CAPÍTULO 1

ANTECEDENTES GENERALES DE LA MECÁNICA DEL MEDIO CONTINUO

1.1 INTRODUCCIÓN

Teoría del continuo. La materia, en términos generales, está formada por moléculas, átomos e iones. En cualquiera de los casos, la unidad fundamental se reduce a los átomos, los cuales están constituidos a su vez por partículas subatómicas. Las dimensiones del radio atómico equivalente de los elementos es del orden de $10^{-10}\,\mathrm{m}$; por su parte, los datos recabados por la física permiten estimar que el radio del núcleo atómico es menor a $10^{-13}\,\mathrm{m}$. Del análisis comparativo de estos dos valores se constata que el átomo dista mucho de ser un continuo; por consecuencia, la materia cualquiera que sea su estado no lo será. Es entonces que se concluye que cualquier cuerpo ocupa un lugar en el espacio y que ningún otro podrá ocupar el mismo lugar al mismo tiempo, sin embargo, no lo ocupa en su totalidad. A pesar de lo antes expuesto, mucho del comportamiento de los materiales ante las solicitaciones que le son impuestas se puede describir a partir de considerarlos como continuos.

Los análisis tradicionalmente efectuados para describir el comportamiento tanto de fluidos como de sólidos, e incluso en el caso de materiales porosos, se pueden realizar considerando a éstos como medios infinitamente divisibles. Es por tanto que la teoría que permite describir el comportamiento macroscópico de los materiales, negando su microestructura, es conocida como *Teoría del continuo*.

Resulta evidente que la Teoría del continuo permitirá la prospección de los fenómenos a partir de ciertas dimensiones mínimas, estos valores límite dependerán del material y del fenómeno en estudio; por ejemplo, en el análisis de los estados de esfuerzos y deformaciones para los metales, las dimensiones mínimas para realizar la idealización de continuo son del orden de $10^{-8}\,\mathrm{m}$, esto es cien veces las dimensiones del átomo. En consecuencia, se tiene que al aplicar la teoría del continuo en un metal en el cual existen dislocaciones, es posible describir el campo de esfuerzos, de deformaciones y la energía asociada a la presencia de estas dislocaciones; lo anterior en consideraciones de continuo, condición que puede ser aplicada a la totalidad de la dislocación con excepción del núcleo de la misma, esto es para dimensiones por debajo de $10^{-8}\,\mathrm{m}$.

Considerando lo antes expuesto, se concluye que si bien la teoría del continuo es muy útil para el análisis de una gran variedad de situaciones, ésta no podrá ser utilizada en el caso de que los fenómenos se describan a través de parámetros que estén por debajo de la dimensión límite para la cual el material pueda ser considerado como continuo. Por ejemplo, algunos fenómenos de propagación de ondas de muy reducida longitud no pueden ser descritos a través de esta teoría.

Por consecuencia, la aplicación de la mecánica del continuo no depende de la conceptualización filosófica, ya que ningún medio es infinitamente divisible, sino de la congruencia existente entre el comportamiento observado y los resultados que se desprenden de la aplicación de la teoría y de la idealización del comportamiento del material. Afortunadamente en muchos casos, los resultados que emergen de la aplicación del concepto de continuo son congruentes con lo observado experimentalmente, lo que ha permitido el desarrollo de muchas teorías de amplia aplicación en la actualidad.

Los conceptos que se derivan de la Mecánica del Medio Continuo (MMC), por el espectro de aplicación de los resultados obtenidos, se pueden agrupar en dos grandes áreas:

a. *Principios generales* que son comunes a todos los medios. Éstas son leyes de la física ampliamente demostradas y que deben de ser cumplidas por cualquier medio. Por ejemplo, las leyes de conservación de masa o de energía.
b. *Ecuaciones constitutivas* que definen el comportamiento de materiales idealizados, por ejemplo, sólidos elásticos lineales o fluidos newtonianos.

Los principios generales son elementos evidentes de nuestra realidad física, entre los que se pueden mencionar están las leyes de conservación de masa y de conservación de energía, balance de momentum lineal y de momento de momentum y la ley de desigualdad entrópica. Matemáticamente existen dos formas de presentar estos principios:

1. *Forma integral*, en este caso corresponde a un volumen finito de material.
2. *Forma diferencial o ecuaciones de campo*, el principio corresponde a un volumen diferencial del material (partícula) de cada punto del campo bajo análisis.

Como ha sido antes mencionado, las ecuaciones constitutivas representan la otra parte fundamental de la Mecánica del Continuo. Éstas se desarrollan para materiales idealizados; por ejemplo, para aquellos en que la deformación solo depende de las solicitaciones aplicadas y dicha deformación desaparece al eliminar las solicitaciones (sólido elástico). Cuando las deformaciones son además infinitesimales se puede realizar la idealización de que las deformaciones son linealmente proporcionales con las solicitaciones (sólido elástico lineal), material en el cual además las propiedades no se modifican con la posición y son iguales en todas direcciones (sólido elástico lineal homogéneo e isotrópico). Ésta última descripción, si bien representa un alto grado de idealización, es muy útil para describir el comportamiento de los metales recocidos o provenientes de fundición. En el caso de muchos líquidos, como por ejemplo el agua, se tiene que los esfuerzos de corte son linealmente proporcionales con la velocidad de deformación, de lo que se desprende el concepto de viscosidad y se definen los fluidos denominados como newtonianos. Con todo lo expuesto se pueden mencionar algunos de los comportamientos idealizados como:

a. Sólido elástico homogéneo, lineal e isotrópico
b. Sólidos elásticos lineales y anisotrópicos
c. Sólido elástico no lineal
d. Fluidos no viscosos
e. Fluidos linealmente viscosos compresibles e incompresibles
f. Fluidos no newtonianos
g. Sólidos elastoviscosos
h. Materiales poroelásticos, etc.

1.2 TENSORES

Una herramienta fundamental para la Mecánica del Medio Continuo (MMC) son los tensores, ya que si bien desde el punto de vista del álgebra representan transformaciones lineales entre espacios vectoriales, en MMC se emplean también para representar cantidades físicas asociadas a los medios continuos (MC). Por tal motivo, en la primera etapa del texto se describirán éstos, así como las reglas fundamentales del álgebra y del cálculo que cumplen dichos tensores.

Notación índice. Las leyes de la mecánica del continuo deben ser formuladas de manera independiente a las coordenadas, de tal forma que el empleo de tensores permita el desarrollo de éstas. En un sistema escalar existe correspondencia de una cantidad (número) a un punto, esta situación se extiende a un espacio n dimensional. En el caso de emplear un sistema coordenado cartesiano, el uso de la notación índice permite una presentación simple y funcional, a la vez de elegante, de los conceptos.

Concepto de notación índice*.* La notación índice es una simplificación del concepto de sumatoria, de tal forma que si:

$$\alpha = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + ... + a_n x_n$$

expresión que se puede sintetizar como

$$\alpha = \Sigma\, a_i x_i$$

obviando el concepto de sumatoria, la igualdad se presenta sencillamente como

$$\alpha = a_i x_i$$

de lo expuesto resulta evidente que

$$\alpha = a_i x_i$$

$$\alpha = a_k x_k$$

$$\alpha = a_m x_m$$

Considerando que la mecánica del continuo permite describir el comportamiento de los cuerpos, donde éstos se relacionan con el espacio tridimensional, es entonces que la sumatoria se realiza de 1 a 3 y que la notación índice permite simplificar la presentación de los términos, por tanto:

$$\alpha = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = a_n x_n$$

En ocasiones se tiene, por ejemplo:

$$\beta = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j$$

$$\beta = a_{11} x_1 x_1 + a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 b_3 + a_{21} x_2 x_1 + a_{22} x_2 x_2 + a_{23} x_2 x_3 + a_{31} x_3 x_1 + a_{32} x_3 x_2 + a_{33} x_3 x_3$$

o

$$T_{ij} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_i b_j$$

$$T_{ij} = a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_1 b_3 + a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_2 b_3 + a_3 b_1 + a_3 b_2 + a_3 b_3$$

Es por tanto que la presencia de dos índices representa una doble sumatoria, lo cual se puede extender al número de índices que se requiera.

En general *no se emplean como índices* las últimas letras del alfabeto. Enseguida se muestran algunos ejemplos de desarrollo de la notación índice:

$$x_i = C_{ij} r_j$$

$$x_1 = C_{11} r_1 + C_{12} r_2 + C_{13} r_3$$

$$x_2 = C_{21} r_1 + C_{22} r_2 + C_{23} r_3$$

$$x_3 = C_{31} r_1 + C_{32} r_2 + C_{33} r_3$$

Por otra parte, si:

$$A_{ij} = B_{ip} C_{jq} D_{pq} \qquad \text{considerando que} \qquad i,\ j = 1,\ 2$$

Se tiene entonces:

$$A_{11} = B_{11}C_{11}D_{11} + B_{12}C_{11}D_{21} + B_{12}C_{12}D_{22} + B_{11}C_{12}D_{12}$$

$$A_{12} = B_{11}C_{21}D_{11} + B_{11}C_{22}D_{12} + B_{12}C_{21}D_{21} + B_{12}C_{22}D_{22}$$

$$A_{21} = B_{21}C_{11}D_{11} + B_{21}C_{12}D_{12} + B_{22}C_{11}D_{21} + B_{22}C_{12}D_{22}$$

$$A_{22} = B_{21}C_{21}D_{11} + B_{21}C_{22}D_{12} + B_{22}C_{21}D_{21} + B_{22}C_{22}D_{22}$$

$$T_{ij} = A_{im}A_{jm} = C_{ij} \qquad i,\ j = 1,\ 2,\ 3$$

$$T_{11} = A_{1m}A_{1m} = A_{11}A_{11} + A_{12}A_{12} + A_{13}A_{13}$$

$$T_{12} = A_{1m}A_{2m} = A_{11}A_{21} + A_{12}A_{22} + A_{13}A_{23}$$

$$T_{13} = A_{1m}A_{3m} = A_{11}A_{31} + A_{12}A_{32} + A_{13}A_{33}$$

$$T_{21} = A_{2m}A_{1m} = A_{21}A_{11} + A_{22}A_{12} + A_{23}A_{13}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$T_{33} = A_{3m}A_{3m} = A_{31}A_{31} + A_{32}A_{32} + A_{33}A_{33}$$

de lo anterior se comprueba que $T_{ij} = T_{ji}$

Definición de tensor. De acuerdo con el álgebra, un tensor se define como una transformación lineal entre espacios vectoriales, de tal forma que si T es un tensor que transforma al vector a en c y al vector b en d, entonces se deberá cumplir que

$$Ta = c$$

$$Tb = d$$

De tal forma que

$$T(a+b) = Ta + Tb = c + d$$

$$T(\alpha a) = \alpha Ta = \alpha c$$

$$T(\alpha a + \beta b) = \alpha Ta + \beta Tb = \alpha c + \beta d$$

Si

$$Ta = c$$

$$Sa = c$$

$$\Rightarrow \qquad T = S$$

Por otra parte, si

$$Ta \ = \ n$$

$$\delta = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_{ii} = I_{1\varepsilon}$$

$$Tb \ = \ n$$

$$T(a+b) \ = \ n$$

entonces

$$T(a+b) \ \neq \ Ta \ + \ Tb$$

Por lo tanto, T no representa una transformación lineal y entonces no se trata de un tensor.

En particular, en la mecánica del medio continuo los tensores se emplean para describir las cantidades físicas asociadas a éstos. Resulta evidente que los efectos de cualquier solicitación aplicada a un MC serán independientes de la base de referencia, por consecuencia, la descripción tensorial de una propiedad física asociada a un continuo existe de manera independiente a cualquier sistema coordenado. De lo antes expuesto, se concluye que los componentes del tensor pueden cambiar en función del origen definido o del sistema coordenado de referencia; sin embargo, los efectos serán únicos para una determinada solicitación. Los componentes del tensor en un sistema de referencia definen a éste bajo cualquier referencia. Dado que una solicitación en particular representa una realidad física única es entonces que las leyes de la mecánica del continuo son expresadas en forma de ecuaciones tensoriales. La invariancia de estas ecuaciones es la razón del empleo de tensores en la MMC.

Las cantidades físicas asociadas a un medio continuo pueden estar definidas sin tener relación con la base coordenada de referencia y, por consecuencia, describirse exclusivamente a través de su magnitud (cantidades escalares tales como la densidad o la temperatura), estar referidas a cada uno de los vectores unitarios que describen la base (cantidades descritas vectorialmente, tales como la velocidad o la fuerza), o requerir para su precisa descripción de un par de o más ejes (descripción matricial, tales como los esfuerzos o deformaciones). El número de ejes requeridos para describir la cantidad tensorial, determina su rango (véase la tabla 1.1), siendo éste independiente de la base utilizada.

Dada la relación existente entre las cantidades tensoriales y la base, es común el empleo de notación índice para describir a los tensores, esto aplica en particular cuando se emplea un sistema coordenado cartesiano (base rectangular).

Existen varios tipos de notación índice, por ejemplo:

$$a_i, b_j, T_{ij}, \varepsilon_{ijk}, R^{pk}$$

Cuando un índice se repite se define como falso y no aporta al rango del tensor, mientras que cuando los índices no se repiten se definen como libres, describiéndose a través de éstos el rango del tensor, por ejemplo:

Tensor de 1.^{er} orden

$$a_i, b_i, a_{ij} b_j, F_{ikk}, R^{p}_{.qp}, \varepsilon_{ijk} u_j u_k$$

Tensor de 2.° orden

$$D_{ij},\ D^i_j,\ D^{ij},\ A_{iijp},\ B^{ij}_{jk},\ \delta_{ij} u_k u_k$$

TABLA 1.1 Rango de los diferentes tipos de tensores

Rango (r)	**Representación**		**Aplicación**	**Ejemplos**	**Número de características que definen al tensor (n = 3^r)**
Cero	Letras minúsculas del alfabeto griego	$\alpha, \beta, \gamma, \kappa, \rho,$ etc.	Cantidades físicas que no están relacionadas con los ejes y que por lo tanto se representan como escalares	Masa, densidad, volumen específico, temperatura, etc.	1
Uno	Letras minúsculas del alfabeto latino	$b,\ c,\ d$ $b_i,\ c_i,$ $d_j,\ h_k$	Cantidades asociadas a los medios continuos, las cuales se definen con relación a un eje. Por lo tanto se representan como vectores.	Velocidad (v_i), posición (X_i, x_j), desplazamiento (u_i), fuerza (f_i), etc.	3
Dos	Letras mayúsculas del alfabeto latino	$T,\ C,\ F,\ A$ $H^{(2)}$ $T_{ij},\ C_{kl},$ $F_{mn},\ A_{rs}$	Propiedades asociadas con dos ejes a la vez. Éstos se denominan simplemente como tensores de rango dos o díadas.	Esfuerzo (T) Deformación (e, E) Rapidez de deformación (D)	9
Tres	Letras mayúsculas del alfabeto latino	$T,\ C,\ A^{(3)}$ $T_{ijk},\ C_{klm},$ $F_{mnj},\ A_{rsk}$	Propiedades asociadas con tres ejes	Propiedades de los cristales piezoeléctricos	27
Cuatro	Letras mayúsculas del alfabeto latino	$T,\ C,\ F^{(4)}$ $T_{ijkl},\ C_{klmn},$ $F_{mnrs},\ A_{rsij}$	Propiedades asociadas a dos pares de ejes.	Tensor de constantes elásticas C_{ijlm}	81

1.3 OPERACIONES CON TENSORES

Para los tensores se definen operaciones de adición, sustracción y producto. En el caso de la adición y sustracción el rango de los tensores involucrados en la operación deberá ser el mismo y estas operaciones se realizan término a término. Al hacer referencia a las propiedades es conveniente recordar la factibilidad de representar a los tensores de primer orden como vectores (matrices renglón o columna), a las díadas (tensores de segundo orden) como matrices de 3×3 y a los tensores de cuarto rango como matrices de 9×9, entonces las propiedades con respecto a las operaciones serán las mismas que las descritas para las matrices.

