CAPÍTULO 5

# ECUACIONES GENERALES

## 5.1 INTRODUCCIÓN

En la mecánica de medios continuos, las ecuaciones generales, o también conocidas como leyes de balance, son principios de la física ampliamente demostrados. Su forma más adecuada es con base en un volumen finito del continuo. En este caso se expresan como ecuaciones integrales sobre el volumen del continuo. En la ingeniería, la representación de los fenómenos físicos analizados se realiza con base en sistemas de ecuaciones diferenciales; es por consecuencia que los principios generales comúnmente se presentarán en forma diferencial definiéndose entonces como ecuaciones de campo, las cuales frecuentemente son derivadas a partir de las ecuaciones integrales. Se trata en este caso de ecuaciones definidas para un elemento de volumen diferencial (partícula).

La denominación de ecuaciones generales se debe a que representan principios de la Física que se cumplen por cualquier medio continuo, para cualquier tiempo, y posición. Estos deben satisfacerse, tanto por cualquier elemento diferencial del medio continuo (ecuaciones de campo), como por el total del volumen material asociado a éste (forma integral de las ecuaciones). Se denominan también como ecuaciones o leyes de balance por considerar que son derivadas a partir de principios de conservación de alguna propiedad física asociada al medio continuo, éstas son:

i. Principio de conservación de masa
ii. Principio de conservación de cantidad de movimiento
iii. Principio de conservación de energía
iv. Desigualdad entrópica (de Segunda Ley de la termodinámica) o también conocida como desigualdad Clausius - Duhem

## 5.2 ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE MASA

La ley de conservación de masa indica simplemente que cada partícula material de un cuerpo o porción de éste, y por consecuencia el total, tendrá asociada una cantidad escalar positiva denominada como masa. Físicamente, la masa es asociada con la inercia, propiedad del cuerpo que representa su tendencia a resistir el cambio en las condiciones de movimiento. También se puede describir a través de la cantidad de materia asociada a un determinado volumen. Es entonces que su medición dependerá de variables de espacio y tiempo. Por consecuencia se tiene que si $\Delta m$ representa la masa contenida en una pequeña fracción volumétrica $\Delta V$ del cuerpo $\beta$, su densidad está dada por

$$\rho = \text{lím}_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

donde $\rho = \rho(x_i, t)$ es definida como la densidad de masa del cuerpo para la configuración determinada en el tiempo $t$, por lo que, en consecuencia, la masa $m$ del cuerpo $\beta$ con volumen $V$ es

$$m = \int_V \rho dV$$

Como la masa no se crea ni se destruye (principio de conservación de masa), se tiene que su razón de cambio en el tiempo deberá ser igual a cero

$$\frac{Dm}{Dt} = 0$$

$$\frac{D}{Dt}\int_V \left(\rho dV\right) = 0 \qquad (5.1)$$

Considerando las fórmulas de transporte presentadas en el capítulo 1, se tiene que

$$\frac{D}{Dt}\int \varphi\left(x_i, t\right) dV = \int \left(\frac{D\varphi}{Dt} + \varphi \nabla \cdot v\right) dV \qquad (5.2)$$

Por tanto, al aplicar la fórmula de transporte, expresada en la ecuación *5.2*, a la expresión de conservación de masa indicada en la ecuación 5.1 se tiene que

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho\left(x_i,t\right)dV = 0 = \int_V \left(\frac{D\rho\left(x_i,t\right)}{Dt} + \rho\nabla\cdot v\right)dV \tag{5.3}$$

Como se integra sobre un volumen material (siempre $\int_V dV > 0$) cualesquiera, se cumple entonces que

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\left(\nabla\cdot v\right) = 0 \tag{5.4}$$

esto para cualquier elemento diferencial y tiempo; donde la ecuación 5.4 es la correspondiente ecuación de campo (forma diferencial). Esta ecuación se denomina como Ecuación de conservación de masa o Ecuación de la continuidad y representa la Ley de conservación de masa en forma espacial (coordenadas eulerianas). Esta ecuación diferencial de primer orden constituye una de las ecuaciones fundamentales de la mecánica del continuo. Al desarrollar la derivada material de la densidad, la ecuación 5.4, también se expresa como

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \left(\nabla\rho\right)\cdot v + \rho\left(\nabla\cdot v\right) = 0 \tag{5.5}$$

La expresión *5.4* es una ecuación diferencial de primer orden la cual se presenta en función de $\rho$, $t$; en el caso de que $\rho$ se mantenga constante, la expresión se simplifica, quedando de la forma

$$\nabla\cdot v = 0 \tag{5.6}$$

El término de Ecuación de la continuidad se orienta a indicar constancia de masa.

Dicha ecuación fue desarrollada primero por Euler en 1757, sin embargo, ya en 1752 d'Alambert había desarrollado una forma particular de ésta, la cual en ocasiones puede ser de utilidad, se presenta como

$$\frac{D}{Dt}\left(\log\rho\right) + \nabla\cdot v = 0$$

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \nabla \cdot v$$

ecuación que se puede expresar en la forma alternativa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \cdot \left(\nabla \rho\right) + \rho\left(\nabla \cdot v\right) = 0 \tag{5.7}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\left(\rho v\right) = 0 \tag{5.8}$$

## 5.3 ECUACIÓN DE LA CONTINUIDAD EN FORMA MATERIAL

Dado que la ecuación de conservación de masa demanda que la masa sea la misma en todas las configuraciones del MC, se puede derivar esta expresión a partir de la comparación de la representación de la masa en la forma lagrangiana (referencia) y espacial (euleriana). Por tanto, a partir de la descripción de la masa se tiene

$$m = \int_V \rho(x_i, t) dV = \int_{V_0} \rho_0 (X, t) dV_0$$

Considerando el desplazamiento de la configuración de referencia a la actual $x = x\left(X, t\right)$, se tiene

$$\int_V \rho\left[x\left(X, t\right), t\right] dV = \int_{V_0} \rho_0 \left(X, t\right) dV_0$$

