Capítulo 5

Actuación electrostática

Los actuadores mecánicos en raras ocasiones son impulsados por fuerzas de tipo electrostático, debido a que este tipo de fuerzas son muy pequeñas para desplazar o levantar elementos mecánicos, a menos que el voltaje empleado sea muy alto. Con la miniaturización de estructuras mecánicas, la fuerza electrostática se vuelve relativamente grande, por lo que el uso de fuerzas de tipo electrostático tiene múltiples y numerosas aplicaciones en los actuadores de los Microsistemas.

La fuerza electrostática en Sistemas Microelectromecánicos tiene las siguientes características, las cuales son muy importantes para el análisis y diseño de los dispositivos, o, en algunos casos, para la exploración de nuevas aplicaciones:

1. Para las microestructuras, la fuerza electrostática es comparable con la fuerza elástica de la estructura mecánica y la fuerza de amortiguamiento del aire circundante. Por lo tanto, todas las fuerzas deben ser consideradas de forma simultánea.
2. La fuerza electrostática no es lineal respecto de la distancia. La acción conjunta de la fuerza electrostática y la fuerza elástica puede provocar severos problemas de no linealidad e inestabilidad.
3. Dado que las distancias entre los elementos mecánicos y las dimensiones de las estructuras son comparables, los efectos de la fuerza electrostática en los bordes deben considerarse en muchos casos.

5.1. Fuerzas electrostáticas

5.1.1. Fuerza normal

Se considerará que un actuador electrostático consiste de una fuente de voltaje y un capacitor de placas paralelas. Una de las placas del capacitor estará fija y la otra tendrá libertad de movimiento en su dirección normal. La capacitancia del capacitor de placas paralelas será por tanto:

$$C\left(x\right)=\frac{A\varepsilon\varepsilon_0}{x} \tag{5.1}$$

donde A es el área de traslape de las placas paralelas del capacitor (actuando como electrodos), x es la distancia de separación entre las dos placas, ε_0 es la permitividad del vacío ($\varepsilon_0 = 8{,}854\times10^{-12}\ F/m$), ε es la permitividad relativa del medio presente entre las placas, la cual es aproximadamente igual a la unidad para el aire.

Por simplicidad en el análisis se asume que la energía inicial almacenada en el capacitor es cero y que la energía inicial de la fuente de voltaje, normalmente una batería, es E_0. Por lo tanto, cuando el capacitor es conectado a la fuente de voltaje, si la fuerza electromotriz de la fuente es V, la carga eléctrica almacenada en el capacitor es:

$$Q_c = C(x)V$$

La energía almacenada en el capacitor es:

$$E_c = \frac{1}{2}C(x)V^2$$

Debido a la carga del capacitor, la energía de la batería (fuente de voltaje) se reduce, por lo que:

$$E_B = E_0 - Q_cV = E_0 - C(x)V^2$$

Por lo tanto, la energía del circuito es:

$$E(x) = E_B + E_c = E_0 - \frac{1}{2}C(x)V^2 = E_0 - \frac{A\varepsilon\varepsilon_0}{2x^2}V^2 \tag{5.2}$$

De la ecuación anterior, la fuerza normal aplicada sobre la placa móvil del capacitor es:

$$F_N = -\frac{\partial E(x)}{\partial x} = -\frac{A\varepsilon\varepsilon_0}{2x^2}V^2 \tag{5.3}$$

el signo negativo de la fuerza indica que la fuerza es atractiva.

De acuerdo con la ecuación 5.3, la fuerza atractiva entre las dos placas paralelas se mantiene constante cuando las dimensiones de las placas y la distancia de separación se escalan por el mismo factor. Esta es una de las características favorables de la fuerza electrostática para aplicaciones a Microsistemas.

5.1.2. Fuerza tangencial

Considérese un sistema formado por una batería y un actuador de placas paralelas. La separación entre placas, d, es constante; la placa que se encuentra en la parte superior es móvil y se desplaza sobre el plano que ella misma define. Si se supone que la distancia de traslape, y, es mucho mayor que la distancia de separación, d, la capacitancia entre las dos placas se obtiene mediante:

$$C(y) = \frac{by\varepsilon\varepsilon_0}{d} \tag{5.4}$$

donde b, es el ancho de las placas.

La energía almacenada por la batería se denota por E_0 antes de que el capacitor sea conectado a ella de forma paralela. Una vez que el capacitor es conectado a la batería, la carga eléctrica almacenada en el capacitor es:

$$Q_c = C\,(y)\,V$$

y la energía almacenada en el capacitor es:

$$E_c = \frac{by\varepsilon\varepsilon_0}{2d}V^2$$

Debido a la carga del capacitor, la energía de la batería se reduce a:

$$E_B = E_0 - Q_c V = E_0 - C\,(y)\,V^2$$

Por lo tanto, la energía del sistema batería-capacitor se expresa como:

$$E\,(y) = E_B + E_c = E_0 - \frac{1}{2}C\,(y)\,V^2 = E_0 - \frac{by\varepsilon\varepsilon_0}{2d}V^2 \tag{5.5}$$

A partir de la ecuación 5.5, la fuerza aplicada sobre la placa móvil del capacitor es:

$$F_T = -\frac{\partial E\,(y)}{\partial y} = \frac{b\varepsilon\varepsilon_0}{2d}V^2 \tag{5.6}$$

El signo positivo en el segundo término de la ecuación 5.6 indica que la fuerza tangencial aplicada sobre la placa móvil tira de la placa para lograr una mayor área de traslape con la placa estacionaria. También a partir de la ecuación 5.6 puede apreciarse que la fuerza es independiente de la distancia de traslape entre placas, y, de modo tal que la fuerza es constante con el movimiento de la placa, y la fuerza electrostática tangencial se mantiene constante cuando el ancho, b, de la placa se escala con la distancia d.

Si se compara la fuerza tangencial F_T y la fuerza normal F_N bajo las consideraciones de que $x = d$ y $A = by$, a partir de las ecuaciones 5.3 y 5.6, se tiene que $|F_N| / |F_T| = y/d$. Normalmente, F_N es mayor que F_T, así como y es usualmente mayor que d.

5.1.3. Efectos en los bordes

Capacitancia

Hasta ahora los electrodos del capacitor mecánico se han considerado paralelos y como placas cuyas dimensiones son mucho mayores que la distancia que las separa. Por lo tanto, el capacitor en cuestión puede aproximarse como uno de placas paralelas y la capacitancia se obtiene mediante la ecuación 5.1 o la ecuación 5.1 . Sin embargo, en el diseño de microsensores y actuadores es frecuente que las dimensiones de los electrodos mecánicos sean comparables con la distancia entre ellos.

Por lo tanto, la capacitancia entre dos placas paralelas actuando como electrodos no puede obtenerse a partir de las ecuaciones hasta ahora vistas. La capacitancia que provocan las áreas laterales e incluso el área posterior de la placa son relevantes y se les conoce como efecto en los bordes. Debido a este efecto, la capacitancia de la estructura mecánica es mayor que la obtenida mediante las expresiones 5.1 y 5.1.

Si se considera una estructura de dos barras paralelas, con sección transversal rectangular (cuya placa superior es móvil), se tiene que la capacitancia, calculada mediante una aproximación como capacitor de placas paralelas, es:

$$C_0(z) = \frac{2al\varepsilon\varepsilon_0}{z} \tag{5.7}$$

donde l es la longitud de las barras y es mucho mayor que a, h y z. Debido a efecto en los bordes, la capacitancia entre las barras, $C(z)$, es siempre mayor que $C_0(z)$.

El valor exacto de la capacitancia de un capacitor micromaquinado no puede encontrarse en una forma cerrada y puede calcularse únicamente por métodos numéricos basados en la ecuación de Poisson ($\nabla^2 V = 4\pi\rho$, donde ρ es la densidad de carga) y condiciones de frontera adecuadas. Por lo tanto, para algunas condiciones, pueden encontrarse relaciones aproximadas.

Para una estructura como la mostrada en la figura anterior, con una distancia pequeña entre las placas ($z \ll a$), la capacitancia puede aproximarse mediante:

$$C(z) \doteq C_0(z)\left\{1 + \frac{z}{2\pi a}\ln\frac{2\pi a}{z} + \frac{z}{2\pi a}\ln\left[1 + \frac{2h}{z} + 2\sqrt{\frac{h}{z} + \frac{h^2}{z^2}}\right]\right\} \tag{5.8}$$

donde $C_0(z)$ es la capacitancia obtenida mediante la aproximación como capacitor de placas paralelas que la ecuación 5.7 arroja.