i. Conmutatividad

$$a+b = b+a$$

$$a-b = -b+a$$

ii. Asociatividad con respecto a la adición

$$(a+b)+c = a+(b+c)$$

Iii. Asociatividad, distributividad y conmutatividad con respecto a la multiplicación por un escalar. Sean α y β escalares (tensores de rango cero) y A, B tensores de rango superior, entonces:

$$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A = \beta(\alpha A) = A\alpha\beta$$

$$\alpha\beta = \varphi \Rightarrow (\alpha\beta)A = \varphi A$$

Por otra parte:

$$(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$$

$$\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$$

iv. Asociatividad de la adición con respecto al producto entre tensores de dimensión superior a la cero. Al igual que con las matrices no existe conmutatividad en la operación producto. Sean T, S tensores de rango dos (díadas) y a un tensor de rango uno, entonces:

$$(T+S)a = Ta + Sa$$

$$(T+S)a \neq a(T+S)$$

La adición de tensores se realiza término a término, de tal forma que:

$$T + S = W$$

En notación índice:

$$T_{ij} + S_{ij} = W_{ij}$$

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix}$$

donde, desde luego, el tensor W tiene el mismo rango de sus predecesores.

$$W_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} + S_{11} & T_{12} + S_{12} & T_{13} + S_{13} \\ T_{21} + S_{21} & T_{22} + S_{22} & T_{23} + S_{23} \\ T_{31} + S_{31} & T_{32} + S_{32} & T_{33} + S_{33} \end{pmatrix}$$

Producto de tensores

v. Asociatividad de la operación producto. Como ya antes fue mencionado no existe conmutatitividad en esta operación.

$$(TS)a = T(Sa)$$

$$TS \neq ST$$

$$(T(SV))a = T((SV)a) = T(S(Va))$$

$$(TS)(Va) = T(S(Va))$$

$$T(SV) = (TS)V$$

vi. Operaciones con la transpuesta del tensor

$$aTb = bT^T a$$

En el caso de que el tensor sea simétrico

$$T = T^T$$

$$\Rightarrow \qquad aTb = bT^T a = bTa$$

$$e_i T_{ij} e_j = e_j T_{ji} e_i$$

$$a_i T_{ij} b_j = b_j T_{ji} a_i$$

$$\Rightarrow \qquad T_{ij} = T_{ji}$$

El tensor T (de 2.° rango) se describe como

$$T = T_{ij}\, e_i\, e_j$$

$$T = T_{11} e_1 e_1 + T_{12} e_1 e_2 + T_{13} e_1 e_3 + \ldots + T_{33} e_3 e_3$$

expresándose en forma matricial

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11}\hat{e}_1\hat{e}_1 & T_{12}\hat{e}_1\hat{e}_2 & T_{13}\hat{e}_1\hat{e}_3 \\ T_{21}\hat{e}_2\hat{e}_1 & T_{22}\hat{e}_2\hat{e}_2 & T_{23}\hat{e}_2\hat{e}_3 \\ T_{31}\hat{e}_3\hat{e}_1 & T_{32}\hat{e}_3\hat{e}_2 & T_{33}\hat{e}_3\hat{e}_3 \end{pmatrix}$$

O simplemente

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

Multiplicación de tensores

- **Producto vectorial (producto cruz)**

A través de esta operación se define un nuevo tensor del mismo rango de sus predecesores. Esta operación se le relaciona comúnmente a tensores de rango uno, de tal forma que se da lugar a un nuevo vector el cual es normal al plano definido por sus factores.

$$a \times b = c$$

donde

$$c \perp a,\ b$$

$$a \times b = -b \times a$$

$$a \times b = \left(|a||b| \operatorname{sen} \theta\right) \hat{e}_i$$

θ: ángulo entre las direcciones a, b

$\hat{e}_i$: vector unitario normal al plano definido por a, b

- **Producto interno o producto punto**

Si bien este producto, como se definirá más adelante, se describe para cualquier tensor de rango mayor a cero, es usual su aplicación en tensores de rango uno; para los cuales representa la proyección de uno en otro

$$\eta = a \cdot b = b \cdot a = |a||b| \cos \theta$$

donde θ representa al ángulo menor definido entre los vectores a, b.

En notación índice equivale a

$$\alpha = a_i b_i$$

$$\alpha = a_1 b_1 (\hat{e}_1 \hat{e}_1) + a_2 b_2 (\hat{e}_2 \hat{e}_2) + a_3 b_3 (\hat{e}_3 \hat{e}_3)$$

$$\therefore \qquad \alpha = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$a \cdot b = b \cdot a = \lambda$$

$$a_i b_i = b_i a_i = \lambda$$

Este producto también se puede definir para tensores mayores del rango 1, por ejemplo:

$$T : M = T_{ij} M_{ij} = \eta = \operatorname{traza}[T_{ij} M_{kl}]$$

donde $T : M$ es una descripción en notación general,

$$\eta = T_{11} M_{11} + T_{22} M_{22} + T_{33} M_{33} + T_{12} M_{12} + T_{13} M_{13} + T_{21} M_{21} + T_{23} M_{23} + T_{31} M_{31} + T_{32} M_{32}$$

Producto punto vector-díada

$$a \cdot E = b$$

$$a_i E_{ij} = b_j$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} = (a_1 E_{11} + a_2 E_{21} + a_3 E_{31})\hat{e}_1$$

$$+(a_1 E_{12} + a_2 E_{22} + a_3 E_{32})\hat{e}_2$$

$$+(a_1 E_{13} + a_2 E_{23} + a_3 E_{33})\hat{e}_3$$

Producto punto díada-vector

$$E \cdot a = c$$

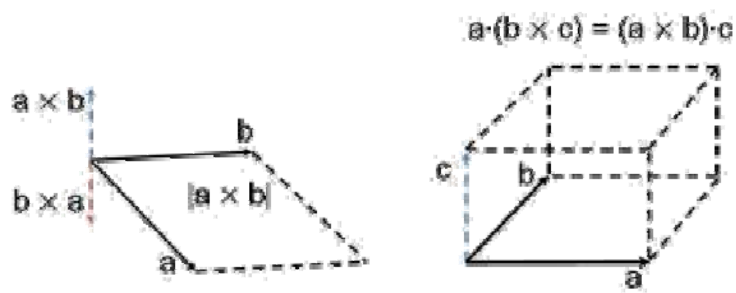
$$E_{ij} a_j = c_i$$

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (E_{11} a_1 & + & E_{12} a_2 & + & E_{13} a_3)\hat{e}_1 \\ (E_{21} a_1 & + & E_{22} a_2 & + & E_{23} a_3)\hat{e}_2 \\ (E_{31} a_1 & + & E_{32} a_2 & + & E_{33} a_3)\hat{e}_3 \end{bmatrix}$$

El *triple producto escalar* representa el producto punto de dos tensores de rango uno, donde uno de ellos es a su vez resultado de un producto vectorial. Donde el resultado representa el volumen (V) del prisma definido a través de los vectores a, b, c

$$a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c = \lambda = V$$

Por razones de operación es evidente que primero se deberá realizar el producto cruz.



El *triple producto vectorial* representa el producto cruz de dos vectores; uno de los cuales es a su vez resultado de un previo producto vectorial, en este caso se cumplen las siguientes identidades:

$$a\times(b\times c)=(a\cdot c)b-(a\cdot b)c$$

$$a\times(b\times c)=(a\times b)\times c \quad \text{solamente si} \quad b\times(c\times a)=0$$

$$(a\times b)\cdot(c\times d)=(a\cdot c)(b\cdot d)-(a\cdot d)(b\cdot c)$$

- **Producto interno entre díadas**

$$\left(A_{ij}\right)^2 = A_{ij}A_{ij} = \lambda$$

$$A_{ij}\left(B_{ij}\right)^T = A_{ij}B_{ji} \neq A_{ij}B_{ij}$$

$$A_{ij}\left(A_{ij}\right)^{-1} = \left(A_{ij}\right)^{-1}A_{ij} = I = \delta_{ij}$$

Si	$A_{ij}A_{ji} = I = \delta_{ij} \quad \Rightarrow \quad A_{ij}$	Tensor ortogonal
Si	$\det[A_{ij}]=1$	Matriz ortogonal propia
Si	$\det[A_{ij}]=-1$	Matriz ortogonal impropia

El *producto tensorial* equivale al producto de tensores con índices diferentes (libre), de tal forma que éstos se suman incrementando el rango del tensor resultante, por ejemplo:

$$a\otimes b=T$$

$$T_{ij}r_k = M_{ijk}$$

lo anterior se representa como:

$$T \otimes r = R$$

donde T es un tensor de segundo orden, r es de primer orden, y R es un tensor de tercer orden.

En la operación definida como *producto tensorial* $\otimes$, se incrementa el rango del tensor resultante, esto es equivalente a que todos los índices sean diferentes (libres) y, por lo tanto, se acumulen.

$$M_{ij} N_{kl} = R_{ijkl}$$

$$M \otimes N = R$$

En notación índice se expresa como:

$$a_i b_j = T_{ij}$$

$$v_i F_{jk} = T_{ijk}$$

$$D_{ij} T_{km} = M_{ijkm}$$

$$\varepsilon_{ijk} v_m = N_{ijkm}$$

Contracción o eliminación de índices falsos o repetidos. Como ya fue enunciado cuando los índices se repiten se anulan y por consecuencia se reduce el rango del tensor resultante:

$$T_{ii} = \lambda$$

$$E_{ij} a_j = b_i$$

$$a_i b_i = \alpha$$

$$E_{ii} a_j = b_j$$

$$E_{ij} F_{im} = G_{jm}$$

$$E_{ij} F_{kk} = M_{ij}$$

$$E_{ji} F_{ki} = H_{jk}$$

$$E_{ii} F_{km} = N_{km}$$

$$E_{ij} F_{kj} = B_{ik}$$

$$E_{ij} a_i = c_j$$

Es más adecuado escribir

$$a_i E_{ij} = c_j$$

$$E_{ij} F_{mj} = Q_{im}$$

- **Otras combinaciones de operaciones producto definidas para tensores**

La combinación de productos punto y productos cruz (doble producto interno y producto cruz) se puede expresar como:

$$a \otimes b : c \otimes d = R : M = (a \cdot c)(b \cdot d) = \beta$$

$$ab \overset{\times}{\underset{\bullet}{}} cd = (a \times c)(b \bullet d) = f_i$$

$$ab \overset{\bullet}{\underset{\times}{}} cd = (a \bullet c)(b \times d) = v_i \neq ab \overset{\times}{\underset{\bullet}{}} cd = (a \times c)(b \bullet d) = f_i$$

$$ab \overset{\times}{\underset{\times}{}} cd = (a \times c) \otimes (b \times d) = T_{ij}$$

1.4 OPERADORES TENSORIALES

Delta de Kronecker

En el caso de tensores de rango dos (díadas) se define un operador identidad con relación a la operación producto, a éste se le denomina como Delta de Kronecker (δ_{ij}), si la notación es general, simplemente se referirá como operador identidad (I).

La delta de Kronecker (δ_{ij}) se define entonces como:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1$$

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\delta_{ij} = \delta_{kl} = \delta_{mn} = \delta_{rs} = I$$

Por lo tanto,

$$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$$

$$\delta_{1m} a_m = \delta_{11} a_1 + \delta_{12} a_2 + \delta_{13} a_3 = a_1$$

$$\delta_{2m} a_m = \delta_{21} a_1 + \delta_{22} a_2 + \delta_{23} a_3 = a_2$$

$$\delta_{3m} a_m = \delta_{31} a_1 + \delta_{32} a_2 + \delta_{33} a_3 = a_3$$

$$\therefore \qquad \delta_{ij} a_j = a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 + a_3 \hat{e}_3 = a_i$$

$$\delta_{1m} T_{mj} = \delta_{11} T_{1j} + \delta_{12} T_{2j} + \delta_{13} T_{3j} = \delta_{11} T_{1j} = T_{1j}$$

$$\delta_{2m} T_{mj} = \delta_{21} T_{1j} + \delta_{22} T_{2j} + \delta_{23} T_{3j} = \delta_{22} T_{2j} = T_{2j}$$

$$\delta_{3m} T_{mj} = \delta_{31} T_{1j} + \delta_{32} T_{2j} + \delta_{33} T_{3j} = \delta_{33} T_{3j} = T_{3j}$$

$$\delta_{im} T_{mj} = T_{ij}$$

$$\delta_{im} \delta_{mj} = \delta_{ij}$$

$$\delta_{im} \delta_{mn} \delta_{nj} = \delta_{ij}$$

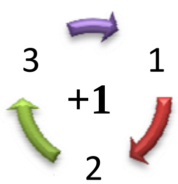
Si e_1, e_2, e_3 son los vectores directrices $\Rightarrow$ $e_i e_j = \delta_{ij}$

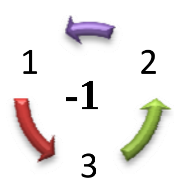
Permutador

Este término también conocido como alternador de Levy-Civita (definido así en honor del matemático italiano Levy-Civita (1873-1941)), es un operador empleado en notación tensorial como símbolo de permutación o alternador (ε_{ijk} o C_{ijk}). Facilita la presentación en notación índice, solamente puede tomar valores $\varepsilon_{ijk} = 0, \pm 1$. El valor de $+1$ corresponde a una permutación natural $1,2,3; 2,3,1; 3,1,2$, mientras que el valor de -1 corresponde al caso de que la permutación sea en sentido inverso $3,2,1; 1,3,2; 2,1,3$. Por su parte, el valor cero corresponde al caso en que se ha perdido el orden, y los índices se repiten.

De lo expuesto se concluye

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{Bmatrix} +1 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{, de acuerdo con cualquier } ijk$$





Cualquier otro orden es cero.

$$\therefore \; \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{jik}$$

Considerando los vectores unitarios

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$$

$$\varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = -1$$

$$\varepsilon_{112} = \varepsilon_{333} = \varepsilon_{113} = 0$$

$$\varepsilon_{iii} = \varepsilon_{kki} = \varepsilon_{kjk} = 0$$

El producto vectorial ($\times$) también se emplea para el caso de tensores, de tal forma que:

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \hat{e}_k$$

$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{e}_3 \quad \hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = \hat{e}_1 \quad \hat{e}_2 \times \hat{e}_1 = -\hat{e}_3$$

empleando el permutador, la operación se expresa como:

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \hat{e}_k = \varepsilon_{ijk}\hat{e}_k = \varepsilon_{jki}\hat{e}_k = \varepsilon_{kij}\hat{e}_k$$

El símbolo de permutación (ε_{ijk}), alternador o permutador, es útil para expresar el producto vectorial, tal como $a \times b$ y el triple producto escalar, de tal forma que:

$$a \times b = a_i \hat{e}_i \times b_j \hat{e}_j = a_i b_j \left(\varepsilon_{ijk} \hat{e}_k \right)$$

$$\hat{e}_i \cdot \left(\hat{e}_j \times \hat{e}_k \right) = \varepsilon_{ijk}$$

dado que

$$a \times a = 0$$

entonces,

$$\varepsilon_{ijk} a_j a_k = 0$$

Por otra parte, sean los vectores a, b, c

$$a \times \left(b \times c \right) = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kpq} a_j b_p c_q = a_j c_j b_i - a_j b_j c_i$$

1.5 FACTORIZACIÓN

En la notación índice se deberá tener cuidado en la factorización, ya que es muy fácil caer en incongruencias; por ejemplo, sea T una díada, n un tensor de primer orden, y λ un escalar, entonces, en notación matricial se tiene que si:

$$Tn = \lambda n$$

al igualar a cero, queda

$$Tn - \lambda n = 0$$

Factorizando se expresa como

$$\left(T - \lambda I \right) n = 0$$

lo que, en notación índice se expresa como:

$$T_{ij} n_j = \lambda n_i$$

igualando a cero, se tiene

$$T_{ij} n_j - \lambda n_i = 0$$

Lo que evidentemente no se puede factorizar en la forma $(T_{ij} - \lambda)n_j = 0$, ya que se estaría restando a una díada un escalar; por tal motivo, para la factorización es necesario desarrollar según:

$$T_{ij}\, n_j = \lambda n_i = \lambda \delta_{ij} n_j$$

por lo que al igualar a cero, se tiene

$$T_{ij}\, n_j - \lambda \delta_{ij} n_j = 0$$

y que al factorizar, queda

$$(T_{ij} - \lambda \delta_{ij}) n_j = 0$$

descripción que corresponde a lo presentado en notación matricial.

