluido viscoso incompresible se podrá superponer cualquier presión al fluido sin que esto afecte su comportamiento mecánico. Por consecuencia, la presión resulta indeterminada desde el punto de vista de las ecuaciones constitutivas que caracterizan a un fluido viscoso incompresible. Retomando la ecuación constitutiva $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda D_{kk}\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}$ y considerando que

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

se tiene entonces que

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\sigma_{11} = -p + \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)$$

$$\sigma_{22} = -p + \mu \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)$$

$$\sigma_{33} = -p + 2\mu \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right)$$

$$\sigma_{12} = \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)$$

$$\sigma_{23} = \mu \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right)$$

$$\sigma_{31} = \mu \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right)$$

Ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos incompresibles

Sustituyendo el estado de esfuerzos definido para un fluido newtoniano incompresible en la ecuación de Cauchy, se tiene

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho B_i = \rho a_i$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho B_i = \rho \frac{Dv_i}{Dt}$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho B_i = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(-p \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right) + \rho B_i = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} + \rho B_i = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) + \rho B_i = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$$

Para un fluido incompresible

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho B_i = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$$

Lo cual en notación general queda

$$-\nabla p + \mu \nabla \cdot \nabla v + \rho B = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \nabla v \right) \quad (7.6)$$

A la ecuación anterior se le conoce como ecuación de Navier-Stokes, la cual describe el movimiento de fluidos newtonianos incompresibles. Para este sistema vectorial de ecuaciones, las incógnitas están representadas por el campo de velocidades y la presión (v_1, v_2, v_3, p) , por esta razón se requiere una cuarta ecuación que es la de la continuidad (Conservación de masa)

$$\nabla \cdot v = 0$$

En coordenadas rectangulares las ecuaciones de Navier-Stokes quedan en la forma

$$-\frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) v_1 + \rho B_1 = \rho \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} v_3 \right)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_2} + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) v_2 + \rho B_2 = \rho \left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} v_3 \right)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_3} + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) v_3 + \rho B_3 = \rho \left(\frac{\partial v_3}{\partial t} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} v_3 \right)$$

EJERCICIO 7.7 Si todas las partículas de un fluido tienen sus vectores de velocidad paralelos a una dirección fija, el flujo se definirá como uniaxial.

Demuestre que para un flujo uniaxial de un fluido newtoniano incomprensible el esfuerzo normal compresivo en cualquier punto de cualquier plano paralelo y perpendicular a la dirección de flujo es p .

Considere que la dirección de flujo corresponde con el eje x_3 , por lo que las velocidades en dirección de x_1, x_2 serán igual a cero

$$\Rightarrow v_3 \neq 0; v_1 = v_2 = 0$$

De la ecuación de la continuidad

$$\nabla \cdot v = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_3 = c$$

$$\Rightarrow v_3 = v(x_1, x_2; t)$$

$$\Rightarrow D_{11} = D_{22} = D_{33} = 0$$

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}$$

$$\Rightarrow \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p$$

Ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas (r, θ, z)

Dado que en este caso las incógnitas son v_r, v_θ, v_z, p se requerirá emplear las ecuaciones de Navier-Stokes y la Ecuación de la continuidad, las cuales quedan

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot v) = 0$$

Como el fluido es incompresible

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Por lo que

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (rv_r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

El gradiente del campo de velocidades queda

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Por su parte, la ecuación de Navier-Stokes en notación general se expresa

$$-\nabla p + \mu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v}) + \rho \mathbf{B} = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{v}) \right)$$

La divergencia de un tensor de segundo orden $(\nabla \cdot \mathbf{T})_{r,\theta,z}$ en coordenadas cilíndricas es

$$(\text{div} \mathbf{T})_r = \left(\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} \right) + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z}$$

$$(\text{div} \mathbf{T})_\theta = \left(\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} \right) + \frac{T_{r\theta} + T_{\theta r}}{r} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z}$$

$$(\text{div} \mathbf{T})_z = \left(\frac{\partial T_{zr}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{zr}}{r}$$

donde, por analogía, se puede considerar que $\mathbf{T} = \nabla \mathbf{v}$

Sustituyendo lo antes expuesto en la ecuación de Navier-Stokes se tiene

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2} \right) + \rho B_r = \\
 & = \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) \\
 & -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) + \rho B_\theta = \\
 & = \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) \\
 & -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \rho B_z = \\
 & = \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)
 \end{aligned}$$

Ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)

Dado que en este caso las incógnitas son v_r, v_θ, v_ϕ, p se requerirá usar las ecuaciones de Navier Stokes y la Ecuación de la continuidad, las cuales quedan:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Como el fluido es incompresible

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Sea $\mathbf{v} = v(r, \theta, \phi)$ una función vectorial, entonces

$$\Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = \text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r}$$

$$\nabla \cdot v = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial r^2 v_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial v_\theta \operatorname{sen} \theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$

$$\nabla v = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - v_\phi \operatorname{sen} \theta \right) \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - v_\phi \cos \theta \right) \\ \frac{\partial v_\phi}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} \right) & \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \end{bmatrix}$$

Por su parte, dado que la Ecuación de Navier-Stokes en notación general se expresa

$$-\nabla p + \mu \nabla \cdot (\nabla v) + \rho B = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v(\nabla v) \right)$$

La divergencia de un tensor de segundo orden $(\nabla \cdot T)_{r,\theta,\phi}$ en coordenadas esféricas está dada por

$$(\operatorname{div} T)_r = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial (r^2 T_{rr})}{\partial r} \right) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (T_{r\theta} \operatorname{sen} \theta) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial T_{r\phi}}{\partial \phi} - \frac{T_{\theta\theta} + T_{\phi\phi}}{r}$$

$$(\operatorname{div} T)_\theta = \frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial (r^3 T_{\theta r})}{\partial r} \right) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (T_{\theta\theta} \operatorname{sen} \theta) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial T_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{T_{r\theta} - T_{\theta r} - T_{\phi\phi} \cot \theta}{r}$$

$$(\operatorname{div} T)_\phi = \frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial (r^3 T_{\phi r})}{\partial r} \right) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (T_{\phi\theta} \operatorname{sen} \theta) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial T_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{T_{r\phi} - T_{\phi r} + T_{\theta\phi} \cot \theta}{r}$$

Sustituyendo lo antes expuesto en la ecuación de Navier-Stokes se tiene

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial p}{\partial r} + \\
& \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial (v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right] + \\
& \rho B_r = \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} \right) \\
& -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \\
& \mu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right] + \\
& \rho B_\theta = \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2 \cot \theta}{r} \right) \\
& -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \\
& \mu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\phi \sin \theta) \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] + \\
& \rho B_\phi = \rho \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\phi v_\theta \cot \theta}{r} \right)
\end{aligned}$$

7.6 LÍNEAS DE TRAYECTORIA Y LÍNEAS DE CORRIENTE

Para la mecánica de fluidos es necesario disponer de una representación visual de un campo de flujo, tal representación se puede realizar a través de la descripción de las trayectorias de las partículas del fluido.

Una **línea de trayectoria** está constituida por la curva que se traza a través del movimiento de una partícula, esto es, si se pretendiera determinarla físicamente habría que tomar una imagen del flujo (empleando por ejemplo tinta o colorante) durante un intervalo de tiempo,

obteniendo así la descripción de la trayectoria. Matemáticamente, la línea de trayectoria de una partícula la cual estaba en X para un tiempo t_0 puede ser obtenida a partir del campo de velocidad $v(x,t)$. Si $x = x(t)$ es la línea de trayectoria, entonces

$$\frac{dx}{dt} = v(x,t)$$

$$x(t_0) = X$$

EJERCICIO 7.8 Para el campo de velocidades descrito por

$$v_1 = \frac{2x_1}{(2t+1)}; \quad v_2 = 0; \quad v_3 = cx_3$$

Determine la línea de trayectoria de una partícula $x = x(X_i, t_0)$, esto para el tiempo de referencia t_0 .

A partir de la definición de velocidad y considerando la relación entre coordenadas lagrangianas y eulerianas, se tiene que

$$\frac{dx_1}{dt} = v_1 = \frac{2x_1}{(2t+1)} \Rightarrow \int_{X_1}^{x_1} \frac{dx_1}{x_1} = \int_{t_0}^t \frac{2dt}{(2t+1)}$$

$$\Rightarrow \text{Ln} \frac{x_1}{X_1} = \text{Ln} \frac{(2t+1)}{(2t_0+1)} \Rightarrow x_1 = X_1 \frac{(2t+1)}{(2t_0+1)}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = v_2 = 0 \Rightarrow x_2 = X$$

$$\frac{dx_3}{dt} = v_3 = cx_3 \Rightarrow \int_{X_3}^{x_3} \frac{dx_3}{x_3} = \int_{t_0}^t c dt$$

$$\therefore \text{Ln} \frac{x_3}{X_3} = c(t-t_0) \Rightarrow x_3 = X_3 e^{c(t-t_0)}$$

Las **líneas de corriente** son líneas dibujadas en el campo de flujo, de tal manera que en un instante dado se encuentran siempre tangentes a la dirección de flujo en cada punto del campo que describe éste. En otras palabras, una línea de corriente en un tiempo t es una curva cuya tangente en cualquier punto tiene la dirección instantánea del vector velocidad de la partícula en ese momento. Experimentalmente, estas líneas son obtenidas adicionando partículas reflejantes en el fluido al efectuar una toma fotográfica sobre la superficie del fluido con una apertura corta del obturador. Cada elemento reflejante produce una línea corta sobre el flujo, la cual se aproxima a la tangente de la línea de corriente. Matemáticamente, las líneas de corriente pueden ser obtenidas a partir del campo de velocidades $v(x, t)$.

Considere que $x = x(s)$ representa a la ecuación paramétrica para la línea de corriente al tiempo t , la cual pasa a través de un punto dado x_0 , entonces una s puede ser escogida tal que

$$\frac{dx}{ds} = v(x, t) \quad x(0) = x_0$$

El perfil de las líneas de corriente puede cambiar de un instante a otro si la velocidad del flujo es función del tiempo (flujo no establecido). Dado que las líneas de corriente son tangentes al vector velocidad de cada punto del flujo, el fluido nunca puede cruzar una línea de corriente.

EJERCICIO 7.9 Para el campo de velocidades descrito para el ejercicio 7.7, determine las líneas de corriente que pasan en el punto p :

$$p(p_1, p_2, p_3) \Rightarrow \frac{dx_i}{ds} = v(x, t) = \frac{2x_1}{(2t+1)} \hat{e}_1 + 0\hat{e}_2 + cx_3\hat{e}_3$$

$$\int_{p_1}^{x_1} \frac{dx_1}{x_1} = \int_0^s \frac{2ds}{(2t+1)} \quad \Rightarrow \quad x_1 = p_1 e^{\frac{2s}{(2t+1)}}$$

$$v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = p_2$$

$$v_3 = cx_3 = \frac{dx_3}{ds} = \int_{p_3}^{x_3} \frac{dx_3}{x_3} = \int_0^s cds$$

$$\Rightarrow \quad x_3 = p_3 e^{cs}$$

Las líneas de trazo se definen al observar un punto en el espacio correspondiente al flujo, identificando todas las partículas que pasan a través de éste y que al unirlos dan lugar a dicha línea. Una línea de trazo a través de un punto fijo x_0 es la línea a un tiempo t , formada por todas las partículas que han pasado a través de x_0 para $\tau < t$. Considere que $X = X(x, t)$ denota la función inversa de $x = x(X, t)$, entonces la partícula que estaba en x_0 para un tiempo τ tiene las coordenadas materiales dadas por $X = X(x_0, \tau)$, por lo que la misma partícula está en $x = x(X(x_0, \tau), t)$ al tiempo t . Es entonces que la línea de trazo a un tiempo t está dada por $x = x(X(x_0, \tau), t)$ para un tiempo fijo t y variable τ .

EJERCICIO 7.10 Para el campo de velocidades descrito en los ejemplos anteriores

$$v_1 = \frac{2x_1}{(2t+1)}; \quad v_2 = 0; \quad v_3 = cx_3$$

Determine la línea de trazo formada por las partículas que pasan a través de la posición espacial $p(p_1, p_2, p_3)$.

Las ecuaciones de trayectoria fueron determinadas en el ejercicio 7.7, quedando:

$$x_1 = X_1 \frac{(2t+1)}{(2t_0+1)}$$

$$x_2 = X_2$$

$$x_3 = X_3 e^{c(t-t_0)}$$

las cuales tienen las funciones inversas

$$X_1 = x_1 \frac{(2t_0+1)}{(2t+1)}$$

$$X_2 = x_2$$

$$X_3 = x_3 e^{-c(t-t_0)}$$

Entonces, la partícula que pasa a través de la coordenada $p(p_1, p_2, p_3)$ a un tiempo τ está dada por

$$X_1 = p_1 \frac{(2t_0 + 1)}{(2\tau + 1)}$$

$$X_2 = p_2$$

$$X_3 = p_3 e^{-c(\tau - t_0)}$$

Sustituyendo en las ecuaciones de trayectoria, se obtiene la ecuación paramétrica para las líneas de trazo

$$x_1 = p_1 \frac{(2t + 1)}{(2\tau + 1)}$$

$$x_2 = p_2$$

$$x_3 = p_3 e^{c(t - \tau)}$$

7.7 FLUJO ESTABLECIDO Y FLUJO TRANSITORIO

El flujo denominado como establecido es aquel en el cual para cualquier localización física las condiciones no cambian en el tiempo. En un flujo establecido las líneas de corriente, de trayectoria y de trazo no cambian con el tiempo. Un flujo transitorio por su parte se caracteriza en que ya sea la velocidad, aceleración o temperatura cambian con el tiempo.

Por ejemplo, sea ψ una variable cualquiera en un flujo transitorio $\frac{\partial \psi}{\partial t} \neq 0$.

7.8 FLUJO LAMINAR Y FLUJO TURBULENTO

Los flujos viscosos se pueden clasificar en laminares o turbulentos, de acuerdo con sus condiciones de movimiento. El flujo laminar se caracteriza en que el movimiento se da en

capas, de tal forma que no existe mezcla entre las líneas de corriente. Se trata de un flujo muy ordenado en el cual las partículas que fluyen se desplazan formando finas capas. Este tipo de flujo se relaciona fundamentalmente con condiciones de baja velocidad. Experimentalmente en este caso, si se inyecta tinta en el seno de la corriente se tendrá que no existe mezcla, manteniéndose en el tiempo, separado el marcador del resto de la corriente. En un flujo turbulento se presentan movimientos tridimensionales aleatorios de las partículas del fluido. Si se inyecta tinta a un flujo turbulento, se tendrá que ésta rápidamente se dispersa en todo el campo del flujo.

Para el caso de agua fluyendo en un conducto de sección circular, Reynolds observó que un parámetro adimensional (conocido ahora como número de Reynolds) $N_R = \bar{v} \rho d \mu^{-1}$ [\bar{v} , velocidad promedio; d , diámetro del tubo; ρ, μ densidad y viscosidad del fluido] describía las condiciones del flujo, de tal forma que para valores menores del orden de 2100, el flujo se presentaba en capas, y donde un filamento de colorante introducido en el fluido permanecía intacto. En dicho caso, cualquier alteración en el flujo es rápidamente eliminada. Si N_R se incrementa, el flujo se vuelve sensible a la presencia de pequeñas perturbaciones, de tal manera que se llega al punto en que el filamento de colorante introducido al flujo se rompe, mezclándose con la totalidad del flujo. A este fenómeno se le denomina como flujo turbulento. Las condiciones en las cuales se presenta un flujo turbulento son difíciles de precisar con exactitud, dependiendo entonces de la alteración que se genere.

Dada la complejidad de su análisis, en primera instancia se procederá a estudiar la dinámica de los fluidos considerando flujos laminares, por consecuencia, los resultados obtenidos estarán limitados a dichas condiciones y definidos por su número de Reynolds característico.

7.9 FLUJO DE COUETTE

En este apartado se va a analizar un flujo uniaxial entre dos placas planas semi-infinitas (véase la figura 7.5). El flujo se considera uniaxial y se presenta en dirección de x_1 cuando la placa superior se mueve a una velocidad v . Dado que el movimiento del fluido es uniaxial, entonces $v_1 = f(x_2), v_2 = v_3 = 0$. Se trata de un fluido Newtoniano incompresible por lo que la ecuación de la continuidad queda $\nabla \cdot v = 0$; y a partir de las ecuaciones de la continuidad y de Navier-Stokes, se tiene que:

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} = 0 \quad \therefore \quad v_1 = ax_2 + b$$

Resulta por demás evidente que los valores de las constantes a y b estarán determinados por la posición en que se coloque el sistema de referencia; si el origen se coloca en la placa inferior, tal como se muestra en la figura, se tiene que $v_1 = 0$ para $x_2 = 0$ y $v_1 = v$ para $x_2 = d$, es entonces que

$$v_1(x_2) = \frac{vx_2}{d}$$

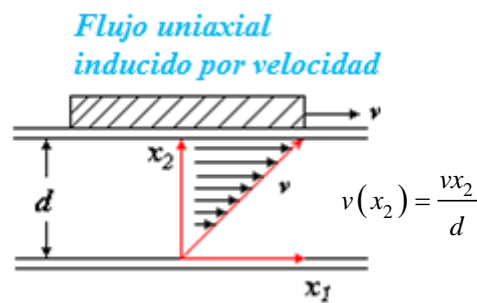


FIGURA 7.5 FLUJO UNIAxIAL ENTRE PLACAS PLANAS SEMI-INFINITAS INDUCIDO POR VELOCIDAD (FLUJO DE COUETTE)

7.10 FLUJO UNIAxIAL PRODUCIDO POR PRESIÓN (FLUJO DE POISEUILLE)

El flujo denominado como de Poiseuille se describe como un flujo uniaxial inducido por presión, el cual se produce entre dos placas planas semi-infinitas (figura 7.6), donde la presión $p = p(x_1)$ (figura 7.7).