La ecuación 5.8 puede escribirse como $C(z) = \beta C_0(z)$, donde β es un factor de corrección de la capacitancia por el efecto de los bordes, el cual es dependiente de las dimensiones de la estructura:

$$\beta = 1 + \frac{z}{2\pi a}\ln\frac{2\pi a}{z} + \frac{z}{2\pi a}\ln\left[1 + \frac{2h}{z} + 2\sqrt{\frac{h}{z} + \frac{h^2}{z^2}}\right] \tag{5.9}$$

Basado en la ecuación 5.9 y la dependencia de β respecto de z, h y a, se ha encontrado que β puede ser mayor que 1 de manera apreciable. Por ejemplo, para $z = 0{,}5a$ y $h = 0{,}2a$, se tiene $\beta = 1{,}3$.

Por otra parte, si la distancia entre las dos barras es mucho mayor que su grosor ($z \gg a$), la estructura puede aproximarse como dos filamentos conductores. Si los filamentos tienen una sección transversal circular de radio a y la distancia entre las dos superficies de los filamentos es z, se tiene que:

$$C(z) \doteq C_0(z)\frac{\pi z}{2a\ln(z/a + 2)}$$

Por lo tanto, $C(z)$ es mucho mayor que $C_0(z)$ para una distancia considerable, pero $C_0(z)$ y $C(z)$ son ambas lo suficientemente pequeñas para que la capacitancia diferencial entre ellas sea despreciada.

Para este mismo arreglo de barras paralelas, en el cual la placa superior puede moverse lateralmente con una distancia normal constante, d, respecto de la barra inferior, la capacitancia obtenida mediante la aproximación como un capacitor de placas paralelas es:

$$\begin{aligned} C_0(x) &= \frac{l(2a - |x|)\varepsilon\varepsilon_0}{d}, \qquad (-2a < x < 2a) \\ C_0(x) &= 0, \qquad (x < -2a,\ x > 2a) \end{aligned}$$

donde l es la longitud de la barra y x es la posición del centro de la barra móvil. Cuando se consideran los efectos de los bordes, la capacitancia $C(x)$ es generalmente mayor que $C_0(x)$.

Fuerza electrostática

Para un par de barras paralelas (con sección transversal rectangular), la fuerza normal es:

$$F_N = \frac{1}{2}\frac{\partial C(z)}{\partial z}V^2 = \frac{1}{2}\left(\beta(z)\frac{\partial C_0(z)}{\partial z} + \frac{\partial \beta(z)}{\partial z}C_0(z)\right)V^2$$

donde $C_0 = A\varepsilon\varepsilon_0/z$. Dado que $\beta(z) \geq 1$ y $\partial\beta/\partial z > 0$, la fuerza es siempre mayor que la calculada para el caso de la aproximación como capacitor de placas paralelas. Si $h \ll z \ll a$, la ecuación 5.9 puede aproximarse como:

$$\beta = 1 + \frac{h}{\pi a} + \frac{z}{2\pi a}\ln\frac{2\pi a}{z} + \frac{1}{\pi a}\sqrt{zh + h^2}$$

Por lo tanto, la fuerza normal puede simplificarse y quedar como:

$$F_N = \left[\left(1 + \frac{z}{2\pi a} + \frac{h}{\pi a}\right) + \frac{zh + 2h^2}{2\pi a\sqrt{zh + h^2}}\right]\frac{1}{2}\frac{\partial C_0}{\partial z}V^2 \equiv \gamma\frac{1}{2}\frac{\partial C_0}{\partial z}V^2 \tag{5.10}$$

donde γ es el factor de corrección para la fuerza normal, debido al efecto en los bordes.

Considerando el mismo arreglo mecánico de barras paralelas con sección transversal rectangular, pero ahora con libertad de movimiento lateral para la barra superior, se presentará una fuerza tangencial cuyo valor será $F_T = \partial C(x)/\partial x \cdot V^2$. Cuando se analiza el fenómeno empleando una aproximación como capacitor de placas paralelas, la fuerza es uniforme en la región de traslape pero tiene signos opuestos para los lados izquierdo y derecho.

La fuerza se precipita a cero cuando la placa superior (móvil) se mueve fuera de la región de traslape. Cuando el efecto en los bordes es considerado, la fuerza lateral está relacionada con la pendiente de la curva $C(x)$. Es decir, la fuerza decae gradualmente cuando la placa superior se traslada fuera de la región de traslape.

5.2. Actuadores mecánicos impulsados por fuerzas electrostáticas

5.2.1. Actuador de placas paralelas

Manejo por voltaje y efecto de llegada

Es común que un actuador de placas paralelas (capacitor mecánico) se forme a partir de una placa adherida al sustrato (electrodo de referencia), una placa que mantiene la libertad de movimiento en su dirección normal (masa de prueba y electrodo móvil) y un conjunto de vigas voladas (resortes) que actúan como soportes de la masa-placa móvil. La separación inicial entre electrodos normalmente se denota como d y cuando se aplica una diferencia de potencial eléctrico, V, sobre los electrodos, la placa móvil (masa de prueba y electrodo móvil) experimenta una fuerza electrostática que tira de ella aproximándola al electrodo de referencia. Una vez que la masa se desplaza en dirección normal, las vigas voladas (actuándo como resortes) se oponen al movimiento y ejercen una fuerza que regresa la placa a su posición original.

La posición de equilibrio de la placa móvil está determinada por una condición de balance de fuerzas. Dicho balance debe analizarse con detenimiento y tomar en cuenta la naturaleza no lineal de la fuerza electrostática, ya que debido a ella se pueden presentar problemas de inestabilidad.

Definido el desplazamiento de la placa móvil (masa) como y, y debido a las actuaciones de la fuerza electrostática y la fuerza elástica de las vigas voladas actuando como resortes, la condición de balance de fuerzas es:

$$F = F_e + F_k = 0$$

donde F_e es la fuerza electrostática y $F_k = -ky$ es la fuerza elástica de recuperación ejercida por los resortes sobre la placa (masa) móvil. El balance de fuerzas está determinado por:

$$\frac{A\varepsilon\varepsilon_0 V^2}{2\left(d-y\right)^2} - ky = 0 \tag{5.11}$$

Tanto F_e como F_k son funciones del desplazamiento de la placa móvil; la curva para F_e es una hipérbola, en tanto que la curva que describe F_k es una línea recta que cruza por el origen del plano coordenado. Si k es lo suficientemente grande, las dos curvas se intersectan en dos puntos a y b. Los puntos de intersección entre las curvas correspondientes a los términos de la ecuación de balance de fuerzas constituyen soluciones a dicha ecuación que físicamente deben interpretarse como posiciones de equilibrio de la placa (masa) móvil. Esto lleva a plantear que la solución correspondiente al punto b representa un estado poco estable del sistema, pues si una pequeña perturbación mueve hacia atrás a la placa (masa), la fuerza elástica de los resortes será mayor que la fuerza electrostática y la placa (masa) retrocederá hasta un nuevo punto de balance de fuerzas que corresponderá al punto a. Por otra parte, si la perturbación mueve hacia adelante a la placa (masa), la fuerza electrostática será mayor que la fuerza de restauración de los resortes y la placa se moverá hasta hacer contacto con el electrodo de referencia. Por lo tanto, la solución a la ecuación de desplazamiento correspondiente al punto a se considera estable ya que la masa podrá siempre recuperar su posición de equilibrio después de experimentar una perturbación que la saque de este punto.

A partir de la condición para un estado estable $\partial F/\partial y < 0$, se tiene:

$$\frac{A\varepsilon\varepsilon_0 V^2}{\left(d-y\right)^3} - k < 0 \tag{5.12}$$

A partir de las ecuaciones 5.11 y 5.12, se tiene:

$$y < \frac{1}{3}d$$

Lo cual significa que la posición de equilibrio es estable cuando el desplazamiento de la placa es menor que un tercio de la distancia original que separa a la placa (masa) móvil del electrodo de referencia.