Reordenando la expresión e igualando a cero

$$\int_{V_0} \left[\rho\left(X, t\right)|F| - \rho_0 \left(X, t\right)\right] dV_0 = 0$$

Dado que la integración se realiza sobre un volumen arbitrario, se tiene que

$$\rho\left|F\right| = \rho_0$$

Derivando la expresión anterior con respecto al tiempo, se tiene

$$\frac{D}{Dt}\left(\rho\left|F\right|\right)=0 \tag{5.9}$$

A esta última expresión se le denomina como ecuación de la continuidad en forma lagrangiana, donde

$$F=\nabla_X x; \quad \Rightarrow \det F=\left|F\right|$$

$$\left|F\right|=J$$

La ecuación de la continuidad en forma lagrangiana también se puede desarrollar a partir de

$$\frac{D}{Dt}\left(\rho J\right)=\dot{\rho}J+\rho\dot{J}$$

$$\frac{DJ}{Dt}=J\left(\nabla\cdot v\right)$$

$$\frac{D}{Dt}\left(\rho J\right)=J\left(\dot{\rho}+\rho\nabla\cdot v\right)=0$$

de donde se tiene

$$\frac{D}{Dt}\left(\rho J\right)=0$$

Por otra parte,

$$\rho(X,t_0)=\rho_0$$

Para la configuración inicial en donde $t=t_0$ y $x=X$ se tiene que $J=1$, por lo que

$$\rho J=\rho_0 \tag{5.10}$$

Ecuación que es equivalente a la 5.9. Esta expresión también fue desarrollada por Euler.

Dado que

$$\frac{D}{Dt}\left(\rho dV\right)=\rho\frac{\partial v_i}{\partial x_i}+\frac{D\rho}{Dt}=0$$

$$\therefore \qquad \frac{D\rho}{Dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+v\cdot\nabla\rho$$

y en forma general

$$\rho\left(\nabla\cdot v\right)+\frac{\partial\rho}{\partial t}+v\cdot\nabla\rho=0$$

Por lo que para coordenadas rectangulares (es conveniente recordar que la notación índice solo se puede aplicar para coordenadas rectangulares), entonces:

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial x_i}+\frac{\partial\rho}{\partial t}+v_i\frac{\partial\rho}{\partial x_i}=\rho\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right)+\frac{\partial\rho}{\partial t}+v_1\frac{\partial\rho}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial\rho}{\partial x_2}+v_3\frac{\partial\rho}{\partial x_3}=0 \qquad (5.11)$$

Por otra parte, en coordenadas cilíndricas se expresa como

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+v_r\right)+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)+\frac{\partial\rho}{\partial t}+v_r\frac{\partial\rho}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial\rho}{\partial\theta}+v_z\frac{\partial\rho}{\partial z}=0$$

Mientras que en coordenadas esféricas se tiene

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+v_r\right)+\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right)+\frac{v_r}{r}+\frac{v_\theta\cot\theta}{r}\right)+\frac{\partial\rho}{\partial t}+v_r\frac{\partial\rho}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial\rho}{\partial\theta}+\frac{v_\phi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial\rho}{\partial\phi}=0$$

Como ya ha sido mencionado, si el material es incompresible

$$\frac{D\rho}{Dt}=0$$

$$\rho\,\mathrm{div}\,v=0$$

$$\rho\neq 0$$

$$\Rightarrow \qquad \operatorname{div} v = 0$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0$$

En un sistema coordenado cilíndrico esto queda como

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

y considerando coordenadas esféricas, se tiene que

$$\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right)\right) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot\theta}{r} = 0$$

## 5.4 ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO (ECUACIÓN DE CAUCHY)

Esta ecuación representa la conservación de cantidad de movimiento de cualquier medio continuo, de acuerdo con ésta, cada partícula para cualquier tiempo deberá cumplir con la ecuación de movimiento de Newton (principio de conservación de cantidad de movimiento).

### *Desarrollo de la Ecuación de conservación de movimiento en forma integral*

La cantidad de movimiento lineal $p$ asociada a cualquier cuerpo se expresa por:

$$p = mv$$

donde

$$m = \int \rho dV$$

Por lo que

$$p = \int_M v dm$$

Entonces,

$$p = \int_V \rho v dV$$

Por otra parte, existen dos tipos de fuerza

a) De contacto o de superficie
b) De cuerpo

Por lo que la fuerza resultante ( $f_R$ ) está dada por

$$f_R = f_{contacto} + f_{cuerpo}$$

La ecuación de movimiento de Newton (segunda ley de Newton) indica que la razón de cambio en la cantidad de movimiento asociada al medio continuo es igual a la fuerza resultante:

$$\frac{Dp}{Dt} = f_R$$

Para el caso de las fuerzas de cuerpo, éstas se describen a partir de la aceleración $B$ que produce un campo sobre el cuerpo de masa

$$m = \int_V \rho dV$$

por lo que

$$f_{cuerpo} = \int_V \rho B dV$$

Por otra parte, las fuerzas de superficie se expresan a partir del vector de esfuerzos $t$ descrito en la superficie del medio continuo, de tal forma que

$$f_{contacto} = \int_A t dA$$

En consecuencia, se tiene que

$$f_R = \int_V \rho B dV + \int_A t dA$$

Sustituyendo con la razón de cambio de la cantidad de movimiento

$$\frac{Dp}{Dt} = \int_V \rho B dV + \int_A t dA$$

$$\frac{D}{Dt}\left(\int_V \rho v dV\right) = \int_V \rho B dV + \int_A t dA \qquad (5.12)$$

