CAPÍTULO 3

DEFORMACIÓN

3.1 CONCEPTOS GENERALES

La deformación en cualquier medio continuo se puede describir como recuperable, condición que se define como elástica o, en su defecto, puede ser permanente o plástica. El rango elástico de la deformación se presenta previo a la existencia de las deformaciones no recuperables. En muchos de los casos, como por ejemplo metales y cerámicos, las deformaciones elásticas son muy pequeñas, razón por la cual se describen como infinitesimales; sin embargo, existen algunos materiales como los elastómeros (hules) que se caracterizan por presentar grandes deformaciones elásticas, las cuales se describen como finitas. Las deformaciones plásticas presentan, normalmente, mayores magnitudes que las encontradas en el rango elástico; no obstante, existen casos (materiales frágiles) en los que el rango plástico de la deformación puede ser despreciable o de magnitud comparable al elástico, por ejemplo en cerámicos y metales muy endurecidos. Por su parte, los metales suaves y muchos de los polímeros se caracterizan por alcanzar grandes deformaciones no recuperables antes de la fractura. Resulta evidente que la descripción de la deformación dependerá de las magnitudes que ésta alcance, ya que las condiciones de desplazamiento infinitesimal permitirán la simplificación de las expresiones, sin embargo, para el caso de deformaciones finitas, se incurrirá en graves errores si se tratan así.

Ahora bien, para describir la deformación de cualquier medio continuo se debe partir del análisis de su movimiento sin atender, por el momento, a las causas que lo producen.

Cinemática del continuo

En el capítulo 2 se ha explicado la forma en que el movimiento del medio continuo puede ser descrito. En principio es conveniente recordar que en los cursos básicos de mecánica, para definir el movimiento de los cuerpos, se declaran a estos como rígidos y por lo tanto cualquier descripción de su desplazamiento se descompone, a lo más como la suma de traslación y rotación. Ahora bien, al considerar un cuerpo como deformable se deberán efectuar las observaciones que permitan la descripción de la deformación de cada uno de los elementos diferenciales en que se puede descomponer el MC. Como ya se mencionó en el capítulo anterior, dada la definición de MC, la descripción de sus movimientos se deberá realizar a partir de identificar cualquier elemento diferencial del cuerpo por la posición que ocupa para un tiempo de referencia t_0; esto es:

$$p(t_0) = (X_1,\ X_2, X_3)$$

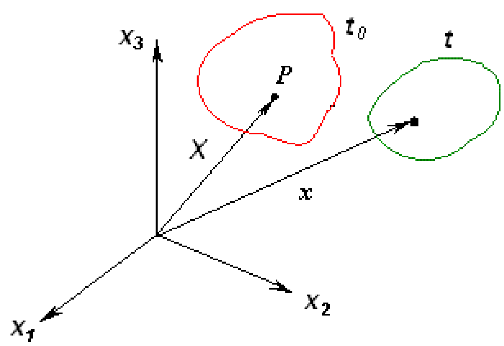


FIGURA 3.1 DESCRIPCIÓN DE LA POSICIÓN PARA UN TIEMPO CUALQUIERA DE UN ELEMENTO DIFERENCIAL p DEL MEDIO CONTINUO

Con base en lo antes expuesto será factible describir el campo de desplazamiento $u(X,t)$ de cada una de las partículas correspondientes al MC. Para esto es necesario definir las ecuaciones de trayectoria $x(X,t)$, a partir de las cuales se tiene

$$u(X,t) = x(X,t) - X$$

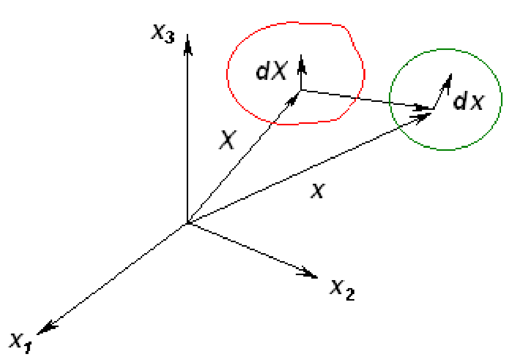


FIGURA 3.2 DEFINICIÓN DEL VECTOR DESPLAZAMIENTO u PARA UN TIEMPO CUALESQUIERA

Es por tanto que conocidas las líneas de trayectoria (ecuaciones de trayectoria) $x(X,t)$, entonces queda establecido el campo de desplazamientos $u(X,t)$, de tal forma que

$$x(X,t) = X + u(X,t)$$

3.2 DEFORMACIÓN INFINITESIMAL

En una gran variedad de aplicaciones de la mecánica de los sólidos se considera que el efecto de las solicitaciones a las que se somete el MC se traducen en pequeños desplazamientos de las partículas que forman el medio continuo, los cuales se definen como infinitesimales. Para lo anterior considere la figura 3.3, en ésta se presenta un MC a un tiempo de referencia t_0. En este medio continuo se considerarán dos partículas, las cuales se encuentran originalmente a una distancia dX, donde dicha distancia se modifica a dx como consecuencia de la deformación del objeto. De la figura mencionada se constata que

$$dx = dX + u(X + dX, t) - u(X,t)$$

Esta ecuación, a partir de la definición de gradiente se expresa como

$$dx = dX + \nabla u dX$$

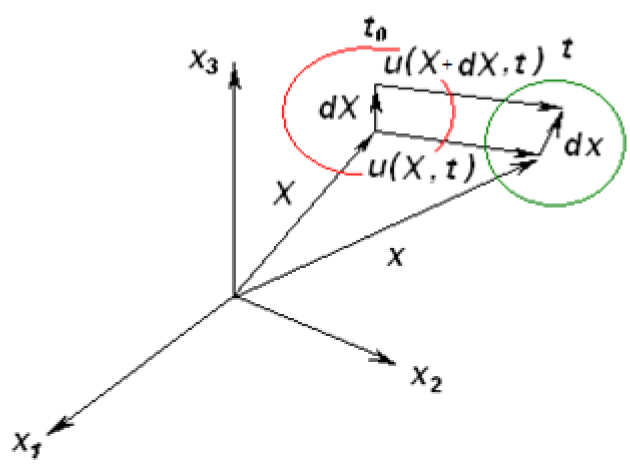


FIGURA 3.3 DESCRIPCIÓN DEL DESPLAZAMIENTO ENTRE DOS ELEMENTOS DIFERENCIALES VECINOS

donde ∇u es un tensor de segundo orden al cual se le denomina como gradiente de desplazamiento, que en coordenadas cartesianas se expresa como

$$\nabla_X u = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

Mientras que para una función vectorial $u = u(r,\, \theta,\, z)$, su gradiente está definido por

$$\nabla u = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta\right) & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + u_r\right) & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_z}{\partial \theta}\right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

y para $u = u(r,\, \theta,\, \phi)$, su gradiente queda

$$\nabla u = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta\right) & \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\left(\frac{\partial u_r}{\partial \phi} - u_\phi \mathrm{sen}\,\theta\right) \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r\right) & \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} - u_\phi \cos\theta\right) \\ \frac{\partial u_\phi}{\partial r} & \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\phi}{\partial \theta}\right) & \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\left(\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi}\right) + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta \cot\theta}{r} \end{bmatrix}$$

Cualquiera que sea la base ∇u , al tratarse éste de un tensor de segundo rango se puede descomponer en su parte simétrica y su componente antisimétrica, de tal forma que

$$\nabla u = \frac{1}{2}\left(\nabla u + (\nabla u)^T\right) + \frac{1}{2}\left(\nabla u - (\nabla u)^T\right)$$

En el caso del análisis de la deformación infinitesimal ambos términos tienen un significado físico. La parte simétrica se denomina deformación infinitesimal y se expresa como ε o E, que a su vez se representa en un espacio hexadimensional; por su parte, la componente antisimétrica tiene tres grados de libertad, por esta razón se puede presentar como un tensor de segundo grado o en forma vectorial por ζ_i, el cual se puede comprobar que es proporcional a

$$\nabla \times u = 2\zeta$$

Es entonces que el tensor ε caracteriza los cambios de longitud en el continuo para pequeñas deformaciones y también su distorsión angular. Para ejemplificar el significado de lo antes expuesto considere un pequeño elemento el cual es deformado de manera uniaxial (figura 3.4). En ésta se definen dos partículas adyacentes (p,q), las cuales a un tiempo de referencia t_0 se encuentran a una distancia dX, al aplicar una carga colineal f_x las partículas (p,q) variarán su distancia a dx.

