



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE INGENIERÍA EN CIENCIAS DE LA TIERRA

***“ANÁLISIS DE PRUEBAS DE PRESIÓN A
PRESIÓN CONSTANTE”***

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

INGENIERA PETROLERA

P R E S E N T A:

LIDIA LUCELY MENESES PÁEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. FERNANDO SAMANIEGO VERDUZCO

CO-DIRECTORES:

M.C. MICHAEL PRATS

DR. HEBER CINCO LEY



MÉXICO, D. F., CIUDAD UNIVERSITARIA, 2012



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

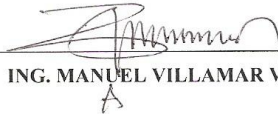
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE INGENIERÍA EN CIENCIAS DE LA
TIERRA

Aceptación de Trabajo Escrito

MTRO. JOSÉ GONZALO GUERRERO ZEPEDA
DIRECTOR DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA
DE LA U.N.A.M.
Presente.

En relación con el Examen Profesional de **MENESES PAEZ LIDIA LUCELY**, registrada con número de cuenta 094300673 en la carrera de **INGENIERÍA PETROLERA**, del cual hemos sido designados sinodales, nos permitimos manifestarle la aceptación del trabajo escrito desarrollado por la citada alumna.


Atentamente,


ING. MANUEL VILLAMAR VIGUERAS


DR. FERNANDO SAMANIEGO
VERDUZCO

FECHA DE ACEPTACIÓN: Abn-11-12

FECHA DE ACEPTACIÓN: _____


DR. RAFAEL RODRIGUEZ NIETO


ING. MARIO BECERRA ZEPEDA

FECHA DE ACEPTACIÓN: _____

FECHA DE ACEPTACIÓN: _____


ING. ISRAEL CASTRO HERRERA

FECHA DE ACEPTACIÓN: 9/Abr/2012

FECHA DE EMISIÓN : 30 de Marzo de 2012

ÍNDICE

	<i>Pág.</i>
Índice.	i
Lista de Figuras.iii
Lista de Tablas.	viii
Resumen.	1
Introducción	3
Capítulo 1. Revisión Bibliográfica	7
1.1. Clegg (1967)	8
1.2. Ehlig-Economides y H. J. Ramey Jr. (1981)	11
1.3. Kutasov (1989)	17
Capítulo 2. Desarrollo del Modelo de Solución y Evaluación	26
Incremento de la presión en un yacimiento infinito que produjo a presión constante27
Capítulo 3. Análisis de Resultados.	33
3.1. Clegg (1967)	34
3.2. Ehlig-Economides y H. J. Ramey Jr. (1981)	37
3.3. Kutasov (1989)	40
3.4. Prats (2006)	41
3.5. Comparaciones	49
3.6. Aplicación en campo	52
3.7. Aplicación en campo con permeabilidad muy pequeña.	58

3.8. Método de Horner para el análisis de la presión de incremento	63
3.9. Función Derivada.	67
Capítulo 4. Conclusiones	76
Apéndices	
Apéndice A	80
Apéndice B	83
Apéndice C	85
Apéndice D	87
Apéndice E.	88
Apéndice F	90
Apéndice G	92
Apéndice H	95
Apéndice I	98
Nomenclatura	115
Referencias Bibliográficas.	118

Lista de Figuras

Figura 1.	Incremento de Presión: Gasto constante y Presión constante.	11
Figura 2.	Comportamiento de la presión de incremento para un pozo que produjo a presión constante para diferentes tiempos de producción, obtenido empleando la solución por Clegg	36
Figura 3.	Comportamiento de la presión de incremento para un pozo que produjo a presión constante para diferentes tiempos de producción, obtenido empleando la solución de Clegg.	37
Figura 4.	Comportamiento de la presión de incremento para un pozo que produjo a presión constante para diferentes tiempos de producción, obtenido empleando la solución de Ehlig-Economides y Ramey.	39
Figura 5.	Comportamiento de la presión de incremento para un pozo que produjo a presión constante para diferentes tiempos de producción, obtenido empleando la solución de Kutasov.	40
Figura 6.	Comportamiento de la presión de incremento para un pozo que produjo a presión constante para diferentes tiempos de producción, obtenido empleando la solución de Kutasov.	41
Figura 7.	Comportamiento de la presión de incremento para un pozo que produjo a presión constante para $t_{pD} = 10^4$, obtenido por medio de método de Simpson.	44

Figura 8.	Comportamiento de la presión de incremento para un pozo que produjo a presión constante para diferentes tiempos de producción, obtenido por medio de la solución de Prats.	47
Figura 9.	Comportamiento de la presión de incremento para un pozo que produjo a presión constante para diferentes tiempos de producción, obtenido por medio de la solución de Prats con límites de integración pequeños.	48
Figura 10.	Comportamiento de la presión de incremento para un pozo que produjo a presión constante para diferentes tiempos de producción, obtenido por medio de la solución de Prats.	49
Figura 11.	Comportamiento de la presión de incremento para un pozo que produjo a presión constante para un tiempo de producción de $t_{pD} = 10^4$, para Clegg, Kutasov, Ehlig Economides y Prats.	50
Figura 12.	Comportamiento de la presión de incremento para un pozo que produjo a presión constante para un tiempo de producción de $t_{pD} = 10^5$, para Clegg, Kutasov, Ehlig Economides y Prats.	50
Figura 13.	Comportamiento de la presión de incremento para un pozo que produjo a presión constante para un tiempo de producción de $t_{pD} = 10^6$, para Clegg, Kutasov, Ehlig Economides y Prats.	51
Figura 14.	Comportamiento de la presión de incremento para un pozo que produjo a presión constante, para un tiempo de producción de $t_{pD} = 10^7$, para Clegg, Kutasov, Ehlig Economides y Prats.	51

Figura 15.	Comportamiento de la presión de incremento para un pozo que produjo a presión constante para un tiempo de producción de $t_{pD} = 10^8$, para Clegg, Kutasov, Ehlig Economides y Prats.	52
Figura 16.	Grafica de Horner con datos de una prueba de presión usando tiempos de flujo reales y corregidos.	54
Figura 17.	Comportamientos de la presión de incremento para un pozo que produjo a presión constante por 1 mes, obtenidos por medio de las soluciones de Clegg, Kutasov, Ehlig Economides y Prats.	56
Figura 18.	Comportamientos de la presión de incremento para un pozo que produjo a presión constante por 6 meses, obtenidos por medio de las soluciones de Clegg, Kutasov, Ehlig Economides y Prats.	57
Figura 19.	Comportamientos de la presión de incremento para un pozo que produjo a presión constante por 1 año, obtenidos por medio de las soluciones de Clegg, Kutasov, Ehlig Economides y Prats.	57
Figura 20.	Comportamientos de la presión de incremento para un pozo que produjo a presión constante por 1 mes, con $k = 0.1 \text{ md}$ obtenidos por medio de las soluciones de Clegg, Kutasov, Ehlig Economides y Prats.	60
Figura 21.	Comportamientos de la presión de incremento para un pozo que produjo a presión constante por 1 mes, con $k = 0.1 \text{ md}$ obtenidos por medio de las soluciones de Clegg, Kutasov, Ehlig Economides y Prats con límites pequeños.	60

Figura 22.	Comportamientos de la presión de incremento para un pozo que produjo a presión constante por 6 mes, con $k = 0.1 \text{ md}$ obtenidos por medio de las soluciones de Clegg, Kutasov, Ehlig Economides y Prats.	61
Figura 23.	Comportamientos de la presión de incremento para un pozo que produjo a presión constante por 6 mes, con $k = 0.1 \text{ md}$ obtenidos por medio de las soluciones de Clegg, Kutasov, Ehlig Economides y Prats con límites pequeños.	61
Figura 24.	Comportamientos de la presión de incremento para un pozo que produjo a presión constante por 1 año, con $k = 0.1 \text{ md}$ obtenidos por medio de las soluciones de Clegg, Kutasov, Ehlig Economides y Prats.	62
Figura 25.	Comportamientos de la presión de incremento para un pozo que produjo a presión constante por 1 año, con $k = 0.1 \text{ md}$ obtenidos por medio de las soluciones de Clegg, Kutasov, Ehlig Economides y Prats con límites pequeños.	62
Figura 26.	Comportamiento del gasto de producción contra el tiempo de producción en un pozo que produce a presión constante.	64
Figura 27.	Comportamiento de la inversa del gasto en un pozo que produce a presión constante en un yacimiento infinito.	65
Figura 28.	Comportamiento de la presión de Horner para un pozo que produjo a presión constante en un yacimiento infinito.	66

Figura 29.	Comportamiento analítico y numérico de la función derivada de la solución de Prats para $t_{pD} = 10^8$ y $\Delta t_{wsD} = 10^6$.	71
Figura 30.	Comportamiento de la función derivada de la solución de Prats para $t_{pD} = 10^8$ y $\Delta t_{wsD} = 10^7$.	72
Figura 31.	Comportamiento de la función derivada de la solución de Prats para $t_{pD} = 10^8$ y $\Delta t_{wsD} = 10^7$ con el factor de Horner.	73
Figura 32.	Comportamiento de la función derivada de las solución de Clegg, Kutasov y Prats para $t_{pD} = 10^8$ y $\Delta t_{wsD} = 10^6$ con el factor de Horner.	74
Figura 33.	Comportamiento de la función derivada de las solución de Clegg, Kutasov y Prats para $t_{pD} = 10^8$ y $\Delta t_{wsD} = 10^5$ con el factor de Horner.	75
Figura 34.	Funciones de Bessel de primera clase.	105
Figura 35.	Funciones de Bessel de segunda clase.	108
Figura 36.	Funciones Modificadas de Bessel de primera clase.	111
Figura 37.	Funciones Modificadas de Bessel de segunda clase.	113

Lista de Tablas

Tabla 1.	Valores obtenidos para diferentes l_{max} e i_{max} para un $t_{pD} = 10^4$.	43
Tabla 2.	Valores obtenidos para diferentes l_{max} e i_{max} para un $t_{pD} = 5000$.	43
Tabla 3.	Límites de las integrales para la solución de Prats.	46
Tabla 4	Historia del producción del pozo A	53
.		
Tabla 5.	Tiempo de producción adimensional con $k = 92.5 \text{ md}$.	55
Tabla 6.	Limites de las integrales para $k = 92.5 \text{ md}$.	56
Tabla 7.	Tiempo de producción adimensional con $k = 0.1 \text{ md}$.	58
Tabla 8.	Limites empleados de las integrales en la Ec. 2.23	58

RESUMEN

La literatura publicada hasta ahora, relacionada con el análisis del comportamiento de presión transitoria de pozos considera una variedad de condiciones de frontera internas y externas para el desarrollo de soluciones. La mayoría de esta literatura supone que el pozo produce ya sea a gasto constante o a una serie de gastos constantes. Solo unos cuantos autores han presentado soluciones para analizar el comportamiento del flujo de pozos que han producido a presión constante, particularmente el comportamiento posterior de incremento de presión. La falta de información sobre este tema no se debe a la importancia reducida de este problema o la falta de aplicación en el campo de la ingeniería petrolera, sino principalmente a la dificultad de obtener una expresión analítica simple, que describa el comportamiento de la presión de incremento en el pozo después de un periodo de producción a presión constante.

El objetivo de esta tesis es presentar un análisis de los distintos métodos en la literatura y el desarrollo y evaluación de una solución analítica de una nueva metodología para este tipo de condiciones presentada por Prats.

Ehlig-Economides utilizó el principio de superposición para generar una solución exacta para el incremento de presión. Clegg muestra que una expresión para la inversión aproximada de la Transformada de Laplace, desarrollada para problemas viscoelásticos, puede aplicarse a problemas de flujo radial de un fluido Newtoniano, proporcionando soluciones analíticas simples para problemas a presión constante. Kutasov utilizó el método de Horner, el cual es muy empleado para interpretar los datos de presión contra tiempo registrado en las pruebas de incremento de presión para pozos que producen a gasto constante. Prats presentó soluciones para el comportamiento de un pozo que produce a presión constante y también, para el caso en

el que posteriormente el pozo se cierra; el autor aplicó la Transformada de Laplace así como posteriormente su inversa para obtener la solución.

En esta tesis se evalúan cada una de las soluciones presentadas por los autores antes mencionados para analizar el comportamiento de la distribución de presión durante una prueba de incremento de presión, efectuada posteriormente a un periodo de producción a presión constante.

INTRODUCCIÓN

Se han desarrollado múltiples soluciones de la ecuación de difusividad para pozos con producción a gasto constante, pero solo se dispone de un número reducido para pozos que producen a presión constante. El análisis de incremento de presión generalmente asume que el pozo produce a gasto constante, o en una serie de gastos constantes discretos antes del cierre. La falta de esfuerzos de investigación en esta área del análisis de presión no es debido a la importancia al problema o a la falta de aplicación a la ingeniería petrolera, sino principalmente a la dificultad de obtener una expresión analítica simple para describir el comportamiento del incremento de presión en el pozo, posterior a la producción a presión constante. El problema matemático es, principalmente, la dificultad del manejo en el cambio de la condición de la frontera interna cuando el flujo del pozo se cierra, cambiando de la condición Dirichlet a la condición Newman. Este problema no ocurre en el caso de flujo a gasto constante, en que las ecuaciones para el incremento de presión pueden obtenerse directamente usando el principio de superposición. De hecho, la solución de un pozo que produce a un gasto constante antes del cierre se realiza por consideraciones teóricas.

Considerando las soluciones disponibles para flujo a gasto constante, podría ser ventajoso tener un método para convertir estas soluciones a soluciones para flujo a presión constante. Un método para realizar esta conversión es a través del método de superposición de incrementos de gastos en la producción en función de la presión, pero requiere un esfuerzo computacional extenso y cuidado considerable en la formulación del algoritmo, además, porque un número pequeño de incrementos a tiempos cortos da lugar en un porcentaje alto de error en la precisión de los resultados mientras que a tiempos largos se requiere un número mayor de cálculos por cada incremento, lo que aumenta y limita el rango de efectividad de este método.

La producción a presión constante resulta en un gasto transitorio del pozo. El análisis del incremento de presión posterior a un flujo transitorio en que el pozo ha producido a presión constante es complicado por el cambio en la condición de frontera de producción a presión constante (tipo Dirichlet) a gasto cero (tipo Newman). Por eso, los métodos desarrollados para el análisis del incremento o decremento para producción a gasto constante no son válidos para una producción a presión constante. La mayoría de los métodos existentes para el análisis de incremento de presión de pozos con una historia de producción a presión constante son empíricos. Pocos están basados en teorías. Por lo tanto, hay necesidad de una investigación detallada para el análisis del comportamiento del incremento de la presión posterior de una producción a presión constante. El análisis del incremento de presión, frecuentemente proporciona información útil acerca del yacimiento y del pozo.

El uso de la transformada de Laplace en muchas soluciones de problemas de flujo ha proporcionado un gran número de soluciones exactas, pero para flujo radial estas soluciones están expresadas por integrales de variables complejas o series infinitas, por lo que su aplicación directa a los problemas de campo es difícil. Para el caso de producción a presión constante, las soluciones aproximadas disponibles son válidas solo para tiempos largos.

Algunos autores han realizado trabajos o investigaciones para obtener soluciones para el caso de pozos que producen a presión constante. La primera publicación de la aplicación del análisis del incremento de presión para pozos que producen a presión constante antes del cierre fue realizada por **Jacob y Lohman (1952)**. La solución a gasto transitorio ignora los efectos y asigna valores muy altos para el flujo de gasto durante el periodo de flujo temprano. Sus graficas de decremento contra el tiempo total (producción, $t_p + \text{incremento}$, Δt_{wsD}), dividido por el tiempo de cierre resulta en una línea recta semilogarítmica. La permeabilidad de la formación se calculó con la pendiente de la porción recta semilogarítmica correspondiente al flujo radial usando el gasto promedio durante el periodo anterior inmediato de flujo. El valor

calculado de esta forma coincidió con valores de transmisibilidad determinados por graficas de curvas tipo de datos del gasto transitorio del periodo flujo, para varios pozos en los que se realizaron pruebas. **Clegg (1967)** demostró que métodos de inversión aproximada para la Transformada de Laplace puede emplearse para determinar soluciones para el flujo de pozos que producen a presión constante. Con esta aproximación se tienen tres limitantes principales para el uso del método desarrollado: primero la Transformada de Laplace de la solución a gasto constante es necesaria y esto frecuentemente requiere una integración numérica desde formas analíticas que no existen para todos los problemas; segundo, dos funciones diferentes pueden ser idénticas para un mismo rango de tiempo, pero tiene diferentes Transformadas de Laplace; tercero, es difícil evaluar los errores incurridos con esta aproximación. Finalmente los métodos aplicados por Clegg solo se aplican a yacimientos infinitos.

Un método alternativo para obtener soluciones para flujo a presión constante fue usado por **Juan (1977)**. El desarrolló un algoritmo para derivar soluciones a presión constante a partir de soluciones a gasto constante, usando el método de superposición. Esta derivación no requirió el uso de la Transformada de Laplace. **Cox (1979)**, sugirió un procedimiento para analizar el comportamiento del incremento de presión de un pozo que produce a presión constante, similar al que se usó para el caso de flujo a gasto constante. Este tipo de problema se resolvió tratando los cambios continuos como una secuencia discreta en los gastos, y después aplicó el principio de superposición. La información que requiere este procedimiento frecuentemente no está disponible para este tipo de análisis.

Uraiet y Raghavan (1980) estudiaron el comportamiento de la presión durante el periodo de incremento, incluyendo los efectos del tiempo de producción antes del incremento, la naturaleza de la condición de frontera externa (cerrada y presión constante), daño alrededor del pozo y efecto de almacenamiento. Todos los resultados en este estudio se obtuvieron por un modelo numérico, desarrollado empleando el método de diferencias finitas. **Ehlig-Economides y Ramey (1981)** proporcionaron una solución para el incremento de presión después de un periodo de producción a presión

constante, derivada del teorema de superposición en el tiempo de gastos continuamente variables antes del cierre. Los resultados indican que una modificación para el método de Horner proporciona una determinación teórica correcta de la permeabilidad del yacimiento y de la presión estática.

Kutasov (1984) determinó una ecuación aproximada para la caída de presión en el yacimiento al tiempo $t = t_p$ (tiempo de producción), la cual se empleó como una distribución de presión en el área de drene del pozo antes de su cierre. Para determinar el incremento de presión después del periodo de producción usó la solución para la ecuación de difusividad. **Kutasov (1989)** presentó una solución analítica basada en el método de Horner que describe el incremento de presión para pozos que producen a presión constante, en un yacimiento de comportamiento infinito. La ecuación que describe el incremento de presión se derivó una vez más considerando como condición inicial de presión en el pozo y en el yacimiento al tiempo de cierre.

Capítulo 1

Revisión Bibliográfica

En la literatura hay autores que presentaron soluciones para obtener la presión de incremento de pozos que produjeron a presión constante antes del cierre en un yacimiento infinito, cada uno desarrollo su solución utilizando distintos métodos obteniendo diferentes ecuaciones de solución las cuales se presentan a continuación.

1.1. Clegg (1967)

El autor utilizó una expresión aproximada de inversión para la transformada de Laplace, desarrollada para la solución de problemas viscoelásticos, la cual es aplicable a problemas de flujo radial y proporciona soluciones analíticas simples para problemas de flujo a presión constante.

El método puede usarse para obtener soluciones aproximadas para varios problemas, incluyendo medios con permeabilidad radial discontinua, formaciones con multicapas e incremento de presión en pozos posteriores al cierre. Los resultados los comparó el autor con algunas soluciones disponibles, así como soluciones para tiempos largos, comprobando que este método aproximado permite obtener a través de la solución analítica desarrollada resultados correctos para el comportamiento de presión del pozo a tiempos largos.

El estudio de problemas transitorios en el flujo de fluidos a través de medios porosos se ha beneficiado grandemente por la aplicación de métodos de transformación. La eliminación de la variable de tiempo con la transformada de Laplace, reduce el problema a uno de valores en la frontera, el cual puede resolverse utilizando técnicas estándar. El problema con muchos de los casos de ingeniería es que no se tiene una solución inversa de Laplace simple. El resultado de la integral de inversión general debe usarse, requiriéndose la utilización de una integral infinita o a una serie infinita, ambas difíciles de manejarse desde un punto de vista computacional. Las aproximaciones asintóticas para la inversa se han conocido por algún tiempo las cuales

producen funciones inversas aproximadas que son validas para tiempos muy largos o muy cortos, pero frecuentemente los tiempos de interés no son precisos en este intervalo. En el caso de producción a presión constante en el pozo, el método conduce a una solución analítica simple, para un cierto número de problemas estándar: formación homogénea, permeabilidad discontinua e incremento de presión.

El problema del incremento de presión en pozos que se cierran después de producir a presión constante, es más difícil que el caso de pozos produciendo a gasto constante. En el último caso una superposición simple de soluciones proporciona la distribución de presión de todo el yacimiento, válida para los tiempos $t > t_0$, donde t_0 es el tiempo en el cual se cerró el pozo. En el caso de producción a presión constante este procedimiento de solución no puede emplearse debido a que las condiciones de frontera para un pozo productor cambian, de producción a presión constante (condición de Dirichlet) a la condición de que el pozo se cierra ($q=0$, $\nabla p=0$ condición de Newman). El método más simple de resolver este problema, es usar la distribución de presión en el yacimiento al tiempo t_0 como condición inicial para problemas de flujo cuando el pozo se cierra. Los detalles de este caso están dados en el apéndice del artículo donde se muestra que la caída de presión a un punto general r a un tiempo t después del cierre en el pozo productor está dado por la Ec. 1.1:

$$\frac{\Delta p}{(p_i - p_w)} = \frac{2 \left\{ K_0 \left(\frac{r_D}{\sqrt{2t_{pD}}} \right) - K_0 \left(\frac{r_D}{\sqrt{2\Delta t_{wsD}}} \right) \right\}}{\left(1 - \frac{\Delta t_{wsD}}{t_{pD}} \right) (\ln 8t_{pD} - 2\gamma)}, \text{ para } \Delta t_{wsD} \neq t_{pD}, \quad (1.1)$$

$$\frac{\Delta p}{(p_i - p_w)} = \frac{r_D}{\sqrt{2t_{pD}}} \frac{K_1 \left(\frac{r_D}{\sqrt{2t_{pD}}} \right)}{(\ln 8t_{pD} - 2\gamma)}, \text{ para } \Delta t_{wsD} = t_{pD}, \quad (1.2)$$

donde

$$r_D = \frac{r}{r_w}, \quad (1.3)$$

$$\Delta t_{wsD} = \frac{\eta \Delta t_{ws}}{r_w^2}, \quad (1.4)$$

$$t_{pD} = \frac{\eta t_p}{r_w^2}, \quad (1.5)$$

son variables adimensionales. En particular, en el pozo productor ($r_D = 1$), a condición de que Δt_{wsD} no sea muy pequeño,

$$\frac{\Delta p}{(p_i - p_w)} = \frac{\ln \frac{t_{pD}}{\Delta t_{wsD}}}{\left(1 - \frac{\Delta t_{wsD}}{t_{pD}}\right) (\ln 8 t_{pD} - 2\gamma)}, \quad \text{para } t_D \neq t_{0D}, \quad (1.6)$$

$$\frac{\Delta p}{(p_i - p_w)} = \frac{1}{(\ln 8 t_{pD} - 2\gamma)}, \quad \text{para } \Delta t_{wsD} = t_{pD}. \quad (1.7)$$

De estas soluciones es claro que la caída de presión no es una función lineal de $\ln \left(1 - \frac{t_{pD}}{\Delta t_{wsD}}\right)$ como en el caso de producción a gasto constante (**ver la Fig. 1**).

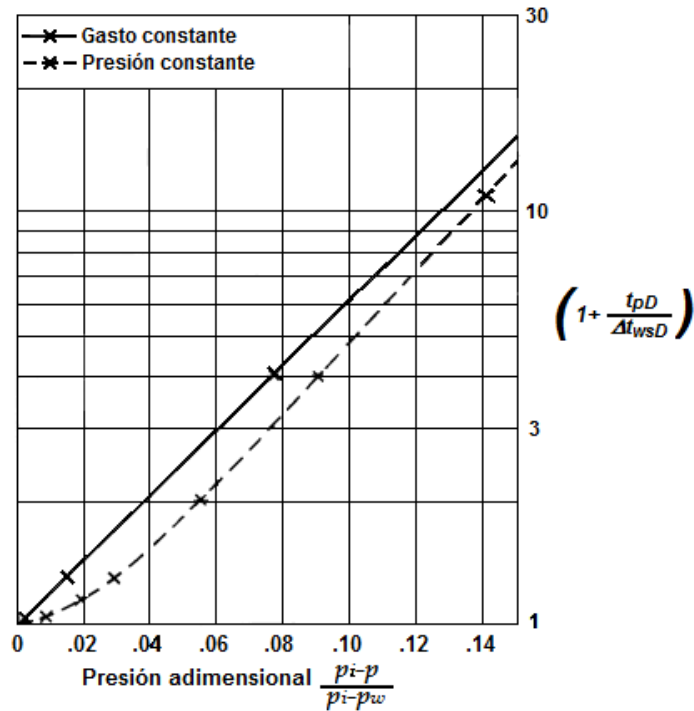


Fig. 1. Incremento de presión: gasto constante y presión constante (Clegg, 1967)

1.2. Ehlig-Economides y Ramey Jr. (1981)

Ehlig-Economides y Ramey utilizaron el método de superposición en el tiempo con cambios de gastos continuos, para generar una solución exacta para flujo a presión constante seguida de un incremento de presión. El método es general, incluyéndose los efectos de almacenamiento y daño y ambos tipos de yacimientos, infinito y finito. Las soluciones para el incremento de presión se graficaron usando técnicas convencionales para el análisis.

Así como muchos autores se basaron en procedimientos para soluciones a gasto constante para darle solución a producción a presión constante, Ehlig-Economides y Ramey partieron de la ecuación para flujo a gasto constante.

Una aplicación del principio de superposición en el tiempo a un gasto continuamente variable $q(t)$, resulta en una expresión para presión de flujo en el pozo dada por la ecuación siguiente:

$$p_{wf}(t) = p_i + \frac{\mu}{2\pi kh} \int_0^t q(u) p'_{wD}(t-u) du, \quad (1.8)$$

donde p'_{wD} es la derivada de la caída de presión adimensional en el pozo con respecto al tiempo para una producción a gasto constante. Si la producción es a presión constante p_{wf} , la ecuación puede escribirse en variables adimensionales como:

$$1 = - \int_0^{t_D} q_D(u) p'_{wD}(t-u) du, \quad (1.9)$$

donde las variables adimensionales para una producción a presión constante se definen por las Ecs. 1.10 y 1.11,

$$p_D(r_D, t_D) = \frac{[p_i - p(r_D, t_D)]}{(p_i - p_{wf})} \quad (1.10)$$

y

$$q_D(t_D) = \frac{q(t)\mu}{[2\pi kh(p_i - p_{wf})]}, \quad (1.11)$$

r_D y t_D se definen, como es usual, para un yacimiento circular e infinito.