De acuerdo con lo observado, se tiene que:

$$v_1 = f(x_2)$$

$$v_2 = v_3 = 0$$

$$v_1(0) = v_{\text{máx}}$$

$$v_1(a) = v_1(-a) = 0$$

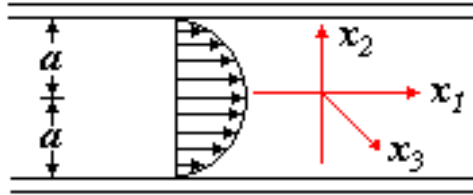


FIGURA 7.6 FLUJO UNIAXIAL ENTRE PLACAS SEMI-INFINITAS, INDUCIDO POR PRESIÓN

Ecuación de Navier-Stokes considerando flujo establecido:

$$-\frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} = 0$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_2} = 0$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_3} = 0$$

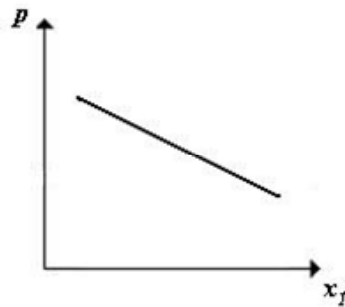


FIGURA 7.7 PERFIL DE PRESIÓN

No se consideran fuerzas de cuerpo $B_1 = B_2 = B_3 = 0$

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \alpha$$

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} = \frac{\alpha}{\mu}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \frac{\alpha}{\mu} x_2 + c_1 \qquad 0 = \frac{\alpha}{\mu} a^2 + 0 + 2c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -\frac{\alpha}{2\mu} a^2$$

$$v_1 = \frac{\alpha}{2\mu} x_2^2 + c_1 x_2 + c_2 \qquad 0 = 0 + 2c_1 a + 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0$$

Para la condición de frontera en $x_2 = 0$, $v_1 = v_{\text{máx}} \Rightarrow \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = 0$

$$0 = 0 + 2c_1 a + 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0$$

y en $x_2 = a$, $v_1 = 0$

$$0 = \frac{\alpha}{\mu} a^2 + 0 + 2c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -\frac{\alpha}{2\mu} a^2$$

$$v_1(a) = 0 = \frac{\alpha}{2\mu} a^2 + c_1 a + c_2$$

$$v_1(-a) = 0 = \frac{\alpha}{2\mu} a^2 - c_1 a + c_2$$

De lo anterior se tiene que

$$v_1(x_2) = \frac{\alpha}{2\mu} x_2^2 - \frac{\alpha}{2\mu} a^2$$

$$v_1(x_2) = \frac{\alpha}{2\mu} (x_2^2 - a^2) \quad \Rightarrow \quad v_1(x_2) = -\frac{\alpha}{2\mu} (a^2 - x_2^2)$$

$$\therefore v_1(x_2) = \frac{1}{2\mu} (a^2 - x_2^2) \left[-\frac{\partial p}{\partial x_1} \right]$$

De lo cual se concluye que la velocidad del flujo $v_1(x_2)$ es proporcional a $\frac{\partial p}{\partial x_1}$ y se presenta

en sentido contrario a la dirección de crecimiento del gradiente; por otra parte, la velocidad

máxima del flujo se presenta en el plano medio entre ambas placas semi-infinitas y está

dada por; $v_{\text{máx}} = \frac{a^2}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} \right)$, por lo que el gasto volumétrico \dot{V} se puede describir como

$$\dot{V} = \int_{-a}^a w v_1(x_2) dx_2 = w \frac{\alpha}{\mu} \frac{2a^3}{3}$$

donde w representa el ancho de las placas, y la velocidad promedio \bar{v} se describe a través de

$$\bar{v} = \frac{1}{a} \int_0^a v_1(x_2) dx_2 = \frac{\alpha}{\mu} \frac{a^2}{3}$$

EJERCICIO 7.11 Para el mismo flujo uniaxial descrito en la figura 7.4, determine la presión en el punto A .

$$\frac{p_A}{\rho g} + z_A = \frac{p_B}{\rho g} + z_B$$

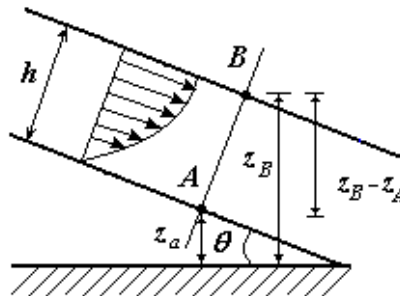


FIGURA 7.8 CAMPO DE VELOCIDADES DEL FLUJO EN UN CANAL INCLINADO

De la figura queda

$$p_A = p_{atm} + \rho g(z_B - z_A)$$

$$p_A = p_{atm} + \rho g h \cos \theta$$

donde p_{atm} representa a la presión atmosférica.

Por otra parte, no existe restricción al movimiento del fluido en la superficie superior, por lo que su velocidad será máxima. ¿Cómo son las velocidades para el fondo del canal inclinado y en la superficie libre del flujo?

El fondo del canal no presenta movimiento por lo que la velocidad en este plano es nula; por ¿Cómo será el perfil de velocidades?

Dado que las paredes del canal están inmóviles, lo que genera el movimiento del fluido es la diferencia de presión debida a la inclinación del canal, razón por la que se trata de un flujo de Poiseuille (inducido por presión) por lo que el perfil de velocidades es parabólico, tal como se observa en la figura 7.8.

7.11 FLUJO INDUCIDO POR PRESIÓN A TRAVÉS DE UN CONDUCTO DE SECCIÓN CIRCULAR (TUBO)

Este flujo también denominado como de Hagen-Poiseuille, se describe como un flujo uniaxial, axisimétrico inducido por presión. Resulta evidente que el análisis se facilitará si éste se realiza en coordenadas cilíndricas. De lo antes expuesto se tiene que:

$$v_r = 0, \quad v_\theta = 0, \quad v_z = v_z(r)$$

$$v(0) = v_{\text{máx}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0$$

$$v(R) = 0$$

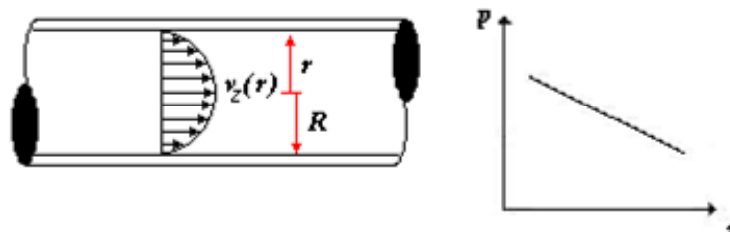


FIGURA 7.9 PERFIL DE VELOCIDADES PARA UN FLUJO DE HAGEN-POISEUILLE. LA PRESIÓN ES FUNCIÓN LINEAL DE z

Ecuación de la continuidad, considerando que se trata de un fluido incompresible

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Resulta entonces que la divergencia del campo de velocidades se expresa

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

De lo antes expuesto se concluye que

$$v_r = v_\theta = 0; \quad \therefore \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

En virtud de que el gradiente del campo de velocidades descrito en coordenadas cilíndricas está dado por

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta \right) & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Considerando la ecuación de Navier Stokes correspondiente al eje z

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \rho B_z = \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$$

Ésta se simplifica al ser un flujo establecido ya que

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Además de que $v_z = v(r)$.

Por consecuencia la ecuación de Navier-Stokes para el eje z se reduce a

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = 0$$

La ecuación se puede simplificar considerando

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right) = \frac{1}{r} \left[\left(\frac{\partial r}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + r \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} \right]$$

Por lo que la ecuación se presenta como

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right) = 0$$

El gradiente de presión se describe

$$\alpha = -\frac{\partial p}{\partial z}$$

Entonces, despejando

$$-\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = -\frac{\alpha r}{\mu}$$

e integrando

$$r \frac{\partial v_z}{\partial r} = -\frac{\alpha r^2}{2\mu} + c_1$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = -\frac{\alpha r}{2\mu} + \frac{c_1}{r}$$

$$v_z = -\frac{\alpha r^2}{4\mu} + c_1 \ln r + c_2$$

De las condiciones de frontera, tenemos

$$\text{Para } r = 0 \quad \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0, \text{ dado que } v_z = v_{\text{máx}}$$

$$0 = -\frac{\alpha r^2}{2\mu r} + \frac{2\mu c_1}{2\mu r} \quad \Rightarrow \quad 0 = \alpha r^2 - 2\mu c_1$$

$$\therefore \quad c_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad v_z(r) = -\frac{\alpha r^2}{4\mu} + c_2$$

$$v_z = 0 \text{ para } r = R \Rightarrow$$

$$c_2 = \frac{\alpha}{\mu} \left(\frac{R^2}{4} \right)$$

de lo cual se concluye que

$$v_z(r) = \frac{\alpha}{4\mu} (R^2 - r^2) = \frac{1}{4\mu} (R^2 - r^2) \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right)$$

La máxima velocidad se presenta en el centro del tubo $r = 0$, por lo que está dada por

$$v_{z\text{máx}} = \frac{d^2}{16\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)$$

donde d es el diámetro del tubo.

La velocidad promedio queda

$$\bar{v} = \frac{4}{\pi d^2} \int_A v_z dA = \frac{d^2}{32\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{v_{z\text{máx}}}{2}$$

Por lo que el gasto volumétrico se describe por $\dot{V} = \bar{v}A$

$$\Rightarrow \dot{V} = \frac{\pi d^2}{4} \bar{v} = \frac{\pi d^4}{128\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)$$

EJERCICIO 7.11 Análisis del flujo inducido por velocidad (Coutte) para dos capas de fluidos newtonianos incompresibles, cuyo movimiento corresponde a un flujo laminar en régimen permanente.

Se tienen dos capas, con espesores d_1, d_2 (figura 7.10) que corresponden a fluidos newtonianos incompresibles con viscosidad μ_1, μ_2 , los cuales se encuentran entre dos placas paralelas y semi-infinitas. Considerando que las placas se desplazan entre sí, determine el perfil de velocidades correspondiente. Para el análisis desprecie el efecto de las fuerzas de cuerpo.

Para ambas capas

$$v_1 = f(x_2)$$

$$v_2 = v_3 = 0$$

$$\nabla p = 0$$

Considere que el origen del sistema coordenado se establece en la interfase entre ambas capas.

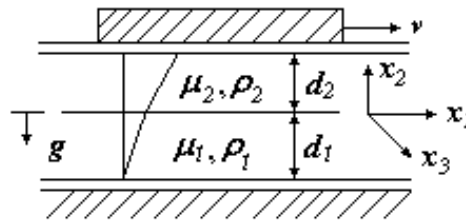


FIGURA 7.10 MOVIMIENTO UNIAxIAL INDUCIDO POR VELOCIDAD EN DOS CAPAS DE FLUIDOS NEWTONIANOS INCOMPRESIBLES

Para la capa 1, las ecuaciones de Navier-Stokes se reducen a

$$\mu_1 \frac{\partial^2 v_1^1}{\partial x_2^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v_1^1}{\partial x_2} = \text{cte}$$

$$\therefore \quad v_1^1 = ax_2 + b$$

$$\text{para } x_2 = -d_1 \quad \Rightarrow \quad v_1^1 = 0$$

$$\therefore \quad 0 = -ad_1 + b \quad \Rightarrow \quad b = ad_1$$

$$\therefore \quad v_1^1(x_2) = ax_2 + ad_1$$

Realizando el mismo análisis para la capa 2

$$\mu_2 \frac{\partial^2 v_1^2}{\partial x_2^2} = 0 \quad v_1^2(x_2) = cx_2 + f$$

Para $x_2 = d_2 \Rightarrow v_1^2 = v_p$ (velocidad de la placa)

Analizando en la interfase ($x_2 = 0$) las velocidades deberán ser iguales (no existe deslizamiento):

$$v_1^2(0) = v_1^1(0) \neq 0$$

Para la capa 2 en contacto con la pared móvil

$$v_1^2(d_2) = v_p = cd_2 + f \quad \Rightarrow \quad f = v_p - cd_2$$

$$v_1^2(x_2) = (v_p - cd_2) + cx_2 = c(x_2 - d_2) + v_p$$

$$v_1^2(0) = v_1^1(0) \Rightarrow c(0 - d_2) + v_p = a(0 + d_1)$$

$$\therefore v_p = cd_2 + ad_1$$

En virtud de existir equilibrio de fuerzas en la interfase, los esfuerzos de corte definidos en el seno de cada fluido (evaluados estos en la interfase) serán iguales:

$$\sigma_{12}^1 = \sigma_{12}^2$$

$$\sigma_{12}^1 = 2\mu_1 D_{12}^1 = 2\mu_1 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1^1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2^1}{\partial x_1} \right) \right)$$

D - velocidad de deformación

$$\sigma_{12}^2 = 2\mu_2 D_{12}^2$$

$$\sigma_{12}^1 = \mu_1 \frac{\partial v_1^1}{\partial x_2} \quad ; \quad v_1^1 = ax_2 + ad_1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v_1^1}{\partial x_2} = a; \quad \Rightarrow \quad \sigma_{12}^1 = \mu_1 a \quad \therefore \quad a = \frac{\sigma_{12}^1}{\mu_1}$$

$$\sigma_{12}^2 = \mu_2 \frac{\partial v_1^2}{\partial x_2}; \quad v_1^2 = cx_2 + \frac{d_1}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v_1^2}{\partial x_2} = c; \quad \therefore c = \frac{\sigma_{12}^2}{\mu_2}$$

En la interfase los esfuerzos de corte son iguales, por lo que:

$$\sigma_{12}^1 = \sigma_{12}^2 = a\mu_1 = c\mu_2$$

$$\therefore c = \frac{\mu_1}{\mu_2} a$$

Para la capa 1

$$v_1^1 = a(x_2 + d_1)$$

Para la capa 2

$$v_1^2 = \frac{\mu_1}{\mu_2} a(x_2 - d_2) + v_p$$

Como ya se mencionó, en la interfase las velocidades son iguales ya que se considera que no hay deslizamiento entre los fluidos

$$v_1^1 = v_1^2 = a(x_2 + d_1) = \frac{\mu_1}{\mu_2} a(x_2 - d_2) + v_p$$

$$ad_1 = -\frac{\mu_1}{\mu_2} ad_2 + v_p \quad a \left(d_1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} d_2 \right) = v_p \quad a = \frac{v_p}{d_1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} d_2}$$

$$\therefore v_1^1(x_2) = \frac{v_p \mu_2}{\mu_2 d_1 + \mu_1 d_2} (x_2 + d_1)$$

$$y \quad v_1^2(x_2) = \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{v_p \mu_2}{\mu_2 d_1 + \mu_1 d_2} (x_2 - d_2) + v_p$$

$$\therefore v_1^2 = \frac{v_p \mu_1}{\mu_2 d_1 + \mu_1 d_2} (x_2 - d_2) + v_p$$

7.12 FLUJO INDUCIDO POR VELOCIDAD ENTRE DOS CILINDROS CON LONGITUD INFINITA

Al flujo laminar bidimensional, en estado estable, de un fluido newtoniano incompresible entre cilindros concéntricos de longitud infinita se le denomina como **flujo de Couette** para una base en coordenadas cilíndricas. Para el análisis de este caso considere dos cilindros concéntricos, de radios r_1, r_2 y altura infinita h , tal como se muestra en la figura 7.11; éstos giran a velocidades angulares constantes (ω_1, ω_2). De un primer análisis resulta evidente que el flujo se puede describir como uniaxial e inducido por velocidad, de tal forma que si el origen se define en el centro del arreglo se tendrá que

$$v_r = v_z = 0; \quad v_\theta = v(r)$$

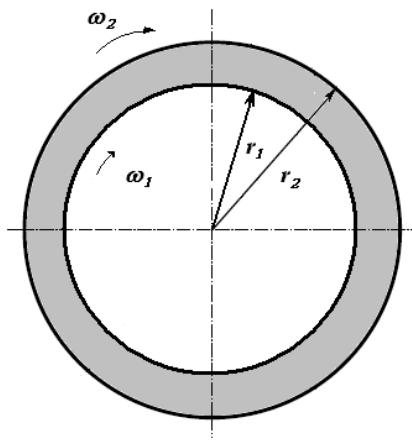


FIGURA 7.11 MOVIMIENTO DE UN FLUIDO NEWTONIANO INCOMPRESIBLE ENTRE DOS CILINDROS COAXIALES

Al tratarse de un fluido incompresible, la ecuación de la continuidad se expresa como