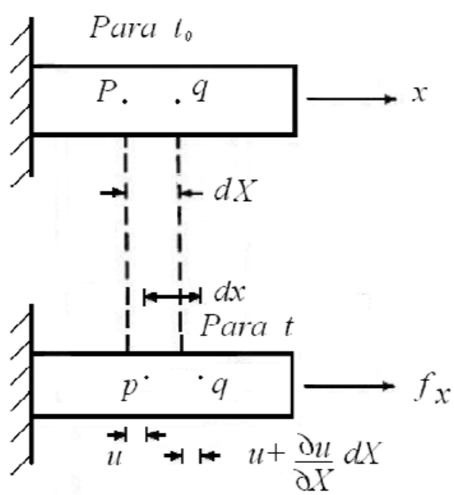


FIGURA 3.4 BARRA DE LONGITUD l SE ENCUENTRA ORIENTADA COLINEAL CON EL EJE x

Resulta entonces que

$$dx = dX + \left(u + \frac{\partial u}{\partial X}dX - u\right)$$

$$\therefore \qquad dx = dX + \frac{\partial u}{\partial X}dX$$

por consecuencia, el incremento unitario de distancia entre las partículas p y q está dado por

$$\frac{\Delta l}{l_0}=\frac{dx-dX}{dX}=\frac{\partial u\left(X,t\right)}{\partial X}$$

Generalizando, se tiene que la deformación normal unitaria en cualquier dirección tendrá la forma

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial X_1};\quad \varepsilon_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial X_2};\quad \varepsilon_{33}=\frac{\partial u_3}{\partial X_3}$$

donde

$$u_i=u_1(X_i,t)\widehat{e}_1+u_2\left(X_i,t\right)\widehat{e}_2+u_3\left(X_i,t\right)\widehat{e}_3$$

Representa, como ya ha sido mencionado, al campo de desplazamientos asociado al medio continuo.

Para el caso de deformación a corte, considérese de igual forma un elemento diferencial, el cual se presenta en el plano x_1x_2; donde para un tiempo t_0 no presenta deformación, sin embargo, a un tiempo t es sometido a un estado de corte puro (fuerzas tangenciales al plano, en equilibrio estático), de tal forma que se distorsiona de acuerdo con la figura 3.4.

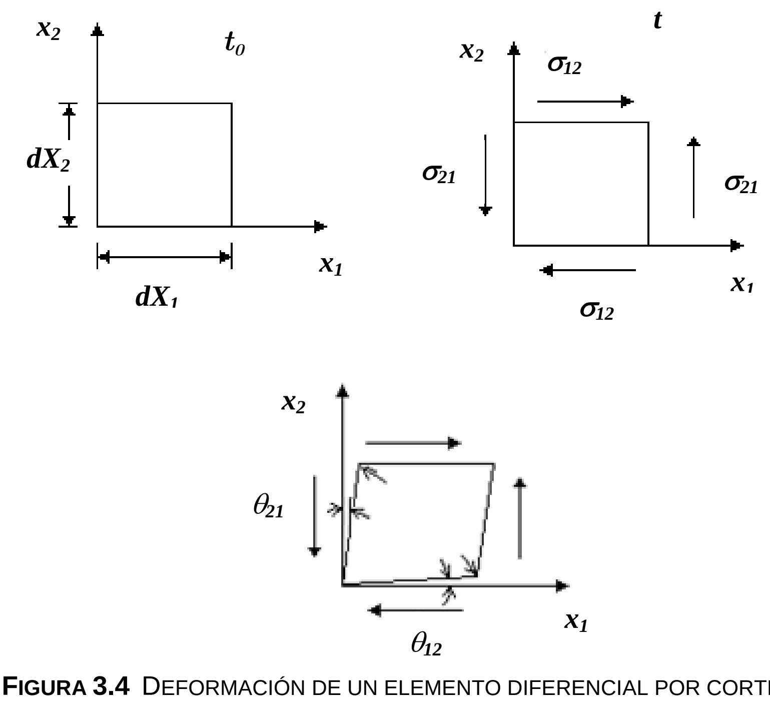


FIGURA 3.4 DEFORMACIÓN DE UN ELEMENTO DIFERENCIAL POR CORTE PURO

La deformación en el elemento diferencial, considerando desplazamientos pequeños, se puede describir a través de la distorsión angular del elemento diferencial $\left(\gamma_{12}\right)$, de tal forma que en el plano $x_1 x_2$ se tiene:

donde

$$\theta_{12} = \tan^{-1} \frac{\partial u_2}{\partial X_1}$$

$$\theta_{21} = \tan^{-1} \frac{\partial u_1}{\partial X_2}$$

Al ser los ángulos de distorsión muy pequeños, se puede considerar que

$$\theta \approx \tan \theta$$

$$\therefore \qquad \gamma_{12} \simeq \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1}$$

por lo que, generalizando, la distorsión angular se expresará como

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \ \forall \ i \neq j$$

Se comprueba entonces que el tensor ε o E representa la deformación normal y angular, esto bajo la consideración de desplazamientos muy pequeños (infinitesimales), y está dada por la componente simétrica de ∇u. Al ser todas las componentes de ∇u parte de los reales se tiene entonces que el tensor ε (componente simétrica ∇u) tendrá asociados tres valores característicos (deformaciones principales: ε_1, ε_2, ε_3), las que a su vez tiene asociados tres direcciones (ejes principales), que al ser mutuamente perpendiculares forman una base.

Se tiene entonces que el tensor de deformación, considerando desplazamientos infinitesimales, en notación índice se puede describir como

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right)$$

Por lo que en coordenadas cartesianas, queda:

$$\varepsilon_{ij}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial X_1} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial X_2}+\dfrac{\partial u_2}{\partial X_1}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial X_3}+\dfrac{\partial u_3}{\partial X_1}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial X_1}+\dfrac{\partial u_1}{\partial X_2}\right) & \dfrac{\partial u_2}{\partial X_2} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial X_3}+\dfrac{\partial u_3}{\partial X_2}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial X_1}+\dfrac{\partial u_1}{\partial X_3}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial X_2}+\dfrac{\partial u_2}{\partial X_3}\right) & \dfrac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

Y en coordenadas cilíndricas y esféricas

$$\varepsilon_{(r,\,\theta,\,z)}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_r}{\partial r} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)+\dfrac{\partial u_\theta}{\partial r}-\dfrac{u_\theta}{r}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial z}+\dfrac{\partial u_z}{\partial r}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_\theta}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}-u_\theta\right)\right) & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+u_r\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_\theta}{\partial z}+\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial \theta}\right)\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial r}+\dfrac{\partial u_r}{\partial z}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial \theta}\right)+\dfrac{\partial u_\theta}{\partial z}\right) & \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{(r,\,\theta,\,\phi)}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_r}{\partial r} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}-u_\theta\right)+\dfrac{\partial u_\theta}{\partial r}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\dfrac{\partial u_r}{\partial \phi}+\dfrac{\partial u_\phi}{\partial r}-\dfrac{u_\phi}{r}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}-u_\theta\right)+\dfrac{\partial u_\theta}{\partial r}\right) & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+u_r\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \phi}-\dfrac{u_\phi\cot\theta}{r}+\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial u_\phi}{\partial \theta}\right)\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\dfrac{\partial u_r}{\partial \phi}+\dfrac{\partial u_\phi}{\partial r}-\dfrac{u_\phi}{r}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \phi}-\dfrac{u_\phi\cot\theta}{r}+\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial u_\phi}{\partial \theta}\right)\right) & \left(\dfrac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\dfrac{\partial u_\phi}{\partial \phi}+\dfrac{u_r}{r}+\dfrac{u_\theta\cot\theta}{r}\right) \end{bmatrix}$$

Para la determinación de los valores principales asociados al tensor de deformación es necesario resolver la siguiente ecuación cúbica característica

$$\varepsilon^3-I_{1\varepsilon}\varepsilon^2+I_{2\varepsilon}\varepsilon-I_{3\varepsilon}=0$$

donde los invariantes del sistema están dados por

$$I_{1\varepsilon} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

$$I_{2\varepsilon} = \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{33}\varepsilon_{11} - \left(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2\right)$$

$$I_{3\varepsilon} = \varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + 2\varepsilon_{12}\varepsilon_{23}\varepsilon_{31} - \left(\varepsilon_{11}\varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{22}\varepsilon_{31}^2 + \varepsilon_{33}\varepsilon_{12}^2\right)$$