De la Ec. 1.8, la presión de fondo fluyendo del pozo al tiempo t se expresa como:

$$p_{wf}(t) = p_i + \frac{\mu}{2\pi kh} \int_0^{t_p} q(u) p'_{wD}(t-u) du - q_D(t_p) p_{wD}(t-t_p). \quad (1.12)$$

Al cerrarse el pozo al tiempo t_p después de haber producido a presión constante, la condición de frontera cambia a cambio a gasto cero, pudiendo expresarse la presión del pozo p_{ws} por medio de la Ec. 1.13.

$$p_{ws}(\Delta t_{ws}) = p_i + \frac{\mu}{2\pi kh} \int_0^{t_p} q(u) p'_{wD}(t-u) du, \quad (1.13)$$

donde Δt_{ws} es el tiempo transcurrido después del cierre. La integral en la Ec. 1.13 es difícil de evaluar porque $q_D(\Delta t_{wsD} = 0)$ es infinito. La ecuación puede escribirse en una forma más fácil para su evaluación, usando la Ec. 1.9:

$$\frac{p_i - p_{ws}(\Delta t_{ws})}{p_i - p_{wf}} = - \int_0^{t_{pD} + \Delta t_{wsD}} q_D(u) p'_{wD}(t_{pD} + \Delta t_{wsD} - u) du + \int_{t_{pD}}^{t_{pD} + \Delta t_{wsD}} q_D(u) p'_{wD}(t_{pD} + \Delta t_{wsD} - u) du, \quad (1.14)$$

por la Ec. 1.9 se define que:

$$1 = - \int_0^{t_{pD} + \Delta t_{wsD}} q_D(u) p'_{wD}(t_{pD} + \Delta t_{wsD} - u) du,$$

pues es un pozo que produce a presión constante, por lo tanto la Ec. 1.14 se reduce a:

$$\frac{p_i - p_{ws}(\Delta t_{ws})}{p_i - p_{wf}} = 1 + \int_{t_{pD}}^{t_{pD} + \Delta t_{wsD}} q_D(u) p'_{wD}(t_{pD} + \Delta t_{wsD} - u) du. \quad (1.15)$$

La Ec. 1.15 es general. Las funciones empleadas para q_D y p_{wD} pueden elegirse para cualquier conjunto apropiado de condiciones de frontera internas o externas. Al examinar los límites de integración se revela que $q_D(u)$ se evalúa para tiempos largos ($u > t_{pD}$) y p'_{wD} se evalúa desde un tiempo igual a cero. De esta manera, fenómenos como los efectos de almacenamiento, daño, o de fractura se incluirán en la presión, mientras que los efectos de frontera afectarán el gasto, q_D , y para una un tiempo largo t , p'_{wD} también es afectado.

Aunque la integral en la Ec. 1.15 es similar a una integral de convolución, no se puede resolverse fácilmente por la transformada de Laplace. No obstante, la Ec. 1.15 se ha integrado numéricamente. Las soluciones utilizadas en este artículo se generaron usando el algoritmo numérico para la transformada inversa de Laplace de Stehfest. Se presentaron soluciones en forma tabular.

Los autores consideraron tres periodos de tiempos de cierre: un periodo corto de cierre, cuando el efecto de almacenamiento domina el comportamiento de la presión, un periodo donde aplica el análisis de incremento de Horner y para tiempos largos cuando se tienen presente los efectos de frontera.

El primer caso corresponde a periodos pequeños de cierre, la función del gasto $q_D(u)$ es esencialmente constante para $t_{pD} < u < (t_{pD} + \Delta t_{wsD})$. Por lo tanto, el análisis de la Ec. 1.15 revela que la presión de incremento puede aproximarse por medio de la Ec. 1.13:

$$\frac{p_i - p_{ws}(\Delta t_{ws})}{p_i - p_{wf}} \cong 1 - q_D(t_{pD}) * \int_{t_{pD}}^{t_{pD} + \Delta t_{wsD}} p'_{wD}(t_{pD} + \Delta t_{wsD} - u) du, \quad (1.16)$$

o

$$\frac{p_i - p_{ws}(\Delta t_{ws})}{p_i - p_{wf}} \cong 1 - q_D(t_{pD}) p_{wD}(\Delta t_{wsD}),$$

(1.17)

cuando $q_D(t_{pD}) \cong q_D(t_{pD} + \Delta t_{wsD})$.

Se divide entre $q_D(t_{pD})$ y se reescribe el resultado en:

$$\frac{p_{ws}(\Delta t_{ws}) - p_{wf}}{q(t_p) \mu / 2\pi kh} = p_{wD}(\Delta t_{ws}).$$

(1.18)

De esta manera, una gráfica Log-Log de $[p_{ws}(\Delta t_{ws}) - p_{wf}] / q(t_p)$ contra el tiempo puede compararse con las curvas tipo de presión de decremento para producción a gasto constante. Los efectos de un comportamiento transitorio temprano - como los efectos de almacenamiento y daño del pozo, penetración parcial o la evidencia de una fractura - se pueden analizar usando técnicas convencionales de curvas tipo. Puede ser demostrado que la validez de este tipo de análisis es aproximadamente el mismo que para una producción a gasto constante.

Para el análisis del incremento de presión, Horner sugirió que para una producción a gasto variable antes del cierre, la permeabilidad debe calcularse usando el último gasto del pozo, q_f , y la pendiente de la gráfica de $p_{ws}(\Delta t_{ws})$ contra $\text{Log}[(t_p^* + \Delta t_{ws}) / \Delta t_{ws}]$, donde $t_p^* = N_D(t_p) / q_f$.

Los casos relacionados con el incremento de presión después de una producción a presión constante para yacimiento infinito, frontera cerrada y frontera circular a presión constante, se calcularon por integración numérica de la Ec. 1.15. En cada caso, hubo un periodo de tiempo cuando el incremento de presión no fue dominado por los

efectos transitorios tempranos del pozo o efectos tardíos transitorios de la frontera. La línea recta semilogarítmica estuvo presente y la pendiente proporcionó el correcto valor para la permeabilidad cuando los datos se graficaron de acuerdo al método de Horner.

La derivación siguiente se basa en el método de Horner para graficar los datos de incremento. La Ec. 1.17, se divide entre $q_D(t_{pD} + \Delta t_{wsD})$, obteniéndose:

$$\frac{p_i - p_{ws}(\Delta t_{wsD})}{(p_i - p_{wf})q_D(t_{pD} + \Delta t_{wsD})} = \frac{1}{q_D(t_{pD} + \Delta t_{wsD})} - p_{ws}(\Delta t_{wsD}). \quad (1.19)$$

Cuando $10^4 \leq t_{pD} \leq (t_{pss})_D$, la Ec. 1.19 se puede escribir como:

$$\frac{p_i - p_{ws}(\Delta t_{wsD})}{(p_i - p_{wf})q_D(t_{pD} + \Delta t_{wsD})} \cong \frac{1}{2} \left[\ln(t_{pD} + \Delta t_{wsD}) + 0.80907 \right] - p_{wD}(\Delta t_{wsD}). \quad (1.20)$$

Para $\Delta t_{wsD} \geq 5$, la aproximación logarítmica es válida para $p_{wD}(\Delta t_{wsD})$, pudiendo expresarse la Ec. 1.20 como sigue:

$$\frac{p_i - p_{ws}(\Delta t_{wsD})}{(p_i - p_{wf})q_D(t_{pD} + \Delta t_{wsD})} \cong \frac{1}{2} \left[\frac{\ln(t_{pD} + \Delta t_{wsD})}{\Delta t_{wsD}} \right]; \quad (1.21)$$

despejando la presión de pozo cerrado $p_{wD}(\Delta t_{wsD})$:

$$p_{ws}(\Delta t_{ws}) \cong p_i - \frac{q(t_p + \Delta t_{ws})}{4\pi kh} \frac{1}{2} \left[\frac{\ln(t_p + \Delta t_{ws})}{\Delta t_{ws}} \right]. \quad (1.22)$$

Debe notarse que $q(t_p) \cong q(t_p + \Delta t_{ws})$ para $\Delta t_{ws} \ll t_p$, esta expresión es idéntica al resultado para flujo a gasto constante, excepto que si $q(t)$ fuera constante, t sería igual al tiempo corregido de flujo de Horner, t_p^* . Así, el método de Horner conserva el balance de materia y se obtiene a través de su método de análisis, la correcta pendiente para la porción de la línea recta semilogarítmica de los datos de incremento de presión.

1.3. Kutasov (1989)

Kutasov presenta una solución analítica para describir el incremento de presión para pozos que producen a presión constante en un yacimiento infinito. La ecuación de incremento es derivada en las bases de una condición inicial aproximando el perfil de presión en el agujero y en el yacimiento al tiempo de cierre.

El método de Horner es muy usado para procesar la información de pruebas de incremento de presión para pozos que producen a un gasto de flujo constante. Cuando el gasto del flujo antes del cierre cambia relativamente despacio, el tiempo real de producción deberá ser remplazado por el tiempo de producción corregido de Horner (ajustado), y el último gasto establecido deberá ser usado. Cuando el gasto durante la prueba varía dentro de los límites, la teoría de superposición es usada para modelar la historia de producción.

En los trabajos de Clegg, Ehlig-Economides y Ramey se demostró que para tiempos adimensionales de producción más grandes que 10^4 , el método de incremento de Horner daba un correcto valor de la permeabilidad de formación cuando se utiliza el último gasto y el tiempo real de flujo. También mostraron que para tiempos pequeños de flujo y tiempos adimensionales de cierre más largos que 25, el análisis de Horner (basado en el tiempo efectivo de producción) se puede utilizar para un pozo que

produjo a presión constante con esencialmente la misma precisión como para un pozo que produjo a gasto constante antes del cierre. Uraiet y Raghavan mostraron que para tiempos adimensionales de cierre más grandes que 40, las pendientes de las curvas de incremento fueron prácticamente constantes para todos los casos, con tiempos adimensionales de producción más grandes que 10^4 . Estos autores también documentaron la aplicabilidad del radio efectivo del pozo.

Una ecuación aproximada para la caída de presión en el yacimiento al tiempo $t = t_p$ (tiempo de producción) se utiliza expresar la distribución de presión del yacimiento al momento en que se cierra el pozo. Para determinar el incremento de las presiones, se utilizó la solución de la ecuación de difusividad que describe el cambio de presión en el eje de un cuerpo cilíndrico con una conocida distribución de presión inicial localizada en un medio infinito a una presión inicial constante. Como no se usó el principio de superposición, las ecuaciones obtenidas son validas para prácticamente todos los valores de tiempo de producción o tiempo de cierre.

Se supuso que el flujo del fluido en una sola fase en el yacimiento puede describirse por medio de la ecuación de difusividad en coordenadas cilíndricas. El almacenamiento del pozo no se consideró en esta solución. Durante el periodo de cierre, el impacto del pozo manifestado en el incremento de presión es despreciado. Se considero también que el concepto de radio efectivo del pozo se puede utilizar

Se usaron los parámetros adimensionales siguientes. El tiempo de producción basado en el radio efectivo del pozo y la distancia radial se definen por:

$$t_{apD} = \frac{kt_p}{\phi\mu cr_{wa}^2}, \quad (1.23)$$

$$r_{aD} = \frac{r}{r_{wa}}, \quad (1.24)$$

donde r_{wa} es el radio aparente de pozo, definido como:

$$r_{wa} = r_w e^{-s}. \quad (1.25)$$

El tiempo de producción adimensional corregido (ajustado) de Horner se define por

$$t_{pD}^* = \frac{kt_p^*}{\phi\mu cr_{wa}^2}, \quad (1.26)$$

donde t_p^* es el tiempo de producción corregido de Horner (producción acumulada entre gasto final de flujo). La caída de presión adimensional durante la producción se define por:

$$p_D(r_D, t_D) = \frac{[p_i - p(r, t_p)]}{(p_i - p_{wf})}, \quad (1.27)$$

donde $p(r, t_p)$ es la presión en el yacimiento a una distancia r y tiempo t_p . La presión de fondo fluyendo p_{wf} , y la presión inicial del yacimiento p_i , se suponen constantes.

La presión adimensional de incremento se define por:

$$p_{sD} = \frac{(p_i - p_{ws})}{(p_i - p_{wf})}, \quad (1.28)$$

donde $p_{ws}(\Delta t_{ws})$ es la presión del pozo después del cierre y Δt_{ws} es el tiempo de cierre.

Para determinar la caída de presión $p(t_p)$, se utiliza la ecuación de difusividad bajo las condiciones iniciales y de frontera siguientes:

$$p(r,0) = p_i, \quad r_{wa} \leq r < \infty \quad (1.29)$$

y

$$p(\infty,t) = p_i,$$

$$p(r_{wa},t) = p_{wf} \cdot \quad t > 0. \quad (1.30)$$

Se conoce que para un pozo que produce a una presión de fondo constante con una condición inicial como en la Ec. 1.29, la ecuación de difusividad tiene una solución en función de una integral compleja. Con los resultados de una solución numérica, se encontró que para valores de tiempo de producción adimensional $t_{apD} > 1$, la Ec. 1.31 se puede utilizar para aproximar la distribución de presión en el yacimiento durante la producción:

$$p_D = \frac{p_i - p(r,t_p)}{(p_i - p_{wf})} = \frac{Ei\left(-\frac{r_D^2}{4t_{pD}^*}\right)}{Ei\left(-\frac{1}{4t_{pD}^*}\right)}, \quad r_D \geq 1. \quad (1.31)$$

El tiempo adimensional ajustado puede obtenerse de

$$t_{pD}^* = \frac{N_D}{q_{LD}}, \quad (1.32)$$

donde N_D es la producción acumulada adimensional y q_{LD} es el gasto adimensional de flujo a $t = t_p$:

$$N_D = \frac{N}{\left[2\pi\phi chr_{wa}^2 (p_i - p_{wf})\right]}, \quad (1.33)$$

y

$$q_{LD} = \frac{q_L \mu}{\left[2\pi kh (p_i - p_{wf})\right]}. \quad (1.34)$$

Se concluye que $q_{LD} = q_D$. La relación entre los valores de p_D calculados por estos dos métodos es muy buena. Para tiempos de producción adimensionales grandes, las soluciones para flujo de fluidos para una fuente cilíndrica con una presión constante convergerá eventualmente.

De esta manera, para valores de $t_{apD} \geq 1$, la expresión para la presión del pozo fluyendo ($r_D = 1$) se expresa por medio de la Ec. 1.35:

$$p_i - p_{wf} = \frac{q_L \mu}{4\pi kh} \left[-Ei \left(-\frac{1}{4t_{pD}^*} \right) \right]. \quad (1.35)$$

La presión en el pozo y en el yacimiento durante la prueba de incremento se relaciona por medio de la ecuación siguiente:

$$\frac{p_{sr} - p_i}{p_{wf} - p_i} = \frac{1}{2\eta\Delta t_{ws}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{r^2 + r'^2}{4\eta\Delta t_{ws}}\right) * I_0\left(\frac{rr'}{2\eta\Delta t_{ws}}\right) p_D\left(\frac{r'}{r_w}, t_{apD}\right) r' dr', \quad (1.36)$$

donde $I_0(x)$ es una función modificada de Bessel de segundo tipo y orden cero, r' es una variable de integración, $p_{sr}(\Delta t_{ws}, r)$ es la presión durante el cierre a cualquier distancia radial r , y η es la difusividad hidráulica. La función $p_D(r'/r_w, t_{apD})$ es la presión de distribución adimensional en el pozo y en el yacimiento a $\Delta t_{ws} = 0$.

Para el eje del pozo ($r=0$), $I_0(0)=1$ y $p_{sr} = p_{ws}$. Por lo tanto, la presión adimensional del pozo después del cierre se determina por medio de la ecuación siguiente:

$$p_{sD}(\Delta t_{wsD}) = \frac{p_i - p_{ws}(\Delta t_{ws})}{p_i - p_{wf}(t)} = \frac{1}{2\Delta t_{wsD}} \int_0^{\infty} R p_D(R, t_{pD}^*) \exp\left(-\frac{R^2}{4\Delta t_{wsD}}\right) dR, \quad (1.37)$$

donde

$$R = r'/r_{wa}. \quad (1.38)$$

Considerando la Ec. 1.31 ($R = r_{aD}$), las expresiones para las presiones $p_D(R, t_{apD})$ son:

$$p_D(R, t_{apD}) = \frac{Ei\left[-\left(\frac{R^2}{4t_{pD}^*}\right)\right]}{Ei\left[-\left(\frac{1}{4t_{pD}^*}\right)\right]}, \quad R \geq 1 \quad (1.39)$$

y

$$p_D(R, t_{apD}) = 1 \quad 0 \leq R < 1. \quad (1.40)$$

La sustitución de x por R^2 y de las Ecs. 1.39 y 1.40 en la Ec. 1.37 conducen al resultado siguiente:

$$p_{sD} = \beta \int_0^1 e^{-x\beta} dx + \frac{\beta}{Ei(-\alpha)} \int_1^{\infty} e^{-x\beta} Ei(-\alpha x) dx, \quad (1.41)$$

donde

$$\beta = \frac{1}{4\Delta t_{wsD}}, \quad (1.42)$$

y

$$\alpha = \frac{1}{4t_{pD}^*}. \quad (1.43)$$

La última integral se evalúa usando tablas para las dos integrales:

$$J_1 = \int_0^x e^{-\beta x} Ei(-\alpha x) dx = -\left(\frac{1}{\beta}\right) \left\{ e^{-\beta x} Ei(-\alpha x) + \ln \left[1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \right] - Ei[-(\alpha + \beta)x] \right\} \quad (1.44)$$

y

$$J_2 = \int_0^{\infty} e^{-\beta x} Ei(-\alpha x) dx = -\left(\frac{1}{\beta}\right) \ln \left[1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \right]. \quad (1.45)$$

Debe notarse que,

$$J = \int_1^{\infty} e^{-\beta x} Ei(-\alpha x) dx = J_2 - J_1(x=1); \quad (1.46)$$

usando las Ecs. 1.28 y 1.29, se obtiene:

$$J = \left(\frac{1}{\beta}\right) [e^{-\beta} Ei(-\alpha) - Ei(-\alpha - \beta)]. \quad (1.47)$$

La primera integral de la Ec. 1.41 se define como:

$$J_0 = \int_0^1 e^{-x\beta} dx = -\frac{e^{-\beta}}{\beta} + \frac{1}{\beta}. \quad (1.48)$$

La sustitución de las Ecs. 1.47 y 1.48 en la Ec. 1.41 dan como resultado:

$$p_{sD} = 1 - \frac{Ei(-\alpha - \beta)}{Ei(-\alpha)} \quad (1.49)$$

o

$$p_{sD} = 1 - \frac{Ei\left(-\frac{1}{4t_{pD}^*} - \frac{1}{4\Delta t_{wsD}}\right)}{Ei\left(-\frac{1}{4t_{pD}^*}\right)}. \quad (1.50)$$

Combinando las Ecs. 1.31, 1.35 y 1.50, se obtiene:

$$p_i - p_{ws} = \frac{q_L \mu}{4\pi k h} \left[-Ei\left(-\frac{1}{4t_{pD}^*}\right) + Ei\left(-\frac{1}{4t_{pD}^*} - \frac{1}{4\Delta t_{wsD}}\right) \right]. \quad (1.51)$$

Note que la Ec. 1.51 puede ser usada para cualquier valor de Δt_{ws} y para $t_D \geq 1$.

La aproximación logarítmica para la función Ei es válida para el argumento,

$$\frac{1}{(4t_{pD}^*)} + \frac{1}{(4\Delta t_{wsD})} < 0.01 \quad (1.52)$$

Si la condición establecida por la Ec. 1.52 no se satisface, deben usarse las Ecs. 1.35 y 1.51.

Con este método se obtiene una solución analítica para determinar el incremento de presión para pozos, que han producido a presión de fondo fluyendo constante en un yacimiento infinito. Esta solución es válida para prácticamente cualquier tiempo de producción y tiempo de cierre. Para tiempos de producción adimensionales grandes, la ecuación obtenida puede simplificarse, pudiendo derivarse la ecuación de Horner expresada por la Ec. 1.50. En muchos casos, el método de incremento de Horner que utiliza el último gasto de flujo y el tiempo de producción ajustado, se aplica para estimar la permeabilidad de formación, el factor de daño y la presión inicial de yacimiento.

Capítulo 2

Desarrollo del Modelo Matemático y Evaluación

Incremento de la presión en un yacimiento infinito que produjo a presión constante.

Para el caso de gasto variable, si consideramos que un pozo produce en un yacimiento infinito, partiendo de la ecuación de difusividad en el espacio de Laplace,

$$\frac{d^2 \bar{p}_D}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{d\bar{p}_D}{dr_D} = s\bar{p}_D, \quad (2.1)$$

y se plantean las condiciones de frontera y la condición inicial también en el plano de Laplace:

$$p_D(r_D, 0) = 0 \quad (2.2)$$

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} \bar{p}_D(r_D, s) = 0 \quad (2.3)$$

$$\left(r_D \frac{d\bar{p}_D}{dr_D} \right)_{r_D=1} = -\frac{1}{s}. \quad (2.4)$$

La solución a este problema es directa si suponemos que la solución para el problema a gasto constante es conocida. Aplicando el principio de convolución generalizada para su solución se obtiene:

$$p_{wf}(t) = p_i + \frac{\mu}{2\pi kh} \int_0^t q(u) p'_{wD}(t-u) du, \quad (2.5)$$

Prats desarrolló una solución analítica para el análisis del comportamiento del incremento de presión para un yacimiento con frontera externa infinita, el pozo produjo a presión constante y después de un tiempo de producción se cerró. Consideró el radio del pozo finito $r_w = 1$.

Partiendo de la ecuación de convolución en unidades adimensionales la cual es una solución de la ecuación de difusividad, se tiene:

$$p_{wfD}(t_D) = \frac{p_i - p_{wf}(t_D)}{p_i - p_{wf}} = \int_0^{t_D} q_D(u) p'_{qD}(t_D - u) du, \quad (2.6)$$

donde p_{wf} es constante y $p_{wf}(t_D)$ varia con el tiempo. $p'_D(t_D)$ es el gasto al cambio de presión de un pozo produciendo a gasto constante.

Si consideramos que el pozo está produciendo a un gasto tal que la presión del pozo tiene un valor constante, p_{wf} para cualquier tiempo, entonces

$$1 = \int_0^{t_D} q_{pD}(u) p'_D(t_D - u) du, \quad (2.7)$$

donde se ha expresado a $q_D(t_D)$ agregándole el subíndice p (de producción), para acentuar el hecho que el gasto corresponde a un pozo produciendo a presión constante. Para un yacimiento circular infinito la solución para el caso de producción a presión constante se presenta en el libro de Carslaw y Jaeger la cual está expresada por medio de la Ec. 8 (**ver el Apéndice A**).

$$q_{pD}(t_D) = -\frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} e^{-v^2 t_D} \frac{dv}{v(J_o^2(v) + Y_o^2(v))}. \quad (2.8)$$

Para un pozo que produce a presión constante, $p_{wfD} = 1$, y mayor al tiempo t_{pD} al cual el pozo es cerrado, el gasto, $q_{pD}(t_D)$, esta dado por,

$$q_{pD}(t_D) = \frac{4U(t_{pD} - t_D)}{\pi^2} \int_0^{\infty} e^{-v^2 t_D} \frac{dv}{v(J_o^2(v) + Y_o^2(v))}. \quad (2.9)$$

Esta expresión se reduce a la Ec. 2.5 para $t_D < t_{pD}$ y a

$$q_{pD}(t_D) = 0, \quad \text{para} \quad t_D > t_{pD}. \quad (2.10)$$

Entonces se conoce exactamente que el gasto está dado a una presión constante al tiempo t_{pD} .

Una aproximación en el espacio de Laplace

En el espacio de Laplace la Ec. 2.3 se expresa como:

$$p_{wfD}^*(s) = q_{pD}^*(s) s p_{qD}^*(s), \quad (2.11)$$

para obtener la Transformada de Laplace de $q_{pD}^*(s)$ de la Ec. 2.11, se utiliza la Ec. 2.8: **(ver el Apéndice B).**

$$q_{pD}^*(s) = -\frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{t_{pD}} e^{-(s+v^2)t_D} dt_D \frac{dv}{v[J_o^2(v) + Y_o^2(v)]}, \quad (2.12)$$

se integra la Ec. 2.12,

$$q_{pD}^*(s) = -\frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\left(1 - e^{-(s+v^2)t_{sD}}\right) dv}{v(s+v^2) \left[J_0^2(v) + Y_0^2(v) \right]}. \quad (2.13)$$

Para obtener la transformada de Laplace de $p_{qD}^*(s)$, de la Ec. 2.11, se utiliza la solución para la presión en un yacimiento circular infinito, evaluada en $r_D = 1$, expresada por la Ec. 2.14, **(ver el Apéndice C)**,

$$p_{qD}(t_D) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\left(1 - e^{-w^2 t_D}\right) dw}{w^3 \left[J_1^2(w) + Y_1^2(w) \right]}. \quad (2.14)$$

La derivada para esta expresión $p_{qD}(t_D)$, con respecto a t_D (Ec. 2.14) es **(ver el Apéndice D)**

$$p_D'(t_D) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-w^2 t_D} dw}{w \left(J_1^2(w) + Y_1^2(w) \right)}. \quad (2.15)$$

La transformada de Laplace de la Ec. 2.14 es, **(ver el Apéndice E)**

$$p_D^*(s) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{dw}{sw(s+w^2) \left(J_1^2(w) + Y_1^2(w) \right)}. \quad (2.16)$$

Formalmente, la transformada inversa de Laplace de la Ec. 2.11 se obtiene sustituyendo las Ecs. 2.13 y 2.16, por lo tanto,

$$p_{wD}^*(t_D) = L^{-1} \left\{ q_{pD}^*(s) s p_D^*(s) \right\}, \quad (2.17)$$

$$p_{wD}(t_D) = L^{-1} \left\{ -\frac{16}{\pi^4} \int_0^\infty \frac{\left(1 - e^{-(s+v^2)t_{SD}}\right) dv}{v(s+v^2)(J_o^2(v) + Y_o^2(v))} \int_0^\infty \frac{dw}{(s+w^2)w(J_1^2(w) + Y_1^2(w))} \right\}, \quad (2.18)$$

$$p_{wD}(t_D) = -\frac{16}{\pi^4} \iint_0^\infty \frac{dw dv}{(J_o^2(v) + Y_o^2(v))wv(J_1^2(w) + Y_1^2(w))} L^{-1} \left\{ \frac{\left(1 - e^{-(s+v^2)t_{SD}}\right)}{(s+v^2)(s+w^2)} \right\}. \quad (2.19)$$

La transformada inversa de Laplace de la Ec. 2.19 antes del cierre es: **(ver el Apéndice F)**

$$L^{-1} \left\{ \frac{\left(1 - e^{-(s+v^2)t_{SD}}\right)}{(s+v^2)(s+w^2)} \right\} = \frac{e^{-v^2 t_D} - e^{-w^2 t_D}}{(v^2 - w^2)}, \quad \text{para } t_D < t_{pD}. \quad (2.20)$$

La transformada inversa de Laplace de la Ec. 2.19 después del cierre es: **(ver el Apéndice G)**

$$L^{-1} \left\{ \frac{\left(1 - e^{-(s+v^2)t_{SD}}\right)}{(s+v^2)(s+w^2)} \right\} = \frac{\left(e^{-v^2 t_{pD}} - e^{-w^2 t_{pD}}\right) e^{-w^2(t_D - t_{pD})}}{(v^2 - w^2)} \quad \text{para } t_D > t_{pD}. \quad (2.21)$$

La condición de frontera para el caso de producción a presión constante, para $0 < t_D < t_{pD}$ requiere que:

$$p_{wD}(t_D) = -\frac{16}{\pi^4} \iint_0^\infty \frac{dw dv}{(J_o^2(v) + Y_o^2(v))wv(J_1^2(w) + Y_1^2(w))} \frac{e^{-v^2 t_D} - e^{-w^2 t_D}}{(v^2 - w^2)} \equiv 1. \quad (2.22)$$

La respuesta de presión después del cierre, para $\Delta t_{wsD} = t_D - t_{pD} > 0$, puede expresarse como:

$$p_{sD}(\Delta t_{wsD}) = -\frac{16}{\pi^4} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dw dv}{(J_o^2(v) + Y_o^2(v)) w v (J_1^2(w) + Y_1^2(w))} \left[\frac{(e^{-v^2 t_{pD}} - e^{-w^2 t_{pD}}) e^{-w^2 \Delta t_{wsD}}}{(v^2 - w^2)} \right]. \quad (2.23)$$

Una gráfica de $p_{sD}(\Delta t_{wsD})$ contra Δt_{wsD} para varios valores de t_{pD} , puede obtenerse evaluando esta Ec. 2.23.