Para una estructura mecánica dada k será constante, por tanto, la pendiente de la recta correspondiente al término F_k no cambiará. Por otra parte, la curva que muestra el comportamiento de F_e respecto del desplazamiento, se recorre hacia arriba o abajo en el plano coordenado si el voltaje V aumenta o disminuye, respectivamente. Por lo tanto, para un voltaje crítico V_{po}, los puntos a y b se fusionan en uno solo (es decir, la recta correspondiente al término F_k se vuelve tangente en un punto a la curva del término F_e) y para el caso en el que el voltaje V_{po} sea suficientemente grande no existe intersección entre las dos curvas. En este último caso, F_e será siempre mayor que $|F_k|$ para $V > V_{po}$, por tanto, la placa (masa) móvil se moverá hasta hacer contacto con el electrodo de referencia. Éste fenómeno es llamado en inglés *pull-in efect* (efecto de llegada) y al voltaje V_{po} se le conoce como *pull-in voltage* (voltaje de llegada).

El voltaje V_{po} puede obtenerse directamente a partir de la ecuación 5.11. Es común encontrar en la literatura sobre el tema la siguiente notación adimensional:

$$\widetilde{y} = \frac{y}{d} \text{ y } p = \frac{F_{e0}}{kd}$$

Con lo cual la ecuación 5.11 normalmente se define como:

$$\widetilde{y}\,(1-\widetilde{y})^2 = p \tag{5.13}$$

Adoptando esta notación, se tiene que el máximo de $\widetilde{y}\,(1-\widetilde{y})^2$ en la región de 0 a 1 es 4/27 en $\widetilde{y} = 1/3$. Por lo tanto, la condición para una solución estable es:

$$p \leq \frac{4}{27}$$

Con lo cual V_{po} se obtiene como:

$$V_{po} = \sqrt{\frac{8kd^3}{27A\varepsilon\varepsilon_0}}$$

Para un voltaje V menor que V_{po}, el desplazamiento de la masa se puede obtener a partir de la ecuación 5.13 mediante cálculos iterativos. Si p es muy pequeño, $\widetilde{y}$ se incrementa con p de forma casi lineal. De cualquier modo, $\widetilde{y}$ se incrementa abruptamente con p cuando p alcanza 4/27 (es decir, cuando V alcanza a V_{po}). Una vez que el desplazamiento de la placa (masa) móvil rebase el límite marcado por la posición inestable de equilibrio, dicha placa no podrá liberarse aunque el voltaje se vuelva cero ($V = 0$).

Eliminación del efecto de llegada conectando un capacitor en serie

El desplazamiento estable de una placa móvil en la dirección normal impulsada por una fuerza electrostática está limitado a un tercio de la distancia original, d, entre las dos placas. La placa móvil hará contacto con el electrodo de referencia cuando el voltaje alcance y rebase un valor crítico, el voltaje V_{po} (voltaje de llegada). Un poco antes de que se llegue al punto crítico, el desplazamiento se incrementa con p de forma considerable (super linealidad). Para salvar el efecto de llegada y mejorar la relación lineal $y \sim p$, se inserta un capacitar C_s (que puede estar presente en cualquier tipo de componente eléctrico) en serie con el capacitor mecánico de placas paralelas.

Si la distancia original entre las dos placas es d, la capacitancia original del capacitor mecánico de placas paralelas es $C_0 = A\varepsilon\varepsilon_0/d$, donde A es el área de traslape entre las placas. Si se presenta un desplazamiento y (que aproxima las dos placas o electrodos), la capacitancia del capacitor mecánico es:

$$C_M = \frac{A\varepsilon\varepsilon_0}{d-y}$$

Si la capacitancia del capacitor en serie es $C_s = bC_0$, el capacitor (presente como fenómeno eléctrico en cualquier tipo de componente) puede modelarse como un capacitor de placas paralelas con un área de traslape entre placas de A y una distancia de separación d/b. Por lo tanto, los capacitores C_M y C_s pueden modelarse como un sólo capacitor de placas paralelas con un área de traslape entre placas igual a A y una distancia efectiva de separación entre placas igual a $d_{efectiva}$.

$$d_{efectiva} = d + \frac{1}{b}d$$

La placa móvil puede desplazarse una distancia máxima igual a d, dado que el espacio que el término d/b agrega no existe físicamente. Es frecuente, que la oblea que sirve de soporte físico para los Microsistemas se encuentre cubierta de óxido de silicio (SiO_2) como aislante eléctrico, por lo que puede emplearse el arreglo oblea-óxido de silicio-electrodo de referencia como el capacitor C_s, con lo cual se tendría:

$$d_{efectiva} = d + \frac{d_1}{\varepsilon_1}$$

donde d_1 es el grosor de la capa de óxido, ε_1 es la permitividad relativa del óxido de silicio y d es la distancia entre el óxido y la placa (masa) móvil. También puede definirse a b como $b = \varepsilon_1 d/d_1$.

De acuerdo con el modelo que toma en cuenta la distancia efectiva de separación, el voltaje de llegada es:

$$V_{po} = \sqrt{\frac{8kd^3_{efectiva}}{27A\varepsilon\varepsilon_0}}$$

Si la capacitancia C_s es lo suficientemente pequeña para cumplir la condición de que $d_{efectiva} > 3d$, el efecto de llegada no ocurrirá. Esto significa que $b < 1/2$ o que $C_s < C_0/2$.

El voltaje máximo V_m para que la placa móvil alcance a la placa fija está determinado por:

$$kd = \frac{A\varepsilon\varepsilon_o V_m^2}{2d^2/b^2} \tag{5.14}$$

El movimiento de la masa es detenido mediante el electrodo fijo, si a éste se le aplica un voltaje V mayor que V_m. A partir de la ecuación 5.14 se tiene que V_m es igual a:

$$V_m = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{2kd^3}{A\varepsilon\varepsilon_0}} \cong \frac{2{,}6}{b}V_{po}$$

Manejo por carga para un actuador de placas paralelas

Cuando un actuador de placas paralelas es alimentado con un voltaje constante, dicho voltaje debe restringirse a ciertos límites de modo que el desplazamiento no exceda un tercio de la separación entre placas original. De otro modo, el efecto de llegada aparecerá y el sistema se comportará de forma errática. La conexión de un capacitor en serie con el capacitor mecánico es una forma de eliminar el efecto de llegada, pero el precio de este esquema es el uso de voltajes más altos para la operación del sistema. Para resolver el empleo de voltajes mayores, con el esquema de un capacitor en serie, se puede emplear un esquema de manejo por carga.

Un actuador de placas paralelas (capacitor mecánico) se carga hasta un voltaje V en un periodo muy breve (a partir de un estado inicial sin carga) y cuando alcanza V, el suministro es desconectado (antes de que la masa pueda moverse una distancia apreciable).

Donde la capacitancia parásita del sistema (C_p) se modela como un capacitor conectado en paralelo al capacitor mecánico. Desde este enfoque, la placa móvil se aproximará al electrodo de referencia bajo la acción de la fuerza electrostática provocada por las cargas eléctricas almacenadas en la estructura:

$$Q = (C_0 + C_p)\, V$$

donde $C_0 = A\varepsilon\varepsilon_0/d$. Las cargas crean una fuerza atractiva que mueve la placa. El desplazamiento de la placa y_0 debe satisfacer la siguiente condición:

$$ky_0 = \frac{A\varepsilon\varepsilon_0 Q^2}{2\,(d-y_0)^2\left(\frac{A\varepsilon\varepsilon_0}{d-y_0} + C_p\right)^2}$$

Si se denotan $\widetilde{y} = \frac{y}{d}$ y $b = \frac{C_p}{(C_p+C_0)}$ se tiene:

$$\widetilde{y_0}\,(1 - b\widetilde{y_0})^2 = \frac{A\varepsilon\varepsilon_0 Q^2}{2kd^3\,(C_p + C_0)^2}$$

Si se define $\zeta = b\widetilde{y_0}$, la ecuación para ζ es:

$$\zeta\,(1-\zeta)^2 = \frac{A\varepsilon\varepsilon_0 V^2}{2kd^3} b$$

el máximo del término a la izquierda en esta ecuación es $4/27$ para $\zeta = 1/3$, o $\widetilde{y_0} = 1/3b$. Obviamente, si $b < 1/3$ (es decir, $C_p < C_0/2$), se tiene $\widetilde{y_0} > 1$. Lo cual significa que el efecto de llegada no se presentará si la condición $C_p < C_0/2$ se cumple. Bajo la condición de $b > 1/3$ (o $C_p > C_0/2$), la placa es llevada a su máximo desplazamiento estable $y_0 = \frac{d}{3b} = d\frac{(C_p+C_0)}{3C_p}$ para un voltaje de carga:

$$V_{p,\,q} = \sqrt{\frac{8kd^3}{27A\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{b}}$$

Dado que b siempre es menor que 1, el desplazamiento máximo para el esquema de manejo por carga es siempre mayor que un $1/3$ de la separación original. El esquema de manejo por carga para el actuador de placas paralelas ofrece la ventaja de operar con voltajes menores a los requeridos en el esquema de conexión de capacitor en serie, pero su desventaja radica en la dificultad para el control de la carga eléctrica y el control de fugas.