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

De lo que se tiene que

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0,$$

situación que resulta evidente al tratarse de un flujo establecido; por otra parte, de las ecuaciones de Navier-Stokes se tiene para el eje θ

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) + \rho B_\theta = \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right)$$

El sistema se simplifica en virtud de que se realizan las siguientes consideraciones:

- Flujo establecido
- Se desprecia el efecto de las fuerzas de cuerpo
- El flujo es inducido por velocidad
- El gradiente de presión es igual a cero

Es por consecuencia que se reduce a

$$\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} = 0$$

La solución de la ecuación diferencial está dada por

$$v_\theta(r) = Ar + \frac{B}{r}$$

Por lo que

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial r} = A - \frac{B}{r^2}$$

$$\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} = \frac{2B}{r^3}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial se comprueba la validez de la solución planteada

$$\frac{2B}{r^3} + \frac{1}{r} \left(A - \frac{B}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} \left(Ar + \frac{B}{r} \right) = 0$$

$$\frac{2B}{r^3} + \frac{A}{r} - \frac{B}{r^3} - \frac{A}{r} - \frac{B}{r^3} = 0$$

Demostrada la solución se tiene que las velocidades en cada cilindro concéntrico están dadas por

$$\begin{aligned}
 r = r_1, v_\theta(r_1) = \omega_1 r_1 & \Rightarrow v_\theta(r_1) = \omega_1 r_1 = Ar_1 + \frac{B}{r_1} \\
 r = r_2, v_\theta(r_2) = \omega_2 r_2 & \Rightarrow v_\theta(r_2) = \omega_2 r_2 = Ar_2 + \frac{B}{r_2}
 \end{aligned}$$

Por lo que, considerando las condiciones de frontera, se llega a que las constantes de integración están dadas por

$$A = \frac{w_2 r_2^2 - w_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad \text{y} \quad B = \frac{r_1^2 r_2^2 (w_1 - w_2)}{r_2^2 - r_1^2}$$

Por otra parte, a través de lo expuesto se pueden calcular fácilmente los esfuerzos de corte en la pared de cualquiera de los cilindros y, por consecuencia, es posible calcular el momento transmitido para hacer girar éstos. Se concluye, por último, que dicho momento es función de la viscosidad del fluido y de las características geométricas y dimensionales del arreglo, por lo que el sistema en análisis puede ser empleado fácilmente para determinar la viscosidad del fluido.

La velocidad de deformación en coordenadas cilíndricas se expresa como

$$D_{r\theta z} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \left[\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right] + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \\ D_{\theta r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) \\ D_{zr} & D_{z\theta} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Como para el caso en estudio

$$v_r = 0, \quad v_z = 0, \quad v_\theta = v(r)$$

Para el caso analizado, el tensor de velocidad de deformación se reduce a

$$D_{r\theta z} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dado que el campo de velocidades se expresa como

$$v_\theta(r) = Ar + \frac{B}{r}$$

de lo que se tiene

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial r} = A - \frac{B}{r^2}$$

Por consecuencia,

$$\Rightarrow D_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(A - \frac{B}{r^2} - \frac{1}{r} \left(Ar + \frac{B}{r} \right) \right) = -\frac{2B}{2r^2} = -\frac{B}{r^2}$$

$$D_{r\theta} = -\frac{B}{r^2}$$

Por otra parte, los esfuerzos viscosos se expresan

$$\sigma'_{r\theta z} = \lambda(\nabla \cdot v)I + 2\mu D$$

Entonces, el tensor de esfuerzos queda

$$\sigma'_{r\theta z} = \begin{bmatrix} 0 & \mu \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) & 0 \\ \mu \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo que

$$\sigma'_{\theta r} = \sigma'_{r\theta} = 2\mu \frac{B}{r^2}$$

Considerando, por ejemplo, el cilindro exterior, el esfuerzo de corte que existe entre éste y el fluido viscoso está dado por

$$\sigma_{\theta r} = 2\mu \frac{B}{r_2^2}$$

La fuerza aplicada estará dada por la integral de dicho esfuerzo a través del área de contacto, de tal forma que

$$f = \int_A \sigma_{\theta r} dA = \int_0^{2\pi} \int_0^z \frac{2\mu B}{r_2^2} r d\theta dz$$

$$f = 4\mu\pi \frac{B}{r_2} z$$

Por consecuencia, el par aplicado al sistema para producir el movimiento será

$$T = fd = 4\mu\pi \frac{B}{r_2} r_2 z$$

$$T = 4\mu\pi Bz$$

donde éste queda en función de los parámetros geométricos a través de los cuales se define la constante B , por consecuencia se puede determinar la viscosidad a través de evaluar el par aplicado

$$\Rightarrow \mu = \frac{T}{4\pi Bz}$$

7.13 FLUJO ROTACIONAL E IRROTACIONAL

Durante su movimiento los fluidos pueden describir un flujo rotacional, donde, la rapidez de rotación $\dot{\omega}$ de una partícula de un fluido se define como la velocidad angular promedio de dos segmentos de línea, los cuales son mutuamente perpendiculares.

Dado que el gradiente de velocidad ∇v es un tensor de segundo orden, entonces éste se puede descomponer en su parte simétrica, la que describe al tensor de rapidez de deformación D , y su componente no simétrica, la cual representa la rapidez de rotación $\dot{\omega}$

$$\nabla v = \frac{1}{2}(\nabla v + (\nabla v)^T) + \frac{1}{2}(\nabla v - (\nabla v)^T)$$

$$\frac{1}{2}(\nabla v + (\nabla v)^T) = D$$

$$\frac{1}{2}(\nabla v - (\nabla v)^T) = \dot{\omega}$$

A partir de lo anterior se define el vector de vorticidad φ que, en notación índice y con auxilio del permutador, se representa de la forma siguiente:

$$\varphi_i = -2\varepsilon_{ijk}\dot{\omega}_{jk}$$

$$\varphi_i = -2(\dot{\omega}_{23}\hat{e}_1 + \dot{\omega}_{31}\hat{e}_2 + \dot{\omega}_{12}\hat{e}_3)$$

$$\varphi_i = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right)\hat{e}_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)\hat{e}_2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)\hat{e}_3$$

Por tanto, el vector de vorticidad φ está dado por el rotacional del campo de velocidades (v). Para un sistema coordenado rectangular (cartesiano) se tiene que el rotacional del campo de velocidades se describe como

$$\varphi_i = \text{Rot } v_i = \nabla \times v = \begin{bmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right)\hat{e}_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)\hat{e}_2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)\hat{e}_3$$

Por su parte, a partir de que el rotacional está dado por la componente antisimétrica del gradiente de velocidades se tiene que en coordenadas cilíndricas se expresa como

$$\varphi_{r,\theta,z} = \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \hat{e}_r + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \hat{e}_\theta + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \frac{v_\theta}{r} \right) \hat{e}_z$$

Mientras que, en coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} \varphi_{r,\theta,z} = & \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} \right) + \frac{v_\phi \cot \theta}{r} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{e}_r + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right) - \frac{v_\phi}{r} - \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \right) \hat{e}_\theta \\ & + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \right) \hat{e}_\phi \end{aligned}$$

Flujo irrotacional

Se caracteriza porque $\nabla \times v = 0$, esto es, las partículas que constituyen el flujo se mueven sin presentar rotación, es por consecuencia que la condición antes expresada se deberá cumplir, respectivamente, en cualquiera que sea la base, cilíndricas y esféricas. Por tanto, se tiene que

$$\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) = \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) = \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) = 0$$

$$\left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \frac{v_\theta}{r} \right) = 0$$

$$\left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} \right) + \frac{v_\phi \cot \theta}{r} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right) = \left(\frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right) - \frac{v_\phi}{r} - \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \right) = \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \right) = 0$$

Es entonces que el vector de vorticidad φ asociado a un flujo irrotacional deberá ser nulo

$$\varphi_i = 0$$

Los flujos irrotacionales se caracterizan en virtud de que pueden ser descritos con auxilio de una función escalar ($\eta = \eta(x_1, x_2, x_3)$), tal que

$$\mathbf{v} = -\nabla \eta$$

$$v_i = -\frac{\partial \eta}{\partial x_i} \hat{e}_i$$

$$\therefore v_1 = -\frac{\partial \eta}{\partial x_1} \hat{e}_1; \quad v_2 = -\frac{\partial \eta}{\partial x_2} \hat{e}_2; \quad v_3 = -\frac{\partial \eta}{\partial x_3} \hat{e}_3$$

El vector de vorticidad $\boldsymbol{\varphi}$ (para coordenadas rectangulares) queda

$$\boldsymbol{\varphi}_i = -\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_3} \right) - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_2} \right) \right) \hat{e}_1 + \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_3} \right) \right) \hat{e}_2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_1} \right) \right) \hat{e}_3 \right]$$

Por lo tanto, siempre que el flujo se pueda representar por una función escalar η tal que

$v_i = -\frac{\partial \eta}{\partial x_i} \hat{e}_i$, entonces será un flujo irrotacional, donde la función $\eta(x_1, x_2, x_3, t)$ define un

flujo irrotacional.

Considerando la ecuación de la continuidad para un fluido incompresible e irrotacional, ésta se expresa como:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right) = 0$$

$$\nabla^2 \eta = 0$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_3^2} = 0$$

Estado de esfuerzos para un flujo irrotacional de un fluido incompresible de densidad homogénea

El estado de esfuerzos en un fluido Newtoniano se expresa como

$$\sigma = -pI + \sigma'$$

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij}$$

$$\sigma'_{ij} = \lambda \dot{\epsilon}_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \dot{\epsilon}_{ij}$$

donde σ' representa a los esfuerzos viscosos, si el fluido es incompresible $\dot{\epsilon}_{kk} = 0$, por lo que el estado esfuerzos para un fluido newtoniano incompresible queda:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu \dot{\epsilon}_{ij}$$

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu \left[\frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right] \right] \dot{\epsilon}_{ij}$$

Si se considera que el flujo es irrotacional, entonces es posible describir el campo de velocidades a través de una función escalar $v = -\nabla \eta$, tal como se explicó anteriormente, entonces sustituyendo ahora en la ecuación de Navier-Stokes

$$-\nabla p + \mu \nabla \cdot (\nabla v) + \rho B = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v(\nabla v) \right)$$

se tiene que

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \left(-\frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right) + \rho B_i = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_j^2} \right) + \rho B_i = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$$

Dado que el fluido es incompresible, la ecuación de la continuidad se expresa

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_i^2} = 0; \quad \text{o} \quad \nabla^2 \eta = 0$$

De lo que se desprende que el término que representa el efecto de la viscosidad del fluido es igual a cero, por lo que la ecuación se reduce a

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho B_i = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$$

En notación general queda

$$-\nabla p + \rho B = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v(\nabla v) \right)$$

Dicha ecuación corresponde con la ecuación de Euler, la cual describe el comportamiento de un fluido viscoso e incompresible.

7.14 FUNCIONES DISIPATIVAS EN FLUIDOS NEWTONIANOS

La rapidez de trabajo (potencia) $\frac{DW}{Dt} = P$ desarrollada por las fuerzas (de cuerpo y de superficie) aplicadas sobre el MC se ha demostrado que se puede descomponer en:

$$\frac{DW}{Dt} = \frac{D}{Dt}(EC) + P_S dV$$

$$P_S = \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

donde el término P_S representa la potencia desarrollada para cambiar la forma y dimensiones de la partícula de volumen diferencial (elemento diferencial de volumen), y

$\frac{D}{Dt}(EC)$ representa la rapidez de cambio de la energía cinética asociada al elemento.

En el caso de un fluido incompresible, el término P_S se puede expresar

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij}$$

$$\sigma'_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \sigma'_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

Dado que se trata de un fluido incompresible

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\therefore \sigma'_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \sigma'_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

$$\sigma'_{ij} = \lambda D_{ii} \delta_{ij} + 2\mu D_{ij}$$

Antes de continuar es conveniente recordar que para describir la velocidad de deformación se emplea en este texto

$$D_{ij} \equiv \dot{\epsilon}_{ij}$$

Como se trata de un fluido incompresible

$$D_{ii} = 0 \Rightarrow$$

$$\sigma'_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 2\mu D_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

Por otra parte desarrollando, se tiene que

$$\begin{aligned} D_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= D_{11} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + D_{12} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + D_{13} \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + D_{21} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + D_{22} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + D_{23} \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ &\quad + D_{31} \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + D_{32} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + D_{33} \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \\ D_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \end{aligned}$$

Reagrupando y considerando que $D_{ij} = D_{ji}$ (el tensor de rapidez de deformación es simétrico)

$$\begin{aligned}
 D_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= D_{11} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + D_{12} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) \right] + D_{13} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \right] \\
 &+ D_{21} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \right] + D_{22} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + D_{23} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \right] \\
 &+ D_{31} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) \right] + D_{32} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \right] + D_{33} \frac{\partial v_3}{\partial x_3}
 \end{aligned}$$

$$\therefore D_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = D_{ij} D_{ij}$$

$$\Rightarrow \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \sigma'_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 2\mu D_{ij} D_{ij}$$

Por lo que

$$P_S = 2\mu (D_{11}^2 + D_{22}^2 + D_{33}^2 + 2D_{12}^2 + 2D_{23}^2 + 2D_{31}^2)$$

El término P_S representa el trabajo realizado por unidad de volumen y por unidad de tiempo (el cual siempre será positivo), para cambiar la forma del elemento diferencial. Esta parte del trabajo realizado se acumula con el tiempo en función de la variación de la velocidad de deformación D_{ij} , entonces, la función ξ_{indis} (función de disipación) representa la velocidad con la que el trabajo se convierte en calor para un fluido newtoniano incompresible.

$$\xi_{indis} = 2\mu (D_{11}^2 + D_{22}^2 + D_{33}^2 + 2D_{12}^2 + 2D_{23}^2 + 2D_{31}^2) = 2\mu D_{ij} D_{ij}$$

Función disipativa para un fluido newtoniano compresible

Como

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\Delta\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}$$

$$\Delta = \nabla \cdot \mathbf{v}$$

La rapidez de trabajo desarrollado por los esfuerzos queda

$$\sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -p\Delta + \lambda\Delta^2 + \xi_{indis} = -p\Delta + \xi$$

donde

$$\xi = \lambda(D_{11} + D_{22} + D_{33})^2 + \xi_{indis}$$

Lo anterior debido a que

$$\sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -p \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta_{ij} + \lambda \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta_{ij} + 2\mu D_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

$$\sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + 2\mu D_{ij} D_{ij}$$

$$\sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -p\Delta + \lambda\Delta^2 + 2\mu D_{ij} D_{ij}$$

donde ξ_{discom} es la función disipativa para fluido compresible, la cual se puede representar también como

$$\xi_{discom} = \lambda(D_{11}^2 + D_{22}^2 + D_{33}^2) + \xi_{indis}$$

$$\xi_{indis} = 2\mu(D_{11}^2 + D_{22}^2 + D_{33}^2 + 2D_{12}^2 + 2D_{23}^2 + 2D_{31}^2)$$

$$\xi_{discom} = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) (D_{11} + D_{22} + D_{33})^2 + \frac{2}{3}\mu \left[(D_{11} - D_{22})^2 + (D_{33} - D_{11})^2 + (D_{22} - D_{33})^2 \right]$$

$$+ 4\mu(D_{12}^2 + D_{13}^2 + D_{23}^2)$$

Resulta evidente que la función de disipación (rapidez con la que el trabajo se transforma en calor) asociada a un fluido compresible será siempre mayor que la correspondiente para un fluido incompresible.

