

Capítulo 4

Amortiguamiento por efecto del aire

Para máquinas convencionales, el amortiguamiento provocado por el aire que la rodea puede despreciarse. En general, esto se debe a que la energía disipada por el amortiguamiento provocado por el aire es mucho menor que la energía disipada por otros medios.

Dado que el amortiguamiento provocado por el aire está relacionado con el área de la superficie de las partes en movimiento, el amortiguamiento puede ser de importancia considerable para los Microsistemas e influir en su respuesta dinámica, sobre todo, si en sus partes móviles la relación área de la superficie en contacto con el aire es mucho mayor que el volumen. Para algunos Microsistemas, la energía consumida por el amortiguamiento debido al aire debe ser minimizada para lograr que el movimiento de las partes mecánicas se maximice con un suministro mínimo de energía.

En otros casos, el amortiguamiento provocado por el aire debe llevarse a niveles en los que el sistema obtenga su respuesta óptima. Por estas razones, la estimación del efecto de amortiguamiento en el sistema es uno de los pasos más importantes en el análisis y diseño de Microsistemas.

4.1. Efecto de arrastre de un fluido

4.1.1. Viscosidad de un fluido

El coeficiente de viscosidad de un fluido

Un fluido en reposo no puede resistir permanentemente el intento de un esfuerzo cortante por cambiar su forma, la fuerza viscosa aparece como oposición al movimiento relativo entre diferentes capas de un fluido. La viscosidad es entonces una fricción interna entre capas en movimiento con diferentes velocidades.

La fuerza cortante interna en un flujo estable de un fluido viscoso es proporcional al gradiente de velocidad. Si el flujo se presenta en la dirección x y la velocidad del flujo esta distribuida en la dirección y , es decir, la velocidad del flujo en la dirección x , u , es función de y , la fuerza cortante τ_{yx} será:

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du(y)}{dy} \quad (4.1)$$

donde μ es el coeficiente de viscosidad del fluido. Si el coeficiente de viscosidad de un fluido es una constante para un flujo estable, el fluido es llamado Newtoniano. Las unidades del coeficiente de viscosidad son $Pa \times s$. A temperatura ambiente ($20^\circ C$) al aire tiene un coeficiente de viscosidad de $1,81 \times 10^{-5} [Pa \times s]$ y el coeficiente de viscosidad del agua es $1,0 \times 10^{-3} [Pa \times s]$.

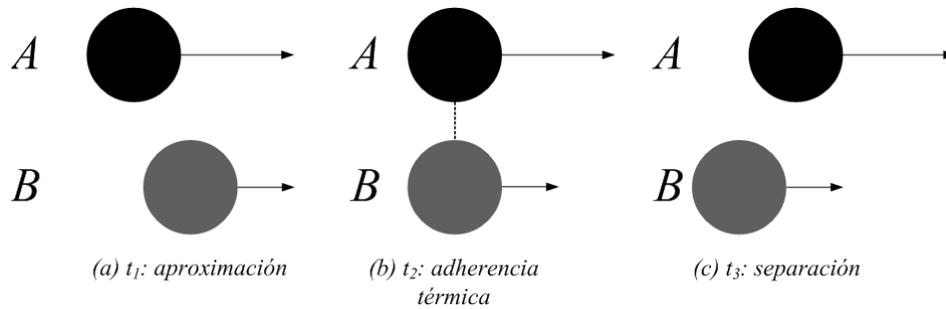


Figura 4.1: Mecanismo de viscosidad en líquidos.

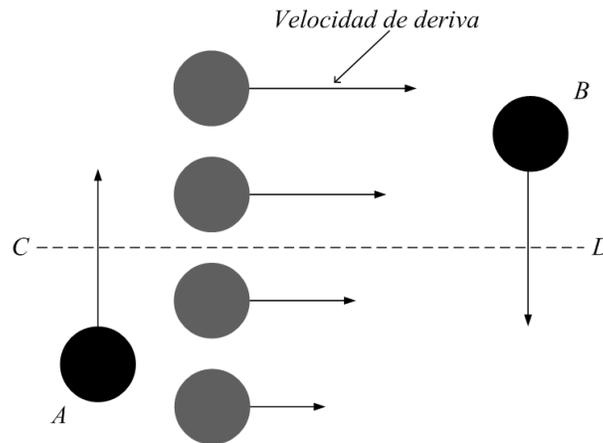


Figura 4.2: Mecanismo de viscosidad en un gas.

El mecanismo de viscosidad

Aunque líquidos y gases muestran viscosidad, tienen diferentes propiedades debido a diferentes mecanismos físicos. Para un líquido en estado estable, las posiciones relativas de moléculas adyacentes en la misma capa, son básicamente estables, pero las posiciones relativas de las moléculas en capas adyacentes de un flujo laminar, cambian debido al propio movimiento del flujo.

En la figura 4.1 se muestran los cambios de posiciones relativas entre moléculas en capas adyacentes con diferentes velocidades de flujo, donde las moléculas en la capa superior tienen mayor velocidad que las moléculas en la capa inferior. Al principio, la molécula A , de la capa superior, alcanza a la molécula B , de la capa inferior, y la rebasa. Esta aproximación de A a B conlleva un decremento de la energía potencial intermolecular y un incremento en la energía cinética molecular. Mientras la energía cinética molecular se vuelve desordenada, se forma una adherencia temporal entre las moléculas. Una fuerza externa deberá efectuar un trabajo posterior si las moléculas deben separarse. El trabajo hecho por las fuerzas externas se vuelve aleatorio. De acuerdo con este comportamiento en los líquidos, un incremento en la temperatura significa que las moléculas tienen una mayor velocidad térmica. Es decir, se requiere menor energía para separar los pares de moléculas o, dicho de otra forma, la viscosidad de la mayoría de los líquidos decrece con la temperatura.

Para los gases, el movimiento térmico de una molécula es mucho mayor que su movimiento de arrastre relacionado con el flujo del gas. En la figura 4.2, la molécula A con una velocidad de arrastre pequeña experimenta un incremento en dicha velocidad conforme se acerca y cruza la frontera CD (debida al movimiento térmico), a esto se le conoce como incremento del momento de arrastre y experimenta una fuerza hacia la derecha. Esto significa que la molécula ha ejercido una fuerza hacia la izquierda sobre la capa superior, lo cual tenderá a generar un retraso en el movimiento de la capa más rápida.

De forma similar, la molécula B en la capa más rápida, se mueve hacia abajo, cruzando la frontera CD y ejerce una fuerza hacia la derecha sobre la capa más lenta dentro de la cual se mueve. Esto es, las moléculas en la capa superior, ejercen una fuerza hacia la derecha sobre la capa inferior, lo cual tiende a incrementar la velocidad de la capa inferior.

Viscosidad del gas dependiente de la temperatura

Debido al mecanismo descrito con anterioridad, un incremento en la temperatura significa que las moléculas tienen mayor velocidad térmica, lo cual incrementa la razón de moléculas que cruzan de una capa a otra. Por lo tanto, la viscosidad de un gas se incrementa con la temperatura. Un análisis cuantitativo basado en el modelo simple de la teoría cinética de los gases predice que:

$$\mu = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \lambda \quad (4.2)$$

donde ρ es la densidad del gas, \bar{v} es la velocidad promedio de las moléculas y λ es la distancia promedio entre colisiones para las moléculas de un gas. De acuerdo con la teoría cinética de los gases, \bar{v} , λ y ρ son:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M_m}}, \quad \lambda = \frac{1}{\pi \sqrt{2} n d^2} \quad \text{y} \quad \rho = n \frac{M_m}{N_{av}}$$

respectivamente, donde R es la constante universal de los gases ($R = 8,31 \text{ J} \times \text{K}^{-1} \times \text{mol}^{-1}$), M_m la masa molar, d el diámetro molecular efectivo del gas, T la temperatura absoluta y N_{av} la constante de Avogadro ($N_{av} = 6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$). Por lo tanto, se tiene que:

$$\mu = \frac{2\sqrt{M_m R}}{3\sqrt{\pi^3} d^2 N_{av}} \sqrt{T}$$

Con lo cual se observa que μ es independiente de la presión P . Maxwell confirmó experimentalmente que este resultado es válido para valores de presión de alrededor de una atmósfera. Esta expresión también muestra que μ se incrementa en proporción directa a $\sqrt{M_m}$ y \sqrt{T} . La experiencia ha confirmado que μ se incrementa con la temperatura pero la potencia excede ligeramente $\frac{1}{2}$.

La dependencia molecular y de la temperatura de μ se expresa mediante una relación empírica conocida como ecuación de Sutherland:

$$\mu = \mu_0 \frac{1 + T_S/T_0}{1 + T_S/T} \sqrt{\frac{T}{T_0}}$$

donde $T_0 = 273,16 \text{ K}$, μ_0 es el coeficiente de viscosidad a temperatura T_0 y T_S es una constante. μ_0 y T_S dependen específicamente del gas considerado. A continuación, se listan algunos valores de estas constantes para diversos gases.

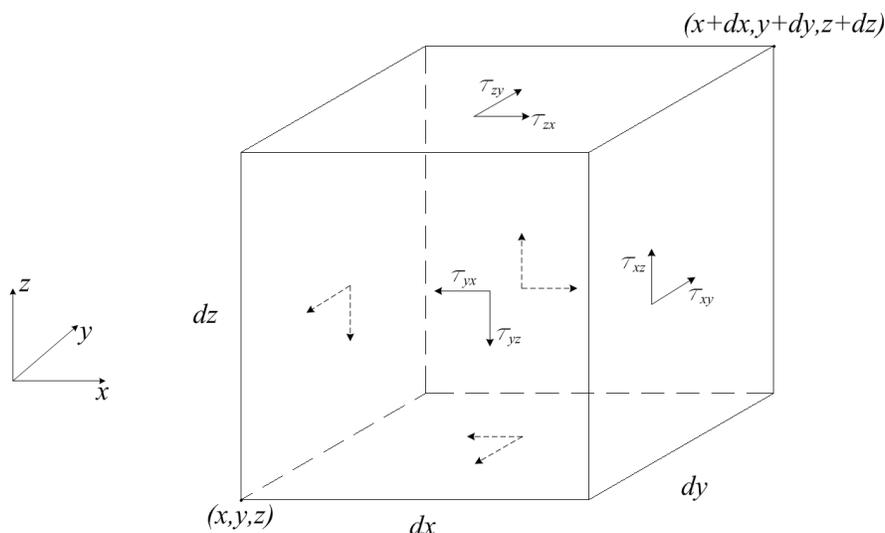


Figura 4.3: Esfuerzos cortantes sobre la superficie de un elemento cúbico en un líquido.

gas	aire	N ₂	H ₂	CO ₂
$\mu_0/10^{-6} (Pa \times s)$	17.2	16.6	8.4	13.8
$T_S K^{-1}$	124	104	71	254

Usualmente, el coeficiente de viscosidad de un líquido es mucho más sensitivo a la temperatura que el de un gas. En la siguiente tabla se muestran datos sobre el coeficiente de viscosidad del agua a distintas temperaturas para una presión de una atmósfera, como elemento comparativo se colocan datos relativos al aire a una presión de $10^{-6} Pa \times s$.

$T \text{ } ^\circ C$	0	10	20	30	0	50	60	70	80	90	100
H ₂ O	1.79	1.3	1.02	0.8	0.65	0.55	0.47	0.41	0.36	0.32	0.28
Aire	17.2	17.8	18.1	18.7	19.2	19.6	20.1	20.4	21	21.6	21.8

4.1.2. Flujo viscoso de un fluido

Ecuaciones para un flujo viscoso

Considérese un elemento cúbico en un fluido, como el que muestra la figura 4.3.

Existen seis componentes cortantes de fuerza sobre la superficie del cubo, provocados por el gradiente de velocidad del flujo: $\tau_{xy}(x) dydz$, $\tau_{xy}(x+dx) dydz$, $\tau_{yz}(y) dx dz$, $\tau_{yz}(y+dy) dx dz$, $\tau_{zx}(z) dx dy$, $\tau_{zx}(z+dz) dx dy$. También están presentes seis componentes normales de fuerza sobre la superficie del cubo que son provocadas por la presión: $P(x) dydz$, $P(x+dx) dydz$, $P(y) dx dz$, $P(y+dy) dx dz$, $P(z) dx dy$ y $P(z+dz) dx dy$.

Para un flujo estable, asumiendo que el peso del fluido es despreciable, el balance de fuerzas para el cubo en la dirección z será:

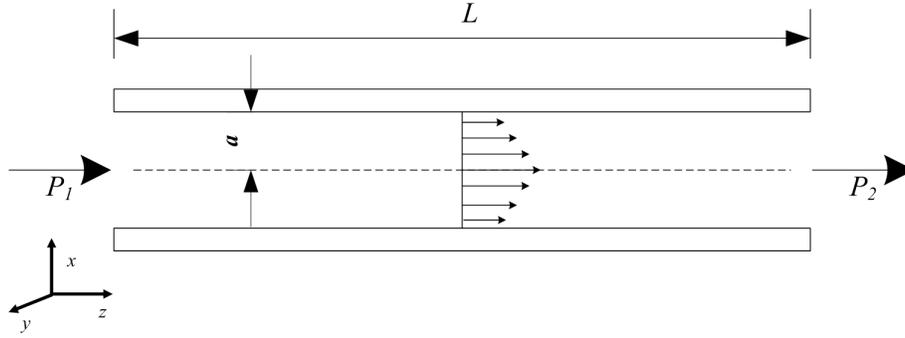


Figura 4.4: Flujo de un fluido en una tubería muy larga.

$$[P(z) - P(z + dz)] dx dy + [\tau_{xz}(x + dx) - \tau_{xz}(x)] dy dz + [\tau_{yz}(y + dy) - \tau_{yz}(y)] dx dz = 0$$

Por lo tanto, se tiene:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}$$

y dado que $\tau_{xz} = \mu \partial w / \partial x$ y $\tau_{yz} = \mu \partial f / \partial y$, se tiene:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (4.3)$$

donde w es la componente de velocidad en la dirección z . Por la misma razón, se tiene:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (4.4)$$

y

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (4.5)$$

donde u y v son las componentes de velocidad en las direcciones x y y , respectivamente. Las expresiones 4.3, 4.4 y 4.5 son ecuaciones para el flujo viscoso de un fluido provocado por una presión P .

Flujo viscoso en una tubería

Si se designa a la longitud de una tubería como L y al radio de la sección transversal circular como a , se supone que $L \gg a$ (como lo muestra la figura 4.4) y se ubica al eje z a lo largo del centroide de la tubería, entonces la ecuación 4.3 es la única que puede emplearse para determinar el flujo.

Dado que la longitud de la tubería, L , es mucho mayor que el radio, a , el flujo en la tubería se presenta en la dirección z y la distribución de la velocidad es radialmente simétrica, puede emplearse un sistema coordinado polar en el plano x - y que haga coincidir su polo con el centro geométrico de la sección transversal circular de la tubería, y por tanto, la ecuación 4.3 puede escribirse como:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w(r)}{\partial r} \right)$$

Después de integrar una vez con respecto a r , se tiene:

$$r \frac{\partial}{\partial r} w(r) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial z} r^2 + C_1$$

dado que $\partial w(r) / \partial r = 0$ en $r = 0$, se tiene $C_1 = 0$. Y después de una segunda integración con respecto a r se tiene:

$$w(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial z} r^2 + C_2$$

de acuerdo con la condición de frontera de *no deslizamiento* expresada como:

$$w(a) = 0$$

se tiene que:

$$w(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial z} (a^2 - r^2)$$

El signo negativo indica que la velocidad es opuesta al gradiente de presión. Si la diferencia de presiones entre los dos extremos de la tubería es P , es decir, $\partial P / \partial z = P/L$, se tiene:

$$w(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{P}{L} (a^2 - r^2)$$

La tasa de flujo, es decir, el volumen de fluido pasando a través de la tubería por unidad de tiempo, será:

$$Q = \int_0^a |w(r)| 2\pi r dr$$

Resolviendo la integral se tiene:

$$Q = \frac{\pi a^4 P}{8\mu L} \quad (4.6)$$

Expresión que es conocida como ecuación de Pouseuille. A partir de la ecuación 4.6, la velocidad promedio del flujo se calcula mediante:

$$\bar{w} = \frac{Q}{\pi a^2} = \frac{a^2 P}{8\mu L}$$

Es pertinente aclarar que, para los gases, los resultados antes expuestos son exactos sólo cuando el diámetro de la tubería es mucho mayor que la distancia promedio entre colisiones para las moléculas del gas. De otra forma, la condición de frontera de *no deslizamiento* deberá ser modificada.

Número de Reynolds

El patrón de flujo descrito con anterioridad es un flujo ordenado conocido como flujo laminar. Un flujo laminar ocurre sólo cuando la velocidad del flujo es pequeña. El flujo se volverá turbulento si la velocidad del flujo excede un cierto límite. El criterio para la turbulencia está usualmente dado por el valor del número de Reynolds que se representa como Re . Re es un número adimensional, que para un tubo tiene la forma:

$$Re = \frac{\bar{v}\rho d}{\mu}$$

donde ρ es la densidad de la masa del fluido, \bar{v} la velocidad promedio del fluido y d el diámetro del tubo. Re es un parámetro que puede medir la estabilidad del fluido. De cualquier forma, el valor crítico de Re que provoca la inestabilidad del flujo del fluido, depende fuertemente de la forma del tubo y solo puede ser determinada de forma experimental. Para tubos con sección circular, se tiene:

1. $Re < 2200$, el flujo es laminar.
2. $Re \approx 2200$, el flujo es inestable.
3. $Re \geq 2200$, el flujo es turbulento.