1.6 TENSORES CON CARACTERÍSTICAS PARTICULARES

A partir del concepto general de tensor se pueden definir algunos que presentan determinadas peculiaridades, estos no necesariamente existirán para cualquier rango, y aun cuando muchos de estos tipos particulares se relacionan con las díadas, no necesariamente son exclusivos a éstas. Por ejemplo, se define:

- *Tensor simétrico.* Son aquellos en los que $T = T^T$ o en notación índice $T_{ij} = T_{ji}$.
- *Tensor antisimétrico.* Es aquel en el que $T = -T^T$, o $T_{ij} = -T_{ji}$, estos tensores se caracterizan en que su traza es igual a cero, es decir, $T_{ii} = 0$.

Con base en lo anterior, se tiene que todo tensor de rango dos (T) se puede descomponer en una componente simétrica (T^S) y una parte antisimétrica (T^A), de tal forma que:

$$T = T^S + T^A$$

En notación índice puede escribirse como

$$T_{ij}^S = \frac{1}{2}\left(T_{ij} + T_{ji}\right) \qquad \text{y} \qquad T_{ij}^A = \frac{1}{2}\left(T_{ij} - T_{ji}\right)$$

es decir,

$$T_{ij} = \frac{1}{2}\left(T_{ij} + T_{ji}\right) + \frac{1}{2}\left(T_{ij} - T_{ji}\right)$$

Y en notación general,

$$T = \frac{1}{2}\left(T + T^T\right) + \frac{1}{2}\left(T - T^T\right)$$

Tensor ortogonal (Q o Q_{ij})

Se trata de aquella transformación lineal en donde los vectores o cantidades tensoriales a los cuales se les aplica la transformación Q conservan sus características (ángulos y longitudes en el caso de un vector).

Estos se caracterizan, además, en que su inversa está dada por la transpuesta del tensor:

$$Q^{-1} = Q^T$$

$$QQ^T = I$$

o, en notación índice

$$Q_{im}Q_{jm} = Q_{mi}Q_{mj} = \delta_{ij}$$

Estos tensores permiten el cambio de base de tal forma que para vectores se puede expresar como

$$v' = Qv$$

o, para díadas

$$B' = QBQ^T$$

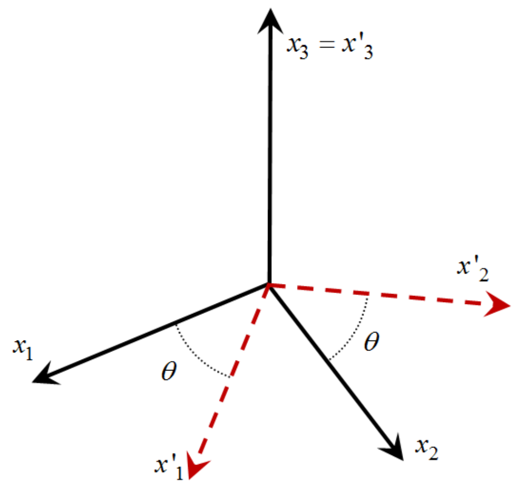
donde v' y B' son un vector y una díada definidos en una nueva base (x'), mientras que v y B están representados en la base original (x).

Suponga que Q_{ij} es un tensor que permite el cambio de la base x a la x', entonces

$$Q_{ij} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix}$$

Donde $Q_{ij} = \cos(\hat{e}'_i, \hat{e}_j)$, donde $\hat{e}'_i$ representa la dirección de los vectores unitarios en la base x', mientras que $\hat{e}_j$ representa la dirección de los vectores unitarios en la base original x.

Por ejemplo, para realizar un cambio de base de tal forma que el eje $x'_3 = x_3$, esto representa que el nuevo sistema está dado al rotar el plano $x_1 x_2$ un ángulo θ alrededor del eje x_3.



Entonces, la matriz de transformación está dada por:

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) & \cos\dfrac{\pi}{2} \\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right) & \cos\theta & \cos\dfrac{\pi}{2} \\ \cos\dfrac{\pi}{2} & \cos\dfrac{\pi}{2} & \cos 0^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dado que:

$$\hat{e}'_1 = \cos\theta\,\hat{e}_1 + \operatorname{sen}\theta\,\hat{e}_2$$

$$\hat{e}'_2 = -\operatorname{sen}\theta\,\hat{e}_1 + \cos\theta\,\hat{e}_2$$

$$\hat{e}'_3 = \hat{e}_3$$

Tensor isotrópico

Se trata de aquellos tensores cuyos componentes permanecen sin cambio con cualquier modificación en el sistema coordenado, esto es, al modificar la base todos los componentes del tensor permanecen invariables.

$$a_i = a'_i$$

$$T_{ij} = T'_{ij}$$

$$C_{lkm} = C'_{lkm}$$

Sean $A, B, C, D, E,$ tensores isotrópicos, si $\alpha B = H$, donde H es un nuevo tensor isotrópico (esto es, el producto de un escalar por un tensor isotrópico da lugar a otro tensor isotrópico). Por otra parte, si $A + B + C = F$, la suma de tensores isotrópicos da lugar a un nuevo tensor isotrópico (F). Considerando las dos condiciones antes expuestas, se cumple también que

$$\alpha A + \beta B + \chi C = D$$

donde D es también un tensor isotrópico.

Para el caso de $A \otimes B = E$, se tiene que E es también isotrópico (el producto tensorial de tensores isotrópicos da como resultado un nuevo tensor isotrópico).

Por otra parte, es importante mencionar que el único tensor isotrópico de rango dos es la delta de Kronecker δ_{ij} o tensor identidad.

Tensor isotrópico de orden 4

De acuerdo con lo antes planteado, un tensor isotrópico de rango 4 se puede describir a través de la sumatoria de tensores isotrópicos del mismo rango, los cuales son multiplicados por un escalar. A su vez, cada uno de éstos se define por medio del producto de tensores isotrópicos de orden dos (sólo es isotrópica la delta de Kronecker), lo anterior se puede expresar como:

$$A_{ij}A_{kl} = A_{ijkl}$$

$$A_{ij} = \delta_{ij} \quad ; \quad A_{kl} = \delta_{kl}$$

$$C_{ijkl} = \alpha A_{ijkl} + \beta B_{ijkl} + \gamma G_{ijkl}$$

en donde $A_{ijkl}, B_{ijkl}, C_{ijkl}, D_{ijkl}$ son tensores isotrópicos de 4.º orden.

Para aplicar los conceptos anteriores, suponga que C_{ijkl} es un tensor isotrópico, el cual permite la transformación lineal entre los espacios T_{ij} y E_{kl}, de tal forma que $T_{ij} = C_{ijkl}E_{kl}$, donde

$$T_{ij} = T_{ji} \quad , \quad E_{kl} = E_{lk} \quad , \quad C_{ijkl} = C_{klij}$$

por lo que, además de isotrópicos, los tensores T_{ij}, E_{kl}, C_{ijkl} son simétricos; entonces C_{ijkl} se puede descomponer como:

$$C_{ijkl} = A_{ijkl} + B_{ijkl} + G_{ijkl}$$

$$A_{ijkl} = \alpha A_{ij}A_{kl} \quad , \quad A_{ij} = \delta_{ij} \quad , \quad A_{kl} = \delta_{kl} \quad \therefore \quad A_{ijkl} = \alpha\delta_{ij}\delta_{kl}$$

$$B_{ijkl} = \beta B_{ij}B_{kl} \quad , \quad B_{ij} = \delta_{ik} \quad , \quad B_{kl} = \delta_{jl} \quad \therefore \quad B_{ijkl} = \beta\delta_{ik}\delta_{jl}$$

$$G_{ijkl} = \eta G_{ij}G_{kl} \quad , \quad G_{ij} = \delta_{il} \quad , \quad G_{kl} = \delta_{jk} \quad \therefore \quad G_{ijkl} = \eta\delta_{il}\delta_{jk}$$

Sustituyendo:

$$T_{ij} = C_{ijkl}E_{kl}$$

$$T_{ij} = \left(\alpha\delta_{ij}\delta_{kl} + \beta\delta_{ik}\delta_{jl} + \eta\delta_{il}\delta_{jk}\right)E_{kl} = \left(\alpha\delta_{ij}\delta_{kl}E_{kl} + \beta\delta_{ik}\delta_{jl}E_{kl} + \eta\delta_{il}\delta_{jk}E_{lk}\right)$$

$$= \alpha\delta_{ij}E_{kk} + \beta\delta_{ik}E_{jk} + \eta\delta_{il}E_{jl}$$

$$T_{ij} = \alpha\delta_{ij}E_{kk} + \beta E_{ij} + \eta E_{ij} = \alpha\delta_{ij}E_{kk} + \left(\beta + \eta\right)E_{ij} = \alpha E_{kk}\delta_{ij} + \lambda E_{ij}$$

Componentes esférica y desviadora de los tensores simétricos de rango dos

Todo tensor simétrico de segundo rango T_{lm} , tal que $T_{lm} = T_{ml}$, se puede descomponer en dos tensores de la forma $T_{lm} = T_{lm}^{esf} + T_{lm}^{d}$, donde T_{lm}^{esf} es el denominado componente esférico del tensor T_{lm} y representa un tensor cuyo valor es igual en todas direcciones y de ahí su denominación (se trata entonces de un tensor isotrópico). Por otra parte, el componente desviador T_{lm}^{d} representa un tensor cuyo componente esférico es igual a cero.

El componente esférico se define como:

$$T_{ij}^{esf} = \frac{1}{3} T_{kk} \delta_{ij} = \frac{1}{3}\left(T_{11} + T_{22} + T_{33}\right)\delta_{ij}$$

o, en notación general

$$T^{esf} = \left(\frac{1}{3}\,\text{traza}[T]\right) I$$

Asimismo, el tensor desviador asociado a T se define como:

$$T^{d} = T_{ij}^{(d)} = T_{ij} - \frac{T_{kk}}{3}\delta_{ij}$$

o, en notación general

$$T^{d} = T - \frac{\text{traza}[T]}{3} I$$

Para el caso del tensor desviador su componente esférica es igual a cero

$$\text{traza}\left[T^{(d)}\right] = 0$$

Si se define:

$$\alpha = \frac{1}{3}\,\text{traza}\,T = \frac{T_{ii}}{3}$$

$$\Rightarrow \qquad T_{ij} = \alpha\,\delta_{ij} + T_{ij}^{(d)}$$

Dado que

$$T_{ij}^{des} = T_{ij} - T_{kk}\delta_{ij}$$

$$T_{ij}^{des} = \begin{pmatrix} \dfrac{2T_{11} - (T_{22} + T_{33})}{3} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & \dfrac{2T_{22} - (T_{11} + T_{33})}{3} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & \dfrac{2T_{33} - (T_{11} + T_{22})}{3} \end{pmatrix}$$

1.7 EIGENVALORES Y EIGENVECTORES

Los términos eigenvalores y eigenvectores, denominados también como valores y vectores característicos asociados a un tensor, se definen a partir de considerar una transformación lineal (T) tal que al aplicarla a un vector (a), éste se transforme en colineal a sí mismo, entonces:

$$Ta = \lambda a$$

donde a se define como eigenvector y λ como eigenvalor, ambos asociados a la transformación lineal T.

Todo vector paralelo a a es también un eigenvector con eigenvalor λ, de tal modo que

$$T(\alpha a) = \alpha Ta = \alpha\lambda a = \eta a$$

Generalmente, los eigenvectores son unitarios, sin embargo, se definen de longitud arbitraria. Si n es un eigenvector unitario, entonces

$$Tn = \lambda n$$

En notación matricial $Tn = \lambda In$ y en notación índice $T_{ij}n_j = \lambda\delta_{ij}n_j$, lo cual, al igualar a cero y factorizando, queda:

$$(T_{ij} - \lambda\delta_{ij})n_j = 0$$

Ecuación que tiene la solución trivial $n_j = 0$ y, por otra parte, al ser un sistema compatible indeterminado, la solución generada a partir de

$$\left|T_{ij} - \lambda\delta_{ij}\right| = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

da lugar a una ecuación cúbica en λ, de la forma

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0$$

donde los términos I_i son definidos como los invariantes asociados al sistema. Estos deben su nombre a que se trata de magnitudes que no se verán alteradas al modificar la base y representan propiedades propias del estado físico cuantificado por el tensor.

Al desarrollar el sistema antes expuesto se puede comprobar que

$$I_1 = T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33} = \text{ Traza del tensor}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ji}\right) = \Sigma \text{ menores principales de } T_{ij}$$

$$I_2 = T_{11}T_{22} + T_{22}T_{33} + T_{33}T_{11} - \left(T_{12}T_{21} + T_{23}T_{32} + T_{31}T_{13}\right)$$

En el caso de que el tensor sea simétrico

$$I_2 = T_{11}T_{22} + T_{22}T_{33} + T_{33}T_{11} - \left(T_{12}^2 + T_{23}^2 + T_{31}^2\right)$$

$$I_3 = \frac{1}{6}\left(T_{ii}T_{jj}T_{kk} + 2T_{ij}T_{jk}T_{ki} - 3T_{ii}T_{jk}T_{kj}\right)$$

$$I_3 = \left|T_{ij}\right| = T_{11}T_{22}T_{33} + T_{12}T_{23}T_{31} + T_{13}T_{32}T_{21} - \left(T_{11}T_{23}T_{32} + T_{22}T_{13}T_{31} + T_{33}T_{12}T_{21}\right)$$

Igualmente en el caso de que el tensor sea simétrico, el tercer invariante se puede expresar como:

$$I_3 = T_{11}T_{22}T_{33} + 2T_{12}T_{23}T_{31} - \left(T_{11}T_{23}^2 + T_{22}T_{31}^2 + T_{33}T_{12}^2\right)$$

Valores y direcciones principales

Los valores y direcciones principales (eigenvalores y eigenvectores) asociados a un tensor tienen las siguientes propiedades:

i) Los eigenvalores de un tensor real también son reales.
ii) Para un tensor simétrico real siempre existen al menos tres eigenvectores.
iii) Los eigenvectores asociados a un tensor simétrico real forman base y son mutuamente ortogonales.
iv) Existirá siempre cuando menos un sistema coordenado para el cual el tensor A se puede representar como tensor diagonal.
v) En el caso de que dos de los eigenvalores sean iguales, la dirección de los eigenvectores respectivos estará indeterminada, quedando contenidos en el plano normal al tercer eigenvector. Cualesquiera dos vectores mutuamente perpendiculares contenidos en dicho plano serán vectores característicos.
vi) En el caso de que los tres valores característicos sean iguales, lo cual representa que cualesquiera tres vectores mutuamente perpendiculares serán eigenvectores asociados al tensor, y éste será isotrópico.

Sean n_1 y n_2 los eigenvectores asociados a los eigenvalores λ_1 y λ_2, respectivamente, entonces

$$Tn_1 = \lambda_1 n_1$$

$$Tn_2 = \lambda_2 n_2$$

$$\Rightarrow \qquad n_2 \cdot (Tn_1 = \lambda_1 n_1) \quad ; \quad n_2 T n_1 = \lambda_1 n_1 n_2$$

$$\Rightarrow \qquad n_1 \cdot (Tn_2 = \lambda_2 n_2) \quad ; \quad n_1 T n_2 = \lambda_2 n_2 n_1$$

$$\Rightarrow \qquad n_2 T n_1 - n_1 T n_2 = \lambda_1 n_1 n_2 - \lambda_2 n_2 n_1$$

$$n_1 n_2 = n_2 n_1$$

$$n_2 T n_1 = n_1 T^T n_2$$

Si el tensor es simétrico $T = T^T$, implica que

$$n_2 T n_1 = n_1 T n_2$$

$$\therefore \qquad \lambda_1 n_1 n_2 = \lambda_2 n_2 n_1$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2) n_1 n_2 = 0$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$\Rightarrow \qquad n_1 n_2 = 0 \qquad\qquad \therefore \quad \text{son perpendiculares}$$

Generalizando lo antes obtenido, se tiene que $n_1 \perp n_2 \perp n_3$, por lo que los vectores unitarios obtenidos forman una base, cuyos ejes son mutuamente perpendiculares.