7.15 DIFUSIVIDAD TÉRMICA

En el caso de difusión de una especie en un solvente se ha demostrado experimentalmente que existe una relación entre la concentración C del soluto en función de la posición x , y del tiempo, a dicha relación se le conoce como Segunda Ley de Fick y se expresa como

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[D \frac{\partial C}{\partial x_i} \right]$$

A partir de considerar que el coeficiente de difusión D no depende de la posición, esta ecuación se simplifica a

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x_i^2} \quad \text{o} \quad \frac{\partial C}{\partial t} = D \nabla^2 C$$

De manera análoga se define una ecuación diferencial en derivadas parciales que relaciona la temperatura con la posición y el tiempo, empleando para esto un parámetro definido como difusividad térmica α . Para su determinación considérese la ecuación de conservación de energía, la cual en notación general se expresa

$$\rho \frac{Du}{Dt} - T \nabla \cdot v + \nabla \cdot q - \rho \dot{q}_s = 0$$

donde ρ representa la densidad, mientras que u es la energía interna; T o σ es el tensor de esfuerzos, q es el calor por conducción y \dot{q}_s o \dot{h} representa la rapidez de generación de calor en el interior del medio continuo. Si solamente existe un flujo de calor por conducción, el cual sigue la Ley de Fourier $q = -\kappa \nabla \theta$, donde θ representa la temperatura, κ es la

constante de conductividad térmica y la rapidez de generación de calor al interior del medio continuo es igual a cero; a partir de lo anterior se tiene que

$$\rho \frac{Du}{Dt} - \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_i} = 0$$

En notación general se tiene que

$$\rho \frac{Du}{Dt} - T \nabla v - \kappa \nabla^2 \theta$$

Por otra parte, considerando la función de disipación para un fluido incompresible ξ_{indis} y que la energía interna es una función de la temperatura $u = c\theta$, donde c es el calor específico, entonces

$$\rho c \frac{D\theta}{Dt} - \xi_{indis} - \kappa \nabla^2 \theta = 0$$

donde la función de disipación representa la energía disipada como calor por efecto de las fuerzas viscosas. Existen, por otra parte, una gran cantidad de condiciones en las cuales la energía disipada es muy pequeña cuando se compara con la magnitud del flujo de calor, razón por la cual la ecuación se simplifica a

$$\rho c \frac{D\theta}{Dt} - \kappa \nabla^2 \theta = 0$$

Reordenando la ecuación, ésta se puede representar como

$$\frac{D\theta}{Dt} - \frac{\kappa}{\rho c} \nabla^2 \theta = 0$$

Sustituyendo $\alpha = \frac{\kappa}{\rho c}$ (difusividad térmica), por lo que

$$\frac{D\theta}{Dt} = \alpha \nabla^2 \theta$$

Ecuación similar a la de Fick, cuya solución, permite determinar la temperatura en función de posición y tiempo. La difusividad térmica es una nueva constante de proporcionalidad a la constante de conductividad térmica e inversamente proporcional al producto de la densidad por el calor específico (energía interna por unidad de volumen).

7.16 FLUJO IRROTACIONAL DE UN FLUIDO NO VISCOSO DE DENSIDAD HOMOGÉNEA

Como ha sido mencionado anteriormente para el caso de un fluido no viscoso, el estado de esfuerzos T_{ij} se puede representar como $T_{ij} = -p\delta_{ij}$, de lo que la ecuación de conservación de cantidad de movimiento se expresa como

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho B_i = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$$

O, en notación general

$$-\nabla p + \rho B = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \nabla v \right)$$

descripción que es conocida como Ecuación de Movimiento de Euler.

Ecuación de Bernoulli

Cuando se estudia un fluido no viscoso, incompresible y cuya densidad es homogénea, será siempre posible que se presente un flujo irrotacional. Considere que los campos son conservativos, de tal forma que el vector de fuerzas de cuerpo se puede desarrollar a partir de una función de potencial Ω , tal que; $B = -\nabla\Omega$. El caso más común es aquel en que el medio continuo se encuentra exclusivamente bajo el efecto de la fuerza de gravedad, considerando que el eje x_3 coincide con la vertical se tiene que $\Omega = gx_3$, por lo que $B_i = 0\hat{e}_1 + 0\hat{e}_2 - g\hat{e}_3$, por otra parte al tratarse un flujo irrotacional, $\nabla v = (\nabla v)^T$.

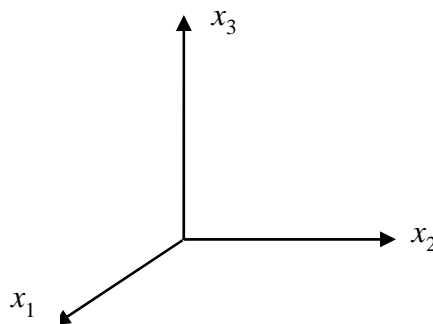


FIGURA 7.12 PARA LA DEFINICIÓN DE LAS FUERZAS DE CUERPO EL EJE x_3 SE HACE COINCIDIR CON LA VERTICAL

Sustituyendo en la ecuación de Euler se tiene

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

Por lo que, reordenando

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} - v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t}$$

Como

$$v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial v_j v_j}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} v_j^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} v_j v_j$$

Además, para un flujo irrotacional el campo de velocidades se puede expresar a través de una función φ , tal que

$$v_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

Es entonces que

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left(p + \rho \Omega + \frac{1}{2} \rho v^2 - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = 0$$

Por lo tanto, se puede concluir que

$$p + \rho \Omega + \frac{1}{2} \rho v^2 - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = k$$

donde k = constante con la posición

$$\Rightarrow p + \rho \Omega + \frac{1}{2} \rho v^2 = \rho f(t)$$

Si el flujo es establecido (estacionario) $\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \text{cte}$, por lo que

$$\left(\frac{p}{\rho} + \Omega + \frac{v^2}{2} \right) = \text{cte}$$

Lo que entonces permite deducir la ecuación de Bernoulli:

$$\left(p + \rho g x_3 + \rho \frac{v^2}{2} \right) = C$$

Siendo C una constante.

Esta expresión es muy útil en aquellos casos en que la viscosidad pueda ser despreciada o también cuando, como se demostrará más adelante, el flujo se idealice como irrotacional.

Ecuación de Torricelli

Considere ahora un fluido incompresible y no viscoso. De acuerdo con lo expuesto, si el flujo es estable se cumplirá con la ecuación de Bernoulli:

$$\left(p + \rho \frac{v^2}{2} + \rho g x_3 \right) = C$$

Ahora bien, si el nivel del recipiente (figura 7.13) permanece constante y la presión sobre el nivel del fluido es la misma que la de descarga, se cumplirá que

$$p_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \rho \frac{v_2^2}{2} + \rho g h_2$$

donde la condición 1 se refiere al plano de entrada (superficie del líquido en el tanque), mientras que la 2 se refiere a la descarga; además de lo anterior, se considera que el nivel del fluido en el tanque es constante por lo que $v_1 = 0$, por consecuencia

$$p_1 = p_2 = p_{atm} \quad \text{presión atmosférica}$$

$$v_1 = 0 \Rightarrow h_1 - h_2 = \Delta h \quad \text{diferencia de nivel}$$

$$\therefore v_2 = \sqrt{2g\Delta h}$$

La cual es conocida como **Ecuación de Torricelli**.

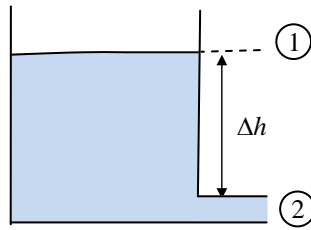


FIGURA 7.13 UN TANQUE CUYO NIVEL DE FLUIDO, CON RESPECTO A LA POSICIÓN DE DESCARGA, ES h PRESENTARÁ UNA VELOCIDAD DE SALIDA, LA CUAL ESTÁ DADA POR $v = \sqrt{2gh}$

Flujos irrotacionales como solución a la ecuación de Navier-Stokes

Considérese en primera instancia la ecuación de Navier Stokes para un fluido incompresible

$$-\nabla p + \mu \nabla \cdot (\nabla v) + \rho B = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \nabla v \right)$$

En notación índice, ésta queda

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + B_i \rho = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$$

El campo de velocidades para un flujo irrotacional se puede describir a partir de una función escalar η , tal que

$$-\frac{\partial \eta}{\partial x_i} = v_i$$

entonces, sustituyendo

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \left(-\frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right) = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_j \partial x_j} \right)$$

Pero se ha demostrado que la ecuación de la continuidad (fluido incompresible) se expresa en la forma

$$\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_j \partial x_j} \right) = \nabla^2 \eta = 0$$

Por lo tanto, para un flujo irrotacional de un fluido Newtoniano incompresible se tiene

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \left(-\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_j \partial x_j} \right) + B_i \rho = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$$

Por lo que el término que representa los esfuerzos viscosos se hace cero, entonces la ecuación constitutiva se reduce a

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + B_i \rho = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$$

la cual corresponde con la ecuación de Euler (para un fluido no viscoso).

Por lo tanto, todos los resultados desarrollados para flujos no viscosos corresponden también al caso de flujos irrotacionales. Sin embargo, en todo problema real existirán fronteras físicas en las cuales la velocidad del fluido será de cero (o la velocidad de la frontera) en virtud de que el fluido se adhiere a ésta. Es por consecuencia que la condición $v = -\nabla \phi$ no se podrá cumplir en las condiciones de frontera.

7.17 ECUACIÓN DE TRANSPORTE DE VORTICIDAD PARA UN FLUIDO VISCOSO INCOMPRESIBLE DE DENSIDAD HOMOGÉNEA

La imposibilidad de que exista una función η , la cual se cumple para las paredes (frontera) que confinan el movimiento del fluido, da lugar a la existencia de vorticidad confinada a una capa adyacente a la frontera.

De nueva cuenta, retomando la ecuación de Navier-Stokes

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \right) + B = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

Asimismo, sustituyendo de tal forma que $\psi = \mu / \rho$ (viscosidad cinemática) y que $B = -\nabla \Omega$, $\Omega = gx_3$

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{p}{\rho} + \Omega \right) + \psi \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

Empleando el operador $\varepsilon_{mni} \frac{\partial}{\partial x_n}$ (tomando rotacional de ambos lados de la ecuación anterior):

$$\varepsilon_{mni} \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon_{mni} \frac{\partial v_i}{\partial x_n} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \gamma_m$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{mni} \frac{\partial}{\partial x_n} \left(v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) &= \varepsilon_{mni} \frac{\partial v_j}{\partial x_n} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\varepsilon_{mni} \frac{\partial v_i}{\partial x_n} \right) \\ &= \varepsilon_{mni} \frac{\partial v_j}{\partial x_n} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial \gamma_m}{\partial x_j} \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{mni} \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_i} \left(\frac{p}{\rho} + \Omega \right) = 0 \Rightarrow \nabla \times \left(\frac{p}{\rho} + \Omega \right) = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{mni} \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \left(\varepsilon_{mni} \frac{\partial v_i}{\partial x_n} \right) = \frac{\partial^2 \gamma_m}{\partial x_j \partial x_j}$$

La ecuación de Navier Stokes toma entonces la siguiente forma

$$\frac{\partial \gamma_m}{\partial t} + v_j \frac{\partial \gamma_m}{\partial x_j} + \varepsilon_{mni} \frac{\partial v_j \partial v_i}{\partial x_n \partial x_j} = \nu \frac{\partial^2 \gamma_m}{\partial x_j \partial x_j}$$

Por otra parte, se puede demostrar que el tercer término del lado izquierdo de la ecuación es igual a cero, por lo que

$$\varepsilon_{mni} \frac{\partial v_j \partial v_i}{\partial x_n \partial x_j} = 0$$

$$\frac{D\gamma_m}{Dt} = \frac{\partial v_m}{\partial x_n} \gamma_n + \nu \frac{\partial^2 \gamma_m}{\partial x_j \partial x_j}$$

Lo cual en forma invariante se expresa

$$\frac{D\gamma}{Dt} = (\nabla v) \gamma + \nu \nabla^2 \gamma$$

En una frontera sólida el fluido se adhiere, lo que da lugar a que las velocidades en esta interfase están definidas por la superficie. Los vórtices son generados en la superficie difundiendo al flujo. En algunos casos los vórtices quedan confinados a una capa delgada en la vecindad de la frontera, de tal forma que fuera de esta capa el flujo es irrotacional.

7.18 EL CONCEPTO DE CAPA LÍMITE

De lo que ha sido discutido con antelación se ha comprobado que las funciones que describen el comportamiento en un fluido viscoso y no viscoso son iguales, sin embargo, debido a la presencia de esfuerzos cortantes en el seno del fluido viscoso, la condición a ser satisfecha en las superficies rígidas de fronteras S , en contacto con el fluido viscoso son diferentes que el caso no viscoso. Para el caso del flujo del fluido viscoso, en la superficie de frontera S , la velocidad estará dada por v_S que representa la velocidad a la que se mueve la superficie. Si ésta se encuentra en reposo es evidente que $v_S = 0$. Sin embargo, las condiciones impuestas al fluido implican que la componente normal de la velocidad de éste sea la misma que la de la superficie sólida (en el punto de contacto), lo cual representa en sí una restricción a la componente tangencial. Esto en consecuencia representa que el fluido en contacto con la superficie sólida se deba mover en conjunción con dicha superficie, **lo cual representa que el fluido está adherido a la superficie y por consecuencia no**

puede deslizarse sobre ésta. Esta condición fue primero propuesta por Stokes, y es conocida como condición de no deslizamiento. Con la intención de satisfacer esta condición de frontera, Prandtl en 1905 propuso la hipótesis que en una zona muy cercana, adyacente a la superficie de la frontera, la velocidad relativa del fluido se incrementa muy rápido desde cero (en la frontera sólida) hasta la del flujo en la zona exterior de dicha zona. Esta delgada capa es denominada como *capa límite*, al interior de la cual los efectos de la viscosidad son predominantes. Fuera de ésta, las condiciones se pueden considerar como de un fluido no viscoso. Por consecuencia, los fenómenos disipativos se presentarán en dicha capa.

Ecuación de transporte de vorticidad para fluidos viscosos incompresibles de densidad constante (homogénea)

Se asume que las fuerzas de cuerpo son derivables a partir de una función de potencial (Ω)

$$B_i = -\frac{\partial \Omega}{\partial x_i}$$

condición que aplicada a las ecuaciones de Navier-Stokes se expresa

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{p}{\rho} + \Omega \right) + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

como ya se mencionó, el término $\frac{\mu}{\rho} = \nu$ representa la denominada viscosidad cinemática.

Flujo irrotacional como solución de las ecuaciones de Navier-Stokes

Si bien en las ecuaciones de Navier-Stokes al considerar la descripción de un flujo irrotacional para el cual $v_i = -\frac{\partial \eta}{\partial x_i}$ y dado que a partir de la ecuación de la continuidad se

debe cumplir con $\nabla^2 \eta = 0$; $\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_3^2}$

Esto se traduce en que las ecuaciones de Navier-Stokes se expresen en la forma

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\mu}{\rho}\nabla\cdot(\nabla v) + B = \frac{\partial v}{\partial t} + v\nabla v$$

En el caso de un fluido viscoso en flujo irrotacional, la ecuación, como se ha demostrado con antelación, se transforma en la ecuación de Euler, la cual corresponde a un flujo no viscoso.

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p + B = \frac{\partial v}{\partial t} + v\nabla v$$

Los resultados indican que un flujo irrotacional no es factible (dinámicamente posible) para una situación en donde se presentan fronteras sólidas. Un fluido viscoso se adhiere a las fronteras de tal forma que las componentes normal y tangencial de la velocidad del fluido corresponderán a la frontera. Esto representa que las componentes de la velocidad están predefinidas en la frontera. Por ejemplo, si $y = 0$ representa a la frontera sólida la cual se encuentra en reposo, entonces en ésta las componentes tangenciales $v_x = v_z = 0$ y la componente normal $v_y = 0$. Para un flujo irrotacional las condiciones preestablecidas η (función de flujo) en la frontera son $\eta = \text{constante}$ para $y = 0$ lo mismo que $v_x = v_z = 0$

$$\eta = k$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0$$

$$v_2 = 0 \quad \forall \quad y = 0$$

Pero es conocido que en general no existe solución para la ecuación de Laplace $\nabla^2 \eta = 0$

cuando $\eta = k$ y $\nabla \eta \cdot n = \frac{\partial \eta}{\partial n} = 0$ en las fronteras del sistema. En consecuencia, a menos que

las condiciones en las fronteras del sólido tiendan a ser consistentes con las condiciones de irrotacionalidad, se presentará la formación de vórtices en las fronteras, los cuales tenderán a propagarse en el seno del fluido de acuerdo con ciertas restricciones. En condiciones adecuadas, la vorticidad generada por las fronteras sólidas es confinada a una capa delgada de fluido en la vecindad de la frontera, de tal forma que el exterior de la capa de flujo es irrotacional. Dicha capa a la cual se limita la presencia de vórtices se denomina como **capa límite**.

Demostración de la imposibilidad de cumplimiento de la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \theta = 0$$

Considere un problema de conducción de calor en estado estable. Un fluido se encuentra en reposo entre dos placas de dimensiones infinitas. La placa inferior se encuentra a una temperatura constante θ_l y la superior, a θ_n .