5.2.2. Actuador electrostático sujeto con vigas de torsión

Desplazamiento angular

Un actuador de este tipo consiste en un par de vigas que sujetan una placa rectangular suspendida (móvil) sobre un electrodo anclado al sustrato que sólo cubre la mitad de la longitud de la placa móvil.

El electrodo debajo de la placa puede colocarse en la mitad izquierda o derecha a partir de las vigas de soporte. Es común que en lo procesos de micromaquinado de superficie, el grosor de la placa sea alrededor de 2 μm y que la separación entre sustrato (o cualquier otra capa de material colocada sobre él) y placa móvil sea también de 2 μm. Cada viga mantiene uno de sus extremos sujeto a la placa y el otro sujeto a un ancla (que a su vez está pegada al sustrato).

Si un torque T_e es aplicado mediante una fuerza electrostática, el desplazamiento angular de la placa es:

$$\varphi = \frac{1}{k_\varphi} T_e \tag{5.15}$$

donde k_φ es la constante de torsión de las vigas de soporte y se define como:

$$k_\varphi = \frac{2k_1 b h^3 G}{l}$$

donde b es el ancho de la viga de soporte, h su grosor, l su longitud, G el módulo volumétrico del material y k_1 el factor numérico asociado a la razón entre el ancho y el grosor de la viga (véase 3.63).

En presencia de un desplazamiento angular, el torque necesario para restaurar la placa a su posición original es $T = -k_\varphi \varphi$ y es producido por las vigas de torsión para balancear el torque aplicado:

$$T + T_e = 0 \tag{5.16}$$

Si el voltaje aplicado entre la placa móvil y el electrodo es V, el torque (para una φ pequeña) provocado por la fuerza electrostática es:

$$T_e = \int_{\alpha a}^{\beta a} \frac{B\varepsilon\varepsilon_0 V^2 x dx}{2\left(d - \varphi x\right)^2} = \frac{B\varepsilon\varepsilon_0 V^2}{2\varphi^2} \left[\ln\left(1 - \frac{\beta a \varphi}{d}\right) - \ln\left(1 - \frac{\alpha a \varphi}{d}\right) + \frac{1}{\left(1 - \frac{\beta a \varphi}{d}\right)} - \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha a \varphi}{d}\right)} \right] \tag{5.17}$$

Empleando el desplazamiento angular normalizado, $\phi = \frac{a\varphi}{d}$, se tiene:

$$T_e = \frac{B\varepsilon\varepsilon_0 V^2}{2\phi^2} \frac{a^2}{d^2} \left[\ln\left(\frac{1 - \beta\phi}{1 - \alpha\phi}\right) + \frac{1}{(1 - \beta\phi)} - \frac{1}{(1 - \alpha\phi)} \right] \tag{5.18}$$

De las ecuaciones 5.15, 5.16 y **??**, la ecuación para φ es:

$$\frac{B\varepsilon\varepsilon_0 V^2}{2} \frac{a^3}{d^3} \left[\ln\left(\frac{1 - \beta\phi}{1 - \alpha\phi}\right) + \frac{1}{(1 - \beta\phi)} - \frac{1}{(1 - \alpha\phi)} \right] - k_\varphi \phi^3 = 0$$

La relación entre V y ϕ es:

$$V^2 = \frac{2k_\varphi d^3}{B\varepsilon\varepsilon_0 a^3} \frac{\phi^3}{\ln\left(\frac{1-\beta\phi}{1-\alpha\phi}\right) + \frac{1}{(1-\beta\phi)} - \frac{1}{(1-\alpha\phi)}} \tag{5.19}$$

Definiendo la constante $V_0 = \sqrt{\frac{2k_\varphi d^3}{B\varepsilon\varepsilon_0 a^3}}$, la ecuación 5.19 puede escribirse como:

$$V = V_0 \sqrt{\frac{\phi^3}{\ln\left(\frac{1-\beta\phi}{1-\alpha\phi}\right) + \frac{1}{(1-\beta\phi)} - \frac{1}{(1-\alpha\phi)}}} \tag{5.20}$$

Para un voltaje pequeño, el desplazamiento angular normalizado también es pequeño y se incrementa con el voltaje aplicado. Razón por la cual, la ecuación 5.20 puede aproximarse como:

$$V = V_0 \sqrt{\frac{2\phi}{\beta^2 - \alpha^2}}$$

O, depejando ϕ queda la ecuación se escribe:

$$\phi = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2V_0^2} V^2$$

Si el voltaje no es pequeño, la pendiente de la curva decrece con el desplazamiento angular, y el voltaje alcanza un valor máximo en un valor crítico del ángulo ϕ_m. Una vez que el voltaje alcanza el máximo, es sistema pierde estabilidad y la placa hace contacto con el electrodo de referencia (es decir, ϕ tiende a 1). El efecto de llegada para una estructura con vigas de torsión es similar al efecto de llegada para un actuador de placas paralelas, por lo que el voltaje máximo para un actuador sujeto con vigas de torsión es el voltaje que provoca el efecto de llegada, V_{mo}. Una vez que la placa móvil ha hecho contacto con el electrodo de referencia, se requiere un voltaje mayor que el voltaje crítico V_S para mantener la placa en contacto. Este valor se conoce como voltaje de sujeción. Una vez que el voltaje disminuye por debajo del valor crítico V_S, la placa queda liberada y el efecto de llegada se suspende.

Una vez definido $\phi = 1$ de la ecuación 5.20 se obtiene el valor del voltaje de sujeción mediante:

$$V_S = V_0 \sqrt{\frac{\phi^3}{\ln\left(\frac{1-\beta\phi}{1-\alpha\phi}\right) + \frac{1}{(1-\beta\phi)} - \frac{1}{(1-\alpha\phi)}}}$$

Para calcular el voltaje de llegada V_{mo}, se toma la ecuación 5.19 y la condición para voltaje máximo, con lo cual se tiene:

$$3\left(\ln\left(\frac{1-\beta\phi}{1-\alpha\phi}\right) + \frac{1}{(1-\beta\phi)} - \frac{1}{(1-\alpha\phi)}\right) - \frac{\beta^2\phi^2}{(1-\beta\phi)^2} + \frac{\alpha^2\phi^2}{(1-\alpha\phi)^2} = 0 \tag{5.21}$$

La solución para esta ecuación es el desplazamiento angular crítico normalizado ϕ_m para el cual se presenta el efecto de llegada. ϕ_m puede encontrarse mediante métodos numéricos. Una vez que ϕ_m es encontrado, el voltaje de llegada se calcula a partir de:

$$V_{mo} = V_0 \sqrt{\frac{\phi_m^3}{\ln\left(\frac{1-\beta\phi_m}{1-\alpha\phi_m}\right) + \frac{1}{(1-\beta\phi_m)} - \frac{1}{(1-\alpha\phi_m)}}} \tag{5.22}$$

Por simplicidad, se tomará $\alpha = 0$, dado que α es normalmente pequeña. Para $\alpha = 0$, la solución numérica a la ecuación 5.21 es $\beta\phi_m = 0{,}44$, o, $\phi_m = 0{,}44/\beta$. Dado que ϕ_m puede estar sólo en el rango de 0 a 1, β podría ser mayor que 0,44 para que el voltaje de llegada se presente, es decir, si $\beta > 0{,}44$, existe un valor real para ϕ_m y el voltaje de llegada es posible. Por otra parte, para $\beta < 0{,}44$, el efecto de llegada puede evitarse.

Sustituyendo $\alpha = 0$ y $\beta\phi_m = 0{,}44$ en la ecuación 5.22, el voltaje de llegada es:

$$V_{mo} = 0{,}643\beta^{-1{,}5} V_0$$

Esta relación es para el caso en que $\alpha = 0$, pero es una buena aproximación para el caso en que α es muy pequeña.