EJEMPLO 1. Para el tensor T_{ij}, determine los eigenvalores y eigenvectores asociados.

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 12 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN

A partir de los invariantes se determina el polinomio característico. Las soluciones de este polinomio de tercer grado representan los eigenvalores del sistema.

$$I_1 = 26, \qquad I_2 = 212, \qquad I_3 = 552$$

$$\lambda^3 - 26\lambda^2 + 212\lambda - 552 = 0$$

$$\lambda_3 = 6 \quad , \quad \lambda_2 = 7.1715 \quad , \quad \lambda_1 = 12.8284$$

$$T_{ijP} = \begin{pmatrix} 12.82 & 0 & 0 \\ 0 & 7.1715 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Para determinar los eigenvectores se deberá cumplir que:

$$\left(T_{ij} - \lambda\delta_{ij}\right)n_j = 0$$

Entonces, para el eigenvector asociado al eigenvalor $\lambda = 12.82$

$$\begin{pmatrix} (12-12.82) & 2 & 0 \\ 2 & (8-12.82) & 0 \\ 0 & 0 & (6-12.82) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_1^1 \\ a_2^1 \\ a_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-0.8284a_1^1 + 2a_2^1 = 0$$

$$2a_1^1 - 4.8284a_2^1 = 0$$

$$-6.8282\,a_3^1 = 0$$

$$a_3^1 = 0$$

$$\left(a_1^1\right)^2 + \left(a_2^1\right)^2 + \left(a_3^1\right)^2 = 1$$

$$\therefore \qquad \left(a_1^1\right)^2 + \left(a_2^1\right)^2 = 1$$

$$a_1^1 = 2.41a_2^1$$

$$\left(2.41a_2^1\right)^2 + \left(a_2^1\right)^2 = 1$$

$$6.82\left(a_2^1\right)^2 = 1$$

$$a_2^1 = 0.3827$$

$$\theta_{12} = 67.5°$$

$$a_1^1 = 0.92$$

$$\theta_{11} = 22.72°$$

$$a_3^1 = 0$$

$$\theta_{13} = 90°$$

Para el segundo eigenvalor $\lambda_2 = 7.17$, el sistema de ecuaciones se expresa como:

$$\begin{pmatrix} (12-7.17) & 2 & 0 \\ 2 & (8-7.17) & 0 \\ 0 & 0 & (6-7.17) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_1^2 \\ a_2^2 \\ a_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$4.83a_1^2 + 2a_2^2 = 0$$

$$2a_1^2 + 0.8285a_2^2 = 0$$

$$-1.1715a_3^2 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad a_3^2 = 0$$

$$a_1^2 = -0.4142a_2^2$$

$$\left(0.4142a_2^2\right)^2 + \left(a_2^2\right)^2 = 1$$

$$a_2^2 = 0.9238$$

$$\theta_{22} = 22.5°$$

$$a_1^2 = -0.3826$$

$$\theta_{21} = 112.5°$$

Para el tercer eigenvalor $\lambda = 6$, se tiene que:

$$\begin{pmatrix} (12-6) & 2 & 0 \\ 2 & (8-6) & 0 \\ 0 & 0 & (6-6) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_1^3 \\ a_2^3 \\ a_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$6a_1^3 + 2a_2^3 = 0$$

$$2a_1^3 + 2a_2^3 = 0$$

$$0a_3^3 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} 4a_1^3 &= 0 \\ -4a_2^3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \therefore \quad a_1^3 = a_2^3 = 0$$

$$\theta_{31} = \theta_{32} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{como} \quad \left(a_1^3\right)^2 + \left(a_2^3\right)^2 + \left(a_3^3\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad a_3^3 = 1 \quad \therefore \quad \theta_{33} = 0$$

Ensamblando los tres eigenvectores para definir así la matriz de rotación (cambio de base), se tiene:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0.92 & 0.38 & 0 \\ -0.38 & 0.92 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad A_{ji} = \begin{pmatrix} 0.92 & -0.38 & 0 \\ 0.38 & 0.92 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como es descrito en líneas posteriores, este tensor de cambio de base es ortogonal, por lo cual se cumple que $AA^T = I$, es decir,

$$A_{ij} A_{ji} = \delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Asimismo, se deberá cumplir la ley de transformación para tensores

$$T' = QTQ^T$$

Por lo que al aplicar esta transformación al tensor original se llega a la representación en valores principales, se concluye entonces que la matriz de rotación describe la relación existente entre los vectores unitarios correspondientes a la base original $\hat{e}_j$ con los de la base en valores principales $\hat{e}'_i$:

$$Q = \cos(\hat{e}_i' \hat{e}_j)$$

Efectuando las operaciones se tiene

$$T' = \begin{pmatrix} 0.92 & 0.38 & 0 \\ -0.38 & 0.92 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.92 & -0.38 & 0 \\ 0.38 & 0.92 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11.8 & 4.9 & 0 \\ -2.75 & 6.59 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.92 & -0.38 & 0 \\ 0.38 & 0.92 & 0 \\ 0. & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{ijP} = \begin{pmatrix} 12.7 & 0 & 0 \\ 0 & 7.1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Con lo cual se comprueba lo expuesto.

1.8 LEYES DE TRANSFORMACIÓN DE TENSORES

Como ha sido mencionado con antelación, es factible describir las propiedades asociadas a un medio continuo a través de un infinito número de bases, dando lugar a igual número de representaciones que son equivalentes en todos los casos. Esto se puede conceptualizar a través de la existencia de los invariantes asociados al tensor, los cuales no se modifican al cambiar el sistema o la base de referencia. Es por tanto necesario considerar las reglas que permiten la rotación de la base de referencia. Para esto se define la matriz de transformación o rotación, la cual, por definición es ortogonal y está dada por los cosenos directores de cada una de las direcciones de la base nueva con respecto a la base original.

Sea A un tensor de transformación tal que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

El vector unitario a lo largo del eje X_1' está dado por

$$e_1' = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3$$

La generalización de lo antes expuesto es

$$e_i' = A_{ij}e_j \tag{1.1}$$

Un vector arbitrario n definido en la base original se expresa como

$$n = n_j e_j \tag{1.2}$$

y en el sistema nuevo

$$n' = n_i' \, e_i' \tag{1.3}$$

Considerando la matriz de transformación A_{ij}

$$n' = A_{ij} n_j \tag{1.4}$$

En particular, los tensores de rotación conservan ángulos y magnitudes, razón por la que se definen como ortonormales.

Por tanto, para un tensor que define un cambio a una base ortonormal, se cumple que:

$$Q_{im}Q_{jm} = \delta_{ij}$$

Por definición $A^{-1} = A^T \ \therefore AA^T = I$ y entonces A representa un tensor ortogonal que se define como

$$A_{ij} = \cos\left(\hat{e}_i' \, \hat{e}_j\right)$$

De tal forma que un sistema de ejes $x_1' \; x_2' \; x_3'$ se obtiene a partir de la rotación de un sistema $x_1 \; x_2 \; x_3$.

	x_1	x_2	x_3
x_1'	θ_{11}	θ_{12}	θ_{13}
x_2'	θ_{21}	θ_{22}	θ_{23}
x_3'	θ_{31}	θ_{32}	θ_{33}

Para pasar del eje nuevo al original se intercambian renglones por columnas, esto es la transformación inversa (A^{-1}) que se define como $A^{-1} = A^T$, donde $A^{-1} = A^T = \cos(\hat{e}_i \hat{e}_j')$

	x_1'	x_2'	x_3'
x_1	a_{11}	a_{21}	a_{31}
x_2	a_{12}	a_{22}	a_{32}
x_3	a_{13}	a_{23}	a_{33}

Los ángulos entre los sistemas están dados por $\theta_{ij} = \theta\left(\hat{e}_i' \, \hat{e}_j\right)$, mientras que $\theta_{ji} = \theta\left(\hat{e}_j \hat{e}_i'\right)$

$$A_{ji} = \cos\left(\hat{e}_j \hat{e}_i'\right)$$

$$A_{ji} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

En general, la matriz de cosenos directores se puede escribir como

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix}$$ Matriz de transformación entre $(\hat{e}_i)$ y $(\hat{e}_j')$

Ley de transformación para componentes cartesianos de vectores

Sea cualquier vector a, entonces los componentes de a con respecto a $(\hat{e}_i)$ son

$$a_i' = Q_{ij} \cdot a_j$$

Dado $v = v_1\hat{e}_1 + v_2\hat{e}_2 + v_3\hat{e}_3$, defina v'

$$v_1' = q_{1j}v_j = q_{11}v_1 + q_{12}v_2 + q_{13}v_3$$

$$v_2' = q_{2j}v_j = q_{21}v_1 + q_{22}v_2 + q_{23}v_3$$

$$v_3' = q_{3j}v_j = q_{31}v_1 + q_{32}v_2 + q_{33}v_3$$

Ley de transformación entre tensores

En notación matricial se expresa como

$$T' = QTQ^T$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}' & \sigma_{12}' & \sigma_{13}' \\ \sigma_{21}' & \sigma_{22}' & \sigma_{23}' \\ \sigma_{31}' & \sigma_{32}' & \sigma_{33}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} & q_{21} & q_{31} \\ q_{12} & q_{22} & q_{32} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 2. Una base, a la cual se define como original (x_i) con vectores unitarios $\hat{e}_i$, se va a transformar a una nueva referencia la cual se denomina como (x_i') con vectores unitarios $\hat{e}_i'$. Suponga que los ángulos entre ambas bases están dados por

	x_1	x_2	x_3
x_1'	135°	60°	120°
x_2'	90°	45°	45°
x_3'	45°	60°	120°

Determine la matriz de cambio de base.

SOLUCIÓN

La matriz de cambio de base queda:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La matriz anterior es ortogonal y unitaria ya que la suma de los cuadrados de los elementos renglón y elementos columna es igual a uno.

Un vector v_i descrito en la base x_i, se define como

$$v = 12\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2 + 8\hat{e}_3$$

Para describir al vector v_i en la nueva base x_i' , se tiene entonces que

$$v_i' = A_{ij}v_j = \begin{pmatrix} -0.7071 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & 0.7071 & 0.7071 \\ 0.7071 & 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Por consecuencia,

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-0.7071\times 12 + 0.5\times 2 - 0.5\times 8)e_1' \\ (0.7071\times 2 + 0.7071\times 8)e_2' \\ (0.7071\times 12 + 0.5\times 2 - 0.5\times 8)e_3' \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 3. La siguiente tabla presenta los cosenos directores descritos entre la base original x_i, y la nueva base x_i'. Determine los cosenos de la tercera línea.

	x_1	x_2	x_3
x_1'	$3/5$	$-4/5$	0
x_2'	0	0	1
x_3'			

SOLUCIÓN

Se debe cumplir que $\hat{e}'_3 = \hat{e}'_1 \times \hat{e}'_2$

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 3/5 & -4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{4}{5}e_1 - \frac{3}{5}e_2 + 0e_3$$

$$\Rightarrow \qquad Q = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4/5 & -3/5 & 0 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 4. Verifique si el siguiente tensor es ortonormal.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Para lo anterior se debe cumplir que $AA^T = I$, o que cada renglón y cada columna cumpla con que la suma de los cuadrados de los cosenos directores es igual a uno, lo cual se puede verificar con facilidad. La condición $\left(\sum \cos^2 \theta_{ij} = 1\right)$ no se cumple para el segundo renglón y la segunda columna, por lo que no se trata de un tensor ortogonal.

EJEMPLO 5. Para los siguientes cosenos directores definidos entre la base x_i y la x'_i, determine la última línea.

	x_1	x_2	x_3
x'_1	$-\frac{3}{5\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{4}{5\sqrt{2}}$
x'_2	$\frac{4}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$
x'_3			

SOLUCIÓN

Considerando que la suma de los cuadrados de los cosenos directores debe ser igual a uno, y partiendo de que los vectores deben ser mutuamente perpendiculares, se tiene que $a \times b = c$, por lo que

$$e'_3 = -\frac{3}{5\sqrt{2}}\hat{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{e}_2 - \frac{4}{5\sqrt{2}}\hat{e}_3$$

$$\Rightarrow \qquad Q = \begin{pmatrix} -3/5\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & -4/5\sqrt{2} \\ 4/5 & 0 & 3/5 \\ -3/5\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & -4/5\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

1.9 CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL APLICADO A TENSORES

Esta parte del capítulo se orientará al estudio del cálculo diferencial e integral aplicado a funciones tensoriales.

Por función tensorial se entiende aquella transformación lineal entre espacios vectoriales que permite representar cantidades físicas asociadas a los medios continuos. Cualquier tensor A, y de acuerdo al rango, estará constituido por funciones representadas en el espacio de los números reales, de tal forma que:

$$A = a_{ij}\left(x_i, t\right)$$

donde a_{ij} son las componentes del tensor A de rango 2 y pertenecen al campo de los números reales. Por lo tanto,

$$\frac{dA(x_i, t)}{dt} = \frac{da_{ij}(x_i, t)}{dt}$$

descripción que se puede extender a la derivada n-sima,

$$\frac{d^n A(x_i,\ \ t)}{dt^n} = \frac{d^n a_{ij}(x_i,\ \ t)}{dt^n}$$

de tal forma que al derivar con relación al tiempo el rango del tensor no se altera.

Considerando lo antes expuesto, y en virtud de que las funciones tensoriales son, en general, de la forma $a_{ij} = f\left(x_i, t\right)$, las siguientes reglas aplicadas a las operaciones de derivación se extienden al cálculo diferencial con cantidades tensoriales, las cuales son demostradas en textos básicos de Cálculo.

Derivada con respecto al tiempo

Sean a, b tensores de rango uno, A, B tensores de rango dos, y α y ϕ escalares, todos ellos funciones del tiempo. Entonces se cumple lo siguiente:

$$\left(\frac{da}{dt}\right)_i = \frac{da_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(a_i\right)$$

$$\left(\frac{dA}{dt}\right)_{ij} = \frac{d}{dt}\left(a_{ij}\left(t\right)\right)$$

$$\frac{d\left(a+b\right)}{dt} = \frac{da}{dt} + \frac{db}{dt}$$

$$\frac{d\alpha\ a}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}a + \alpha\frac{da}{dt}$$

$$\frac{d\left(a \cdot b\right)}{dt} = a \cdot \frac{db}{dt} + b \cdot \frac{da}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(a \times b\right) = a \times \frac{db}{dt} + \frac{da}{dt} \times b$$

$$\frac{d}{dt}\left(a \otimes b\right) = a \otimes \frac{db}{dt} + \frac{da}{dt} \otimes b$$

$$\frac{d}{dt}AB = \frac{dA}{dt}B + A\frac{dB}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(A \pm B\right) = \frac{dA}{dt} \pm \frac{dB}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\phi A = \frac{d\phi}{dt}A + \phi\frac{dA}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(A^T\right)=\left(\frac{dA}{dt}\right)^T$$

$$\frac{d}{dt}A_{ij}B_{kj}=\frac{dA_{ij}}{dt}B_{kj}+A_{ij}\frac{dB_{kj}}{dt}$$

Operador diferencial (∇)

En el caso de que la derivación se efectúe con respecto a un campo vectorial, el rango del tensor resultante se verá afectado. Para el empleo del operador ∇(gradiente) es necesario considerar el tipo de operación que se va a realizar ya que esto determinará el rango del tensor al que se dé lugar.

Se presentan tres operaciones al utilizar el operador ∇, éstas son:

- ***Gradiente***. En notación índice se expresa como $\nabla=\frac{\partial}{\partial x_i}$.