El número de Reynolds también es útil en la medición de la estabilidad del fluido en movimiento a través de un objeto sólido dentro del fluido (o, de la estabilidad de un objeto moviéndose a través de un fluido en reposo). En este caso, la forma general del número de Reynolds resulta:

$$Re = \frac{\nu\rho l}{\mu}$$

donde l es una dimensión característica del objeto. Por ejemplo, l es el diámetro de una esfera y, para una columna con una sección transversal circular moviéndose a través del fluido lateralmente, l es el diámetro de la sección transversal. El valor crítico del número de Reynolds que provoca inestabilidad depende de la forma del objeto y puede ser determinada sólo de forma experimental. Dado que Re es normalmente pequeño para micromáquinas, sólo se considerará la condición de flujo laminar.

4.1.3. Amortiguamiento por la fuerza de arrastre

Una fuerza de arrastre puede ser aplicada sobre un cuerpo si el cuerpo se mantiene estable sobre un fluido que transcurre (o el cuerpo es arrastrado a través de un fluido estable) dado que existe un gradiente de velocidad entre la capa de la frontera y los puntos más distantes en el fluido viscoso. En virtud de que el análisis para la fuerza de arrastre es un tanto complicado, las fuerzas de arrastre para algunos cuerpos con estructuras simples moviéndose a través de un fluido viscoso se dan a continuación:

1. **Esfera con un radio r .**

$$F = 6\pi\mu r v \quad (4.7)$$

2. **Disco circular con radio r moviéndose en su dirección normal.**

$$F = 16\pi\mu r v \quad (4.8)$$

3. **Disco circular con radio r moviéndose en el plano que lo contiene.**

$$F = \frac{32}{3}\pi\mu r v \quad (4.9)$$

donde v es la velocidad de la esfera o del disco circular relativa al fluido.

Los tres casos presentados pueden compararse entre sí y se puede encontrar que la dependencia de las fuerzas de arrastre respecto de diferentes secciones transversales o respecto de las direcciones de movimiento no son significativas. Las tres fuerzas de arrastre para movimientos a bajas velocidades pueden escribirse con la misma forma:

$$F = 6\pi\alpha\mu r v \quad (4.10)$$

donde el valor de α para una esfera, un disco moviéndose en su dirección normal y un disco moviéndose en el plano que lo contiene son 1, 0,85 y 0,567, respectivamente. Destaca el hecho de que las fuerzas de arrastre son independientes de la densidad del fluido, ρ , lo que se conoce como Ley de Stokes.

De cualquier forma, esta conclusión no es válida para grandes velocidades en el movimiento. La fuerza sobre una esfera con radio r oscilando en un fluido, está dada por:

$$F = -\beta_1 v - \beta_2 \frac{dv}{dt}$$

con

$$\beta_1 = 6\pi\mu r + 3\pi r^2 \sqrt{2\rho\mu\omega}$$

y

$$\beta_2 = \frac{2}{3}\pi\rho r^3 + 3\pi r^2 \sqrt{\frac{2\rho\mu}{\omega}}$$

donde ω es la frecuencia radial de la oscilación. Debe notarse que tanto β_1 como β_2 son dependientes de la densidad del fluido.

4.1.4. Efectos del amortiguamiento debido al aire sobre la dinámica de los Microsistemas

Como se vió en la sección anterior, la fuerza de arrastre aplicada a una esfera moviéndose en un fluido viscoso a una velocidad v es $F = 6\pi\mu rv$, donde μ es el coeficiente de viscosidad del fluido y r el radio de la esfera. La relación entre la fuerza de arrastre, F , y la masa del cuerpo, M , se expresa mediante:

$$\frac{F}{M} = \frac{6\pi\mu rv}{4\pi r^3 \rho/3} = \frac{9}{2} \frac{\mu v}{\rho r^2}$$

donde ρ es la densidad específica del cuerpo. Cuanto menor sea la dimensión del cuerpo, mayor será el efecto de la fuerza de arrastre sobre dicho cuerpo. Por ejemplo, para una esfera de silicio de radio $r = 1 \times 10^{-2}$ [m] moviéndose entre aire a una velocidad de $0,01$ [$\frac{m}{s}$], la relación F/M es $3,5 \times 10^{-6}$ [$\frac{m}{s^2}$], en tanto que para una esfera de silicio de radio $r = 10 \times 10^{-6}$ [m], la relación F/M es $3,5$ [$\frac{m}{s^2}$], es decir, un millón de veces mayor. Por lo tanto, la fuerza de arrastre provocada por la viscosidad del aire envolvente es normalmente despreciable para estructuras mecánicas convencionales, pero en el caso de microestructuras es de gran importancia considerar sus efectos.

En el caso de un acelerómetro simple (sistema masa-resorte) su comportamiento dinámico se expresa mediante la ecuación diferencial:

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x}$$

donde k es la constante del resorte formado por una viga y c es el coeficiente de amortiguamiento provocado por el aire envolvente. Un parámetro dinámico muy importante del acelerómetro es la razón de amortiguamiento o coeficiente de amortiguamiento relativo del sistema (ζ):

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_0} = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$$

donde ω_0 es la frecuencia natural no amortiguada del sistema. La razón de amortiguamiento (coeficiente de amortiguamiento relativo), ζ , para un acelerómetro normalmente se fija alrededor de 0,7 de modo que el sistema alcance su mejor respuesta en frecuencia a una señal de entrada. Frecuentemente, el factor de calidad, Q , es utilizado para caracterizar el sistema mecánico. Para un amortiguamiento pequeño, la relación entre el factor de calidad y el coeficiente de amortiguamiento relativo se expresa mediante: $Q = \frac{1}{2\zeta}$.

De acuerdo con la ecuación 4.10, la constante del amortiguamiento, c , es proporcional a las dimensiones de la estructura mecánica y al coeficiente de viscosidad del fluido envolvente. Dado que m es frecuentemente mayor para un acelerómetro hecho de estructuras mecánicas convencionales, el coeficiente de amortiguamiento relativo, ζ , debido al aire es usualmente muy pequeño. Por esta razón es difícil llevar el coeficiente de amortiguamiento relativo a valores cercanos a 0,7, incluso si la estructura es inmersa en aceite de alta viscosidad. En cambio, para un acelerómetro micromaquinado, el coeficiente de amortiguamiento relativo puede llevarse fácilmente a valores cercanos a 0,7 si está inmerso en aire y se emplean las estructuras clásicas de los Microsistemas para incrementar la fuerza de amortiguamiento en forma controlada. Los mecanismos básicos de amortiguamiento debidos al aire para Microsistemas son el amortiguamiento por compresión de películas de aire y deslizamiento de superficies sobre películas de aire, además del amortiguamiento debido a la fuerza de arrastre que se abordó en las secciones previas.

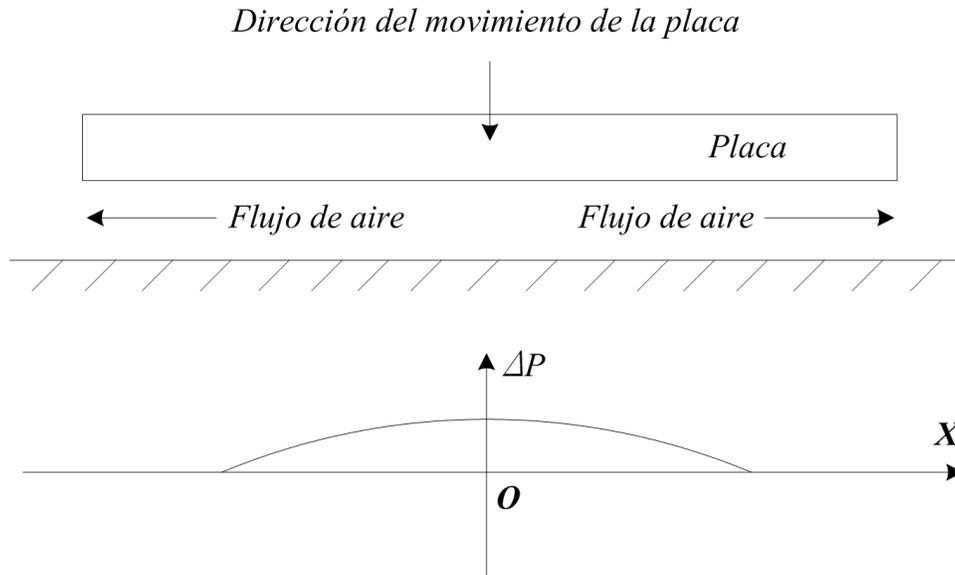


Figura 4.5: Presión ejercida por un movimiento de compresión sobre el aire contenido entre dos placas.

4.2. Amortiguamiento por compresión de una película de aire

4.2.1. Ecuación de Reynolds para amortiguamiento por presión sobre una película de aire

Cuando una placa es colocada de forma paralela a la referencia mecánica (oblea) y la placa se mueve al encuentro de dicha referencia, la película de aire entre la placa y la referencia se estruja de modo que parte del fluido (aire) se va hacia afuera del área de traslape como se muestra en la figura 4.5. Por lo tanto, una presión adicional Δp se manifiesta en el traslape debido al flujo viscoso del aire. En el caso contrario, cuando la placa se aleja de la referencia, la presión en el área de traslape se reduce por efecto del flujo de aire que ingresa.

Por tanto, cualquier movimiento en la dirección normal a la placa encuentra fuerzas provocadas por las variaciones de la presión que siempre están en oposición a dicho movimiento. Así, el trabajo hecho por la placa es consumido por el flujo viscoso del aire y transformado en calor. En otras palabras, la película de aire actúa como amortiguador y el amortiguamiento se conoce como amortiguamiento por compresión (estrujamiento) de una película de aire.

Obviamente, la fuerza de amortiguamiento es dependiente de la distancia de traslape; mientras más pequeña sea la distancia, mayor será la fuerza de amortiguamiento. Cuando la placa está muy alejada de la referencia (oblea), las variaciones en la presión, son despreciables y la fuerza de amortiguamiento se debe principalmente a la fuerza de arrastre.

El amortiguamiento por compresión (estrujamiento) de una película de aire tiene efectos significativos sobre el comportamiento dinámico de las microestructuras. En muchos casos, éste deberá reducirse y, en algunos otros casos, deberá ser controlado para mantenerlo en un nivel deseado.

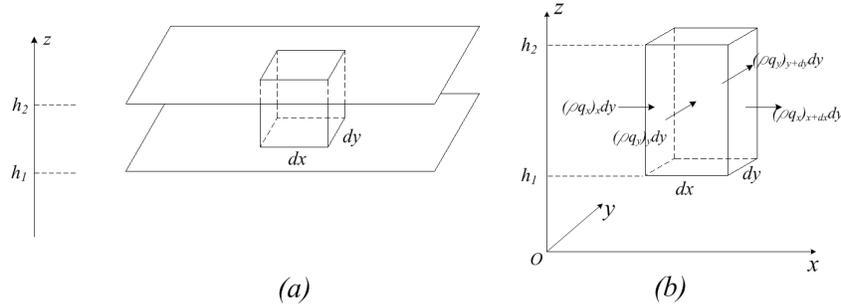


Figura 4.6: Flujo de masa dentro y fuera de un elemento unitario. (a) una columna elemental, (b) las tasas de flujo.

Ecuación de Reynolds

Si se supone la disposición de un par de placas con el plano $x-y$ del sistema de referencia cartesiano como se muestra en la figura siguiente 4.6, y además, se suponen las dimensiones de las placas mucho mayores a la distancia entre ellas, de modo que el flujo del gas atrapado entre las placas (debido al movimiento relativo entre ellas) es lateral.

Se considera un elemento columna, $h dx dy$ (donde $h = h_2 - h_1$), como se muestra en la figura siguiente. q_x es la tasa de flujo en la dirección x por unidad de ancho en la dirección y y q_y es la tasa de flujo en la dirección y por unidad de ancho en la dirección x . El balance del flujo de masa para el elemento columna $h dx dy$ requiere que:

$$(\rho q_x)_x dy - (\rho q_x)_{x+dx} dy + (\rho q_y)_y dx - (\rho q_y)_{y+dy} dx = \left(\frac{\partial \rho h_2}{\partial t} - \frac{\partial \rho h_1}{\partial t} \right) dx dy$$

Y haciendo uso de las relaciones: $(\rho q_x)_{x+dx} = (\rho q_x)_x + [\partial(\rho q_x) / \partial x] dx$, $(\rho q_y)_{y+dy} = (\rho q_y)_y + [\partial(\rho q_y) / \partial y] dy$ y $h = h_2 - h_1$, se tiene:

$$\frac{\partial(\rho q_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho q_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} = 0 \quad (4.11)$$

Para encontrar q_x y q_y , primero debe encontrarse la distribución de la velocidad en la dirección z . Dado que las dimensiones de la placa son mucho mayores que la separación y el flujo es lateral, las componentes de velocidad u y v son funciones sólo de z . De la ecuación 4.5 se tiene:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Sin embargo, para una separación muy pequeña, $P(x, y)$ no es función de z . Después de integrar la ecuación dos veces, se tiene:

$$u(z) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} z^2 + C_1 \frac{1}{\mu} z + C_2 \quad (4.12)$$

Si las placas no se mueven lateralmente y se coloca el origen del sistema de referencia sobre la placa inferior, las condiciones para la ecuación 4.12 serán:

$$u(0) = 0, \quad u(h) = 0$$

Por lo tanto:

$$u(z) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} z(z-h)$$

La tasa de flujo en la dirección x por unidad de ancho en la dirección y será:

$$q_x = \int_0^h u dz = -\frac{h^3}{12\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) \quad (4.13)$$

El signo negativo en la ecuación indica que el flujo se presenta en la dirección en que decrece la presión. Del mismo modo se tiene que:

$$q_y = -\frac{h^3}{12\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right) \quad (4.14)$$

Sustituyendo 4.13 y 4.14 en 4.11, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 12 \frac{\partial (h\rho)}{\partial t} \quad (4.15)$$

La ecuación 4.15 se conoce como ecuación de Reynolds. Esta misma ecuación puede derivarse de la ecuación de Navier-Stokes, que es mucho más complicada, bajo la condición de que el Número Modificado de Reynolds para una película delgada y sometida a presión, R_s , sea mucho menor que la unidad, es decir:

$$R_s = \frac{\omega h^2 \rho}{\mu} \ll 1$$

donde ω es la frecuencia radial de oscilación de la placa. Esta condición es satisfecha para estructuras típicas de silicio, por ejemplo, un acelerómetro con una película de aire cuyo grosor sea de 10 $[\mu m]$, oscilando a una frecuencia de 1 $[kHz]$, tendría un Número Modificado de Reynolds de $R_s = 0,045$.

Dado que se asume que h es uniforme en las direcciones x y y , se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 12 \frac{\mu}{h^3} \frac{\partial (h\rho)}{\partial t}$$

Para una película isotérmica, la densidad del aire, ρ , es proporcional a la presión P , es decir, $\rho = \frac{P}{P_0} \rho_0$, por lo que la ecuación anterior puede escribirse como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(P \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(P \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 12 \frac{\mu}{h^3} \frac{\partial (hP)}{\partial t} \quad (4.16)$$

Se desarrolla la ecuación 4.16 para quedar como:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)^2 + P \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} P + \frac{\partial^2}{\partial y^2} P \right) = 12 \frac{\mu}{h^3} \left(P \frac{dh}{dt} + h \frac{\partial P}{\partial t} \right)$$

Asumiendo que $h = h_0 + \Delta h$ y $P = P_0 + \Delta P$, para movimientos de la placa en distancias pequeñas, se tiene que $\Delta h \ll h_0$ y $\Delta P \ll P_0$. Bajo estas consideraciones, la ecuación puede aproximarse como:

$$P_0 \left(\frac{\partial^2 \Delta P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta P}{\partial y^2} \right) = 12 \frac{\mu}{h^3} P_0 h_0 \left(\frac{1}{h_0} \frac{d\Delta h}{dt} + \frac{1}{P_0} \frac{\partial \Delta P}{\partial t} \right)$$

Si $\Delta P/P_0 \ll \Delta h/h_0$, se tiene:

$$\frac{\partial^2 \Delta P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta P}{\partial y^2} = 12 \frac{\mu}{h^3} \frac{d\Delta h}{dt}$$

o

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 12 \frac{\mu}{h^3} \frac{dh}{dt} \quad (4.17)$$

En la última ecuación P es equivalente a ΔP . Es decir, la letra P en esta ecuación es algunas veces leída como ΔP . Pero debe prestarse atención a la diferencia en las condiciones de frontera para P y ΔP : $P = P_0$ pero $\Delta P = 0$ en la periferia de la placa. Supóngase que la dimensión típica de la placa es l (puede ser el radio de un disco o la mitad del ancho de un rectángulo) y el movimiento de la placa es una oscilación sinusoidal con amplitud δ , tal como $h = h_0 + \delta \sin \omega t$. A partir de la ecuación 4.17 se puede obtener una estimación de ΔP :

$$\frac{\Delta P}{l^2} = 12 \frac{\mu}{h^3} \delta \omega \cos \omega t$$

o

$$\frac{\Delta P}{P_0} = \frac{12 \mu l^2 \omega}{P_0 h^2} \frac{\delta \cos \omega t}{h} = \sigma \frac{\delta \cos \omega t}{h}$$

donde $\sigma \equiv 12 \mu l^2 \omega / P_0 h_0^2$ se conoce como coeficiente de compresión (estrujamiento). Dado que $\delta \cos(\omega t)$ tiene el mismo orden de magnitud que $\Delta h = \delta \sin(\omega t)$ se tiene:

$$\frac{\Delta P}{P_0} \cong \sigma \frac{\Delta h}{h_0}$$

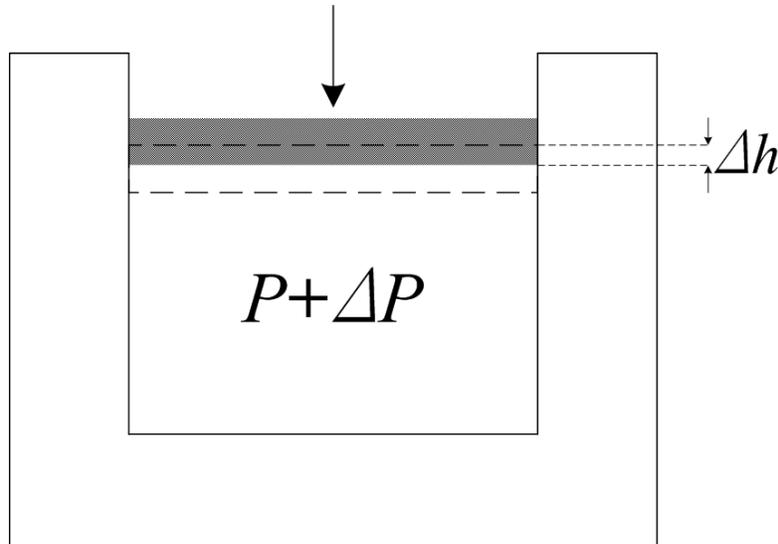


Figura 4.7: Compresión de un gas debida a la acción de un pistón.