Inestabilidad provocada por el voltaje de polarización

Si el electrodo sobre el sustrato cubre por completo el área de la placa móvil de un actuador electrostático sujeto con vigas de torsión (o el sustrato es alimentado con un voltaje de polarización), el torque resultante provocado por el voltaje aplicado es cero si la placa está en un estado de $\varphi = 0$ debido a la simetría de la estructura. Obviamente, el voltaje deberá provocar que no exista desplazamiento angular. Sin embargo, para un estado de $\varphi = 0$ la placa puede tornarse inestable cuando el voltaje es mayor que un valor crítico.

Para abordar el problema de inestabilidad, resulta útil el análisis de la energía en el sistema. La capacitancia entre la placa y el sustrato es una función del desplazamiento angular de la placa:

$$C(\varphi) = \int_{-a}^{a} \frac{B\varepsilon\varepsilon_0 dx}{(d - \varphi x)} = \frac{B\varepsilon\varepsilon_0}{\phi}\frac{a}{d}\left[\ln(1+\phi) - \ln(1-\phi)\right]$$

donde B es el ancho de la placa y ϕ es el desplazamiento angular normalizado $\phi = \varphi a/d$. La variación de la capacitancia es una función del desplazamiento angular:

$$\Delta C = C(\varphi) - C_o = C_o \frac{\ln(1+\phi) - \ln(1-\phi) - 2\phi}{2\phi}$$

donde C_o es la capacitancia para el estado de $\varphi = 0$.

Asumiendo que la energía del sistema en $\varphi = 0$ es cero, la energía del sistema es:

$$E(\varphi) = \frac{1}{2}k_\varphi \varphi^2 - \frac{1}{2}V^2 \Delta C \tag{5.23}$$

o,

$$E(\varphi) = \frac{d^2}{2a^2}\left(k_\varphi \phi^2 - \frac{a^2}{d^2}V^2 C_o \frac{\ln(1+\phi) - \ln(1-\phi) - 2\phi}{2\phi}\right) \tag{5.24}$$

i. Si $V = 0$, de acuerdo con la ecuación 5.24, la curva de $E(\varphi)$ es simplemente una parábola con un mínimo en $\phi = 0$. Esto representa un estado estable en $\varphi = 0$ y significa que la placa estará siempre en el estado $\phi = 0$, al cual regresará después de cualquier perturbación.

ii. Para un valor finito y pequeño de V, la energía del sistema se mantendrá como un mínimo en $\varphi = 0$. La energía del sistema se incrementará al principio junto con φ, alcanzará un máximo para un valor crítico del ángulo y decaerá continuamente cuando φ rebase el valor crítico. Esto significa que $\varphi = 0$ se mantendrá como una posición de equilibrio; la placa regresará a dicha posición después de experimentar una perturbación pequeña. De cualquier forma, la placa no regresará al estado $\varphi = 0$ si la energía de la perturbación es mayor que la barrera de energía ΔE. De cualquier forma, la placa continuará girando hasta que sea detenida por el sustrato.

iii. Si V es mayor que un valor crítico V_C, la curva de $E(\varphi)$ tiene un máximo en $\varphi = 0$. Lo cual significa que el estado $\varphi = 0$ deja de ser estable y la placa experimenta el efecto de llegada sea de un lado o de otro.

Para φ cercano a cero, la variación de la capacitancia se aproxima como:

$$\Delta C = C(\varphi) - C_o = C_o\left(\frac{1}{3}\phi^2 + \frac{1}{5}\phi^4 + ...\right) \tag{5.25}$$

A partir de las ecuaciones 5.23 y 5.25, se tiene:

$$E(\varphi) \doteq \left(\frac{d^2}{2a^2}k_\varphi - \frac{1}{6}C_o V^2\right)\phi^2 - \frac{1}{10}C_o V^2 \phi^4 \tag{5.26}$$

De la ecuación 5.26 y la condición de balance, $\partial E/\partial\phi = 0$, se tiene:

$$\left(\frac{d^2}{a^2}k_\varphi - \frac{1}{3}C_o V^2\right)\phi - \frac{2}{5}C_o V^2 \phi^3 = 0$$

Existen tres soluciones para esta ecuación:

$$\phi_1 = 0; \quad \phi_{2,\,3} = \pm\sqrt{\frac{5d^2}{2a^2 C_o V^2}\left(k_\varphi - \frac{a^2}{3d^2}C_o V^2\right)}$$

Para examinar el problema de inestabilidad en $\phi = 0$, se analiza la segunda derivada de $E(\varphi)$:

$$\frac{\partial^2 E(\phi)}{\partial \phi^2} = \left(\frac{d^2}{a^2}k_\varphi - \frac{C_o V^2}{3}\right) - \frac{6}{5}C_o V^2 \phi^2$$

Para la solución $\varphi = 0$, se tiene:

$$\frac{\partial^2 E(\phi)}{\partial \phi^2} = \frac{d^2}{a^2}\left(k_\varphi - \frac{C_o a^2 V^2}{3d^2}\right) \tag{5.27}$$

i. Si V es pequeño tal que $k_\varphi > C_o a^2 V^2/3d^2$, se tiene $\partial^2 E(\varphi)/\partial\varphi^2 > 0$. $E(\varphi)$ tiene un mínimo en $\varphi = 0$, correspondiente al estado estable. En tanto, φ_2 y φ_3 corresponden a dos estados inestables.

ii. Si V es grande de modo tal que $k_\varphi > C_o a^2 V^2/3d^2$, es decir, V es mucho mayor que el valor de voltaje:

$$V_{C,\,\varphi} = \sqrt{\frac{3d^2 k_\varphi}{C_o a^2}} \tag{5.28}$$

se tiene $\partial^2 E(\varphi)/\partial\varphi^2 < 0$. Por lo tanto, $E(\varphi)$ tiene un máximo en $\varphi = 0$ y el sistema es inestable.

Si el voltaje es mayor que un valor crítico $V_{C,\,\varphi}$, el estado $\varphi = 0$ no se mantendrá estable. Cualquier pequeña perturbación provocará que la placa móvil se incline en una dirección u otra hasta que uno de sus extremos haga contacto con el electrodo de referencia. Este problema de inestabilidad debe considerarse para el análisis de un actuador electrostático sujeto con vigas de torsión como el empleado en los arreglos de microespejos.

5.2.3. Actuador electrostático lateral en forma de peine

Desplazamiento en la dirección tangencial

Los actuadores electrostáticos laterales en forma de peine hacen uso de las fuerzas electrostáticas tangenciales para moverse. Una fuerza electrostática en dirección normal siempre se presenta junto con una fuerza tangencial y es mucho mayor que la fuerza tangencial. Para eliminar el efecto de la fuerza normal, los electrodos estacionarios son colocados simétricamente en ambos lados de cada dedo móvil del peine, de modo tal que las fuerzas normales presentes en ambos lados se cancelan.

Dado que la fuerza tangencial F_T es independiente del desplazamiento, a partir de la ecuación 5.6, la expresión para calcular el desplazamiento es:

$$\frac{2nh\varepsilon\varepsilon_0 V^2}{2d} - k_x x = 0$$

donde h es el grosor de los dedos, d es la distancia entre el electrodo móvil y el electrodo estacionario, n es el número de dedos activos y k_x la constante de elasticidad de los soportes, en la dirección tangencial (para el caso que se analiza dicha dirección es x). Por lo tanto, el desplazamiento de la placa móvil es:

$$x = \frac{nh\varepsilon\varepsilon_0 V^2}{k_x d}$$

El desplazamiento de la placa es proporcional al cuadrado del voltaje aplicado V.

