CAPÍTULO 2

CINEMÁTICA DEL CONTINUO

2.1 INTRODUCCIÓN

El objeto de la mecánica, en términos generales, es relativo al estudio del efecto que tienen solicitaciones tales como fuerzas o flujo de calor sobre un objeto físico. Tanto la mecánica de sólidos como la de fluidos fueron cimentadas durante la segunda mitad del siglo XVIII y primera del siglo XIX por notables científicos, como Leonard Euler (1707-1783), Agustín Louis Cauchy (1789-1857), Simeon Denis Poisson (1781-1840), George Green (1793-1841) y George Stokes (1819-1903), entre los más destacados. El examen de los fundamentos de estas disciplinas revela que los postulados básicos y los principios generales sobre los que se basan la mecánica de sólidos (MS) y la mecánica de fluidos (MF) son los mismos. Las ecuaciones matemáticas que describen leyes físicas aplicables a cualquier medio son denominadas como ecuaciones generales y son aplicadas a cualquier medio continuo (MC). Sin embargo, resulta evidente que fluidos y sólidos son diferentes en esencia, por lo que sus propiedades se describen en forma particular a través de las denominadas ecuaciones constitutivas. Como se mencionó al inicio del primer capítulo, las ecuaciones que describen el comportamiento de un medio idealizado infinitamente divisible, el cual se denomina *continuo*, se definen como ecuaciones generales y son formuladas con base en leyes fundamentales de la física (Conservación de Masa, de Momentum y de Energía).

Históricamente, los conceptos de esfuerzo y deformación fueron introducidos por Cauchy entre 1823 y 1827. El desarrollo de la cinemática del continuo y las ecuaciones de campo se deben en esencia a Euler. En cuanto a las ecuaciones constitutivas, éstas han sido desarrolladas por dos diferentes vías:

- **i.** *Experimental*: Por ejemplo, Ley de Hooke para sólidos elásticos, Ley de Newton para fluidos viscosos.
- ***ii.*** *A partir de postulados teóricos*

Noción de continuo

Como ya fue mencionado en el capítulo 1, los constituyentes de cualquier continuo (átomos, moléculas, fases o partículas) no se encuentran continuamente distribuidos sobre el cuerpo, es por esto que la mecánica del continuo se basa en la condición macroscópica del objeto. En consecuencia, un MC será un objeto físico hipotético en el cual se desprecia su estructura a nivel atómico o molecular y, por consiguiente, se considera que la materia está continuamente distribuida sobre la totalidad del objeto. Por lo tanto, un MC puede ser descrito como un conjunto de partículas interconectadas de forma tal, que cada una de éstas es descrita por su posición espacial.

En este punto vale la pena reflexionar que existe una relación única de cualquier partícula del MC con su posición para un tiempo determinado y que, por consecuencia, será imposible que más de una ocupen el mismo lugar en el espacio para el mismo tiempo y que una partícula esté en dos posiciones diferentes a un mismo tiempo. Es entonces que para cualquier tiempo la posición de cualquier partícula de un continuo y la configuración de éste son unívocamente determinadas. Una parte de un continuo cuya posición es referida a un punto geométrico se describe como punto material, y si se identifica a través de una curva se denomina curva material o arco material. Un arco material de longitud infinitesimal se denomina arco material elemental. Un cuerpo material ocupa una posición en el espacio tridimensional y será parte total o parcial de un continuo. Por último, es conveniente mencionar que cuando una descripción se realiza con base en la partícula, ésta se define como descripción material, mientras que cuando la atención (descripción de fenómeno) se orienta a un punto en el espacio y se analiza lo que sucede en dicho punto, se refiere entonces a una descripción espacial. En la mecánica de sólidos es más útil la descripción material, mientras que en la mecánica de fluidos es más adecuada la descripción espacial.

2.2 CONCEPTOS GENERALES DE CINEMÁTICA DEL CONTINUO

La descripción del movimiento de un continuo es mucho más compleja que lo que corresponde a una partícula o a un conjunto de ellas. En cinemática de partículas la trayectoria es descrita por un vector función del tiempo:

$$r = r(t)$$

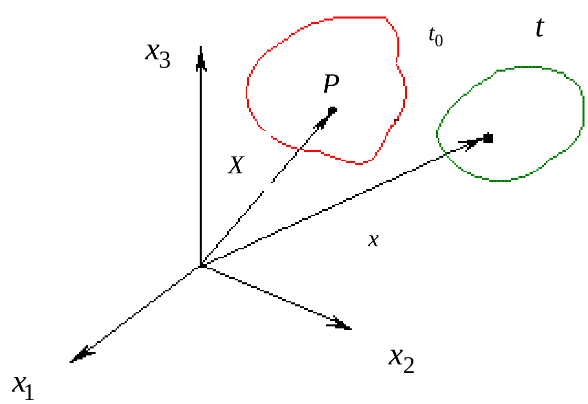
$$r(t) = x_1(t)\hat{e}_1 + x_2(t)\hat{e}_2 + x_3(t)\hat{e}_3 \text{ es el vector de posición}$$