Debe notarse que las dos últimas ecuaciones son iguales para el mismo tiempo de cierre.

Capítulo 3

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Uno de los objetivos principales de esta sección es presentar la evaluación y comparación de cada uno de los métodos propuestos, por Clegg, Ehlig-Economides y de Kutasov, así como el método desarrollado por Prats, para pruebas de presión de incremento de pozos que produjeron a presión constante antes del cierre. También se incluyó un ejemplo de aplicación en el que se analiza una prueba realizada en un pozo.

La presión adimensional del pozo, Ec. 1.27, es igual a uno cuando el pozo está fluyendo a presión constante, por lo que al momento de cerrarse este efecto se manifiesta en la presión adimensional, p_{wsD} .

El software que se utilizó para la evaluación de las ecuaciones de Clegg, Kutasov, Ehlig-Economides y Ramey y Prats fue "Mathematica".

3.1. Clegg

Como se ha mencionado antes, la aplicación de la Transformada de Laplace para problemas de flujo de fluidos ha proporcionado un gran número de soluciones analíticas simples por su forma de aplicación. Algunos problemas que involucran ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes, suelen tener como parte no homogénea una función $f(t)$ que no es continua. El análisis de estos problemas es más sencillo cuando se utiliza el método de la transformada de Laplace. Una de las ventajas más significativas radica en que la integración y derivación se convierten en multiplicación y división. Esto transforma las ecuaciones diferenciales e integrales en ecuaciones polinómicas, mucho más fáciles de resolver.

Clegg desarrolló una solución para pruebas de incremento en un pozo que produjo a presión constante, localizado en un yacimiento infinito. Después de la aplicación de la transformada de Laplace se obtuvo la solución en función de

ecuaciones modificadas de Bessel y aplicó posteriormente el método de inversión de la Transformada de Laplace de Schapery, con el cual se obtuvo una buena aproximación para la evaluación. El método de Schapery es directo y se basa en problemas donde,

$$\frac{d(\overline{sf}(s))}{d(\ln s)}$$

es una función que presenta una variación lenta con respecto a variable de $\ln s$. En este caso la fórmula de inversión es:

$$f(s) = [\overline{sf}(s)]$$

donde

$$s = \frac{1}{2t}. \tag{3.1}$$

Se evaluaron las Ecs. 1.1 y 1.2 para un pozo finito, $r_D = 1$. La ventaja del uso del software de "Mathematica" es que ya vienen definidas las funciones modificadas de Bessel de la solución y la sustitución es directa, pues en otros paquetes se tienen que definir y programar las funciones, utilizando aproximaciones ya sea en términos de la serie de Taylor o identidades **(ver el apéndice H)**.

La solución obtenida por Clegg, está en función de $K_\nu(x)$, que son funciones de Bessel modificadas de segunda clase, las cuales muestran varias analogías con respecto a las funciones exponenciales y trigonométricas. La función $K_\nu(x)$ es exponencialmente decreciente, diverge en $x=0$ y para valores de $\nu > 0$ el valor de $K_\nu(x) = 0$ **(ver la Fig. 27, del apéndice I)**.

El resultado de la evaluación para diferentes tiempos de producción se muestra en las **Figs. 2 y 3**, en las cuales describen el comportamiento de la ecuación propuesta por Cleeg para pozos que produjeron a presión constante antes del cierre, observándose una caída de la presión adimensional posterior al cierre hasta llegar a un equilibrio en cero. En la **Fig. 2** se observa que para $\Delta t_{wsD} \ll 1$ la presión adimensional inicia en uno, ya que el pozo ha producido a presión constante antes del cierre; puede notarse que entre mayor sea el tiempo de producción la pendiente del comportamiento de la presión disminuye. La **Fig. 3** muestra que a partir aproximadamente de $\Delta t_{wsD} = 1$, comienza la caída de presión para cada uno de los diferentes tiempos de producción y entre menor sea el tiempo de producción más rápida es su caída.

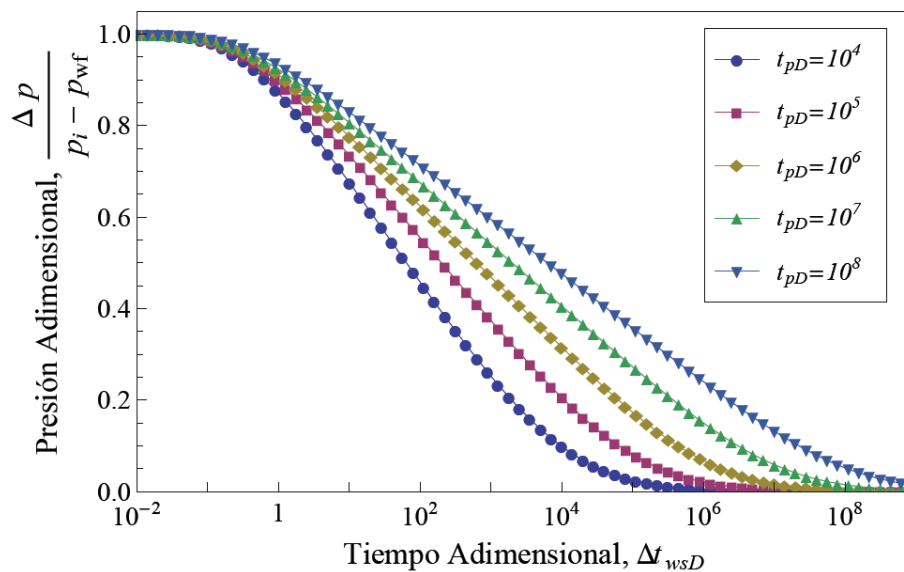


Fig. 2. Comportamiento de la presión de incremento para un pozo que produjo a presión constante para diferentes tiempos de producción, obtenido empleando la solución por Cleeg.

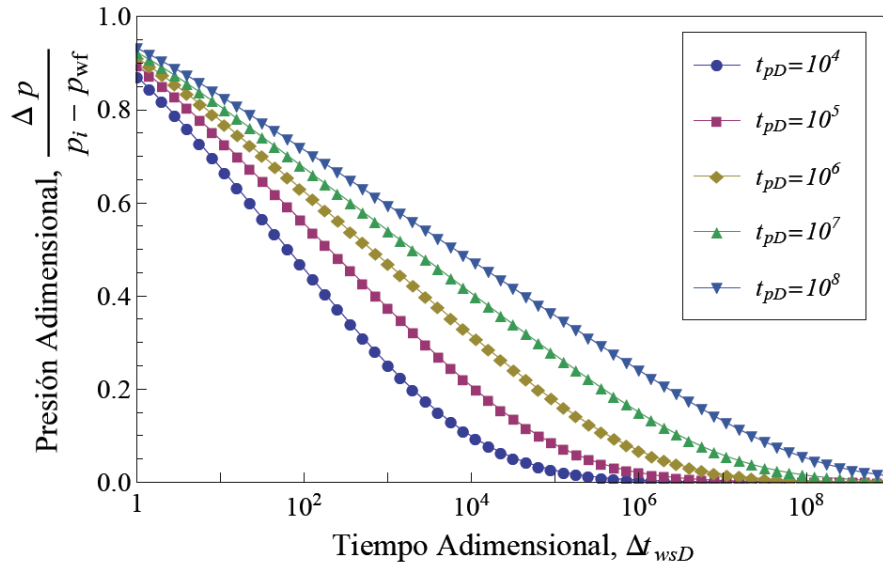


Fig. 3. Comportamiento de la presión de incremento para un pozo que produjo a presión constante para diferentes tiempos de producción, obtenido empleando la solución de Clegg.

3.2. Ehlig-Economides y Ramey Jr.

El análisis de pruebas de pozos ha sido desarrollado principalmente para producción a gasto contante; sin embargo, hay yacimientos con condiciones de producción en los cuales el flujo ocurre a presión constante. Ehlig-Economides y Ramey en su trabajo utilizaron el método de superposición de gastos variables, generando una solución exacta para el incremento de presión posterior a un periodo de flujo a presión constante. Para un pozo que produjo a gasto variable o constante, las condiciones de frontera son las mismas durante el periodo de producción y de cierre. El gasto en el pozo varía solo de algún valor constante (producción) a cero (pozo cerrado), pudiendo aplicarse el principio de superposición.

El método planteado en la Ec. 1.12 es general. Los resultados indican que una modificación del método de Horner de la gráfica de incremento de presión, proporciona una evaluación correcta de la permeabilidad y presión estática del yacimiento. Para la

evaluación de esta distribución de presión se llegó a la Ec. 1.18, la cual solo es válida para $\Delta t_{wsD} > 5$, **Fig. 4**.

Ehlig-Economides y Ramey consideran un gasto cuando está cerrado el pozo, cuya influencia solo sería correcta al tomar en cuenta los efectos de almacenamiento de fluidos en el pozo. Existen soluciones para determinar q_D en yacimientos radiales las cuales se derivaron a través de la transformada de Laplace. El gasto que utilizaron Ehlig-Economides y Ramey está definido por medio de la Ec. 3.2, para un pozo que produce a presión constante en un yacimiento infinito:

$$\bar{q}_D(z) = \frac{K_1(z r_D)}{\sqrt{z} [K_0(z) + s\sqrt{z}K_1(z)]}, \quad (3.2)$$

donde z es la variable de la Transformada de Laplace y s es el factor de daño el cual es igual a uno para este caso.

Hay soluciones en el espacio de Laplace que no pueden invertirse fácilmente en forma analítica al espacio real, como la Ec. 3.2, por lo que se requiere aplicar un algoritmo numérico como el de Stehfest, para obtener la inversa de la Transformada de Laplace. Este algoritmo proporciona soluciones para una variedad amplia de problemas de interés en el análisis de pruebas de pozos. El algoritmo está basado en la expresión siguiente presentada por Stehfest:

$$F(t) = \frac{\ln 2}{t} \sum_{i=1}^N V_i f\left(\frac{\ln 2}{t} i\right), \quad (3.3)$$

donde $f(z)$ es la transformada de Laplace de $F(t)$, y V_i está definida como:

$$V_i = (-1)^{[(N/2)+i]} \sum_{k=\frac{i+1}{2}}^{\min(i, N/2)} \frac{k^{N/2} 2k!}{[(N/2)-k]! k! (1-k)! (2k-1)!},$$

donde N es el número de términos en la suma. Stehfest observó que entre mayor sea N es mayor la precisión.

Considerando que el tiempo de inicio de Ehlig-Economides y Ramey solo es válido para $\Delta t_{wsD} > 5$, en la **Fig. 4** se muestran los resultados para la presión adimensional, obtenidos por medio del método de Ehlig-Economides y Ramey, los cuales al compararse con las **Fig. 3** y **6** de los métodos de Clegg y de Kutasov, se observa que el inicio de la caída de presión para los diferentes tiempos de producción es mucho menor.

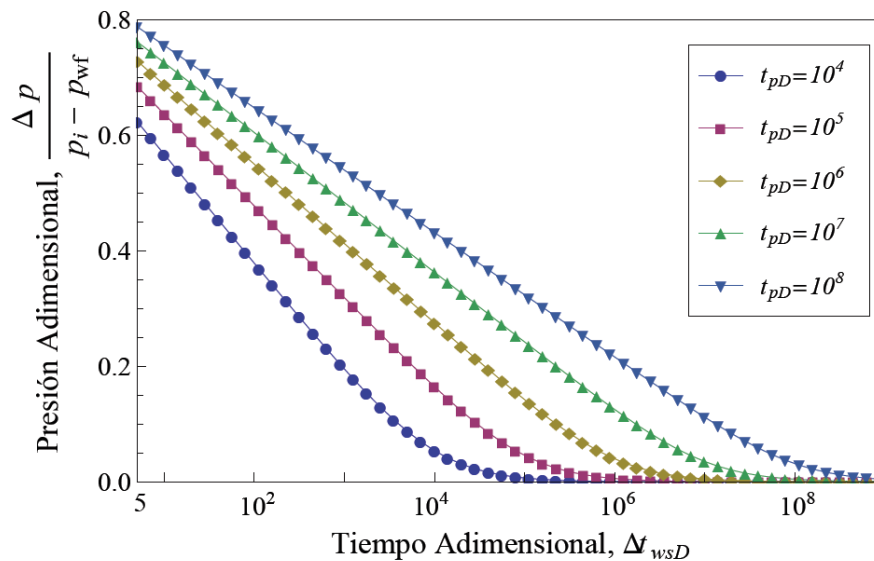


Fig. 4. Comportamiento de la presión de incremento para un pozo que produjo a presión constante, para diferentes tiempos de producción, obtenido empleando la solución de Ehlig-Economides y Ramey.

3.3. Kutasov

El método de Horner se ha usado para el análisis de pruebas de incremento de presión para pozos que producen a gasto constante, donde se utiliza el tiempo de producción corregido de Horner y el último gasto previo al cierre. Kutasov propuso una solución para la presión de incremento de pozos que produjeron a presión constante antes del cierre, descrita por la Ec. 1.50, la cual está en función de la integral exponencial, Ei . La **Fig. 5** muestra la distribución de la presión para los diferentes tiempos de producción, iniciando la presión en uno por ser un pozo que produjo a presión constante y decreciendo hasta llegar a cero. La pendiente disminuye conforme aumenta el tiempo de producción. La **Fig. 6** muestra el comportamiento a partir de $\Delta t_{wsD} = 1$ donde la caída de presión es un poco más lenta al inicio para los diferentes tiempos de producción en comparación con el método de Clegg, alcanzando un valor de cero, donde también después de un tiempo la presión en el yacimiento se aproxima a un valor constante a tiempos de cierre grandes para casos en que el periodo de producción ocurrió a condiciones transitorias.

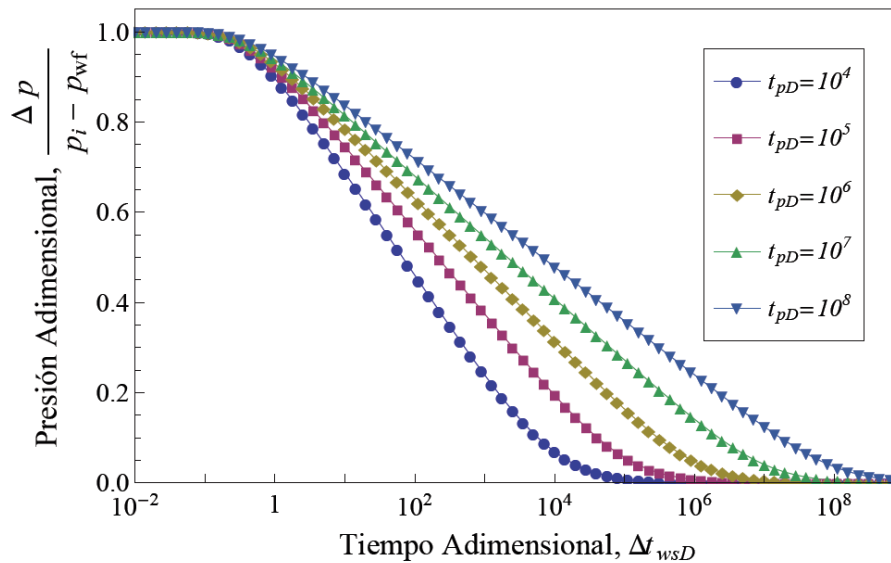


Fig. 5. Comportamiento de la presión de incremento para un pozo que produjo a presión constante, para diferentes tiempos de producción, obtenido empleando la solución de Kutasov.

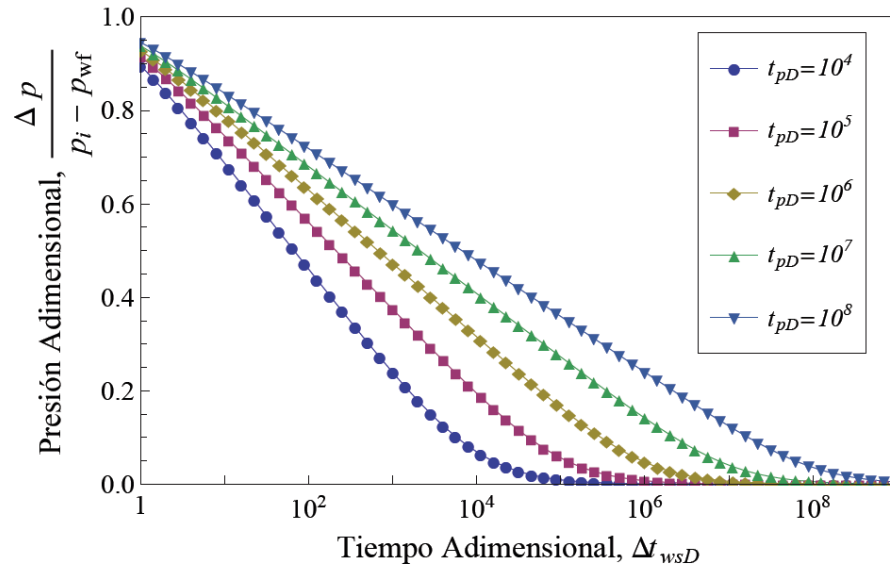


Fig. 6. Comportamiento de la presión de incremento para un pozo que produjo a presión constante, para diferentes tiempos de producción, obtenido empleando la solución de Kutasov.

3.4. Prats

Como se ha mencionado anteriormente, en las soluciones para pozos que han producido a presión constante, uno de los problemas es la complejidad de las soluciones y de su evaluación, así como su precisión, ya que están expresadas en función de integrales de variable compleja o series infinitas, como es el caso de las Ecs. 2.22 y 2.23. La Ec. 2.22 es la demostración de que todo pozo que produce a presión constante, su presión adimensional antes del cierre es igual a la unidad, $p_{wfD} = 1$.

Para la evaluación de la solución desarrollada por Prats se utilizó la Ec. 2.23, la cual está en función de exponenciales que limitan su evaluación, ya que dependen del tiempo de producción y para valores grandes, las exponenciales causan que la ecuación no converja.

En un principio la ecuación de Prats se evaluó con el método de Simpson, el cual es un método de integración numérica para determinar el área que se forma entre una función $f(x)$, el eje x , y los límites a y b . Este método consiste en la suma de sub áreas de polinomios de orden superior, cada subárea forma un pequeño arco de parábola de la forma $ax^2 + bx + c$. A las fórmulas resultantes para calcular la integral bajo estos polinomios se les conoce como reglas de Simpson. En este procedimiento, se toma el intervalo de longitud $2h$, comprendido entre x_i y x_{i+2} , aproximándose la función $f(x)$ por la parábola que pasa por tres puntos (x_i, y_i) , (x_{i+1}, y_{i+1}) y (x_{i+2}, y_{i+2}) .

Al efectuar la evaluación con el método de Simpson, se realizaron corridas con el programa de Visual-Fortran para determinar el número de intervalos óptimo y los límites de las integrales de la Ec. 2.23 para mejorar la precisión.

Se observa en las **Tablas 1 y 2**, la relación que hay entre el número de intervalos, $imax$, el límite superior de la integral $lmax$, y el tiempo de producción adimensional, $t_{pD} = 10^4$ y $t_{pD} = 5000$. El objetivo es cumplir que el valor de la presión adimensional del pozo, Ec. 1.27, al momento de cerrarse sea igual a uno, se observó que si se aumenta el número de intervalos y el límite de la integral superior en cada evaluación, se mejoraba la precisión en la evaluación de esta presión. Otro factor importante fue el tiempo de producción el cual afecta la precisión de la evaluación numérica de la solución de Prats.

La solución de Prats al evaluarse por el método numérico de Simpson tiene la desventaja de que solo se obtiene para un tiempo de producción; desafortunadamente el tiempo que la solución necesita para cada evaluación no es práctico. Se requieren varias horas para efectuar esta evaluación por lo que se buscó otro método de integración numérica. Al tratar de obtener el comportamiento para la presión adimensional de incremento, posterior a tiempos de producción mayores se presentaron problemas de convergencia, siendo más difícil la manipulación del

programa. La Fig. 7 muestra la evaluación obtenida por medio del método de integración de Simpson del comportamiento de la presión de incremento para un $t_{pD} = 10^4$, $lmax=10$ e $imax=5000$.

Tabla 1. Valores obtenidos para diferentes $lmax$ e $imax$, para un $t_{pD} = 10^4$.

$t_{pD}=10,000$							
$lmax=10.0$		$lmax=15$		$lmax=15$		$lmax=15$	
$imax=5000$		$imax=7,500$		$imax=25000$		$imax=50,000$	
Δt_{wsD}	p_D	Δt_{wsD}	p_D	Δt_{wsD}	p_D	Δt_{wsD}	p_D
0	0.85972	0	0.85994	0	0.95680	0	0.97807
1	0.85439	1	0.85450	1	0.95088	1	0.97205
2	0.85204	2	0.85216	2	0.94833	2	0.96945
3	0.85025	3	0.85036	3	0.94638	3	0.96746
4	0.84873	4	0.84884	4	0.94473	4	0.96579
5	0.84739	5	0.84751	5	0.94327	5	0.96431
6	0.84619	6	0.84630	6	0.94196	6	0.96297
7	0.84507	7	0.84519	7	0.94075	7	0.96175
8	0.84404	8	0.84415	8	0.93963	8	0.96060
9	0.84307	9	0.84318	9	0.93857	9	0.95953
10	0.84215	10	0.84226	10	0.93758	10	0.95852

Tabla 2. Valores obtenidos para diferentes $lmax$ e $imax$ para un $t_{pD} = 5000$.

$t_{pD}=5,000$					
$lmax=10.0$		$lmax=10.0$		$lmax=15.0$	
$imax=5,000$		$imax=10000$		$imax=15000$	
Δt_{sD}	p_D	Δt_{sD}	p_D	Δt_{sD}	p_D
0	0.89948	0	0.94873	0	0.94906
10	0.87372	10	0.92188	1	0.94074
20	0.86285	20	0.91057	2	0.93716
30	0.85452	30	0.90190	3	0.93441
40	0.84750	40	0.89460	4	0.93209
50	0.84133	50	0.88818	5	0.93005
60	0.83575	60	0.88239	6	0.92820
70	0.83063	70	0.87707	7	0.92651
80	0.82587	80	0.87213	8	0.92493
90	0.82141	90	0.86750	9	0.92345
100	0.81720	100	0.86312	10	0.92204

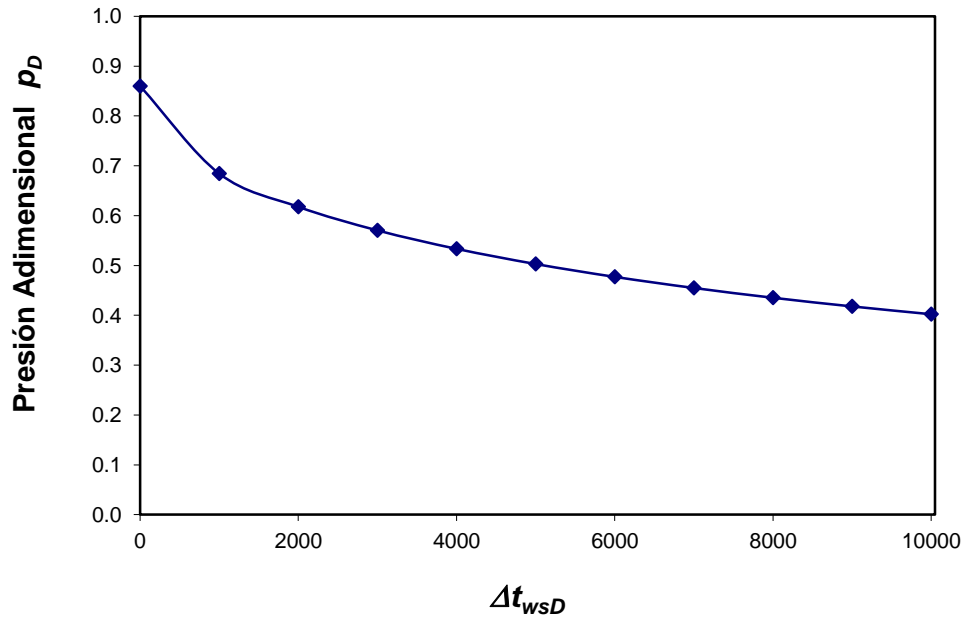


Fig. 7. Comportamiento de la presión de incremento para un pozo que produjo a presión constante, para $t_{pD} = 10^4$, obtenido por medio del método de Simpson.