Considerando la fórmula de transporte en la parte izquierda de la ecuación 5.12

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho v dV = \int_V \left(\frac{D(\rho v)}{Dt} + \rho v(\nabla \cdot v)\right) dV$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{Dp}{Dt} = \int_V v\left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot v)\right) dV + \int_V \rho\left(\frac{Dv}{Dt}\right) dV$$

donde el término que se encuentra entre paréntesis dentro de la primera integral representa la ecuación de conservación de masa, por lo que es igual a cero. Por tal motivo, la ecuación que representa la razón de cambio de la cantidad de movimiento se expresa como

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho v dV = \int_V \rho \frac{Dv}{Dt} dV$$

Por su parte, para las fuerzas de superficie

$$\int_A t dA = \int_A (T \cdot n) dA$$

Aplicando ahora el teorema de la divergencia, se transforma el término de una integral de superficie a una de volumen.

$$\int_A (T \cdot n)\, dA = \int_V (\nabla \cdot T)\, dV$$

Sustituyendo en la ecuación 5.12 e igualando a cero

$$\int_V \left( \rho \frac{Dv}{Dt} - \rho B - \nabla \cdot T \right) dV = 0 \qquad (5.13)$$

Como se está integrando sobre un volumen $V$ arbitrario, se tiene que los términos que se encuentran entre paréntesis deberán ser igual a cero, por lo que la forma integral se reduce a una ecuación de campo

$$\rho \frac{Dv}{Dt} - \rho B - \nabla \cdot T = 0$$

Lo anterior se puede expresar como

$$\nabla \cdot T + \rho B = \rho \frac{Dv}{Dt} \qquad (5.14)$$

Entonces, en notación índice queda

$$\sigma_{ij,j} + \rho B_i = \rho \frac{Dv_i}{Dt}$$

o de otra forma

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho B_i = \rho \frac{Dv_i}{Dt} \qquad (5.15)$$

donde $T, T_{ij}, \sigma, \sigma_{ij}$ representan el tensor de esfuerzos de Cauchy, mientras que $v, v_i$ representan el campo de velocidades.

La ecuación de conservación de cantidad de movimiento, en su forma diferencial, también se puede desarrollar a partir del análisis de un elemento diferencial (figura 5.1), en este caso se procede a sumar todas las fuerzas presentes, esto en dirección de los ejes de referencia, de tal forma que:

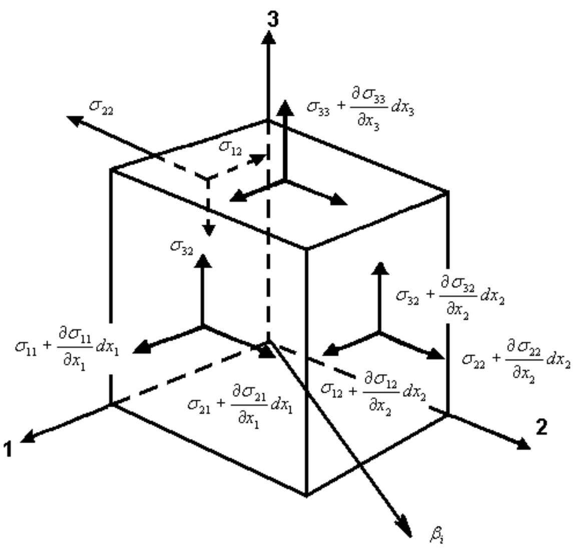


**FIGURA 5.1** FUERZAS DE SUPERFICIE Y CUERPO DESCRITAS SOBRE UN ELEMENTO DE VOLUMEN DIFERENCIAL

Resulta evidente que al sumar en dirección del eje $x_1$, la expresión resultante es

$$\frac{\partial T_{1j}}{\partial x_j} + \rho B_1 = \rho \frac{Dv_1}{Dt}$$

Para los ejes $x_2$ y $x_3$, las expresiones serán similares por lo que se puede generalizar a través de

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho B_i = \rho \frac{Dv_i}{Dt}$$

La ecuación de conservación de movimiento es una expresión vectorial, la cual tiene el siguiente desarrollo en función de la base de referencia.

*Coordenadas rectangulares*

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} + \rho B_1 = \rho \frac{Dv_1}{Dt}$$

$$\frac{\partial T_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial T_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial T_{23}}{\partial x_3}+\rho B_2=\rho\frac{Dv_2}{Dt}$$

$$\frac{\partial T_{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial T_{32}}{\partial x_2}+\frac{\partial T_{33}}{\partial x_3}+\rho B_3=\rho\frac{Dv_3}{Dt}$$

*Coordenadas cilíndricas*

$$\frac{\partial T_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta}+\frac{T_{rr}-T_{\theta\theta}}{r}+\frac{\partial T_{rz}}{\partial z}+\rho B_r=\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-v_\theta\right)+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta}+\frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z}+\frac{T_{r\theta}+T_{\theta r}}{r}+\rho B_\theta=\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+v_r\right)+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial T_{zr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta}+\frac{T_{zr}}{r}+\frac{\partial T_{zz}}{\partial z}+\rho B_z=\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\left(\frac{\partial v_z}{\partial \theta}\right)+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$$