Resulta evidente que si se describe el movimiento de N partículas será necesario definir igual número de funciones de trayectoria.

$$r_n = r_n(t) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots, N$$

Por su parte, un medio continuo está formado (considerando su definición) por un número infinito de partículas, con un infinito número de vecinos en el tiempo. Es por consecuencia que resulta imposible describir su movimiento a través de simples funciones de trayectoria, por extensión del concepto empleado para un grupo de partículas. Sin embargo, existe una relación unívoca entre cada uno de los elementos que constituye el medio continuo y la posición que éstos ocupan a un tiempo determinado. Como resultado es factible identificar a cualquier elemento diferencial del cuerpo, y para cualquier tiempo, por la posición que ocupa para un tiempo de referencia t_0.

Esto es $$x(t_0) = (X_1,\ X_2, X_3)$$



Por lo tanto, la posición que ocupa cualquier partícula del MC en el tiempo se puede describir como:

$$x = x(X, t) \quad \text{con} \quad x(t_0) = X$$

$$x_1 = x_1(X_1,\ X_2,\ X_3,\ t)$$

$$x_2 = x_2(X_1,\ X_2,\ X_3,\ t)$$

$$x_3 = x_3(X_1,\ X_2,\ X_3,\ t)$$

$$x_i = x_i(X_i,\ t) \tag{2.1}$$

2.3 DESCRIPCIÓN MATERIAL Y DESCRIPCIÓN ESPACIAL

La descripción de la posición, para el tiempo de referencia, de cada uno de los elementos diferenciales que integran el medio continuo se conoce como coordenada material (X_i), mientras que las ecuaciones 2.1 permiten especificar el movimiento del continuo. Estas ecuaciones explican el concepto de líneas de trayectoria o funciones de trayectoria para cada partícula del continuo, las cuales también son denominadas como ecuaciones cinemáticas.

Cuando un continuo está en movimiento, las propiedades asociadas a éste, por ejemplo, temperatura θ, velocidad v_i o esfuerzos σ_{ij} , están relacionadas con cada uno de los elementos que constituyen el MC, razón por la cual se definirán en la forma:

$$\theta = \theta(X_1,\ X_2,\ X_3,\ t)$$

$$v = v(X_1,\ X_2,\ X_3,\ t)$$

$$\sigma = \sigma(X_1,\ X_2,\ X_3,\ t)$$

Cuando una propiedad φ (φ de cualquier rango) presenta la forma $\varphi = \varphi(X_i, t)$, se dice que está definida con una descripción material o ***lagrangiana*.** Dicha descripción permite conocer el comportamiento del MC para cualquier tiempo, pero no aporta datos con relación a la posición que ocupan las diferentes partículas para cualquier tiempo (t). La descripción material o lagrangiana describe el comportamiento en función de una referencia fija.

Por otra parte, cuando las propiedades asociadas al MC se describen para el espacio en cualquier tiempo, en la forma

$$\theta = \theta(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)$$

$$v = v(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)$$

$$\sigma = \sigma(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)$$

se dice que están definidas con una descripción espacial o ***euleriana***. Si bien este tipo de descripción permite definir lo que pasa en el espacio, no ofrece información con relación a los elementos que constituyen el continuo (al comportamiento de las partículas en sí), ya que una coordenada en el espacio puede ser ocupada por diferentes partículas para diferentes tiempos. Es por tanto necesario conocer las funciones de trayectoria (ecuación *2.1*), para así relacionar las coordenadas espaciales x_i con las materiales X_j, y de tal forma describir el comportamiento de manera precisa y simple.

2.4 DERIVADA MATERIAL

Cuando se refiere a una propiedad cualquiera asociada a un medio continuo, de la forma $\varphi = \varphi(X_i, t)$, y en particular si se demanda analizar el cambio de dicha propiedad (temperatura, velocidad o esfuerzo) en el tiempo, se define el concepto de derivada material $\left(\frac{D}{Dt}\right)$. Ésta representa la rapidez de cambio de la propiedad para cada uno de los elementos diferenciales que constituyen el MC.