Posteriormente se utilizó el software de "Mathematica", el cual tiene programados los métodos de integración. Para este caso se utilizó el método de cuadratura Gaussiana.

La cuadratura Gaussiana selecciona de manera óptima los puntos para determinar el tamaño de los intervalos para la evaluación de la suma de la integral y no en forma espaciada uniforme, de un polinomio de grado $2n - 1$ o menor, que se ajustará a una función $f(x)$ en los puntos $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ comprendido en el intervalo $[a, b]$ y los coeficientes $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$, para reducir en lo posible el error esperado que se obtiene al efectuar la aproximación siguiente:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i f(x_i). \quad (3.4)$$

Esta cuadratura proporciona resultados precisos solo si $f(x)$ se aproxima por medio de un polinomio dentro del rango $[-1, 1]$. La función puede escribirse como $f(x) = W(x)g(x)$, donde $W(x)$ es conocido y $g(x)$ es un polinomio aproximado el cual aproxima un polinomio de grado n a un conjunto de $m+1$ pares de datos (x_i, y_i) de modo que $n \leq m$; por lo tanto se tiene:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^1 W(x)g(x)dx \approx \sum_{i=1}^n w_i g(x_i).$$

Un método para definir el polinomio es el de Legendre, el cual define que si $[a, b] \neq [-1, 1]$, el cambio de variable se expresa por medio de la ecuación siguiente:

$$x = \frac{b-a}{2}y + \frac{b+a}{2},$$

$$dx = \frac{b-a}{2}dy,$$

y la fórmula de cuadratura de la Ec. 3.4 queda:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n c_i * f\left(\frac{b-a}{2}x_i + \frac{a+b}{2}\right).$$

Por la forma de la Ec. 2.23 la evaluación del programa requiere un poco más de tiempo que los métodos de Clegg, Kutasov y Ehlig-Economides, debido a que la solución está en función de integrales y requiere de sumas, y si los límites tienen valores grandes también aumentarán el cálculo para la suma de los intervalos de las integrales. Se ha discutido que las ecuaciones de Clegg y Kutasov se evalúan directamente y la ecuación de Ehlig-Economides y Ramey requiere de la aplicación de

una inversión numérica de la transformada de Laplace. Se observa en la **Fig. 8** a partir de un tiempo reducido, el comportamiento de la curva de Prats es similar al de las curvas de Clegg y Kutasov.

La Ec. 2.23 tiene una integral infinita doble, para poder evaluarla es necesario definir los límites de las integrales que representarán de la forma más exacta la forma de la ecuación, para obtener la mayor precisión posible. Se evaluó la ecuación con distintos límites para cada tiempo de producción, para conocer el comportamiento de la curva y obtener los límites más representativos para cada tiempo de producción para que la ecuación no tenga problemas de convergencia. Entre mayor sea el tiempo de producción, menores son los límites de la integral ya que las exponenciales de la integral de la Ec. 2.23 están en función del tiempo de producción y de las variables de integración. Para tiempos de producción grandes la precisión es menor, ya que como se menciona, los límites de las integrales son más pequeños y no representan a la ecuación lo más aproximada posible. Esto se muestra en la **Fig. 9**.

Comparando las **Figs. 8** y **9** se observa en el inicio de cada gráfica para los diferentes tiempos de producción, que el comportamiento depende de los límites asignados. En la **Fig. 8**, la Ec. 2.23 se evaluó con límites de integración mayores que en los de la **Fig. 9**, por lo que se puede observar que la **Fig. 8** muestra una mayor precisión al inicio que la **Fig. 9**. La **Tabla 3** muestra los límites usados para cada tiempo de producción para la **Fig. 8** y la **Fig. 9**, donde a es el límite inferior de la integral y b es el límite superior para las variables de integración v y w respectivamente.

Tabla 3. Límites de las integrales.

	Figura 8		Figura 9	
$t_{pD} = 10^4$	a_1	b_1	a_2	b_2
v	0	200	0	100
w	0	200	0	100

$t_{pD} = 10^5$				
v	0	15	0	10
w	0	25	0	20

$t_{pD} = 10^6$				
v	0	15	0	5
w	0	20	0	10

$t_{pD} = 10^7$				
v	0	5	0	2
w	0	6	0	3

$t_{pD} = 10^8$				
v	0	0.9	0	0.5
w	0	2	0	1

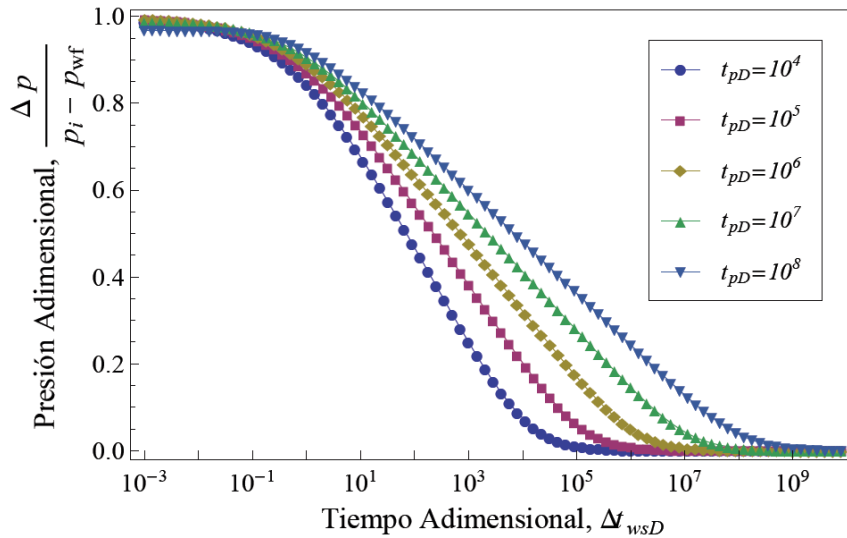


Fig. 8. Comportamiento de la presión de incremento para un pozo que produjo a presión constante, para diferentes tiempos de producción, obtenido por medio de la solución de Prats.

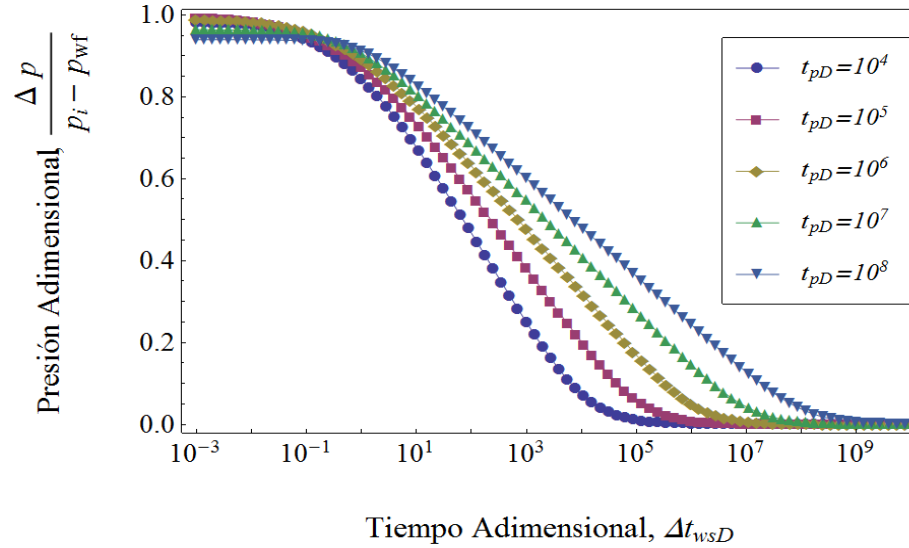


Fig. 9. Comportamiento de la presión de incremento para un pozo que produjo a presión constante, para diferentes tiempos de producción, obtenido por medio de la solución de Prats con límites de integración pequeños.

Comparando las **Figs. 3, 5 y 10**, soluciones de Clegg, Kutasov y Prats respectivamente, a partir de $\Delta t_{wsD} = 1$, se observa que para los diferentes tiempos de producción la caída de presión es más rápida con la solución de Prats, después está el método de Kutasov, siendo más lento el comportamiento con la solución de Clegg; aunque después de cierto tiempo transcurrido el comportamiento de la presión entre estos métodos es el mismo como se observa en la siguiente sección donde se compara todos los métodos para estas condiciones.

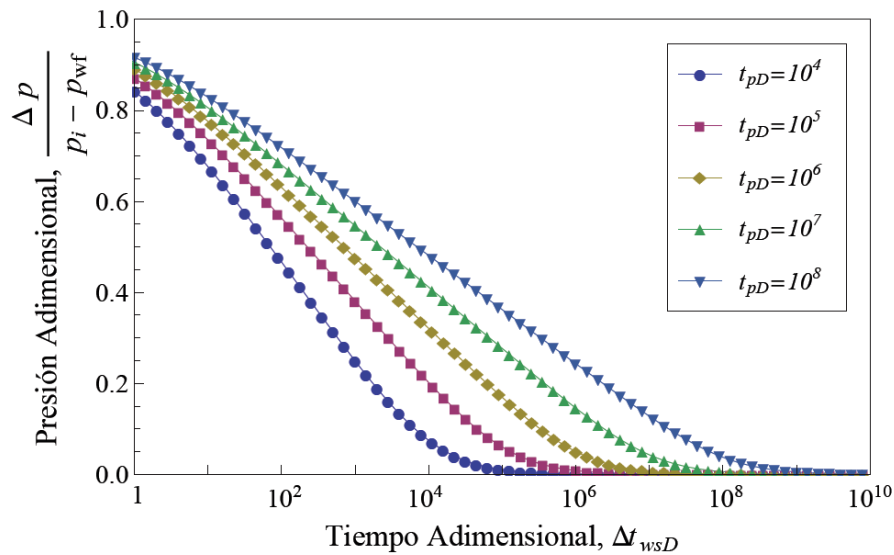


Fig. 10. Comportamiento de la presión de incremento para un pozo que produjo a presión constante, para diferentes tiempos de producción, obtenido por medio de la solución de Prats.

3.5. Comparaciones

En las **Figs. 11** a la **15** se comparan los comportamientos de presión calculados por medio de los cuatro métodos discutidos previamente, para diferentes tiempos de producción. En general, para $\Delta t_{wsD} < 1$, el comportamiento de la presión para Clegg, Kutasov y Prats difiere para los diferentes tiempo de producción, pero a partir de $\Delta t_{wsD} > 1$ aproximadamente, la declinación es la misma para los tres métodos, por lo que se puede establecer que los tres métodos muestran una buena aproximación para $\Delta t_{wsD} > 1$. El método de Ehlig-Economides y Ramey se aproxima a los otros métodos hasta $\Delta t_{wsD} > 10^4$, lo que comprueba, como ya se menciona, que el método es válido solo para tiempos de $\Delta t_{wsD} > 10^4$. En los caso de Clegg y Kutasov el comportamiento de las curvas es muy parecido desde el inicio, y aproximadamente en $\Delta t_{wsD} = 10^{-1}$, se inicia una declinación más rápida; en la curva de Prats el descenso es más suave,

incorporándose su comportamiento al de los autores Clegg y Kutasov aproximadamente a $\Delta t_{wsD} = 10^1$.

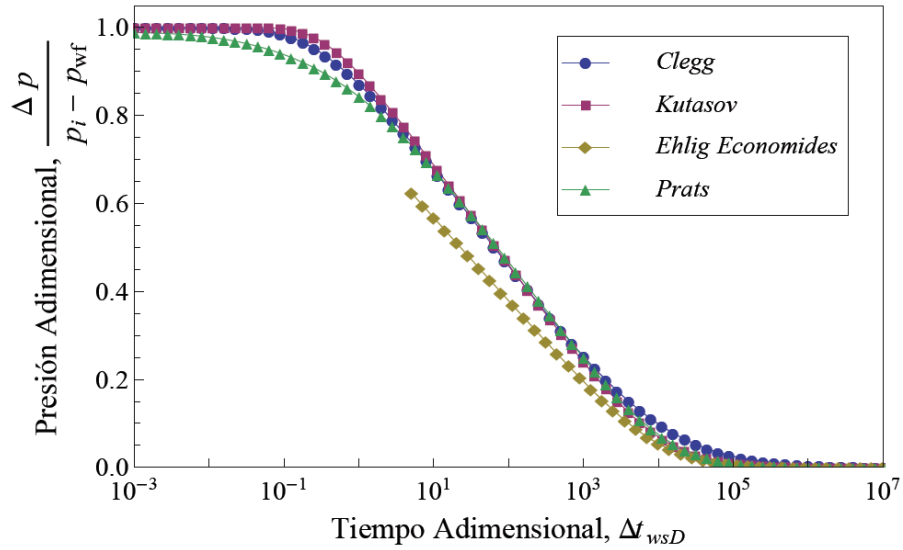


Fig. 11. Comportamiento de la presión de incremento para un pozo que produjo a presión constante, para un tiempo de producción de $t_{pD} = 10^4$, para Clegg, Kutasov, Ehlig-Economides y Prats.

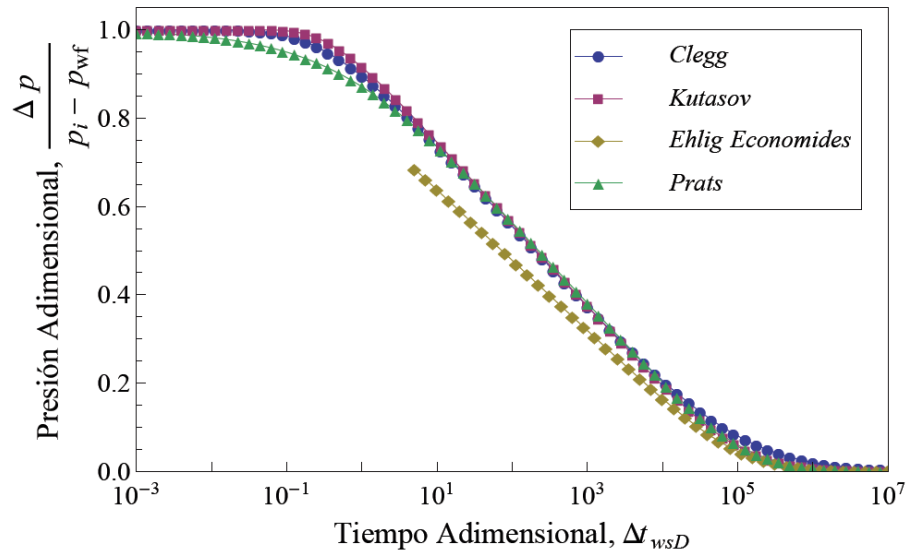


Fig. 12. Comportamiento de la presión de incremento para un pozo que produjo a presión constante, para un tiempo de producción de $t_{pD} = 10^5$, para Clegg, Kutasov, Ehlig-Economides y Prats.

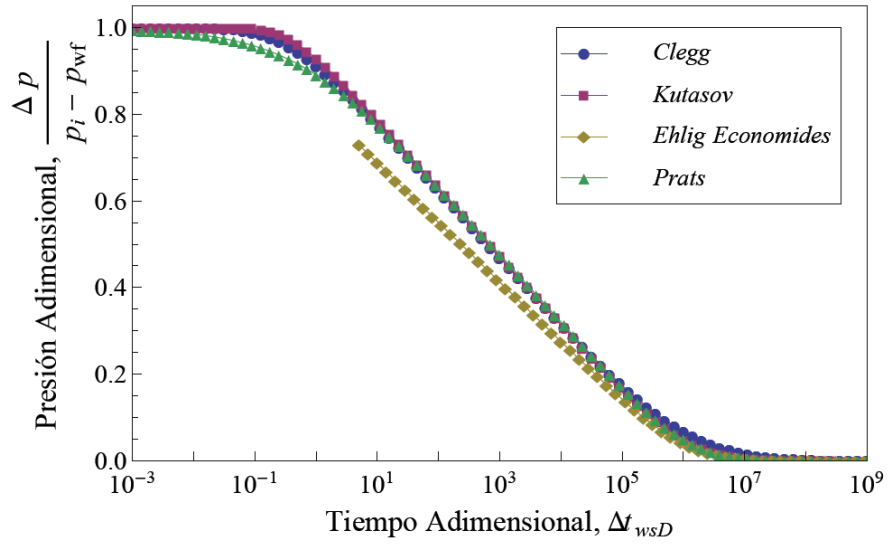


Fig. 13. Comportamiento de la presión de incremento para un pozo que produjo a presión constante, para un tiempo de producción de $t_{pD} = 10^6$, para Clegg, Kutasov, Ehlig-Economides y Prats.

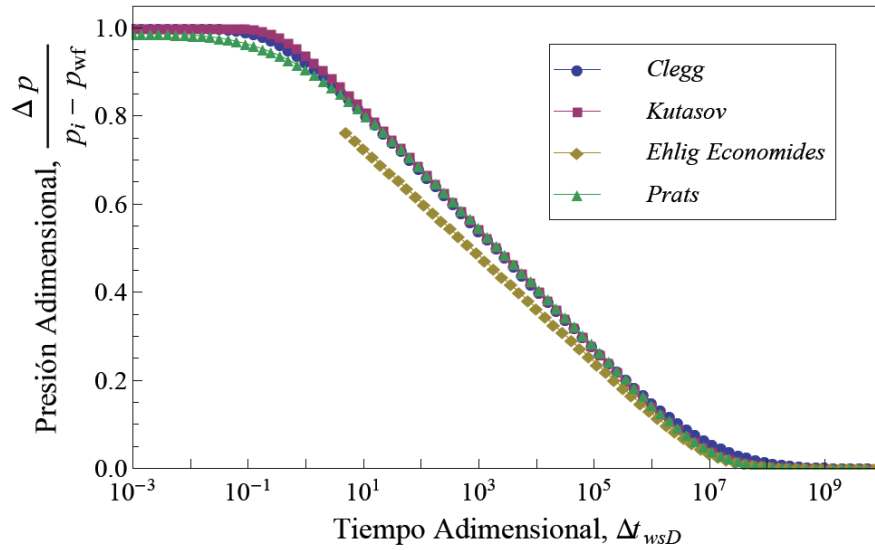


Fig. 14. Comportamiento de la presión de incremento para un pozo que produjo a presión constante, para un tiempo de producción de $t_{pD} = 10^7$, para Clegg, Kutasov, Ehlig-Economides y Prats.

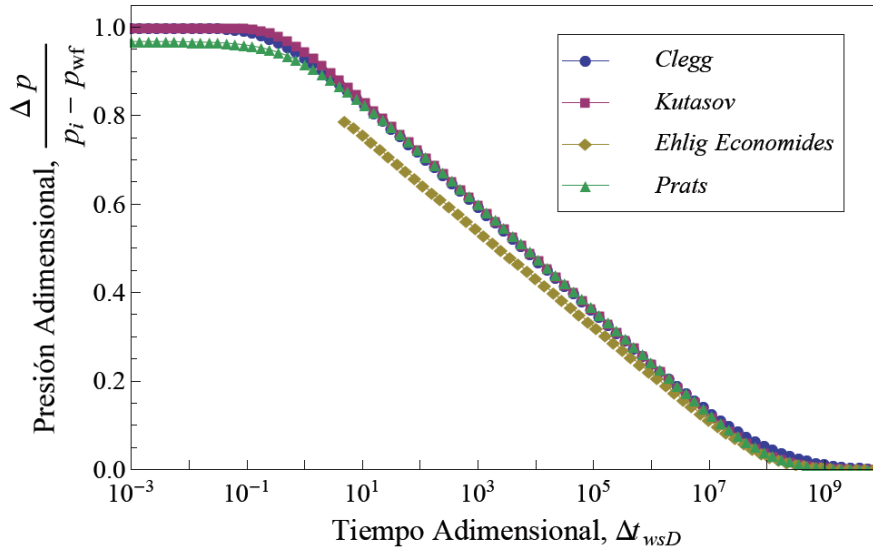


Fig. 15. Comportamiento de la presión de incremento para un pozo que produjo a presión constante, para un tiempo de producción de $t_{pD} = 10^8$, para Clegg, Kutasov, Ehlig-Economides y Prats.

3.6. Aplicación en campo

Se mostrará un ejemplo de aplicación con los datos disponibles para un pozo real de campo. El pozo A se produjo a presión constante por un año. Al tiempo de cierre la producción acumulada fue 107,711 barriles ($17,126 \text{ m}^3$) y el gasto medido a 41.4 B/D ($7.62 \times 10^{-6} \text{ m}^3$) al final del periodo de flujo. El pozo estaba localizado en el centro de una área de drene de 160 acres² ($647\,520 \text{ m}^2$). El gasto promedio para el pozo A está dado por la expresión siguiente,

$$\bar{q} = \frac{N_p}{t_p},$$

$$\bar{q} = \frac{107,711}{365} = 295 [B/D] (5.43 \times 10^{-4} \text{ m}^3 / \text{s}).$$

El gasto del flujo justo antes del cierre es considerablemente menor que el gasto promedio \bar{q} , sugiriendo que el pozo fue sometido a una declinación exponencial al momento de la prueba.

Las características del fluido del pozo y del yacimiento son las siguientes:

$\mu = 65$	<i>cp.</i>	$N = 107,711$	<i>bbl</i>
$B = 1.2$	$B@y/B@s$	$t_p = 365$	<i>días</i>
$c_t = 1.5E-05$	psi^{-1}	$q = 41.4$	<i>bbl/d</i>
$r_w = 0.33$	<i>ft</i>	$q_p = 295$	<i>bbl/d</i>
$\phi = 0.23$		$k = 92.5$	<i>md</i>
$h = 130$	<i>ft</i>	$\gamma = 0.5772$	<i>constante de Euler</i>
$s = 1.98$		$\eta = 4.1E+05$	
$r_{wa} = 0.04556$	<i>Ft.</i>		

Tabla 4. Historia de presión del pozo.

Δt (horas)	p_{ws} (psia)	Δp (psi)	$\frac{t_p + \Delta t_{ws}}{\Delta t_{ws}}$	$\frac{t_p^* + \Delta t_{ws}}{\Delta t_{ws}}$
0	41	0		
0.1	75	34	87,600	624,413
0.25	110	69	35,041	249,766
0.5	112	133	17,521	124,883
1	202	161	8,761	62,442
2	249	208	4,381	31,222
3	272	231	2,921	20,815
5	295	254	1,753	12,489
7	302	261	1,252	8,921
10	310	269	877	6,245
20	319	278	439	3,123
30	330	284	293	2,082
50	340	292	176	1,250

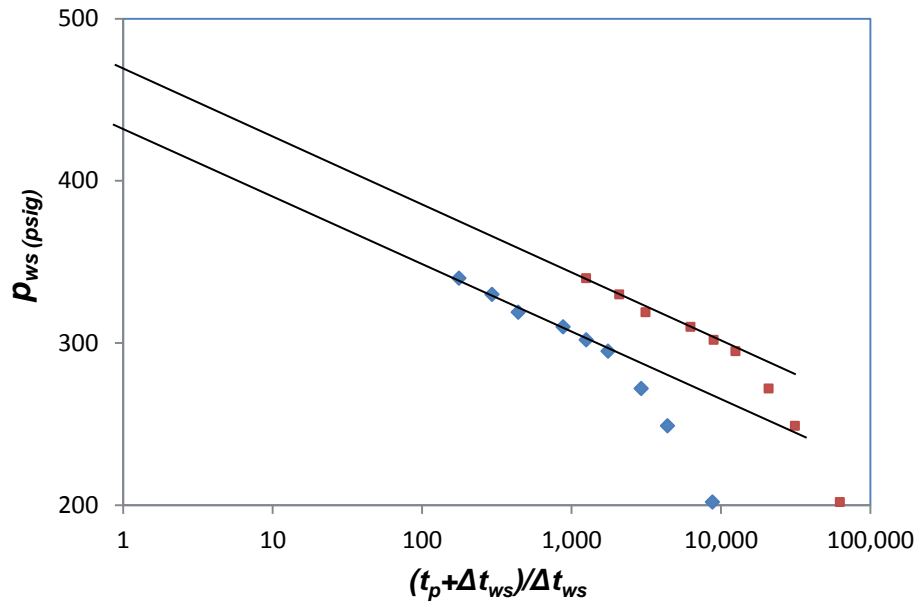


Fig. 16. Gráfica de Horner con datos de una prueba de presión usando tiempos de flujo reales y corregidos.

La **Tabla 4** muestra la historia de presión durante el cierre del pozo. Para obtener la gráfica de Horner, se gráfica la p_{ws} contra la relación $\frac{t_p + \Delta t_{ws}}{\Delta t_{ws}}$ y posteriormente se determina la pendiente. La **Fig. 16** muestra la línea recta esperada. Con la pendiente, la permeabilidad de la formación es determinada por:

$$k = \frac{162.6q_f B\mu}{mh}$$

$$k = \frac{162.6(41.4)(1.2)(65)}{(44)(130)}$$

$$k = 92.5 \text{ md}$$

Para determinar el tiempo de producción adimensional t_{pD} , se utiliza la expresión siguiente:

$$t_{pD} = 2.637 \times 10^{-4} \frac{kt_p}{\phi \mu c_t r_w^2},$$

Se evalúa el comportamiento de este pozo para 1 mes, 6 meses y 1 año; la **Tabla 5** proporciona los valores del tiempo de producción adimensional t_{pD} , definido con la ecuación anterior. Las **Figs. 17, 18 y 19** muestran el comportamiento de la presión para estos valores de tiempo.

Tabla 5. Tiempo de producción adimensional.

	t_p (días)	t_p (hrs)	t_{pD}
1 mes	30	720	719158
6 meses	180	4320	4314945
1 año	365	8762	8751748

Como se ha discutido previamente la precisión de la presión cuando se cierra el pozo en el modelo de Prats se ve más afectada al inicio para tiempos pequeños, **Fig. 17**, que corresponde para $t_{pD} = 1$ mes, y para los tiempos de producción más grandes mejora la precisión. **Figs. 18 y 19**. En general, al principio del tiempo de cierre se observa la diferencia en la exactitud del comportamiento entre los métodos, y superando este inicio el comportamiento es el mismo entre Clegg, Kutasov y Prats. La **Tabla 6** muestra los límites utilizados para los diferentes tiempos producción.