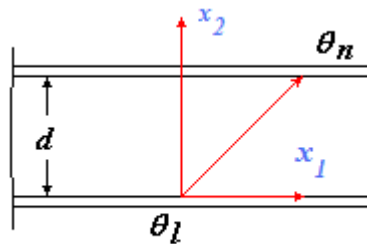


FIGURA 7.14 LA TEMPERATURA VARÍA EN FORMA LINEAL ENTRE LAS DOS PLACAS

La distribución de temperaturas en estado estable, de acuerdo con la ecuación de Laplace

es
$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} = 0$$

que en el caso en estudio se reduce a

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} = 0 \quad \therefore \quad \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = c \quad \theta = c_1 x_2 + c_2$$

Empleando las condiciones de frontera $\theta = \theta_l$ para $x_2 = 0$; $\theta = \theta_n$ para $x_2 = d$, entonces las constantes de integración quedan

$$\theta_l = c_1(0) + c_2 \quad \Rightarrow \quad \theta_l = c_2$$

$$\theta_n = c_1 d + \theta_l \quad c_1 = \frac{\theta_n - \theta_l}{d}$$

$$\theta = \frac{x_2(\theta_n - \theta_l)}{d} + \theta_l$$

Como se puede observar, cuando los valores de θ son predefinidos en las placas, los valores de $\frac{d\theta}{dx_2}$ en ellas están completamente determinados.

$$\frac{d\theta}{dx_2} = \frac{\theta_n - \theta_l}{d}$$

Esto permite ilustrar que en un problema de conducción de calor en estado estable (gobernado por la ecuación de Laplace) en general, no es posible prescribir los valores de θ y de las normales a las derivadas de ésta en los mismos puntos de la frontera, a menos que estos resulten consistentes uno con otro.

En una frontera sólida el fluido se adhiere, lo que da lugar a que las velocidades en esta interfase estén definidas por la superficie. Los vórtices son generados en la superficie difundiéndose al flujo. En algunos casos los vórtices quedan confinados a una capa delgada en la vecindad de la frontera, de tal forma que fuera de esta capa el flujo es irrotacional (figura 7.15). Por ejemplo, en las alas de un avión la capa límite se extiende en un espesor no mayor a un centímetro de la superficie del sólido, esto es, las velocidades varían rápidamente desde la correspondiente al avión (en la superficie del ala) hasta la del medio (velocidad del viento) quedando limitados a esta zona los elevados valores del número de Reynolds, reduciéndose rápidamente éstos conforme el flujo se aleja del ala.

La viscosidad es la responsable de la generación de vórtices en la región adyacente al sólido, su efecto dependerá de la velocidad del flujo v_0 . A elevados valores de la velocidad v_0 , la influencia del sólido se confina a sus zonas adyacentes, mientras que a bajas velocidades su efecto se extiende en el fluido en todas direcciones.

Por consecuencia, a elevadas velocidades, el efecto de formación de vórtices es confinado a una película delgada alrededor del obstáculo a la cual se denomina como capa límite. A las afueras de esta capa el flujo es irrotacional. Este concepto permite, al plantear la solución de un problema, dividir el flujo en una región externa irrotacional y una capa límite viscosa. Esto simplifica la complejidad de aplicar las ecuaciones de Navier.

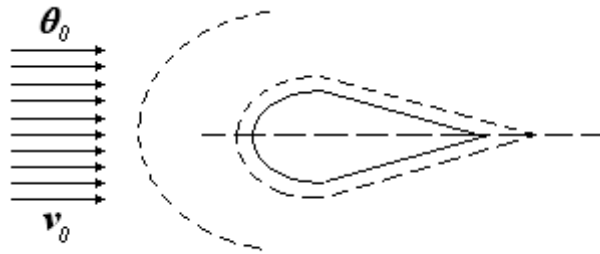


FIGURA 7.15 CONCEPTO DE CAPA LÍMITE. LA INFLUENCIA DE LA VISCOSIDAD DEPENDE DE LA VELOCIDAD DEL FLUJO. A ELEVADAS VELOCIDADES LA VISCOSIDAD (SUS EFECTOS) SON CONFINADOS A UNA CAPA DELGADA (CAPA LÍMITE)

7.19 FLUIDO NEWTONIANO COMPRESIBLE

Como ya ha sido mencionado con antelación, aquellos flujos en los que las variaciones de densidad son insignificantes se pueden describir como incompresibles; situación que favorece la solución del problema al reducir el número de variables. Cuando las variaciones de densidad en el flujo son importantes y su efecto no se puede despreciar es necesario definir al fluido como compresible. No se puede generalizar de entrada y relacionar con el estado de la materia (líquido o gas), de tal forma que se considere a los líquidos siempre como incompresibles y a los gases como compresibles. Dicha generalización, si bien corresponde con la mayoría de los casos prácticos, presenta sus limitaciones ya que los gases se pueden describir como incompresibles cuando el flujo se caracteriza por velocidades muy por debajo de la del sonido en el flujo. Definiendo al número de Mach M como la relación existente entre la velocidad del fluido v y la del sonido v_s de tal forma que

$$M = \frac{v}{v_s},$$

es entonces que se ha demostrado que los cambios de densidad son del orden del 2% para $M < 0.3$, esto representa que para el aire a temperatura ambiente se puede considerar como incompresible a velocidades menores de 100 m/s. Por otra parte, existen una infinidad de aplicaciones de ingeniería para las cuales los efectos de la compresibilidad de gases y líquidos son fundamentales para la correcta descripción de los fenómenos.

En un fluido compresible para ser consistente con el estado de esfuerzos para el reposo y movimiento la presión p no dependerá explícitamente de algún término cinemática, por lo que $p = p(\rho, \theta)$.

Por ejemplo, para los gases ideales se considera que

$$p = \rho R \theta$$

donde R es la constante universal del gas ideal ($R = 8.31 \text{ J/mol} \times \text{K}$)

$$\therefore \sigma_{ij} = -p(\rho, \theta) + \lambda \Delta \delta_{ij} + 2\mu D_{ij}$$

$$\sigma_{11} = -p + \lambda D_{kk} \delta_{ij} + 2\mu D_{11}$$

$$\sigma_{22} = -p + \lambda D_{kk} \delta_{ij} + 2\mu D_{22}$$

$$\sigma_{33} = -p + \lambda D_{kk} \delta_{ij} + 2\mu D_{33}$$

$$\sigma_{ii} = -3p + (3\lambda + 2\mu) D_{kk}$$

En el caso de que el fluido sea compresible

$$p \neq \frac{\sigma_{ii}}{3}$$

La presión no representa entonces a los esfuerzos compresivos totales.

Por otra parte, se define la compresibilidad volumétrica como

$$k = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad \text{compresibilidad volumétrica}$$

Cuando se trata de gases monoatómicos

$$\lambda + \frac{2}{3}\mu = 0$$

Por consecuencia, la ecuación de esfuerzos para un fluido compresible se expresa

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} - \frac{2}{3}\mu D_{kk} \delta_{ij} + 2\mu D_{ij} + k D_{kk} \delta_{ij}$$

Sustituyendo en la ecuación de movimiento, queda entonces

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho B_i = \rho \frac{Dv}{Dt}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} + \lambda \frac{\partial D_{kk}}{\partial x_j} \delta_{ij} + 2\mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right) + \rho B_i = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial D_{kk}}{\partial x_i} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) \right] + \rho B_i = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$$

Reordenando

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + k \frac{\partial}{\partial x_i} D_{kk} + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} D_{kk} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho B_i = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$$

$$D_{kk} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \text{div } \mathbf{v}$$

En forma general, la ecuación constitutiva queda

$$-\nabla p + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v}) + k \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \rho \mathbf{B} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}$$

Por consecuencia, se tienen 6 incógnitas $v_1, v_2, v_3, p, \rho, \theta$, por lo que a las anteriores 4 ecuaciones (ecuación de estado –escalar– y ecuación de movimiento –vectorial–) habrá que adicionar la Ecuación de Continuidad

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

donde la sexta ecuación es la de la Energía, sin considerar el calor que se genere al interior del MC

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j \partial x_j}$$

De la ecuación anterior surgen nuevas incógnitas, ya que es necesario determinar el estado de esfuerzos σ_{ij} y la energía interna u :

$$u = C_v \theta$$

donde C_v representa el calor específico a volumen constante; en general, se cumplirá que

$$u = u(\rho, \theta)$$

Se concluye entonces que el análisis para un fluido compresible será mucho más complejo que para el caso de que éste se declare como incompresible; las incógnitas están dadas por:

- i) Campo de velocidades v_i
- ii) Densidad ρ
- iii) Presión p ; $p = p(\rho, \theta)$
- iv) Temperatura θ
- v) Energía interna u

7.20 ONDAS ACÚSTICAS

La propagación del sonido puede ser aproximada, considerando la propagación de disturbios infinitesimales en un fluido compresible no viscoso. Para un fluido no viscoso negando el efecto de fuerzas de cuerpo, la ecuación de movimiento queda

$$-\nabla p = \rho \frac{Dv}{Dt}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$$

De otra forma

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

Considerando que se parte de condiciones de reposo

$$\rho = \rho_0, \quad v_i = 0, \quad p = p_0$$

donde ρ y p_0 son la densidad y presión en un tiempo inicial.

Se supone que a partir del reposo se producen los disturbios

$$\rho = \rho_0 + \rho'(x_i, t), \quad v_i = v'(x_i, t), \quad p = p_0 + p'(x_i, t)$$

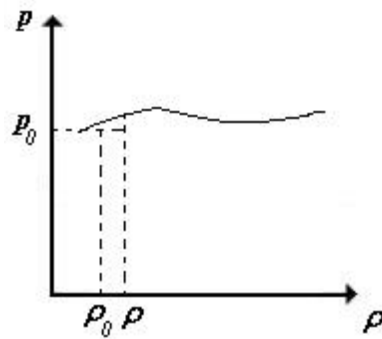


FIGURA 7.16 LA PROPAGACIÓN DE ONDAS ACÚSTICAS GENERA PEQUEÑAS VARIACIONES DE PRESIÓN Y DENSIDAD

Sustituyendo en la ecuación de movimiento

$$\frac{\partial v'_i}{\partial t} + v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{(\rho_0 + \rho')} \frac{\partial p'}{\partial x_i}$$

Como los disturbios generados son muy pequeños (infinitesimales)

$$v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \rightarrow 0 \quad \rho_0 + \rho' \rightarrow \rho_0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v'_i}{\partial t} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x_i} \quad (7.6)$$

De manera análoga, si se considera la ecuación de conservación de masa se tendrá

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot v) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\rho_0 \left(1 + \frac{\rho'}{\rho} \right) \frac{\partial v'_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho'}{\partial t} + v'_i \frac{\partial \rho'}{\partial x_i} = 0$$

Al ser un disturbio infinitesimal

$$v'_i \frac{\partial \rho'}{\partial x_i} \rightarrow 0, \quad \frac{\rho'}{\rho_0} \rightarrow 0$$

$$\therefore \rho_0 \frac{\partial v'_i}{\partial x_i} = - \frac{\partial \rho'}{\partial t} \quad (7.7)$$

Derivando 7.6 con respecto a x_i

$$\frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_i \partial t} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i \partial x_i} \quad (7.8)$$

Derivando 7.7 con respecto a t

$$\frac{\partial^2 v'_i}{\partial t \partial x_i} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} \quad (7.9)$$

Igualando de 7.8 y 7.9, se tiene que

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = 0$$

Se puede considerar sin incurrir en un error mayor, que el flujo es a temperatura constante, de tal forma que la presión depende explícitamente solo de la densidad. Considerando que

$$\frac{p_1 V_1}{\theta_1} = \frac{p_2 V_2}{\theta_2}$$

$$p = \rho R \theta$$

$$\Rightarrow p = p(\rho)$$

Expandiendo la ecuación en series de Taylor y considerando que se trata de un fluido barotrópico $p = p(\rho)$, entonces la presión se puede expresar como

$$p = p_0 + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0) + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial^n p}{\partial \rho^n} \right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0)^n$$

Si despreciamos el efecto de términos de orden superior, se puede definir

$$p = p_0 + p'(x, t)$$

$$p = p_0 + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0)$$

$$\Rightarrow p' = C_0^2 \rho'$$

$$C_0^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0}$$

$$\rho' = \rho - \rho_0$$

$$p' = p - p_0$$

Entonces, para un flujo barotrópico (la densidad sólo depende de la presión) se tiene que, partiendo de la ecuación diferencial en derivadas parciales (ecuación 7.10):

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}$$

$$C_0^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2}$$

Esta ecuación es equivalente a la de la onda elástica (sólido elástico, homogéneo, lineal e isotrópico) que ha sido definida en el capítulo 6; razón por la cual se concluye que las variaciones de presión y de la densidad se propagan en el fluido con una velocidad

$$C_0 = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho} \right)_{\rho_0}}$$

Dicha velocidad C_0 es definida como la del sonido en condiciones de estancamiento, donde

la velocidad local del sonido C está dada por $C = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$

Para un flujo isoentrópico se tiene $p = k\rho^\gamma$, donde $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$, siendo estos los calores específicos del fluido a presión y volumen constante. En este caso la velocidad del sonido se expresa $C = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$.

Con la finalidad de comprobar la relación antes desarrollada con la establecida para SEHLI, considerando desplazamientos infinitesimales (ecuación de Navier), se tiene

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon_{jj}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho_0 B_i$$

Como el fenómeno es lineal, se pueden estudiar por separado las ondas longitudinales y transversales. Si se considera una onda longitudinal,

$$u_1 = a \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\ell} (x_1 - v_\ell t) \quad ; \quad u_2 = 0 \quad ; \quad u_3 = 0$$

Considerando un fenómeno lineal, la ecuación diferencial que gobierna queda

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = v_\ell^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \quad ; \quad u_1 = u(x_1, t)$$

$$v_\ell^2 = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0} \right) \quad \text{y} \quad u_2 = u_3 = 0$$

por analogía

$$v_\ell^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0}$$

Por lo tanto, la velocidad del sonido está dada por $C_0 = \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} \right]^{1/2}$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Un elemento cilíndrico de radio r , longitud l y densidad ρ , está sujeto al fondo de un recipiente de acuerdo con la siguiente figura. El fluido en el que se encuentra inmerso el elemento cilíndrico presenta una densidad ρ_l . Con base en lo antes expuesto, determine el nivel de esfuerzos σ en el cable C cuyo diámetro es d y su límite elástico es σ_0 .

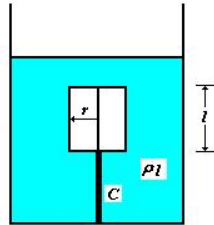


FIGURA 7.17 RECIPIENTE CON DENSIDAD ρ INMERSO EN UN FLUIDO CON DENSIDAD ρ_l Y SUJETO AL FONDO

SOLUCIÓN

Tomando en cuenta el principio de Arquímedes:

$$d = 2r$$

$$f = (\rho_l - \rho)Vg$$

$$V = \pi \frac{d^2}{4} l$$

$$f = -\pi \frac{d^2}{4} l (\rho - \rho_l) g$$

$$\sigma = \frac{f}{A} = \frac{-\pi d^2 l (\rho - \rho_l) g}{\pi d^2}$$

$$\sigma = -\left(\frac{d}{d}\right)^2 (\rho - \rho_l) gl$$

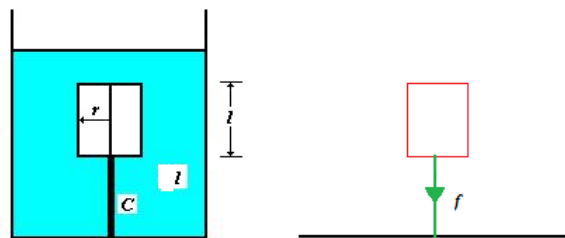


FIGURA 7.18 SI LA DENSIDAD DEL CUERPO ES MAYOR QUE LA DEL LÍQUIDO LA CARGA SOBRE EL CABLE SERÁ DE COMPRESIÓN

2. Un recipiente con un fluido incompresible se mueve verticalmente hacia abajo con una aceleración constante a . Determine la presión en un punto que se encuentra a una profundidad h de la superficie. Considere que en la superficie ($h=0$) la presión está dada por p_0 y que la densidad se expresa como ρ .

SOLUCIÓN

Al moverse el recipiente hacia arriba, la inercia del fluido genera un efecto adicional.

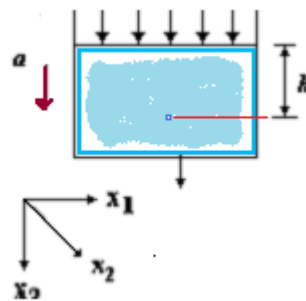


FIGURA 7.19 EL RECIPIENTE QUE CONTIENE AL FLUIDO DE DENSIDAD ρ SE MUEVE HACIA ABAJO CON UNA ACELERACIÓN a

\Rightarrow para un fluido se tiene: $-\nabla p + \rho B = \rho a$

Eje x_1 $\frac{\partial p}{\partial x_1} = 0$ \therefore $p = \text{cte. con respecto a } x_1$

Eje x_2 $\frac{\partial p}{\partial x_2} = 0$ \therefore $p = \text{cte. con respecto a } x_2$

$$B_3 = g \qquad a_3 = -a$$

Eje x_3 $-\frac{\partial p}{\partial x_3} + \rho B_3 = \rho a_3$

$$-p = \rho(a_3 - g)x_3 + p_0$$

3. Un vehículo arrastra un contenedor rectangular separado por una división central. El contenedor tiene una longitud l de 6 m por 2 m de ancho e igual de altura, el fluido en reposo dentro del contenedor alcanza una altura de 1 m. Al ponerse la luz del semáforo en rojo, el vehículo debe desacelerar con una magnitud constante (a -aceleración en dirección horizontal). Considerando movimiento de cuerpo rígido, determine el ángulo θ de la superficie libre del tanque; asimismo, determine la ecuación que define la presión para cualquier punto del tanque. Calcule la altura máxima que alcanza el fluido al chocar con la pared vertical ($a = g/3$).