Cuando se tiene una descripción material, por ejemplo

$$\theta = \theta(X_1,\ X_2,\ X_3,\ t)$$

entonces, la derivada material se expresa en la forma

$$\frac{D\theta}{Dt} = \left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)_{X_i\ \text{fija}}$$

Por el contrario, si se presenta una descripción espacial del tipo $\theta = \theta(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)$, donde x_i son las posiciones de partículas materiales a un tiempo t y están relacionadas con las coordenadas materiales a través de

$$x_i = x(X_1,\ X_2,\ X_3,\ t)$$

De acuerdo con la regla de la cadena se tiene:

$$\frac{D\theta}{Dt} = \left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)_{X_i\ \text{fija}} = \frac{\partial\theta}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial\theta}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial\theta}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial t} + \left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)_{x_c\ \text{fija}}$$

donde resulta evidente que

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = v_i$$

Considerando coordenadas rectangulares se tiene entonces que

$$\frac{D\theta}{Dt}=\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)_{x_i\ \mathrm{fija}}+v_i\frac{\partial\theta}{\partial x_i}$$

En forma general

$$\frac{D\theta}{Dt}=\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)+(\nabla\theta)\bullet v$$

De lo antes expuesto, para coordenadas cilíndricas, se tiene:

$\rho=\rho(r,\ \theta,\ z;\ t)$ Referencia espacial

$\rho=\rho(R,\ \Theta,Z;\ t)$ Referencia material

donde ρ es una función escalar, entonces:

$$\frac{D\rho(t;R,\Theta,Z)}{Dt}=\frac{\partial\rho(t;r,\theta,z)}{\partial t}+v_r\frac{\partial\rho}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial\rho}{\partial\theta}+v_z\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)$$

Por su parte, en coordenadas esféricas se tiene

$\rho=\rho(r,\ \theta,\ \phi;\ t)$ Referencia espacial

$\rho=\rho(R,\ \Theta,\Phi;\ t)$ Referencia material

$$\frac{D\rho}{Dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+v_r\frac{\partial\rho}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial\rho}{\partial\theta}+\frac{v_\phi}{r\mathrm{sen}\phi}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\phi}\right)$$

Derivada material de un tensor de primer rango

Sea a_i la aceleración de una partícula del continuo, ésta representa la rapidez de cambio de velocidad de cualquier partícula del MC, con respecto a la que la misma partícula presentaba para una diferencial de tiempo anterior.

Si el movimiento del continuo está dado por:

$$x = x(X, t) \quad \text{con} \quad X = x(X, t_0)$$

entonces, la velocidad v, a un tiempo t, de una partícula X está dada por

$$v = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{X_i \ \text{fija}} = \frac{Dx}{Dt}$$

Por su parte, la aceleración queda

$$a = \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{X_i \ \text{fija}} = \frac{Dv}{Dt}$$

entonces, si se cuenta con una descripción de la velocidad de la forma $v(X, t)$, la obtención de la aceleración es trivial

$$a_i = \frac{\partial v_i(X_i, t)}{\partial t}$$

Por otra parte, si de lo que se dispone es $v(x_i,\, t)$, que además representa la forma más usual para describir la velocidad, entonces la aceleración queda

$$a_i = \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

o, en notación general

$$a = \frac{\partial v}{\partial t} + (\nabla v) \bullet v$$

Dado que ∇v en coordenadas (r, θ, z), está dado por

$$\nabla v = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta\right) & \dfrac{\partial v_r}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_r\right) & \dfrac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_z}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_z}{\partial \theta}\right) & \dfrac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Entonces, la aceleración en coordenadas cilíndricas es descrita como

$$a_r = \frac{Dv_r\left(R,\Theta,Z;t\right)}{Dt} = \frac{\partial v_r\left(r,\theta,z;t\right)}{\partial t} + v_r\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) + \frac{v_\theta}{r}\left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta\right) + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}$$

$$a_\theta = \frac{Dv_\theta\left(R,\Theta,Z;t\right)}{Dt} = \frac{\partial v_\theta\left(r,\theta,z;t\right)}{\partial t} + v_r\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) + \frac{v_\theta}{r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right) + v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{Dv_z\left(R,\Theta,Z;t\right)}{Dt} = \frac{\partial v_z\left(r,\theta,z;t\right)}{\partial t} + v_r\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{v_\theta}{r}\left(\frac{\partial v_z}{\partial \theta}\right) + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Para el caso de coordenadas esféricas, donde la velocidad se expresa en la forma

$$v = v_r(r,\theta,\phi;t)\hat{e}_r + v_\theta(r,\theta,\phi;t)\hat{e}_\theta + v_\phi(r,\theta,\phi;t)\hat{e}_\phi$$

y el gradiente se expresa como

$$\nabla v = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta\right) & \dfrac{1}{r\mathrm{sen}\theta}\left(\dfrac{\partial v_r}{\partial \phi} - v_\phi \mathrm{sen}\theta\right) \\ \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right) & \dfrac{1}{r\mathrm{sen}\theta}\left(\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - v_\phi \cos\theta\right) \\ \dfrac{\partial v_\phi}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_\phi}{\partial \theta}\right) & \dfrac{1}{r\mathrm{sen}\theta}\left(\dfrac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\right) + \dfrac{v_r}{r} + \dfrac{v_\theta \cot\theta}{r} \end{bmatrix}$$