Inestabilidad en la dirección normal

Aún cuando las fuerzas atractivas de los electrodos estacionarios en ambos lados de un dedo se cancelan entre sí, dichas fuerzas provocan inestabilidad en la dirección normal. Para resolver el problema de inestabilidad en la dirección normal, la estructura del actuador electrostático se modifica, dejándose dos electrodos estacionarios entre un electrodo que es parte de la placa móvil. Se define a k_y como la constante elástica en la dirección y de los soportes. La distancia del electrodo de la placa a cualquiera de los electrodos fijos es d. La capacitancia entre el electrodo móvil y los dos electrodos estáticos es:

$$C\left(y\right)=\frac{A\varepsilon\varepsilon_0}{d+y}+\frac{A\varepsilon\varepsilon_0}{d-y}=2\frac{A\varepsilon\varepsilon_0}{d\left(1-\widetilde{y}\right)^2}$$

Si se definen $C_0=2A\varepsilon\varepsilon_0/d$ y $\widetilde{y}=y/d$, la ecuación anterior se reescribe como:

$$C\left(\widetilde{y}\right)=\frac{C_0}{1-\widetilde{y}^2}$$

La variación de la capacitancia respecto del desplazamiento en la dirección y es:

$$\Delta C\left(\widetilde{y}\right)=C\left(\widetilde{y}\right)-C_0=C_0\frac{\widetilde{y}}{1-\widetilde{y}^2}$$

Con respecto a la energía en la posición original ($y=0$), la energía del sistema es:

$$E\left(\widetilde{y}\right)=\frac{1}{2}k_yd^2\widetilde{y}^2-\frac{1}{2}\Delta C\left(\widetilde{y}\right)V^2=\frac{\left(k_yd^2-C_0V^2\right)\widetilde{y}^2-k_yd^2\widetilde{y}^4}{2\left(1-\widetilde{y}^2\right)} \tag{5.29}$$

Si $V=0$, de acuerdo con la ecuación 5.29, la curva que describe $E\left(\widetilde{y}\right)$ es una parábola con vértice en $\widetilde{y}=0$. Esto significa un estado estable en $y=0$, con lo cual la placa siempre regresará a él después de cualquier perturbación.

Para un valor pequeño de V, la energía del sistema se mantedrá alrededor del mínimo $y=0$. La energía se incrementa con y al principio, alcanza un máximo y decrece de forma continua cuando y excede un desplazamiento crítico. Esto significa que $y=0$ se mantiene como una posición estable, pero la placa móvil no regresará a ella si la energía de la perturbación es mayor que la barrera ΔE. En lugar de ello, la placa se moverá y golpeará el electrodo estático.

Si V es mayor que un valor crítico V_C, la curva descrita por $E\left(\widetilde{y}\right)$ tiene un máximo en $y=0$. Con lo cual $y=0$ no es una posición estable. Esto significa que la placa estará siempre más próxima de un electrodo estático (inmóvil) que del otro.

Para un análisis cuantitativo del problema, se derivará $E\left(\widetilde{y}\right)$ y se igualará a cero:

$$kd^2\widetilde{y}-\frac{\widetilde{y}}{\left(1-\widetilde{y}^2\right)^2}C_0V^2=0$$

Esta ecuación tiene tres soluciones:

$$\widetilde{y}_1=0 \text{ y } \widetilde{y}_{2,\,3}=\pm\sqrt{1-\sqrt{\frac{C_0V^2}{kd^2}}}$$

Como criterio de estabilidad se analizará la segunda derivada de $E(\widetilde{y})$:

$$\frac{\partial^2 E(\widetilde{y})}{\partial \widetilde{y}^2} = kd^2 - \frac{1+3\widetilde{y}^2}{(1-\widetilde{y}^2)^3} C_0 V^2$$

Para el estado $\widetilde{y}_1 = 0$, $\frac{\partial^2 E}{\partial \widetilde{y}^2} = kd^2 - C_0 V^2$.

Si $V < \sqrt{kd^2/C_0} = \sqrt{kd^3/2A\varepsilon\varepsilon_0}$, o $\partial^2 E(\widetilde{y})/\partial \widetilde{y}^2 > 0$, $E(\widetilde{y})$ tiene un mínimo en $\widetilde{y}_1 = 0$. Por lo tanto, $\widetilde{y}_1 = 0$ corresponde a un estado estable y $\widetilde{y}_2$ y $\widetilde{y}_3$ son dos soluciones reales correspondientes a dos posiciones balanceadas e inestables en ambos lados.

Tomando $\widetilde{y}_2$ como ejemplo, se tiene que si el electrodo que forma parte de la placa se mueve un poco más allá de $\widetilde{y}_2 d$, ésta se moverá continuamente hasta hacer contacto con el electrodo estático y se mantendrá ahí definitivamente. En el caso de que el electrodo que forma parte de la placa se mueva un poco hacia atrás del centro, regresará a su estado estable en $y = 0$. La región desde la cual el electrodo que forma parte de la placa puede regresar a su estado estable en $y = 0$ está entre $\widetilde{y}_2 d$ y $-\widetilde{y}_2 d$ (es decir, $\widetilde{y}_3 d$). Obviamente, mientras mayor sea el voltaje V, menor será la región estable.

Por otra parte, si V es mayor que el valor crítico de voltaje $V_C = \sqrt{kd^2/C_0}$, $E(\widetilde{y})$ tiene un máximo en $\widetilde{y}_1 = 0$. Por lo tanto, $\widetilde{y}_1 = 0$ corresponde a un estado inestable. En este caso, $\widetilde{y}_2$ y $\widetilde{y}_3$ no son reales y el electrodo que forma parte de la placa hará siempre contacto con alguno de los electrodos estáticos.

Por lo tanto, para una operación estable, k_y deberá ser suficientemente grande. Debe señalarse que aunque en general no es difícil diseñar un actuador electrostático con una constante elástica en los soportes suficientemente grande, es posible que se presente un pequeño movimiento de rotación en el plano $x - y$ que puede ocasionar problemas, esto se debe a que la constante elástica para un movimiento de rotación es relativamente pequeña en la mayoría de los diseños empleados para los actuadores electrostáticos. Es común que los dedos (electrodos móviles) de la placa en uno de los costados se inclinen en dirección $y+$ y en el otro costado lo hagan en dirección $y-$.

Con respecto a la ecuación 5.28, el voltaje crítico que provoca la inestabilidad, reflejada por el movimiento de rotación, es:

$$V_{C,\,\varphi} = \sqrt{\frac{3d^2 k_\varphi}{2C_0 a^2}} \tag{5.30}$$

donde k_φ es la constante elástica para un movimiento de rotación y C_0 es la capacitancia nominal de uno de los lados.

5.3. Voltaje alterno y escalones aplicados a los actuadores electrostáticos

5.3.1. Voltaje alterno

Hasta ahora el desplazamiento de la placa móvil se ha analizado bajo el supuesto de la aplicación de un voltaje constante. Los resultados obtenidos sólo son válidos cuando el voltaje aumenta hasta su valor nominal lentamente o cuando la estructura está fuertemente amortiguada de modo tal que no existe sobreimpulso provocado por la fuerza electrostática.

De cualquier modo, en aplicaciones tales como micro-relevadores e interruptores ópticos las placas móviles son impulsadas por fuerzas electrostáticas provocadas por señales de voltaje con forma de escalón y la razón de amortiguamiento (coeficiente de amortiguamiento relativo) del sistema es mucho menor que uno. Por lo tanto, es importante analizar la respuesta dinámica de la placa móvil a una entrada escalón para condiciones de amortiguamiento ligero.

Sobreimpulso y voltaje de llegada

Sea un actuador de placas paralelas. Cuando un escalón V es aplicado en $t = 0$, la fuerza electrostática aplicada sobre la placa móvil es:

$$F_e\left(y\right) = \frac{A\varepsilon\varepsilon_0 V^2}{2\left(d-y\right)^2}$$

donde y es el desplazamiento dependiente del tiempo de la placa móvil.

Las posiciones de equilibrio de la placa están determinadas por la ecuación 5.11.

$$\frac{A\varepsilon\varepsilon_0 V^2}{2\left(d-y\right)^2} - ky = 0$$

Si el voltaje V no es demasiado grande, existen dos soluciones, y_0 y y_1, para la ecuación. La posición estable se denominará y_0 y y_1 será una posición equilibrada inestable.

Para un amortiguamiento ligero, la placa móvil no se acomodará directamente en la posición y_0 después de aplicado el voltaje. La placa pasará por la posición de equilibrio, y_0, con una velocidad máxima v_m, alcanzará un desplazamiento máximo y_m (asumiendo que y_m no rebasa la posición de equilibrio inestable y_1), regresará y pasará por la posición de equilibrio y_0 nuevamente y así sucesivamente. Con un amortiguamiento pequeño, la placa oscilará alrededor de la posición de equilibrio y_0 con una amplitud disminuida en cada oscilación, hasta finalmente estacionarse en y_0.

La placa será atraída hasta el electrodo estático si el escalón de voltaje es mayor que un cierto valor crítico. El voltaje de llegada para el caso de una alimentación al actuador electrostático con un escalón, es mucho menor que en el caso de una alimentación con voltaje constante.