Con lo que se tendrá una representación del estado de deformaciones de la forma

$$\varepsilon_p = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

Dilatación unitaria

Este concepto también es comúnmente descrito como cambio unitario de volumen, se representa a través de

$$\delta = \frac{\Delta\left(dV\right)}{dV} = \frac{V_f - V_0}{V_0}$$

la cual se puede expresar a partir de considerar un elemento diferencial que al tiempo de referencia t_0 presenta un volumen $dV_0 = dX_1 dX_2 dX_3$, mientras que para un tiempo t se ha deformado (dilatado) de tal manera que existe deformación normal en todas direcciones, entonces, el volumen estará dado por

$$dV_f = \left(dX_1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} dX_1\right)\left(dX_2 + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} dX_2\right)\left(dX_3 + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} dX_3\right)$$

Por consecuencia,

$$\delta = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2}\frac{\partial u_3}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_3}\frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\frac{\partial u_2}{\partial X_2}\frac{\partial u_3}{\partial X_3}$$

Considerando que las deformaciones son infinitesimales, entonces es posible despreciar el efecto de los productos de las parciales, por lo que la expresión anterior se puede simplificar a

$$\delta = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_{ii} = I_{1\varepsilon}$$

Lo que significa que el primer invariante del tensor de deformación infinitesimal (traza del tensor) representa el cambio unitario de volumen asociado a la deformación (dilatación).

Tensor infinitesimal de rotación

Retomando la expresión $dx = dX + \nabla_X u\left(X,t\right) dX$ se tiene que ésta se puede presentar como $dx = dX + \left(\varepsilon + \Omega\right) dX$, donde Ω representa la parte antisimétrica de ∇u , a la cual se denomina como tensor de rotación infinitesimal. Se puede constatar que el cambio de dirección de dX puede provenir de dos fuentes; el tensor de deformación infinitesimal y el tensor de rotación infinitesimal. Sin embargo, para cualquier dX que se encuentra en la dirección de un eigenvector de ε, no habrá cambio en la dirección debida a ε y sólo será por efecto de Ω. Por lo tanto, el tensor Ω representa la rotación infinitesimal de la tríada de eigenvectores de ε, esto puede ser descrito a través de un vector g, de tal forma que se cumple

$$g \times dX = \Omega \, dX$$

donde

$$g = \Omega_{32}\hat{e}_1 + \Omega_{13}\hat{e}_2 + \Omega_{21}\hat{e}_3$$

Es entonces que

$$\Omega_{32},\ \Omega_{13},\ \Omega_{21}$$

son los ángulos de rotación con respecto a los ejes $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ de la tríada de direcciones principales de ε.

3.3 TENSOR DE RAPIDEZ DE DEFORMACIÓN (D)

Considérese un elemento material dX el cual emana a partir de un punto material X (figura 3.5). El término

$$\left(\frac{D}{Dt}\right)dx$$

representa la velocidad de cambio de longitud y dirección del elemento dx, a partir $x = x\,(X, t)$.

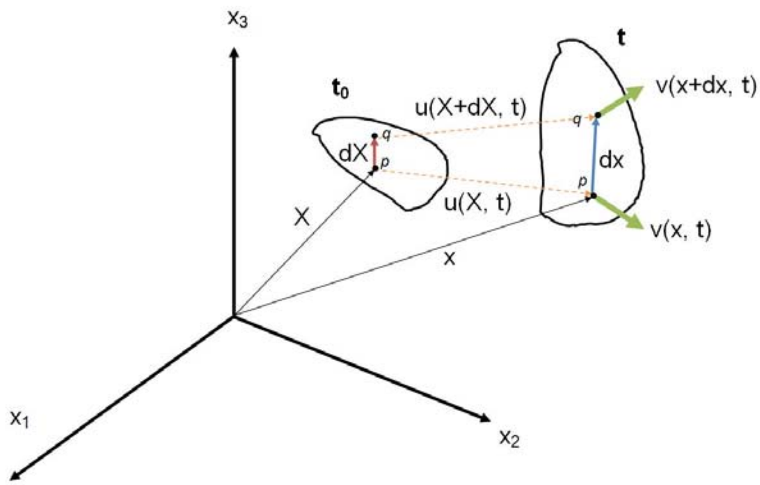


FIGURA 3.5 CONCEPTO DE RAPIDEZ DE DEFORMACIÓN

Se tiene que

$$dx = x\left(X + dX,\, t\right) - x\left(X,\, t\right)$$

tomando la derivada en el tiempo queda entonces

$$\left(\frac{D}{Dt}\right)dx = \left(\frac{D}{Dt}\right)x\left(X + dX, t\right) - \left(\frac{D}{Dt}\right)x\left(X, t\right)$$

Dado que

$$\left(\frac{D}{Dt}\right)x\left(X, t\right) = v\left(X, t\right) = v\left(x, t\right)$$

$$\left(\frac{D}{Dt}\right)dx = v\left(X + dX, t\right) - v\left(X, t\right) = v\left(x + dx, t\right) - v\left(x, t\right)$$

Entonces, de la definición de gradiente, se tendrá que

$$\left(\frac{D}{Dt}\right)dx = \left(\nabla_X v\right)dX = \left(\nabla_x v\right)dx$$

Esto representa que el gradiente del campo de velocidades, descrito con una referencia lagrangiana $\nabla_X v$ es igual al gradiente bajo una referencia euleriana $\nabla_x v$, por lo que en general este término se refiere simplemente como ∇v, sin enfatizar sobre la base de referencia, es decir

$$\nabla_X v = \nabla_x v = \nabla v$$

Por lo tanto,

$$\left(\frac{D}{Dt}\right)dx = \left(\nabla v\right)dx$$

La expresión

$$\left(\frac{1}{dx}\right)\left(\frac{D}{Dt}\right)dx = \nabla v$$

representa entonces la razón de cambio en el tiempo de una longitud unitaria.

Considerando una base rectangular (cartesiana) el gradiente del campo de velocidades está dado por

$$\nabla v = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

Al tratarse de un tensor de segundo grado, éste se puede descomponer en su parte simétrica y su componente antisimétrica, por analogía se tiene que

$$\nabla v = D + \dot{\omega}$$

donde D describe la componente simétrica, por lo que la rapidez de cambio unitario de volumen se expresa a través de

$$\frac{1}{dV}\left(\frac{D}{Dt}\right)dV = \operatorname{div}\, v = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = D_{11} + D_{22} + D_{33}$$

Se tiene entonces que:

$$D = \frac{1}{2}\left(\nabla v + \left(\nabla v\right)^T\right) \qquad \dot{\omega} = \frac{1}{2}\left(\nabla v - \left(\nabla v\right)^T\right)$$

El tensor D o $\dot{\varepsilon}$ representa entonces la rapidez de deformación, mientras que $\dot{\omega}$ representa la rapidez de rotación, en coordenadas cartesianas (notación índice), la relación se expresa según

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \qquad \dot{\omega}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

Por lo que el tensor de rapidez de deformación en coordenadas cartesianas se expresa como

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} + \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) & \dfrac{\partial v_2}{\partial v_2} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_2}{\partial x_3} + \dfrac{\partial v_3}{\partial x_2}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_3}{\partial x_1} + \dfrac{\partial v_1}{\partial x_3}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_3}{\partial v_2} + \dfrac{\partial v_2}{\partial v_3}\right) & \dfrac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

Por su parte, el tensor de rapidez de deformación infinitesimal en coordenadas cilíndricas se expresan como

$$\dot{\varepsilon}_{(r,\,\theta,\,z)} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_r}{\partial r} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta}\right) + \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} - \dfrac{v_\theta}{r}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_r}{\partial z} + \dfrac{\partial v_z}{\partial r}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta\right)\right) & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_\theta}{\partial z} + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_z}{\partial \theta}\right)\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_r}{\partial z} + \dfrac{\partial v_z}{\partial r}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_\theta}{\partial z} + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_z}{\partial \theta}\right)\right) & \dfrac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

y en coordenadas esféricas

$$\dot{\varepsilon}_{(r,\,\theta,\,\phi)} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_r}{\partial r} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta\right) + \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\dfrac{\partial v_r}{\partial \phi} + \dfrac{\partial v_\phi}{\partial r} - \dfrac{v_\phi}{r}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta\right) + \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - \dfrac{v_\phi \cot\theta}{r} + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_\phi}{\partial \theta}\right)\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\dfrac{\partial v_r}{\partial \phi} + \dfrac{\partial v_\phi}{\partial r} - \dfrac{v_\phi}{r}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - \dfrac{v_\phi \cot\theta}{r} + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_\phi}{\partial \theta}\right)\right) & \left(\dfrac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\dfrac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \dfrac{v_r}{r} + \dfrac{v_\theta \cot\theta}{r}\right) \end{bmatrix}$$