*Coordenadas esféricas*

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2T_{rr}\right)}{\partial r}+\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial\left(T_{r\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)}{\partial \theta}+\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial T_{r\phi}}{\partial \phi}-\frac{T_{\theta\theta}+T_{\phi\phi}}{r}+\rho B_r=$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-v_\theta\right)+\frac{v_\phi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\left(\frac{\partial v_r}{\partial \phi}-v_\phi\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\right)$$

$$\frac{1}{r^3}\frac{\partial\left(r^3T_{\theta r}\right)}{\partial r}+\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial\left(T_{\theta\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)}{\partial \theta}+\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial T_{\theta\phi}}{\partial \phi}-\frac{T_{r\theta}-T_{\theta r}-T_{\phi\phi}\cot\theta}{r}+\rho B_\theta=$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+v_r\right)+\frac{v_\phi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}-v_\phi\cos\theta\right)\right)$$

$$\frac{1}{r^3}\frac{\partial\left(r^3 T_{\phi r}\right)}{\partial r}+\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial\left(T_{\phi\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial T_{\phi\phi}}{\partial\phi}+\frac{T_{r\phi}-T_{\phi r}+T_{\theta\phi}\cot\theta}{r}+\rho B_\phi=$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial\theta}\right)+\frac{v_\phi}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right)+\frac{v_\phi v_r}{r}+\frac{v_\phi v_\theta\cot\theta}{r}\right)$$

### *Simplificaciones de la ecuación de conservación de cantidad de movimiento*

La ecuación de Cauchy $\nabla\cdot T+\rho B=\rho\frac{Dv}{Dt}$ por condiciones de equilibrio se simplifica igualándola a cero, de tal forma que

$$\nabla\cdot T+\rho B=0$$

En ocasiones, por ejemplo, en el análisis de esfuerzos es muy común despreciar el efecto de las fuerzas de cuerpo, por lo que se deberá cumplir que

$$\nabla\cdot T=0$$

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}=0$$

### *Ecuación de movimiento en forma material*

Considerando un estado inicial, la ecuación de conservación de movimiento se expresa

$$\frac{D}{Dt}\int_{V_0}\rho_0 v\,dV_0=\int_{V_0}\rho_0 B\,dV_0+\int_{A_0}(T_0)n_0\,dA_0$$

Aplicando el teorema de la divergencia a la superficie integral y partiendo de que $V$ y $V_0$ representan un volumen arbitrario, entonces, la ecuación de movimiento se expresa en función del primer tensor de Piola-Kirchhoff.

$$\operatorname{div}(T_0) + \rho_0 B = \rho_0 \frac{Dv}{Dt}$$

Dicho concepto se emplea entre otros casos para el análisis no lineal.

Considerando los tensores de Piola-Kirchhoff

Primer tensor de Piola-Kirchhoff $\quad T = \dfrac{T_0}{|F|}\left(F^T\right) \quad \rightarrow \quad T_0 = |F|\, T \left(F^{-1}\right)^T$

Segundo tensor de Piola-Kirchhoff $\quad \overline{T} = |F|\, F^{-1} T \left(F^{-1}\right)^T \quad \rightarrow \quad T_0 = F\overline{T}$

Para el primer tensor de Piola Kirchhoff se tiene

$$\nabla \cdot T_0 + \rho_0 B = \rho_0 \frac{Dv}{Dt} \tag{5.16}$$

Mientras que para el segundo tensor de Piola Kirchhoff se tiene

$$\nabla \cdot \left(F\overline{T}\right) + \rho_0 B = \rho_0 \frac{Dv}{Dt} \tag{5.17}$$

donde $F$ representa el gradiente de deformación ($\nabla_X x$), por otra parte, dado que

$$x_i = X_i + u_i$$

entonces,

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial X_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \partial_j u_i = F_{ij}$$

O, en notación general, se tiene que el gradiente de deformación $F = I + \nabla u$, por lo que

$$\operatorname{div}\left[\left(I + \nabla u\right)\bar{T}\right] + \rho_0 B = \rho \frac{Dv}{Dt} \tag{5.18}$$

Las ecuaciones 5.17 y 5.18 son formas alternativas de la *ecuación de movimiento expresada considerando la ecuación en función del primer tensor de Piola Kirchhoff* (5.14). Siendo más conveniente la aplicación de las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento en su forma material (5.16, 5.17), que la ecuación de Cauchy, *esto es para el caso de análisis de elasticidad no lineal.*

Las ecuaciones 5.16 y 5.17 fueron primero desarrolladas por Piola en 1833.

## 5.5 PRINCIPIO DE ESFUERZOS DE CAUCHY

El vector de esfuerzos $t$ en cualquier lugar y tiempo tiene un valor común en todas las partes del material, teniendo un plano tangente común $p$ y quedando en el mismo lado de éste. Sea $t = t(x, \tau, n)$, donde $\tau$ es el tiempo, si

$$t = Tn$$

donde $T$ es el tensor de esfuerzos Cauchy. De acuerdo con lo que se ha revisado se tiene que

$$df = t_0 dA_0$$

donde $t_0$ es un seudovector de esfuerzos definido para el área sin deformar, el cual no describe la intensidad actual de (esfuerzos), sin embargo, tiene la misma dirección que el vector de esfuerzos de Cauchy $t$.