Velocidad máxima

Si la disipación de energía por efecto del amortiguamiento en un ciclo es despreciable, se tiene que:

$$\frac{1}{2}mv_m^2 = \int_0^{y_0} \left(F_e + F_k\right) dy = \frac{A\varepsilon\varepsilon_0 V^2}{2\left(d-y_0\right)} \frac{y_0}{d} - \frac{1}{2}ky_0^2 \tag{5.31}$$

donde m es la masa de la placa y v_m es la velocidad máxima que alcanza en su desplazamiento. A partir de esto se tiene que:

$$v_m = \sqrt{\frac{A\varepsilon\varepsilon_0 V^2}{m\left(d-y_0\right)} \frac{y_0}{d} - \frac{ky_0^2}{m}}$$

y_0 se calcula a partir de la ecuación 5.11 y v_m se obtiene fácilmente con esta información.

Distancia de sobreimpulso

La distancia de sobreimpulso, y_m, está definida como el desplazamiento máximo de la placa debido al sobreimpulso. y_m se calcula fácilmente a partir de:

$$\int_0^{y_m} (F_e + F_k)\, dy = 0, \text{ o, } y_m\,(d - y_m) = \frac{A\varepsilon\varepsilon_0 V^2}{kd}$$

Si se utiliza la misma notación normalizada que se empleo con la ecuación 5.11, se tiene que para $\widetilde{y}_m$ la ecuación anterior se expresa como:

$$\widetilde{y}_m\,(1 - \widetilde{y}_m) = 2p \tag{5.32}$$

Voltaje de llegada

A partir de la ecuación 5.32, el valor máximo para $\widetilde{y}_m\,(1 - \widetilde{y}_m)$ es $\frac{1}{4}$ en $\widetilde{y}_m = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, el voltaje para una solución razonable de y_m es $p < \frac{1}{8}$. Esto determina que para un voltaje de alimentación en forma de escalón, el voltaje de llegada, V_{ps}, es:

$$V_{ps} = \sqrt{\frac{kd^3}{4A\varepsilon\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{27}{32}}V_{po} = 0{,}92V_{po} \tag{5.33}$$

donde V_{po} es el voltaje de llegada para un actuador de placas paralelas alimentado con un voltaje constante.

Tiempo de llegada y tiempo de liberación

Si el voltaje de una señal de alimentación con forma de escalón es mayor que el voltaje de llegada, V_{ps}, la placa es atraída, hasta hacer circuito corto, por las fuerzas electrostáticas. El tiempo requerido para que la placa haga contacto con el electrodo estático está relacionado con el voltaje aplicado. De acuerdo con el principio de conservación de la energía, la velocidad de la placa está determinada por:

$$\frac{1}{2}m\dot{y}^2 = \int_0^{y} (F_y)\, dy = \frac{A\varepsilon\varepsilon_0 V^2 y}{2d\,(d - y)} - \frac{1}{2}ky^2$$

Utilizando la notación normalizada, se tiene:

$$\dot{\widetilde{y}} = \omega_0\sqrt{\frac{2p\widetilde{y} - \widetilde{y}^2 + \widetilde{y}^3}{1 - \widetilde{y}}}$$

El tiempo necesario para que la placa móvil haga contacto con el electrodo estático es:

$$t_{contacto} = \int_0^1 \frac{d\widetilde{y}}{\dot{\widetilde{y}}} = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - \widetilde{y}}\,d\widetilde{y}}{\omega_0\sqrt{\widetilde{y}}\sqrt{2p - \widetilde{y}\,(1 - \widetilde{y})}}$$

Si se define $\zeta = \sqrt{\widetilde{y}}$, el tiempo para el contacto queda como:

$$t_{contacto} = \frac{2}{\omega_0} \int_0^1 \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\sqrt{2p - \zeta^2\left(1-\zeta^2\right)}} d\zeta \equiv \frac{2}{\omega_0} f\left(p\right) \tag{5.34}$$

En la expresión anterior, $f\left(p\right)$ es una integral definida. Dado que el máximo valor de $\zeta^2\left(1-\zeta^2\right)$ es $\frac{1}{4}$, $f\left(p\right)$ tiene un valor real sólo si $p > \frac{1}{8}$.

Si el voltaje aplicado es tal que $p \gg \frac{1}{8}$, se tiene la siguiente aproximación de $f\left(p\right)$:

$$f\left(p\right) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_0^1 \sqrt{1-\zeta^2} d\zeta \equiv \frac{\pi}{4\sqrt{2p}}$$

En este caso, el tiempo de contacto es inversamente proporcional al voltaje V.

$$t_{contacto} \doteq \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{2p}} = \frac{\pi}{2V} \frac{\sqrt{md^3}}{\sqrt{A\varepsilon\varepsilon_0}} \tag{5.35}$$

Para calcular el tiempo que la placa necesita para regresar desde una posición proxima al contacto, con un electrodo estático, a su posición original después de que la alimentación fue suspendida es necesario considerar que las condiciones iniciales para la placa son $y = d$, $\dot{y} = 0$ y que la energía potencial de la placa es $E_p = kd^2/2$ para $t = 0$, de acuerdo con el principio de conservación de la energía se tiene:

$$\frac{1}{2} m\dot{y}^2 = \frac{1}{2} kd^2 - \frac{1}{2} ky^2$$

La velocidad de la placa como una función de y es:

$$\dot{y} = -\sqrt{\frac{k}{m} d^2 \left(1 - \widetilde{y}^2\right)}$$

La expresión para calcular el tiempo de liberación es:

$$t_{liberación} = \int_d^0 \frac{dy}{-\sqrt{\frac{k}{m} d^2 \left(1 - \widetilde{y}^2\right)}}$$

Si se define $\widetilde{y} = \operatorname{sen} x$, la integral definida queda como:

$$\int_0^1 \frac{d\widetilde{y}}{\sqrt{1-\widetilde{y}^2}} = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto, el tiempo de liberación es:

$$t_{liberación} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{\pi}{2\omega_0} = \frac{1}{4f_0} \tag{5.36}$$

El tiempo de liberación sólo depende de la frecuencia natural de la estructura.

5.3.2. Efecto de resorte negativo y frecuencia de vibración

Actuador de placas paralelas

Un voltaje de alimentación con forma de escalón provoca que la placa móvil de un actuador de placas paralelas oscile alrededor de alguna nueva posición de equilibrio y_0 antes de que se detenga en ella. La aplicación de un escalón provoca, también, que la frecuencia de oscilación se recorra más allá de la frecuencia natural, razón por la cual se afirma que existe una dependencia de la frecuencia de oscilación respecto del voltaje aplicado.

Si el voltaje es V, la fuerza resultante sobre la masa es:

$$F = \frac{A\varepsilon\varepsilon_0 V^2}{2(d-y)^2} - ky$$

La constante elástica efectiva (o, la constante efectiva del resorte) es:

$$k_{efectiva} = -\frac{\delta F}{\delta y}, \text{ evaluada en } y = y_0 \tag{5.37}$$

$$k_{efectiva} = k - \frac{A\varepsilon\varepsilon_0 V^2}{(d-y_0)^3} \tag{5.38}$$

El primer término en el lado derecho de la ecuación es la constante elástica mecánica y el segundo término es equivalente a una constante elástica provocada por la fuerza electrostática:

$$k_e = -\frac{A\varepsilon\varepsilon_0 V^2}{(d-y_0)^3}$$

donde k_e se conoce como *constante de resorte eléctrico* o *constante elástica eléctrica*. Dado que el voltaje aplicado provoca la fuerza de atracción sobre la placa móvil y la fuerza eléctrica es inversamente proporcional a la distancia, la constante elástica eléctrica es negativa. Por lo tanto, a este fenómeno también se le conoce como *efecto de resorte negativo*. La frecuencia de oscilación de la placa se ve reducida debido al efecto elástico negativo.

La constante efectiva del resorte puede calcularse a partir de las ecuaciones 5.11 y **??**:

$$k_{efectiva} = k + k_e = k\frac{d-3y_0}{d-y_0} \tag{5.39}$$

Por lo tanto, la frecuencia de oscilación alrededor de la posición de equilibrio y_0 es:

$$\omega_0' = \sqrt{\frac{k_{efectiva}}{m}} = \omega_0\sqrt{\frac{d-3y_0}{d-y_0}}$$

donde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ es la es la frecuencia natural de la placa sin una fuerza electrostática. Cuando el voltaje se aproxima a V_{po} tal que y_0 está cercano a $d/3$, ω_0' se reduce a cero. Debe mencionarse que el efecto de resorte negativo cobra relevancia cuando la k_e es comparable con k.