Como ya ha sido mencionado, el tensor antisimétrico $\dot{\omega}_{ij}$ es equivalente a un vector de rapidez de rotación. El vector $\dot{\eta}_i$ es denominado como vector dual o vector axial asociado al tensor $\dot{\omega}$ y se relaciona con las tres componentes diferentes de cero del tensor, de tal manera que

$$\dot{\eta} = -2\left(\dot{\omega}_{23}\hat{e}_1 + \dot{\omega}_{31}\hat{e}_2 + \dot{\omega}_{12}\hat{e}_3\right)$$

Se utilizan los mismos conceptos empleados con el tensor de deformación ε para determinar los valores principales asociados a $\dot{\varepsilon}$.

Rapidez de cambio unitario de volumen $\left(\dot{\delta}\right)$

Por analogía con el concepto de cambio unitario de volumen $\dot{\delta}$

$$\dot{\delta}=\frac{1}{dV}\Delta\left(dV\right)=\frac{V_f-V_0}{V_0}$$

es posible definir la velocidad de cambio unitario de volumen $\dot{\delta}$

$$\dot{\delta}=\frac{1}{dV}\left(\frac{D\left(dV\right)}{Dt}\right)$$

Dado que la velocidad está dada por la rapidez de cambio de posición y considerando que ésta se puede representar como

$$\dot{\delta}=\frac{D\delta}{Dt} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\delta}=\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+\frac{\partial v_3}{\partial x_3}+\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\frac{\partial v_3}{\partial x_3}+\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

Expresión que se puede simplificar partiendo de la consideración de que se trata de deformaciones infinitesimales, por lo que el producto de parciales se puede despreciar, por lo tanto,

$$\dot{\delta}\cong\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+\frac{\partial v_3}{\partial x_3}=\dot{\varepsilon}_{11}+\dot{\varepsilon}_{22}+\dot{\varepsilon}_{33}=I_{1\dot{\varepsilon}}$$

resulta entonces que la traza del tensor de rapidez de deformación D representa la velocidad con la cual se modifica el volumen, esto por unidad de volumen.

3.4 ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD

En el caso de que se defina el campo de desplazamientos u o el de velocidad v, el tensor de deformación infinitesimal o de rapidez de deformación infinitesimal existirá siempre y cuando la función de desplazamiento u o en su defecto la de velocidad v sea continua y continuamente derivable en el intervalo en que se haya definido el tensor de deformación infinitesimal o de rapidez de deformación infinitesimal. En el caso de que se proponga el tensor de deformación ε o de rapidez de deformación D, no necesariamente existirá un campo de desplazamientos u o de velocidad v para el intervalo en consideración. Para garantizar la existencia de los campos de desplazamiento o de velocidad será necesario que las funciones de deformación o de velocidad de deformación cumplan con la existencia de las ecuaciones de compatibilidad o integrabilidad. Las cuales se expresan, para el caso de deformaciones infinitesimales, como:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_1^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial X_2 \partial X_1}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial X_2^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial X_3 \partial X_2}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_3^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial X_1 \partial X_3}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_2 \partial X_3} = \frac{\partial}{\partial X_1}\left(-\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial X_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial X_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial X_3}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_3 \partial X_1} = \frac{\partial}{\partial X_2}\left(-\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial X_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial X_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial X_1}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial X_1 \partial X_2} = \frac{\partial}{\partial X_3}\left(-\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial X_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial X_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial X_2}\right)$$

Para la rapidez de deformación se deberá cumplir con las siguientes 6 ecuaciones para garantizar la existencia del campo de velocidades v

$$\frac{\partial^2 D_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 D_{22}}{\partial x_1^2} = 2\frac{\partial^2 D_{12}}{\partial x_2 \partial x_1}$$

$$\frac{\partial^2 D_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 D_{33}}{\partial x_2^2} = 2\frac{\partial^2 D_{23}}{\partial x_3 \partial x_2}$$

$$\frac{\partial^2 D_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 D_{11}}{\partial x_3^2} = 2\frac{\partial^2 D_{31}}{\partial x_1 \partial x_3}$$

$$\frac{\partial^2 D_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\frac{\partial D_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial D_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial D_{12}}{\partial x_3} \right)$$

$$\frac{\partial^2 D_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(-\frac{\partial D_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial D_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial D_{23}}{\partial x_1} \right)$$

$$\frac{\partial^2 D_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(-\frac{\partial D_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial D_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial D_{31}}{\partial x_2} \right)$$

Es evidente que tanto en el caso del campo de deformaciones como de velocidad de deformaciones, la existencia de un campo de desplazamientos o de velocidades (según sea el caso) solo se garantizará al dar cumplimiento a todas y cada una de las seis ecuaciones de compatibilidad o integrabilidad.

3.5 GRADIENTE DE DEFORMACIÓN (F)

Como ya ha sido manifestado, el movimiento de un continuo se describe en general como

$$x = x(X, t)$$

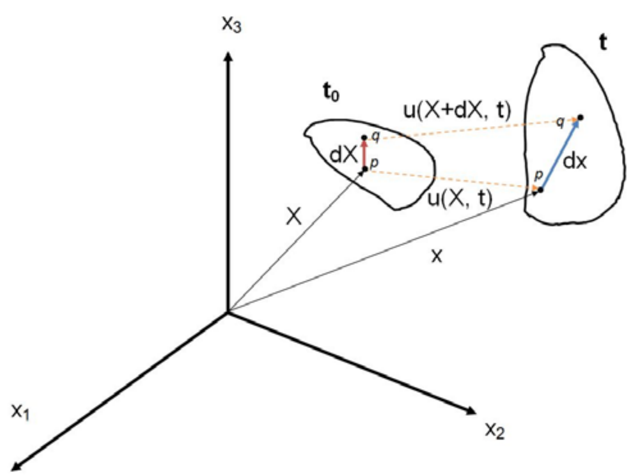


FIGURA 3.6 MOVIMIENTO DEL CONTINUO

Considérese un medio continuo que para el tiempo de referencia está descrito por $X = x(t_0)$, , mientras que para cualquier tiempo queda $x = x(X,t)$, donde x representa la posición espacial a un tiempo t de la partícula material descrita a través de la coordenada material X (figura 3.6). Una partícula material, la cual se encuentra a una distancia dX para el tiempo de referencia t_0, es transformada a través del movimiento, de tal forma que a un tiempo t se encuentra a una distancia dx. La relación estará dada entonces por

$$dx = x(X + dX, t) - x(X,t) = (\nabla x)dX$$

Al gradiente de las funciones de trayectoria se le conoce como gradiente de deformación en X , de tal forma que $\nabla_X x = F$, por lo tanto, en coordenadas rectangulares se tiene que:

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$$

$$\nabla_X x = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

Dos puntos adyacentes en el medio continuo pasan de estar a una distancia dX para el tiempo de referencia t_0 a una distancia dx para un tiempo $t > t_0$, como la posición a cualquier tiempo t se puede expresar como

$$x = X + u(X,t)$$

Por lo que

$$dx = dX + \nabla u(X,t)dX$$

Entonces, el gradiente de deformación (F) se expresa como

$$dx = (I + \nabla u)dX$$

$$\Rightarrow \qquad F = \nabla_X x = \nabla_X X + \nabla u = I + \nabla u$$

$$\therefore \qquad F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial X_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j}$$

donde

$$\nabla u = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

Si F es simétrico $\Rightarrow F = U$, situación que representa un estado de estirado o de tracción pura, por otra parte, si U es constante esto implica que todo el cuerpo se encuentra en tracción pura. Entonces, para F simétrico $dx = UdX$. Por otra parte, al no existir rotación las direcciones principales del cuerpo no deformado y del cuerpo deformado son las mismas, pudiendo existir un cambio dimensional, el cual estará descrito por los eigenvalores y la deformación o dilatación s estará dada por

$$s = \frac{|dx|}{|dX|}$$

Por último, es conveniente mencionar que los eigenvalores de U representan las deformaciones principales.