Entonces, la aceleración se describe a través de:

$$a_r = \frac{Dv_r\left(R,\Theta,\Phi;t\right)}{Dt} = \frac{\partial v_r\left(r,\theta,\phi;t\right)}{\partial t} + v_r\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) + \frac{v_\theta}{r}\left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta\right) + \frac{v_\varphi}{r\mathrm{sen}\theta}\left(\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - v_\phi \mathrm{sen}\theta\right)$$

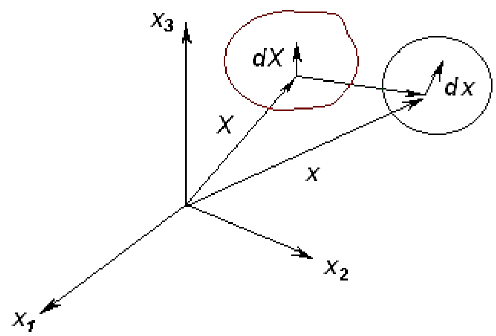
$$a_\theta = \frac{Dv_\theta\left(R,\Theta,\Phi;t\right)}{Dt} = \frac{\partial v_\theta\left(r,\theta,\phi;t\right)}{\partial t} + v_r\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) + \frac{v_\theta}{r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right) + \frac{v_\phi}{r\mathrm{sen}\theta}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - v_\phi \cos\theta\right)$$

$$a_\varphi = \frac{Dv_\varphi\left(R,\Theta,\Phi;t\right)}{Dt} = \frac{\partial v_\phi\left(r,\theta,z;t\right)}{\partial t} + v_r\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r}\right) + \frac{v_\theta}{r}\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta}\right) + \frac{v_\phi}{r\mathrm{sen}\theta}\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + v_r \mathrm{sen}\theta + v_\theta \cos\theta\right)$$

2.5 CAMPO DE DESPLAZAMIENTO

El campo de desplazamiento de una partícula correspondiente a un MC está dado por un vector definido a partir de la posición de referencia, tal que

$$u = x(X,t) - X$$



De lo anterior queda claro que conocidas las líneas de trayectoria (ecuaciones de trayectoria) $x(X,t)$, entonces queda establecido el campo de desplazamientos $u(X,t)$. Es por consecuencia que el movimiento de un MC puede ser descrito a través de las ecuaciones de trayectoria o del campo de desplazamientos.

Ecuación de movimiento para un cuerpo rígido

Se puede describir como la suma de una traslación más una rotación, de tal forma que:

i. Traslación de cuerpo rígido. Para este caso la ecuación de movimiento está dada por

$$x = X + c(t)$$

en consecuencia el vector de desplazamientos queda descrito como

$$u = c(t)$$

y entonces

$$\nabla u = 0$$

Esto significa que cada punto material perteneciente al continuo se desplaza de igual forma.

ii. Rotación alrededor de un punto fijo. En este caso la ecuación de movimiento está descrita por

$$x-b=R(t)(X-b)$$

donde $R(t)$ representa un transformación ortogonal, para $R(t_0)=I$, y b es un vector constante. Para el punto material $X=b$ está siempre en la coordenada espacial $x=b$, y por lo tanto representa la coordenada fija alrededor de la cual se presenta la rotación del medio continuo. Si la rotación se define alrededor del origen, entonces $b=0$ y $x=R(t)X$

iii. Movimiento general de cuerpo rígido. La ecuación que describe este tipo de movimiento se expresa como

$$x=R(t)(X-b)+c(t)$$

donde R es el tensor de rotación, con $R(t_0)=I$ (no existe rotación alguna) y $c(t)$ es un vector para el cual $c(t_0)=b$. Esta ecuación establece que el movimiento es descrito por la traslación $c(t)$ de un elemento material arbitrario cualquiera $X=b$, más una rotación $R(t)$.