Por lo tanto, la condición para la validez de la ecuación 4.17, $\Delta P/P_0 \ll \Delta h/h_0$, es equivalente a un coeficiente de compresión (estrujamiento) muy pequeño, $\sigma \ll 1$, o dicho de otra forma:

$$\frac{l}{h_0} \ll \sqrt{\frac{P_0}{12\mu\omega}}$$

Como es bien sabido la presión del aire P en un cilindro cerrado, como el mostrado en la figura 4.7, es inversamente proporcional a la distancia entre el pistón y la parte baja del cilindro, es decir, $\Delta P/P = \Delta h/h$ (para $\Delta h \ll h$). Para el caso de dos placas paralelas sin paredes laterales será mucho más difícil aumentar la presión del aire entre ellas, ya que nada impide que el aire escape, esto implica que la suposición de que $\Delta P/P \ll \Delta h/h$ es verdadera en la mayoría de las condiciones prácticas.

El coeficiente de compresión (estrujamiento) es una medida de la eficiencia que tiene en el establecimiento de la presión el apretón que se da a la placa móvil. Para un pistón sellado en su periferia se tiene:

$$\frac{\Delta P}{P_0} = 1 \frac{\Delta h}{h_0}$$

lo cual significa que la presión relativa cambia a la par de la variación de la compresión (estrujamiento). Con lo cual se puede afirmar que existe un coeficiente de compresión (estrujamiento) unitario en un pistón cerrado y un coeficiente de compresión (estrujamiento) menor a la unidad para una placa sin paredes laterales.

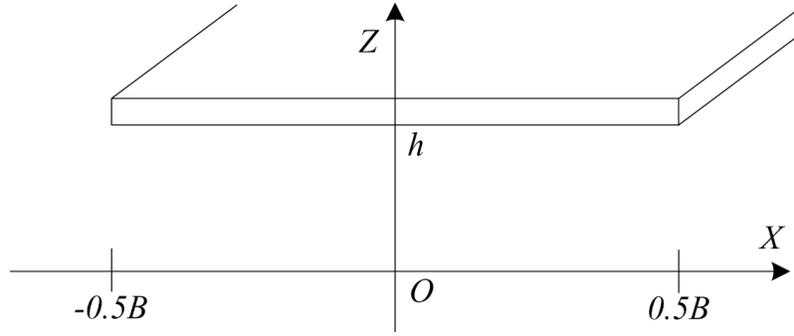


Figura 4.8: Amortiguamiento debido a la compresión del aire por una placa rectangular.

4.2.2. Placa rectangular larga

Presión y fuerza de amortiguamiento

Considérese un par de placas rectangulares de longitud, L , mucho mayor que el ancho, B . El origen del sistema cartesiano de referencia se ubica en el centro de la placa inferior y el eje x se extiende a lo largo de la dirección determinada por la anchura de la placa (véase la siguiente figura 4.5).

De este modo, el problema se reduce a un problema unidimensional, por lo que la ecuación 4.17 puede escribirse como:

$$\frac{d^2 P}{dx^2} = 12 \frac{\mu}{h^3} \frac{dh}{dt} \quad (4.18)$$

cuyas condiciones de frontera son:

$$P\left(\pm \frac{1}{2}B\right) = 0$$

Si la ecuación 4.18 se integra dos veces, se obtiene la expresión para calcular la presión de amortiguamiento:

$$P(x, t) = 6 \frac{\mu}{h^3} \frac{dh}{dt} x^2 + C_1 x + C_2$$

a la cual pueden aplicársele las condiciones de frontera para dejarla como:

$$P(x, t) = -6 \frac{\mu}{h^3} \left(\frac{B^2}{4} - x^2 \right) \frac{dh}{dt} \quad (4.19)$$

$P(x, t)$ es positiva cuando la película de aire es estrujada ($dh/dt < 0$), y viceversa. La presión de amortiguamiento máxima se presenta en el centro de la placa ($x = 0$) donde $P(0, t) = -(3\mu B^2/2h^3) dh/dt$. El esquema 4.9 ilustra la distribución de la presión de amortiguamiento.

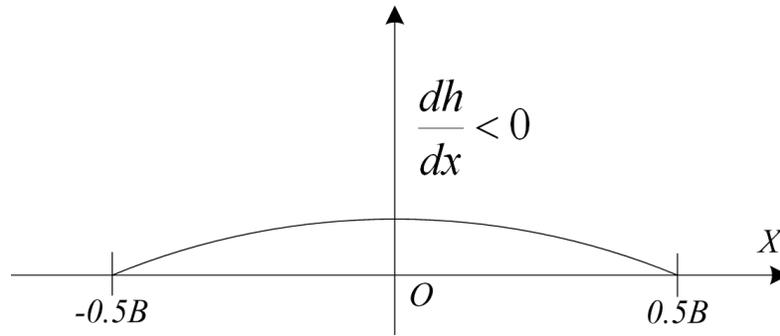


Figura 4.9: Distribución de la presión bajo una larga placa rectangular.

La fuerza de amortiguamiento F sobre la placa se calcula a partir de:

$$F_{lr} = \int_{-B/2}^{B/2} P(x) L dx = -\frac{\mu B^3 L}{h^3} \frac{dh}{dt} \equiv -\frac{\mu B^3 L}{h^3} \dot{h}$$

De acuerdo con la definición de $F = -c\dot{x}$, el coeficiente de amortiguamiento para una placa rectangular larga será:

$$c_{lr} = \frac{\mu B^3 L}{h^3} \quad (4.20)$$

Obsérvese que esta ecuación es válida solo para placas rectangulares cuya longitud, L , es mucho mayor que su anchura, B . El caso de una placa rectangular con longitud y anchura comparables se discute a continuación.

4.2.3. Placa rectangular

Considérese una placa como la mostrada en la figura 4.10:

Si las dimensiones de la placa en las direcciones x y y son $B = 2a$ y $L = 2b$, respectivamente, y además a y b son comparables, la ecuación diferencial para la presión en la película de aire es la ecuación 4.17 y las condiciones de frontera son:

$$P(\pm a, y) = 0, P(x, \pm b) = 0 \quad (4.21)$$

La solución a la ecuación 4.17 puede dividirse en dos partes: $P = p_1 + p_2$, donde p_1 es una solución específica a la ecuación 4.17, es decir, p_1 es una solución a la ecuación:

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2} = 12 \frac{\mu}{h^3} \dot{h}$$

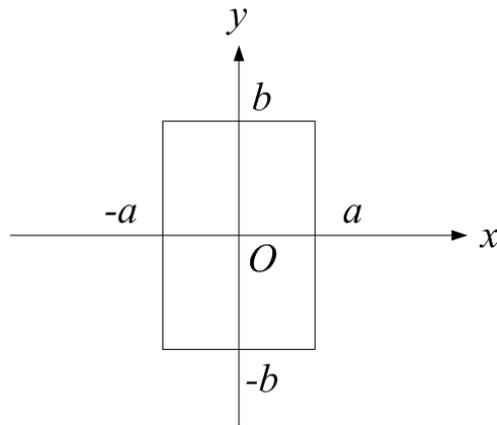


Figura 4.10: Placa rectangular con dimensiones de ancho y largo comparables.

y p_2 es una solución general a la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_2}{\partial y^2} = 0 \quad (4.22)$$

Solución de p_1

Asumiendo que $p_1 = A + Bx + Cx^2$ y que p_1 satisface la condición de frontera de $p_1(\pm a) = 0$, se tiene:

$$p_1 = -6 \frac{\mu}{h^3} \frac{dh}{dt} (a^2 - x^2) \quad (4.23)$$

Condición de frontera para p_2

De la definición de $P = p_1 + p_2$ y la condición de frontera de $P(\pm a, y) = 0$, se tiene:

$$p_1(\pm a, y) + p_2(\pm a, y) = 0$$

De acuerdo con la ecuación 4.23, es posible mostrar que las condiciones de frontera para p_2 en $x = \pm a$ serán:

$$p_2(\pm a, y) = 0 \quad (4.24)$$

De acuerdo con la ecuación 4.21, las condiciones de frontera para P en $y = \pm b$ deben ser $P(x, \pm b) = 0$, es decir:

$$p_1(x) + p_2(x, \pm b) = 0$$

Por lo tanto, las condiciones de frontera para p_2 en $y = \pm b$ serán:

$$p_2(x, \pm b) = -p_1(x) = 6 \frac{\mu}{h^3} \frac{dh}{dt} (a^2 - x^2) \quad (4.25)$$

Las condiciones de frontera completas para p_2 son las ecuaciones 4.24 y 4.25.

Solución de p_2

Para encontrar la solución de p_2 , se asume que las variables son separables y que p_2 puede expresarse como:

$$p_2 = X(x)Y(y) \quad (4.26)$$

Si se sustituye la ecuación 4.26 en la ecuación 4.22 se tiene:

$$X''(x)Y(y) + Y''(y)X(x) = 0$$

o

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$$

Por lo tanto, se tienen dos ecuaciones independientes:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0$$

y

$$Y''(y) + Y(y) = 0$$

Si se asume que $X(x) = A_1 \cos \alpha x + A_2 \sin \alpha x$ y dado que $X(\pm a) = 0$, se tiene que $A_2 = 0$, por tanto:

$$X(x) = A_1 \cos\left(\frac{2n\pi x}{a}\right) \quad (n = 1, 3, 5, \dots) \quad (4.27)$$

Del mismo modo, si se asume que $Y(y) = C_1 \cosh(\gamma y) + C_2 \sinh(\gamma y)$ y utilizando la condición de frontera para $Y(y)$, $Y(b) = Y(-b)$, se tiene que $C_2 = 0$, por tanto:

$$Y(y) = C_1 \cosh\left(\frac{2n\pi y}{a}\right) \quad (n = 1, 3, 5, \dots) \quad (4.28)$$

De las ecuaciones 4.26, 4.27 y 4.28, $P_2(x, y)$ puede escribirse como:

$$p_2(x, y) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} a_n \cosh \frac{n\pi y}{2a} \cos \frac{n\pi x}{2a}$$

Para satisfacer las condiciones de frontera expresadas por la ecuación 4.25, se tiene:

$$\sum_{n=1,3,5}^{\infty} a_n \cosh \frac{n\pi b}{2a} \cos \frac{n\pi x}{2a} = 6 \frac{\mu}{h^3} \dot{h} (a^2 - x^2)$$

Las constantes a_n son:

$$a_n = \frac{\int_{-a}^a 6 \frac{\mu}{h^3} \dot{h} (a^2 - x^2) \cos \frac{n\pi x}{2a} dx}{\cosh \frac{n\pi b}{2a} \int_{-a}^a \cos^2 \frac{n\pi x}{2a} dx} = \frac{192\mu\dot{h}a^2 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^3 \pi^3 h^3 \cosh \frac{n\pi b}{2a}} \quad (n = 1, 3, 5, \dots)$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$p_2(x, y) = \frac{192\mu\dot{h}a^2}{h^3 \pi^3} \dot{h} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^3 \cosh \frac{n\pi b}{2a}} \cosh \frac{n\pi y}{2a} \cos \frac{n\pi x}{2a}$$

Siendo la solución final al problema:

$$P = p_1 + p_2 = -6 \frac{\mu}{h^3} \dot{h} (a^2 - x^2) + \frac{192\mu\dot{h}a^2}{h^3 \pi^3} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^3 \cosh \frac{n\pi b}{2a}} \cosh \frac{n\pi y}{2a} \cos \frac{n\pi x}{2a}$$

Fuerza de amortiguamiento

La fuerza de amortiguamiento sobre una placa rectangular será:

$$F_{rect} = \int_{-a}^a \int_{-b}^b P(x, y) dx dy \equiv -\frac{\mu L B^3}{h^3} \dot{h} \beta \left(\frac{B}{L} \right) \quad (4.29)$$

donde el factor $\beta(B/L)$ se calcula mediante:

$$\beta \left(\frac{B}{L} \right) = \left\{ 1 - \frac{192}{\pi^5} \left(\frac{B}{L} \right) \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh \left(\frac{n\pi L}{2B} \right) \right\}$$

La dependencia de β de la relación B/L se muestra en la gráfica 4.11:

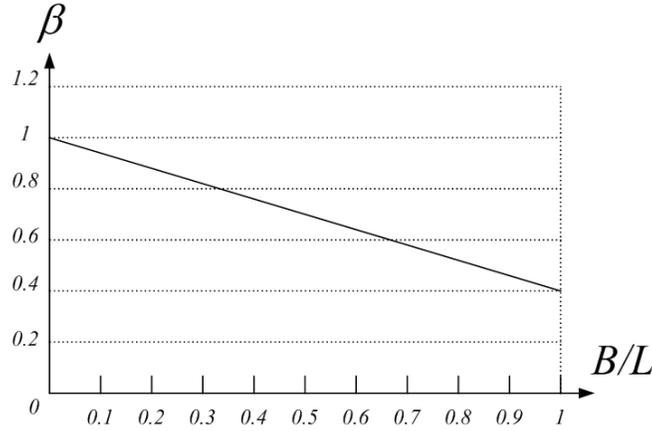


Figura 4.11: Dependencia del factor β respecto de la relación dimensional B/L .

Para una placa muy larga, $\beta = 1$, y para una placa cuadrada (es decir, $a = b$), $\beta = 0,42$. El coeficiente de amortiguamiento queda expresado por:

$$c_{rec} = \frac{\mu L B^3}{h^3} \beta \left(\frac{B}{L} \right)$$

Este resultado muestra que el coeficiente de amortiguamiento para una placa rectangular es similar al coeficiente para una placa cuyo largo es significativamente mayor que su ancho, excepto por el factor de corrección β que está relacionado con la geometría de la placa. Para una placa rectangular muy larga, el factor de corrección es igual a la unidad.

4.2.4. Placas circulares y anillos

Placa circular

Para una placa circular moviéndose contra el substrato como se muestra en el esquema 4.12, la ecuación para el amortiguamiento provocado por la delgada película de aire atrapada, puede escribirse tomando como referencia un sistema coordenado polar.