Si F es ortogonal representará una transformación con la cual se mantienen los ángulos y magnitudes relativas, por lo que solo existirá rotación. Además, en este caso $FF^T = I \Rightarrow F = R$. De lo antes expuesto se puede concluir que cualquier tensor F para el cual $|F| \neq 0$, se podrá descomponer en el producto de un tensor ortogonal y de un tensor simétrico; a esto se le denomina *teorema de la descomposición polar*, de tal forma que:

$$F = RU$$

$$F = VR$$

donde U, V son tensores simétricos y R es un tensor ortogonal. En cualquier condición, la descomposición será única, por lo que sólo existirá un tensor R, V, U para cada caso. Al tensor U se le denomina como tensor de dilatación por derecha y al tensor V se le describe como tensor de dilatación por izquierda. Es por tanto que

$$dx = FdX = RUdX$$

$$F = RU = VR$$

Considerando las operaciones con matrices se tiene:

$$RU = VR$$

$$\Rightarrow \qquad R^T RU = R^T VR$$

$$\therefore \qquad U = R^T VR$$

$$RUR^T = VRR^T$$

$$\Rightarrow \qquad V = RUR^T$$

$$F = RU = VR$$

$$\Rightarrow \qquad F^T F = (RU)^T RU = U^T R^T RU$$

$$\therefore \qquad F^T F = U^T U$$

$$FF^T = VR(VR)^T = VRR^T V^T$$

$$\therefore \qquad FF^T = VV^T$$

Considerando a U como tensor diagonal (valores principales):

$$\begin{pmatrix} u_1 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 \end{pmatrix} = U \equiv U^T$$

donde u_1, u_2, u_3 representan los valores principales asociados al tensor U , por lo tanto,

$$U^T U = U U^T = \begin{pmatrix} u_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & u_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & u_3^2 \end{pmatrix} = U^2$$

dado que

$$F^T F = U^T U$$

$$\Rightarrow \qquad U^2 = F^T F$$

Como consecuencia, se puede expresar que

$$U = \left(F^T F\right)^{1/2}$$

Asimismo, se tiene que

$$F = RU \qquad \Rightarrow \qquad FU^{-1} = RUU^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad FU^{-1} = RI$$

$$\therefore \qquad R = FU^{-1}$$

Por consecuencia

$$F = VR \qquad \Rightarrow \qquad V^{-1}F = V^{-1}VR \Rightarrow \qquad V^{-1}F = IR$$

$$\therefore \qquad V^{-1}F = R$$

Tensor de deformación de Cauchy – Green por derecha (C)

Considere la existencia de un tensor C tal que $C = U^2$, dicho tensor se conoce como tensor de deformación de Cauchy-Green por derecha o simplemente tensor de deformación de Green. Resulta evidente que si no existe deformación, entonces $C = U = I$

$$C = F^T F$$

Las componentes del tensor C tienen un significado geométrico muy simple, considerando dos elementos diferenciales (1) y (2), tal que $dx^{(1)} = FdX^{(1)}$ y $dx^{(2)} = FdX^{(2)}$. Lo anterior para los elementos materiales $dX^{(1)}$ y $dX^{(2)}$

$$\therefore \qquad dx^{(1)}dx^{(2)} = FdX^{(1)}FdX^{(2)} = dX^{(1)}F^T FdX^{(2)} = dX^{(1)}U^2 dX^{(2)}$$

$$\Rightarrow \qquad dx^{(1)}dx^{(2)} = dX^{(1)}CdX^{(2)}$$

Por tanto, si $dx = nds_1$ representa al vector deformado del elemento material $dX = dS_1\hat{e}_1$, entonces para elementos materiales iguales,

$$dX^{(1)} = dX^{(2)} = dX = dS\hat{e}_1$$

se tiene que

$$dx^{(1)} \bullet dx^{(2)} = (ds)^2 = (dS)^2\, \hat{e}_1 \bullet C\hat{e}_1$$

Despejando se tiene:

$$c_{11} = \left(\frac{ds_1}{dS_1}\right)^2 \quad \text{para el elemento } dX = dS\hat{e}_1$$

$$c_{22} = \left(\frac{ds_2}{dS_2}\right)^2 \quad \text{para el elemento } dX = dS\hat{e}_2$$

$$c_{33} = \left(\frac{ds_3}{dS_3}\right)^2 \quad \text{para el elemento } dX = dS\hat{e}_3$$

Considere ahora dos elementos materiales $dX^{(1)} = dS_1\hat{e}_1$, $dX^{(2)} = dS_2\hat{e}_2$, los cuales se deforman en $dx^{(1)} = ds_1 m$, $dx^{(2)} = ds_2 n$, donde los vectores unitarios m, n describen un ángulo β entre ellos, se tiene entonces $ds_1 ds_2 \cos\beta = dS_1 dS_2 \hat{e}_1 \cdot C\hat{e}_2$, de tal forma que

$$c_{12} = \frac{ds_1 ds_2}{dS_1 dS_2}\cos\left[dx^{(1)}, dx^{(2)}\right]$$

En consecuencia, se puede definir a

$$c_{23} = \frac{ds_2 ds_3}{dS_2 dS_3} \cos\left[dx^{(2)}, dx^{(3)} \right]$$

$$c_{31} = \frac{ds_3 ds_1}{dS_3 dS_1} \cos\left[dx^{(3)}, dx^{(1)} \right]$$

3.6 TENSOR LAGRANGIANO DE DEFORMACIONES FINITAS (TENSOR LAGRANGIANO DE DEFORMACIÓN)

Este tensor permite describir el campo de deformaciones finitas (mayores al 1% de deformación) para una referencia material, se define como

$$E = \frac{1}{2}\left[C - I \right]$$

donde C es el tensor de deformación de Cauchy-Green por derecha e I representa al tensor identidad. En el caso de no existir deformación, $C = I$ y por lo tanto $E = 0$.

Dado que el gradiente de deformación F está definido a su vez por

$$F = I + \nabla_X u$$

$$F^T = (I + \nabla_X u)^T = I + \left(\nabla_X u \right)^T$$

Donde F^T describe la transpuesta del gradiente de deformación.

Desarrollando los términos se tendrá entonces:

$$C = F^T F = \left(I + \nabla_X u^T \right)\left(I + \nabla_X u \right) = I + \nabla_X u + \nabla_X u^T + \nabla_X u^T \nabla_X u$$

$$E = \frac{1}{2}\left[\left(I + \nabla_X u + \nabla_X u^T + \nabla_X u^T \nabla_X u \right) - I \right]$$

$$E = \frac{1}{2}\left(\nabla_X u + \nabla_X u^T \right) + \frac{1}{2} \nabla_X u^T \nabla_X u$$

En notación índice esto queda expresado como

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_m}{\partial X_i}\right)\left(\frac{\partial u_m}{\partial X_j}\right)$$

Desarrollando el término correspondiente a la deformación normal en el eje $\hat{e}_1$, este queda

$$E_{11} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_m}{\partial X_i}\right)\left(\frac{\partial u_m}{\partial X_j}\right)$$

$$E_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1}\right)^2\right)$$

Lo cual equivale a

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1}$$

para deformaciones muy pequeñas (infinitesimales). Las deformaciones normales en las direcciones $\hat{e}_2, \hat{e}_3$ quedan a su vez

$$E_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_2}\right)^2\right]$$

$$E_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial X_3} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_3}\right)^2\right]$$

Por su parte, al desarrollar los términos del tensor lagrangiano de deformación, en lo referente a la distorsión angular, se tienen los siguientes términos:

$$E_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right) + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2}\right) + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right)\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_2}\right) + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1}\right)\left(\frac{\partial u_3}{\partial X_2}\right)\right] = E_{21}$$

$$E_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1}\right) + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3}\right) + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right)\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3}\right) + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1}\right)\left(\frac{\partial u_3}{\partial X_3}\right)\right] = E_{31}$$

$$E_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2}\right) + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3}\right) + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_2}\right)\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3}\right) + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_2}\right)\left(\frac{\partial u_3}{\partial X_3}\right)\right] = E_{32}$$