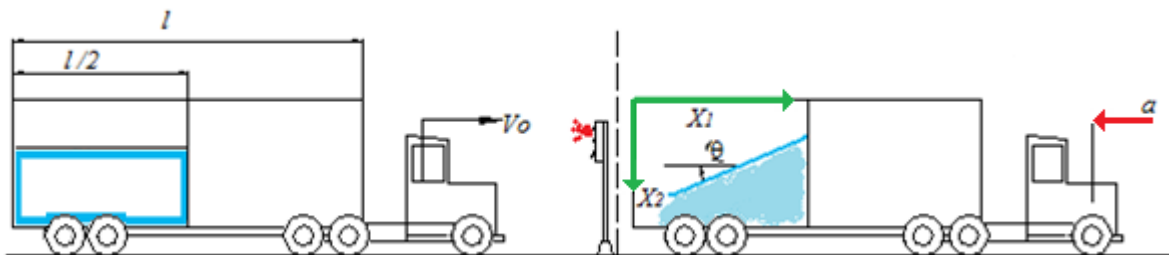


FIGURA 7.20 AL ACELERAR EL VEHÍCULO POR EFECTOS DE LA INERCIA EL LÍQUIDO TIENDE A MOVERSE HACIA ATRÁS (FIGURA SUPERIOR); POR OTRA PARTE AL PRESENTAR UNA ACELERACIÓN NEGATIVA (FIGURA INFERIOR) EL FLUIDO SE DESPLAZA HACIA ADELANTE

Para el caso en que el vehículo acelera a partir del reposo, el líquido por efecto de la inercia se inclina hacia atrás, en caso de acelerar la inclinación será en sentido opuesto, situación que corresponde al caso en estudio.

$$a_1 = -a, \quad a_2 = a_3 = 0, \quad B_1 = B_3 = 0, \quad B_2 = g$$

SOLUCIÓN

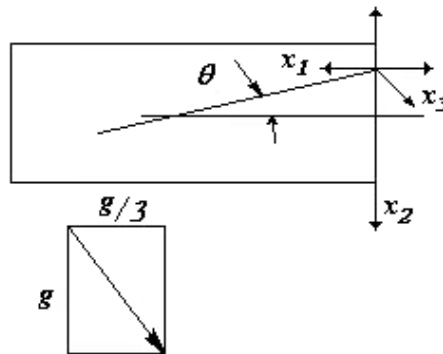


FIGURA 7.21 EL ÁNGULO DE INCLINACIÓN DE LA SUPERFICIE ES FUNCIÓN DE LA ACELERACIÓN

$$\theta = \text{angtan} \left(\frac{g/3}{g} \right) = 18.43^\circ$$

$$B = 0\hat{e}_1 + g\hat{e}_2 + 0\hat{e}_3$$

$$a = \frac{g}{3}\hat{e}_1 + 0\hat{e}_2 + 0\hat{e}_3$$

$$-\nabla p + \rho B = \rho a$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \text{cte.} \quad \text{con respecto a } x_3$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_2} + \rho g = 0 \quad \Rightarrow \quad p(x_2) = \rho g x_2 + f(x_1) + p_0$$

$$p(x_1, x_2) = \rho g x_2 + \rho a x_1 + p_0$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \tan \theta \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{x_2}{\tan \theta}$$

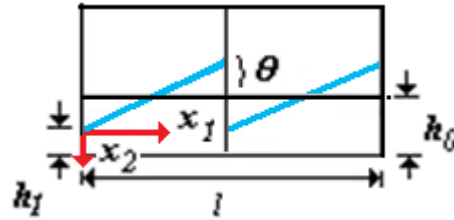


FIGURA 7.22 LOS EJES SE COLOCAN EN EL VERTICE DE LA SUPERFICIE DEL FLUIDO

El fluido es incompresible por lo que el volumen ocupado por éste antes y después de su desplazamiento son iguales, asimismo debe recordarse que el tanque tiene una división en el centro

$$\frac{h_1 + h_2}{2} \left(\frac{l}{2} \right) b = h_0 \frac{l}{2} b$$

$$h_2 = h_1 + \frac{l}{2} \tan \theta \quad \Rightarrow \quad h_2 = h_0 + \frac{l}{4} \tan \theta \quad \Rightarrow \quad h_2 = 1 + \frac{6}{4} \tan 18.43^\circ = 1.5 \text{ m}$$

$$V = \text{cte} \quad ; \quad V_0 = h_0 \frac{l}{2} b$$

$$b = \text{cte} \quad ; \quad l = \text{cte}$$

$$V_f = \frac{h_1 + h_2}{2} \left(\frac{l}{2} \right) b \quad \Rightarrow \quad h_1 = h_0 - \Delta h = 0.5 \text{ m}$$

4. El tensor σ_{ij} describe el estado de esfuerzos para un punto X_1 de un fluido incompresible. Para σ_{ij} determine el tensor σ'_{ij} que depende exclusivamente de la velocidad de deformación, asimismo determine la presión hidrostática asociada.

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -45 & 6 & 10 \\ 6 & -15 & 15 \\ 10 & 15 & 0 \end{pmatrix} \times 10^3 \quad [\text{Pa}]$$

Si la densidad del fluido es de 1000 Kg/m^3 , indique la profundidad (de ser esto posible) a la que se encuentra el punto en estudio.

SOLUCIÓN

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij}$$

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\dot{\epsilon}_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\dot{\epsilon}_{ij}$$

Fluido incompresible

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\dot{\epsilon}_{ij}$$

$$\sigma_{11} = -p\delta_{ij} + 2\mu\dot{\epsilon}_{11}$$

$$\sigma_{22} = -p\delta_{ij} + 2\mu\dot{\epsilon}_{22}$$

$$\sigma_{33} = -p\delta_{ij} + 2\mu\dot{\epsilon}_{33}$$

$$\sigma_{ii} = -3p + 2\mu\dot{\epsilon}_{ii}$$

Como $\dot{\epsilon}_{ii} = 0 \Rightarrow \sigma_{ii} = -3p$

$$\sigma_H = \frac{\sigma_{ii}}{3} = -p = -20 \times 10^3 \quad [\text{Pa}] \quad \Rightarrow \quad p = 20 \times 10^3 \quad [\text{Pa}]$$

$$\sigma_H = \rho gh \quad ; \quad \rho = 1000 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$$

$$g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\therefore h \hat{=} 2 \text{ m}$$

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij}$$

$$-p = \sigma_H = \begin{pmatrix} -20 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{pmatrix} \times 10^3 \quad [\text{Pa}]$$

$$\therefore \sigma'_{ij} = \begin{pmatrix} -25 & 6 & 10 \\ 6 & 5 & 15 \\ 10 & 15 & 20 \end{pmatrix} \times 10^3 \quad [\text{Pa}]$$

5. La compuerta AB de la figura es rectangular de 1 m de ancho y 4 m de largo, ésta gira sobre el punto A . Si la masa de la compuerta es de 400 kg, encuentre las reacciones en A y B . El fluido en el tanque es agua.

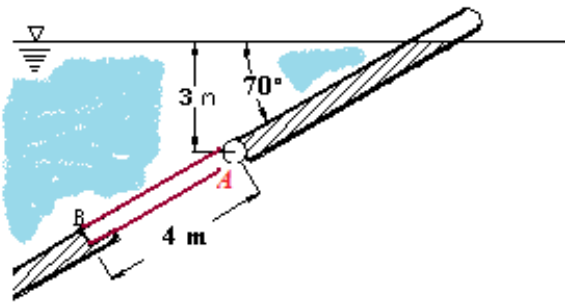


FIGURA 7.23 COMPUERTA SUMERGIDA EN UN TANQUE CON AGUA

SOLUCIÓN

Para analizar el problema se puede considerar a la compuerta como una viga simplemente apoyada en A, B ; la carga se incrementa linealmente de acuerdo con la profundidad $f_A = pA = \rho gh_A A$, mientras que en B , la carga será $f_B = f_A + \rho g \Delta h A$. Entre estos dos puntos la carga varía de acuerdo con $f = f_A + \rho g x \text{sen } \theta$. Donde x se mide en la dirección

de la compuerta a partir de $A(x=0)$ y hasta $B(x=4\text{ m})$. Si se considera el peso de la compuerta, éste deberá colocarse en el centro de cargas, tal como se observa en la figura 7.24:

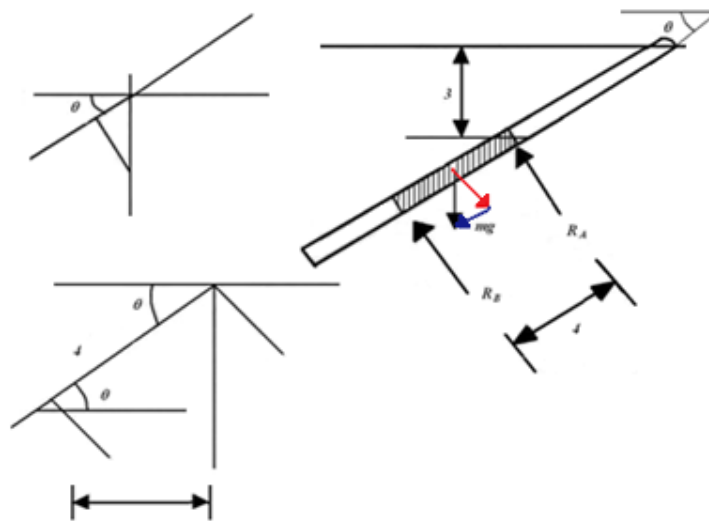


FIGURA 7.24 DISPOSICIÓN DE LA COMPUERTA

$$p_A = \rho g h_A; \quad h_A = 3 \text{ m}$$

$$p_B = \rho g h_B = \rho g (h_A + \Delta h)$$

$$\Delta h = l \text{ sen } \theta_B = 4 \text{ sen } 70^\circ = 3.75 \text{ m}$$

$$h_B = h_A + \Delta h = 3 + 3.75 = 6.75 \text{ m}$$

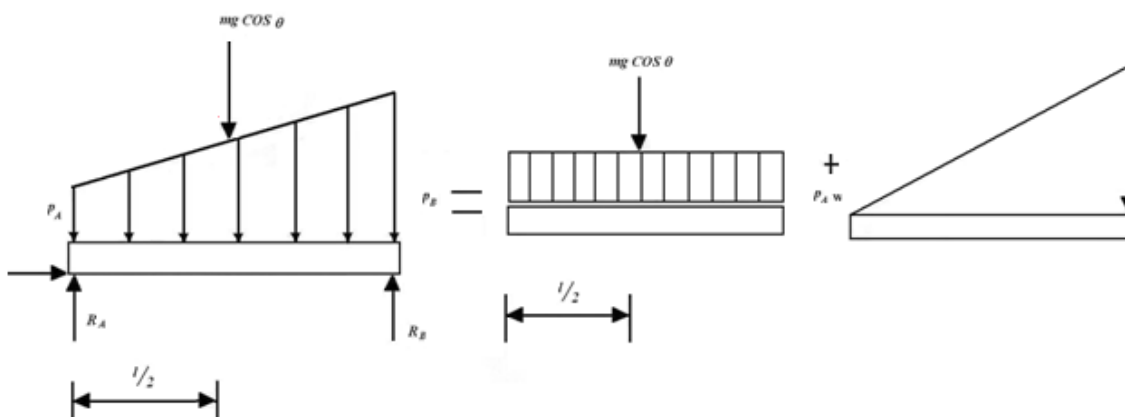


FIGURA 7.25 DESCOMPOSICIÓN DE CARGAS

Dado que se trata de un sistema que se encuentra en equilibrio, entonces $\sum f = 0$; $\sum M = 0$, lo momentos en los apoyos es nulo, por lo tanto,

$$\Sigma f = 0 \Rightarrow mg \cos \theta + (\rho g h_A) wl + \left(\frac{\rho g \Delta h}{2} \right) wl = R_A + R_B$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow 0 = R_B l - (mg \cos \theta) \frac{l}{2} - [(\rho g h_A) wl] \frac{l}{2} - \left(\frac{\rho g \Delta h}{2} \right) wl \left(\frac{2}{3} l \right)$$

$$4R_B - (2681.43 + 235200 + 196000) = 0$$

$$R_B = 108470 \text{ N}$$

$$R_A = 192440 - R_B$$

$$R_A = 83970.7 \text{ N}$$

6. Desarrolle (en coordenadas rectangulares) la ecuación de conservación de cantidad de movimiento para un fluido newtoniano incompresible. Indíquela en forma general

SOLUCIÓN

Ecuación de Cauchy

$$\text{div } \sigma + \rho B = \rho \frac{Dv}{Dt}$$

$$\nabla \cdot T + \rho B = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \nabla v \right)$$

$$T = -pI + T'$$

T' - esfuerzos viscosos

$$T = \lambda \Delta I + 2\mu D$$

$$T = -pI + \lambda (\nabla \cdot v) I + 2\mu \left[\frac{1}{2} (\nabla v + (\nabla v)^T) \right]$$

Sustituyendo en la ecuación de Cauchy:

$$\nabla \left[-pI + \lambda(\nabla \cdot v)I + 2\mu \left[\frac{1}{2}(\nabla v + (\nabla v)^T) \right] \right] + \rho B = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \nabla v \right)$$

$$-\nabla p + \lambda \nabla(\nabla \cdot v) + \mu \nabla \cdot (\nabla v) + \mu \nabla(\nabla \cdot v) + \rho B = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \nabla v \right)$$

Considerando incompresibilidad

$$-\nabla p + \mu [\nabla \cdot (\nabla v)] + \rho B = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \nabla v \right)$$

7. El tensor de esfuerzos asociado a un punto q de un fluido newtoniano incompresible está dada por:

$$\sigma_{ijq} = \begin{pmatrix} -60 & 3 & -4 \\ 3 & -100 & 8 \\ -4 & 8 & -20 \end{pmatrix} \quad [\text{kPa}]$$

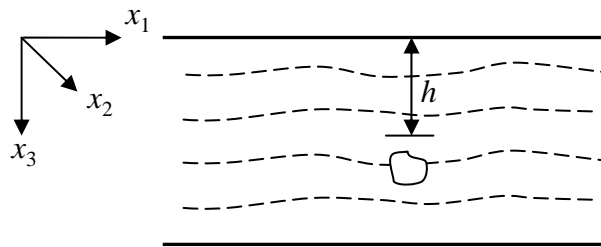


FIGURA 7.26 UN OBJETO SE ENCUENTRA SUMERGIDO A UNA PROFUNDIDAD h

Si la densidad del fluido es de 1000 kg/m^3 y $B_i = 0\hat{e}_1 + 0\hat{e}_2 - g\hat{e}_3$ donde g es la aceleración de la gravedad, determine la profundidad a la que se encuentra inmerso el cuerpo en el seno del fluido. Si la viscosidad μ es de $9.82 \times 10^{-4} \text{ Pa}\cdot\text{s}$, determine el tensor de rapidez de deformación y sus valores principales.

SOLUCIÓN

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -60 & 3 & -4 \\ 3 & -100 & 8 \\ -4 & 8 & -20 \end{pmatrix} \quad [\text{kPa}]$$

Fluido incompresible

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\dot{\epsilon}_{ij}$$

$$\sigma_{11} = -p + 2\mu\dot{\epsilon}_{11} \quad ; \quad \sigma_{22} = -p + 2\mu\dot{\epsilon}_{22} \quad ; \quad \sigma_{33} = -p + 2\mu\dot{\epsilon}_{33}$$

$$\sigma_{kk} = -3p + 2\mu(\dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22} + \dot{\epsilon}_{33}); \quad \dot{\epsilon}_{kk} = 0$$

$$\sigma_{kk} = -3p = 3\sigma_H$$

$$\sigma_H = \frac{\sigma_{kk}}{3} = -60 \text{ kPa}$$

$$p = \rho gh \Rightarrow h = \frac{p}{\rho g}$$

$$h = \frac{60 \text{ kPa}}{1000 \times 9.8} \hat{=} 6 \text{ m}$$

$$\sigma_{ijH} = \begin{pmatrix} -60 & 0 & 0 \\ 0 & -60 & 0 \\ 0 & 0 & -60 \end{pmatrix} \quad [\text{kPa}]$$

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij}$$

$$\sigma'_{ij} = \lambda\dot{\epsilon}_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\dot{\epsilon}_{ij} \quad \Rightarrow \quad \sigma'_{ij} = 2\mu\dot{\epsilon}_{ij}$$

$$\therefore \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\sigma'_{ij}}{2\mu}$$

$$\mu = 9.82 \times 10^{-4} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \text{s}$$

$$\sigma'_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 3 & -40 & 8 \\ -4 & 8 & 40 \end{pmatrix} \quad [\text{kPa}]$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1527.5 & -2036.6 \\ 1527.5 & -20366 & 4073 \\ -2036.6 & 4073 & 20366 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\epsilon}_{ijP} = \begin{pmatrix} 20570 & 0 & 0 \\ 0 & 307 & 0 \\ 0 & 0 & -20877 \end{pmatrix} \text{ s}^{-1}$$

8. Sea $\phi(x_i, t)$ una función escalar la cual define el campo de velocidades del medio continuo en el intervalo analizado, como

$$v_i = -\frac{\partial \phi}{\partial x_i}; \quad v = -\nabla \phi$$

- a) ¿Qué características deberá cumplir la función para que el flujo en el intervalo sea irrotacional?
- b) Si la función $\phi(x_i, t)$ está asociada a un medio incompresible ¿Cómo quedará expresada la ecuación de conservación de masa, en el intervalo en estudio?