Con lo cual quedaría como:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} P(r) \right) = 12 \frac{\mu}{h^3} \frac{dh}{dt} \quad (4.30)$$

Las condiciones de frontera quedan expresadas mediante:

$$P(a) = 0, \quad \frac{dP}{dr}(0) = 0 \quad (4.31)$$

donde a es el radio de la placa. Si se integra la ecuación 4.30 y se emplean las condiciones de frontera expresadas por la ecuación 4.31, se tiene que la presión de amortiguamiento será:

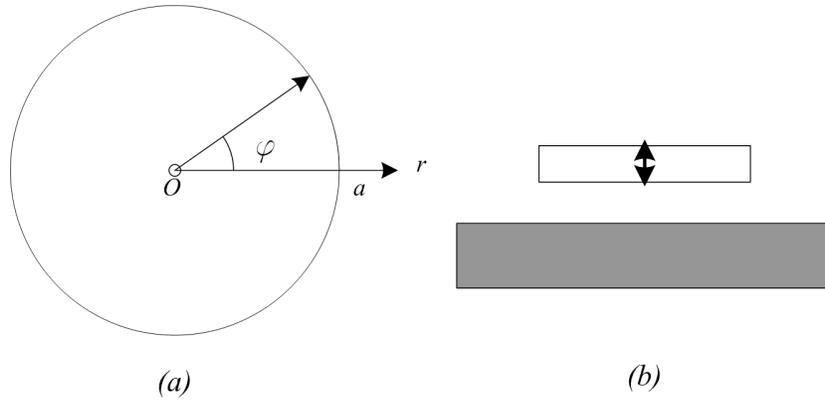


Figura 4.12: Placa circular. (a) vista superior y sistema de referencia polar y (b) vista de la sección transversal.

$$P(r) = -\frac{3\mu}{h^3} (a^2 - r^2) \frac{dh}{dt}$$

Así, la fuerza de amortiguamiento sobre la placa circular será:

$$F_{circ} = \int_0^a P(r) 2\pi r dr = -\frac{3\pi}{2h^3} \mu a^4 \frac{dh}{dt}$$

o

$$F_{circ} = -\frac{3}{2\pi} \frac{\mu A^2}{h^3} \frac{dh}{dt} = -0,4775 \frac{\mu A^2}{h^3} \frac{dh}{dt}$$

donde $A = \pi a^2$ es el área de la placa. El coeficiente de amortiguamiento queda expresado por:

$$c_{cir} = \frac{3\pi}{2h^3} \mu a^4$$

Anillo

Para un anillo moviéndose contra el sustrato, el cálculo del amortiguamiento provocado por la película de aire atrapada tiene la misma ecuación 4.30, pero las condiciones de frontera cambian y se transforman en:

$$P(a) = 0, \quad P(b) = 0$$

donde a y b son los radios exterior e interior del anillo, respectivamente, como se muestra en la figura. Resolviendo la ecuación 4.30 con las condiciones de frontera correspondientes, la presión de amortiguamiento será:

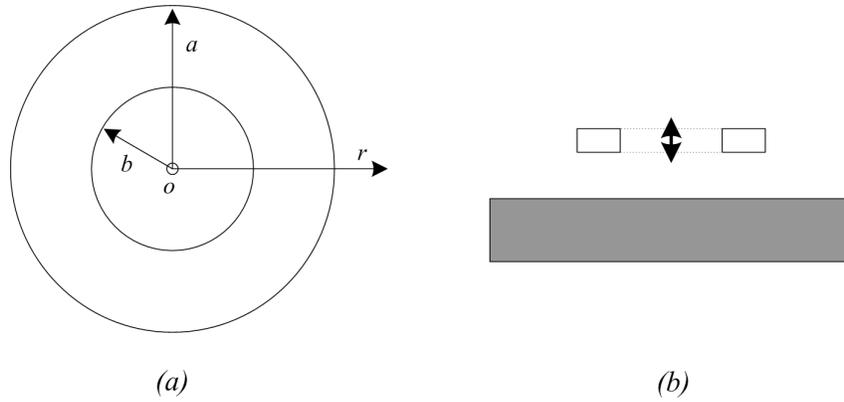


Figura 4.13: Placa anular. (a) vista superior y sistema de referencia polar y (b) vista de la sección transversal.

$$P(r) = \left(-\frac{3\mu}{h^3} a^2 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) + \frac{3\mu}{h^3} a^2 \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) \frac{\ln(r/a)}{\ln(r/b)} \right) \frac{dh}{dt}$$

Si la relación b/a se denomina con β , se tiene que la fuerza de amortiguamiento para el anillo queda expresada como:

$$F_{anillo} = \int_b^a P(r) 2\pi r dr = -\frac{3\pi\mu a^4}{2h^3} \left(1 - \beta^4 + \frac{(1 - \beta^2)^2}{\ln \beta} \right) \dot{h}$$

Pero, la fuerza de amortiguamiento puede escribirse también como:

$$F_{anillo} = -\frac{3\pi\mu a^4}{2h^3} G(\beta) \dot{h} = -\frac{3\mu A^2}{2\pi h^3} G(\beta) \dot{h}$$

donde $A = \pi a^2$ y $G(\beta)$ queda expresado mediante:

$$G(\beta) = 1 - \beta^4 + \frac{(1 - \beta^2)^2}{\ln \beta}$$

Así, el coeficiente de amortiguamiento para un anillo será:

$$c_{anillo} = \frac{3\mu a^2 A}{2h^3} G(\beta)$$

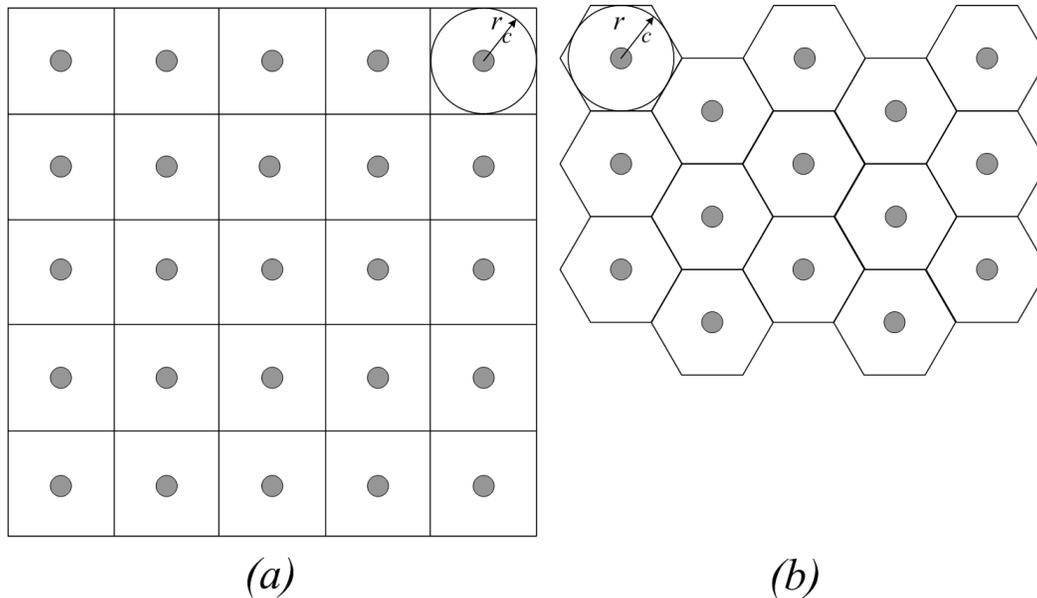


Figura 4.14: Dibujo esquemático de las perforaciones sobre una placa delgada. (a) arreglo cuadrangular y (b) arreglo hexagonal.

4.2.5. Placa perforada, infinita y muy delgada

Las placas móviles usadas en microestructuras normalmente están perforadas para facilitar el ataque de los reactivos químicos que remueven las capas de sacrificio. Estas perforaciones reducen el efecto de amortiguamiento hasta cierto nivel conveniente para aplicaciones tales como acelerómetros, giroscopios, micrófonos, entre otras. Por tanto, la estimación de la fuerza de amortiguamiento provocada por la película de aire es importante en el diseño de sensores inerciales.

Si se supone que la placa está perforada con agujeros circulares de radio r_0 y los agujeros están uniformemente distribuidos, el espacio entre perforaciones puede verse como una serie de cuadrados, hexágonos o círculos con dicho agujero en el centro, tal como se muestra en la figura 4.14.

Si la densidad del agujero es n , el área (la celda) asignada al agujero es $A_1 = 1/n$. Si la celda es aproximada como una placa circular con un agujero en el centro (es decir, si la celda se aproxima como un anillo), el radio externo del anillo será:

$$r_c = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

La fuerza de amortiguamiento sobre la placa completa es la suma de la fuerza de amortiguamiento para cada celda. De este modo, se considerará inicialmente, la fuerza de amortiguamiento sobre una celda. La ecuación para la presión de amortiguamiento provocada por el movimiento paralelo de una celda con forma de anillo será la ecuación 4.30:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} P(r) \right) = 12 \frac{\mu}{h^3} \dot{h}$$

Bajo condiciones de aproximación que establezcan que:

1. la placa es mucho mayor que una celda, y por tanto, el flujo de aire entre las celdas puede ser despreciado (lo cual se conoce como aproximación por placa infinita), y
2. el diámetro del agujero es mucho mayor que el grosor de la placa de modo que no existe un aumento significativo de la presión en el agujero (lo cual se conoce como aproximación por placa muy delgada), las condiciones de frontera para la celda serán:

$$P(r_0) = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial r}(r_c) = 0$$

Al resolver la ecuación 4.30 considerando las condiciones de frontera antes mencionadas, se obtiene la presión de amortiguamiento:

$$P(r) = 3 \frac{\mu r_c^2}{h^3} \dot{h} \left(2 \ln \frac{r}{r_0} - \frac{r^2 - r_0^2}{r_c^2} \right)$$

En consecuencia, la fuerza de amortiguamiento sobre la celda queda expresada por:

$$F_1 = - \int_{r_0}^{r_c} 3 \frac{\mu r_c^2}{h^3} \dot{h} \left(2 \ln \frac{r}{r_0} - \frac{r^2 - r_0^2}{r_c^2} \right) 2\pi r dr = - \frac{\mu (\pi r_c^2)^2}{h^3} \dot{h} \frac{3}{\pi} \left[2 \ln \frac{r}{r_0} - \left(1 - \frac{r_0^2}{r_c^2} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r_0^4}{r_c^4} \right) \right]$$

Si a r_0/r_c se le designa como β , se tiene:

$$F_1 = -3 \frac{\mu A_1^2}{2\pi h^3} \dot{h} (-\beta^4 + 4\beta^2 - 4 \ln \beta - 3) = -3 \frac{\mu}{2\pi h^3 n^2} \dot{h} (-\beta^4 + 4\beta^2 - 4 \ln \beta - 3) \quad (4.32)$$

Es decir, la fuerza total de amortiguamiento sobre la placa perforada es aproximadamente:

$$F_P = \frac{A}{A_1} F_1 = -3 \frac{\mu A}{2\pi n h^3} \dot{h} k(\beta) = -3 \frac{\mu A^2}{2\pi h^3 N} \dot{h} k(\beta) \quad (4.33)$$

donde N es el número total de agujeros en la placa y $k(\beta)$:

$$k(\beta) \equiv -\beta^4 + 4\beta^2 - 4 \ln \beta - 3$$

La dependencia de k respecto de β se muestra en la gráfica 4.15.

Para una placa de área finita A , la ecuación 4.33 sobreestima la fuerza de amortiguamiento (especialmente en el caso de que los agujeros sean pequeños), esto se debe a que no se considera el efecto en los bordes de la placa. Una aproximación empírica mostrada por B. Davies [34] asume que la fuerza de amortiguamiento dada por la ecuación 4.33 y la fuerza de amortiguamiento de una placa no perforada de la misma forma y dimensiones actúan en paralelo. Considérese una placa rectangular con perforaciones, la fuerza de amortiguamiento debida al aire, F_{rec} , de la placa rectangular sin perforaciones puede encontrarse mediante la

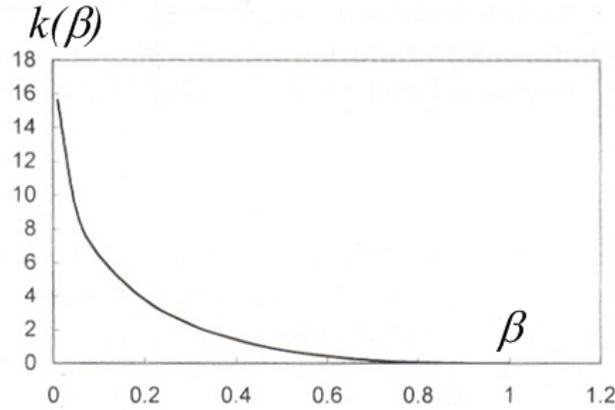


Figura 4.15: La dependencia del factor k respecto de β .

ecuación 4.29, entonces la fuerza de amortiguamiento resultante de la placa perforada, F_R , está dada por la siguiente relación:

$$F_R = \frac{F_p F_{rec}}{F_p + F_{rec}} \quad (4.34)$$

Todas las relaciones obtenidas sobre la placa perforada están basadas en la ecuación de Reynolds para una placa sólida 4.17.

4.2.6. Amortiguamiento en vigas con movimiento oscilatorio

Las vigas son ampliamente usadas en los sensores y actuadores micromecánicos, especialmente en los dispositivos de tipo resonante, para los cuales el amortiguamiento debido al aire es un factor de diseño de gran interés. Por lo que, el conocimiento de los efectos del amortiguamiento debido al aire sobre vigas voladas en movimiento oscilatorio toma especial interés. El movimiento oscilatorio de una viga volada no es uniforme, lo cual significa que no existe una solución en forma cerrada para problemas de vibraciones presentes en vigas que involucren la fuerza de amortiguamiento. Por lo tanto, se buscarán modelos simplificados que obtengan soluciones aproximadas en forma cerrada.

Amortiguamiento por presión sobre una película de aire

Supóngase que una viga es paralela al sustrato y oscila en su dirección normal, además, su longitud es L y es mucho mayor que su ancho B y a su vez el ancho es mucho más grande que el grosor h . Si la separación entre la viga y el sustrato es d_0 y es pequeña comparada con el ancho de la viga, el principal mecanismo de amortiguamiento es la compresión de la película de aire. Dado que la velocidad de movimiento de la viga oscilante no es uniforme y su distribución es dependiente del modo de oscilación, la fuerza de amortiguamiento debida al aire puede simplificarse por un modelo de parámetros concentrados. Ya que el flujo de aire provocado por la oscilación es primordialmente lateral, de acuerdo con la ecuación 4.20, la fuerza de amortiguamiento debida a la compresión de una película de aire por unidad de longitud de la viga será:

$$\widetilde{F}_d = \frac{\mu B^3}{d_0^3} \dot{f}(x, t) \quad (4.35)$$

donde $\dot{f}(x, t)$ es la velocidad de movimiento del sector de viga considerado. Con referencia a la ecuación 3.87 y con el efecto de amortiguamiento considerado, la ecuación diferencial para una oscilación forzada de la viga será:

$$\rho B h \ddot{f}(x, t) + \tilde{c} \dot{f}(x, t) + EI \frac{\partial^4 f(x, t)}{\partial x^4} = \tilde{F}(x) \text{sen } \omega t \quad (4.36)$$

donde ρ es la densidad de la masa, E es el módulo de Young del material del que está hecha la viga, I es el momento de inercia de la viga, $\tilde{F}(x)$ la fuerza de excitación externa por unidad de longitud de la viga y \tilde{c} el coeficiente de amortiguamiento por compresión (estrujamiento) de una película de aire por unidad de longitud de la viga. De acuerdo a la ecuación 4.35 se tiene:

$$\tilde{c} = \frac{\mu B^3}{d_0^3}$$

La función de desplazamiento $f(x, t)$ en la ecuación 4.36 puede desarrollarse para quedar como:

$$f(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(t) W_i(x) \quad (4.37)$$

donde las funciones $W_i(x)$ son las funciones de forma de la vibración libre de la viga, es decir, son las funciones características de las siguientes ecuaciones:

$$EI \frac{d^4 W_i(x)}{dx^4} = \rho B h \omega_i^2 W_i(x)$$

Sustituyendo la ecuación 4.37 en 4.36 se tiene:

$$\rho B h \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{\varphi}_i(t) W_i(x) + \tilde{c} \sum_{i=1}^{\infty} \dot{\varphi}_i(t) W_i(x) + EI \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i^2 \varphi_i(t) W_i(x) = \tilde{F}(x) \text{sen } \omega t$$

Multiplicando toda la ecuación por $W_n(x)$, integrando y haciendo uso de las características de ortogonalidad de las funciones de forma $W_n(x)$ (es decir, $\int_0^L W_i(x) W_n(x) dx = 0$ para $i \neq n$ y $\int_0^L W_n^2(x) dx = 1$) se tiene:

$$\rho B h \ddot{\varphi}_n(t) + \tilde{c} \dot{\varphi}_n(t) + \rho B h \omega_n^2 \varphi_n(t) = \tilde{F}_n \text{sen } \omega t \quad (4.38)$$

donde

$$\tilde{F}_n = \int_0^L \tilde{F}(x) W_n(x) dx \quad (4.39)$$

La efectividad de una fuerza externa de excitación para un modo específico está determinada por la ecuación 4.39. Esto es muy útil en el diseño de electrodos de excitación para actuadores electrostáticos.

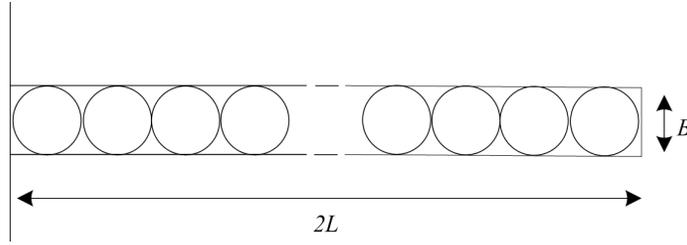


Figura 4.16: Modelo de una cadena de discos para el amortiguamiento por efecto del aire en una viga (vista superior).

De acuerdo con el resultado obtenido para el caso de una oscilación provocada por la aplicación de una fuerza, para un sistema con ecuación:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + m\omega_0^2 x = F_0 \text{sen } \omega t$$

La razón de amortiguamiento (coeficiente de amortiguamiento relativo) de la oscilación forzada queda como $\zeta = c/2m\omega_0$ y el factor de calidad $Q = m\omega_0/c$.

Por lo tanto, de acuerdo con 4.38, la razón de amortiguamiento (coeficiente de amortiguamiento relativo) del n -ésimo modo de oscilación será:

$$\zeta_n = \frac{\tilde{c}}{2\rho B h \omega_n} = \frac{\mu B^2}{2\rho h d_0^3 \omega_n}$$

Y el factor de calidad para el n -ésimo modo de oscilación (para un amortiguamiento pequeño) será:

$$Q_n = \frac{\rho h d_0^3 \omega_n}{\mu B^2}$$

Lo cual indica que el factor de calidad para una viga resonante está relacionado con la frecuencia del modo específico de oscilación y también con la geometría de la viga. Debe notarse que mientras más alta la frecuencia del modo de oscilación (mientras más alta la frecuencia de oscilación) mayor es el factor de calidad.

Amortiguamiento provocado por la fuerza de arrastre

Si una viga está alejada de cualquier objeto circundante (como en el caso en que la viga es puesta a oscilar por métodos piezoeléctricos), el principal mecanismo de amortiguamiento es la fuerza de arrastre del flujo de aire. Dado que no existe una solución en forma cerrada para la fuerza de amortiguamiento en vigas, un modelo simplificado de discos concatenados es propuesto en [?]. El modelo de discos concatenados reemplaza la viga con una serie de discos pegados como se muestra a continuación (veáse la figura 4.16).