Tabla 6. Límites empleados en las integrales para $k = 92.5 \text{ md}$

	$t_{pD} = 1 \text{ mes}$		$t_{pD} = 6 \text{ meses}$		$t_{pD} = 1 \text{ año}$	
	a_1	b_1	a_2	b_2	a_2	b_2
v	0	40	0	5	0	5
w	0	45	0	6	0	6

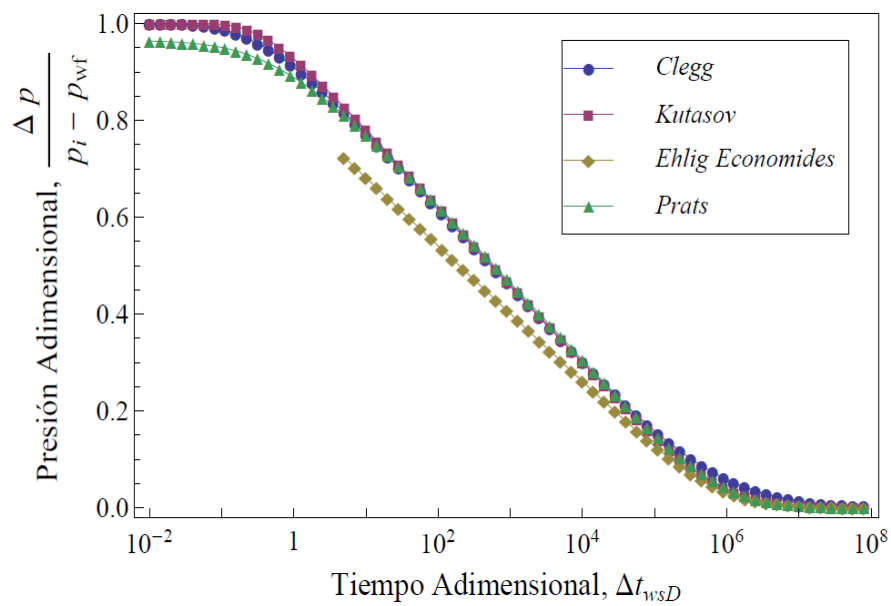


Fig. 17. Comportamientos de la presión de incremento para un pozo que produjo a presión constante por 1 mes, obtenidos por medio de las soluciones de Clegg, Kutasov, Ehlig-Economides y Prats.

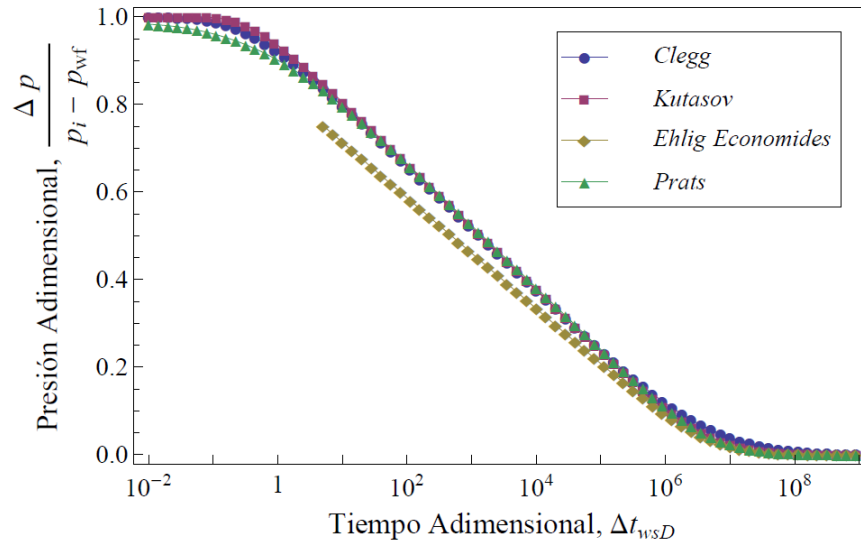


Fig. 18. Comportamientos de la presión de incremento para un pozo que produjo a presión constante, por 6 meses, obtenidos por medio de las soluciones de Clegg, Kutasov, Ehlig-Economides y Prats.

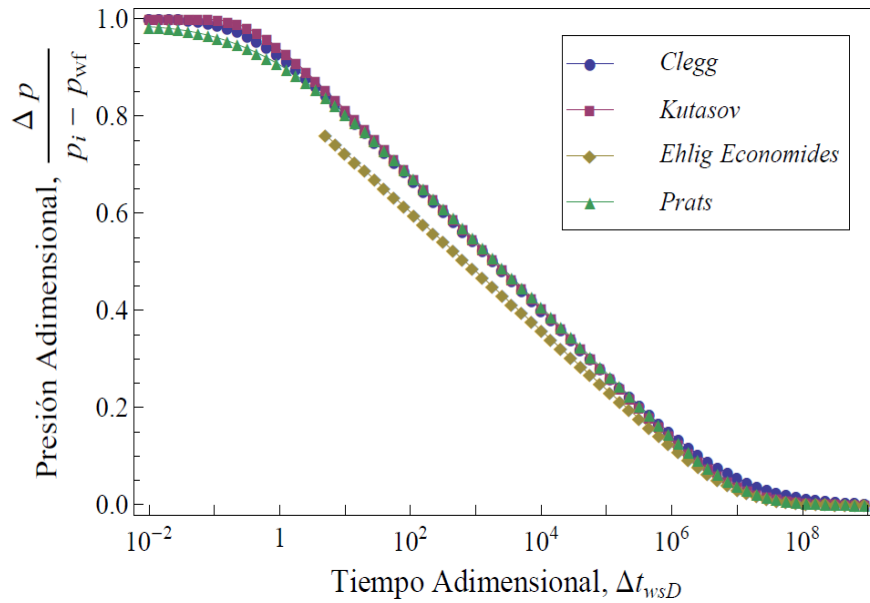


Fig. 19. Comportamientos de la presión de incremento para un pozo que produjo a presión constante, por 1 año, obtenidos por medio de las soluciones de Clegg, Kutasov, Ehlig-Economides y Prats.

3.7. Aplicación en campo con permeabilidad muy pequeña

Se tiene el mismo pozo del ejemplo de aplicación anterior, pero ahora supongamos una permeabilidad de $k = 0.1 \text{ md}$, mostrando en las **Figs. 20** a la **25** el comportamiento de la presión obtenido por medio de los métodos. Cada una de las figuras antes mencionadas muestra el comportamiento de la ecuación de Prats, la cual se evaluó con distintos límites para cada tiempo de producción. La **Tabla 7** muestra los tiempos de producción evaluados con una $k = 0.1 \text{ md}$. La relación entre el tiempo de producción y los límites de las integrales se muestra en la **Tabla 8**.

Tabla 7. Tiempo de producción adimensional para $k = 0.1 \text{ md}$.

	$t_p \text{ (dias)}$	$t_p \text{ (hrs)}$	t_{pD}
1 mes	30	720	777
6 meses	180	4320	4665
1 año	365	8762	9461

Tabla 8. Límites empleados en las integrales de la Ec. 2.23.

	Figura 19		Figura 20	
$t_{pD} = 1 \text{ mes}$	a_1	b_1	a_2	b_2
v	0	500	0	200
w	0	500	0	200

	Figura 21		Figura 22	
$t_{pD} = 6 \text{ mes}$	a_1	b_1	a_2	b_2
v	0	400	0	100
w	0	400	0	100

$t_{pD} = 1 \text{ año}$	Figura 23		Figura 24	
	a_1	b_1	a_2	b_2
v	0	250	0	100
w	0	250	0	100

Se observa en la **Figs. 20** que para un tiempo de producción de un mes se indica una mejor precisión al inicio, ya que se utilizaron límites de integración mayores que empleados en la **Fig. 21**, como se puede verificar en la **Tabla 7**. Lo mismo sucede con las gráficas que muestran el comportamiento de la presión para un tiempo de producción de 6 meses y un año, donde los límites de integración fueron mayores en las **Figs. 22 y 24**. En las **Figs. 24 y 25** se observa también que la diferencia entre los resultados de Clegg y Kutasov disminuye conforme el tiempo de producción aumenta aunque los límites sean menores a los tiempos de producción menores. Cabe mencionar que el comportamiento de todas las evaluaciones es similar a partir $\Delta t_D = 1$ aproximadamente.

Los límites se fijan con base en que la solución de la ecuación converja para cada tiempo de producción adimensional.

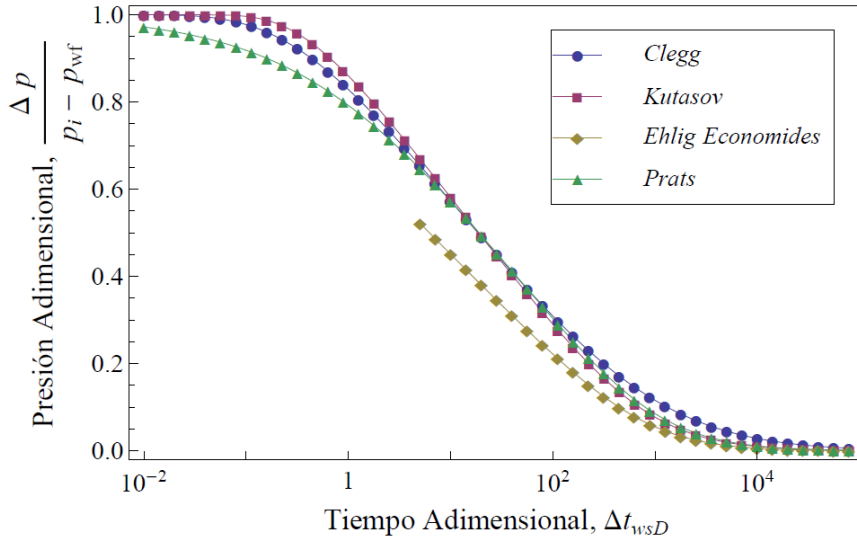


Fig. 20. Comportamientos de la presión de incremento para un pozo que produjo a presión constante por 1 mes, para $k = 0.1 \text{ md}$, obtenidos por medio de las soluciones de Clegg, Kutasov, Ehlig-Economides y Prats.

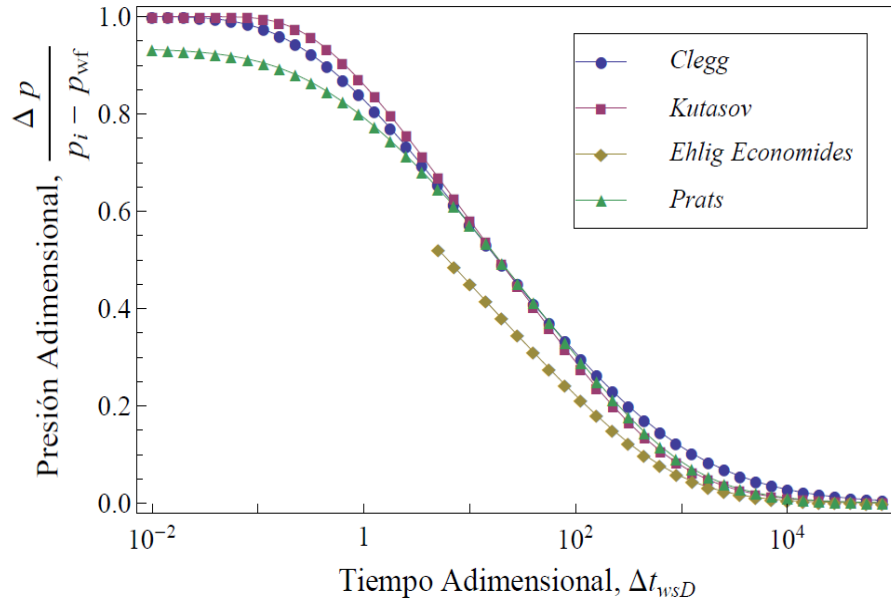


Fig. 21. Comportamientos de la presión de incremento para un pozo que produjo a presión constante por 1 mes, para $k = 0.1 \text{ md}$, obtenidos por medio de las soluciones de Clegg, Kutasov, Ehlig-Economides y Prats.

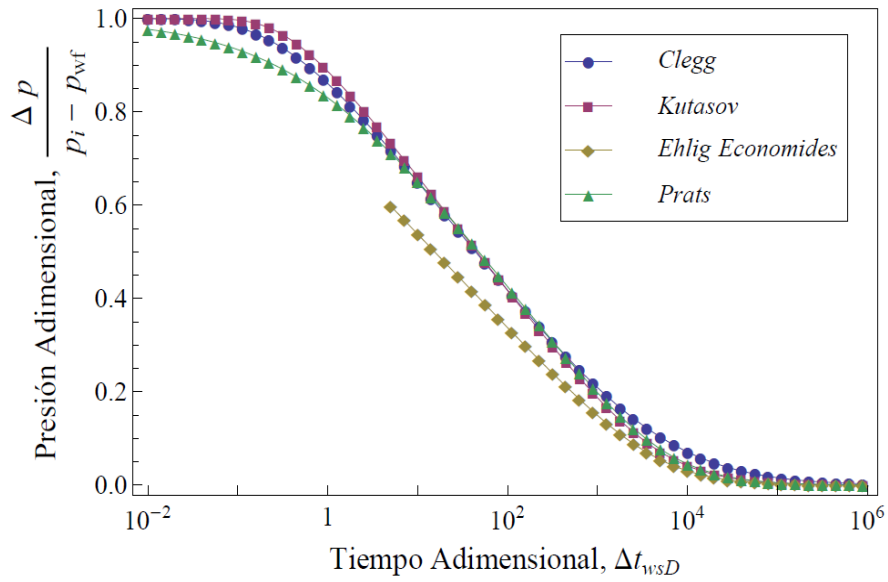


Fig. 22. Comportamientos de la presión de incremento para un pozo que produjo a presión constante por 6 meses, para $k = 0.1 \text{ md}$, obtenidos por medio de las soluciones de Clegg, Kutasov, Ehlig-Economides y Prats.

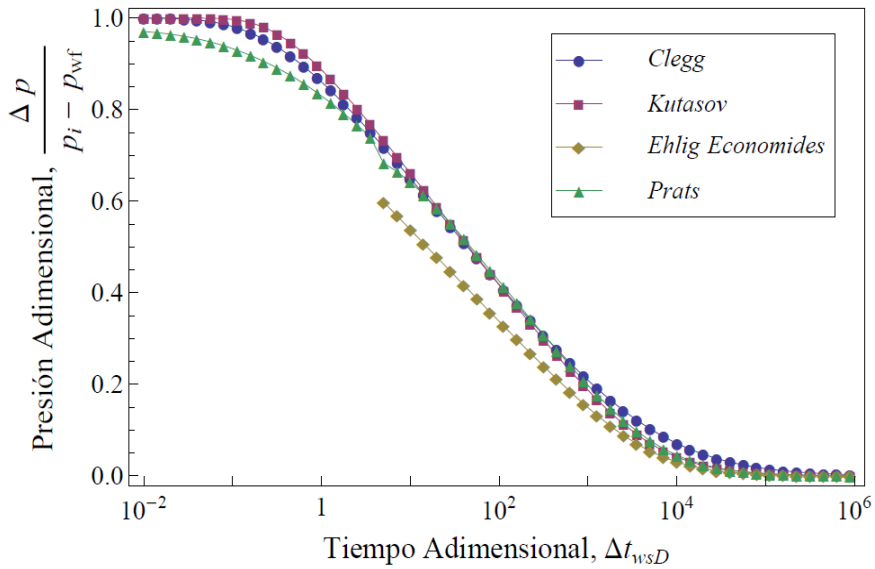


Fig. 23. Comportamientos de la presión de incremento para un pozo que produjo a presión constante por 6 meses, para $k = 0.1 \text{ md}$, obtenidos por medio de las soluciones de Clegg, Kutasov, Ehlig-Economides y Prats.

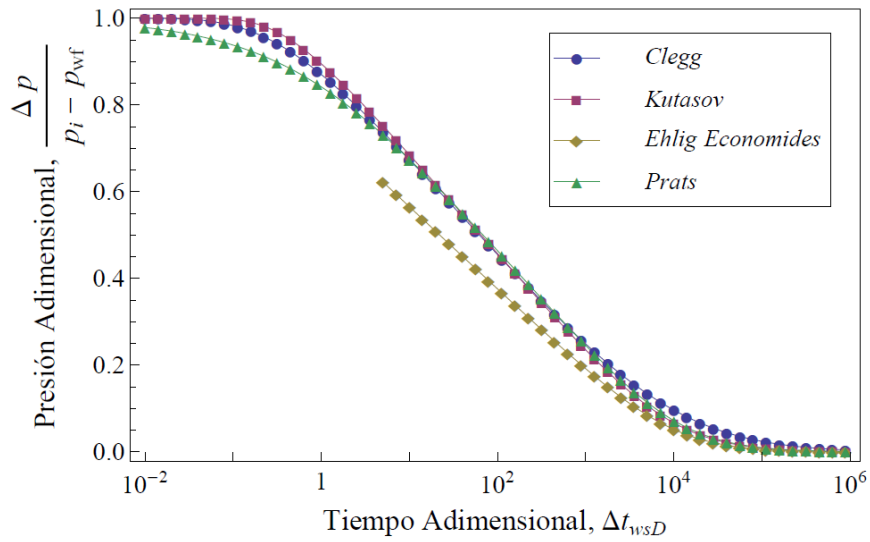


Fig. 24. Comportamientos de la presión de incremento para un pozo que produjo a presión constante por 1 año, para $k = 0.1 \text{ md}$, obtenidos por medio de las soluciones de Clegg, Kutasov, Ehlig-Economides y Prats.

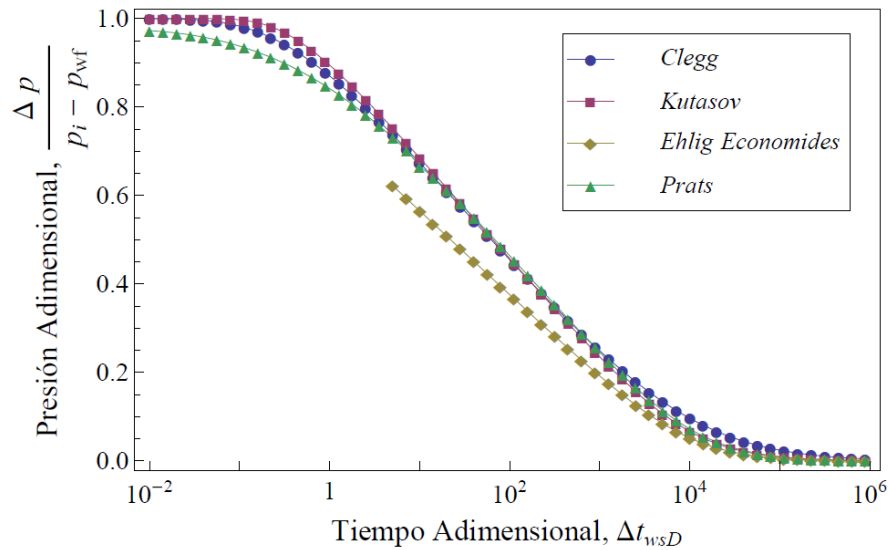


Fig. 25. Comportamientos de la presión de incremento para un pozo que produjo a presión constante por 1 año, para $k = 0.1 \text{ md}$, obtenidos por medio de las soluciones de Clegg, Kutasov, Ehlig Economides y Prats.

3.8. Método de Horner para el análisis de la presión de incremento.

El método de Horner se ha utilizado extensamente para analizar las pruebas de incremento de presión en pozos que producen a gasto constante. En el análisis del incremento de presión los pozos que presentan un comportamiento variable decreciente del gasto de tipo exponencial previamente al cierre, el método de Horner considera al último gasto de producción como el valor del gasto constante equivalente, es exacto para pruebas cortas en pozos. El método de Horner proporciona un valor correcto de la permeabilidad de la formación, así como la estimación del factor de daño y la presión inicial del yacimiento.

La presión del pozo durante el periodo de cierre, p_{ws} , se grafica contra la relación de tiempo $(t_p + \Delta t_{ws})/\Delta t_{ws}$ en una gráfica semilogarítmica. En una gráfica de Horner convencional adimensional a gasto constante, la presión dimensional se define por medio de la Ec. 1;

$$p_{sD} = \frac{(2\pi \times 10^{-6})kh}{qB\mu} (p_i - p_{ws}), \quad (3.5)$$

se grafica como función de la relación de tiempo $(t_p + \Delta t_{ws})/\Delta t_{ws}$. Uraiet propone que para mantener una correspondencia directa con respecto al caso de producción del pozo a gasto constante, la presión adimensional de Horner para producción previa a presión constante de un pozo, se define como;

$$p_{sD} = \frac{p_D}{q_D}, \quad (3.6)$$

donde el gasto está en función del tiempo de producción. La **Fig. 26** muestra el comportamiento del gasto del pozo cuando está produciendo a presión constante,

definido por Prats en la Ec. 2.9, para valores de $10^4 < t_{pD} < 10^9$, observándose que el gasto disminuye lentamente en este periodo.

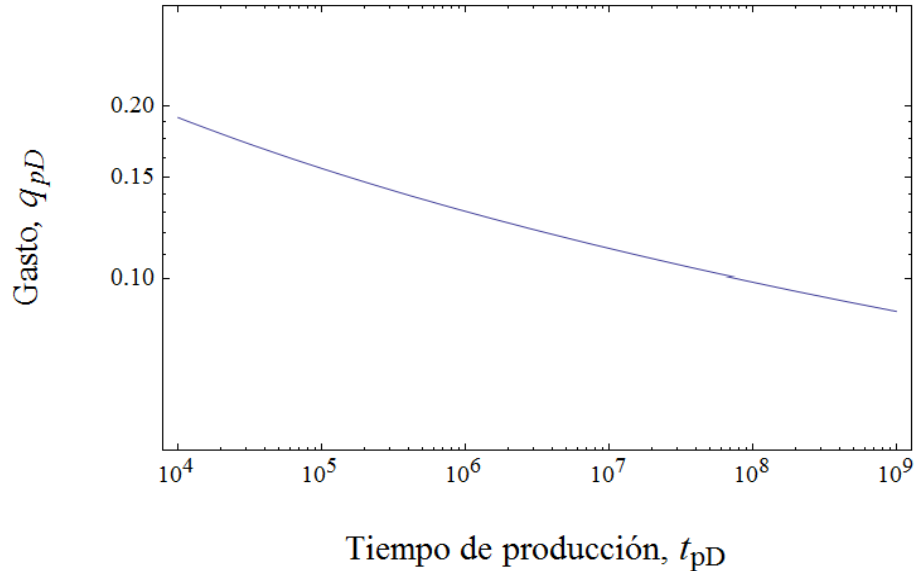


Fig. 26. Comportamiento del gasto de producción contra el tiempo de producción en un pozo que produce a presión constante.

Se ha demostrado que el comportamiento del gasto a tiempos largos para pozos que producen a presión constante en un yacimiento infinito es similar al comportamiento de la caída de presión en un pozo que produce a gasto constante.

La **Fig. 27.** muestra una gráfica semilogarítmica de $1/q_{pD}$ contra t_{pD} , para un yacimiento infinito. Se observa que para $t_{pD} > 10^3$, el comportamiento es una línea recta con una pendiente aproximadamente de 1.151.

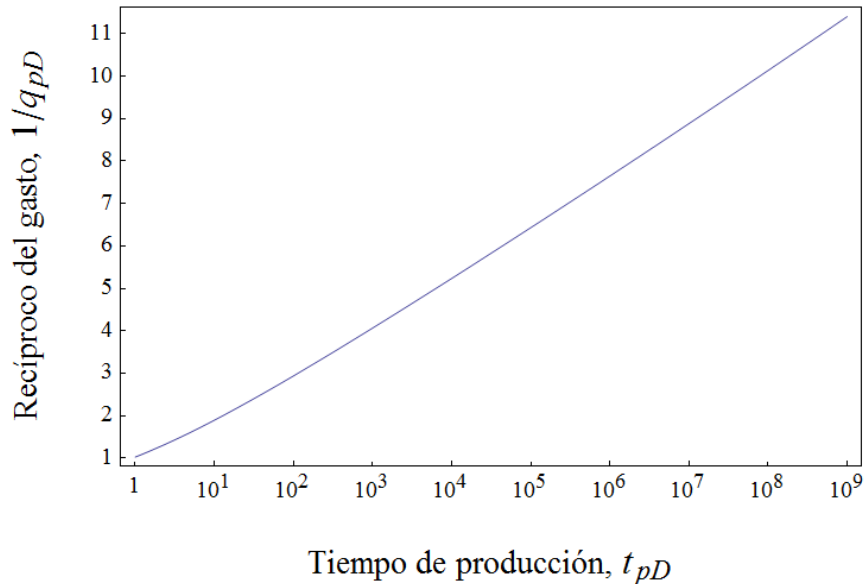


Fig. 27. Comportamiento de la inversa del gasto en un pozo que produce a presión constante en un yacimiento infinito.

Para determinar el valor del tiempo de producción t_p , que interviene en la relación $(t_p + \Delta t_{ws}) / \Delta t_{ws}$, Horner recomendó que el tiempo de producción se sustituya por un pseudo tiempo de producción anterior al cierre si el gasto varía durante el periodo de flujo. En su análisis, Uraiet no siguió esta aproximación, debido a que la base para definir p_{sD} (**Ec. 3.6**) es empírica, el autor utilizó el tiempo real de producción en el cálculo de la relación del tiempo de Horner.

Uraiet trató de satisfacer dos criterios en la representación grafica: el primero, ya establecido, haber una correspondencia uno a uno entre los resultados a gasto constante y a presión constante para facilitar la comprensión de los nuevos resultados. Segundo, siempre que sea posible el procedimiento de cálculo más simple se seguirá y el cálculo de valores promedio se evitará.

Siguiendo la metodología de Uraiet para la interpretación de las pruebas de incremento de presión precedida por producción a presión constante, se obtuvo la **Fig.**

28, sustituyendo en la **Ec. 3.6** las **Ecs. 2.23 y 2.9** para diferentes tiempos de producción, donde como ya se definió el gasto q_D de la **Ec. 3.6**, es el gasto al momento del cierre.

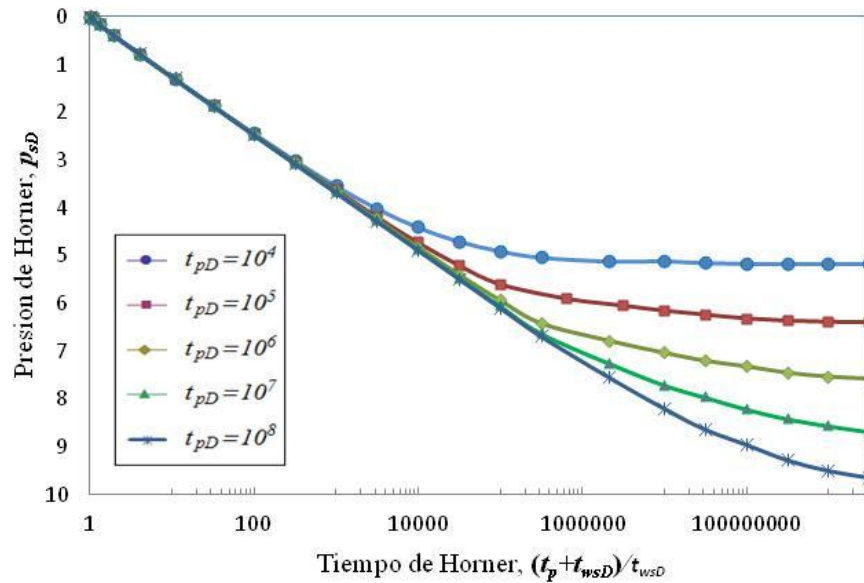


Fig. 28. Comportamiento de la presión de Horner para un pozo que produjo a presión constante en un yacimiento infinito.