  Sea $f\left(x_i\right)$ una función descrita en el campo de los reales, la cual en MMC representa un tensor de cualquier rango, se tiene entonces que $\frac{\partial f}{\partial x_i}=\nabla f = f,_i$. Por consecuencia, la aplicación del operador ∇ equivale a incrementar en uno el rango del tensor. Por su parte, el operador divergencia equivale al producto punto del tensor por el operador gradiente, de tal forma que $\operatorname{div} f=\nabla\cdot f$, lo que se traduce en la reducción del rango del tensor resultante. Se tiene que el operador rotacional da lugar a un nuevo tensor del mismo rango del original $\nabla\times u=\operatorname{rot} u$

  La notación empleada para describir diferentes operaciones en la literatura es muy variada, como se mostrará más adelante.

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x_i}\hat{e}_i=\hat{e}_i\partial_i$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \phi_{,i} \qquad \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} = v_{i,jk}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = v_{i,j} = \partial_j v_i \qquad \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} = T_{ij,k} = \nabla T$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_i} = v_{j,i} \qquad \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = T_{ij,j} = \nabla \bullet T_{ij}$$

En las expresiones anteriores, ϕ representa un tensor de rango cero, v_i un tensor de rango uno, y T_{ij} uno de rango dos. Se constata que el operador $\partial/\partial x_i$ o ∂_i incrementa en uno el orden del tensor cuando i es índice libre, y reduce en uno el rango del tensor cuando el índice es falso (se repite); por lo tanto,

Gradiente: $$\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\hat{e}_i$$

Divergencia: $$\operatorname{div} v = \nabla \cdot v$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \partial_i v_i = v_{i,i}$$

Rotacional: $$\operatorname{rot} v = \nabla \times v$$

$$\varepsilon_{ijk}\partial_j v_k = \varepsilon_{ijk} v_{k,j}$$

Laplaciano: $$\nabla^2\varphi = \nabla \cdot \nabla\varphi$$

$$\partial_{ii}\varphi = \varphi_{,ii} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_i}$$

Sea ϕ una función escalar (tensor de rango cero), se tiene entonces que:

$$\phi,_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_1}\hat{e}_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2}\hat{e}_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_3}\hat{e}_3$$

El gradiente de la función escalar es un tensor de rango uno.

Sea f un tensor de rango uno, entonces

$$f_j,_{ii} = \nabla \cdot \nabla f = \mathrm{div}(\nabla f) = \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}\hat{e}_1 + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2}\hat{e}_2 + \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_3^2}\hat{e}_3 = \nabla^2 f$$

$$\nabla^2 f = \text{laplaciano del tensor } f$$

$$f_j,_{ij} = f,_{ji} = \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_i \partial x_j} = \nabla(\nabla \bullet f) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\, f) \neq \nabla^2 f$$

$$\nabla^2 \varphi = tr(\nabla(\nabla \varphi))$$

$$\nabla^2 f = \nabla(\nabla \bullet f) - \nabla \times (\nabla \times f)$$

Extendiendo el concepto de laplaciano a un tensor de 2.º rango, éste se expresará como:

$$\left(\nabla^2 A\right)_{ij} = \nabla^2 \left(a_{ij}\right)$$

EJEMPLO 6. A partir de las reglas de derivación y considerando las propiedades de la delta de Kronecker y del permutador, se puede demostrar que:

$$\varepsilon_{imn} f_{,mn} = \varepsilon_{imn} f_{,nm} \quad \Rightarrow \quad \text{se debe cumplir que} \quad \varepsilon_{imn} f_{,mn} = 0$$

$$\varepsilon_{imn} f_{mn} = \varepsilon_{imn} f_{nm}$$

$\varepsilon_{imn} f_{mn} = -\varepsilon_{inm} f_{nm}$ por la definición del permutador

$\varepsilon_{imn} f_{mn} = -\varepsilon_{imn} f_{nm} \quad \therefore \quad f_{nm} = 0$

Por otra parte, se tiene que:

$$x_{i,j} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} \quad \text{ya que} \quad \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad i = j$$

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_j} = 0 \quad \Leftrightarrow i \neq j$$

$$x_{i,i} = \nabla \cdot x = \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = \frac{\partial x_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial x_3} = 3$$

$$\left(x_m x_n\right)_{,i} = x_{m,i} x_n + x_m x_{n,i} = \delta_{im} x_n + \delta_{in} x_m$$

$$\nabla^2 x_m x_n = (x_m x_n)_{,ii} = (x_{m,i} x_n + x_{n,i} x_m)_{,i} = (\delta_{mi} x_n + \delta_{ni} x_m)_{,i}$$

$$= \delta_{mi} x_{n,i} + \delta_{ni} x_{m,i} = \delta_{mi}\delta_{ni} + \delta_{ni}\delta_{mi} = 2\delta_{mn}$$

Por su parte, la *divergencia de un campo vectorial* se describe como:

$$\nabla \cdot f = f_{m,m} = \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = \alpha$$

$$\operatorname{div} u = \nabla \cdot u = u_{i,i} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \beta$$

$$\operatorname{div}\left(\phi u\right) = \phi \operatorname{div} u + \nabla \phi \cdot u$$

$$\nabla \cdot \left(\alpha u + \beta g\right) = \alpha\left(\nabla \cdot u\right) + \beta\left(\nabla \cdot g\right)$$

donde α y β en la última ecuación son constantes que multiplican a las funciones tensoriales u, g .

Divergencia de una díada

La divergencia de un tensor de rango mayor o igual a dos se puede expresar como:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = T_{ij,j} = \nabla \cdot T = t_i$$

$$\nabla \cdot A^T = A_{ji,j} = a_i$$

$$\nabla \cdot (\nabla u) = \nabla^2 u$$

$$\nabla \cdot (\nabla u)^T = u_{j,ij} = u_{j,ji} = \nabla(\nabla \cdot u)$$

Sea $T(r)$ un campo tensorial de 2.° orden. La divergencia de $T(r)$ es definida como el campo vectorial, tal que para cualquier vector a

$$(\operatorname{div} T) \cdot a = \operatorname{div}(T^T a) - tr\left(T^T (\nabla a)\right)$$

Considerando coordenadas rectangulares y los vectores unitarios de la base dada

$$\nabla \hat{e}_i = 0$$

Sea $b = \operatorname{div} T$

$$\operatorname{div} T_{ij} = b_i = b\hat{e}_i = \operatorname{div}\left(T^T \hat{e}\right) - tr\left(T^T \nabla \hat{e}_i\right)$$

$$= \operatorname{div}\left(T_{im}\hat{e}_m\right) - 0 = \frac{\partial T_{im}}{\partial x_m}$$

$$\operatorname{div} T = \frac{\partial T_{im}}{\partial x_m}\hat{e}_i$$

Para coordenadas cilíndricas la divergencia de $T_{r\theta z}$ está dada por:

$$(\operatorname{div} T)_r = \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z}$$

$$\left(\operatorname{div} T\right)_{\theta} = \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{T_{r\theta} + T_{\theta r}}{r} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z}$$

$$\left(\operatorname{div} T\right)_{z} = \frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{zr}}{r}$$

Mientras que para coordenadas esféricas $\nabla \cdot T_{(r\theta\phi)}$ está dada por:

$$\left(\operatorname{div} T\right)_{r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 T_{rr}\right) + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\left(T_{r\theta}\operatorname{sen}\theta\right)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial T_{r\phi}}{\partial \phi} - \frac{T_{\theta\theta} + T_{\phi\phi}}{r}$$

$$\left(\operatorname{div} T\right)_{\theta} = \frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3 T_{\theta r}\right) + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\left(T_{\theta\theta}\operatorname{sen}\theta\right)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial T_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{T_{r\theta} - T_{\theta r} - T_{\phi\phi}\cot\theta}{r}$$

$$\left(\operatorname{div} T\right)_{\varphi} = \frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3 T_{\phi r}\right) + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\left(T_{\phi\theta}\operatorname{sen}\theta\right)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial T_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{T_{r\phi} - T_{\phi r} + T_{\theta\phi}\cot\theta}{r}$$

El ***rotacional*** ($\nabla\times$) se caracteriza por no modificar el rango del tensor, de tal forma que el tensor resultante tendrá el mismo rango del original, en particular para un campo vectorial se describe como:

$$\nabla \times u = \operatorname{rot}\, u$$

Por otra parte, se define al **vector dual** (ζ) como el resultado de la operación $\zeta = -\varepsilon_{ijk}\omega_{ij}$; donde ω_{ij} es $(\nabla v)^{A}$. El rotacional de un vector v es definido por el campo vectorial dado por dos veces el vector dual 2ζ de la parte antisimétrica de ∇v.

Empleando el permutador, se expresa también como

$$a_i = \varepsilon_{imn} u_{m,n} \quad \text{o} \quad a_i = \varepsilon_{imn}\frac{\partial u_m}{\partial x_n}$$

Si el campo vectorial u se define a partir del gradiente de una función escalar, de la forma $u = \nabla\phi$, entonces se cumplirá que el campo resultante se define como irrotacional, lo cual implica que $\nabla \times u = 0$, por lo tanto

$$\nabla \times u = \nabla \times (\nabla\phi) = \varepsilon_{imn}\phi_{,mn} = \varepsilon_{imn}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_m \partial x_n} = 0$$

Se cumplirá también que $\nabla \times (\alpha u) = \alpha(\nabla \times u) + \nabla\alpha \times u$, donde α es un tensor de rango cero.

Identidades de interés

Si α, β son constantes y $u,\ g,\ v$ funciones vectoriales, se cumple que

$$\nabla \times (\alpha u + \beta g) = \alpha(\nabla \times u) + \beta(\nabla \times g)$$

$$\nabla \cdot (u \times v) = v \cdot (\nabla \times u) - u \cdot (\nabla \times v)$$

$$\nabla \times (u \times v) = v \cdot \nabla u - v(\nabla \cdot u) + u(\nabla \cdot v) - u \cdot \nabla v$$

$$\nabla(u \cdot v) = v \times (\nabla \times u) + u \times (\nabla \times v) + (v \cdot \nabla)u + (u \cdot \nabla)v$$

$\nabla \times (\nabla \times u) = \nabla(\nabla \cdot u) - \nabla^2 u$; donde $\nabla^2 u$ representa al laplaciano $u = \nabla \cdot \nabla u$

$$\Rightarrow \qquad \nabla^2 v = \nabla(\nabla \cdot v) - \nabla \times (\nabla \times v)$$

Para el rotacional de un campo tensorial se tiene que

$$(\nabla \times A)^T \neq \nabla \times A^T$$

Si A es un tensor de 2.º orden, $\nabla \times A$ será también tensor de 2.º orden.

Operador $u \cdot \nabla$

En análisis que involucra escalares y vectores es usual que aparezca el término $u \cdot \nabla$, en notación índice se expresa como:

$$u_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$(u \cdot \nabla)\varphi = u_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = u_j \varphi_{,j} = u \cdot \nabla \varphi$$

$$(u \cdot \nabla)v = u_j v_{i,j}$$

$$(u \cdot \nabla)u = \frac{1}{2}\nabla\left(u^2\right) - u \times (\nabla \times u) = \frac{1}{2}\nabla\left(u^2\right) + (\nabla \times u) \times u$$

donde $u^2 = u \cdot u$

Otras descripciones

En el caso del gradiente de un vector se tiene que

$$(\nabla u)_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = u_{i,j}$$

$$\left(\nabla u^T\right)_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = u_{j,i}$$

La aplicación sucesiva del operador gradiente se expresa

$$(\nabla\nabla\phi)_{ij} = \phi_{,ij}$$

$$(\nabla\nabla\phi)^T = \nabla\nabla\phi$$

donde ϕ representa un tensor de rango cero. De lo antes expuesto se concluye que el número de veces en que se aplique el operador gradiente será igual al incremento en el rango del tensor resultante.

Para el caso del gradiente de un campo tensorial en coordenadas rectangulares se tiene

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} = T_{ij,k} = M_{ijk}$$

$$(\nabla A)_{ijk} = a_{ij,k} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}$$

Si $A = \nabla u$, entonces

$$\nabla A = \nabla\left(\nabla u\right) = \nabla\nabla u = u_{i,jk}$$

A lo cual se denomina como segundo gradiente de u; por su parte $\nabla^2 u = u_{i,kk}$, y por esta razón, el laplaciano del vector representa, como ya fue mencionado, también un vector.

Laplaciano de un tensor de segundo rango

Sean a_{ij} las componentes de un tensor de segundo rango A, por lo que $c_{ijk} = a_{ij,k}$ son términos que representan el tensor de tercer orden generado por ∇A. Resulta evidente que $c_{ijk,m} = a_{ij,km} = A_{ijkm}$, el cual representa un tensor de cuarto rango. Este tensor es denominado segundo gradiente de A y descrito como $\nabla\nabla A$. Por su parte, el tensor $a_{ij,kk}$ representa las componentes de un tensor de segundo orden que se define como laplaciano de $\nabla^2 A$, entonces resulta que si A representa un tensor de segundo grado, el laplaciano de éste estará dado también por un tensor del mismo rango.

Por último, se puede constatar que los operadores ∇, $\nabla\cdot$, $\nabla\times$ y ∇^2 son operadores diferenciales lineales en el cálculo tensorial. Se cumplirá entonces que:

$$\nabla\left(\alpha u + \beta v\right) = \alpha\nabla u + \beta\nabla v$$

$$\nabla\left(\alpha A + \beta B\right) = \alpha\nabla A + \beta\nabla B$$

$$\nabla \cdot (\alpha A + \beta B) = \alpha \nabla \cdot A + \beta \nabla \cdot B$$

$$\nabla \times (\alpha A + \beta B) = \alpha \nabla \times A + \beta \nabla \times B$$

$$\nabla^2 (\alpha A + \beta B) = \alpha \nabla^2 A + \beta \nabla^2 B$$

donde u, v son tensores de rango uno (vectores); A, B son tensores de rango superior y $\alpha,\ \beta$ son escalares.

Derivada direccional y derivada normal

Una ecuación de la forma $\phi(x_i) = K$, donde K es una constante, representa una superficie en el espacio tridimensional, para la cual su normal está dada por $\nabla\phi$. Es por tanto que en cualquier punto x de la superficie $\phi(x_i) = K$, el vector $\nabla\phi$ está dirigido a lo largo de la normal de la superficie; por lo que el vector normal unitario está dado por

$$n = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}$$

Sea a un vector unitario inclinado un ángulo θ con respecto a la normal $\nabla\phi$, entonces:

$$\nabla\phi \cdot a = |\nabla\phi|(n \cdot a) = |\nabla\phi| \cos\theta$$

El escalar $\nabla\phi \cdot a$ representa la componente de $\nabla\phi$ a lo largo de a, lo cual es usualmente descrito como $\frac{\partial\phi}{\partial a} = \nabla\phi \cdot a$, lo que se denomina como derivada direccional de ϕ a lo largo de a. La derivada direccional de ϕ sobre la normal n es denominada derivada normal de ϕ $\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)$. Por tal motivo se tiene que $\frac{\partial\phi}{\partial n} = \nabla\phi \cdot n = |\nabla\phi|$

Resulta por demás evidente que $\frac{\partial \phi}{\partial a}$ es máxima cuando el ángulo θ descrito entre estos vectores es igual a cero, por tanto, se cumple que $\left|\frac{\partial \phi}{\partial a}\right|_{\text{máx}} = \frac{\partial \phi}{\partial n}$, por lo que la derivada normal representa el máximo de todas las derivadas direccionales del campo escalar ϕ que describe la superficie.

$$\nabla \phi = |\nabla \phi| \cdot n = \left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right) \cdot n$$

1.10 TEOREMAS INTEGRALES PARA VECTORES

En esta parte del curso se presentarán los teoremas integrales de mayor relevancia en el estudio de la MMC, éstos son el teorema de la divergencia y el de Stokes. Por sus consecuencias en el desarrollo de la MMC, se hará énfasis en las implicaciones que estos teoremas tienen.