El diámetro de los discos es igual al ancho de la viga, B , y la interferencia entre discos vecinos es despreciable. De acuerdo con la ecuación 4.8, la fuerza de amortiguamiento provocada por el aire sobre el i -ésimo disco será:

$$\tilde{F}_{ai} = 8\mu B\dot{w}_i$$

donde w_i es el desplazamiento del i -ésimo disco. Dado que el número de discos por unidad de longitud de la viga es $1/B$, la fuerza de amortiguamiento provocada por el aire por unidad de longitud de la viga se obtiene a partir de:

$$\tilde{F}_{a1} = 8\mu\dot{w} \quad (4.40)$$

Para la oscilación forzada de una viga con amortiguamiento provocado por la fuerza de arrastre, la ecuación resulta:

$$\rho bh\ddot{w}(x,t) + \tilde{c}_{a1}\dot{w}(x,t) + EI\frac{d^4w(x,t)}{dx^4} = \ddot{F}(x,t)$$

donde \tilde{c}_{a1} es el coeficiente de amortiguamiento provocado por el flujo de aire por unidad de longitud de la viga. De acuerdo con la ecuación 4.40, se tiene:

$$\tilde{c}_{a1} = 8\mu$$

Siguiendo una argumentación similar a la hecha para el amortiguamiento provocado por una película de aire sometida a presión, la razón de amortiguamiento (coeficiente de amortiguamiento relativo) para el n -ésimo modo de oscilación (con una frecuencia radial de ω_n) será:

$$\zeta_{an} = \frac{\tilde{c}_{a1}}{2\rho BH\omega_n} = \frac{4\mu}{\rho Bh\omega_n}$$

y el factor de calidad Q para el modo de vibración se obtiene a partir de:

$$Q_{sn} = \frac{\rho Bh\omega_n}{8\mu} \quad (4.41)$$

Hasta ahora los discos se han considerado aislados de cualquier otro disco y tampoco llenan por completo el área de la viga. También se asume que no existe flujo de aire entre dos discos contiguos. Por lo tanto, la fuerza de amortiguamiento calculada mediante la ecuación 4.40 está por debajo de la real y el factor de calidad dado por la ecuación 4.41 está sobreestimado.

4.2.7. Efectos de un coeficiente de presión pequeño

A partir de la ecuación de Reynolds para el amortiguamiento provocado por una película de aire bajo presión:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + P \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} P + \frac{\partial^2}{\partial y^2} P \right) = \frac{12\mu}{h^3} \left(P \frac{dh}{dt} + h \frac{\partial P}{\partial t} \right)$$

Y después de una serie de consideraciones abordados en la subsección *Ecuación de Reynolds para amortiguamiento por presión sobre una película de aire*, las cuales se resumen en el hecho de que el coeficiente de presión sea pequeño, ésta ecuación se simplifica para quedar como:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{12\mu}{h^3} \frac{dh}{dt}$$

Ecuación sobre la cual se puede abundar para analizar los casos de amortiguamiento provocado por una película de aire sometida a presión en algunas estructuras mecánicas típicas y en los casos en que σ (coeficiente de presión) es pequeño pero no es despreciable. Entre las estructuras mecánicas típicas se encuentra la placa rectangular con una longitud L mucho mayor que su ancho B . Este caso es analizado por M. Sadd y A. Stiffer [44] y establecen que para una placa que varía su distancia de separación respecto de la referencia inmóvil en la forma $h = h_0 (1 + \delta \sin \omega t)$ la fuerza de amortiguamiento será:

$$F = P_0 LB \int_0^1 (\tilde{P} - 1) d\tilde{x} = P_0 LB \left[-\frac{1}{3} \frac{h_0^2 \dot{h}}{h^3 \omega} \sigma + \frac{2}{15} \frac{h_0^4 \ddot{h}}{h^5 \omega^2} \sigma^2 - \frac{1}{3} \frac{h_0^4 \dot{h}^2}{h^6 \omega^2} \sigma^2 \right] \quad (4.42)$$

donde P_0 es la presión del aire. A partir de esta ecuación pueden presentarse los casos de una amplitud de oscilación pequeña o una amplitud de oscilación grande.

Amplitud de oscilación pequeña

Si la amplitud de oscilación es pequeña, es decir, $\varepsilon \ll 1$ y también $h \approx h_0$ y usando las relaciones $\dot{h} = h_0 \varepsilon \omega \cos \omega t$, $\ddot{h} = -h_0 \varepsilon \omega^2 \sin \omega t$, la ecuación 4.42 puede aproximarse y quedar como:

$$\begin{aligned} F &= P_0 LB \left[-\frac{1}{3} \sigma \varepsilon \cos \omega t - \frac{2}{15} \sigma^2 \varepsilon \sin \omega t - \frac{1}{6} \sigma^2 \varepsilon^2 - \frac{1}{6} \sigma^2 \varepsilon^2 \cos 2\omega t \right] \\ &\equiv F_D + F_k + F_R + F_{2\omega} \end{aligned}$$

El efecto de amortiguamiento es el primer término de la ecuación:

$$F_D = -\frac{1}{3} P_0 LB \sigma \varepsilon \cos \omega t = -\frac{\mu LB^3}{h_0^3} h_0 \varepsilon \omega \cos \omega t = -\frac{\mu LB^3}{h_0^3} \dot{h}$$

Esto es exactamente el mismo resultado que el dado por la ecuación 4.20, es decir, es el resultado de la aproximación de primer orden.

La energía perdida por el sistema debido a la fuerza de amortiguamiento en un ciclo se obtiene a partir de:

$$\Delta E = \int_0^T -\frac{\mu LB^3}{h_0^3} h_0 \varepsilon \omega \cos(\omega t) \dot{h} dt = \int_0^{2\pi} -\frac{\mu LB^3 \omega}{h_0^3} h_0^2 \varepsilon^2 \cos^2(\omega t) d\omega t = -\frac{\pi \mu LB^3 \omega}{h_0} \varepsilon^2$$

Por lo tanto, se tiene:

$$Q = \frac{2\pi E_T}{\Delta E} = \left(2\pi \frac{1}{2} k (h_0 \varepsilon)^2\right) / \left(2\pi \frac{\mu LB^3 \omega}{2h_0} \varepsilon^2\right) = \frac{kh_0^3}{\mu LB^3 \omega}$$

donde E_T es la energía total del sistema y k es la constante elástica del resorte que soporta la placa.

El efecto elástico está considerado en el segundo término F_k .

$$F_k = -\frac{2}{15} P_0 LB \sigma^2 \varepsilon \sin \omega t = -\frac{2}{15} LB \frac{9\mu^2 \omega^2 B^4}{P_0 h_0^5} h_0 \varepsilon \sin \omega t = -\frac{6}{5} LB \frac{\mu^2 \omega^2 B^4}{P_0 h_0^5} \Delta h$$

F_k es significativo para coeficientes de presión grandes, cuando no existe la posibilidad de que el aire entre las placas y alrededor de ellas circule, deteniendo el movimiento del sistema. Dado que el aire atrapado actúa como un resorte, ésta es la causa de que el sistema pierda energía. Por lo tanto el efecto es conocido como *efecto elástico*.

El tercer término de la ecuación F_R es una fuerza constante que proviene del término cuadrático de p . Por lo tanto se conoce como fuerza de rectificación debido a la relación no lineal entre la presión y el desplazamiento.

El último término $F_{2\omega}$ representa el componente de fuerza cuya frecuencia es dos veces mayor que la placa oscilante. Este componente es también generado por el término cuadrático de p_2 .

Amplitud de oscilación grande

Si la amplitud de la oscilación de la placa no es despreciable, entonces el valor de $h = h_0 (1 + \delta \sin \omega t)$ en lugar de ser aproximado por $h \approx h_0$ debe obtenerse a partir de la ecuación 4.42. Para determinar el efecto de la amplitud grande se desarrolla la ecuación 4.42:

$$F = A_0 + A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t + A_2 \cos 2\omega t + B_2 \sin 2\omega t \dots$$

donde A_0 es la fuerza de rectificación, y A_1 y B_1 son las amplitudes de las fuerzas de amortiguamiento y elástica, respectivamente. Se tiene entonces que:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F \cdot d(\omega t) = P_0 LB \frac{\varepsilon^2 (4 + 3\varepsilon^2) \sigma^2}{24 (1 - \varepsilon^2)^{9/2}}$$

$$A_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F \cdot \cos \omega t d(\omega t) = -P_0 LB \frac{\varepsilon \sigma}{3 (1 - \varepsilon^2)^{3/2}}$$

y

$$B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F \cdot \text{sen } \omega t d(\omega t) = -P_0 L B \frac{\left(\frac{3}{4}\varepsilon^4 + 6\varepsilon^2 + 2\right) \sigma^2 \varepsilon}{15(1 - \varepsilon^2)^{9/2}}$$

Las ecuaciones anteriores muestran que las fuerzas de rectificación, amortiguamiento y elástica se incrementan conforme aumenta ε .

De la ecuación correspondiente a la amplitud de la fuerza de amortiguamiento A_1 se tiene que la fuerza de amortiguamiento será:

$$F_D = A_1 \cos \omega t = -\frac{\mu L B^3}{h_0^3} \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \dot{h}$$

Por lo que el coeficiente de amortiguamiento queda como:

$$c = \frac{\mu L B^3}{h_0^3} \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}}$$

Obviamente, para amplitudes pequeñas, el coeficiente es el mismo que el dado en la ecuación 4.20.

4.3. Amortiguamiento de placas gruesas perforadas

El análisis hecho hasta ahora es útil sólo en los casos en los que la placa perforada tienen dimensiones laterales mucho mayores que la separación respecto de la placa fija y el grosor. En estos casos, la fuerza de resistencia provocada por el flujo del aire a través de los agujeros es despreciable y el efecto en los bordes de la placa puede ignorarse o estimarse por medio de la ecuación 4.34.

Aunque estas condiciones pueden ser satisfechas por algunos Microsistemas fabricados mediante procesos de maquinado superficial, actualmente existen procesos de maquinado de volumen que crean perfiles altos en los que dicho análisis debe ser replanteado.

Se han propuesto muchos métodos para analizar el efecto de amortiguamiento por presión de una película de aire en el caso de placas gruesas perforadas. El más socorrido ha resultado ser el análisis por medio de elemento finito, sin embargo, este proceso consume mucho tiempo de cálculo y es poco claro, motivos por los cuales no es recomendable emplearlo como alternativa para la optimización de los parámetros de diseño. Por lo tanto, es recomendable construir un modelo analítico a partir de la ecuación de Reynolds.

4.3.1. Ecuación modificada de Reynolds para placas perforadas

Considérese una placa con gran número de agujeros distribuidos de forma uniforme por unidad de área. La placa puede dividirse en celdas, cada una de las cuáles mantendrá un agujero en el centro. Como la celda es mucho menor que la placa, la presión puede considerarse como una función suave de posición respecto de la placa completa. Por la misma razón, el flujo de aire a través del agujero (el flujo se presenta en la dirección z) puede considerarse como penetrante a través del área completa de la celda de forma uniforme. Por lo tanto, para la placa en movimiento relativo respecto del sustrato, la ecuación 4.11 puede modificarse y quedar como:

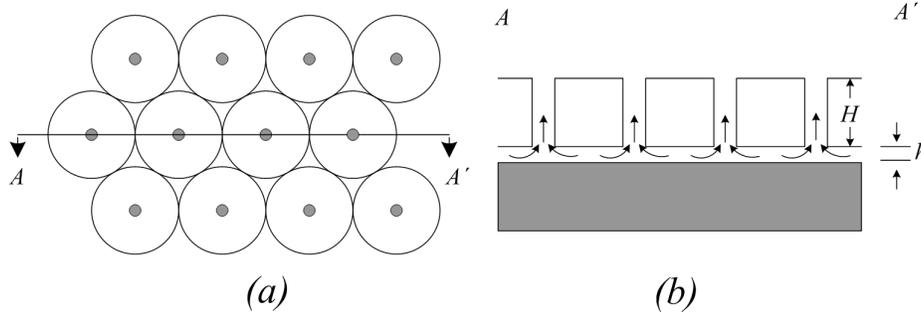


Figura 4.17: Esquema de la estructura de una placa perforada. (a) vista superior y (b) vista de la sección transversal.

$$\frac{\partial(\rho q_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho q_y)}{\partial y} + \rho Q_z + \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} = 0 \quad (4.43)$$

donde $q_x = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x}$, $q_y = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial y}$ y Q_z es la tasa de penetración, la cual es función de ΔP , la presión adicional en el espacio entre placas provocado por el efecto de amortiguamiento del aire.

La dependencia de Q_z de ΔP para una placa perforada puede encontrarse basada en el modelo simplificado presentado por Minhang [?]. En la figura 4.17 se describe dicho modelo.

La placa tiene perforaciones circulares uniformemente distribuidas. El área circundante a cada perforación constituye una celda y éstas están organizadas en arreglos hexagonales o cuadrados. El radio de los agujeros es r_0 y el área de la celda es $A_1 = \pi r_c^2$, donde r_c es el radio de la celda. El grosor de la placa es H y la distancia de la placa al sustrato es h .

De acuerdo con la ecuación de Poiseuille 4.6 para un conducto con radio r_0 y longitud H , el volumen de aire que pasa a través del agujero por unidad de tiempo (la tasa de flujo Q) será:

$$Q = \frac{\pi r_0^4}{8\mu} \frac{P_H}{H} \quad (4.44)$$

donde P_H es la presión diferencial entre los dos extremos del agujero. La presión a través del agujero está en función directa de la tasa de flujo Q , por tanto:

$$P_H = \frac{8\mu H}{\pi r_0^4} Q$$

De acuerdo con la ecuación 4.32 y $Q = A_1 dh/dt$, la fuerza de amortiguamiento en el área de una celda de una placa perforada, infinita y muy delgada será:

$$F_l = \frac{3\mu A_1}{2\pi h^3} k(\beta) Q$$

donde $k(\beta) = 4\beta^2 - \beta^4 - 4 \ln \beta - 3$ y $\beta = r_0/r_c$. De las ecuaciones 4.43 y 4.44, la presión promedio de amortiguamiento en la celda provocada por el flujo se obtiene a partir de:

$$\Delta P = P_H + \frac{F_{l1}}{A_1} = P_H \left(1 + \frac{3r_0^4 k(\beta)}{16Hh^3} \right) \equiv \eta(\beta) P_H$$

o $P_H = \Delta P/\eta(\beta)$, donde $\eta(\beta) \equiv [1 + 3r_0^4 k(\beta)/16Hh^3]$. La tasa promedio de penetración del aire a través de la placa (volumen por unidad de área en una unidad de tiempo) se calcula mediante:

$$Q_z = \frac{Q_1}{A_1} = \frac{\beta^2 r_0^2}{8\mu H} \frac{\Delta P}{\eta(\beta)} \quad (4.45)$$

después de la sustitución de la 4.45 en 4.43 y empleando pasos de derivación similares a los usados para obtener la ecuación de Reynolds se tiene:

$$\frac{\partial^2 \Delta P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta P}{\partial y^2} - \frac{3\beta^2 r_0^2}{2h^3 H} \frac{1}{\eta(\beta)} \Delta P = \frac{12\mu}{h^3} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (4.46)$$

Esta es la ecuación modificada de Reynolds para el amortiguamiento provocado por la presión de una película de aire para el caso de una placa perforada. Algunas veces la presión de amortiguamiento ΔP es denotada como P por simplicidad. Durante la derivación, se asumió que el flujo del gas en los agujeros es un flujo de Poiseuille completamente desarrollado. Esta consideración es, sin embargo, falsa para muchas estructuras micromaquinadas si el radio de los agujeros, r_0 , es comparable al grosor de la placa, H . En estos casos Minhang [?] propone que la ecuación de Poiseuille se modifique para quedar como:

$$Q = \frac{\pi r_0^4}{8\mu} \frac{P_H}{H + 3\pi r_0/8} \quad (4.47)$$

Comparando las ecuaciones 4.44 y 4.47 se puede definir la profundidad efectiva de las perforaciones en la placa como:

$$H_{efectiva} = H + \frac{3\pi r_0}{8}$$

Por otra parte, los efectos en los extremos de los agujeros pueden incorporarse en las ecuaciones que estén relacionadas con el análisis de una placa gruesa perforada, si se sustituye H por $H_{efectiva}$.

4.3.2. Placa perforada larga y rectangular

Para demostrar la naturaleza del amortiguamiento provocado por la presión de una película de aire en una placa gruesa perforada, se considera una placa rectangular perforada con una longitud mucho mayor que su anchura (es decir, b es mucho mayor que a como se muestra en la figura 4.18). Por lo tanto, la ecuación 4.46 puede considerarse unidimensional:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{3\beta^2 r_0^2}{2h^3 H_{efectiva}} \frac{1}{\eta(\beta)} P = \frac{12\mu}{h^3} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (4.48)$$

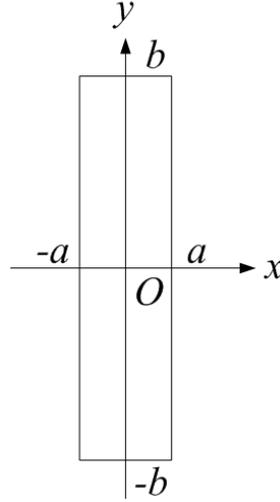


Figura 4.18: Geometría de una larga placa rectangular perforada ($b \gg a$). En la figura no se muestran los agujeros.

Definiendo $R = -\frac{12\mu}{h^3} \frac{\partial h}{\partial t}$ y $l = \sqrt{\frac{2h^3 H_{efectiva} \eta(\beta)}{3\beta^2 r_0^2}}$ (l es una longitud característica o longitud de atenuación de la placa perforada) la ecuación 4.48 puede simplificarse y quedar como:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{P}{l^2} + R = 0$$

Con condiciones de frontera $P(\pm a) = 0$, la distribución de la presión de amortiguamiento será:

$$P(x) = Rl^2 \left(1 - \cosh \frac{x}{l} / \cosh \frac{a}{l} \right) \quad (4.49)$$

La dependencia de la distribución de la presión respecto del cociente a/l se muestra en la gráfica 4.19:

donde la presión de amortiguamiento ha sido normalizada con Rl^2 . Puede apreciarse que mientras mayor sea el efecto del agujero sobre el amortiguamiento menor será el efecto del borde de la placa, y viceversa. La presión máxima al centro, $P(0)$, aumenta con l para una a constante. Efecto que no sería fácil de apreciar si la presión no estuviera normalizada con Rl^2 .