SOLUCIÓN

$$\phi = \phi(x_i, t) \text{ tal que } v_i = -\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

- a) El rotacional se expresa como:

$$w_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

sustituyendo

$$w_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) \right) = \frac{1}{2} \left[-\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \right]$$

$\therefore w_{ij} = 0$ si $\exists \phi(x_i, t)$ tal que

$$v_i = -\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

b) Medio incompresible

$$\nabla \cdot v = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Coordenadas rectangulares}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} = 0 \quad \therefore \nabla^2 \phi = 0$$

9. Analice si la función escalar $\phi = A(-x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2)t$ describe un flujo irrotacional, si t - s, x - m, $A = 1 \text{ s}^{-2}$. Asimismo, determine el campo de esfuerzos asociado considerando que la viscosidad está dada por μ . Verifique si el campo de esfuerzos satisface las ecuaciones de Navier-Stokes. Las fuerzas de cuerpo se pueden despreciar.

SOLUCIÓN

$$\phi = A(-x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2)t$$

Flujo irrotacional

$$w = \frac{1}{2}(\nabla v - \nabla v^T) = 0$$

$$v_1 = 2x_1 At \quad ; \quad v_2 = 2x_2 At \quad ; \quad v_3 = -4x_3 At$$

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \Rightarrow \quad At(2 + 2 - 4) = 0$$

Por lo tanto, se cumple la condición de incompresibilidad.

$$\nabla v = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} A t$$

$$\nabla v = (\nabla v)^T \Rightarrow w = 0$$

Por consecuencia, se cumple la condición de irrotacional.

El estado de esfuerzos está dado por

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij}$$

donde σ'_{ij} = esfuerzos viscosos

Por analogía con SEHLI se tiene que la ecuación constitutiva para un fluido está dada por

$$\sigma'_{ij} = \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + 2\mu \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right)$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = \nabla^2 \phi = 0$$

Por lo tanto, un fluido irrotacional e incompresible la ecuación se reduce a

$$\sigma'_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

Por lo que
$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\therefore \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -p + 4\mu A t & 0 & 0 \\ 0 & -p + 4\mu A t & 0 \\ 0 & 0 & -p - 8\mu A t \end{pmatrix}$$

10. Considere que entre las placas A y B existe un fluido newtoniano incompresible. La placa A se desplaza a una velocidad de 5 m/s, mientras que la placa B permanece en reposo. Si la distancia entre ambas placas es de 1 m, determine la velocidad del fluido a 0.2 m de la placa A . Considere que las placas están horizontales y que sus dimensiones son muy grandes.

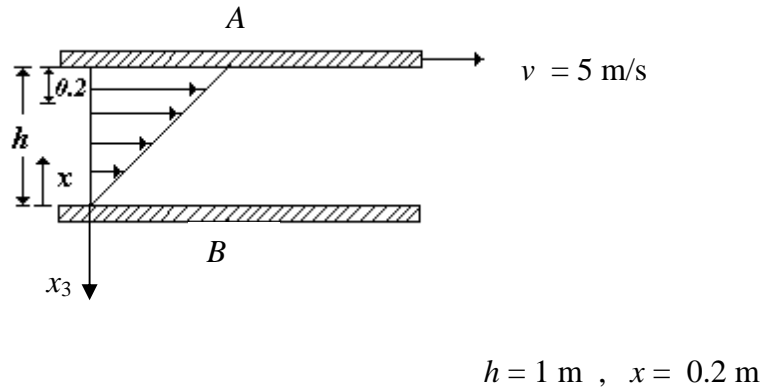


FIGURA 7.27 FLUJO INDUCIDO POR VELOCIDAD (COUETTE)

SOLUCIÓN

De las ecuaciones de Navier–Stokes

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j \partial x_j} - \rho \beta_i = \frac{Dv_i}{Dt}$$

Considerando que es un flujo inducido por velocidad y establecido

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{Dv_i}{Dt} = 0$$

De la ecuación de conservación de masa

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0$$

Como $v_2 = v_3 = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0$

$\therefore v_1$ es constante en x_1 y $v_1 = v_1(x_3)$

En la ecuación de Navier–Stokes para el eje x_1

$$\Rightarrow \mu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} + \rho B_1 = 0$$

Despreciando el efecto de las fuerzas de cuerpo

$$\mu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \alpha x_3 + \beta$$

De las condiciones de frontera en $x_3 = 0$, $v_1 = v_A = 5 \Rightarrow \beta = 5$

En $x_3 = h = 1$, $v_1 = 0 \Rightarrow \alpha = -5$

$$\therefore v_1 = -5x_3 + 5$$

Para $x_3 = 0.2 \Rightarrow v = 4 \text{ m/s}$

11. Para el flujo que se describe en la figura, determine el perfil de velocidades en la zona del conducto que va de AA' .

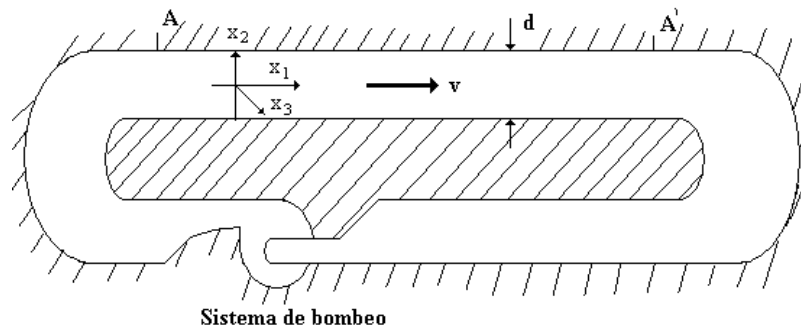


FIGURA 7.28 FLUJO INDUCIDO POR PRESIÓN

Considere que se trata de un fluido newtoniano incompresible con viscosidad μ . El canal es rectangular con un ancho igual a $2e$ y altura d , donde $d \ll e$ y por consecuencia se puede despreciar el efecto en las paredes laterales. El flujo en el canal es uniaxial de tal forma que $v_2 = v_3 = 0$. Determine el gasto volumétrico.

SOLUCIÓN

- Se trata de un flujo de Poiseville, es decir, un flujo uniaxial inducido por presión.

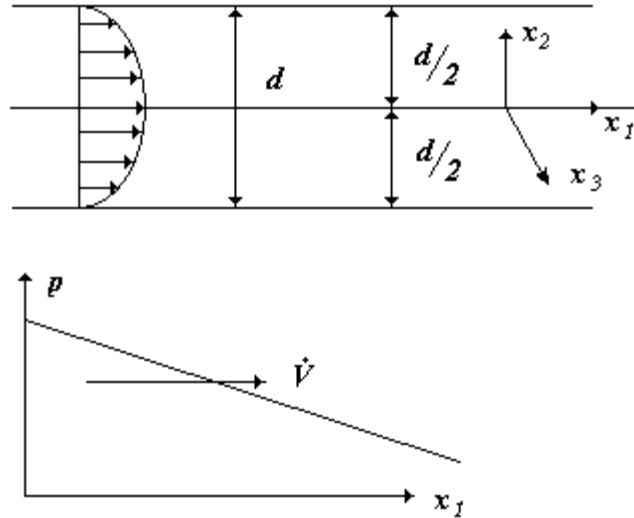


FIGURA 7.29 EL FLUJO VA EN SENTIDO OPUESTO AL GRADIENTE DE PRESIÓN. EN LAS PAREDES DEL CONDUCTO LA VELOCIDAD ES NULA (LA DE LAS PAREDES) Y EN EL CENTRO ES MÁXIMA

$$v_1 = v(x_2)$$

$$v_2 = v_3 = 0$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right] v_1 + \rho B_1 = \rho \left[\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right]$$

No considere el efecto de fuerzas de cuerpo, y además se considera flujo establecido

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = 0$$

Condiciones de frontera

$$\text{para } x_1 = \frac{d}{2} \quad \Rightarrow \quad v_1 = 0$$

$$\text{para } x_1 = -\frac{d}{2} \quad \Rightarrow \quad v_1 = 0$$

$$\text{para } x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = v_{\text{máx}}$$

Ecuación de Conservación de masa

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0 \quad \text{El flujo no se acelera a través del conducto}$$

De las ecuaciones de Navier-Stokes

$$-\frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} = \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} \right) \frac{1}{\mu}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} \right) \frac{x_2}{\mu} + c_1$$

$$v_1 = \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} \right) \frac{x_2^2}{2\mu} + c_1 x_2 + c_2$$

En un máximo, la primera derivada es cero

$$\left. \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = 0 = \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} \right) \frac{x_2}{\mu} + c_1 \quad \therefore c_1 = 0$$

Cuando $x_2 = \frac{d}{2} \quad \Rightarrow \quad v_1 = 0$

$$0 = \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} \right) \frac{\left(\frac{d}{2} \right)^2}{2\mu} + c_2$$

$$c_2 = - \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} \right) \frac{d^2}{8\mu}$$

$$\therefore v_1(x_2) = \frac{1}{2\mu} \left[\left(\frac{d}{2} \right)^2 - x_2^2 \right] \left(- \frac{\partial p}{\partial x_1} \right)$$

\Rightarrow El perfil de velocidades es parabólico para un flujo inducido por presión, y éste va en sentido contrario al del gradiente de la presión.

12. Sea $\phi(x_i, t)$ una función escalar a través de la cual se pretende definir el campo de velocidades en un medio continuo, de acuerdo con

$$v_i = -\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

- ¿Qué características deberá cumplir la función para que el flujo en el intervalo sea irrotacional?
- Si la función $\phi(x_i, t)$ está asociada a un medio incompresible ¿Cómo quedará expresada la ecuación de conservación de masa en el intervalo en estudio?

SOLUCIÓN

- La función deberá ser continua y continuamente derivable en el intervalo.

$$v_i = -\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad \text{o} \quad v = -\nabla \phi$$

$$\nabla \times (-\nabla \phi) = 0$$

- La ecuación de conservación de masa para el intervalo de estudio queda expresada

$$\nabla \cdot v = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \phi = 0$$

13. Un continuo con una ecuación constitutiva de la forma

$$\sigma_{ij} = \lambda \dot{\varepsilon}_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \dot{\varepsilon}_{ij}$$

presenta un flujo irrotacional e incompresible, el cual se describe a través de una función escalar ϕ , que permite describir el campo de velocidades a través de $v = -\nabla \phi$.

- Con base en lo anterior, determine la función disipativa $\dot{W}_V = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}$ o $\dot{W}_V = \sigma \dot{\varepsilon}$
- Determine la ecuación de Cauchy para el material en cuestión considerando la descripción de su campo de velocidades y de su ecuación constitutiva.

SOLUCIÓN

$$\sigma_{ij} = \lambda \dot{\epsilon}_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \dot{\epsilon}_{ij}$$

$$v = -\nabla \phi \quad \Rightarrow \quad v_i = -\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \hat{e}_1 - \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \hat{e}_2 - \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \hat{e}_3$$

$$\dot{W}_V = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$$

Para un flujo irrotacional e incompresible

$$\nabla^2 \phi = 0$$

Y la ecuación constitutiva

$$\therefore \quad \sigma_{ij} = 2\mu \dot{\epsilon}_{ij}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{W}_V = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = 2\mu \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$$

$$\dot{W}_V = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = 2\mu \left(\dot{\epsilon}_{11}^2 + \dot{\epsilon}_{22}^2 + \dot{\epsilon}_{33}^2 + 2(\dot{\epsilon}_{12}^2 + \dot{\epsilon}_{23}^2 + \dot{\epsilon}_{31}^2) \right)$$

Ecuación de Conservación de masa

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_1} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3 \partial x_3} = 0$$

$$\nabla^2 \phi = 0$$

14. Dado el siguiente campo de velocidades de un fluido viscoso newtoniano incompresible

$$v_1 = kx_1 \quad v_2 = -kx_2 \quad v_3 = 0$$

- Demuestre si el campo de velocidades es irrotacional.
- Determine el tensor de esfuerzos.
- Determine el campo de aceleraciones.
- Demuestre si el campo de velocidades satisface la ecuación de Navier-Stokes, y esto permite determinar la función de presión (distribución de presiones). Para lo anterior desprecie las fuerzas de cuerpo y considere que $p = p_0$ en el origen.
- Determine la rapidez de disipación de energía mecánica en calor.

- f) Si $x_2 = 0$ representa una frontera física, ¿qué condición no es satisfecha por el campo de velocidades?

SOLUCIÓN

a)

Irrotacional

$$v_i = -\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

$$\nabla \times v = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \hat{e}_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \hat{e}_2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \hat{e}_3$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial x_2} = \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = 0; \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = \frac{\partial v_3}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial v_2}{\partial x_1} = \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = 0$$

$$\therefore \nabla \times v = 0 \quad \therefore \text{Campo irrotacional}$$

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij}$$

$$\sigma'_{ij} = \lambda \dot{\epsilon}_{kk} + 2\mu \dot{\epsilon}_{ij}$$

$$\dot{\epsilon}_{kk} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = k - k + 0 = 0$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma'_{ij} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} 2\mu$$

b)

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} -p + 2\mu k & 0 & 0 \\ 0 & -(p + 2\mu k) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{Dv_1}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j$$

$$\frac{Dv_1}{Dt} = \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial v_1}{\partial x_3} v_3$$

$$\frac{Dv_1}{Dt} = k^2 x_1$$

$$\frac{Dv_2}{Dt} = \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} v_3$$

$$\frac{Dv_2}{Dt} = k^2 x_2$$

c)

$$a_i = \frac{Dv_i}{Dt} = k^2 (x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + 0 \hat{e}_3)$$

Ecuación de Navier-Stokes

$$-\nabla p + \mu \nabla \cdot (\nabla v) + \rho B = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (\nabla v) v \right)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \right) + \rho B_i = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) v_j \right)$$

Despreciando fuerzas de cuerpo y considerando incompresibilidad

 Eje x_1

$$-\frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} \right) + \rho B_1 = \rho \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right) v_1 \right)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_1} = \rho k^2 x_1$$

$$-p = \rho \frac{k^2 x_1^2}{2} + f(x_2, x_3) + \text{cte}_1$$

Eje x_2

$$-\frac{\partial p}{\partial x_2} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \right) + \rho B_2 = \rho \left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) v_2 \right)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_2} = \rho k^2 x_2$$

$$-p = \rho \frac{k^2 x_2^2}{2} + f(x_1, x_3) + \text{cte}_2$$

Eje x_3

$$-\frac{\partial p}{\partial x_3} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} \right) + \rho B_3 = 0$$

$$p(x_3) = \text{cte}_3$$

$$\therefore -p = \frac{k^2 \rho}{2} (x_1^2 + x_2^2) + p_0 \quad \text{Incompresible}$$

d)

$$\dot{W} = \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = (-p \delta_{ij} + 2\mu \dot{\epsilon}_{ij}) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

$$\dot{W} = \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + 2\mu \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \Rightarrow \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \text{ Irrotacional} \Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} = 0$$

$$\dot{W} = 2\mu \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$$

$$\dot{W} = 2\mu \left(\dot{\epsilon}_{11}^2 + \dot{\epsilon}_{22}^2 + \dot{\epsilon}_{33}^2 + 2(\dot{\epsilon}_{12}^2 + \dot{\epsilon}_{23}^2 + \dot{\epsilon}_{31}^2) \right)$$

e) Al sustituir $\dot{\epsilon}_{ij}$

$$\Rightarrow \dot{W} = 2\mu(k^2 + k^2) = 4\mu k^2$$

f) No se cumple con la ecuación de conservación de masa (Ecuación de la continuidad)

$$\phi_{,x_2} = -k, \text{ para cualquier } x_2 \therefore \text{ en } x_2 = 0, v_2 \neq 0$$

15. Demuestre si la ecuación de movimiento para un fluido newtoniano compresible se puede expresar como:

$$-\nabla p + k\nabla(\nabla \cdot v) + \frac{\mu}{3}\nabla(\nabla \cdot v) + \mu\nabla \cdot (\nabla v) + \rho B = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\nabla v \right)$$

- ¿Cuántas incógnitas se presentan en este sistema?
- ¿Cuáles son éstas?
- ¿A qué otras ecuaciones se puede acudir para resolver el sistema?
- Expresa la ecuación en notación índice.