Actuador electrostático sujeto con vigas de torsión

Para una estructura con vigas de torsión, la constante elástica eléctrica para el desplazamiento angular puede obtenerse a partir de:

$$k_{\varphi,e} = -\frac{\delta T_e}{\delta\varphi},\ \text{evaluada en } \varphi = \varphi_0$$

donde T_e es el torque dado por la ecuación 5.17 y φ_0 es el desplazamiento angular calculado a partir de 5.18. Por lo tanto, la constante elástica efectiva para un desplazamiento es $k_{\varphi,efectiva} = k_e + k_{\varphi,\mathrm{e}}$. La frecuencia de oscilación de la placa en la posición de equilibrio se obtiene mediante:

$$\omega' = \sqrt{\frac{k_{\varphi,efectiva}}{I_\varphi}} = \omega_0\sqrt{\frac{k_{\varphi,efectiva}}{k_\varphi}}$$

Normalmente, la frecuencia debe obtenerse mediante cálculos numéricos. Debido al valor negativo del efecto de resorte eléctrico, la frecuencia de oscilación se reduce a cero cuando la alimentación se acerca al voltaje de llegada.

Para una estructura sujeta con vigas de torsión que cuenta con un electrodo fijo sobre el sustrato, el cual cubre por completo el área de la placa móvil, la placa permanecerá en su posición de equilibrio $\varphi = 0$, si el voltaje de polarización no excede un valor crítico. Sin embargo, la frecuencia de oscilación en la posición de equilibrio $\varphi = 0$ se verá afectada por el voltaje de polarización. Para analizar la dependencia de la frecuencia de oscilación respecto del voltaje de polarización V, los resultados obtenidos en el análisis de la energía del sistema son muy útiles.

De acuerdo con la ecuación 5.27, el electrodo fijo que cubre por completo el área de la placa móvil crea una constante elástica eléctrica negativa $k_{\varphi,e} = -C_0a^2V^2/3d^2$ y la constante elástica efectiva para la barra de torsión es:

$$k_{\varphi,efectiva} = k_\varphi - \frac{C_0a^2V^2}{3d^2}$$

Por lo tanto, la frecuencia de oscilación en la posición de equilibrio es:

$$\omega' = \sqrt{\frac{k_{\varphi,efectiva}}{I_\varphi}} = \omega_0\sqrt{1-\frac{C_0a^2V^2}{3k_\varphi d^2}}$$

donde $\omega_0 = \sqrt{k_\varphi/I_\varphi}$. Obviamente, ω' decrece con el voltaje de polarización y llega a cero cuando V alcanza el voltaje crítico $V_c = \sqrt{3k_\varphi d^2/C_0a^2}$, momento en el cual el sistema pierde su estabilidad.

5.3.3. Actuación mediante voltaje de tipo alterno

Una gran cantidad de sensores y actuadores micromecánicos trabajan en estados de oscilación, ejemplo de ello son los sensores de presión por resonancia, los acelerómetros por resonancia, los sensores de variación angular, los resonadores electrostáticos, entre otros. Para que estos dispositivos trabajen, algunos métodos de actuación mediante voltaje de tipo alterno son necesarios para mover la estructura mecánica y llevarla a un estado de resonancia.

Un voltaje de tipo alterno es aplicado entre la placa móvil y el electrodo fijo. Los esquemas típicos se analizan a continuación.

Voltaje de tipo alterno simple

Si un voltaje de tipo alterno, $V_1 \operatorname{sen} \omega t$, es aplicado entre la placa móvil y el electrodo fijo, la fuerza aplicada sobre la placa es:

$$F_e = \frac{A\varepsilon\varepsilon_0}{2d^2} \left(V_1 \operatorname{sen} \omega t\right)^2$$

donde d es la distancia entre la placa móvil y el electrodo fijo y A es el área de traslape entre la placa móvil y el electrodo fijo. Por tanto, la ecuación anterior puede escribirse como:

$$F_e = \frac{A\varepsilon\varepsilon_0}{4d^2} \left(1 - \cos 2\omega t\right) \equiv F_0 + F_2$$

donde F_0 es una fuerza atractiva provocada por un voltaje de tipo continuo y F_2 la componente de fuerza provocada por el voltaje de tipo alterno con una frecuencia radial de 2ω. Dado que la frecuencia de la fuerza que provoca el movimiento no es la misma que la frecuencia del voltaje de tipo alterno aplicado, los esquemas de control mediante realimentación de la señal pueden complicarse. Por lo tanto, este simple esquema de control es empleado de forma esporádica.

Voltaje de tipo alterno con un voltaje de tipo continuo como voltaje de polarización

Para crear la componente de fuerza debida al voltaje de tipo alterno con la misma frecuencia que el voltaje alterno aplicado, el voltaje de tipo alterno debe aplicarse junton con un voltaje de tipo continuo como voltaje de polarización. Por lo tanto, se tendrá $V = V_0 + V_1 \operatorname{sen} \omega t$, con lo cual la fuerza electrostática queda como:

$$\begin{aligned} F_e &= \frac{A\varepsilon\varepsilon_0}{2d^2} \left(V_0 + V_1 \operatorname{sen} \omega t\right)^2 = \frac{A\varepsilon\varepsilon_0}{2d^2} \left[\left(V_0^2 + \frac{V_1^2}{2}\right) + 2V_0V_1 \operatorname{sen} \omega t - \frac{V_1^2}{2} \cos 2\omega t\right] \\ &\equiv F_0 + F_1 + F_2 \end{aligned}$$

donde F_0 es una componente de fuerza constante, F_1 una componente de fuerza debida al voltaje alterno con la misma frecuencia que el voltaje alterno aplicado y F_2 una componente de fuerza con la frecuencia duplicada.

Si ω está cercana a la frecuencia de resonancia de la estructura, ω_0, el efecto de F_1 será mucho mayor que el de F_2 debido a la resonancia mecánica. Dado que las frecuencias de F_1 y F_2 están alejadas, los efectos de F_2 son pequeños y pueden reducirse por medios electrónicos.

Para reducir el efecto de la componente constante de fuerza, la razón entre V_1 y V_0 es ajustada para proporcionar una razón alta de F_1 respecto de F_0. Supóngase que $V_1 = \alpha V_0$, la razón entre F_1 y F_0 es:

$$\frac{F_1}{F_0} = \frac{2V_0V_1}{V_0^2 + V_1^2/2} = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2/2}$$

Para una razón máxima de F_1 respecto de F_0, α tiene que ser $\sqrt{2}$. En este caso, se tiene $V_1 = \sqrt{2}V_0$ y $F_1 = \sqrt{2}F_0 = 2\sqrt{2}F_2$. Si sólo existe una fuente de voltaje es recomendable que V_1 no rebase V_0 para una buena forma de onda sinusoidal. En este caso, la condición de $V_1 \cong V_0$ es frecuentemente empleada y $F_1 = 1{,}33F_0 = 4F_2$.

Alimentación para la atracción y repulsión

Para la mayoría de las estructuras, las fuerzas pueden aplicarse sobre la placa móvil en ambos costados, con lo cual un buen esquema para maximizar la actuación sobre la placa es empujar desde un lado y jalar desde el otro. Un resonador electrostático con electrodos en forma de peine es una estructura típica que emplea este esquema. Los voltajes aplicados al costado izquierdo y derecho se definen como:

$$\begin{aligned} V_L &= V_0 + V_1 \operatorname{sen}\omega t \\ V_R &= V_0 - V_1 \operatorname{sen}\omega t \end{aligned} \tag{5.40}$$

La fuerza resultante que actúa sobre el resonador electrostático es:

$$F = \frac{nh\varepsilon\varepsilon_0}{d}\left(V_L^2 - V_R^2\right) \tag{5.41}$$

donde n es el número de dedos activos, d la distancia lateral entre los dedos móviles y los dedos fijos y h el grosor de los dedos.

De acuerdo con las ecuaciones 5.40 y 5.41 la fuerza electrostática es:

$$F_e = \frac{4nh\varepsilon\varepsilon_0}{d} V_0V_1 \operatorname{sen}\omega t$$

La fuerza resultante tiene sólo una frecuencia y la amplitud puede ajustase variando V_0 y V_1.