Ahora considérense dos condiciones extremas. Si los agujeros son muy estrechos y la placa es muy gruesa de modo que la longitud de atenuación es mucho mayor que la mitad del ancho a de la placa, la ecuación 4.49 toma la forma:

$$P(0) = -\frac{6\mu}{h^3} (a^2 - x^2) \frac{dh}{dt}$$

que es el mismo resultado que el expresado por la ecuación 4.19 considerando $B = 2a$.

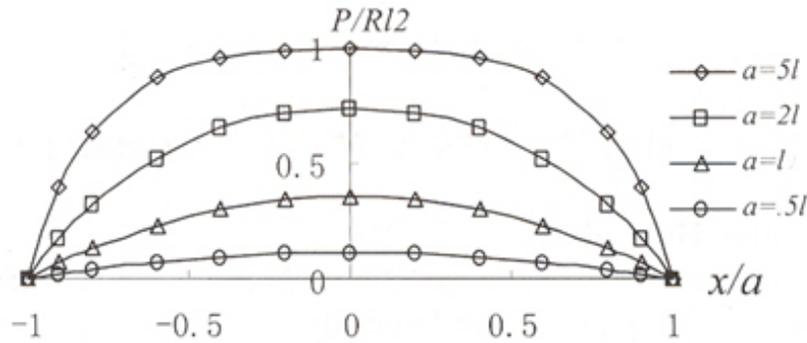


Figura 4.19: Dependencia de la distribución normalizada de presión respecto de a/l .

En el otro extremo, si la placa es muy delgada de modo que $a \gg l$, la ecuación 4.49 muestra que la presión para la mayor parte del área de la placa tiene un valor constante de:

$$P = Rl^2 = -\frac{3\mu v_c^2}{2h^3} \dot{h}k(\beta)$$

Resultado que concuerda con la ecuación 4.33 para la presión de amortiguamiento de una placa perforada infinita y delgada. Los resultados anteriores para los dos extremos justifica la ecuación modificada de Reynolds.

Generalmente, l es mucho más pequeño que a , pero tiene un valor finito cuyos efectos sobre la presión de amortiguamiento en las áreas cercanas a los bordes no puede despreciarse. En estos casos, para la región $x > 0$ (la distribución de la presión en la región $x < 0$ es simétrica) la ecuación 4.49 puede aproximarse mediante:

$$P(x) = Rl^2 \left(1 - e^{-\frac{a-x}{l}} - e^{-\frac{a+x}{l}} \right)$$

Esto significa que la presión en la mayoría del área bajo la placa es $P = Rl^2$. De cualquier modo, en el área cercana a los bordes, donde $a-x$ es comparable con l o más pequeña, la presión decae exponencialmente:

$$P(x) = Rl^2 \left(1 - e^{-\frac{a-x}{l}} \right)$$

A partir de la ecuación 4.49, la fuerza de amortiguamiento sobre la placa rectangular será:

$$F_d = 2aLRl^2 \left[1 - \frac{l}{a} \tanh\left(\frac{a}{l}\right) \right]$$

De acuerdo con la relación $F_d = \dot{h}c$, el coeficiente de amortiguamiento será:

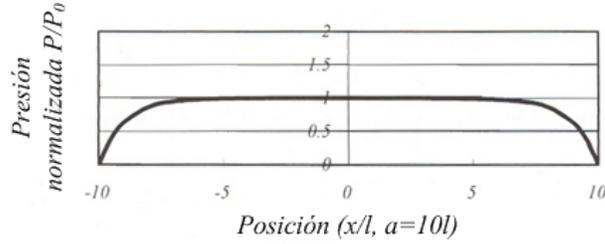


Figura 4.20: Distribución de la presión (normalizada) para una placa rectangular cuyo ancho, a , es diez veces mayor que la longitud de atenuación: l .

$$c = 2aL \frac{8\mu H}{\beta^2 r_0^2} \left(1 + \frac{3r_0^4 k(\beta)}{16Hh^3} \right) \left[1 - \frac{l}{a} \tanh\left(\frac{a}{l}\right) \right]$$

Si la placa es la masa de prueba de un acelerómetro, la razón de amortiguamiento (coeficiente de amortiguamiento relativo) del sistema será $\zeta = c/(2m\omega_0)$, donde ω_0 es la frecuencia radial de la vibración libre y m es la masa de la placa.

Si se cumple la condición $a \gg l$ de modo tal que $\tanh(a/l) \cong 1$, se tienen las siguientes ecuaciones:

$$F_d = 2(a-l)LRl^2 \quad (4.50)$$

y

$$c = \frac{32\mu H}{\beta^2 r_0^2} \left(1 + \frac{3r_0^4 k(\beta)}{16Hh^3} \right) L(a-l)$$

4.3.3. Aproximación del área efectiva de amortiguamiento

Cuando se cumple que $a \gg l$ (condición bajo la cual el efecto de los agujeros en el amortiguamiento es significativa), la presión de amortiguamiento en el área interna es constante y vale Rl^2 pero cerca de los bordes dicha presión decae en forma exponencial. Si se analiza la ecuación 4.50, podrá observarse que es posible generar una fuerza de amortiguamiento equivalente, a partir de una función de distribución de la presión cuya representación gráfica sea la mostrada por la figura 4.21:

Por lo tanto, puede considerarse que la placa sólo es efectiva para generar un efecto de amortiguamiento para un área de ancho $2(a-l)$, excluyendo las dos regiones en los bordes, cada una de anchura l . Basados en la aproximación del *área efectiva de amortiguamiento*, para $a, b \gg l$, la fuerza de amortiguamiento de la placa perforada rectangular puede aproximarse mediante:

$$F_d \cong 4Rl^2(a-l)(b-l)$$

De forma análoga, la fuerza de amortiguamiento sobre una placa perforada puede aproximarse mediante:

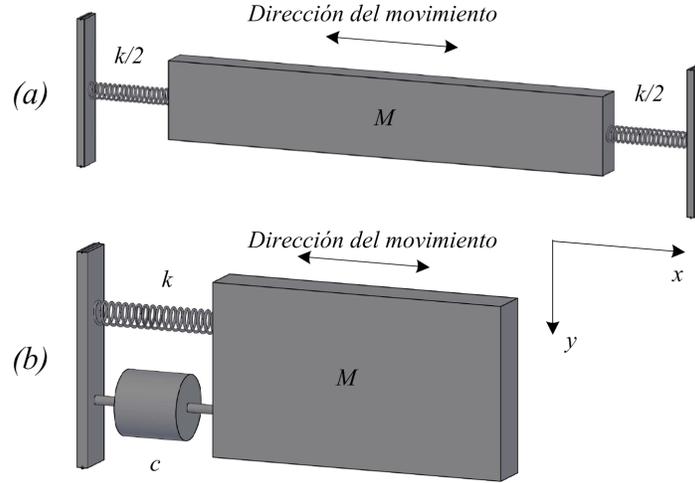


Figura 4.22: Amortiguamiento por deslizamiento sobre una delgada película de aire. (a) esquema de la estructura y (b) modelo simplificado.

considerar: una placa infinita, inmersión en un fluido viscoso e incompresible, movimiento en la dirección lateral a una distancia constante medida desde el sustrato, obsérvese la figura 4.22:

El modelo simplificado puede considerarse como un sistema masa-resorte-amortiguador.

La ecuación diferencial general para un flujo estable de un fluido incompresible es la ecuación de Navier-Stokes:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = \vec{F} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v}$$

donde ρ es la densidad del fluido, \vec{F} la fuerza aplicada, p la presión en el fluido, μ el coeficiente de viscosidad y \vec{v} la velocidad del fluido:

$$\vec{v} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$$

Los símbolos ∇ y ∇^2 son el gradiente y el laplaciano, respectivamente:

$$\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{y} \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Se supone que el plano que representa la placa móvil del sistema mecánico está contenida en el plano $x-y$ del sistema de referencia, empleado para estudiar el fenómeno y que la placa tiene dimensiones infinitas. Si el movimiento de la placa es en la dirección x , y no existen fuerzas externas o gradiente de presión en el fluido, se tiene que $u \gg v, w$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \gg \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Por lo tanto, la ecuación de Navier-Stokes se reduce a:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (4.51)$$

Para una placa infinita (se considerará infinita a una placa cuyas dimensiones de largo y ancho sean mucho mayores que su grosor, la separación que mantiene respecto del sustrato y la amplitud de su oscilación mecánica), el segundo término de la izquierda de la ecuación anterior puede despreciarse, por lo que la ecuación de Navier-Stokes para una placa infinita que se mueve en la dirección x en un fluido que no está sujeto a fuerzas externas ni que experimenta gradiente de presión alguno, queda como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (4.52)$$

Las condiciones de frontera para la ecuación son: u igual a cero sobre la superficie del sustrato y u igual a la velocidad de la placa en movimiento sobre la superficie inferior de la placa.

Supóngase ahora que el movimiento de la placa con respecto a su posición de equilibrio es una simple oscilación armónica, es decir:

$$x(t) = a_0 \operatorname{sen} \omega t$$

donde a_0 es la amplitud de la oscilación armónica simple, es decir:

$$u(t) = a_0 \omega \cos \omega t = u_0 \cos \omega t$$

donde $u_0 = a_0 \omega$. Con lo cual el primer término de la izquierda de la ecuación 4.51 será:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u_0 \omega \operatorname{sen} \omega t$$

Si la dimensión de la placa es l (considerando que tanto ancho como largo coinciden), el segundo término de la izquierda de la ecuación 4.51 queda como:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_0^2}{l} = \frac{a_0^2 \omega^2}{l} \quad (4.53)$$

y el término a la derecha será:

$$\frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \approx \frac{\mu}{\rho} \frac{a_0 \omega}{d^2} \quad (4.54)$$

donde d es la distancia de separación entre el sustrato y la placa móvil.

Por lo tanto, las condiciones de aproximación para la ecuación 4.52 serán:

1. $|\partial u / \partial t| \gg |u \partial u / \partial x|$, lo cual requiere que la amplitud de la oscilación sea muy pequeña comparada con las dimensiones de la placa, $a_0 \ll l$.

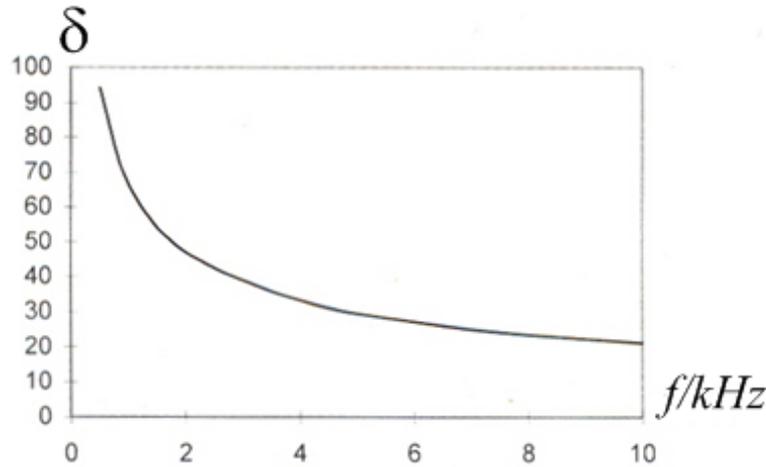


Figura 4.23: Decaimiento efectivo de la distancia, δ , como función de la frecuencia.

2. $(\mu/\rho) (\partial^2 u/\partial z^2) \gg u (\partial u/\partial x)$. A partir de las ecuaciones 4.53 y 4.54, esta condición se transforma en: $l \gg 2(\rho\omega/2\mu) d^2 a_0$. Si se define una característica denominada *decaimiento efectivo de la distancia* como $\delta = \sqrt{2\mu/\rho\omega}$, se tiene:

$$l \gg 2 \frac{d^2}{\delta^2} a_0$$

El decaimiento efectivo de la distancia, δ , es la distancia en la dirección z sobre la cual la velocidad decae desde la placa por un factor de e ($e = 2,718\dots$). La figura 4.23 muestra la gráfica de la dependencia de δ respecto de la frecuencia en el aire, a presión de una atmósfera y temperatura de veinte grados celsius.

Si la condición de que $(\mu/\rho) (\partial^2 u/\partial z^2) \gg (\partial u/\partial t)$, es decir, $d \ll \delta$, la ecuación 4.52 se simplifica aún más, para quedar como:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (4.55)$$

4.4.2. Modelo del flujo de Couette

Supóngase que una placa de grandes dimensiones oscila lateralmente sobre el sustrato tal como lo muestra la figura 4.24.

Si la frecuencia de oscilación es baja de modo tal que $\delta \gg d$, el patrón de flujo del aire que circunda la placa es llamado flujo de Couette. La fuerza de amortiguamiento sobre la placa provocada por el fluido viscoso modelado como flujo de Couette tiene las siguientes condiciones de frontera:

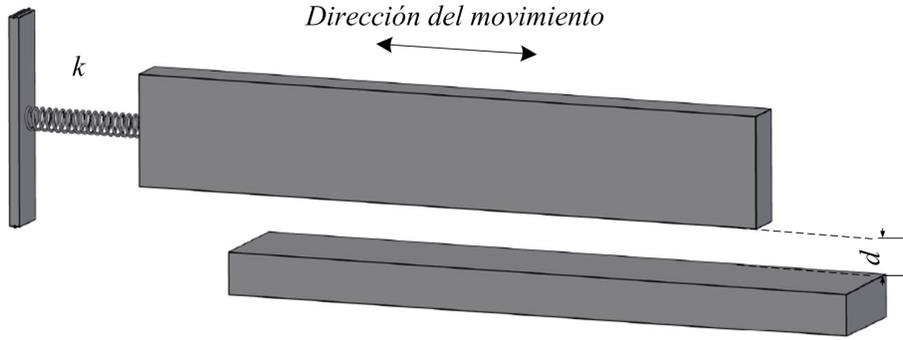


Figura 4.24: Placa que oscila lateralmente sobre el sustrato.

$$u(0) = u_0 \cos \omega t, \quad u(d) = 0 \quad (4.56)$$

De acuerdo con las ecuaciones 4.55 y 4.56, la distribución de la velocidad del fluido será:

$$u(z) = u(0) \left(1 - \frac{z}{d}\right)$$

donde $u(0)$ es la velocidad de la placa en movimiento. La fuerza aplicada a la placa se calcula mediante:

$$F = -\mu \frac{u(0)}{d} A \quad (4.57)$$

donde A es el área de la placa. De acuerdo con el modelo de flujo de Couette, el gradiente de velocidad en el lado abierto de la placa móvil es cero. Por lo tanto, no existe fuerza de amortiguamiento en la parte abierta de la placa y el factor de calidad Q del sistema vibratorio lateral está determinada únicamente por la fuerza de amortiguamiento descrita por la ecuación 4.57. Si la parte abierta de la placa está muy alejada de referencia mecánica alguna, la condición para poder modelar el flujo en el que está inmersa dicha placa como un flujo de Couette, $\delta \gg d$, no es aplicable, y puede considerarse que la fuerza de amortiguamiento sobre este lado de la placa es despreciable.

La energía disipada por la fuerza de amortiguamiento en un ciclo será:

$$\Delta E_{Cd} = \int_0^T A\mu \frac{u(0)}{d} u(0) dt$$

dado que $u(0) = u_0 \cos \omega t$, se tiene:

$$\Delta E_{Cd} = \int_0^{2\pi} A\mu \frac{u_0^2 \cos^2 \omega t}{d} \frac{1}{\omega} d\omega t = \frac{\pi}{\omega} u_0^2 \frac{\mu}{d} A$$

De acuerdo con la segunda definición establecida para el factor de calidad en la subsección *Resonancia y factor de calidad* del capítulo anterior, se tiene:

$$Q_{Cd} = \frac{\pi m u_0^2}{\Delta E_{Cd}} = \frac{m \omega d}{\mu A} \quad (4.58)$$

Si la densidad de la masa de la placa es ρ_p y el grosor de la placa es H , la ecuación 4.58, puede escribirse como:

$$Q_{Cd} = \frac{\rho_p H \omega d}{\mu}$$

El factor de calidad no depende del área, A , de la placa.

4.4.3. Modelo del flujo de Stokes

En el modelo de Couette, el decaimiento efectivo de la distancia, δ , es mucho mayor que la separación entre placas d . Por lo tanto, el perfil de la velocidad entre la placa y el sustrato es lineal. El modelo se vuelve inválido cuando la separación entre placas es muy grande. Si el decaimiento efectivo de la distancia, δ , no es mucho mayor de la separación entre placas, d , deberá usarse la ecuación 4.52.