Teorema de la divergencia

Sea V el volumen de una región tridimensional limitada por una superficie cerrada S, entonces para un campo vectorial u definido en V y en S, se cumplirá que:

$$\int_V (\nabla \cdot u)\, dV = \int_S (u \cdot n)\, dS$$

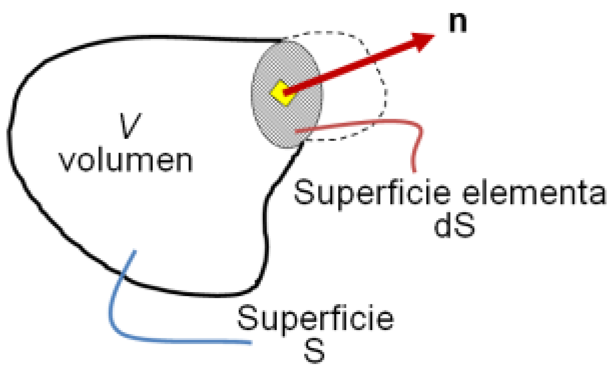
donde n es el vector normal unitario a S. En notación índice la relación anterior se expresa como

$$\int_V u_{k,k}\, dV = \int_S u_k n_k\, dS$$

$$\int_S u_i n_i dS = \int_V \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dV$$

El teorema de la divergencia (TD) permite relacionar una integral de volumen para transformarla en una de superficie a través del vector normal unitario n.

El TD físicamente relaciona el intercambio de una propiedad (por ejemplo calor) del MC con su entorno, e indica que la pérdida o ganancia de ésta es igual a su variación al interior del MC.



El teorema de la divergencia permite desarrollar algunas relaciones, de tal forma que se cumplirá que:

$$\int_V \nabla\phi\, dV = \int_S \phi n\, dS \qquad \text{o, en notación índice,} \quad \int_V \phi_{,k}\, dV = \int_S \phi n_k\, dS$$

$$\int_V (\nabla \times u)\, dV = \int_S (n \times u)\, dS \quad \text{o} \quad \int_V \varepsilon_{ijk} u_{k,j}\, dV = \int_S \varepsilon_{ijk} n_j u_k\, dS$$

$$\int_V \nabla^2\phi\, dV = \int_S (n \bullet \nabla)\phi\, dS \quad \text{o} \quad \int_V \phi_{,kk}\, dV = \int_S n_k \phi_{,k}\, dS$$

$$\int_V \left(\nabla^2 u\right) dV = \int_S (n \bullet \nabla) u\, dS \quad \text{o} \quad \int_V u_{i,kk}\, dV = \int_S n_k u_{i,k}\, dS$$

donde ϕ es una función escalar y μ una función vectorial.

Vector solenoidal

La integral de superficie $\int_S u \cdot n\, dS$ es denominada como *flujo normal de salida o flujo de* u *a través de* S. Un vector será solenoidal en una región si su flujo a través de cualquier superficie cerrada es cero. A partir del teorema de la divergencia se cumple que u es *solenoidal en una región conectada simple, si y sólo si* $\nabla \cdot u = 0$ en esa región. Un campo vectorial cuya divergencia es igual a cero se denomina vector libre de divergencia (*divergence free vector*). Un campo vectorial es solenoidal en una región conectada simple, si y sólo si es libre de divergencia.

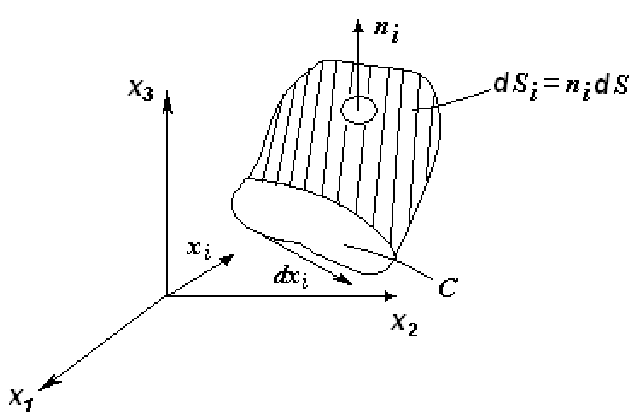
Cuando se cumple que $\operatorname{div}(\operatorname{rot} u) = 0$, lo que representa es que el vector definido por $\operatorname{rot} u$ es un vector libre de divergencia para cada vector en u. Esto permite demostrar que cualquier vector libre de divergencia u definido en una región conectada simple puede ser representado como:

$$u = \nabla \times w$$

donde w es asimismo un vector libre de divergencia y se le conoce como vector potencial de u.

Teorema de Stokes

Así como el *teorema de Gauss* relaciona una integral sobre un volumen cerrado con una integral sobre su superficie límite, el *teorema de Stokes* relaciona una integral de línea alrededor de la curva límite de la superficie, de tal forma que la integral de superficie del rotacional de una función vectorial tomada sobre cualquier superficie es igual a la integral de trayectoria de la función vectorial sobre el borde de la superficie.



Sea C una curva cerrada en un espacio tridimensional y S una superficie regular abierta limitada por C, entonces, para un campo vectorial u definido tanto en S como en C, se cumple:

$$\oint_C u \cdot t \, ds = \int_S (\nabla \times u) \cdot n \, dS$$

donde t es un vector tangente unitario a C, el cual se asume que está orientado positivamente en relación al vector normal unitario n de S.

La ecuación anterior en notación índice se expresa como:

$$\oint_C u_i t_i \, ds = \int_S \varepsilon_{ijk} u_{k,j} n_i dS \qquad (1.5)$$

Si S es una superficie cerrada, entonces el lado izquierdo se reduce a cero, por tanto se cumplirá:

$$\int_s (\nabla \times u) \cdot n dS = 0 \quad \text{o} \quad \int_s \varepsilon_{ijk} u_{k,j} n_i dS = 0$$

Esta ecuación también se desarrolla a partir del teorema de la divergencia aplicado a $\nabla \times u$.

Un caso particular de la ecuación 1.5 es cuando C queda contenida en un plano $x_1 x_2$ y S es la parte del plano limitado por C.

La expresión 1.5 se reduce a

$$\int_C (u_1 \, dx_1 + u_2 \, dx_2) = \int_S (u_{2,1} - u_{1,2}) \, dx_1 dx_2 \qquad (1.6)$$

donde u_1, u_2 son las componentes u en x_1, x_2.

Este caso particular del teorema de Stokes se denomina como *teorema de Green en el plano.*

Algunas relaciones que se establecen con base en la ecuación 1.5 son:

$$\oint_C \phi \, t \, ds = \int_S n \times \nabla \phi \, dS \qquad \text{o} \qquad \oint_C \phi \, t_i \, ds = \int_S \varepsilon_{ijk} n_j \phi_{,k} \, dS$$

$$\oint_C (u \times t) \, ds = \int_S \left[(\nabla \cdot u) n - (\nabla u)^T n \right] dS$$

$$\oint_C \varepsilon_{ijk}\, u_j\, t_k\, ds = \int_S (u_{k,k}\, n_i - u_{k,i}\, n_k)\, dS$$

$$\oint_C \nabla \times u \cdot t\, ds = \int_S \left[\frac{\partial}{\partial n}(\nabla \cdot u) - n \cdot (\nabla^2 u) \right] dS$$

o bien,

$$\oint_C \varepsilon_{ijk}\, u_{k,j}\, t_i\, ds = \int_S \left[\frac{\partial}{\partial n}(u_{k,k}) - n_i u_{i,kk} \right] dS$$

donde ϕ representa un campo escalar, tanto definido en S como en la trayectoria C.

Frecuentemente, $t\,ds$ se describe a través de dx, por lo que el término queda como $\int_C (t) dx$ en lugar de $\int_C (t)\, ds$.

Vectores conservativos e irrotacionales

La integral de trayectoria $\oint_C u_i t_i ds$ o $\oint_C u \cdot t\, dS$ representa la integral de $u \cdot t$ alrededor de C y se denomina *circulación* de u alrededor de C.

Un vector u definido en una región se define como *conservativo* si su trayectoria (circulación) sobre una curva cerrada es cero o, de manera equivalente, si el valor de la integral $\int_A^B u \cdot tds$ depende solamente de los límites A y B.

El vector se dice irrotacional si $\nabla \times u = 0$, y a partir del teorema de Stokes, esto representa, *en una región conectada simple, que un vector es conservativo si y sólo si es irrotacional en la región*.

Si $\nabla \times \nabla \phi = 0$, se tendrá entonces que $\nabla \phi$ es un vector irrotacional para cualquier campo escalar ϕ. Por lo tanto se puede probar que cualquier vector irrotacional u definido en una región simple conectada puede ser representado como:

$$u = \nabla \phi$$

En consecuencia, ϕ se denomina como potencial escalar (scalar potential) de u. Si el vector u es a la vez irrotacional, entonces $\nabla^2 u = 0$; en este caso se denomina al vector u como *vector armónico*.

Representación de Helmholtz

Un vector libre de divergencia tiene la representación:

$$u = \nabla \times w$$

Mientras que un campo de velocidades o desplazamientos se puede describir a partir de una función escalar ϕ, a través de la siguiente relación, donde u representa un vector irrotacional:

$$u = \nabla \phi$$

Una representación válida para un vector general, conocida como la *representación de Helmholtz* se expresa como:

$$v(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{u(\overline{x})}{\left| x - \overline{x} \right|} dV$$

donde u representa un campo vectorial a través del cual se define un campo v, de tal forma que V es el volumen de la región donde se define u y la integral es tomada variando $\overline{x}$ sobre V, manteniendo a x como un punto fijo. Se puede probar que:

$$\nabla^2 v = u$$

$$u = \nabla \phi + \nabla \times w$$

$$\phi = \nabla \cdot v$$

$$w = -\nabla \times v$$

Entonces, dado un campo vectorial u, donde existe un campo escalar ϕ y un campo vectorial w, tal que u tiene una representación $u = \nabla \phi + \nabla \times w$. Esta es la representación de Helmholtz es conveniente notar que el vector w utilizado en la representación es un vector libre de divergencia.

- **Teoremas integrales para tensores de rango superior a uno**

Los teoremas de la divergencia y de Stokes se pueden extender a campos tensoriales de rango superior a uno; como en el caso de un campo vectorial, la integral de un campo tensorial es definida como el campo tensorial cuyos elementos son las integrales de las componentes del campo dado.

- **Teorema de la divergencia aplicado a una díada**

Sea V el volumen de una región tridimensional limitada por una superficie regular cerrada S, entonces el campo tensorial definido en V y en S es

$$\int_V \nabla \cdot A \, dV = \int_S A \cdot n \, dS$$

donde n representa el vector normal unitario asociado a la superficie S. Esto también se puede expresar como:

$$\int_S A_{ij} n_j dS = \int_V \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} dV$$

- **Teorema de Stokes para una díada**

Sea C una curva cerrada en un espacio tridimensional y S una superficie limitada tanto en S como en C, entonces se cumplirá que:

$$\oint_C A \cdot t \, ds = \int_S (\nabla \times A)^T \cdot n \, dS$$

donde t es la tangente unitaria a C, la cual se asume que está orientada positivamente al vector normal unitario n de S.

1.11 FÓRMULAS DE TRANSPORTE

Estos teoremas son de gran utilidad en la MMC, en particular para el desarrollo de las ecuaciones generales, ya que permiten correlacionar derivadas materiales de integrales de trayectoria, superficie y volumen con sus correspondientes ecuaciones integrodiferenciales de trayectoria, superficie o volumen. Esto es, las fórmulas de transporte permiten correlacionar la variación por unidad de tiempo de una propiedad A sobre un elemento de control, igualando esto con la variación debida al cambio de la propiedad de las partículas que integran el sistema menos la variación debida a los flujos convectivos netos de la propiedad A a través del entorno.

Lo antes expuesto se expresa como sigue:

$$\frac{D}{Dt}\int_C \phi dx = \int_C \left\{\frac{D\phi}{Dt} + \phi\nabla \cdot v\right\} dx$$

$$\frac{D}{Dt}\int_S TndS = \int_S \left[\frac{DT}{Dt} + T(\nabla \cdot v)) - T(\nabla v)^T\right] ndS$$

$$\frac{D}{Dt}\int_V \phi dV = \int_V (\frac{D\phi}{Dt} + \phi(\nabla \cdot v) dV$$

siendo

ϕ - componente escalar de un vector o tensor descrito en forma euleriana

C - curva o trayectoria material

S - superficie material (del medio continuo)

B - cuerpo o medio continuo cuya superficie es S y la curva que la delimita es C

V - volumen de B

v - velocidad

T - tensor de segundo orden

Teorema de transporte de Reynolds

Considere una función de la forma $T(x_i,t)$, la cual corresponde con un tensor de cualquier rango. Esta función se expresa en coordenadas espaciales (eulerianas y tiempo). Por ejemplo, $T(x_i,t)$ puede representar la función densidad $\rho(x_i,t)$, cantidad de movimiento $\rho(x_i,t)v(x_i,t)$, etc. Por lo que la cantidad de la propiedad $T(x_i,t)$ en el cuerpo B cuyo volumen en el instante t es V, está dada por:

$$\int_V T(x_i,t)\,dV$$

El volumen contiene la misma cantidad de partículas materiales para cualquier tiempo, asociado a éste se define una superficie $S(t)$ que contiene en su interior al volumen V. Si se pretende evaluar el cambio de la propiedad $T(x_i,t)$ asociada al cuerpo B de volumen V, se tendrá que:

$$\frac{D}{Dt}\int_V T(x,t)\,dV = \int_V \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}\,dV + \int_S T(v \cdot n)\,dS$$

o

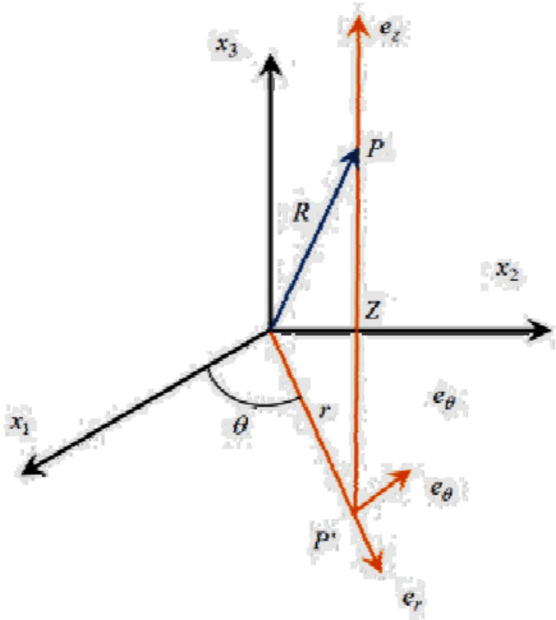
$$\frac{D}{Dt}\int_V T(x,t)\,dV = \int_V \left(\frac{DT(x,t)}{Dt} + T(\nabla \cdot v) \right) dV$$

Esta última expresión corresponde precisamente con la tercera ecuación que se planteó anteriormente como fórmula de transporte al considerar el análisis a través de un volumen material (V).