Sea $T_0$ el primer tensor de esfuerzos de Piola Kirchhoff (Tensor lagrangiano de esfuerzos)

$$t_0 = T_0 n_0$$

La relación entre el primer tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff $(PK)$ y el tensor de esfuerzos de Cauchy se obtiene como

$$df = tdA = t_0 dA_0$$

$$T_0 n_0 = \left(\frac{dA}{dA_0}\right) Tn = T\frac{dA}{dA_0} n$$

Como ya se demostró, se tiene entonces

$$T_0 = |F| T \left(F^{-1}\right)^T$$

Recordando que

$$F_{im} = \frac{\partial x_i}{\partial X_m} \quad \rightarrow \quad F_{im}^{-1} = \frac{\partial X_i}{\partial x_m}$$

$$F = \nabla x = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix}$$

$$F^{-1} = \left(\nabla x\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

A partir de lo anterior se puede plantear la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento (ecuación de Cauchy) para la configuración de referencia como

$$\frac{\partial \left(T_0\right)_{im}}{\partial X_m} + \rho_0 B_i = \rho_0 \frac{Dv_i}{Dt} = \rho_0 a_i$$

donde $(T_0)_{im}$ representa las componentes cartesianas del primer tensor de $(PK)$ y $\rho_0$, la densidad en la configuración de referencia.

$$\frac{\partial (T_0)_{im}}{\partial X_m} + \rho |F| B_i = \rho |F| a_i$$

Como

$$dV = |F| dV_0$$

$$\rho |F| = \rho_0$$

Por lo que en notación general queda

$$\nabla \cdot T_0 + \rho_0 B = \rho_0 a$$

## 5.6 ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

Este principio lo que representa es un balance de energías. Para tal fin se debe realizar el balance de las energías en tránsito y del remanente en el cuerpo. En este caso se considera que la energía en el medio continuo está determinada por la denominada energía interna $U$, la cual es un parámetro fundamental a la que habrá que sumar el efecto de la energía asociada al movimiento o energía cinética $K$. Por otra parte, sobre el medio continuo también se puede efectuar trabajo $W$ y se presentarán energías en tránsito, las cuales se representan a través de los flujos de calor ($Q$).

La energía cinética $K$ de un cuerpo $\beta$, que ocupa una configuración $A$, de volumen $V$, en un tiempo $t$, es definido como:

$$K = \frac{1}{2} m |v|^2 = \frac{1}{2} \int_V \rho (v \cdot v) dV$$

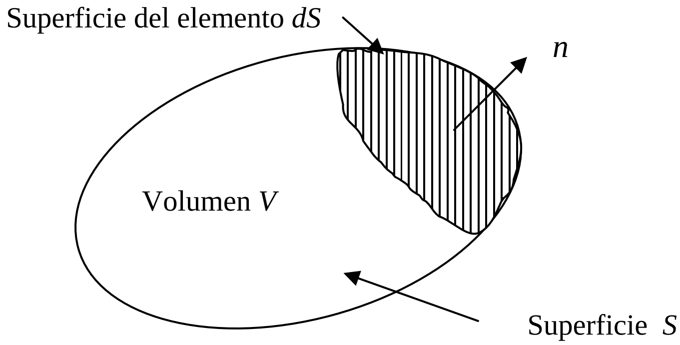


**FIGURA 5.2** CUERPO $\beta$ EN UNA CONFIGURACIÓN $A$ A UN TIEMPO $t$, CON VOLUMEN $V$, MASA $M$, Y SUPERFICIE $S$

Asimismo, la potencia desarrollada por las fuerzas externas actuando sobre $\beta$ en $V$ están dadas por la suma del efecto generado por las fuerzas de cuerpo, más el correspondiente a las fuerzas de superficie; en este punto se debe de recordar el concepto de potencia mecánica, que $\dot{w} = f_i v_i$, de tal forma que

$$\dot{W} = \dot{W}_{fc} + \dot{W}_{fs}$$

La potencia asociada a las fuerzas de cuerpo se expresa

$$\dot{W}_{fc} = \int_V \rho B \cdot v dV$$

La potencia desarrollada por las fuerzas de superficie es

$$\dot{W}_{fs} = \int_A t \cdot v dA$$

Por lo que la rapidez de cambio de trabajo producto de las fuerzas presentes en el MC es

$$\dot{W} = \int_V \rho B \cdot v dV + \int_A t \cdot v dA$$

Si el continuo es conductor de calor y si existe una diferencia de temperatura entre el interior y el exterior, entonces existirá un flujo de calor $Q_c$

$$Q_c = \int_A q \cdot n dA$$

donde $q$ describe vectorialmente al flujo de calor.

Si el calor es generado dentro de $V$ (cantidad de calor generado $H$ dentro de $V$), éste por unidad de tiempo es

$$\dot{H} = \int_V \rho \dot{h} dV$$

donde $h$ es la capacidad específica de la fuente de calor interna o capacidad de la fuente de calor (calor unitario) y $\dot{h}$ es la rapidez con la que se genera calor al interior del medio continuo.

El monto de calor contenido en $V$ por unidad de tiempo está dado por el calor que se genera menos lo que se pierde:

$$Q_R = H - Q_c$$

Se considera que además de la energía cinética, el continuo presenta otra energía definida como energía interna y que la energía total del continuo es la suma de la energía cinética e interna. El concepto de energía interna es primitivo a semejanza de la masa, tiempo, fuerza, etc.

La energía interna $U$ que posee el cuerpo $\beta$ en la configuración $A$ es

$$U = \int_M u dm$$

$$U = \int_V \rho u dV$$

donde $u$ es la energía interna por unidad de masa.