De lo anterior se concluye que la velocidad de un punto material del cuerpo rígido se expresará como

$$v=\dot{R}(X-b)+\dot{c}(t)$$

$$\Rightarrow \qquad (X-b)=R^T(x-c)$$

$$\Rightarrow \qquad v=\dot{R}R^T(x-c)+\dot{c}t$$

Pero $$RR^T=I \text{ y } \dot{R}R^T+R\dot{R}^T=0$$

$$\Rightarrow \qquad \dot{R}R^T=-R\dot{R}^T=-(\dot{R}R^T)^T$$

$\dot{R}R^T$ es un tensor antisimétrico el cual es equivalente al vector dual $\dot{\omega}$ $\Rightarrow$ $(\dot{R}R^T)a=\dot{\omega}\times a$ para cualquier vector a

$$\Rightarrow \qquad v=\dot{\omega}\times(x-c)+\dot{c}(t)$$

si se mide el vector de posición r de un punto material cualquiera para un tiempo t del punto base elegido $r=(x-c)$, entonces

$$v=\dot{\omega}\times r+\dot{c}(t)$$

2.6 CONCEPTOS Y DEFINICIONES

Condiciones estacionarias (Estacionalidad)

En algunos casos las características asociadas al MC, tales como densidad, temperatura, velocidad, etc., no varían en su descripción espacial (euleriana); situación que no debe ser entendida como que las propiedades son constantes en el tiempo ya que la descripción material

$$\frac{D\varphi}{Dt} \neq 0, \text{esto es } \varphi = \varphi(X, t)$$

Lo anterior supone que para un mismo punto en el espacio, la propiedad en cuestión no varía en el tiempo

$$\varphi = \varphi(x_i, t) \Rightarrow \left.\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right|_{x_i \text{ fija}} = 0$$

Por ejemplo, para dos partículas distintas (a, b) cuya densidad se expresa como (ρ_a, ρ_b) se cumplirá que $(\rho_a = \rho_b)$ cuando se encuentren en la misma coordenada espacial x, esto para los tiempos t y t^* donde es por demás evidente que $t \neq t^*$. Razón por la que para un observador situado fuera del medio se tendrá que la propiedad, en este caso la densidad, será siempre la misma.

Trayectoria –Líneas de Trayectoria (Pathline)

La trayectoria es el lugar geométrico de las posiciones que ocupa una partícula a través del tiempo. Con base en el tiempo de referencia y las posiciones que las distintas partículas que integran el MC presentan en dicho tiempo, se generan las ecuaciones particulares de trayectoria de cada una de ellas.

Descritas las ecuaciones de movimiento $x = X + f(X_i, t)$ se tiene que por cada punto en el espacio podrá pasar una trayectoria descrita por las coordenadas materiales; es por consecuencia que las ecuaciones de movimiento definen una familia de curvas que representan las trayectorias de los diferentes elementos que constituyen el MC. Para obtener la imagen de las líneas de trayectoria es necesario utilizar tiempos de exposición prolongados de flujos en los que se dispone de trazadores reflejantes. La ecuación de trayectoria de una partícula puede ser obtenida a partir del campo de velocidades, de tal forma que la partícula que en el tiempo de referencia t_0 se encontraba en X, para un tiempo t debe cumplirse lo siguiente:

$$\frac{dx}{dt} = v(x,t)$$

$$x(t_0) = X$$

Por ejemplo, sea el campo de velocidades

$$v(x,t) = \frac{x_1 t}{1+\lambda t^2}\hat{e}_1 + \frac{x_2}{t}\hat{e}_2 + 0\hat{e}_3$$

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1 t}{1+\lambda t^2} \Rightarrow \int_{X_1}^{x_1} \frac{dx_1}{x_1} = \frac{1}{2\lambda}\int_{t_0}^{t} \frac{2\lambda t dt}{1+\lambda t^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{Ln}\ x_1 - \mathrm{Ln}\ X_1 = \frac{1}{2\lambda}\left[\mathrm{Ln}(1+\lambda t^2) - \mathrm{Ln}(1+\lambda t_0^2)\right]$$

$$\Rightarrow \qquad x_1 = X_1\left(\frac{(1+t^2)}{(1+t_0^2)}\right)^{\frac{1}{2\lambda}}$$

$$v_2 = \frac{dx_2}{dt} = \frac{x_2}{t} \Rightarrow \int_{X_2}^{x_2} \frac{dx_2}{x_2} = \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{t}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{Ln}\ x_2 - \mathrm{Ln}\, X_2 = \mathrm{Ln}\, t - \mathrm{Ln}\, t_0$$

$$\Rightarrow \qquad x_2 = X_2 \frac{t}{t_0}$$

$$\Rightarrow \qquad x_3 = X_3$$

Líneas de corriente (Streamline)

Representan el trazo definido por las trayectorias de los diferentes elementos que constituyen el MC. Por definición, la tangente de una línea de corriente tiene la misma dirección y sentido que el vector velocidad en dicho punto del espacio. Experimentalmente las líneas de corriente en la superficie de un fluido son obtenidas a través de la inserción de partículas reflectivas y fotografiadas con un tiempo de exposición corto. Así, cada partícula generará una línea corta aproximadamente tangencial a la línea de corriente. Matemáticamente éstas pueden ser obtenidas a partir del campo de velocidades $v(x,t)$. Considere que $x = x(s)$ representa la ecuación paramétrica de una línea de corriente a un tiempo t, la cual pasa a través de un punto x_0; entonces cualquier s puede ser escogida tal que:

$$\frac{dx}{ds} = v(x,t)$$

$$x(0) = x_0$$

Por ejemplo, para el campo de velocidades dado por

$$v_1 = \frac{ax_1 t}{1+t^2} \quad v_2 = bx_2 \quad v_3 = 0$$

determine la línea de corriente que pasa por el punto (α, β, ϕ) para un tiempo t.