3.7 TENSOR DE DEFORMACIÓN DE CAUCHY-GREEN POR IZQUIERDA

Sea $B = V^2$, donde V es el tensor izquierdo de deformación. B se denomina como tensor de deformación de Cauchy-Green izquierdo o tensor de deformación de Finger. En el caso de no existir deformación resulta evidente que

$$V = B = I$$

Dado que $F = VR$ y $RR^T = I$, por lo tanto, B se puede calcular directamente de F, de tal manera que:

$$F = VR$$

$$\Rightarrow \qquad F^T = (VR)^T = R^T V^T$$

$$\therefore \qquad FF^T = VRR^T V^T$$

$$\Rightarrow \qquad FF^T = VIV^T = VV^T = V^2 = B$$

$$\therefore \qquad B = FF^T$$

$$\Rightarrow \qquad B = RU(RU)^T = RUU^T R^T$$

$$UU^T = C = U^2$$

$$B = RCR^T$$

$$R^T B = R^T RCR^T = CR^T$$

$$CR^T R = R^T BR$$

$$\Rightarrow \qquad C = R^T BR$$

Desarrollando $B = FF^T$, se tiene que

$$B = (I + \nabla_X u)(I + \nabla_X u^T) = I + \nabla_X u^T + \nabla_X u + \nabla_X u \nabla_X u^T$$

$$\therefore \qquad B_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i}{\partial X_m}\frac{\partial u_j}{\partial X_m}$$

Para desplazamientos muy pequeños se puede describir un nuevo tensor ε_{ij} (tensor de deformaciones infinitesimales), de la forma:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(B_{ij} - \delta_{ij}) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_i}{\partial X_m}\frac{\partial u_j}{\partial X_m}\right]$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left[\nabla_X u + \left(\nabla_X u\right)^T\right] + \frac{1}{2}(\nabla_X u)(\nabla_X u)^T$$

expresión que equivale al tensor lagrangiano de deformación E para deformaciones muy pequeñas.

$$\varepsilon \triangleq \frac{1}{2}\left[\nabla_X u + (\nabla_X u)^T\right]$$

$$\varepsilon \triangleq E$$

3.8 TENSOR DE DEFORMACIÓN EULERIANA

Al tensor descrito a través de la relación

$$e = \frac{1}{2}\left(I - B^{-1}\right)$$

Se le denomina tensor euleriano de deformación. Resulta evidente que de no existir deformación $B^{-1} = I$ e implica que $e = 0$.

Se ha demostrado anteriormente que

$$B = FF^T$$

$$\Rightarrow \qquad B^{-1} = \left(FF^T\right)^{-1} = \left(F^{-1}\right)^T F^{-1}$$

Donde

$$x = X + u\left(X, t\right)$$

$$\Rightarrow \qquad dx = dX + \frac{\partial u(X,t)}{\partial X} dX$$

$$\therefore \qquad \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial X_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i(X,t)}{\partial X_j}$$

$$\Rightarrow \qquad F = \nabla_X x = I + \nabla_X u$$

Dado que

$$dx = FdX$$

$$\Rightarrow \qquad F^{-1}dx = F^{-1}FdX = IdX$$

$$\therefore \qquad dX_i = F_{ij}^{-1} dx_j$$

$$\Rightarrow \qquad F^{-1} = \nabla_x X = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}$$

Por otra parte,

$$x = X + u(X,t)$$

$$\Rightarrow \qquad X = x - u(X,t)$$

$$\Rightarrow \qquad X = x - u(x,t)$$

$$\Rightarrow \qquad dX = dx - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} dx$$

Sin embargo, para que exista congruencia se debe presentar en la forma

$$\therefore \qquad \frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_j}$$

$$\Rightarrow \qquad \nabla_x X = I - \nabla_x u$$

Resulta entonces que

$$\delta_{ij} = F^{-1}F = I$$

$$\therefore \qquad F^{-1} = \nabla_x X = I - \nabla_x u(x,t)$$

Donde

$$(F_{ij})^{-1} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}$$

Por lo tanto, al sustituir en la definición del tensor euleriano de deformación se tiene que:

$$F^{-1} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \nabla_x X = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Por definición

$$x_i = X_i + u_i$$

$$\Rightarrow \qquad x_i - u_i = X_i$$

$$\therefore \qquad dx_i - du_i = dX_i$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial x_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}$$

Se ha definido al tensor de deformación de Finger como

$$B = FF^T$$

Por consecuencia

$$B^{-1} = \left(FF^T\right)^{-1} = \left(F^{-1}\right)^T F^{-1}$$

Pero como

$$F^{-1} = I - \nabla_x u$$

$$\Rightarrow B^{-1} = \left(\left(I - \nabla_x u\right)^T \left(I - \nabla_x u\right)\right)$$

Por lo que

$$B^{-1} = I - \left(\nabla_x u\right) - \left(\nabla_x u\right)^T + \left(\nabla_x u\right)^T \nabla_x u$$

ya que

$$e = \frac{1}{2}\left(I - B^{-1}\right)$$

Entonces, el tensor euleriano de deformación queda expresado como

$$e = \frac{1}{2}\left(\left(\nabla_x u\right) + \left(\nabla_x u\right)^T\right) - \frac{1}{2}\left(\nabla_x u\right)^T \left(\nabla_x u\right)$$

$$e = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\frac{\partial u_m}{\partial x_j}\right)\right)$$

En coordenadas rectangulares, al desarrollar la notación índice se tiene que

$$e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2\right)$$

$$e_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) - \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)\right)$$

En el caso de desplazamientos muy pequeños $u\left(X_i, t\right) \approx u\left(x_i, t\right)$, por lo que se puede concluir entonces que para deformaciones infinitesimales

$$e_{ij} \cong \varepsilon_{ij}$$

ya que

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \cong \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

3.9 CONDICIONES DE COMPATIBILIDAD PARA EL TENSOR DE DEFORMACIONES FINITAS

Las ecuaciones de compatibilidad o integrabilidad presentadas en el subtema 3.4 corresponden a condiciones de deformación infinitesimal. En el caso de deformaciones finitas y considerando el tensor de deformación euleriana se tiene que:

$$\frac{\partial^2 e_{kn}}{\partial x_l \partial x_m}+\frac{\partial^2 e_{lm}}{\partial x_k \partial x_n}-\frac{\partial^2 e_{km}}{\partial x_l \partial x_n}-\frac{\partial^2 e_{\ln}}{\partial x_k \partial x_m}-\left(\frac{\partial e_{ks}}{\partial x_n}+\frac{\partial e_{ns}}{\partial x_k}-\frac{\partial e_{kn}}{\partial x_s}\right)\left(\frac{\partial e_{ls}}{\partial x_m}+\frac{\partial e_{ms}}{\partial x_l}-\frac{\partial e_{lm}}{\partial x_s}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial e_{ks}}{\partial x_m}+\frac{\partial e_{ms}}{\partial x_k}-\frac{\partial e_{km}}{\partial x_s}\right)\left(\frac{\partial e_{ls}}{\partial x_n}+\frac{\partial e_{ns}}{\partial x_l}-\frac{\partial e_{\ln}}{\partial x_s}\right)+2e_{rs}\left[-2\left(\frac{\partial e_{kr}}{\partial x_n}+\frac{\partial e_{nr}}{\partial x_k}-\frac{\partial e_{kn}}{\partial x_r}\right)\left(\frac{\partial e_{ls}}{\partial x_m}+\frac{\partial e_{ms}}{\partial x_l}-\frac{\partial e_{lm}}{\partial x_s}\right)\right]$$

$$-4\left(\frac{\partial e_{kr}}{\partial x_m}+\frac{\partial e_{mr}}{\partial x_k}-\frac{\partial e_{km}}{\partial x_r}\right)\left(\frac{\partial e_{ls}}{\partial x_n}+\frac{\partial e_{ns}}{\partial x_l}-\frac{\partial e_{\ln}}{\partial x_s}\right)+4\left(\frac{\partial e_{kr}}{\partial x_n}+\frac{\partial e_{nr}}{\partial x_k}-\frac{\partial e_{kn}}{\partial x_r}\right)\left(\frac{\partial e_{ls}}{\partial x_m}+\frac{\partial e_{ms}}{\partial x_l}-\frac{\partial e_{lm}}{\partial x_s}\right)=0$$