En los resultados presentados en la **Fig. 28** se observa que al aumentar los tiempos de producción, se definen líneas rectas de mayor extensión en la gráfica de Horner.

Uraiet estableció que la permeabilidad se estima empleando la pendiente de la porción de la línea recta de la curva de incremento. La caída de presión por daño y la presión promedio se calculan extrapolando la línea recta a p_{1hr} y $(t_p + \Delta t_{ws}) / \Delta t_{ws} = 1$, respectivamente.

Las pendientes de la curvas continúa aumentando conforme el tiempo de cierre aumenta definiéndose una línea recta para $\Delta t_{wsD} \leq t_{pD}$ y para $\Delta t_{wsD} > t_{pD}$ las pendientes

decrecerán y eventualmente alcanzara el valor de cero puesto que la presión del pozo será igual a la presión estática del yacimiento. El valor de la pendiente de la línea recta debe estar entre 1.1 y 1.2 (dentro del 4% del valor convencional de 1.151). El valor de la pendiente definida por la solución de Prat en la **Fig. 27** es de 1.18, el cual está entre los valores establecidos.

Puede concluirse que, las pendientes son obtenidas en una gráfica de Horner cuando $\Delta t_{wsD} \leq t_{pD}$, y que estas líneas rectas tendrán pendientes dentro del 4% del valor convencional 1.151. La **Ec. 3.7** se utiliza en el caso a gasto constante y puede utilizarse para el caso de producción a presión constante.

$$kh = 1.832 \times 10^5 \frac{qB\mu}{m}, \quad (3.7)$$

donde q es el gasto instantáneo al momento del cierre y m es la pendiente de la gráfica de Horner (**Fig. 28**).

Desde un punto de vista práctico, Uraiet simplifica el procedimiento para realizar una prueba de incremento de presión y analizar los datos registrados a presión constante. Si la presión del pozo antes del cierre se mantiene constante, solo valores instantáneos de gasto y tiempo son necesarios.

3.9. Función Derivada

Durante el análisis de las pruebas de presión, en su mayoría efectuadas a gasto constante, siempre es posible trazar una línea recta a través de ciertos puntos en una gráfica específica de interpretación, y bajo ciertas consideraciones esta línea recta puede no ser correcta para definir el modelo de flujo. Ante tal situación, es necesario determinar el tipo de flujo que domina a la prueba antes de utilizar una gráfica

específica para el análisis. Es esencial tener un proceso de identificación del régimen de flujo para la identificación correcta de la prueba de presión. Como se mencionó, los datos de la función derivada se representan por una línea recta y dependiendo del valor de la pendiente se define el tipo de flujo. La combinación de la función derivada de la presión y de la presión convencional en una grafica, representa una herramienta muy útil de diagnostico de flujo.

El análisis de pruebas en función de la derivada se ha enfocado hacia pozos que han producido a gasto constante, por lo al evaluar para el caso de producción a presión constante se requiere, como en el caso de la grafica de Horner propuesta por Uraiet, normalizar la función derivada para obtener una correspondencia entre los dos casos. Para normalizar la función derivada se utilizó el último gasto de producción antes del cierre. La calidad de los datos de presión tiene una influencia mayor en los cálculos de la función derivada. Sin embargo, para el caso de pruebas de incremento de presión precedida por producción a presión constante, como ya se mencionó, la literatura es limitada.

Para determinar la función derivada de las soluciones de Clegg, Kutasov, Ehlig-Economides y Prats, se derivó cada solución con respecto al tiempo de cierre. La derivada analítica de la solución de Clegg (Ec. 1.6) con respecto al tiempo de cierre es la siguiente (**Ec. 3.8**):

$$\frac{dp_{sD}}{d\Delta t_{wsD}} = \frac{2 \left\{ K_0 \left(\frac{r_D}{\sqrt{2t_{pD}}} \right) - K_0 \left(\frac{r_D}{\sqrt{2\Delta t_{wsD}}} \right) \right\}}{\left(1 - \frac{\Delta t_{wsD}}{t_{pD}} \right) t_{pD} (\ln 8t_{pD} - 2\gamma)} - \frac{K_1 \left(\frac{r_D}{\sqrt{2t_{pD}}} \right)}{\sqrt{2t}^{3/2} \left(1 - \frac{\Delta t_{wsD}}{t_{pD}} \right) (\ln 8t_{pD} - 2\gamma)}. \quad (3.8)$$

La derivada analítica de la solución de Kutasov (Ec. 1.50) con respecto al tiempo de cierre está expresada por la **Ec. 3.9**:

$$\frac{dp_{sD}}{d\Delta t_{wsD}} = \frac{e^{-\frac{1}{4\Delta t_{wsD}}} Ei\left(\frac{1}{4t_{pD}^*} + \frac{1}{4\Delta t_{wsD}}\right)}{4t_{pD}^* Ei\left(-\frac{1}{4t_{pD}^*}\right)^2} - \frac{e^{-\frac{1}{4\Delta t_{wsD}} - \frac{1}{4t_{pD}^*}}}{4\left(\frac{1}{4t_{pD}^*} + \frac{1}{4\Delta t_{wsD}}\right) t_{pD}^* Ei\left(\frac{1}{4t_{pD}^*}\right)}. \quad (3.9)$$

La derivada de la solución de Ehlig-Economides y Ramey (Ec. 1.21) con respecto al tiempo de cierre no se determinó de forma analítica, pues al estar la solución en función del gasto en el espacio de Laplace, se optó utilizar un método numérico para evaluar la derivada. El comportamiento de la derivada fue oscilatorio lo cual no permitió definir la función derivada de la solución de Ehlig-Economides y Ramey.

La derivada analítica de la solución de Prats (Ec. 2.23) con respecto al tiempo de cierre esta expresada por la **Ec. 3.10**:

$$\frac{dp_{sD}(\Delta t_{wsD})}{d\Delta t_{wsD}} = \frac{16}{\pi^4} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{w^2 dw dv}{(J_0^2(v) + Y_0^2(v)) w v (J_1^2(w) + Y_1^2(w))} \left[\frac{(e^{-v^2 t_{pD}} - e^{-w^2 t_{pD}}) e^{-w^2 \Delta t_{wsD}}}{(v^2 - w^2)} \right] \quad (3.10)$$

También se optó por emplear un método de aproximación numérico para el caso de la solución de Prats. La derivada de la presión, que ha demostrado en el campo su utilidad, se aproxima por medio del método numérico de diferencias finitas centrales, la cual se define como:

$$\Delta p'_{j+1/2} = \left| \frac{(p_{wf})_{j+1} - (p_{wf})_j}{t_{j+1} - t_j} \right|, \quad \text{para } 1 \leq j \leq n.$$

La estimación de esta derivada se asigna al tiempo medio entre cualquier par de puntos de la presión:

$$t_{j+1/2} = t_j + \frac{(t_{j+1} - t_j)}{2}, \quad \text{para } 1 \leq j \leq n-1.$$

La experiencia práctica ha mostrado que la utilización de este método numérico proporciona muy buenos resultados para analizar pruebas en pozos que producen a gasto constante. Siguiendo este mismo procedimiento para pozos que producen a presión constante antes del cierre, se obtuvieron los datos del método numérico mostrado en la **Fig. 29**.

La **Fig. 29**, muestra el comportamiento de la función derivada de la presión de la solución de Prats (FDP), analítica (FDPA) y numéricamente (FDPN). Se puede observar que el comportamiento es el mismo para los dos casos. A tiempos cortos de cierre presentan una pendiente de 0.8 aproximadamente. Para la **Fig. 29** se utilizó un $\Delta t_{wsD} = 10^6$, y para un $t_{pD} = 10^8$ él $q_{pD} = 0.0986388$. A partir de un $\Delta t_{wsD} > 10^3$, la función derivada tiene un valor constante de 0.52 aproximadamente para las dos funciones.

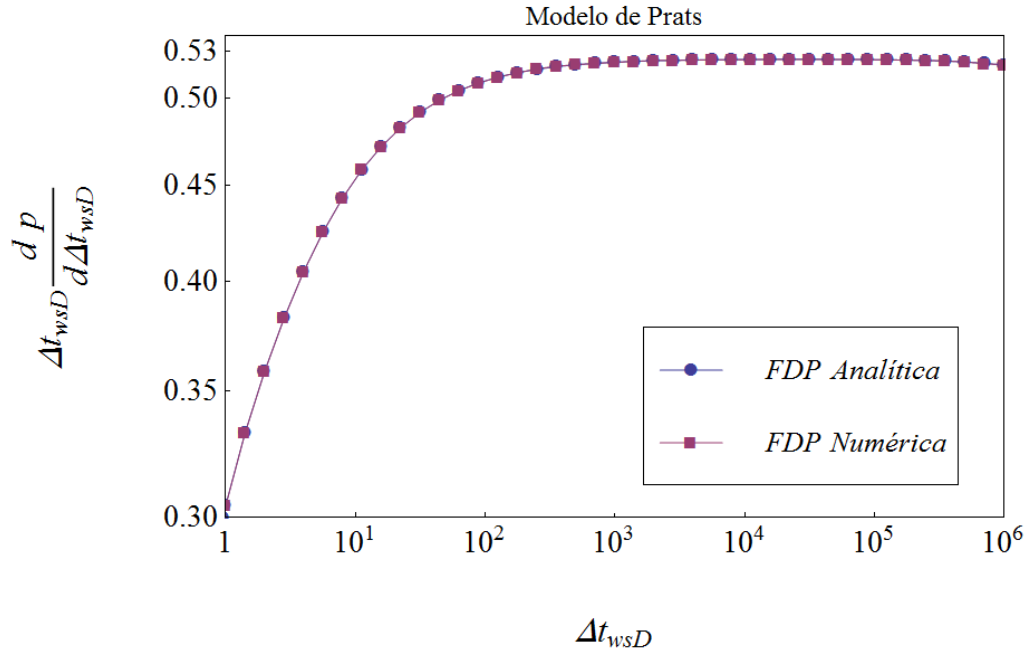


Fig. 29. Comportamiento analítico y numérico de la función derivada de la solución de Prats para $t_{pD} = 10^8$ y $\Delta t_{wsD} = 10^6$

Ha sido discutido en la literatura que obtener un gasto constante durante una prueba especialmente a tiempos cortos, es muy difícil por eso son de gran utilidad las pruebas a presión constante. El cambio de presión medido durante un prueba de incremento es la diferencia entre la presión de cierre p_{ws} y la presión de flujo inmediatamente antes del cierre. Así la amplitud de la caída de presión limita la magnitud de la respuesta de incremento. La **Fig. 30** muestra que para $\Delta t_{wsD} = 10^7$ y $t_{pD} = 10^8$ no se cumple la condición de que Δt_{wsD} máximo $< 0.1t_{pD}$, pues para $\Delta t_{wsD} \geq 5 \cdot 10^5$ comienza un decremento del valor constante, por lo tanto la relación sería de $\Delta t_{wsD} = 0.01t_{pD}$ como se observa en la **Fig. 29**.

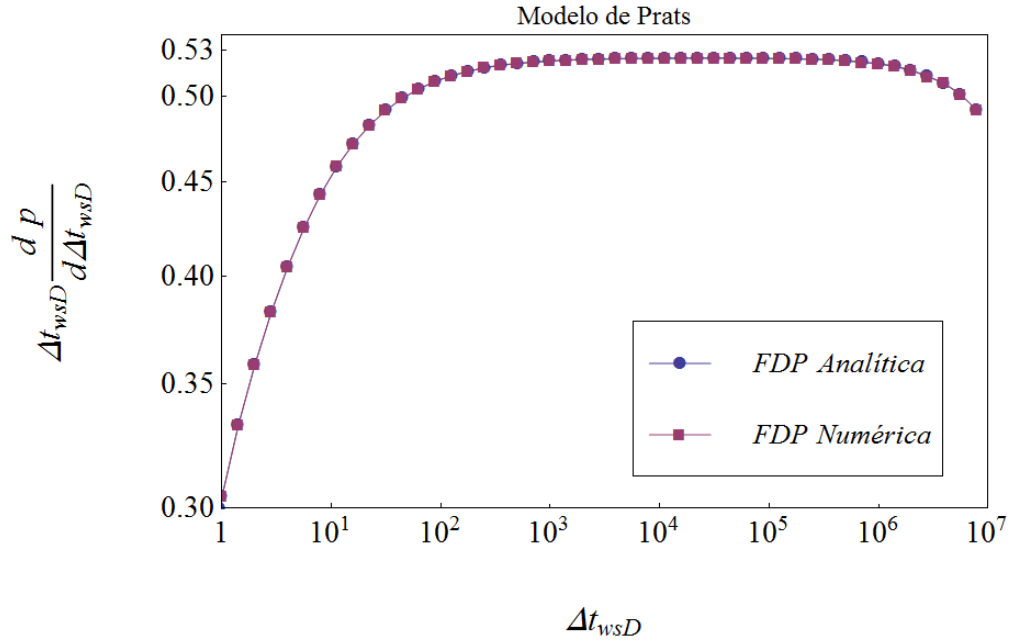


Fig. 30. Comportamiento de la función derivada de la solución de Prats para $t_{pD} = 10^8$ y $\Delta t_{wsD} = 10^7$.

Cuando el método de Horner se aplica a la función derivada de una prueba de incremento realizada posteriormente a producción del pozo a presión constante. Bourdet y Col. (1983) han derivado la expresión siguiente para FDP para pruebas de incremento depresión, precedidas por producción del pozo a gasto constante:

$$\frac{dp_{ws}}{d \ln \left[\frac{\Delta t_{ws}}{(t_p + \Delta t_{ws})} \right]} = \frac{(t_p + \Delta t_{ws})}{\Delta t_{ws}} \Delta p'_{ws},$$

donde

$$\Delta p'_{ws} = \frac{dp_{ws}}{d \Delta t_{ws}}.$$

. La Fig. 31 presenta resultados obtenidos al calcular la FDP para el caso de una prueba de incremento de presión, realizada posteriormente a producción del pozo a

presión, observándose que el descenso causado por la derivación relativa del tiempo de cierre Δt_{wsD} con respecto al tiempo de producción t_{pD} , inicia aproximadamente a

$$\Delta t_{wsD} = 10^5 = 0.001 t_{pD}.$$

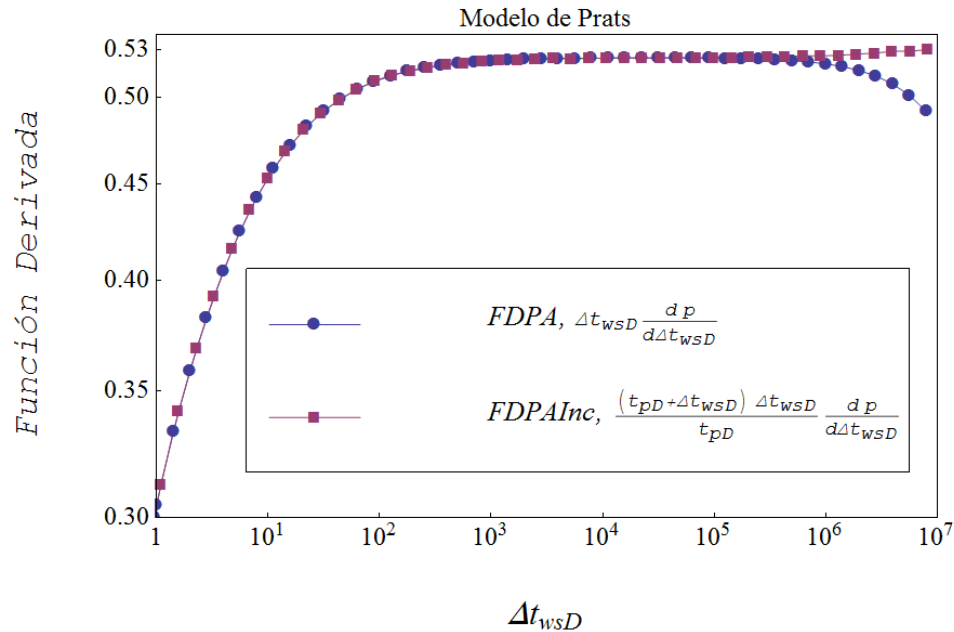


Fig. 31. Comportamiento de la función derivada de la solución de Prats para $t_{pD} = 10^8$ y $\Delta t_{wsD} = 10^7$ con el factor de Horner.

La **Fig. 32** muestra el comportamiento de la función derivada de las soluciones de Clegg, Kutasov y Prats para $t_{pD} = 10^8$ y $\Delta t_{wsD} = 10^6$. Las FDP's de las soluciones muestran comportamientos similares, aunque con rangos diferentes para tiempos de cierre cortos, y conforme aumenta el tiempo de cierre coinciden para un rango de $10^3 < \Delta t_{wsD} < 10^5$, donde muestran un comportamiento constante en función del tiempo de aproximadamente 0.52. La FDP de Clegg disminuye con respecto a 0.52 a un tiempo de cierre menor que las FDP de Kutasov y Prats. Las funciones derivadas de

Kutasov y Prats muestran un mismo comportamiento para $\Delta t_{wsD} > 10^3$. En general, la caída de presión a tiempo cortos de cierre va aumentando y este aumento cada vez es menor hasta ser constante. La relación que sería válida para las tres funciones derivadas es $\Delta t_{wsD} = 0.001 t_{pD}$ como se muestra en la **Fig. 33**. El tiempo límite para la aplicación de las soluciones (curvas tipo) obtenidas para pruebas de decremento, a pruebas de incremento con condiciones previas de producción a presión constante, se ha establecido que es $\Delta t_{wsD} \leq 0.001 t_{pD}$, como se muestra en la **Fig. 33**.

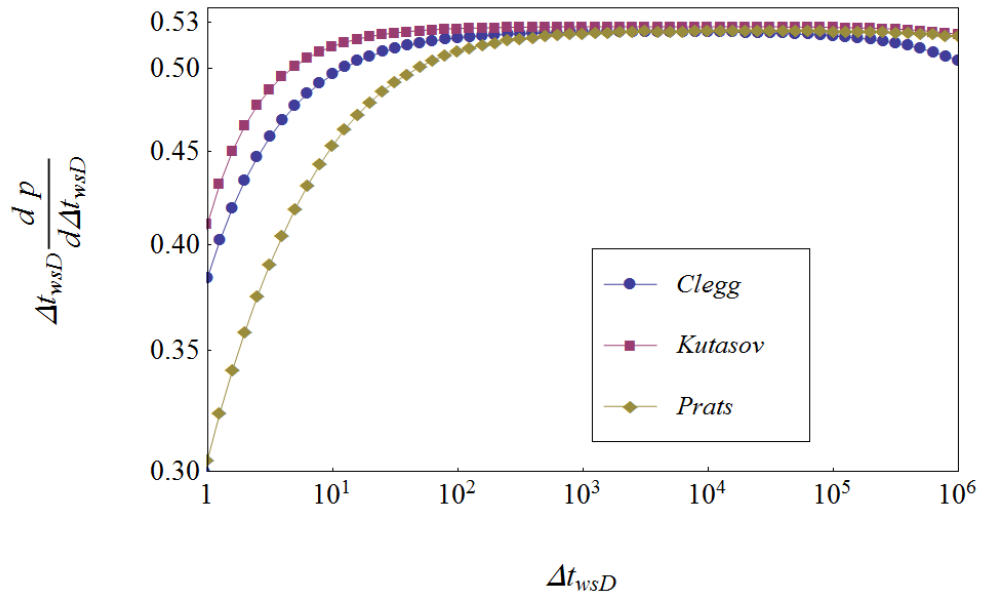


Fig. 32. Comportamiento de la función derivada de las solución de Clegg, Kutasov y Prats para $t_{pD} = 10^8$ y $\Delta t_{wsD} = 10^6$ con el factor de Horner.

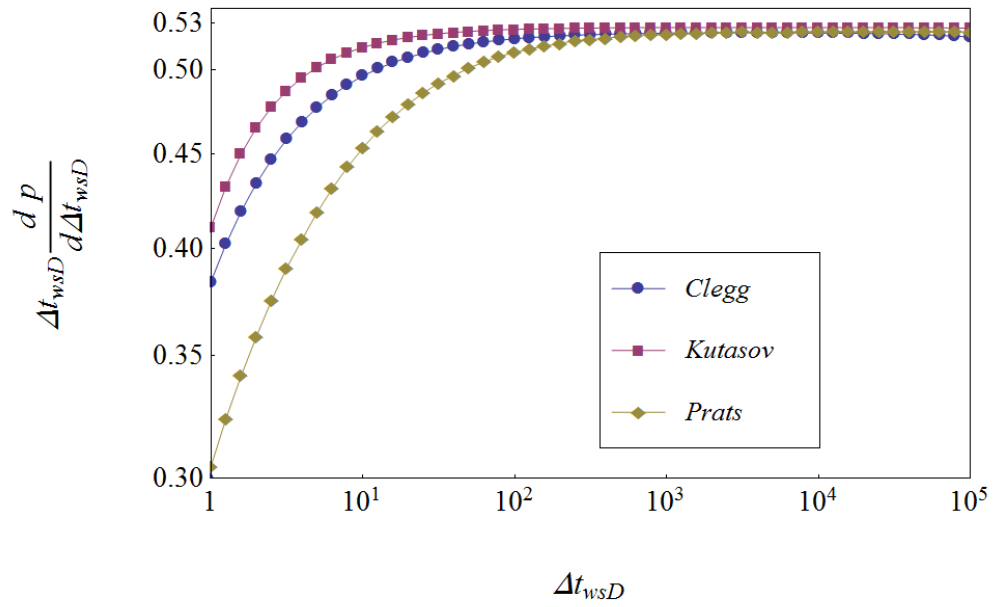


Fig. 33. Comportamiento de la función derivada de las solución de Clegg, Kutasov y Prats para $t_{pD} = 10^8$ y $\Delta t_{wsD} = 10^5$ con el factor de Horner.

Capítulo 4

CONCLUSIONES

Con base en las soluciones obtenidas por Clegg, Kutasov, Ehlig-Economides y Ramey y Prats, para determinar la presión de incremento en pozos que producen a presión constante antes del cierre, en un yacimiento infinito, y sus evaluaciones realizadas, se establecen las conclusiones siguientes:

1. Los diferentes métodos que se emplearon Clegg, Kutasov, Ehlig-Economides y Prats para obtener las soluciones discutidas, permitieron resolver ecuaciones con integrales de variable compleja y series infinitas de distintas formas.
2. Cada uno de los cuatro métodos estudiados muestra que por distintas formas se obtuvo una solución válida para la ecuación de difusividad, evaluada con las condiciones de frontera propuestas, así como ventajas y desventajas del método.
3. La solución propuesta por Clegg utiliza el método directo de inversión de la transformada de Laplace de Schapery, el cual permitió superar las dificultades de la integral compleja de inversión y dio una solución sencilla para su evaluación numérica. proporcionando una buena aproximación
4. Kutasov presenta una solución analítica para el análisis de la presión de incremento basada en la metodología de Horner, válida para un amplio rango de valores de tiempos de producción y cierre lo que para tiempos de producción adimensionales largos, la ecuación de Kutasov se simplifica y la ecuación de Horner puede ser derivada.
5. Ehlig-Economides y Ramey en su trabajo utilizaron el método de superposición de gastos variables, para generar una solución exacta para el incremento de presión posterior a un periodo de flujo a presión constante. La solución proporciona el comportamiento de la presión a partir de $\Delta t_{wsD} = 5$. La solución se aproxima a los otros métodos hasta $\Delta t_{wsD} > 10^4$, lo que comprueba, como

ya se había mencionado, que el método es válido solo para tiempos de $\Delta t_{wsD} > 10^4$.

6. Prats presenta una solución compleja, compuesta por una integral doble la cual está en función de exponenciales, muy sensibles y que convergen rápido.
7. Para evaluar la solución se buscó el programa adecuado, el cual pudiera realizar la evaluación de la ecuación. El primer software no es práctico pues requiere demasiado tiempo para evaluar la ecuación empleando el método de integración numérica de Simpson, al incrementar el tiempo de producción aumenta el tiempo de evaluación y se complica determinar los límites y el número de intervalos.
8. El software de "Mathematica" facilitó la evaluación, ya que requiere de mucho menos tiempo para evaluar la ecuación al utilizar el método de integración de cuadratura Gaussiana y el programa define las funciones que componen cada ecuación de manera óptima.
9. Se evaluó la ecuación con distintos límites para cada tiempo de producción con el propósito de obtener los límites más representativos para cada tiempo de producción para que la ecuación converja. Entre mayor sea el tiempo de producción, menores son los límites de la integral, ya que se tiene problemas de convergencia en la evaluación. Para tiempos de producción grandes la precisión de los resultados obtenidos es menor, ya que los límites de las integrales son más pequeños y no representan a la ecuación lo más aproximada posible.
10. En las soluciones de Clegg y Kutasov el comportamiento de las respuestas de presión es muy parecido a tiempos cortos, y aproximadamente en $\Delta t_{wsD} = 10^{-1}$, la declinación es más rápida. En la curva de Prats el descenso es más suave,

incorporándose su comportamiento al de los autores Clegg y Kutasov aproximadamente a $\Delta t_{wsD} = 10^1$. Por lo que se concluye que las soluciones de Clegg, Kutasov y Prats son validas para $\Delta t_{wsD} > 1$ y los modelos de Clegg y Kutasov desde $\Delta t_{wsD} < 1$ proporcionan una buena aproximación.

11. Para obtener una solución y evaluación que represente de forma más cercana el comportamiento de presión de un pozo que produce a presión constante se deben considerar: el método de solución que se aplicara, el comportamiento de las variables que integran a la ecuación, y el programa o software para su evaluación ya que dependiendo la forma que se definan a las variables dará mejores resultados.
12. Al análisis de las pruebas de incremento por medio el método Horner es aplicable para el caso de producción a presión constante.
13. La evaluación de la función derivada para el caso de pozos que produjeron a presión constante es más compleja que para soluciones de pozos que produjeron a gasto constante, por lo que se muestra que los resultados dependerá de la solución analítica y numérica.

Apéndice A

Obtención del Gasto de Producción en un Pozo que Produce a Presión Constante.