De lo antes expuesto se tiene que:

$$\frac{dx_1}{ds} = v_1 = \frac{ax_1 t}{1+t^2}; \quad \frac{dx_2}{ds} = v_2 = bx_2; \quad \frac{dx_3}{ds} = v_3 = 0$$

$$\int_\alpha^{x_1} \frac{dx_1}{x_1} = \int_0^s \frac{at}{1+t^2} ds; \quad \int_\beta^{x_2} \frac{dx_2}{x_2} = \int_0^s bds; \quad \int_\phi^{x_3} dx_3 = 0$$

$$\mathrm{Ln}\, x_1 - \mathrm{Ln}\, \alpha = \frac{ats}{1+t^2}; \quad \mathrm{Ln}\, x_2 - \mathrm{Ln}\, \beta = bs; \quad x_3 = \phi$$

$$\Rightarrow \qquad x_1 = \alpha \exp\left(\frac{ats}{1+t^2} \right)$$

$$\Rightarrow \qquad x_2 = \beta \exp(bs)$$

$$\Rightarrow \qquad x_3 = \phi$$

Líneas de traza (Streakline)

La línea de traza relativa a un punto fijo del espacio x' es el lugar geométrico de las posiciones que ocupan en un instante t todas las partículas que han pasado por x' entre t_0 y t.

Lo anterior correspondería con lo observado en un tiempo t en un flujo, si en éste se depositara un colorante en un punto definido como punto de vertido (a partir de un tiempo t_0), visualizándose así la traza (línea de color).

Sea $X = X(x,t)$ la función inversa a $x = x(X,t)$, entonces la partícula que se encontraba en x' a un tiempo τ tiene las coordenadas materiales dadas por $X = X(x',\tau)$; así, esta misma partícula se encontrará en $x = x(X(x',\tau),t)$, por tanto, la línea de traza a un tiempo t está dada por $x = x(X(x',\tau),t)$, para t fija y τ variable.

Sea el campo de velocidades

$$v(x,t) = \frac{x_1 t}{1+ct^2}\hat{e}_1 + \frac{x_2}{t}\hat{e}_2 + 0\hat{e}_3$$

determine la ecuación para la línea de traza que pasa por (α,β,ϕ). Se ha demostrado que las ecuaciones de trayectoria para este campo de velocidades son:

$$x_1 = X_1\sqrt{\frac{(1+ct^2)}{(1+ct_0^2)}}$$

$$x_2 = X_2\,\frac{t}{t_0}$$

$$x_3 = X_3 \tag{2.2}$$

cuyas funciones inversas a su vez están dadas por:

$$X_1 = \frac{x_1}{\sqrt{\frac{(1+ct^2)}{(1+ct_0^2)}}}$$

$$X_2 = x_2 \frac{t_0}{t}$$

$$X_3 = x_3 \qquad (2.3)$$

Entonces, la partícula (α, β, ϕ) que pasa a un tiempo τ está dada por:

$$X_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{\frac{(1+c\tau^2)}{(1+ct_0^2)}}}$$

$$X_2 = \beta \frac{t_0}{\tau}$$

$$X_3 = \phi \qquad (2.4)$$

Sustituyendo *2.4* en *2.2* se obtiene la ecuación paramétrica

$$x_1 = \alpha \sqrt{\frac{(1+ct^2)}{(1+c\tau^2)}}$$

$$x_2 = \beta \frac{t}{\tau}$$

$$x_3 = \phi$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. La posición de una partícula en un tiempo t, la cual inicialmente se encuentra en X es

$$x(t_0) = X$$

que está dada por

$$x_1 = X_1 - aX_2^2 t^2, \qquad x_2 = X_2 - bX_3 t, \qquad x_3 = X_3$$

$$a = -2 \left(\text{cm-s}^2\right)^{-1}$$
$$b = -3 \left(\text{s}^{-1}\right)$$

a) ¿Cuál será la velocidad para $t = 0.1$ min del elemento diferencial que originalmente se encontraba en $(1,\ 3,\ 1)$?

b) ¿Cuál será la velocidad para $t = 0.1$ min del elemento diferencial que para ese tiempo se encuentra en la coordenada $(1,\ 3,\ 1)$?

c) Si la temperatura está dada por

$$\theta = \theta_0 + c(x_1 + x_2)t$$

¿Cuál será el valor de ésta para el elemento diferencial anteriormente descrito a un tiempo $t_0 = 0$ y a un $t = 0.1$ min?

$$c = 1 \quad \left(\frac{°\text{C}}{\text{cm} \times \text{s}}\right)$$

$$\theta_0 = 30\ °\text{C}$$

d) ¿Cuál será la rapidez de variación de temperatura para (X, t)?