Resolviendo la ecuación 4.52 con las mismas condiciones de frontera marcadas para el caso del flujo de Couette, el perfil de la velocidad del fluido será:

$$u = u_0 \frac{-e^{-\tilde{d}+\tilde{z}} \cos(\omega t + \tilde{z} - \tilde{d} - \theta) + e^{\tilde{d}-\tilde{z}} \cos(\omega t - \tilde{z} + \tilde{d} - \theta)}{\sqrt{e^{2\tilde{d}} + e^{-2\tilde{d}} - 2 \cos(2\tilde{d})}} \quad (4.59)$$

donde $\tilde{d} \equiv d/\delta$, $\tilde{z} \equiv z/\delta$ y θ es el corrimiento en la fase presente en la oscilación de la placa ($u(0) = u_0 \cos \omega t$). θ se define mediante:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{(e^{\tilde{d}} + e^{-\tilde{d}}) \sin \tilde{d}}{(e^{\tilde{d}} - e^{-\tilde{d}}) \cos \tilde{d}}$$

Por lo tanto, la fuerza de amortiguamiento sobre la placa será:

$$F_{Sd} = A \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0} = \frac{A \mu u_0}{\delta \sqrt{e^{2\tilde{d}} + e^{-2\tilde{d}} - 2 \cos 2\tilde{d}}} (-e^{-\tilde{d}} \cos(\omega t - \tilde{d} - \theta) + e^{-\tilde{d}} \sin(\omega t - \tilde{d} - \theta) - e^{\tilde{d}} \cos(\omega t + \tilde{d} - \theta) + e^{\tilde{d}} \sin(\omega t + \tilde{d} - \theta))$$

Con la fuerza de amortiguamiento, la energía de disipación en un ciclo de oscilación se calcula a partir de:

$$\Delta E_{Sd} = \int_0^T F_{Sd} u_0 dt = \frac{\pi A \mu u_0^2}{\omega \delta} \frac{\sinh(2\tilde{d}) + \sin(2\tilde{d})}{\cosh(2\tilde{d}) - \cos(2\tilde{d})}$$

y el factor de calidad Q se obtiene mediante:

$$Q_{Sd} = \frac{m\omega\delta \cosh(2\tilde{d}) - \cos(2\tilde{d})}{A\mu \sinh(2\tilde{d}) + \sin(2\tilde{d})}$$

Para la condición extrema $d \ll \delta$, se tiene que $\theta = \pi/4$, $F_{Sd} = F_{Cd} = -A\mu u(0)/d$, $\Delta E_{Sd} = \Delta E_{Cd}$ y $Q_{Sd} = Q_{Cd}$, es decir, los resultados del modelo del flujo de Stokes coinciden con los obtenidos empleando el modelo de flujo de Couette.

Para la otra condición extrema $d \gg \delta$, y a partir de la ecuación 4.59, se tiene:

$$u = u_0 e^{-\tilde{z}} \cos(\omega t + \tilde{d} - \theta)$$

Esto muestra que el fluido alrededor de la placa oscila con la misma frecuencia que la placa, pero la amplitud de la oscilación en el fluido decae exponencialmente al alejarse de la placa. δ es la distancia sobre la cual la amplitud decrece en un factor de $e = 2,718$.

Bajo esta condición ($d \gg \delta$), la disipación de energía en un ciclo será:

$$\Delta E_{S\infty} = \frac{\pi}{3} u_0^2 \frac{\mu}{\delta} A$$

y

$$Q_{S\infty} = \frac{m\omega\delta}{\mu A} = \frac{\rho_p H \omega \delta}{\mu}$$

Si $Q_{S\infty}$ es comparado con Q_{Cd} (ecuación 4.58), se tiene que la fuerza de amortiguamiento se obtiene a partir de:

$$F_{S\infty} = \frac{\mu A u(0)}{\delta} \quad (4.60)$$

Dado que la condición señala que $d \gg \delta$, esto significa que el efecto del sustrato es despreciable para la placa oscilatoria, la placa puede ser considerada como un objeto aislado inmerso en el fluido. Si ahora se compara este resultado con la fuerza de arrastre sobre un objeto aislado que se analizó en la subsección *Amortiguamiento por la fuerza de arrastre* de este capítulo, en particular la señalada para un plato circular moviéndose dentro del plano que lo contiene:

$$F_d = \frac{32}{3} \mu r v = \frac{32}{3\pi} \frac{\mu A v}{r} \quad (4.61)$$

(donde v es la velocidad de la placa, equivalente a la condición $u(0)$ en la ecuación 4.60 y r es el radio del disco), se verán las coincidencias. El efecto en los bordes del disco no se considera en $F_{S\infty}$ y los efectos de la frecuencia tampoco se han considerado en F_d . Dado que el efecto de amortiguamiento está subestimado en ambos modelos, el mayor será el más preciso.

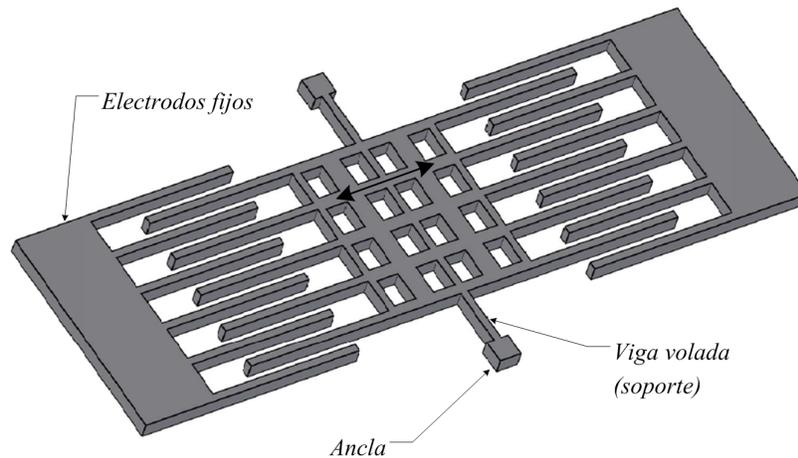


Figura 4.25: Esquema de un resonador basado en un actuador electrostático en forma de peine.

4.4.4. Amortiguamiento por efecto del aire para un resonador con actuador electrostático lateral en forma de peine

Los Microsistemas que basan su diseño en la operación de un microresonador con actuadores electrostáticos laterales en forma de peine son muy comunes.

Los elementos laterales son los dedos o electrodos fijos, las anclas se encuentran a derecha e izquierda, los soportes (que actúan como resortes) unen las anclas con la masa de prueba, la masa de prueba es el rectángulo que se muestra al centro y los electrodos móviles son los dedos que sobresalen de la masa de prueba para intercalarse con los electrodos fijos. A las partes móviles de la estructura (masa, electrodos móviles y resorte) se les induce un movimiento oscilatorio mediante la aplicación de una señal alterna de voltaje (más un escalón) entre los electrodos fijos y las anclas que sujetan la masa de prueba. Es común que la frecuencia de la señal de alimentación coincida con la frecuencia de resonancia de la estructura mecánica, de modo tal que el dispositivo mecánico es llevado a un estado de resonancia y de ahí deriva su nombre.

Una de las características más importantes del microresonador es el factor de calidad mecánico, Q . Para un microresonador operando en un ambiente con presión de una atmósfera, el amortiguamiento por efecto del aire es el factor dominante para determinar el factor de calidad del resonador. La fuerza de amortiguamiento total para un microresonador es el resultado de las características geométricas de la estructura y la presencia de diferentes mecanismos de amortiguamiento. Los principales componentes de la fuerza de amortiguamiento son:

Película de aire atrapada entre la masa del microresonador y el sustrato

Dado que la distancia de separación entre placas, d_p , entre la placa móvil y el sustrato es mucho menor que δ , la fuerza de amortiguamiento es del tipo *flujo de Couette* y puede expresarse como:

$$F_1 = \mu \frac{A_p}{d_p} \dot{x} = c_1 \dot{x}$$

donde A_p es el área efectiva de la placa para el cálculo del amortiguamiento, incluyendo las áreas de la placa, dedos y resortes. Las áreas de los agujeros también se incluyen en A_p (es decir, no se restan del área

total de la placa) ya que sus dimensiones son muy pequeñas y se considera, normalmente, que no existe flujo de aire lateral en los agujeros.

Película de aire atrapada entre la masa del microresonador y alguna referencia mecánica en la parte superior

Si la estructura está alejada de cualquier objeto colocado por encima de ella (o simplemente no existe referencia mecánica encima del microresonador), la fuerza de amortiguamiento experimentada por las partes móviles es del tipo flujo de Stokes y puede expresarse como:

$$F_2 = \mu \frac{A_p}{\delta} \dot{x} = c_2 \dot{x}$$

donde δ es el decaimiento efectivo de la distancia $\delta = \sqrt{2\mu/\rho\omega}$ y ρ es la densidad del aire.

Película de aire atrapada entre los electrodos intercalados del microresonador

La fuerza de amortiguamiento experimentada por los electrodos intercalados es:

$$F_3 = \mu \frac{A_s}{d_s} \dot{x} = c_3 \dot{x}$$

donde A_s es el área lateral traslapada entre los electrodos fijos y los móviles y d_s es la distancia de separación entre electrodos fijos y móviles. Para estas consideraciones se ha asumido que $d_s \ll \delta$.

Fuerza de arrastre del aire

La fuerza de arrastre del aire sobre la placa en movimiento es muy difícil de estimar. De acuerdo con la ecuación 4.61, la fuerza puede aproximarse mediante:

$$F_4 \approx \frac{32}{3} \mu l \dot{x} = c_4 \dot{x}$$

donde l es la dimensión característica de la estructura móvil que puede tomarse como la mitad del ancho de la placa.

La fuerza total de amortiguamiento sobre la placa consiste de F_1 , F_2 y F_3 o F_4 . Y dado que F_3 y F_4 son normalmente muy pequeñas, por conveniencia, la fuerza total de amortiguamiento queda expresada como:

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = (c_1 + c_2 + c_3 + c_4) \dot{x} \equiv c \dot{x}$$

y el factor de calidad se calcula mediante:

$$\frac{1}{Q} = 2\zeta = \frac{c}{m\omega}$$

o

$$\frac{1}{Q} = \frac{\mu}{m\omega} \left(\frac{A_p}{d_p} + \frac{A_p}{\delta} + \frac{A_s}{d_s} + 10,7l \right) \quad (4.62)$$

donde m es la masa de la placa y ω es la frecuencia radial de la oscilación.

Debido a la dimensión finita de la estructura y al efecto en los bordes y esquinas, la ecuación 4.62 es una aproximación semicuantitativa al valor preciso que resulta útil en el diseño del resonador.

La frecuencia de resonancia ω en la ecuación 4.62 puede escribirse como:

$$\omega = \sqrt{\frac{2Ehb^3}{mL^3}}$$

donde L es la longitud efectiva de los resortes (vigas suspendidas), b el ancho y h el grosor. Dado que $m \cong A_p h \rho_p$, se tiene:

$$\frac{1}{Q} = \frac{\mu}{h} \sqrt{\frac{L^3}{2E\rho_p A_p b^3}} \left(\frac{A_p}{d_p} + \frac{A_p}{\delta} + \frac{A_s}{d_s} + 10,7l \right) \quad (4.63)$$

Para la mayoría de los casos, el término del amortiguamiento debido a la película de aire atrapada entre placas deslizantes que se comporta como flujo de Couette (primer término en la ecuación 4.63) es el factor dominante del amortiguamiento debido al aire. Si sólo se considera el amortiguamiento debido al flujo de Couette en la estimación del factor de calidad de la estructura, se tiene:

$$Q \approx \frac{hd_p}{\mu} \sqrt{\frac{E\rho_p}{A_p} \left(\frac{b}{L} \right)^3}$$

Esto significa que, para un factor de calidad alto, la estructura deberá ser gruesa y estar alejada del sustrato. Los resortes (vigas suspendidas) deberán balancear el compromiso entre rigidez en la dirección z (para sostener la masa de prueba) y flexibilidad en la dirección de movimiento, x o y .

El modelo unidimensional del flujo de Stokes ignora los efectos en los bordes de la placa, y esto genera un error significativo debido a la presencia de los electrodos intercalados. W. Ye, entre otros, [?] investigó el amortiguamiento debido al aire en un resonador con actuador electrostático lateral en forma de peine empleando un modelo tridimensional y comparó los resultados teóricos con los datos experimentales y encontró que el modelo unidimensional subestima la fuerza de amortiguamiento por un factor de alrededor de dos unidades, en tanto que el modelo tridimensional se aproxima a la evidencia experimental hasta en un 90%.

4.5. Amortiguamiento en aire enrarecido

4.5.1. Viscosidad efectiva del aire enrarecido

Hasta ahora el aire, a presión de una atmósfera, puede considerarse como un fluido viscoso debido a las frecuentes colisiones entre las moléculas de los gases que lo componen. Por lo tanto, el mecanismo de disipación de energía del amortiguamiento provocado por aire se debe al flujo viscoso del aire provocado por el movimiento de la estructura oscilatoria. El coeficiente de viscosidad del gas, μ , derivado a partir de un modelo simple queda expresado como:

$$\mu = \frac{1}{3}\rho_a\lambda\bar{v}$$

donde ρ_a es la densidad del gas, λ es la distancia promedio entre colisiones para las moléculas de un gas y \bar{v} la velocidad promedio de las moléculas. Dado que ρ_a es proporcional a la presión, en tanto que λ es inversamente proporcional a la presión, el coeficiente de viscosidad, μ , es independiente de la presión p .

La evidencia experimental muestra que el amortiguamiento provocado por el aire es totalmente constante cuando la presión es cercana a la presión atmosférica. Por lo tanto, es comprensible que cuando el aire se enrarece a una presión por debajo de la atmosférica, el amortiguamiento provocado por el aire se reduce considerablemente.

Existen dos enfoques, lejanos entre sí, para modelar el amortiguamiento provocado por aire enrarecido: el coeficiente efectivo de viscosidad y el modelo de moléculas libres. El primer enfoque sugiere que las ecuaciones que modelan el amortiguamiento por deslizamiento de superficies sobre una película de aire son válidas en presencia de aire enrarecido, pero que el coeficiente de viscosidad debe reemplazarse por otro llamado coeficiente efectivo de viscosidad, $\mu_{efectivo}$, el cual es dependiente de la presión a través del número de Knudsen, K_n , del sistema. El número de Knudsen se define como:

$$K_n = \frac{\lambda}{d}$$

donde λ es la distancia promedio entre colisiones para las moléculas y d es la dimensión característica de la estructura amortiguada (por ejemplo, para el análisis del amortiguamiento de un objeto aislado, d es la dimensión característica del cuerpo y, para el amortiguamiento por deslizamiento de superficies, d es la distancia de separación entre la placa y el sustrato).

Una ecuación simple para aproximar el coeficiente efectivo de viscosidad, basada en datos experimentales, es proporcionada por los trabajos de Fukui (cita) y Veijola (cita):

$$\mu_{efectivo} = \frac{\mu_0}{1 + 9,658K_n^{1,159}}$$

donde μ_0 es el coeficiente de viscosidad a presión atmosférica.

Basados en datos experimentales de Andrews (cita) y Li (cita) es posible derivar una ecuación empírica similar para el coeficiente efectivo de viscosidad:

$$\mu_{efectivo} = \frac{\mu_0}{1 + 6,8636K_n^{0,9906}}$$

Con el coeficiente efectivo de viscosidad, el efecto de amortiguamiento por el deslizamiento de placas sobre una película de aire enrarecido está en función de las dimensiones de la placa y la distancia entre la placa móvil y el sustrato del mismo modo que ocurre cuando la presión es de una atmósfera.

El concepto del coeficiente efectivo de viscosidad para aire enrarecido es razonable cuando la presión del aire no es muy baja, de modo que el gas puede ser considerado aún como un continuo aunque las condiciones de frontera deben ser replanteadas. En presencia de una presión mucho menor que la presión atmosférica, las colisiones entre las moléculas del gas se reducen de modo tal que difícilmente puede seguirse considerando como un fluido viscoso. En cuyo caso, el concepto de coeficiente efectivo de viscosidad no resulta útil para realizar el análisis.

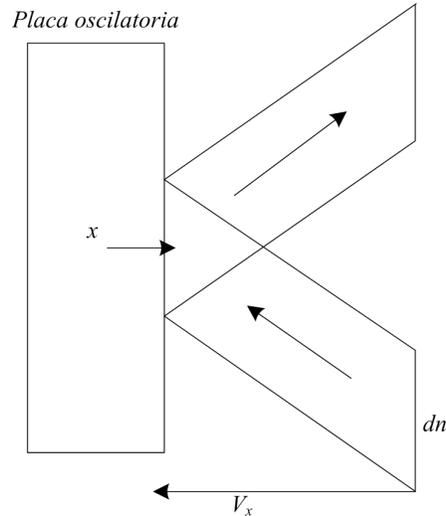


Figura 4.26: Colisiones frontales de la placa oscilante con las moléculas de gas.

Cinemáticamente, la naturaleza de la interacción entre un cuerpo sólido y un gas ambiente es descrito utilizando el número de Knudsen K_n . Para el caso en que $K_n \ll 1$, lo cual significa que la dimensión característica de la microestructura es mucho mayor que la distancia promedio entre colisiones para las moléculas, el gas puede considerarse como un fluido viscoso. Para el caso en que $K_n \gg 1$, lo cual significa que la distancia de separación entre elementos deslizantes es mucho menor que la distancia promedio entre colisiones para las moléculas, el modelo de flujo viscoso pierde validez y debe considerarse el modelo de moléculas libres. Para ilustrar esta última sugerencia considérese que λ (la distancia promedio entre colisiones para las moléculas de un gas) es del orden de $0,1 \mu m$, a presión atmosférica y para el vacío con una presión de $1 Pa$, λ se incrementa hasta un centímetro, dimensión que es mucho mayor que las dimensiones características de cualquier microestructura. Por lo que el empleo del modelo de moléculas libres está justificado.

4.5.2. Modelo de Christian para amortiguamiento provocado por aire enrarecido

La evidencia experimental muestra que la fuerza de amortiguamiento sobre una microestructura se reduce de forma significativa cuando la presión del aire se reduce hasta cerca de $1 [kPa]$ o por debajo. Lo cual indica que las moléculas del gas están tan separadas en presiones bajas que la interacción entre ellas puede despreciarse. Por lo tanto, el modelo de moléculas libres puede emplearse.

R. Christian propuso el modelo de moléculas libres para amortiguamiento en bajas presiones [?]. En este modelo, la fuerza resistiva de amortiguamiento sobre una placa oscilante se calcula mediante la tasa de transferencia de la cantidad de movimiento desde la placa oscilatoria al aire circundante a través de colisiones entre la placa y las moléculas. En este modelo, no se ha empleado el coeficiente de viscosidad en forma alguna y el factor de calidad de la placa oscilante se calcula de forma directa.