1.12 COORDENADAS CURVILÍNEAS

Coordenadas cilíndricas

Para el caso de una base curvilínea de la forma:



$$P = P(r, \theta, z)$$

Se tiene que:

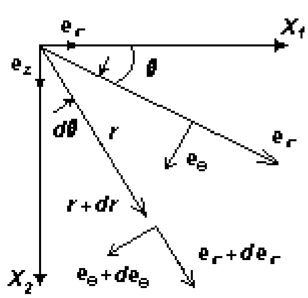
$$r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{x_2}{x_1}$$

Pudiendo definirse los vectores unitarios del sistema coordenado cilíndrico respecto de vectores unitarios de la base rectangular.

$$\hat{e}_r = \cos\theta \hat{e}_1 + \operatorname{sen}\theta \hat{e}_2$$

$$\hat{e}_\theta = -\operatorname{sen}\theta \hat{e}_1 + \cos\theta \hat{e}_2$$



Los vectores base unitarios $\hat{e}_r$ y $\hat{e}_\theta$ varían en dirección cuando la coordenada se modifica, por consecuencia, de las expresiones anteriores, se tiene que:

$$\frac{d\hat{e}_r}{d\theta} = \cos\theta d\hat{e}_1 - \operatorname{sen}\theta \hat{e}_1 + \operatorname{sen}\theta d\hat{e}_2 + \cos\theta \hat{e}_2$$

$$d\hat{e}_1 = d\hat{e}_2 = 0$$

$$d\hat{e}_r = (-\operatorname{sen}\theta \hat{e}_1 + \cos\theta \hat{e}_2) d\theta = \hat{e}_\theta d\theta$$

$$\frac{d\hat{e}_\theta}{d\theta} = -\cos\theta \hat{e}_1 - \operatorname{sen}\theta d\hat{e}_1 - \operatorname{sen}\theta \hat{e}_2 + \cos\theta d\hat{e}_2$$

$$d\hat{e}_\theta = (-\cos\theta \hat{e}_1 - \operatorname{sen}\theta \hat{e}_2) d\theta = -\hat{e}_r d\theta$$

$$\Rightarrow \qquad d\hat{e}_r = \hat{e}_\theta d\theta$$

$$d\hat{e}_\theta = -\hat{e}_r d\theta$$

Sea $r = r\hat{e}_r$ del vector de posición, entonces:

$$dr = (dr)\hat{e}_r + r\,d\hat{e}_r$$

$$\Rightarrow \qquad dr = (dr)\hat{e}_r + rd\theta(\hat{e}_\theta)$$

Ahora, sea $\rho(r,\theta)$ un campo escalar, entonces

$$d\rho = \nabla\rho \cdot dr = \left[a_r\hat{e}_r + a_\theta\hat{e}_\theta\right]\cdot\left[dr\hat{e}_r + rd\theta\hat{e}_\theta\right]$$

donde a_r, a_θ son las componentes del gradiente de ρ ($\nabla\rho$) en las direcciones $\hat{e}_r$ y $\hat{e}_\theta$ respectivamente;

$$d\rho = a_r dr + a_\theta r d\theta \tag{1.7}$$

$$d\rho = \frac{\partial\rho}{\partial r}dr + \frac{\partial\rho}{\partial\theta}d\theta \tag{1.8}$$

Entonces de 1.7 y 1.8 deben representar el mismo resultado para todo incremento dr, $d\theta$

$$a_r = \frac{\partial\rho}{\partial r}; \qquad ra_\theta = \frac{\partial\rho}{\partial\theta}$$

Entonces

$$\nabla\rho = \frac{\partial\rho}{\partial r}e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\rho}{\partial\theta}e_\theta$$

$$\left[\frac{\partial\rho}{\partial r}e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\rho}{\partial r}e_\theta\right]\left[dre_r + rd\theta e_\theta\right] = \frac{\partial\rho}{\partial r}dr + \frac{\partial\rho}{\partial\theta}d\theta$$

De lo antes expuesto se tiene que el gradiente de una función escalar $\rho(r, \theta, z)$ está dado por

$$\nabla\rho = \frac{\partial\rho}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\hat{e}_\theta + \frac{\partial\rho}{\partial z}\hat{e}_z$$

Siguiendo el mismo procedimiento para una función vectorial en coordenadas polares

$$v = v(r,\ \theta) = v_r\,(r,\ \theta)e_r + v_\theta(r,\ \theta)e_\theta$$

$$\Rightarrow \qquad [\nabla v] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta\right) \\ \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right) \end{bmatrix}$$

Por lo que para una función vectorial $v = v(r,\ \theta,\ z)$, su gradiente está definido por

$$\nabla v = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta\right) & \dfrac{\partial v_r}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right) & \dfrac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_z}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_z}{\partial \theta}\right) & \dfrac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\text{div } v = \nabla \cdot v = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right) + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Componentes de la divergencia de un tensor de 2.° orden

La definición de divergencia para un vector arbitrario a

$$(\text{div} T) \cdot a = \text{div}(T^T a) - tr\left((\nabla a) T^T\right)$$

Si $a = \hat{e}_r$, entonces

$$(\text{div} T)_r = \text{div}(T^T \hat{e}_r) - tr\left((\nabla \hat{e}_r) T^T\right)$$

$$T^T \hat{e}_r = T_{rr}\hat{e}_r + T_{r\theta}\hat{e}_\theta$$

$$\operatorname{div}\left(T^T \hat{e}_r\right) = \operatorname{div}\left(\left(T_{rr}\hat{e}_r\right) + \left(T_{r\theta}\hat{e}_\theta\right)\right)$$

$$\operatorname{div}\left(T^T \hat{e}_r\right) = \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + T_{rr}$$

$$tr\left(\nabla \hat{e}_r\right)T^T = \frac{T_{\theta\theta}}{r}$$

$$\therefore \qquad \left(\operatorname{div} T\right)_r = \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r}$$

$$\left(\operatorname{div} T\right)_\theta = \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{T_{r\theta} + T_{\theta r}}{r}$$

Para un tensor $T = T(r, \theta, z; t)$

$$T(r,\theta,z;t) = \begin{bmatrix} T_{rr} & T_{r\theta} & T_{rz} \\ T_{\theta r} & T_{\theta\theta} & T_{\theta z} \\ T_{zr} & T_{z\theta} & T_{zz} \end{bmatrix}$$

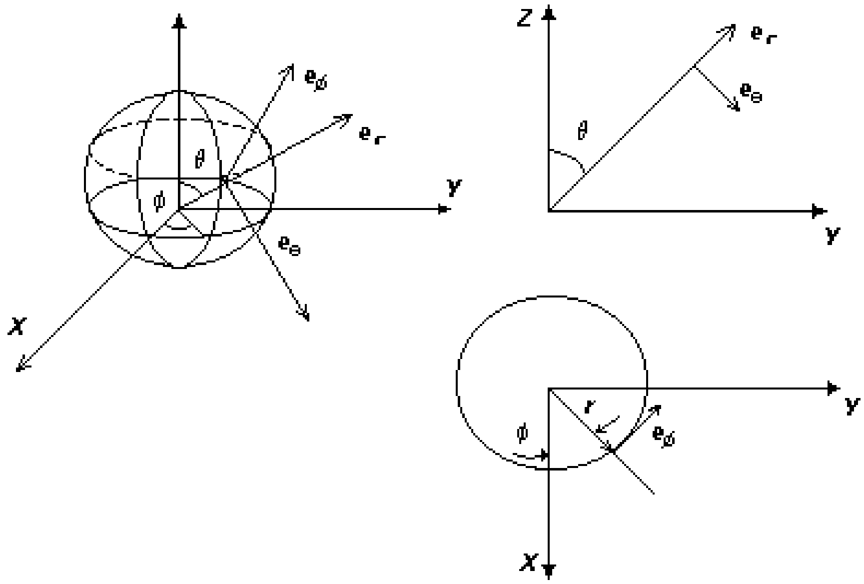
y considerando coordenadas cilíndricas, se tiene que $\nabla \cdot T(r, \theta, z, t)$ está dada por

$$\left(\operatorname{div} T\right)_r = \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z}$$

$$\left(\operatorname{div} T\right)_\theta = \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{T_{r\theta} + T_{\theta r}}{r} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z}$$

$$\left(\operatorname{div} T\right)_z = \frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{zr}}{r}$$

Coordenadas esféricas (r,θ,ϕ)



Las reglas de transformación son

$$r=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{1/2} \quad ; \quad \theta=\tan^{-1}\frac{(x_1^2+x_2^2)}{x_3} \quad ; \quad \phi=\tan^{-1}\left(x_2/x_1\right)$$

El gradiente de una función escalar de la forma $\rho=\rho\left(r,\theta,\phi\right)$ se expresa como

$$\nabla\rho=\frac{\partial\rho}{\partial r}e_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\rho}{\partial\theta}e_\theta+\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial\rho}{\partial\phi}e_\phi$$

Sea $v=v\left(r,\,\theta,\,\phi\right)$ una función vectorial, entonces:

$$\nabla v=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_r}{\partial\theta}-v_\theta\right) & \dfrac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\left(\dfrac{\partial v_r}{\partial\varphi}-v_\phi\,\mathrm{sen}\,\theta\right) \\ \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+v_r\right) & \dfrac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\left(\dfrac{\partial v_\theta}{\partial\phi}-v_\phi\cos\theta\right) \\ \dfrac{\partial v_\phi}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_\phi}{\partial\theta}\right) & \dfrac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\left(\dfrac{\partial v_\phi}{\partial\phi}\right)+\dfrac{v_r}{r}+\dfrac{v_\theta\cot\theta}{r} \end{bmatrix}$$

$$\nabla \times v = \text{rot } v = \left(\frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial \left(v_\phi \operatorname{sen} \theta \right)}{\partial \theta} - \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{e}_r$$

$$+ \left(\frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r v_\phi}{\partial r} \right) \right) \hat{e}_\theta$$

$$+ \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \left(r v_\theta \right)}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) e_\phi$$

$$\nabla \bullet v = \operatorname{div} v = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r}$$

$$= \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \left(r^2 v_r \right)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial \left(v_\theta \operatorname{sen} \theta \right)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$

Para un tensor $T\left(r,\ \theta,\ \phi\right)$ de rango 2

$$T\left(r,\ \theta,\ \phi\right) = \begin{Bmatrix} T_{rr} & T_{r\theta} & T_{r\phi} \\ T_{\theta r} & T_{\theta\theta} & T_{\theta\phi} \\ T_{\phi r} & T_{\phi\theta} & T_{\phi\phi} \end{Bmatrix}$$

$$\left(\operatorname{div} T \right)_r = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \left(r^2 T_{rr} \right)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(T_{r\theta} \operatorname{sen} \theta \right) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial T_{r\phi}}{\partial \phi} - \frac{T_{\theta\theta} + T_{\phi\phi}}{r}$$

$$\left(\operatorname{div} T \right)_\theta = \frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial \left(r^3 T_{\theta r} \right)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(T_{\theta\theta} \operatorname{sen} \theta \right) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial T_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{T_{r\theta} - T_{\theta r} - T_{\phi\phi} \cot \theta}{r}$$

$$\left(\operatorname{div} T \right)_\phi = \frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial \left(r^3 T_{\phi r} \right)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(T_{\phi\theta} \operatorname{sen} \theta \right) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial T_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{T_{r\phi} - T_{\phi r} + T_{\theta\phi} \cot \theta}{r}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. El tensor deformación infinitesimal (ε) se expresa como:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left[B - I\right]$$

donde

$$B = FF^T$$

B : Tensor de deformación Cauchy-Green por izquierda

$$F = I + \nabla_X u$$

F : Gradiente de deformación

$$u_i\left(X, t\right) = u_1\left(X_i, t\right)\hat{e}_1 + u_2\left(X_i, t\right)\hat{e}_2 + u_3\left(X_i, t\right)\hat{e}_3$$

$V_X u$: Gradiente del vector de desplazamientos

Con base en lo antes expuesto, determine el tensor de deformación infinitesimal en función del gradiente del vector desplazamientos ($\nabla_X u$); asimismo, exprese ε_{ij} en notación índice.

SOLUCIÓN

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left[B - I\right]$$

$$B = FF^T;\ F = I + \nabla u$$

$$B = FF^T = \left(I + \nabla u\right) + \left(I + \left(\nabla u\right)^T\right) = I + \left(\nabla u\right)^T + \nabla u + \nabla u\left(\nabla u\right)^T$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left[\nabla u + \left(\nabla u\right)^T\right] + \frac{1}{2}\nabla u\left(\nabla u\right)^T$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial u_i}{\partial X_m}\frac{\partial u_j}{\partial X_m}$$

2. El tensor lagrangiano de deformación (E) se expresa en notación índice como:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_m}{\partial X_i}\frac{\partial u_m}{\partial X_j}\right)$$

Con base en lo antes expuesto, desarrolle las componentes de deformación E_{11}, E_{31}, E_{23}; asimismo, compruebe si en notación general la siguiente expresión es equivalente a:

$$E = \frac{1}{2}\left(\nabla_X u + (\nabla_X u)^T\right) + \frac{1}{2}\left((\nabla_X u)^T\ \nabla_X u\right)$$

SOLUCIÓN

$$E_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1}\right)^2\right]$$

$$E_{31} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1}\right) + \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3}\right)\right\} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3}\right) + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right)\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3}\right) + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1}\right)\left(\frac{\partial u_3}{\partial X_3}\right)\right\}$$

$$E_{23} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3}\right) + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_2}\right)\right\} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3}\right) + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_2}\right)\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3}\right) + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_2}\right)\left(\frac{\partial u_3}{\partial X_3}\right)\right\}$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j}\right) + \left(\frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right)\right\} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u_m}{\partial X_i}\right)\left(\frac{\partial u_m}{\partial X_j}\right)\right\} = \frac{1}{2}\left\{\nabla u + \left(\nabla u^T\right)\right\} + \frac{1}{2}\left(\nabla u^T\right)\nabla u$$

3. Desarrolle la expresión $A_{ik}x_k x_j$. Por facilidad sólo trabaje con los índices $i,\ j$ ¿Cuál es el rango del tensor que describe la expresión anterior?

SOLUCIÓN

$$A_{ik}x_k x_j = B_{ij} \qquad \text{Tensor de rango dos}$$

$$B_{ij} = \begin{bmatrix} A_{1k}x_k x_1 & A_{1k}x_k x_2 & A_{1k}x_k x_3 \\ A_{2k}x_k x_1 & A_{2k}x_k x_2 & A_{2k}x_k x_3 \\ A_{3k}x_k x_1 & A_{3k}x_k x_2 & A_{3k}x_k x_3 \end{bmatrix}$$

4. La rotación entre bases se expresa mediante un tensor ortogonal Q, el cual se define a través de los cosenos directores definidos entre la nueva base (x_i') y la base original (x_j), de tal forma que:

$$Q_{ij} = \cos x_i' x_j$$

y considerando que $\sum \cos^2 x_i' x_j = 1$, verifique si los valores que se presentan en la siguiente tabla permiten describir la rotación de los ejes:

	$\hat{e}_1$	$\hat{e}_2$	$\hat{e}_3$
$\hat{e}_1'$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{6}{7}$
$\hat{e}_2'$	$\frac{3}{7}$	$-\frac{6}{7}$	$\frac{2}{7}$
$\hat{e}_3'$	-	-	-

Asimismo, determine los cosenos directores que permiten definir a e_3'

SOLUCIÓN

Cosenos directores

$$Q_{ij} = \cos x_i' x_j$$

De $\quad \sum \cos^2 x_i' x_j = 1$

$$\left(\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{7}\right)^2 = \frac{4}{49} + \frac{9}{49} + \frac{36}{49} = 1$$

$\Rightarrow$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(-\frac{6}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{9}{49} + \frac{36}{49} + \frac{4}{49} = 1$$

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} \end{vmatrix} = \left(\frac{6+36}{49}\right)\hat{e}_1 + \left(\frac{18-4}{49}\right)\hat{e}_2 + \left(\frac{-12-9}{49}\right)\hat{e}_3$$

Por lo que el vector de cosenos directores se expresa

$$Q_{3i} = \frac{6}{7}\hat{e}_1 + \frac{2}{7}\hat{e}_2 - \frac{3}{7}\hat{e}_3$$

	$\hat{e}_1$	$\hat{e}_2$	$\hat{e}_3$
$\hat{e}_1$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{6}{7}$
$\hat{e}_2$	$\frac{3}{7}$	$-\frac{6}{7}$	$\frac{2}{7}$
$\hat{e}_3$	$\frac{6}{7}$	$\frac{2}{7}$	$-\frac{3}{7}$

5. Si v es una función vectorial $v(x_1, x_2, x_3)$, determine:

   a) ∇v

   b) $\nabla \cdot v$

   c) $\nabla \times v$

   d) $\nabla \cdot (\nabla v)$

SOLUCIÓN

a)

$$\nabla v = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} \end{bmatrix}$$

b)

$$\nabla \cdot v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

c)

$$\nabla \times v = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right)\hat{e}_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right)\hat{e}_2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)\hat{e}_3$$

d)

$$\nabla \cdot (\nabla v) = \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{\partial v_n}{\partial x_m} \right) = \frac{\partial}{\partial x_m} V_{nm} = \frac{\partial^2 v_n}{\partial x_m \partial x_m}$$

$$= \left[\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \right) \right]\hat{e}_1 + \left[\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} \right) \right]\hat{e}_2$$

$$+ \left[\left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} \right) \right]\hat{e}_3$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Desarrolle $a_{ij} x_j = b_i$

2. Desarrolle $\sum_{i=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} a_{ij} b_{ij}$

3. Desarrolle $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=r}^{3} a_{ij} b_{ij} c_{ki}$

4. Determine si se cumple que $a_{ij} b_{ij} = a_{ji} b_{ji}$

5. Verifique si $\left(a_{ijk} + a_{jki} + a_{kij}\right) x_i x_j x_k = 3a_{jik} x_i x_j x_k$

6. Verifique si $\det a_{ij} = \det a_{ji} = \det(a)^T$

7. El tensor lagrangiano de deformación (E) se expresa en notación índice como:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_m}{\partial X_i}\frac{\partial u_m}{\partial X_j}\right)$$

   Con base en lo antes expuesto, desarrolle las componentes de deformación E_{33}, E_{31}, E_{23}

8. Desarrolle la expresión $A_{im} x_n x_j$. Por facilidad sólo trabaje con los índices $i,\ j$, ¿cuál es el rango del tensor que describe la expresión anterior?