SOLUCIÓN

a) Velocidad para $t = 0.1$ min del elemento diferencial que originalmente se encontraba en $(1,\ 3,\ 1)$

$$x_1 = X_1 - aX_2^2 t^2 \qquad\qquad v_i = \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

$x_2 = X_2 - bX_3 t \qquad v_1 = -2aX_2^2 t, \quad v_2 = -bX_3$

$x_3 = X_3 \qquad v_3 = 0$

$t = 0.1\text{min} = 6 \text{ s}$

$\Rightarrow \quad v_i = -2aX_2^2 t\,\hat{e}_1 - bX_3\,\hat{e}_2 + 0\hat{e}_3$

$v_1 = (-2)(-2)(3^2)(6) = 216 \text{ cm/s}$

$v_2 = 3 \text{ cm/s}$

$v_3 = 0 \text{ cm/s} \qquad v_i = 216\hat{e}_1 + 3\hat{e}_2 + 0\hat{e}_3$

b) Velocidad para $t = 0.1$ min (6 s) del elemento diferencial que para ese tiempo se encuentra en la coordenada $(1,\ 3,\ 1)$.

Para $t = 6$ s

$1 = X_1 - aX_2^2 6^2 \qquad X_2 = 3 + bX_3\,6 = -15, \quad X_3 = 1$

$3 = X_2 - bX_3\,6 \qquad X_1 = 1 + aX_2^2 36 = 1 + (-2)(-15)^2(36) = -16199$

$1 = X_3$

$x(t_0) = (-16199, -15, 1)\ cm$

$v(X_i, t) = 5400\hat{e}_1 - 3\hat{e}_2 + 0\hat{e}_3$

c) Temperatura en $(1,\ 3,\ 1)$ para un tiempo $t_0 = 0$ y a un $t = 0.1$ min. Resulta por demás evidente que para un tiempo $t_0 = 0 \Rightarrow \theta = \theta_0$; esto es, que la temperatura del cuerpo sea la de referencia.

$$\theta = \theta_0 + c(x_1 + x_2)t$$

para $t_0 = 0$ s

$$\theta_0 = 30\,°\mathrm{C}$$

para $t = 6$ s

$$\theta = 30 + c(1+3)6$$

$$\theta = 54\ °\mathrm{C}$$

d) Rapidez de variación de temperatura para cualquier posición y tiempo.

$$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{\partial\theta}{\partial t} + (\nabla\theta)v = \frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\partial\theta}{\partial x_1}v_1 + \frac{\partial\theta}{\partial x_2}v_2 + \frac{\partial\theta}{\partial x_3}v_3$$

Sustituyendo

$x_1 = X_1 - aX_2^2 t^2, \quad x_2 = X_2 - bX_3 t^2$ en θ

$$\theta = \theta_0 + c(X_1 - aX_2^2 t^2 + X_2 - bX_3 t\ \ )t$$

$$\theta = \theta_0 + c(X_1 + X_2 - (aX_2^2 t^2 + bX_3 t))t = \theta_0 + c(x_1 t + X_2 t) - (aX_2^2 t^3 + bX_3 t^2)$$

$$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{\partial\theta}{\partial t}(X_i,\ t) \ = c(X_1 + X_2 - 3ax_2^2 t^2 - 2bx_3 t)$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Un medio continuo presenta un movimiento definido por:

$$x_1 = X_1 + \alpha X_2 t^2$$

$$x_2 = X_2 + \alpha X_1 t^2$$

$$x_3 = X_3 + \alpha X_3 t^2$$

donde las x_i representan coordenadas eulerianas y X_j, lagrangianas.

a) Determine los componentes de la velocidad para $t = 2$ de una partícula que se encontraba en $(1,\ 2,\ 4)$ cuando $t = 1$.
b) Determine la ecuación de trayectoria de la partícula antes definida.
c) Determine la aceleración para $t = 4$.
d) ¿Cuál es el tiempo de referencia?