De todo lo antes expuesto se tiene que la rapidez de cambio de la energía (potencia) asociada al medio continuo está dada por la velocidad de intercambio de calor y de trabajo

$$\frac{D}{Dt}(K + U) = P + (\dot{H} - Q) \tag{5.19}$$

Sustituyendo cada una de las expresiones que representan una aportación de calor o trabajo, se tiene

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho\left(\frac{1}{2}(v\cdot v)+u\right)dV=\int_V\left(\rho B\cdot v\right)dV+\int_A\left(t\cdot v\right)dA+\int_V\left(\rho\dot{h}\right)dV-\int_A\left(q\cdot n\right)dA$$

donde

| | |
|---|---|
| $u$ | energía interna específica |
| $v$ | velocidad |
| $K$ | energía cinética |
| $B$ | aceleración generada por la presencia de campos |
| $t$ | vector de esfuerzos |
| $\rho$ | densidad |
| $q$ | vector de flujo de calor |
| $\dot{h}$ | calor específico generado al interior del medio continuo (flujo por radiación, calor producto de una reacción química, en general representa calor que fluye al medio por otros fenómenos diferentes de la conducción) |
| $n$ | normal al elemento $dA$ |

En el caso de la energía cinética se tiene, a través de la fórmula de transporte, que

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho\left(\frac{1}{2}(v\cdot v)+u\right)dV=\int_V \rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}(v\cdot v)+u\right)dV=\int_V \rho\left(v\cdot\frac{Dv}{Dt}+\frac{Du}{Dt}\right)dV$$

Por su parte, para las fuerzas de superficie considerando el teorema de la divergencia

$$\int_A(t\cdot v)dA=\int_A\left(T\cdot v\right)\cdot n\,dA=\int_V \nabla\cdot(T\cdot v)dV$$

$$\int_V div(Tv)dV=\int_V(v\cdot(\nabla\cdot T)+T:\nabla v)dV$$

Y el calor, de conducción, considerando el teorema de la divergencia, se expresa como

$$\int_A(q\cdot n)dA=\int_V\left(\nabla\cdot q\right)dV$$

Sustituyendo, igualando a cero y reagrupando términos en la ecuación de conservación de energía, se tiene

$$\int_V \left( \rho \frac{Du}{Dt} + v \left( \rho \frac{Dv}{Dt} - \nabla \cdot T - \rho B \right) - T : \nabla v + \nabla \cdot q - \rho \dot{h} \right) dV = 0$$

Pero de la ecuación de conservación de cantidad de movimiento (5.10) se sabe que

$$\int_V \left( \rho \frac{Dv}{Dt} - \nabla \cdot T - \rho B \right) dV = 0$$

Entonces la ecuación se puede simplificar a

$$\int_V \left( \rho \frac{Du}{Dt} - T : \nabla v + \nabla \cdot q - \rho \dot{h} \right) dV = 0 \tag{5.20}$$

Dado que se integra sobre un volumen cualquiera mayor que cero, entonces

$$\rho \frac{Du}{Dt} - T : \nabla v + \nabla \cdot q - \rho \dot{h} = 0 \tag{5.21}$$

Despejando se tiene la ecuación de conservación de energía

$$\rho \frac{Du}{Dt} = T : \nabla v - \nabla \cdot q + \rho \dot{h} \tag{5.22}$$

Al realizar el desarrollo se tiene

$$T : \nabla v = \text{traza } \; T_{ij} D_{kl} = \text{traza } \; T \otimes D = T_{ij} D_{ij}$$

donde $D_{kl}$ representa el tensor de rapidez de deformación.

En notación índice, la ecuación 5.22 se expresa como

$$\rho \frac{Du}{Dt} = T_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho \dot{h} \tag{5.23}$$

En notación general, la ecuación 5.23 se expresa como

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \text{traza}(TD) - \nabla \cdot q + \rho \dot{h} \tag{5.24}$$

## 5.7 ECUACIÓN DE LA ENERGÍA EN FORMA MATERIAL

A partir de la ecuación de conservación de energía en su descripción euleriana, se puede fácilmente pasar a su correspondiente descripción material:

$$\int_V \left( \rho \frac{Du}{Dt} - T : \nabla v + \nabla \cdot q - \rho \dot{h} \right) dV = 0 \tag{5.25}$$

Esta ecuación se puede descomponer en sus elementos, de tal forma que

$$\int_V \rho \frac{Du\left(x_i, t\right)}{Dt} dV = \int_{V_0} \rho_0 \frac{Du(X_i, t)}{Dt} dV_0$$

$$\int_V \left(T : \nabla v\right) dV = \int_{V_0} \left(T_0 : \nabla_X v\right) dV_0$$

$$\int_V (\nabla \cdot q) dV = \int_{V_0} (\nabla_X \cdot q) dV_0$$

$$\int_V \left(\rho \dot{h}\right) dV = \int_{V_0} \left(\rho_0 \dot{h}_X\right) dV_0$$

Sustituyendo en la ecuación 5.25

$$\int_{V_0} \left( \rho_0 \frac{Du_X}{Dt} - T_0 : \nabla_X v + \nabla_X \cdot q - \rho_0 \dot{h}_X \right) dV_0 = 0 \tag{5.26}$$

En la ecuación 5.26 al igual que en la ecuación 5.25 se está integrando sobre un volumen cualquiera (en este caso $V_0$) mayor que cero, se puede concluir entonces que la suma de los términos dentro del paréntesis es igual a cero, situación a partir de la que se define la ecuación de campo correspondiente (en este caso en su descripción material).

$$\rho_0 \frac{Du_X}{Dt} = T_0 : \nabla_X v - \nabla_X \cdot q + \rho_0 \dot{h}_X \tag{5.27}$$

## 5.8 DESIGUALDAD ENTRÓPICA

Todo cuerpo, así como tiene una energía interna asociada; también presenta una propiedad primitiva denominada entropía $\widehat{H}$, la cual se modifica en función del flujo de calor que se presenta desde y hacia el cuerpo. Ésta se incrementa cuando el calor fluye al medio continuo y disminuye cuando sale calor del cuerpo. Se define que la entropía asociada a un medio continuo $\widehat{H}$ se expresa como

$$\widehat{H} = \int_M \eta dm$$

$$\widehat{H} = \int_V \rho\eta dV$$

donde $\eta = \eta(x_i, t)$ representa la entropía por unidad de masa.