Carlsaw y Jaeger desarrollaron una solución para las condiciones mencionadas, la cual se encuentra en el libro "Conduction of heat in solids", en la página 335, Ec. 6,

$$v = V + \frac{2V}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-ku^2t} \left[\frac{J_0(ur)Y_0(ua) - Y_0(ur)J_0(ua)}{(J_0^2(au) + Y_0^2(au))} \right] \frac{du}{u} \quad (A.1)$$

Se sustituyen las variables y se obtiene:

$$p_D(r_D) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-v^2t_D} \left[\frac{J_0(vr_D)Y_0(v) - Y_0(vr_D)J_0(v)}{(J_0^2(v) + Y_0^2(v))} \right] \frac{dv}{v}, \quad (A.2)$$

se sabe que:

$$q_D = \frac{\partial p_D}{\partial r_D}.$$

Se deriva la Ec. A.2 con respecto a r_D ,

$$\frac{\partial q_D}{\partial r_D} = \frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial} \int_0^{\infty} e^{-v^2t_D} \left[\frac{J_0(vr_D)Y_0(v) - Y_0(vr_D)J_0(v)}{J_0^2(v) + Y_0^2(v)} \right] \frac{dv}{v},$$

$$q_D = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-v^2 t_D} \left[\frac{Y_0(v) [-vJ_1(vr_D)] - J_0(v) [-vY_1(vr)]}{J_0^2(v) + Y_0^2(v)} \right] \frac{dv}{v},$$

se factoriza,

$$q_D = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-v^2 t_D} \left[\frac{-v [Y_0(v)J_1(vr_D) - J_0(v)Y_1(vr_D)]}{J_0^2(v) + Y_0^2(v)} \right] \frac{dv}{v},$$

finalmente se tiene:

$$q_D = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-v^2 t_D} \left[\frac{J_0(v)Y_1(vr_D) - Y_0(v)J_1(vr_D)}{J_0^2(v) + Y_0^2(v)} \right] dv. \quad (\text{A.3})$$

Se sustituye el valor de $r_D = 1$ en la Ec. A.3:

$$q_D = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-v^2 t} \left[\frac{J_0(v)Y_1(v) - Y_0(v)J_1(v)}{J_0^2(v) + Y_0^2(v)} \right] dv. \quad (\text{A.4})$$

Del apéndice III, del libro Carslaw y Jaeger se aplican las siguientes igualdades:

$$J'_0(v) = -J_1(v); \quad Y'_0(v) = -Y_1(v), \quad (\text{A.5})$$

$$J_z(v)Y'_z(v) - Y_z(v)J'_z(v) = \frac{2}{\pi v}, \quad (\text{A.6})$$

para $z = 0$, se tiene que la Ec. A.6 es:

$$J_0(v)Y'_0(v) - Y_0(v)J'_0(v) = \frac{2}{\pi v}. \quad (\text{A.7})$$

Se sustituye la Ec. A.5 en la Ec. A.7,

$$J_0(v)(-Y_1(v)) - Y_0(v)(-J_1(v)) = \frac{2}{\pi v},$$

$$-J_0(v)Y_1(v) + Y_0(v)J_1(v) = \frac{2}{\pi v},$$

se multiplica por (-1),

$$J_0(v)Y_1(v) - Y_0(v)J_1(v) = -\frac{2}{\pi v}. \quad (\text{A.8})$$

Se sustituye la Ec. A.8 en la Ec. A.4:

$$q_D = -\frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} e^{-v^2 t_D} \left[\frac{1}{v [J_0^2(v) + Y_0^2(v)]} \right] dv. \quad (\text{A.9})$$

Apéndice B

Transformada de Laplace del gasto de la Ec. 2.11.

Se aplica la transformada de Laplace a la Ec. 2.8:

$$L[q_{pD}(t_D)] = \int_0^{\infty} e^{-s t_D} q_{pD}(t_D) dt_D,$$

$$q_D^*(s) = \left[-\frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} e^{-v^2 t_D} \frac{dv}{v [J_0^2(v) + Y_0^2(v)]} \right] \left[\int_0^{t_{sD}} e^{-s t_D} dt_D \right],$$

$$q_D^*(s) = -\frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{t_{sD}} e^{-(s+v^2)t_D} dt_D \frac{dv}{v [J_0^2(v) + Y_0^2(v)]}, \quad (\text{B.1})$$

para integrar la Ec. B.1 con respecto ha t_D , se hace cambio de variable,

$$u = -(s + v^2), \quad (\text{B.2})$$

$$du = -(s + v^2) dt_D, \quad (\text{B.3})$$

$$dt_D = -\frac{du}{(s + v^2)}; \quad (\text{B.4})$$

se sustituyen las Ec. B.2, B.3 y B.4 en la Ec. B.1:

$$q_D^*(s) = -\frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{t_{sD}} e^{ut_D} \left(-\frac{du}{(s+v^2)} \right) \left[\frac{dv}{v[J_0^2(v) + Y_0^2(v)]} \right]. \quad (\text{B.5})$$

Se integra la Ec. B.5,

$$q_D^*(s) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty e^{ut_D} \left[\frac{dv}{(s+v^2)v[J_0^2(v) + Y_0^2(v)]} \right] \Bigg|_0^{t_{sD}},$$

$$q_D^*(s) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty e^{-(s+v^2)t_{sD}} \left[\frac{dv}{(s+v^2)v[J_0^2(v) + Y_0^2(v)]} \right] \Bigg|_0^{t_{sD}}; \quad (\text{B.6})$$

se evalúa la Ec. B.6,

$$q_D^*(s) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty e^{-(s+v^2)t_{sD}} - e^{-(s+v^2)0} \left[\frac{dv}{(s+v^2)v[J_0^2(v) + Y_0^2(v)]} \right],$$

$$q_D^*(s) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\left(e^{-(s+v^2)t_{sD}} - 1 \right)}{(s+v^2)v[J_0^2(v) + Y_0^2(v)]} dv;$$

o

$$q_D^*(s) = -\frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\left(1 - e^{-(s+v^2)t_{sD}} \right)}{(s+v^2)v[J_0^2(v) + Y_0^2(v)]} dv. \quad (\text{B.8})$$

Apéndice C

Presión Adimensional en un Pozo que Produce a Gasto Constante.

Del libro de Carslaw y Jaeger, Ec. 17, pág. 338, se tiene que:

$$v = -\frac{2}{\pi} \frac{Q}{k} \int_0^{\infty} \left(1 - e^{-ku^2 t}\right) \left[\frac{J_0(ur)Y_1(ua) - Y_0(ur)J_1(ua)}{u^2 [J_0^2(au) + Y_0^2(au)]} \right] du. \quad (C.1)$$

Las condiciones $r = 1$ y $u = w$ se sustituyen en la Ec. C.1,

$$p_{qD}(t_D) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(1 - e^{-w^2 t_D}\right) \left[\frac{J_0(w)Y_1(w) - Y_0(w)J_1(w)}{w^2 [J_1^2(w) + Y_1^2(w)]} \right] dw. \quad (C.2)$$

Se utiliza la propiedad de la Ec. 4 del apéndice 1 de Carslaw y Jaeger (Ec. C.3),

$$J_0(w)Y_1(w) - Y_0(w)J_1(w) = -\frac{2}{\pi w}; \quad (C.3)$$

sustituyendo la Ec. C.3 en la Ec. C.2:

$$p_{qD}(t_D) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(1 - e^{-w^2 t_D}\right) \left[-\frac{2}{\pi w} \right] \left[\frac{1}{w^2 [J_1^2(w) + Y_1^2(w)]} \right] dw,$$

$$p_{qD}(t_D) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty (1 - e^{-w^2 t_D}) \left[\frac{1}{w^3 [J_1^2(w) + Y_1^2(w)]} \right] dw. \quad (\text{C.4})$$

Apéndice D

Derivada para esta expresión $p_{qD}(t_D)$, con respecto a t_D .

Se deriva la Ec. C.4 con respecto al tiempo adimensional, t_D ,

$$\frac{\partial p_{qD}}{\partial t_D} = \frac{4}{\pi^2} \frac{\partial}{\partial t_D} \int_0^{\infty} (1 - e^{-w^2 t_D}) \left[\frac{1}{w^3 [J_1^2(w) + Y_1^2(w)]} \right] dw,$$

$$\frac{\partial p_{qD}}{\partial t_D} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \left[\frac{(-w^2)(-e^{-w^2 t_D})}{w^3 [J_1^2(w) + Y_1^2(w)]} \right] dw,$$

finalmente se obtiene:

$$\dot{p}_{qD} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-w^2 t_D}}{w [J_1^2(w) + Y_1^2(w)]} dw. \quad (D.1)$$

Apéndice E

Transformada de Laplace de la Presión Adimensional de un Pozo que Produce a Gasto Constante.

Para obtener la transformada de Laplace, $p_{qD}^*(t_D)$, se utiliza la Ec. 2.14.:

$$L[p_{qD}(t_D)] = L\left[\frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-w^2 t_D}) dw}{w^3 [J_1^2(w) + Y_1^2(w)]}\right],$$

$$L[p_{qD}(t_D)] = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{dw}{w^3 [J_1^2(w) + Y_1^2(w)]} L(1 - e^{-w^2 t_D}),$$

$$p_{pD}^*(t_D) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{dw}{w^3 [J_1^2(w) + Y_1^2(w)]} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + w^2} \right].$$

Se factoriza,

$$p_{pD}^*(t_D) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{dw}{w^3 [J_1^2(w) + Y_1^2(w)]} \left[\frac{s + w^2}{s(s + w^2)} - \frac{s}{s(s + w^2)} \right],$$

$$p_{pD}^*(t_D) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{dw}{w^3 [J_1^2(w) + Y_1^2(w)]} \left[\frac{\cancel{s} + w^2}{s(s + w^2)} \right],$$

$$p_{pD}^*(t_D) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{w^\beta dw}{w^\beta s(s+w^2) [J_1^2(w) + Y_1^2(w)]},$$

$$p_{pD}^*(t_D) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{dw}{ws(s+w^2) [J_1^2(w) + Y_1^2(w)]}. \quad (\text{E.1})$$

Apéndice F

Desarrollo de las Transformadas Inversas de Laplace de la Ec. 2.19 antes del cierre del pozo.

Por tablas se sabe que las transformadas inversas de Laplace de las funciones siguientes, $F(t)$, son:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{f(s)} & & \mathbf{F(t)} \\ \frac{1}{(s-a)(s-b)} & a \neq b & \frac{e^{bt} - e^{at}}{b-a} \end{array} \quad (\text{F.1})$$

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{(s+a)(s+b)} & a \neq b & \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a} \end{array} \quad (\text{F.2})$$

Para obtener la transformada inversa de Laplace de la Ec. 2.19 para antes del cierre se factoriza de la siguiente forma:

$$L^{-1} \left\{ \frac{\left(1 - e^{-(s+v^2)t_{SD}}\right)}{(s+v^2)(s+w^2)} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+v^2)(s+w^2)} \right\} - L^{-1} \left\{ \frac{e^{-(s+v^2)t_{SD}}}{(s+v^2)(s+w^2)} \right\}. \quad (\text{F.3})$$

Para determinar la inversa de $L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+v^2)(s+w^2)} \right\}$ de la Ec. F.3, utilizamos la transformada inversa de Laplace de la Ec. F.1:

$$a = -v^2 ,$$

$$b = -w^2,$$

por lo tanto

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+v^2)(s+w^2)} \right\} = \frac{e^{-w^2 t_D} - e^{-v^2 t_D}}{((-w^2) - (-v^2))} = \frac{e^{-w^2 t_D} - e^{-v^2 t_D}}{(v^2 - w^2)} = \frac{(-1) e^{-w^2 t_D} - e^{-v^2 t_D}}{(-1) (v^2 - w^2)} = \frac{e^{-v^2 t_D} - e^{-w^2 t_D}}{(w^2 - v^2)}$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+v^2)(s+w^2)} \right\} = \frac{e^{-v^2 t_D} - e^{-w^2 t_D}}{(w^2 - v^2)}. \quad (\text{F.5})$$

Utilizando ahora la transformada inversa de Laplace de la Ec. F.2 se tiene:

$$a = v^2$$

$$b = w^2$$

se sustituye los valores de a y b en la Ec. F.2:

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+v^2)(s+w^2)} \right\} = \frac{e^{-v^2 t_D} - e^{-w^2 t_D}}{(w^2 - v^2)}. \quad (\text{F.6})$$

Las Ecs. F.5 y F.6 son el resultado de la inversa de la Ec. 2.20. Para el segundo miembro del lado derecho $L^{-1} \left\{ \frac{e^{-(s+v^2)t_{sD}}}{(s+v^2)(s+w^2)} \right\}$.

Apéndice G

Desarrollo de las Transformadas Inversas de Laplace de la Ec. 2.19 después del Cierre del Pozo.

Para obtener la transformada inversa de Laplace de la Ec. 2.19 para después del cierre del pozo se factoriza:

$$L^{-1} \left\{ \frac{\left(1 - e^{-(s+v^2)t_{SD}}\right)}{(s+v^2)(s+w^2)} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+v^2)(s+w^2)} \right\} - L^{-1} \left\{ \frac{\left(e^{-(s+v^2)t_{SD}}\right)}{(s+v^2)(s+w^2)} \right\}. \quad (G.1)$$

Para el primer miembro de la derecha se tiene por la Ec. F.2 (Apéndice F):

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+v^2)(s+w^2)} \right\} = \frac{e^{-v^2 t_D} - e^{-w^2 t_D}}{w^2 - v^2}. \quad (G.2)$$

Ahora para el segundo miembro de la derecha se tiene:

$$L^{-1} \left\{ \frac{\left(e^{-(s+v^2)t_{SD}}\right)}{(s+v^2)(s+w^2)} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{e^{-st_{SD}} e^{-v^2 t_{SD}}}{(s+v^2)(s+w^2)} \right\} = e^{-v^2 t_{SD}} L^{-1} \left\{ \frac{e^{-st_{SD}}}{(s+v^2)(s+w^2)} \right\},$$

$$e^{-v^2 t_{SD}} L^{-1} \left\{ \frac{e^{-st_{SD}}}{(s+v^2)(s+w^2)} \right\} = e^{-v^2 t_{SD}} \left[\frac{e^{-v^2(t_D-t_{SD})} - e^{-w^2(t_D-t_{SD})}}{w^2 - v^2} \right]. \quad (G.3)$$

Se realiza la diferencia de la Ec. G.1 (Ec. G.2 menos Ec. G.3):

$$L^{-1} \left\{ \frac{\left(1 - e^{-(s+v^2)t_{sD}}\right)}{(s+v^2)(s+w^2)} \right\} = \frac{e^{-v^2 t_D} - e^{-w^2 t_D}}{w^2 - v^2} - e^{-v^2 t_{sD}} \left[\frac{e^{-v^2(t_D-t_{sD})} - e^{-w^2(t_D-t_{sD})}}{w^2 - v^2} \right],$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{\left(1 - e^{-(s+v^2)t_{sD}}\right)}{(s+v^2)(s+w^2)} \right\} = \frac{e^{-v^2 t_D} - e^{-w^2 t_D} - e^{-v^2 t_{sD}} e^{-v^2(t_D-t_{sD})} + e^{-v^2 t_{sD}} e^{-w^2(t_D-t_{sD})}}{w^2 - v^2},$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{\left(1 - e^{-(s+v^2)t_{sD}}\right)}{(s+v^2)(s+w^2)} \right\} = \frac{e^{-v^2 t_D} - e^{-w^2 t_D} - e^{-v^2 t_{sD}} e^{-v^2 t_D} e^{v^2 t_{sD}} + e^{-v^2 t_{sD}} e^{-w^2(t_D-t_{sD})}}{w^2 - v^2},$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{\left(1 - e^{-(s+v^2)t_{sD}}\right)}{(s+v^2)(s+w^2)} \right\} = \frac{\cancel{e^{-v^2 t_D}} - e^{-w^2 t_D} - \cancel{e^{-v^2 t_D}} + e^{-v^2 t_{sD}} e^{-w^2(t_D-t_{sD})}}{w^2 - v^2},$$

finalmente,

$$L^{-1} \left\{ \frac{\left(1 - e^{-(s+v^2)t_{sD}}\right)}{(s+v^2)(s+w^2)} \right\} = \frac{e^{-v^2 t_{sD}} e^{-w^2(t_D-t_{sD})} - e^{-w^2 t_D}}{w^2 - v^2}. \quad (G.4)$$

La exponencial $e^{-w^2 t_D}$ que se tiene en la Ec. G.4, puede expresarse:

$$e^{-w^2 t_D} = e^{-w^2 t_{sD}} e^{-w^2(t_D-t_{sD})} \quad (G.5)$$

ya que,

$$e^{-w^2 t_D} = e^{-w^2 t_{sD}} e^{-w^2 t_D} e^{w^2 t_{sD}},$$

$$e^{-w^2 t_D} = e^{-w^2 t_D}.$$

Se sustituye la Ec. G.5 en la Ec. G.4,

$$L^{-1} \left\{ \frac{\left(1 - e^{-(s+v^2)t_{sD}} \right)}{(s+v^2)(s+w^2)} \right\} = \frac{e^{-v^2 t_{sD}} e^{-w^2(t_D-t_{sD})} - e^{-w^2 t_{sD}} e^{-w^2(t_D-t_{sD})}}{w^2 - v^2},$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{\left(1 - e^{-(s+v^2)t_{sD}} \right)}{(s+v^2)(s+w^2)} \right\} = \frac{\left(e^{-v^2 t_{sD}} - e^{-w^2 t_{sD}} \right) e^{-w^2(t_D-t_{sD})}}{w^2 - v^2}. \quad (\text{G.6})$$

Apéndice H

Producción a gasto variable: radio del pozo finito.

Sea $p_D(r_D, t_D)$ la distribución de la presión adimensional para el caso de un pozo que produce a gasto variable. Considerando que $p_{qD}(r_D, t_D)$ es la distribución de la presión en un área radial como resultado de una producción a gasto constante, con una frontera externa cerrada o a presión constante, para el caso de gasto variable, si consideramos que el pozo está en un yacimiento infinito, la distribución de presión satisface las Ecs. H.1, H.2, H.3 y H.4.

$$\frac{\partial^2 p_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_D}{\partial r_D} = \frac{\partial p_D}{\partial t_D}, \quad (\text{H.1})$$

$$\lim_{r_D \rightarrow 0} p_D(r_D, t_D) = 0, \quad t_D > 0, \quad (\text{H.2})$$

$$p_D(r_D, 0) = 0 \quad (\text{H.3})$$

y

$$\left(r_D \frac{dp_D}{dr_D} \right)_{r_D=1} = -q_D(t_D). \quad (\text{H.4})$$

La solución de este problema es sencilla si se supone que para el problema a gasto constante, $p_{qD}(r_D, t_D)$, se conoce, la cual satisface las Ecs. H.1, H.2, H.3 transformándolas al plano de Laplace y la ecuación:

$$\left(r_D \frac{d\bar{p}_{qD}}{dr_D} \right)_{r_D=1} = -\frac{1}{s}. \quad (\text{H.5})$$

Si $\bar{q}_D(s)$ es la transformada de Laplace de $q_D(t_D)$, se deduce que $s\bar{q}_D\bar{p}_{qD}$ satisface las ecuaciones H.6, H.7 y H.8, las cuales son las transformadas de Laplace de las Ec. H.1, H.2, H.4.

$$\frac{\partial^2 \bar{p}_D}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial r_D} = s\bar{p}_D, \quad (\text{H.6})$$

$$\lim_{r_D \rightarrow 0} \bar{p}_D(r_D, s) = 0 \quad (\text{H.7})$$

y

$$\left(r_D \frac{d\bar{p}_D}{dr_D} \right)_{r_D=1} = -\bar{q}_D. \quad (\text{H.8})$$

Por lo tanto,

$$\bar{p}_D = s\bar{q}_D\bar{p}_{qD}; \quad (\text{H.9})$$

aplicando la propiedad de la convolución siguiente:

$$L^{-1}\{f(s)g(s)\} = \int_0^t F(u)G(t-u)du, \quad (\text{H.10})$$

se obtiene:

$$p_D(r_D, t_D) = \frac{\partial}{\partial t_D} \int_0^{t_D} q_D(t_D - u) p_{qD}(r_D, u) du. \quad (\text{H.11})$$

Tomando en cuenta la condición inicial Ec. H.3, la Ec. H.11 puede reescribirse como:

$$p_D(r_D, t_D) = \int_0^{t_D} q_D(t_D - u) p'_{qD}(r_D, u) du, \quad (\text{H.12})$$

$$p_D(r_D, t_D) = \int_0^{t_D} q_D(u) p'_{qD}(r_D, t_D - u) du, \quad (\text{H.13})$$

donde

$$p'_{qD} = \frac{dp_{qD}}{dt_D}.$$

Aunque se ha desarrollado a la Ec. H.13 considerando un problema específico, esta expresión puede utilizarse para cualquier problema de interés.

Apéndice I

Ecuación de Bessel

La solución para las ecuaciones lineales de segundo o mayor orden pueden expresarse por medio de funciones elementares solo en casos excepcionales. Ciertos tipos de ecuaciones diferenciales definen ciertas clases de nuevas funciones, y para resolver estas ecuaciones diferenciales se requiere conocer el comportamiento y sus propiedades de las funciones especiales. Muchas de estas ecuaciones desempeñan un papel importante en problemas de la Física y de la Ingeniería. Algunas de estas funciones son las *funciones Bessel*. Estas funciones muestran varias analogías con funciones exponenciales y trigonométricas elementales, las cuales constituyen las soluciones de ecuaciones diferenciales lineales.

La ecuación de Bessel surgió con el estudio de la radiación de energía, conducción de calor en objetos cilíndricos, particularmente en aquellos en que el modelo matemático se expresa naturalmente en coordenadas cilíndricas.

Funciones Bessel de Primera Clase

La ecuación diferencial

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2) y = 0 \quad (1.1)$$

se llama *ecuación de Bessel de orden* ν con $\nu \geq 0$ (número real no negativo). La ecuación de Bessel es una ecuación diferencial de segundo orden, pero también es tradicional referirse a ν como el orden de la ecuación.

La Ec. I.1 tiene dos soluciones linealmente independientes por ser de orden dos:

$$y = A y_1 + B y_2, \tag{1.2}$$

donde y_1 y y_2 representan soluciones particulares y A y B son constantes. En este apéndice se desarrollará una de las metodologías para obtener las soluciones.

La Ec. I.1 muestra que puede resolverse por el método de Frobenius. Es rutinario verificar que cero es un punto singular de la ecuación de Bessel, así que puede resolverse por este método, al sustituir la serie de la forma,

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r}, \tag{1.3}$$

con coeficientes indeterminados y sus derivadas en la Ec. I.1. Reacomodando los términos se obtiene:

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)a_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r+2} - \nu^2 \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r} = 0.$$

Se iguala a cero la suma de los coeficientes de x^{s+r} . La potencia x^{s+r} corresponde a $m=s$ en la suma primera, segunda y cuarta y a $m=s-2$ en la tercera suma. Por tanto, para $s=0$ y $s=1$, la tercera serie no participa ya que $m \geq 0$. Para $s=2,3, \dots$ las cuatro sumas intervienen, por lo que se obtiene una fórmula general para s ; por lo tanto,

$$r(r-1)a_0 + ra_0 - v^2a_0 = 0, \text{ para } (s=0), \quad (1.4)$$

$$r(r+1)a_1 + (r+1)a_1 - v^2a_1 = 0, \text{ para } (s=1), \quad (1.5)$$

$$(s+r)(s+r-1)a_s + (s+r)a_s + a_{s-2} - v^2a_s = 0 \text{ para } (s=2,3, \dots). \quad (1.6)$$

De la Ec. 1.4 se obtiene la ecuación inicial,

$$(r+v)(r-v) = 0, \quad (1.7)$$

esta ecuación establece que las raíces son $r_1 = v$ ($v \geq 0$) y $r_2 = -v$.

Para $r = r_1 = v$, de la Ec. 1.5 se obtiene $a_1 = 0$. La Ec. 1.6 puede escribirse,

$$(s+r+v)(s+r-v)a_s + a_{s-2} = 0; \quad (1.8)$$

para $r = v$, la Ec. 1.8 se expresa de la forma:

$$(s+2v)sa_s + a_{s-2} = 0. \quad (1.9)$$

Puesto que a_1 y $v \geq 0$, se tiene que $a_3 = 0$, $a_5 = 0$, y así sucesivamente. Si se considera $s = 2m$ y se sustituye en la Ec. 1.9, para los demás coeficientes se obtiene:

$$a_{2m} = -\frac{1}{2^2 m(v+m)} a_{2m-2} \quad m=1, 2, \dots \quad (1.10)$$

y así sucesivamente,

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2(v+1)},$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{2^2 2(v+2)} = \frac{a_0}{2^4 2!(v+1)(v+2)};$$

en general

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m} m!(v+1)(v+2)\cdots(v+m)} a_0. \quad (I.11)$$

Los valores enteros de v se denotan por n . Para $v=n$ la Ec. I.11 se expresa como:

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m} m!(n+1)(n+2)\cdots(n+m)} a_0, \quad (I.12)$$

a_0 sigue siendo arbitraria, por lo que la Ec. I.3 incluirá este factor. En consecuencia, es necesario escoger otro valor para a_0 siendo práctico:

$$a_0 = \frac{1}{2^n n!}. \quad (I.13)$$

Se tiene que $(m+n)! = n!(n+1)\cdots(n+m)$; sustituyendo esta igualdad y el valor de a_0 en la Ec. I.12:

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+n} m!(n+m)!}, \quad m=1, 2, \dots \quad (I.14)$$

Con estos coeficientes y considerando $r_1 = \nu = n$, se obtiene a partir de la Ec. I.3 una solución particular de la Ec. I.1, denotada por $J_n(x)$, dada por:

$$J_n = x^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+n} m! (n+m)!}, \quad (I.15)$$

llamada la función de Bessel de primera clase de orden n . Esta serie converge para toda x con rapidez debido a los factoriales del denominador.

Para generalizar la Ec. I.15 para cualquier $\nu \geq 0$ a partir de $\nu = n$. Lo único que se necesita es una expresión de los factoriales para números complejos de las Ecs. I.13 y I.15 para cualquier ν . Esto se consigue con la función Gamma de Euler, $\Gamma(\nu)$, que se define como:

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (I.16)$$

Si se sustituye la Ec. I.16 en la Ec. I.13 se obtiene,

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}, \quad (I.17)$$

La Ec. I.17 se sustituye en la Ec. I.11, resultando;

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu} m! (\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+m)\Gamma(\nu+1)}.$$

Pero $\Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu)$, permite expresar el último término del denominador como sigue:

$$(\nu+1)\Gamma(\nu+1) = \Gamma(\nu+2),$$

$$(\nu+2)\Gamma(\nu+2) = \Gamma(\nu+3),$$

y así sucesivamente; por lo tanto,

$$(\nu+1)(\nu+2) \cdots (\nu+m)\Gamma(\nu+1) = \Gamma(\nu+m+1).$$

Entonces los coeficientes a_{2m} se expresan:

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(\nu+m+1)}. \quad (I.18)$$

Con estos coeficientes y considerando que $r = r_1 = \nu$, los coeficientes a_{2m} representados por la Ec. I.18 se sustituyen en la Ec. I.3 y se obtiene una solución particular de la Ec. I.1, denotada por $J_\nu(x)$, dada por:

$$J_\nu(x) = x^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(\nu+m+1)}. \quad (I.19)$$

Esta serie converge para todo valor de x positivo.