2. La posición en un tiempo t de un medio continuo está dada por

$$x_1 = X_1(1+\beta t)^2, \qquad x_2 = X_2(1+\kappa t^2), \qquad x_3 = X_3(1+\beta t)$$

Para el medio continuo antes definido, determine la velocidad y aceleración en coordenadas lagrangianas y eulerianas.

3. El movimiento de un medio continuo está dado por

$$x_1 = X_1 e^{\eta t} + X_3(e^{\eta t} - 1)$$

$$x_2 = X_2 + X_3(e^{\eta t} - e^{-\eta t})$$

$$x_3 = X_3$$

a) ¿Cuál es el tiempo de referencia?
b) ¿Existen las funciones inversas?
c) Determine la velocidad de $x(X, t_0) = (1, 2, 5)$ para $t = 2$.

4. ¿Qué representa una descripción lagrangiana y a qué hace mención una euleriana?

5. Explique el concepto de derivada material. Además, si ρ es una función escalar, determine su derivada material considerando coordenadas cilíndricas, rectangulares y esféricas.

6. Si la aceleración se define como la derivada material de la velocidad $\left(\frac{Dv}{Dt}\right)$ que se expresa en notación índice como

$$\frac{Dv_i}{Dt} = a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

y en notación general

$$\frac{Dv}{Dt} = a = \frac{\partial v}{\partial t} + (\nabla v)v$$

Desarrolle las ecuaciones que representan la aceleración tanto en coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas.

7. Si la velocidad en un continuo se describe en forma euleriana $v_r = v(r,\theta);\ v_\theta = 0;\ v_z = 0$ determine la ecuación que representa las diferentes componentes de la aceleración.

8. Un medio continuo presenta el siguiente campo de desplazamientos:

$$u_1 = 0$$
$$u_2 = \frac{1}{2}(X_2 + X_3)e^{\eta t} + \frac{1}{2}(X_2 - X_3)e^{-\eta t} - X_2$$
$$u_3 = \frac{1}{2}(X_2 + X_3)e^{\eta t} - \frac{1}{2}(X_2 - X_3)e^{-\eta t} - X_3$$

a) Indique la ecuación de trayectoria.
b) ¿En qué plano(s) se define el movimiento del medio?
c) ¿Existirán funciones inversas de la forma $X_i = X(x,t)$?
d) En el caso de existir las funciones inversas, determínelas.
e) Determine la velocidad y aceleración tanto en referencia euleriana como lagrangiana.

9. La velocidad de un medio continuo está descrita por

$$v_i = \frac{x_1}{(1+t)}\hat{e}_1 + \frac{2x_2}{(1+t)}\hat{e}_2 + \frac{2x_3}{(1+t)}\hat{e}_3$$

Con base en lo anterior, determine:

a) La ecuación de trayectoria.
b) Aceleración en descripción euleriana y lagrangiana.

10. El movimiento de un medio continuo se describe como:

$$x_1 = kX_2^2 t + X_1$$

$$x_2 = aX_2 t + X_2$$

$$x_3 = X_3$$

a) Para $t = 0$ las esquinas de un cubo están en las coordenadas $A(0,\ 0,\ 0)$, $B(0,\ 1,\ 0)$, $C(1,\ 1,\ 1)$, $D(1,\ 0,\ 0)$, indique las posiciones que ocuparán en $t = 2$.
b) Determine la descripción espacial de la velocidad y aceleración.
c) Si la temperatura está por $\theta = Ax_1 + Bx_2$ determine la variación de la temperatura en el tiempo.

11. La velocidad de un medio continuo esta descrita por:

$$v_i = \frac{X_1}{(1+\eta t)}\hat{e}_1 + \frac{2X_2}{(1+\eta t)}\hat{e}_2 + \frac{2X_3}{(1+\eta t)}\hat{e}_3$$

Con base en lo anterior, determine la ecuación de trayectoria.

12. Considere la relación

$$x_1 = kX_2^2\left(t^2 - a^2\right) + X_1$$

$$x_2 = \left(\frac{1+t}{1+a}\right)X_2$$

$$x_3 = X_3\left(t - a\right)$$

a) ¿Cuál es el valor del tiempo de referencia?

b) Determine la velocidad en coordenadas materiales y espaciales.

c) Si $a = 2$ el tiempo de referencia es $t = 2$, y $x(X, t_0) = (1,1,1)$, determine la posición de la partícula para $t = 4$.

d) Determine la velocidad de la partícula que en $t = 4$ se encuentra en $(1, 2, 2)$.

e) Si el campo de temperaturas $\theta = (x, t)$ se expresa en un sistema euleriano como:

$$\theta = c(x_2 + x_3)$$

determine la descripción material de la temperatura.

f) Determine la rapidez de cambio de la temperatura para cualquier tiempo y posición, así como para $x(x, 4) = (1, 2, 2)$.