Dado que la entropía está asociada con el calor contenido en el cuerpo, entonces estará relacionada con la temperatura $\theta$. El calor contenido en el cuerpo está dado por la diferencia de lo que se genera menos lo que se disipa, por lo que se definirá un término que represente la rapidez de incremento de entropía $\widehat{Q}$, dicho término está definido por:

$$\widehat{Q} = \dot{S}_S - \dot{S}_f$$

donde al término $\dot{S}_S$ se le denomina como fuente de entropía; mientras que $\dot{S}_f$ representa el flujo de entropía. Considerando las definiciones empleadas en la ecuación de balance de energía se tiene que

$$\dot{S}_S = \int_V \frac{\rho \dot{h}}{\theta} dV$$

$$\dot{S}_f = \int_A \left(\frac{q}{\theta}\right) \cdot dA$$

De lo antes expuesto se define que la entropía en el cuerpo se incrementará con una velocidad mayor, y en el límite igual, que con la que ésta ingresa al cuerpo:

$$\frac{D\dot{\widehat{H}}}{Dt} \geq \widehat{Q} \quad \therefore \quad \frac{D\dot{\widehat{H}}}{Dt} \geq \dot{S}_S - \dot{S}_f$$

Al sustituir, se tiene que

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho\eta dV \geq \int_V \left(\frac{\rho\dot{h}}{\theta}\right) dV - \int_A \left(\frac{q}{\theta}\right)\cdot n dA$$

Al utilizar la fórmula de transporte para el término de la izquierda, reagrupando la desigualdad y aplicando el teorema de la divergencia al segundo término del lado derecho, se tiene que

$$\int_V \left(\rho\frac{D\eta}{Dt} - \frac{\rho\dot{h}}{\theta} + \nabla\cdot\left[\frac{q}{\theta}\right]\right) dV \geq 0$$

Como la integral se realiza para un volumen arbitrario de un medio continuo, se concluye entonces que

$$\rho\frac{D\eta}{Dt} + \nabla\cdot\left(\frac{q}{\theta}\right) - \frac{\rho\dot{h}}{\theta} \geq 0 \tag{5.28}$$

la ecuación *5.28* se le denomina desigualdad de Clausius-Duhem, ya que se desarrolló a partir de sus trabajos publicados en 1854 (Clausius) y 1901 (Duhem). Resulta evidente que la desigualdad se exprese en la forma

$$\rho\frac{D\eta}{Dt} \geq \rho\frac{\dot{h}}{\theta} - \nabla\cdot\left(\frac{q}{\theta}\right) \tag{5.29}$$

Por lo que también se le denomina como *Ley de desigualdad de entrópica.*

Desarrollando el término correspondiente al flujo de calor, se tiene

$$\nabla\cdot\left(\frac{q}{\theta}\right) = \frac{1}{\theta}(\nabla\cdot q) - \frac{1}{\theta^2}(\nabla\theta)\cdot q$$

Por lo que si se sustituye en la ecuación 5.28:

$$\rho\theta\frac{D\eta}{Dt} - \rho\dot{h} + \nabla\cdot q - \frac{1}{\theta}(\nabla\theta)\cdot q \geq 0 \tag{5.30}$$

Una forma alternativa desarrollada a partir de los conceptos expresados en la ecuación de la energía es [despejando los términos referentes al calor de la ecuación de la energía]

$$\rho\theta\frac{D\eta}{Dt}-\rho\frac{Du}{Dt}+T:D-\frac{1}{\theta}\left(\nabla\theta\right)\cdot q\geq 0 \tag{5.31}$$

El calor fluye en dirección inversa al gradiente de temperatura, por lo tanto, el tensor de rango uno que describe el flujo de calor $q_i$ y el tensor resultante de $(\nabla\theta)_i$ van en direcciones opuestas, por lo que

$$\left(\nabla\theta\right)\cdot q\leq 0$$

Es entonces que se plantea la desigualdad de conducción de calor

$$\rho\theta\frac{D\eta}{Dt}-\rho\frac{Du}{Dt}+T:D\geq 0$$

## 5.9 DESIGUALDAD ENTRÓPICA EN FORMA MATERIAL

Retomando la forma integral de la ecuación de entropía y reescribiendo los términos, considerando la configuración inicial (referencia lagrangiana) se tiene

$$\int_{V_0}\left(\rho_0\frac{D\eta_X}{Dt}-\frac{\rho_0\dot{h}_X}{\theta}+\nabla\cdot\left[\frac{q_0}{\theta}\right]\right)dV_0 \tag{5.32}$$

Considerando igualmente que se integra sobre un volumen arbitrario se tiene

$$\rho_0\frac{D\eta_X}{Dt}-\rho_0\frac{\dot{h}_X}{\theta}+\nabla\cdot\left(\frac{q_0}{\theta}\right)\geq 0 \tag{5.33}$$

Ecuación conocida como desigualdad de Clausius-Duhem en forma material.

## EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Deduzca la ecuación de conservación de cantidad de movimiento (ecuación de Cauchy), la cual representa que cada partícula del continuo debe cumplir con la segunda ley de Newton.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho B_i = \rho a_i$$

Considere un sistema coordenado cartesiano $x_1, x_2, x_3$, densidad $\rho$, aceleración total de la partícula $a$, fuerzas de un cuerpo $B$, fuerzas de superficie $\sigma_{ij}$.