SOLUCIÓN

Fluido newtoniano compresible

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\dot{\epsilon}_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\dot{\epsilon}_{ij}$$

Ecuación de Cauchy

$$\nabla \cdot \sigma + \rho B = \rho \frac{Dv}{Dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho B_i = \rho \frac{Dv_i}{Dt}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(-p\delta_{ij} + \lambda \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \delta_{ij} \right) + 2\mu \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \right] + \rho B_i = \frac{Dv_i}{Dt}$$

$$\sigma'_{ii} = (3\lambda + 2\mu) \dot{\epsilon}_{kk}$$

$$\sigma_H = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \dot{\epsilon}_{kk} - p = -p + k \frac{\partial v_j}{\partial x_j}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \right) + \rho B_i = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \partial v_j \right)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + k \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \right) = \rho \frac{Dv_i}{Dt}$$

$$-\nabla p + k \nabla (\nabla \cdot v) + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot v) + \mu \nabla (\nabla \cdot v) = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (\nabla v) v \right)$$

Número de incógnitas: 5 y son v_1, v_2, v_3, ρ y p

Para resolver las ecuaciones se debe recurrir a las ecuaciones de conservación de masa y conservación de energía.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Fluidos newtonianos. Hidrostática. Movimiento de cuerpo rígido

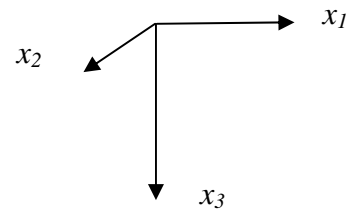
1. Un fluido en estado de reposo presenta una ecuación de estado de la forma

$$p = \lambda \rho^k$$

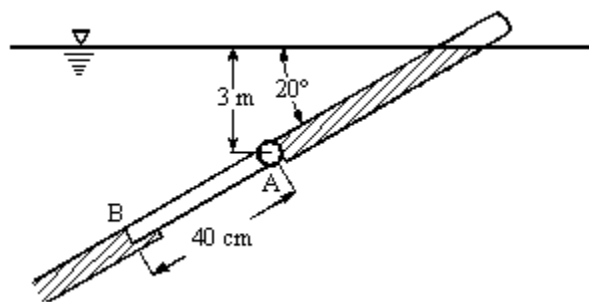
donde λ y k son constantes, y ρ es la densidad.

La única fuerza de cuerpo al que está sometido el sistema es la gravedad. Considerando una orientación de ejes como se muestra en la figura y que la presión en la referencia está dada por p_0 , determine:

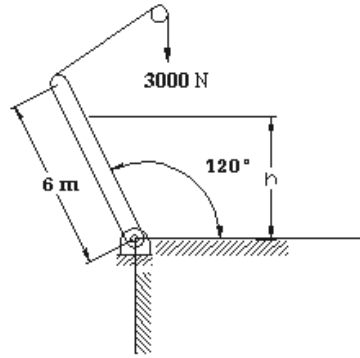
- a) Variación de la presión en los ejes x_1, x_2 .
- b) Variación de la presión en función de x_3 .



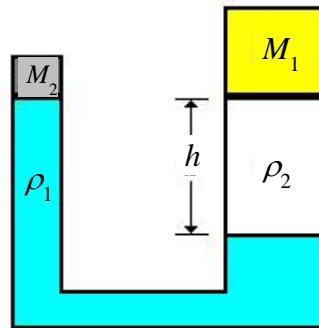
2. La compuerta AB de la figura es rectangular de 40 cm de ancho y 3 m de largo, la cual rota sobre el punto A . Si el peso de la compuerta es de 400 kg, encuentre las reacciones en A y B . El fluido en el tanque es agua.



3. La compuerta de la siguiente figura tiene 6 m de largo por 4 m de ancho. Si el peso de la compuerta es de 1000 N, determine el nivel del agua h al cual la compuerta empieza a caer.

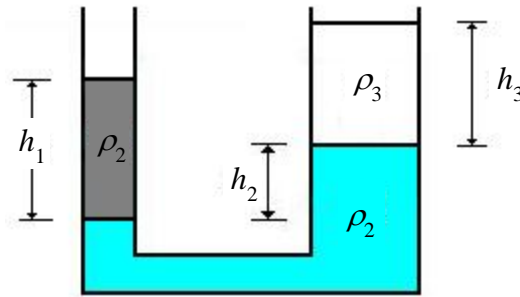


4. Un sistema hidráulico soporta las masas M_1 y M_2 en cada uno de los vasos comunicantes, los cuales contienen fluidos de densidad y viscosidad $\rho_1, \rho_2, \mu_1, \mu_2$. Determine la masa M_2 que garantiza el equilibrio del sistema, esto a partir de ρ_1, ρ_2, M_1, h . Considere que los fluidos son newtonianos incompresibles y no existe mezcla.



5. ¿Qué caracteriza a un fluido newtoniano? Dé algunos ejemplos de fluidos que se pueden modelar como newtonianos.
6. ¿Cómo se describe el comportamiento de un fluido no newtoniano? Dé algunos ejemplos de fluidos que se pueden modelar como no newtonianos.
7. Desarrolle la ecuación de conservación de cantidad de movimiento para un fluido newtoniano incompresible. Indíquela en forma general y en notación índice. Desarróllela en coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas.
8. Los líquidos en los vasos comunicantes de la siguiente figura están en equilibrio. Determine h_2 como una función de $\rho_1, \rho_2, \rho_3, h_1, h_3$.

Los líquidos no se pueden mezclar.



9. Un recipiente con agua se mueve verticalmente hacia arriba con una aceleración a . Determine la presión a la que se encuentra un punto en la profundidad h .

10. En aplicaciones de astrofísica, una atmósfera que tiene una relación de la forma

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n$$

donde P_0 y ρ_0 son la presión y densidad de referencia, se denomina como atmósfera politrópica. Para este tipo de atmósferas determine la distribución de presión y densidad.

11. Defina el concepto de capa límite.

12. La ecuación de estado de un fluido barotrópico presenta la forma $p = \lambda \rho^k$, donde λ y k son constantes; siendo el flujo isentrópico. Verifique si para este caso la ecuación de Bernoulli en estado estable está dada por

$$\Omega + \frac{kp}{(k+1)\rho} + \frac{1}{2}v^2 = \text{cte}$$

y si el flujo es isotérmico la ecuación de Bernoulli queda $\Omega + p \frac{\text{Ln } \rho}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 = \text{cte}$

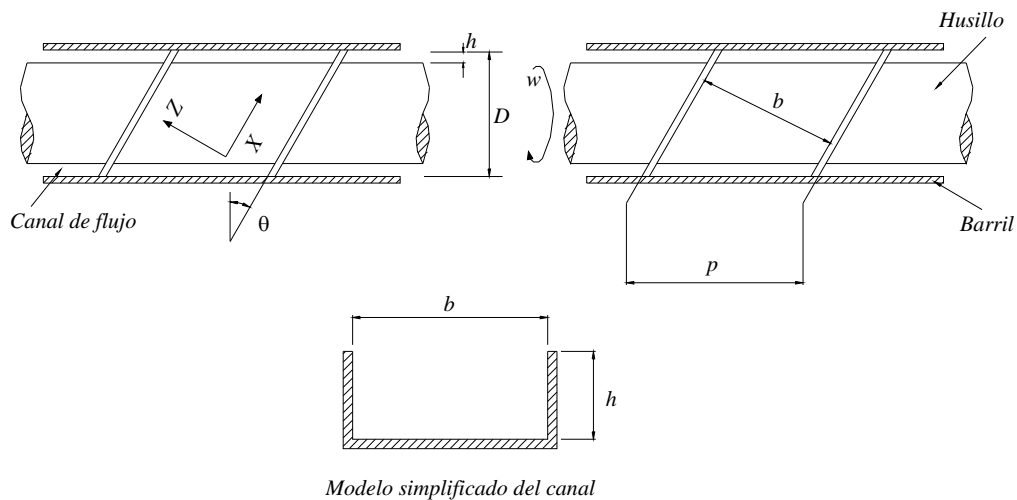
13. Verifique que el gasto volumétrico para un proceso de extrusión de un polímero, el cual se desarrolla mediante un tornillo extrusor está dado por

$$\dot{Q} = 0.5 \pi^2 D^2 N h \sin \theta \cos \theta - p \frac{\pi D h^3 \sin^2}{12 \mu l}$$

Para lo cual, considere que el fluido se puede modelar como newtoniano y que las condiciones son isotérmicas.

h = espesor de la película
 p = presión
 μ = viscosidad
 v_A = velocidad del cojinete (tangencial)
 v_B = velocidad de la flecha (tangencial)

D = diámetro del cañón o barril
 N = velocidad de rotación del husillo
 h = profundidad del canal del husillo
 θ = ángulo entre la hélice y la dirección perpendicular al husillo
 P = presión de descarga del husillo
 l = longitud del husillo
 μ = viscosidad



Flujo de arrastre (Q_A)

Flujo de presión (Q_P)

Para lo anterior, se define que el gasto volumétrico neto Q se puede expresar como la suma de un flujo de arrastre por velocidad Q_A (Couette) menos un flujo de presión Q_P , este último generado por el incremento de presión que se produce hacia la zona de descarga. El flujo de arrastre se desplaza hacia adelante y ocurre por el movimiento de la superficie del husillo en contacto con el fluido, mientras la otra permanece fija.

Para facilitar el análisis al calcular el flujo de arrastre, suponga que el barril gira y el husillo permanece inmóvil; además, considere que el flujo está dado por $Q = vA_c$, donde v es la velocidad promedio y A_c la sección transversal del canal.

w - velocidad angular del husillo

p - paso del husillo

Considere que $Q = Q_A - Q_P$

14. Demuestre que la ecuación de movimiento para un fluido newtoniano compresible se puede expresar como

$$-\nabla p + k\nabla(\operatorname{div} v) + \frac{\mu}{3}\nabla(\operatorname{div} v) + \mu\operatorname{div}(\nabla v) + \rho B = \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\nabla v\right)$$

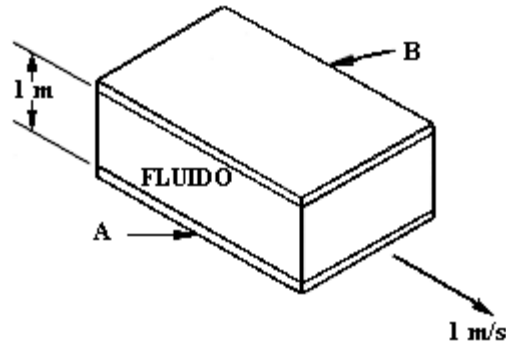
- ¿Cuántas incógnitas se presentan en este sistema?
- ¿Cuáles son éstas?
- ¿A qué otras ecuaciones se puede acudir para resolver el sistema?
- Expresar la ecuación en notación índice.

15. Para un fluido newtoniano incompresible con flujo irrotacional, deduzca la ecuación de Torricelli a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes. Considere que sólo existe el campo gravitacional y que el flujo es establecido.

16. Deduzca la ecuación que describa el comportamiento de un fluido newtoniano incompresible, preséntela en forma invariante (notación general) y en notación índice para coordenadas rectangulares, en este último caso exprese las ecuaciones a las que se da lugar.

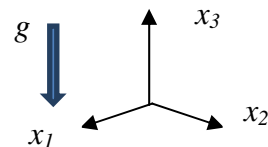
- ¿Cuáles son las incógnitas y qué otras ecuaciones se emplearán para poder resolver las incógnitas?
- Expresar las ecuaciones complementarias.
- ¿Qué pasa en el caso de que el fluido newtoniano sea compresible?
- ¿Cuáles serán las incógnitas adicionales, qué otras ecuaciones son empleadas para la solución del problema?

17. Considere que entre las placas A y B existe un fluido newtoniano incompresible. La placa A se desplaza a una velocidad de 1 m/s , mientras que la placa B permanece en reposo. Si la distancia entre ambas placas es de 1 m , determine la velocidad de placa del fluido a 0.3 m de la placa A . Considere que las placas están horizontales y que sus dimensiones son muy grandes.



18. Al término $\lambda + \frac{2}{3}\mu$ en un fluido newtoniano se le denomina viscosidad volumétrica. En un fluido newtoniano, en una coordenada (x_1, x_2, x_3) a un tiempo t el estado de esfuerzos está dado por σ_{ij} . Si el fluido presenta una viscosidad volumétrica igual a cero, determine la profundidad a la que se encuentra inmerso, si las fuerzas de cuerpo están dadas por B_i . La densidad es de 1000 kg/m^3 .

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -9.8 & 4 & 6 \\ 4 & -39.2 & 2 \\ 6 & 2 & -9.8 \end{pmatrix} \text{ kPa}$$



Asimismo, determine el tensor de esfuerzos viscosos. Considere que:

$$B_i = 0\hat{e}_1 + 0\hat{e}_2 - g\hat{e}_3 \quad g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

19. El tensor σ_{ij} describe el estado de esfuerzos para un punto X_i de un fluido incompresible. Para σ_{ij} determine el tensor σ'_{ij} que depende exclusivamente de la velocidad de deformación; asimismo, determine la presión hidrostática asociada.

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -25 & 8 & -5 \\ 8 & -15 & 12 \\ -5 & 12 & -5 \end{pmatrix}$$

20. Para un flujo irrotacional de un fluido no viscoso, homogéneo e isotrópico, deduzca la ecuación de Bernoulli a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes.

21. Determine el tensor de esfuerzos asociado a los siguientes campos de velocidad, considerando que se trata de un fluido viscoso.

- a) $v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = x_2$
 b) $v_1 = 0, \quad v_2 = x_2^3, \quad v_3 = -2x_2x_3$
 c) $v_1 = v_1(x_1, x_2), \quad v_2 = v_2(x_1, x_2), \quad v_3 = 0$

22. Para un flujo axisimétrico estable inducido por presión a través de una tubería de diámetro d , compruebe que el gasto másico está dado por

$$\dot{M} = \rho \frac{\alpha \pi d^4}{128 \mu}$$

considerando que se trata de un fluido newtoniano incompresible de densidad ρ , donde α representa el gradiente de presión

$$\rho = -\frac{\partial p}{\partial z}$$

donde p es la presión y z es la dirección de flujo.

23. Demuestre que el campo de velocidades dado por

$$v_1 = \alpha \left(\frac{x_1^2 - x_2^2}{R^4} \right), \quad v_2 = \left(\frac{2\alpha x_1 x_2}{R^4} \right), \quad v_3 = 0$$

donde α representa una constante diferente de cero y $R^2 = x_1^2 + x_2^2 \neq 0$ obedece a la ecuación de movimiento de Euler. Asimismo, determine la distribución de presiones asociada al campo de velocidades.

24. Para el siguiente campo de velocidades en coordenadas cilíndricas:

$$v_r = v(r, \theta), \quad v_\theta = 0, \quad v_z = 0$$

A partir de la ecuación de la continuidad verifique que $v_r = \frac{f(\theta)}{r}$

En ausencia de fuerzas de cuerpo, compruebe que $\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + 4f + \rho \frac{(f)^2}{\mu} = 0$ y

$$p = 2\mu \frac{f}{r^2} + c, \text{ donde } c \text{ representa una constante.}$$

25. Explique usted, con base en conceptos fundamentales de la MMC, por qué un chorro de agua lanzado verticalmente hacia abajo tiende a adelgazarse (reduce aparentemente su sección) conforme se desplaza hacia el suelo. ¿Qué pasa ahora cuando el chorro se lanza verticalmente hacia arriba?

26. Determine la ecuación constitutiva para un fluido newtoniano para el cual su condición de Stokes es cero.

27. Demuestre que para el campo de velocidades $v_1 = v(x_2, x_3)$, $v_2 = v_3 = 0$, las ecuaciones de Navier Stokes, despreciando el efecto de las fuerzas de cuerpo, se reducen a

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} = \psi; \quad \psi = \text{cte.}$$

28. Determine el gasto (inducido por presión) de un fluido Newtoniano incompresible a través de un tubo de sección transversal elíptica: El tubo tiene un semieje menor α y un semieje mayor β .

29. Dado el campo de velocidades para un fluido Newtoniano incompresible

$$v_1 = k(x_1^2 - x_2^2); \quad v_2 = -2kx_1x_2; \quad v_3 = 0$$

Desarrolle la ecuación de Navier Stokes.

Determine el tensor de deformaciones y de esfuerzos asociado.

30. Si va usted a analizar el flujo de la sangre en venas y arterias, indique cuales consideraciones deberá realizar. Para dicho análisis, ¿es factible emplear las ecuaciones de Navier-Stokes?
31. Explique el principio de sustentación de un objeto más pesado que el aire. ¿la velocidad de despegue de un avión, por cuáles variables estará determinada?
32. Para el diseño estructural de un submarino, ¿qué parámetros deberán ser considerados?