Integrales Bessel

Para valores enteros de ν , utilizando identidades trigonométricas se tiene la representación integral siguiente:

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\nu u - x \sin u) du ,$$

donde u es una variable de integración. En forma alterna, utilizando ahora su equivalente en exponenciales, la expresión para $J_\nu(x)$ se puede escribir como:

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi e^{-i(\nu u - x \sin u)} du .$$

Esta es la forma usada por Bessel en su estudio de estas funciones, y a partir de esta definición dedujo varias propiedades de las mismas. Esta definición integral puede extenderse a órdenes de no enteros, añadiendo otro término integral:

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\nu u - x \sin u) du - \frac{\sin(\nu\pi)}{\pi} \int_0^\infty e^{-x \sinh(u) - \nu u} du .$$

Solución de $J_{-\nu}(x)$ de la Ecuación de Bessel

En esta solución, ν puede ser cualquier número no negativo. Consideremos ahora el objetivo de encontrar una segunda solución linealmente independiente de la ecuación de Bessel. De la ecuación inicial (Ec. I.7) se sabe que $r_1 = \nu$ y $r_2 = -\nu$. Si ν no es un entero, se puede repetir el desarrollo realizado para encontrar J_ν , reemplazando ν con $-\nu$ para encontrar la segunda solución $J_{-\nu}$. Si ν es un entero n , se necesitará otro planteamiento. Al sustituir ν por $-\nu$ en la Ec. I.19 se obtiene:

$$\boxed{J_{-\nu}(x) = x^{-\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(m-\nu+1)}} . \quad (I.20)$$

La ecuación de Bessel tiene dos raíces por la expresión v^2 , las funciones J_v y J_{-v} son soluciones de la ecuación para v . Si v no es un entero, estas soluciones son linealmente independientes, ya que el primer término de la Ec. I.19 y el primero de la Ec. I.20 son múltiplos finitos diferentes de cero de x^v y x^{-v} , respectivamente. Por lo tanto una solución general de la ecuación de Bessel para toda $x \neq 0$ (Ec. I.2) es:

$$y(x) = A J_v(x) + B J_{-v}(x). \quad (I.21)$$

Si v es un entero, entonces la Ec. I.21 no es una solución general. En este caso las dos soluciones J_v y J_{-v} de la Ec. I.21 se vuelven linealmente dependientes, ya que,

$$J_{-v}(x) = (-1)^v J_v(x), \quad (v = 1, 2, \dots). \quad (I.22)$$

La **Fig. 34** muestra el comportamiento para $J_v(x)$ con diferentes valores de v .

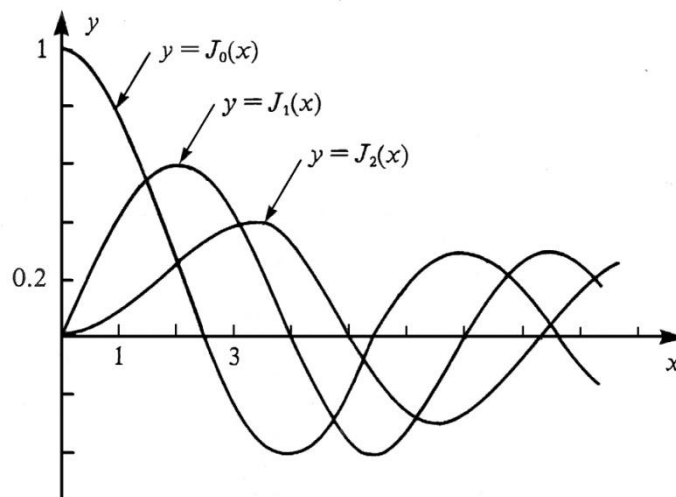


Fig. 34. Funciones de Bessel de primera clase

Funciones de Bessel de Segunda Clase

Se debe obtener una solución general de la ecuación de Bessel para $\nu = n$ entero; se necesita una segunda solución linealmente independiente, la cual se denotará por Y_n . Para $\nu = n = 1, 2, \dots$ puede obtenerse una segunda solución mediante el método de Frobenius.

Cabe mencionar que el método de Frobenius es un procedimiento para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables; sin embargo, el método de Frobenius se aplica a ecuaciones más generales, para las que el método de series de potencias no es aplicable, algunas de ellas fundamentales. Para el caso de raíz doble ($r_1 = r_2 = r$) Frobenius presenta la solución para y_2 :

$$y_2(x) = ky_1(x) \ln x + x^{r_2} (A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots).$$

La situación aún no es del todo satisfactoria, ya que la segunda solución se define de manera diferente, dependiendo de si el orden de ν es un entero o no. A fin de conseguir uniformidad en el formalismo y la tabulación numérica, es conveniente adoptar una forma de la segunda solución que sea válida para todos los valores del orden. Esta es la razón para introducir una segunda solución estándar $Y_\nu(x)$ definida para toda ν mediante la Ec. I.23,

$$Y_\nu(x) = \frac{1}{\text{sen } \nu\pi} [J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)], \quad (I.23)$$

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(x). \quad (I.24)$$

Para un orden ν no entero la función $Y_\nu(x)$ es evidentemente una solución de la ecuación de Bessel, ya que $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ son soluciones de esa ecuación, puesto que para esos ν las soluciones $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ son linealmente independientes. Además, puede demostrarse que el límite de la Ec. I.24 existe y que $Y_n(x)$ es una solución de la ecuación de Bessel para un orden entero. Se observara posteriormente en el desarrollo de la serie de $Y_n(x)$ que contiene un término logarítmico. Por lo tanto, $J_n(x)$ y $Y_n(x)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación de Bessel. El desarrollo de la serie de $Y_n(x)$ puede obtenerse si las series de las Ecs. I.19 y I.20, para $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$, se sustituyen en la Ec. I.23 y después se considera que ν tienda a n , obteniéndose el resultado siguiente:

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n \ln(x) \left(\ln \frac{x}{2} + \gamma \right) + \frac{x^n}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} (h_m - h_{m+n})}{2^{2m+n} m! (m+n)!} x^{2m} - \frac{x^{-n}}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^{m-1} (n-m-1)!}{2^{2m-n} m!} x^{2m} .$$

Para ν no enteros, se define $Y_\nu(x)$ a partir de las funciones de primera clase $J_\nu(x)$, mediante la expresión siguiente:

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}, \quad \forall \nu \notin \mathbb{Z} .$$

En el caso en el que tengamos un orden entero n , la función se define por medio de la expresión siguiente válida para ν entero:

$$Y_\nu(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(x), \quad \forall n \in \mathbb{Z} .$$

que nos da el siguiente resultado en forma integral:

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x \sin \theta - n\theta) d\theta - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [e^{n\theta} + (-1)^n e^{-n\theta}] e^{-x \sinh \theta} d\theta.$$

La **Fig. 35** muestra el comportamiento de $Y_n(x)$ para diferentes valores de ν :

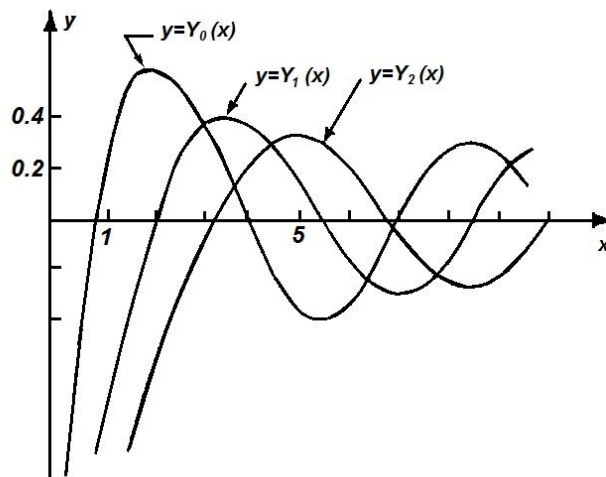


Fig. 35. Funciones de Bessel de segunda clase

Por lo tanto una solución general de la ecuación de Bessel para todos los valores de ν es:

$$\boxed{y(x) = A J_\nu(x) + B Y_\nu(x)}. \tag{I.25}$$

Funciones Modificadas de Bessel

Las funciones Bessel de primera y segunda clase descritas previamente frecuentemente se refieren como estándar Bessel o funciones cilíndricas. Sin embargo hay principalmente funciones relacionadas con los efectos de la familia general de las funciones cilíndricas; las más notables son las funciones modificadas de Bessel de

primera y segunda clase. Aunque son similares en definición a las funciones estándar de Bessel, las funciones modificadas de Bessel son más claramente distinguidas por su comportamiento no oscilatorio. Por esta razón, frecuentemente aparecen en aplicaciones que son diferentes en naturaleza de las funciones estándar.

Las funciones Bessel ordinarias son válidas para valores complejos del argumento x , y un caso especialmente importante es aquel con argumento imaginario puro. En este caso, la ecuación Bessel se transforma en la ecuación de Bessel modificada, donde la ecuación diferencial es del tipo siguiente:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + p^2) y = 0, \quad p \geq 0, \quad (I.26)$$

la cual tiene un gran parecido con la ecuación de Bessel. Entre la Ec. I.1 y la Ec. I.26 se tiene la relación de la forma $b^2 = -1$, rescribiendo la solución expresada por la Ec. I.25, se obtiene,

$$y(x) = A J_p(ix) + B Y_p(ix). \quad (I.27)$$

La desventaja de la solución general de la Ec. I.27 es que está expresada en términos de una función con argumentos complejos, los cuales se pueden evitar sustituyendo la variable x por ix en la serie J_p ; por lo tanto,

$$J_p(ix) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (ix)^{2m-p}}{2^{2m+p} m! \Gamma(p+m+1)} = i^p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m-p}}{2^{2m+p} m! \Gamma(p+m+1)} = i^p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2m-p}}{m! \Gamma(p+m+1)},$$

donde se ha usado el factor $i^{2m} = (-1)^m$. La serie principal es una cantidad real que multiplicada por i^p , define la función real,

$$I_p(x) = i^p J_p(ix) = i^p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2m-p}}{m! \Gamma(p+m+1)}, \quad p > 0. \quad (1.28)$$

Esta ecuación se llama *función Bessel Modificada de Primera Clase* de orden p , donde $J_p(ix)$ y $I_p(x)$ son soluciones a la Ec. 1.26. La diferencia entre las series que definen a $J_p(x)$ e $I_p(x)$, es el factor $(-1)^m$. Así cada término de la serie de la Ec. 1.28 es positivo para $x > 0$ contribuyendo al incremento la sumatoria. Se concluye que $I_p(x)$ no puede tener un cero y no muestra un comportamiento oscilatorio a comparación con $J_p(x)$ que si lo tiene. En general $I_p(0) = 0$ cuando $p > 0$ y para $I_0(0) = 1$.

Para cuando p es negativo se define,

$$I_{-p}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2m-p}}{m! \Gamma(m-p+1)}, \quad p > 0. \quad (1.29)$$

Es fácil verificar que $y_2 = I_{-p}(x)$ es una solución de la ecuación modificada de Bessel (Ec. 1.26) conjuntamente con $y_1 = I_p(x)$. Usando un argumento similar al caso anteriormente presentado para las ecuaciones Bessel (Ec. 1.21), se puede demostrar que $J_p(x)$ y $J_{-p}(x)$ son linealmente independientes cuando p no es un entero. Por lo tanto, una solución general para la Ec. 1.26 es:

$$y(x) = A I_p(x) + B I_{-p}(x), \quad p \neq n(n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.30)$$

Por último, cuando $p = -n(n = 0, 1, 2, \dots)$, se encuentra que el orden negativo de la función conduce a:

$$I_{-n}(x) = i^n J_{-n}(ix) = i^n (-1)^n J_n(ix) = (-1)^{2n} I_n(x).$$

De esta expresión se deduce que,

$$I_{-n}(x) = I_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Una solución para la Ec. 1.26 para $p = n = 0$, se conoce como función modificada Bessel de primera clase y orden cero, denotado por $I_0(x)$, la cual está dada por $i = \sqrt{-1}$ donde,

$$I_0(x) = J_0(ix) = 1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} + \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x^2/4)^m}{(m!)^2}, \quad (1.31)$$

La **Fig. 36** presenta en forma gráfica la variación de las funciones modificadas de Bessel de primera clase.

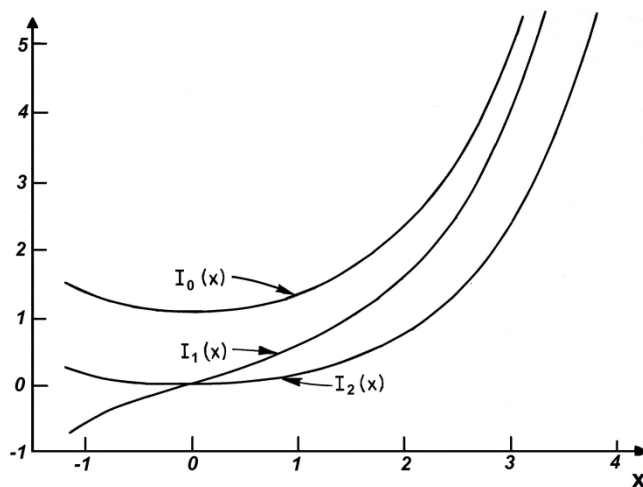


Fig. 36. Funciones Modificadas Bessel de Primera Clase.

Funciones Modificadas de Bessel de Segunda Clase

En vez de usar $Y_p(ix)$ para definir una segunda solución linealmente independiente de la Ec. I.26, es preferible introducir la función modificada de Bessel de segunda clase de orden p (o Función de McDonald), las cuales se definen a partir de las funciones modificadas de primera clase para órdenes no enteros, mediante la ecuación siguiente:

$$K_p(x) = \frac{\pi I_{-p}(x) - I_p(x)}{2 \sin(p\pi)}. \quad (I.32)$$

Para estas funciones modificadas de Bessel, se cumple:

$$K_{-p}(x) = K_p(x).$$

Para todos los valores de p , como es una lineal combinación de soluciones, la función $K_p(x)$ es también una solución de la Ec. I.26, la cual puede ser linealmente independiente de $I_p(x)$.

Se define $K_n(x)$ como:

$$K_n(x) = \lim_{p \rightarrow n} K_p(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

El procedimiento análogo para las ecuaciones de Bessel de segunda clase en la sección anterior, muestra que para $x > 0$.

Una función modificada de Bessel de segunda clase de orden cero, denotada por $K_0(x)$, es una segunda solución independiente de la Ec. 1.26; para $p = n = 0$ está dada por:

$$K_0(x) = -I_0(x) \left(\gamma + \frac{x}{2} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(x/2)^{2m}}{m!} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} \right).$$

Mientras que para $x > 0$ y $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ (cualquier entero positivo),

$$K_n(x) = (-1)^{n+1} \left[\ln \left(\frac{x}{2} \right) + \gamma \right] I_n(x) + \frac{1}{2} (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2m+n}}{m!(m+n)!} \left(\sum_{k=1}^{m+n} k^{-1} + \sum_{k=1}^m k^{-1} \right) + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{x}{2} \right)^{2m-n} \frac{(n-m-1)!}{m!}.$$

La **Fig. 37** presenta en forma gráfica la variación de las funciones modificadas de Bessel de segunda clase.

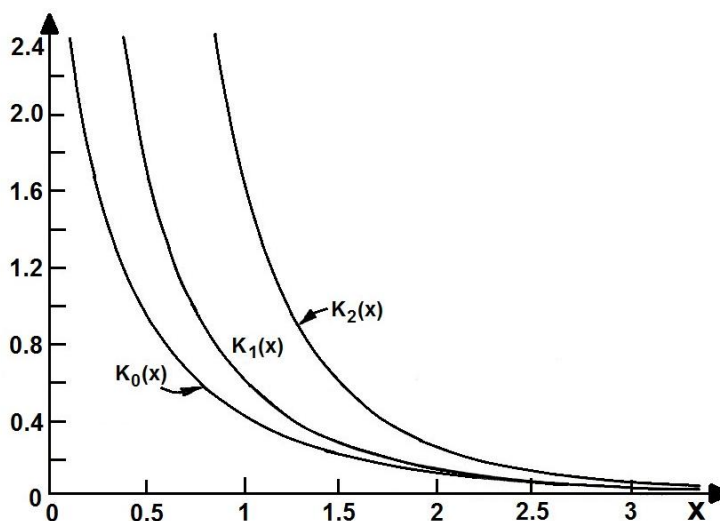


Fig. 37. Funciones Modificadas de Bessel de segunda clase.

Para todos los valores de $p \geq 0$, se escribe la solución general de la Ec. 1.26 como:

$$\boxed{y(x) = A I_p(x) + B K_p(x)}. \tag{1.33}$$

Nomenclatura

Símbolo	Definición	Dimensión
c	Compresibilidad de la formación.	$[m/L^2]^{-1}$.
$Ei(x)$	Integral exponencial modificada.	Adimensional
h	Espesor de la formación.	$[L]$.
$I_0(x)$	Función modificada Bessel de primera clase y orden cero.	Adimensional
$J_0(v)$	Función Bessel de primera clase y orden cero.	Adimensional
$J_1(w)$	Función Bessel de primera clase y primer orden	Adimensional
k	Permeabilidad,	$[L^2]$
$K_0(x)$	Funciones Modificadas de Bessel de segunda clase de orden cero.	Adimensional
$K_1(x)$	Funciones Modificadas de Bessel de segunda clase y primer orden.	Adimensional
N	Producción acumulada.	$[L^3]$
N_D	Producción acumulada adimensional definida en la Ec. (1.29).	Adimensional
p_w	Presión del pozo.	$[m/L^2]$.
p_{wD}	Presión de fondo adimensional del pozo.	Adimensional
p'_{wD}	Derivada de la presión adimensional con respecto al tiempo para una producción a gasto constante.	Adimensional

$p_{wf}(t)$	Presión de fondo fluyendo.	$[m/L^2]$
$p_{wFD}(t_D)$	Presión de fondo fluyendo adimensional.	Adimensional
$p_{qD}^*(s)$	Transformada de Laplace de la presión adimensional.	Adimensional
p_i	Presión inicial.	$[m/L^2]$
p_{ws}	Presión de fondo después del cierre.	$[m/L^2]$
p_{sD}	Presión de fondo adimensional después del cierre.	Adimensional
$p_D\left(\frac{r'}{r_w}, t_{pD}\right)$	Presión de distribución adimensional en el pozo y el yacimiento a $\Delta t_{ws} = 0$.	
Adimensional		
$p_{sr}(\Delta t_{ws}, r)$	Presión durante el cierre a cualquier distancia radial r .	$[m/L^2]$
Δp	Caída de presión.	$[m/L^2]$
Δp_D	Caída de presión adimensional.	$[m/L^2]$
q_{LD}	Gasto de flujo adimensional a $t = t_p$ definida en la Ec. (1.30).	Adimensional
$q_{pD}(t_D)$	Gasto de un pozo produciendo a presión constante antes del cierre.	Adimensional
$q_{pD}^*(s)$	Transformada de Laplace del gasto de un pozo produciendo a presión constante antes del cierre	Adimensional
r	Distancia radial.	$[L]$
r_w	Distancia radial del pozo.	$[L]$
r_D	Distancia radial adimensional.	Adimensional
r_{wa}	Radio aparente del pozo.	$[L]$
r_{aD}	Radio adimensional aparente del pozo.	Adimensional
r'	Variable de integración.	

R	Definida en la Ec. (1.38).	Adimensional
s	Variable de la Transformada de Laplace del tiempo.	
t	Tiempo.	$[t]$
t_D	Tiempo adimensional.	Adimensional
t_p	Tiempo de producción.	$[t]$
t_{pD}	Tiempo de producción adimensional.	Adimensional
t_{apD}	Tiempo de producción adimensional en función del radio aparente del pozo.	Adimensional
t_p^*	Tiempo de producción corregido de Horner.	$[t]$
t_{pD}^*	Tiempo de producción corregido adimensional de Horner.	Adimensional
Δt_{ws}	Tiempo de cierre.	$[t]$
Δt_{wsD}	Tiempo adimensional de cierre.	Adimensional
u	Variable de integración.	
v	Variable de integración.	
w	Variable de integración.	
$Y_0(v)$	Función Bessel de segunda clase y orden cero.	Adimensional
$Y_1(w)$	Función Bessel de segunda clase y primer orden.	Adimensional
γ	Constante de Euler, 0.5772.	
μ	Viscosidad del fluido.	$[m/Lt]$
η	Difusividad Hidráulica.	$[L^2/t]$.

Referencias Bibliográficas

1. Abramowitz, M. y Stegun, I.A., eds. 1964. *Handbook of Mathematical Functions*. Washington, D.C.: U.S. Government Printing Office.
2. Boyce, W.E. y DiPrima, R.C. 2010. *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera*, quinta edición. México, D.F.: Limusa-Wiley.
3. Bourdet, D., Ayoub, J.A. y Pirard, Y.M. 1989. Use of Pressure Derivative in Well-Test Interpretation. *SPE Form Eval* **4** (2): 293-302. SPE-12777-PA. <http://dx.doi.org/10.2118/12777-PA>.
4. Bourdet, D., Whittle, T.M., Douglas, A.A. et al. 1983. A New Set of Type Curves Simplifies Well Test Analysis. *World Oil* (May): 95-106. Disponible en internet: [http://www.pe.tamu.edu/blasingame/data/z_zCourse_Archive/P324_03A/Lecture_Refs_\(pdf\)/P324_Mod4_02_Bourdet_et_al_\(World_Oil\)_\(Add\).pdf](http://www.pe.tamu.edu/blasingame/data/z_zCourse_Archive/P324_03A/Lecture_Refs_(pdf)/P324_Mod4_02_Bourdet_et_al_(World_Oil)_(Add).pdf) [Fecha de acceso 1 de septiembre de 2011].
5. Carslaw, H.C. y Jaeger, J.C. 1959. *Conduction of Heat in Solids*, second edition. Oxford: Clarendon Press.
6. Cinco Ley, H. y Samaniego V., F. 1989. Use and Misuse of the Superposition – time Function in Well Test Analysis. Artículo SPE 19817, presentado en el SPE Annual Technical Conference and Exhibition, San Antonio Texas. <http://dx.doi.org/10.2118/19817-MS>.
7. Clegg, M.W. 1967. Some Approximate Solutions of Radial Flow Problems Associated with Production at Constant Well Pressure. *SPE J.* **7** (1): 31-42. SPE 1536-PA. <http://dx.doi.org/10.2118/1536-PA>.

8. Earlougher, R.C. Jr. 1977. *Advances in Well Test Analysis*, Vol. 5, 45-72. Richardson, Texas: Monograph Series, SPE.
9. Edwards, C.H. y Penney, D.E. 2009. *Ecuaciones Diferenciales y Problemas en la Frontera: Cómputo y Modelado*. México: Pearson Educación.
10. Ehlig-Economides, C.A. 1979. Well Test Analysis for Well Produced at a Constant Pressure. PhD dissertation, Stanford University, Stanford, California.
11. Ehlig-Economides, C.A. y Ramey, H.J. Jr. 1981. *Pressure Buildup for Wells Produced at a Constant Pressure*. *SPE J.* **21** (1): 105-114. SPE-7985-PA. <http://dx.doi.org/10.2118/7985-PA>
12. Ehlig-Economides, C.A. y Ramey, H.J. Jr. 1981. Transient Rate Decline Analysis for Wells Produced at Constant Pressure. *SPE J.* **21** (1): 98-104. SPE 8387-PA. <http://dx.doi.org/10.2118/8387-PA>.
13. Fetkovich, M.J. y Vienot, M.E. 1984. *Rate Normalization of Buildup Pressure By Using Afterflow Data*. *J. Pet Tech* **36** (12): 2211-2224. SPE-12179-PA doi: <http://dx.doi.org/10.2118/12179-PA>.
14. Hildebrand, F.B. 1976. *Advanced Calculus for Applications*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.
15. Horner, D.R. 1951. Pressure Buildup in Well. Proc., Third World Petroleum Congress, The Hague, Sec. 11, 503-23.
16. Horner, D.R. 1967. *Pressure Analysis Method*, Vol. 9, 25-43. Richardson, Texas: Reprint Series.
17. Kreyszing, E. 2006. *Advanced Engineering Mathematics*, ninth edition. New York: Wiley.

18. Kutasov, I.M. 1989. Application of the Horner Method for a Well Produced at a Constant Bottomhole Pressure. *SPE Form Eval* **4** (1): 90-92. SPE-15143-PA. <http://dx.doi.org/10.2118/15143-PA>
19. Matthews, C.S. y Russell, D.G. 1967. *Pressure Buildup and Flow Tests in Wells*. Vol. 1, 18-21. Richardson, Texas: Monograph Series, SPE.
20. McLachlan, N.W. 1955. *Bessel Functions for Engineers*, second edition. Oxford: Clarendon Press.
21. O'Neil, Peter V. 2008. *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, sexta edición. México, D.F.: Cengage Learning Editores.
22. Prats, Michael. 2006. *Constant pressure buildup in an infinite circular reservoir*.
23. Raghavan, R. 1993. *Well Test Analysis*. Englewood Cliffs, New Jersey: PTR Prentice Hall.
24. Spiegel, M.R. 1965. *Schaum's Outline Theory and Problems of Laplace Transforms*. New York: McGraw-Hill Book Co.
25. Uraiet, A.A. 1979. Transient Pressure Behavior in a Cylindrical Reservoir Produced by a well at constant Bottom-Hole Pressure. PhD dissertation, Tulsa, Oklahoma: The University of Tulsa.
26. Uraiet, A.A. y Raghavan, R. 1980. Pressure Buildup Analysis for a Well Produced at Constant Bottomhole Pressure. *J. Pet Tech* **32** (10): 1813-1824. SPE-7984-PA. <http://dx.doi.org/10.2118/7984-PA>
27. Van Everdingen, A.F. 1949. *The Application of the Laplace Transformation to Flow Problems in Reservoirs*. *J. Pet Tech* **1** (12): 305-324. SPE-949305-G. <http://dx.doi.org/10.2118/949305-G>.

28. Watson, G.N. 1966. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, second edition. Cambridge, England: Cambridge University Press.