2. Si el campo de velocidades asociado a una partícula está dado por $v_i = \frac{x_i}{t} a$, a partir de la ecuación de conservación de masa

$$\frac{D(\rho dV)}{Dt} = 0 = \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{D\rho}{Dt}$$

a) Determine la variación de la densidad de la partícula en función del tiempo.

b) Considere que para un tiempo igual a uno la densidad es $\rho_0$ (densidad inicial) y para cualquier tiempo $(t)$ la densidad asociada es $\rho$.

3. La distribución de esfuerzos en un cuerpo está dada por $T_{ij}$. Considerando lo anterior, ¿existirá equilibrio? O, en su caso, ¿qué fuerzas de cuerpo se requerirán para garantizar éste? Considere que el material presenta una densidad $\rho$.

$$T_{ij} = \alpha \begin{bmatrix} 4x_1^2 + x_2 & 2x_1 - x_2^3 & x_1^2 \\ 2x_1 - x_2 & x_1 - 3x_2 & 3x_3 \\ x_1^2 & 3x_3 & x_1 \end{bmatrix}$$

4. Determine si la ecuación de conservación de masa es satisfecha por el siguiente campo de velocidades $v = v(r, \theta, z)$

$$v_r = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial \alpha}{\partial z}, \qquad v_\theta = 0, \qquad v_z = \frac{1}{\rho r}\frac{\partial \alpha}{\partial r}$$

La densidad $\rho$ es constante y $\alpha = \alpha(r, z)$ tiene segundas derivadas parciales continuas.

5. Considerando que se tiene un fluido viscoso, lineal e incompresible, para el que el campo de velocidades, en coordenadas cilíndricas, está dado por

$$v_r = v(r, \theta) \qquad v_\theta = 0 \qquad v_z = 0$$

a) A partir de la ecuación de la continuidad analice si cumple que

$$v_r = \frac{f(\theta)}{r}, \ donde \ \ f(\theta) \ es\ una\ \ función\ \ cualquiera\ de\ \theta$$

b) La ecuación constitutiva de un fluido viscoso, lineal e incompresible es

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\dot{\varepsilon}_{ij}$$

Por otra parte, en ausencia de fuerzas de cuerpo y con base en la ecuación de conservación de cantidad de movimiento verifique si

$$\frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial\theta^2} + 4f + \rho\frac{f^2(\theta)}{\mu} + k = 0$$

con $p = 2\mu\frac{f}{r^2} + \frac{k\mu}{2r^2} + C$, donde $k$ y $C$ representan constantes.

6. Dado el siguiente campo de velocidades

$$v_1 = ax_1 - bx_2 \quad ; \quad v_2 = bx_1 + ax_2 \quad ; \quad v_3 = c\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}$$

donde *a*, *b* y *c* son constantes, determine si la ecuación de conservación de masa se satisface o no.

7. Dado el siguiente campo de esfuerzos en coordenadas cilíndricas.

$$\sigma_{rr} = -\frac{3\mathrm{Pr}^2 Z}{2\pi R^5} \ ; \ \sigma_{\theta\theta} = 0 \ ; \ \sigma_{zz} = -\frac{3\mathrm{P}Z^3}{2\pi R^5}$$

$$\sigma_{rz} = -\frac{3\mathrm{Pr}Z^2}{2\pi R^3} \ ; \ \sigma_{r\theta} = \sigma_{z\theta} = 0 \ ; \ R^2 = r^2 + z^2$$

Verifique si dicho campo de esfuerzos satisface las ecuaciones de equilibrio en ausencia de fuerzas de cuerpo.

8. Para el movimiento irrotacional de un continuo cuya velocidad está definida por $v = \nabla\varphi$ demostrar que la ecuación de la continuidad se expresa $\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla^2\varphi = 0$.

Deducir que si el continuo es un medio incompresible, entonces $\varphi$ es una función armónica, esta es una función dos veces continuamente derivable y satisface la ecuación de Laplace $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \ldots\ldots.. + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0$ o $\nabla^2 f = 0$.

9. Para la ecuación constitutiva $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}$ si $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ y $\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ji}$ el tensor $C_{ijkl}$ no tiene más de 36 diferentes componentes. Verifique si bajo las condiciones antes enunciadas y considerando que la rapidez de desarrollo de trabajo se expresa como $\frac{DW}{Dt} = \int \sigma_{ij} d\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}$, ésta también se puede expresar mediante $\frac{DW}{Dt} = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$. Se conoce que $\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$.

10. Un flujo bidimensional de un fluido incompresible se describe como

$$v_i = \frac{a\left(x_1^2 - x_2^2\right)}{r^4}\hat{e}_1 + 2a\frac{\left(x_1 x_2\right)}{r^4}\hat{e}_2 + 0\hat{e}_3$$

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2$$

Verifique si éste cumple con la ecuación de la continuidad.

11. Para un medio continuo que presenta una ecuación constitutiva de la forma $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\dot{\varepsilon}_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\dot{\varepsilon}_{ij}$, desarrolle sus ecuaciones de conservación de movimiento, recuerde que $\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$.

12. El flujo de un fluido incompresible se describe como

$$v_i = \frac{2\left(x_1 x_2 x_3\right)}{r^4}\hat{e}_1 + \frac{\left(x_1^2 - x_2^2\right)x_3}{r^4}\hat{e}_2 + \frac{x_2}{r^2}\hat{e}_3$$

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2$$

Verifique si éste cumple con la ecuación de la continuidad y si se trata de un flujo rotacional o irrotacional.

13. La ecuación de movimiento de un MC está dada por $x_i = \left(1 + \frac{t}{b}\right)X_i$, donde $b$ es una constante. La densidad para $t = 0$ es $\rho_0$, ¿Cuál será la densidad para cualquier tiempo?