9. Explique lo que es un tensor. ¿Qué representa su rango? ¿Cuántos elementos se necesitan para definirlos?

   Con relación a las cantidades físicas asociadas a un medio continuo, indique cuando menos una que se represente con un tensor de rango:

   - Cero
   - Uno

- Dos
- Tres

10. Si T_{ij} representa un tensor de 2° orden, n_i es uno de primer orden, λ y α representan constantes. Entonces escriba en forma desarrollada la siguiente expresión:

$$\alpha T_{ij} n_j - \lambda n_i = 0$$

Asimismo, verifique la validez de la siguiente expresión:

$$\alpha T_{ij} n_j - \lambda n_i = 0 = \left(T_{ij} - \frac{\lambda}{\alpha} \delta_{ij} \right) n_j$$

11. Desarrolle la siguiente expresión:

$$T_{ij} = \lambda E_{ii} \delta_{ij} + 2\mu E_{ij}$$

12. Verifique si dado $T_{ij} = 2\mu E_{ij} + \lambda(E_{kk})\delta_{ij}$, y si $W = \frac{1}{2} T_{ij} E_{ij} \Rightarrow W = \mu E_{ij} E_{ij} + \frac{\lambda}{2}(E_{kk})^2$

13. ¿Qué se deberá cumplir para que $a_{ij} x_i x_j = 0$ para toda x_i?

14. Aplicando la identidad $\varepsilon_{ijm}\varepsilon_{klm} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$ verifique si $a \times (b \times c) = (a \bullet c) b - (a \bullet b) c$

15. Si $a_{ij} = a_{ji}$ y $b_{ij} = \frac{1}{2}(c_{ij} + c_{ji})$, verifique que $a_{ij} b_{ij} = a_{ij} c_{ij}$

16. ¿Cuáles de las siguientes expresiones tienen el mismo significado?

$$a_{ij} b_j,\ a_{rs} b_s,\ a_{pq} b_p,\ a_{ij} b_i b_j,\ a_{pq} b_p b_q,\ a_{sr} b_s b_r$$

17. Si $a_{ij} = \frac{1}{2}\left(b_{ij} + b_{ji}\right)$ y $c_{ij} = \frac{1}{2}\left(b_{ij} - b_{ji}\right)$ verifique que $a_{ij} c_{ij} = 0$

18. Verifique si $\delta_{ij}\delta_{mj} = 3,\quad \delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{ik} = 3,\quad \delta_{jk}\delta_{jm}\delta_{ij} = \delta_{km}$

19. Si $T_{ij} = T_{ji}$ determine si $t_k = 0$ para $\varepsilon_{ijk} T_{ij} = t_k$, ¿ahora bien, la misma relación se cumple para $T \neq T^T$?

ε_{ijk} representa al permutador, de tal forma que si la permutación es natural $[1 \to 2 \to 3] \Rightarrow \varepsilon_{ijk} = 1$; si es antinatural $[3 \to 2 \to 1] \Rightarrow \varepsilon_{ijk} = -1$ y si los índices se repiten $\Rightarrow \varepsilon_{ijk} = 0$.

20. Demuestre si $a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c$

21. Se presentan los siguientes tensores:

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad a_i = [1, 2, 3]$$

Determine:

a) $S_{ij} S_{ij}$

b) $a_m a_m$

c) $S_{ij} a_j$

d) S_{ii}

e) $S_{mn} a_n a_m$

22. Demuestre si $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ si y sólo si $b \times (c \times a) = 0$

23. Demuestre si para tensores arbitrarios A y B, y vectores a, b se cumple que:

a) $(A \cdot a) \cdot (B \cdot b) = a \cdot \left(A^T \cdot B\right) \cdot b$

b) $b \times a = \frac{1}{2}(B - B^T) \cdot a$, sí $2b_i = \varepsilon_{ijk} B_{kj}$

c) $a \cdot A \cdot b = b \cdot A^T \cdot a$

24. Demuestre si existe correspondencia entre las ecuaciones indicadas con subíndices y las matriciales

$$D_{ij} = B_{ji} \qquad [D] = [B]^T$$

$$b_i = B_{ij} a_j \qquad [b] = [B][a]$$

$$D_{ik} = B_{ij} C_{kj} \qquad [D] = [B][C]$$

25. ¿Qué representan los eigenvalores y los eigenvectores de un tensor?

26. Demuestre que para un tensor ortogonal $QQ^T = Q^T Q = I$

27. ¿Qué caracteriza a un tensor isotrópico?

28. Para la díada que se presenta, determine:

a) Eigenvalores.

b) Matriz de transformación Q de la base original a la definida por las direcciones de los valores característicos.

c) ¿Qué características deberá cumplir la matriz de transformación Q? Compruebe esto.

d) Compruebe que la matriz Q permite transformar de la base original a la base nueva.

e) La componente esférica y desviadora del tensor

$$T = \begin{pmatrix} 20 & 4.9 & 0 \\ 4.9 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

29. Sea T una transformación la cual al operar el vector a se define como $Ta = \frac{a}{|a|}$, donde $|a|$ es el módulo del vector a. Verifique si T representa una transformación lineal.

30. Sean T y S dos tensores, verifique si se cumplen las siguientes afirmaciones:

a) T^T es un tensor

b) $T^T + S^T = (T + S)^T$

c) $(TS)^T = T^T + S^T$

31. Si $\hat{e}_i$ y $\hat{e}'_i$ son los vectores unitarios que corresponden a 2 sistemas coordenados cartesianos, donde $\hat{e}'_i$ corresponde con la rotación de $\hat{e}_i$, desarrolle el sistema de ecuaciones que permiten transformar $\hat{e}'_i$ a partir de $\hat{e}_i$ $(\hat{e}'_i = Q_{ni}\hat{e}_n)$, donde Q_{ij} es la matriz de transformación entre $\hat{e}_i$ y $\hat{e}'_i$.

32. Un sistema de ejes coordenados cartesianos x'_1, x'_2, x'_3 es obtenido por la rotación de un ángulo θ alrededor del eje x_3. Con base en lo anterior, defina las componentes del vector $v = \left\{ \frac{X_1^2 X_2}{X_3^2}\hat{e}_1 + \frac{X_3^2}{X_1}\hat{e}_2 + X_2\hat{e}_3 \right\}\alpha$ en la nueva base cuyos vectores unitarios son $\hat{e}'_i$.

33. ¿Qué es un tensor ortogonal? ¿Qué propiedades tienen estos tensores?

34. Demuestre que un tensor de segundo orden se puede descomponer en un tensor simétrico y en otro antisimétrico. ¿Cuántos términos linealmente independientes se requieren para definir a cada uno de estos nuevos tensores?

35. Determine los eigenvalores y eigenvectores asociados a

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 4 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{2} & 6 \end{pmatrix}$$

36. Determine los valores principales de

$$N_{ij} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 0 \\ 8 & 11 & -\sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & 10 \end{pmatrix}$$

37. El estado de esfuerzos T_{ij} en un punto de un MC está dado por:

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 30 & 8 & 10 \\ 8 & 20 & 0 \\ 10 & 0 & -15 \end{pmatrix} \quad \text{MPa}$$

a. Determine el vector de esfuerzos t_i en dicho punto para un plano $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 15$, el cual pasa por el punto (3, 3, 3).

b. Determine la magnitud del esfuerzo normal $\sigma_N = t_i n_i$ y cortante $\sigma_c = \tau_c = \left(|t|^2 - \sigma_n{}^2\right)^{1/2}$ en dicho plano

c. Determine los esfuerzos principales.

d. ¿El siguiente tensor de esfuerzos será equivalente?

$$T'_{ij} = \begin{pmatrix} 50 & -20 & 10 \\ -20 & -5 & 14 \\ 10 & 14 & -10 \end{pmatrix}$$

38. Determine los eigenvalores y los eigenvectores asociados al siguiente tensor:

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 45 & 8 & -15 \\ 8 & 10 & 20 \\ -15 & 20 & -5 \end{pmatrix}$$

39. Determine los eigenvalores y los eigenvectores asociados al siguiente tensor:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 25 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

40. La ecuación característica del sistema $T_{ij} n_j = \lambda n_i \Rightarrow \left(T_{ij} - \lambda \delta_{ij}\right) n_j = 0$ presenta la solución trivial $n_j = 0$ y la no trivial $\left|T_{ij} - \lambda \delta_{ij}\right| = 0$, siendo ésta una ecuación cúbica en λ, de la forma:

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0$$

demuestre que

$$I_1 = T_{ii} = \text{ traza del tensor } T_{ij}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left(T_{ii} T_{jj} - T_{ij} T_{ji}\right)$$

$$I_3 = \det\left[T_{ij}\right] = \frac{1}{6}\left(2 T_{ij} T_{jk} T_{ki} - 3 T_{ji} T_{ji} T_{kk} + T_{ii} T_{jj} T_{kk}\right)$$

41. Los ángulos entre el sistema de referencia original y el nuevo sistema coordenado están, posiblemente, dados por los datos de la tabla. Compruebe si este conjunto de ángulos representa el tensor de transformación entre los sistemas $\hat{e}_i$ y $\tilde{e}'_i$

	X_1	X_2	X_3
X'_1	90°	135°	45°
X'_2	135°	90°	45°
X'_3	45°	45°	90°

Si el desplazamiento se expresa en el sistema original como

$$\bar{u} = \frac{x_1 x_2}{x_3}\hat{e}_1 + \frac{x_2^2}{x_1}\hat{e}_2 + x_3 \mathrm{Ln}\frac{x_2}{x_1}\hat{e}_3$$

a) Defina el desplazamiento con relación a la nueva base.
b) Defina el tensor de deformación en la nueva base, así como en la base original.

43. El tensor lagrangiano de deformación E se expresa en notación general como

$$E = \frac{1}{2}\left(\nabla_X u + \left(\nabla_X u\right)^T\right) + \frac{1}{2}\left(\left(\nabla_X u\right)^T \nabla_X u\right)$$

Desarrolle los términos $E_{rr},\, E_{zr},\, E_{\theta\theta}$ si $u = u\left(r,\theta,z\right)$

44. El tensor Q define una transformación entre ejes. Si el cambio de base se produce al rotar 30° al sistema alrededor del eje x_1, determine Q. Asimismo compruebe que se trata de un tensor ortogonal.

45. Calcule $\operatorname{div} T$ para el siguiente campo tensorial en coordenadas esféricas:

$$T_{rr} = A - \frac{2B}{r^3}, \quad T_{\theta\theta} = T_{\phi\phi} = A + \frac{B}{r^3}, T_{r\theta} = T_{\phi r} = T_{\theta\phi} = 0$$

46. Considere el vector $\bar{v} = \eta\left(x_1^2 e_1 + x_3^2 e_2 + x_2^2 e_3\right)$, para el punto $(1,\,1,\,0)$ determine:

a) $\nabla\bar{v}$

b) $\left(\nabla\bar{v}\right)\bar{v}$

c) $\operatorname{div}\bar{v}$

47. Para una rotación de $\frac{\pi}{6}$ sobre el eje x_3, determine el estado de esfuerzos para esta nueva base.

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

48. Si ρ, v, T representan tensores de rango cero, uno y dos, respectivamente, defina en coordenadas rectangulares, esféricas y cilíndricas lo siguiente:

a) $\nabla\rho$

b) ∇v

c) $\nabla \cdot T$

49. Calcule la $\operatorname{div}\bar{u}$ para los siguientes campos vectoriales (definidos estos campos en coordenadas cilíndricas)

a. $u_r = u_\theta = 0, \; u_z = A + Br^2$

b. $u_r = \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}, \; u_\theta = 0, \; u_z = 0$

c. $u_r = \frac{\operatorname{sen}\theta}{r^2}, \; u_\theta = -\frac{\cos\theta}{r^2}, \; u_z = 0$

50. Si λ es una función escalar de la forma $\lambda(r,\theta,z)$, determine $\nabla\lambda$.

51. Si v es una función vectorial $v(r,\theta,z)$, determine:

a. ∇v

b. $\operatorname{div} v$

c. $\operatorname{rot} v$

d. $\operatorname{div}(\nabla v)$

52. Si λ es una función escalar de la forma $\lambda(r,\theta,\phi)$, determine $\nabla\lambda$.

53. Si v es una función vectorial $v(r,\theta,\phi)$, determine:

a. ∇v

b. $\operatorname{div} v$

c. $\operatorname{rot} v$

d. $\operatorname{div}(\nabla v)$

54. Para $u = u(r,\theta,z)$, donde u está definida como:

a. $u_r = \frac{r}{2}\operatorname{sen}\theta$, $u_\theta = \frac{r}{2}\cos\theta$, $u_z = 0$

b. $u_r = \frac{\operatorname{sen}\theta}{r^2}$, $u_\theta = \frac{\cos\theta}{r^2}$, $u_z = 0$

Determine, para cada inciso, $\nabla u, \nabla \bullet u, \nabla \times u$

55. Calcule $\nabla u(r,\theta,\phi)$ para

$$u_r = Ar + \frac{B}{r^2} \quad , \quad u_\theta = u_\phi = 0$$

56. Sea T un tensor de segundo orden $T = T(r,\theta,z)$, tal que

$$T_{rr} = \frac{Az}{R^3} - \frac{3r^2 z}{R^5}, \; T_{\theta\theta} = \frac{Az}{R^3}, \; T_{zz} = -\left[\frac{Az}{R^3} + \frac{3z^3}{R^5}\right], \; T_{rz} = -\left[\frac{A}{R^3} + \frac{3rz^2}{R^5}\right]$$

$T_{z\theta} = T_{r\theta} = 0$, donde $R^2 = r^2 + z^2$

Determine $\nabla \cdot T$

57. Para $T(r,\theta,z)$, determine $\operatorname{div} T$

$$T_{rr} = A + \frac{B}{r^2}, \; T_{\theta\theta} = A - \frac{B}{r^2}, \; T_{zz} = C$$

$$T_{r\theta} = T_{rz} = T_{\theta z} = 0$$

58. Para $T(r,\theta,\phi)$, determine $\operatorname{div} T$

$$T_{rr} = A + \frac{2B}{r^3}, \; T_{\theta\theta} = T_{\phi\phi} = A + \frac{B}{r^3}$$

$$T_{\theta r} = T_{\phi r} = T_{\phi\theta} = 0$$

59. Considerando que $T_{ij} = \frac{1}{2}\left(S_{ij} + S_{ji}\right);\ y \quad R_{ij} = \frac{1}{2}\left(S_{ij} - S_{ji}\right)$ demuestre que:

$$T_{ij} = T_{ji} \quad , \quad R_{ij} = -R_{ji} \quad , \quad S_{ij} = T_{ij} + R_{ij}$$