Se puede demostrar con facilidad que la ecuación anterior para deformación infinitesimal se reduce a

$$\frac{\partial^2 e_{kn}}{\partial x_l \partial x_m}+\frac{\partial^2 e_{lm}}{\partial x_k \partial x_n}-\frac{\partial^2 e_{km}}{\partial x_l \partial x_n}-\frac{\partial^2 e_{\ln}}{\partial x_k \partial x_m}=0$$

3.10 CAMBIO DE ÁREA DEBIDO A DEFORMACIÓN

Considere dos elementos materiales

$$\left[dX^{(1)}=dS_1\hat{e}_1 \quad , \quad dX^{(2)}=dS_2\hat{e}_2\right]$$

los cuales emanan de la coordenada X, entonces, el área definida por dichos elementos materiales, a un tiempo de referencia t_0 estará dada por:

$$d\bar{A}_0=dX^{(1)}\times dX^{(2)}=dS_1 dS_2\hat{e}_3=dA_0\hat{e}_3$$

donde dA_0 representa la magnitud del área sin deformación cuya normal es $\hat{e}_3$, para un tiempo cualesquiera t los elementos se deforman de acuerdo con

$$dx^{(1)} = FdX^{(1)} \text{ , } dx^{(2)} = FdX^{(2)}$$

razón por la cual el área se modificará como

$$d\overline{A} = FdX^{(1)} \times FdX^{(2)} = dS_1 dS_2 F\hat{e}_1 \times F\hat{e}_2 = dA_0 F\hat{e}_1 \times F\hat{e}_2 \text{ ,}$$

Por lo que la normal del área deformada será perpendicular al plano descrito por $F\hat{e}_1$, $F\hat{e}_2$, esta dirección es descrita a través de la normal n , por lo que

$$d\overline{A} = dSn \qquad \Rightarrow \qquad dSn = dA_0 \left(F\hat{e}_1 \times F\hat{e}_2 \right)$$

$$\therefore \qquad F\hat{e}_3 \cdot d\overline{A} = dA_0 \left(F\hat{e}_3 \cdot F\hat{e}_1 \times F\hat{e}_2 \right)$$

Por otra parte, se tiene que

$$F\hat{e}_3 \cdot F\hat{e}_1 \times F\hat{e}_2 = |F| = \det F$$

entonces

$$F\hat{e}_3 \cdot dAn = dA_0 |F|$$

Despejando y utilizando las propiedades del producto entre tensores $\hat{e}F = F^T \hat{e}$ se tiene que

$$\hat{e}_3 \cdot F^T n = \left(\frac{dA_0}{dA} \right) |F|$$

como consecuencia de que $F^T n$ está en la dirección de $\hat{e}_3$, de tal forma que

$$F^T n = \left(\frac{dA_0}{dA} \right) |F| \hat{e}_3$$

por tanto,

$$dA\ n = dA_0 |F| \left(F^{-1} \right)^T \hat{e}_3$$

Generalizando el desarrollo anterior para cualquier superficie, se tendrá que en lugar del vector unitario $\hat{e}_3$, ahora habrá que definir la normal de la superficie antes de ser deformada n_0 (la cual remplaza al vector $\hat{e}_3$).

$$\Rightarrow dA\,n = dA_0 \left|F\right| \left(F^{-1}\right)^T n_0$$

Ecuación que define la transformación de la superficie por efecto de la deformación del MC.

3.11 CAMBIO DE VOLUMEN DEBIDO A DEFORMACIÓN

Considere tres elementos materiales $dX^{(1)} = dS_1\hat{e}_1$, $dX^{(2)} = dS_2\hat{e}_2$, $dX^{(3)} = dS_3\hat{e}_3$ los cuales proceden de la coordenada material X; éstos, a un tiempo de referencia t_0, forman un prisma de volumen $dV_0 = dS_1 dS_2 dS_3$.

Para un tiempo t el elemento diferencial se deforma según

$$dx^{(1)} = FdX^{(1)}\ ,\ dx^{(2)} = FdX^{(2)}\ ,\ dx^{(3)} = FdX^{(3)}$$

razón por la que el volumen se transforma en

$$dV = FdX^{(1)}FdX^{(2)}FdX^{(3)} = dS_1 dS_2 dS_3 \left(F\hat{e}_1 \cdot F\hat{e}_2 \times F\hat{e}_3\right)$$

$$\therefore \qquad dV = \left|F\right| dV_0$$

Por otra parte, la densidad ρ se puede expresar, considerando una densidad inicial ρ_0 como

$$\rho = \frac{\rho_0}{\left|F\right|}$$

3.12 DESCRIPCIÓN DEL GRADIENTE DE DEFORMACIÓN PARA UNA REFERENCIA CILÍNDRICA (r,θ,z) Y PARA UNA BASE ESFÉRICA (r,θ,ϕ)

Para el caso de que la descripción del movimiento se realice con una referencia cilíndrica o esférica, el gradiente de deformación se expresa como:

$$F_{(r,\theta,z)} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial R} & \dfrac{\partial r}{R\partial \Theta} & \dfrac{\partial r}{\partial Z} \\ \dfrac{r\partial \theta}{\partial R} & \dfrac{r\partial \theta}{R\partial \Theta} & \dfrac{r\partial \theta}{\partial Z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial R} & \dfrac{\partial z}{R\partial \Theta} & \dfrac{\partial z}{\partial Z} \end{bmatrix}$$

donde la referencia original se indica con (R,Θ,Z), esto para t_0, mientras que la descripción para cualquier tiempo (t) se expresa con (r,θ,z).

Por otra parte, para el caso de coordenadas esféricas se tiene

$$F_{(r,\theta,\phi)} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial R} & \dfrac{\partial r}{R\partial \Theta} & \dfrac{\partial r}{R\operatorname{sen}\Theta\partial \Phi} \\ \dfrac{r\partial \theta}{\partial R} & \dfrac{r\partial \theta}{R\partial \Theta} & \dfrac{r\partial \theta}{R\operatorname{sen}\Theta\partial \Phi} \\ \dfrac{r\operatorname{sen}\theta\partial \phi}{\partial R} & \dfrac{r\operatorname{sen}\theta\partial \phi}{R\partial \Theta} & \dfrac{r\operatorname{sen}\theta\partial \phi}{R\operatorname{sen}\Theta\partial \Phi} \end{bmatrix}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. ¿Qué son las ecuaciones de compatibilidad o integrabilidad? Demuestre su validez, tanto para el caso de deformaciones como de rapidez de deformación.

2. Para el siguiente campo de desplazamientos:

$$u_1 = \alpha t X_1^2 X_2, \qquad u_2 = \alpha t X_2^2 X_3, \qquad u_3 = \alpha t X_3^2 X_1$$

Determine:

a) ∇u , parte simétrica de ∇u ; componente antisimétrica de ∇u ; $\nabla \times u$

b) Si $\alpha = \dfrac{1}{20}\left[\dfrac{1}{\mathrm{m}^2 - \mathrm{s}}\right]$, determine para el punto q y tiempo $t = 1\mathrm{s}$, cuyas coordenadas para t_0 son $(10, 8, 15)$ cm

c) Deformaciones principales

d) Máximas deformaciones a corte

e) ¿El medio continuo se comporta en general como incompresible? Justifique su respuesta.

3. El campo de velocidades asociado a la deformación de un medio continuo está dado por:

$$\mathrm{v}_i = \alpha\left(2ax_2 + bx_1 t\right)\hat{e}_1 + \left(2ax_1 + bx_2 t\right)\hat{e}_2 + \left(bx_3 t\right)\hat{e}_3$$

donde

$a = 1(\mathrm{s}^{-1})$

$b = 1(\mathrm{s}^{-2})$

a) ¿Es factible determinar la rapidez de deformación $\left(D_{ij}\right)$ del medio continuo? En caso de ser afirmativa su respuesta, qué condiciones (en caso de existir éstas) deberá cumplir el campo de velocidades propuesto.

b) En caso de ser factible, determine el tensor de rapidez de deformación $\left(D_{ij}\right)$ y de rapidez de rotación $\left(\dot{\omega}_{ij}\right)$ asociado al campo de velocidades.

c) Si se trata de un sólido rígido plástico (no presenta deformación elástica), el cambio de volumen asociado a la deformación es cero y por consecuencia la rapidez de cambio de volumen en cualquier punto y para cualquier tiempo también lo es $\left(\frac{1}{dV}\frac{D}{Dt}(dV)=0\right)$. ¿Cuál será entonces la magnitud del escalar α ?

d) ¿Qué características en particular tiene la rapidez de deformación descrita?

e) Determine los valores principales de la rapidez de deformación $\left(D_{ij}\right)$.

4. Un cuerpo es sometido a una serie de solicitaciones que provocan la distorsión del mismo, situación que se puede representar con el tensor ∇u para el elemento diferencial $X_i=\left(X_1,\ X_2,\ X_3\right)$. Con esta base defina los tensores de deformación ε_{ij} y de rotación ω_{ij}

$$\nabla u=\begin{pmatrix}10 & 8 & 9\\ 6 & 2 & 3\\ 5 & 3 & 17\end{pmatrix}\times 10^{-3} \qquad \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}}$$

5. Para el tensor D_{ij}, ¿existirá un vector velocidad que garantice su existencia? D_{ij} representa el tensor de rapidez de deformación.

$$D_{ij}=\begin{pmatrix} x_2\ln\dfrac{x_1}{x_2} & x_1+x_2+x_3 & \dfrac{x_3^2}{x_2}\\ x_1+x_2+x_3 & x_2e^{x_1/x_3} & x_2\ln\dfrac{x_2^2}{x_1^2}\\ \dfrac{x_3^2}{x_2} & x_2\ln\dfrac{x_2^2}{x_1^2} & \dfrac{x_1x_3}{x_2}\end{pmatrix}\frac{k}{t}$$

donde

$k=l^{-1}$

$t-$ tiempo

Justifique su respuesta.

6. El campo de desplazamientos asociado a la deformación de un medio está dado por

$$u_i = \lambda t \left\{ \left(\frac{X_1^3}{X_2^2} \right) \hat{e}_1 + \left(X_2 \text{sen} \left(\frac{X_3}{X_1} \right) \right) \hat{e}_2 - k \left(\frac{3X_1^2 X_3}{X_2^2} + X_3 \text{sen} \left(\frac{X_3}{X_1} \right) \right) \hat{e}_3 \right\}$$

$$\lambda = 10^{-4}\, s^{-1}; \quad t = s; \quad X_i = [\text{metros}]$$

a) Defina x_i

b) ¿Es posible obtener el tensor de deformación a partir de u_i, o es necesario verificar la existencia de la función a través de los criterios de compatibilidad?

c) Considerando que el medio es incompresible, determine para $q = (0.1,\ 0.1,\ 0.1)\,[\text{m}]$; t = 2 s, las deformaciones principales.

7. Para el siguiente campo de desplazamientos $u_i = 3X_3\hat{e}_1 - X_1\hat{e}_2 - 2X_2\hat{e}_3$, determine:

a) Gradiente de deformación F

b) Tensor de Cauchy-Green por derecha C

c) Tensor lagrangiano de deformación E

d) La relación del volumen final al volumen inicial

e) El tensor de Cauchy por izquierda B

f) Tensor euleriano de deformación e

8. Si C se define como el tensor de Cauchy-Green por derecha, deduzca la representación del tensor lagrangiano de deformación E en función del gradiente del vector desplazamiento $(\nabla_X u)$, si

$$E = \frac{1}{2}(C - I)$$

donde

$C = F^T F$ $\qquad I$ -Identidad

Indique la descripción de E en notación índice y en notación general.

9. El tensor de deformación euleriana e se define como

$$e = \frac{1}{2}\left(I - B^{-1}\right)$$

donde B^{-1} representa la inversa del tensor de Cauchy–Green por izquierda. Con base en lo anterior, deduzca la representación de e en función del inverso del gradiente de deformación $F^{-1} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}$, y en particular del gradiente del vector desplazamientos $\left(\nabla_x u\right)$, cuando éste se describe en forma euleriana.

$$e = e\left(\nabla_x u\right)$$

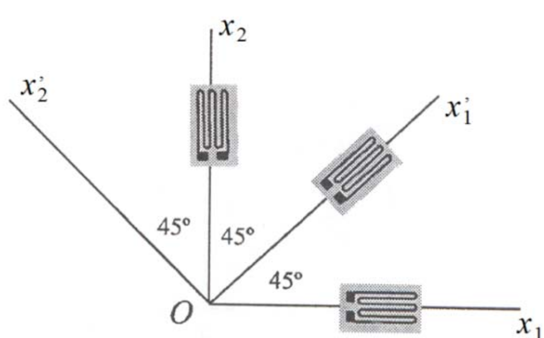
10. Demuestre que para una deformación infinitesimal el cambio unitario de volumen está representado por la traza del tensor de deformación infinitesimal.

11. Se muestra un arreglo de galgas extensométricas para un estado de deformaciones plano, que mide las deformaciones normales (longitudinales) a lo largo de los ejes x_1, x_2 (base original) y del eje x'_1 (nuevo sistema de referencia), tal que:

$$\varepsilon_{11} = 6x10^{-4} \quad ; \quad \varepsilon_{22} = 4x10^{-4} \quad ; \quad \varepsilon'_{11} = 8x10^{-4}$$

Determinar la deformación angular ε_{12}, la deformación normal ε'_{22} y verificar que:

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = \varepsilon'_{11} + \varepsilon'_{22}$$



Para el estado de deformaciones en la base original, determinar las deformaciones principales y las direcciones principales asociadas.

12. A partir de la ecuación de compatibilidad expresada en notación índice para deformaciones infinitesimales

$$\frac{\partial^2 e_{kn}}{\partial x_l \partial x_m} + \frac{\partial^2 e_{lm}}{\partial x_k \partial x_n} - \frac{\partial^2 e_{km}}{\partial x_l \partial x_n} - \frac{\partial^2 e_{\ln}}{\partial x_k \partial x_m} = 0$$

Demuestre si las ecuaciones de compatibilidad o integrabilidad se pueden expresar como

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_1^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial X_2 \partial X_1}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial X_2^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial X_3 \partial X_2}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_3^2} = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial X_1 \partial X_3}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_2 \partial X_3} = \frac{\partial}{\partial X_1}\left(-\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial X_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial X_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial X_3} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_3 \partial X_1} = \frac{\partial}{\partial X_2}\left(-\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial X_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial X_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial X_1} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial X_1 \partial X_2} = \frac{\partial}{\partial X_3}\left(-\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial X_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial X_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial X_2} \right)$$

13. Un MC presenta un movimiento que se describe como:

$$x_1 = X_1 + 2\varphi X_2 t^2$$

$$x_2 = X_2 + 2\varphi X_1 t^2$$

$$x_3 = X_3 \qquad \varphi = 10^{-3}\,\mathrm{s}^{-2}$$

a) ¿Cómo es el movimiento?

b) Determinar la velocidad en t = 3 s para el elemento diferencial que en t = 1 s se encuentra en $(2,4,5)$.

c) Determinar la aceleración en $t = 5$ s para el elemento diferencial que en $t = 1$ s se encuentra en $(2,3,5)$.

d) Determine el campo de desplazamientos.

e) Determine, de ser esto posible, el gradiente de deformación F.

f) Tensor de Cauchy-Green por derecha C y el tensor de dilatación por derecha U; $F = RU$

g) Tensor de Cauchy-Green por izquierda B.

h) Tensor de rotación R.

i) Tensor lagrangiano de deformación E.

j) Tensor euleriano de deformación e.

14. Para el campo de desplazamientos

$$u_i = \frac{1}{\varphi}\left[3(X_2 + X_3)\hat{e}_1 + 2\left(X_1 + X_3\right)\hat{e}_2 - \left(X_1 + 2X_2 + X_3\right)\hat{e}_3\right] \quad \varphi = 10^{-3}$$

Determine:

a) Gradiente de deformación F.

b) Tensor de Cauchy-Green por derecha C y el tensor de dilatación por derecha U; $F = RU$

c) El tensor de Cauchy-Green por izquierda B.

d) Tensor de rotación R.

e) Tensor lagrangiano de deformación E.

f) Tensor euleriano de deformación e.

g) La relación del volumen final al volumen inicial.

h) El área deformada para el elemento diferencial cuya normal antes de la deformación estaba dada por:

$$n_i = \frac{1}{3}\left[\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2 + 2\hat{e}_3\right]$$

Determine la sección final y calcule el incremento de área (efecto de la deformación) en porcentaje. Asimismo, calcule el volumen final del MC (F es homogéneo a través del MC), donde $V_0 = 10\,\mathrm{cm}^3$