Considérese la fuerza de amortiguamiento actuando sobre una placa que oscila en la dirección x , como se muestra en la figura 4.26. Si la interacción entre las moléculas de gas puede despreciarse, la fuerza de amortiguamiento actuando sobre la placa oscilante es provocada por la transformación de la cantidad de movimiento debido a las colisiones entre la placa y las moléculas de gas.

El número de moléculas por unidad de volumen con una velocidad en el rango de v_x hasta $v_x + \Delta v_x$ es $dn = n f(v_x) dv_x$, donde $f(v_x)$ es una función con distribución de Maxwell.

$$f(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} \quad (4.64)$$

donde k es la constante de Boltzmann ($k = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ o $k = 8,62 \times 10^{-5} \text{ eV/K}$). Si la velocidad de la placa es \dot{x} , debido al movimiento de la placa, el número de colisiones por unidad de tiempo por unidad de área de la placa, para aquellas moléculas en el rango de velocidades de v_x hasta $v_x + \Delta v_x$, es $(v_x + \dot{x}) dn = n(v_x + \dot{x})f(v_x) dv_x$.

Dado que el cambio del momento para cada colisión contra alguna molécula es $2m(v_x + \dot{x})$, la presión provocada por las colisiones sobre la parte frontal de la placa puede encontrarse mediante una integración para tomar en cuenta todas las velocidades de las moléculas.

$$P_f = 2mn \int_{-\dot{x}}^{\infty} (v_x + \dot{x})^2 f(v_x) dv_x \quad (4.65)$$

De modo análogo, la presión provocada por las colisiones sobre la parte posterior de la placa será:

$$P_b = 2mn \int_{\dot{x}}^{\infty} (v_x - \dot{x}) f(v_x) dv_x \quad (4.66)$$

La fuerza total de amortiguamiento provocado por las colisiones es $F_r = A(P_f - P_b)$, donde A es el área de la placa. Si la velocidad de la placa, \dot{x} , es mucho menor que la velocidad de la mayoría de las moléculas de gas, de acuerdo con las ecuaciones 4.64, 4.65 y 4.66, se tiene:

$$F_r \cong 8mnA \int_0^{\infty} v_x \dot{x} f(v_x) dv_x = 8mnA \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} \dot{x}$$

Para un gas en condiciones normales ($P_0 = 1 \text{ atm}$, $T_0 = 273 \text{ K}$), la densidad de moléculas del gas es $n_0 = N_A/V_0$, donde $N_A = 6,023 \times 10^{23}$ y $V_0 = 0,0224 \text{ m}^3$. La densidad de moléculas a presión P y temperatura T se obtiene mediante:

$$n = n_0 \frac{PT_0}{P_0T} = \frac{N_A P}{RT}$$

donde $R = 8,31 \text{ kgm}^2/\text{s}^2/\text{K}$ es la constante universal molar de los gases. Por lo tanto, se obtiene:

$$F_r = 4\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{M_m}{RT}} PA\dot{x} \quad (4.67)$$

donde M_m es la masa Molar del gas. Así, el coeficiente de amortiguamiento en aire enrarecido calculado mediante el modelo de moléculas libres será:

$$c_r = 4\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{M_m}{RT}} PA \quad (4.68)$$

La ecuación 4.67 muestra que el efecto de amortiguamiento en aire enrarecido decrece de forma lineal con la presión. Por lo tanto, el factor Q del sistema en bajo vacío será:

$$Q = \frac{M_p \omega_0}{c_r}$$

donde M_p es la masa de la placa y ω_0 la frecuencia natural del sistema. Dado que $M_p = Ah\rho$, el factor de calidad dado por el modelo de Christian será:

$$Q_{Chr} = \frac{H\rho\omega_0}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{RT}{M_m P}} \quad (4.69)$$

donde H es el grosor de la placa y ρ es la densidad de la placa. A pesar de que el factor de calidad es inversamente proporcional al valor de la presión P , el modelo de Christian sobreestima el valor del factor de calidad y con ello subestima la fuerza de amortiguamiento en presencia de aire enrarecido.

4.5.3. Modelo de transferencia de energía para amortiguamiento por presión sobre una película de aire

Aunque el modelo de Christian explica cuantitativamente el efecto de amortiguamiento en bajo vacío, el efecto de amortiguamiento es subestimado hasta en un orden de magnitud cuando los factores de calidad obtenidos se comparan con datos experimentales, al respecto consúltese la obra de J. Zook [?].

Otro problema del modelo de Christian es que se trata sólo de un modelo de amortiguamiento aplicable a una placa aislada, dado que el efecto de cualquier muro cercano no se considera. En la mayoría de los casos prácticos, las placas móviles están rodeadas por electrodos o por otras estructuras. Cuando la placa es actuada de forma electrostática, los electrodos están muy cercanos a la placa móvil para lograr magnitudes de fuerza lo suficientemente grandes para mover la placa.

El tercer problema del modelo de Christian es que la dependencia del factor de calidad de las dimensiones de la placa móvil no es contemplada, lo cual resulta poco razonable.

Para resolver estos problemas, Minhang Bao (cita) ha propuesto otro modelo de moléculas libres. Con este nuevo modelo se evitan los problemas antes mencionados y para una placa aislada es posible obtener resultados similares a los obtenidos con el modelo de Christian. El modelo calcula la energía perdida por el efecto de transferencia de energía.

Cambio de velocidad de las moléculas de gas debido a las colisiones

Para calcular la energía transferida desde la placa hacia el aire que la rodea, debe considerarse en primer término el cambio de velocidad de las moléculas de gas debido a sus colisiones con la placa móvil.

Una molécula de gas se mueve con velocidad v_2 hacia la placa móvil y ésta se mueve al encuentro de la molécula con una velocidad v_1 . Dado que la masa de la molécula de gas, m , es mucho menor que la masa de la placa, M , la molécula de gas rebota en la placa después de la colisión y la placa continua su movimiento aunque experimenta variaciones en su velocidad. Véase la figura 4.27.

Si las velocidades de la placa y de la molécula son v'_1 y v'_2 después de la colisión, respectivamente, la conservación del momento cinético se expresará como:

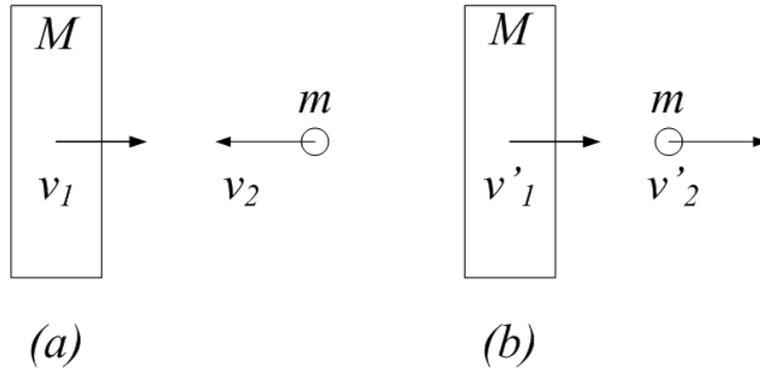


Figura 4.27: Las velocidades de la placa y de una molécula. (a) antes de una colisión y (b) después de una colisión.

$$Mv_1 - mv_2 = Mv'_1 + mv'_2$$

Si se define $\gamma = m/M$, se tiene:

$$v_1 - \gamma v_2 = v'_1 + \gamma v'_2 \quad (4.70)$$

A causa de la conservación de la energía cinética se tiene:

$$v_1^2 + \gamma v_2^2 = v_1'^2 + \gamma v_2'^2 \quad (4.71)$$

De las ecuaciones 4.70 y 4.71, para γ mucho menor que la unidad, se tiene:

$$v_2' = v_2 + 2v_1$$

Lo cual significa que las moléculas de gas han experimentado un incremento de velocidad de $2v_1$ debido a la colisión frontal con la placa con velocidad v_1 . De forma similar, si la placa se mueve en la misma dirección que la molécula, la velocidad resultante de la molécula sería:

$$v_2' = v_2 - 2v_1$$

Amortiguamiento por aire para una placa aislada

Para comparar el modelo de transferencia de energía y el modelo de Christian, el factor de calidad de una placa aislada oscilatoria en bajo vacío será calculado utilizando el primer modelo. De acuerdo con la estadística de Boltzmann, el número de moléculas con velocidad en el rango entre v_x y $v_x + dv_x$ que impactan la superficie de una placa estática normal al eje x en un intervalo Δt será:

$$\Delta n = An f(v_x) v_x dv_x \Delta t$$

donde A es el área de la placa.

Si la placa está en movimiento en su dirección normal (la dirección x), el número de moléculas (con velocidades entre v_x y $v_x + \Delta v_x$ en un intervalo Δt) que colisionan con la parte frontal de la placa se obtiene mediante:

$$\Delta n_{frontal} = Anf(v_x)(v_x + \dot{x}) dv_x \Delta t$$

donde \dot{x} es la velocidad de la placa en movimiento. De forma análoga, el número de colisiones en la parte posterior de la placa será:

$$\Delta n_{trasera} = Anf(v_x)(v_x - \dot{x}) dv_x \Delta t$$

Por lo tanto, la energía transferida desde la placa en movimiento a las moléculas, ubicadas en la parte frontal de dicha placa, en un intervalo Δt se calcula a partir de:

$$\Delta E_{frontal} = A \int_{-\dot{x}}^{\infty} \left[\frac{1}{2} m (v_x + 2\dot{x})^2 - \frac{1}{2} m v_x^2 \right] (v_x + \dot{x}) n f(v_x) dv_x \Delta t$$

De forma similar, la energía transferida desde la placa en movimiento a las moléculas, ubicadas en la parte trasera de dicha placa, en un intervalo Δt se calcula mediante:

$$\Delta E_{trasera} = A \int_{\dot{x}}^{\infty} \left[\frac{1}{2} m (v_x - 2\dot{x})^2 - \frac{1}{2} m v_x^2 \right] (v_x - \dot{x}) n f(v_x) dv_x \Delta t$$

La energía neta transformada desde la placa oscilante a las moléculas que la circundan ($\Delta E = \Delta E_{frontal} + \Delta E_{trasera}$) en un intervalo Δt será:

$$\Delta E = A \int_{-\dot{x}}^{\infty} \frac{1}{2} m (4\dot{x}v_x + 4\dot{x}^2) (v_x + \dot{x}) n f(v_x) dv_x \Delta t + A \int_{\dot{x}}^{\infty} \frac{1}{2} m (-4\dot{x}v_x + 4\dot{x}^2) (v_x - \dot{x}) n f(v_x) dv_x \Delta t$$

Si \dot{x} es mucho menor que v_x , la ecuación puede aproximarse como:

$$\Delta E = Amn \int_0^{\infty} 8v_x \dot{x}^2 f(v_x) dv_x \Delta t = 4Amn \sqrt{\frac{2kT}{\pi m}} \dot{x}^2 \Delta t$$

Para una oscilación sinusoidal, es decir, $x = a_0 \sin \omega t$, la pérdida de energía en un ciclo se calcula empleando:

$$\Delta E_{ciclo} = 4Amn \sqrt{\frac{2kT}{\pi m}} \int_0^{2\pi} a_0^2 \omega^2 \cos^2 \omega t \cdot \frac{1}{\omega} d(\omega t) = 4Amn \sqrt{\frac{2kT}{\pi m}} a_0^2 \omega \pi$$

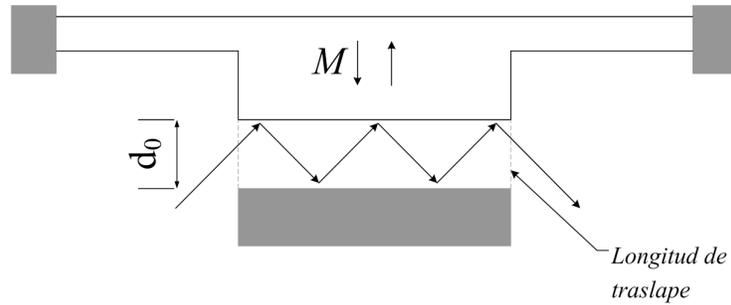


Figura 4.28: Compresión de aire en un ambiente de baja presión (enrarecimiento de gases).

De acuerdo con la definición de factor de calidad, el factor de calidad será:

$$Q_{E,Aislada} = \frac{2\pi E_p}{\Delta E_{ciclo}} = \frac{\rho H \omega}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{RT}{M_m}} \frac{1}{P} \quad (4.72)$$

Cuando la ecuación 4.72 es comparada con la ecuación 4.69 se tiene que $Q_{E,Aislada} = Q_{Chr}$.

Amortiguamiento por presión sobre una película de aire

Se define a la distancia de separación original entre la placa oscilante y el sustrato como d_0 y al desplazamiento (hacia abajo, al encuentro del sustrato) de la placa oscilatoria como $x = a_0 \sin \omega t$. Véase la figura 4.28.

Debido al desplazamiento de la placa, la distancia de separación es $d = d_0 - x$. Si la longitud del traslape entre placa y sustrato es L , entonces el área transversal del espacio de separación es $L(d_0 - x)$. El número de moléculas desplazándose en el área transversal del espacio de separación entre la placa y el sustrato por unidad de tiempo será:

$$\frac{1}{4} n \bar{v} L (d_0 - x) \quad (4.73)$$

donde n es la concentración de las moléculas y \bar{v} la velocidad promedio de las moléculas:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

Si una molécula ingresa en el área transversal del espacio de separación entre placa y sustrato, tiene componentes de velocidad v_{yz0} en el plano $y - z$ y v_{x0} en la dirección x , gana velocidad en la dirección x debido a la colisión con la placa cuando viaja por el espacio de separación. Si la distancia lateral recorrida por la molécula en el espacio de separación es l , el tiempo que la molécula permanece en la separación es $\Delta t = l/v_{yz0}$. Dado que v_{yz0} está en el orden de varios cientos de metros por segundo, Δt es mucho menor que un ciclo de oscilación de la placa. Así, el número de colisiones en un periodo Δt será:

$$\Delta N = \frac{\Delta t \times v_{x0}}{2(d_0 - x)} = \frac{l v_{x0}}{2(d_0 - x) v_{yz0}}$$

Dado que las moléculas incrementan su velocidad en $2\dot{x}$ cada vez que chocan con la placa, la velocidad en la dirección x al final del recorrido por el espacio de separación será:

$$v_x = v_{x0} + \Delta N \times 2\dot{x} = v_{x0} + \frac{lv_{x0}}{(d_0 - x)v_{yz0}} \dot{x}$$

La energía cinética de la molécula al ingresar al espacio de separación se calcula mediante:

$$e_{k, entrada} = \frac{1}{2}m [v_{yz0}^2 + v_{x0}^2]$$

en tanto que la energía de la molécula al abandonar el espacio de separación se obtiene a partir de:

$$e_{k, salida} = \frac{1}{2}m \left[v_{yz0}^2 + v_{x0}^2 + \frac{2lv_{x0}^2}{(d_0 - x)v_{yz0}} \dot{x} + \frac{l^2v_{x0}^2}{(d_0 - x)^2 v_{yz0}^2} \dot{x}^2 \right]$$

la energía adicional ganada por la molécula debido a las colisiones con la placa será:

$$\Delta e_k = \frac{1}{2}m \left[\frac{2lv_{x0}^2}{(d_0 - x)v_{yz0}} \dot{x} + \frac{l^2v_{x0}^2}{(d_0 - x)^2 v_{yz0}^2} \dot{x}^2 \right] \quad (4.74)$$

dado que el promedio del primer término a la derecha de la ecuación es cero en un ciclo, sólo el segundo término contribuye a la pérdida de energía de la placa. De acuerdo con las ecuaciones 4.73 y 4.74, la energía promedio perdida por la placa en un ciclo de oscilación se obtiene empleando:

$$\Delta E_{ciclo} = \frac{1}{4}n\bar{v}L \frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi} \frac{ml^2v_{x0}^2}{2(d_0 - x)v_{yz0}^2} a_0^2\omega^2 \cos^2 \omega t d(\omega t)$$

Por simplicidad, l^2 , v_{x0}^2 y v_{yz0}^2 son aproximadas como \bar{l}^2 , \bar{v}_{x0}^2 y \bar{v}_{yz0}^2 respectivamente. Dado que $\bar{v}_{yz0}^2 = 2\bar{v}_{x0}^2$, la energía perdida por la placa en un ciclo será:

$$\Delta E_{ciclo} = \frac{1}{4}\rho_0\bar{v}L \frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi} \frac{\bar{l}^2 a_0^2 \omega^2}{4(d_0 - x)} \cos^2 \omega t \cdot d(\omega t)$$

donde $\rho_0 = mn$ es la densidad del gas. Si la amplitud de la vibración a_0 es mucho menor que d_0 , se tiene:

$$\Delta E_{ciclo} \cong \frac{1}{4}\rho_0\bar{v}L \frac{1}{\omega} \frac{\pi \bar{l}^2 a_0^2 \omega^2}{4d_0} = \frac{\pi \bar{l}^2 a_0^2 \omega}{16} \rho_0 \bar{v} \frac{L}{d_0}$$

de acuerdo con la definición de Q , el factor de calidad para el amortiguamiento por presión sobre una película de aire obtenido mediante el modelo de transferencia de energía en bajo vacío será:

$$Q_E = \frac{2\pi E_p}{\Delta E_{ciclo}} = \frac{16M_p d_0 \omega}{l^2 \rho_0 \bar{v} L}$$

donde E_p es la energía de la placa y M_p la masa de la placa. Si la densidad del gas a presión atmosférica se denota mediante ρ_{atm} y la presión atmosférica es p_{atm} , el factor Q para una presión p se calcula a partir de:

$$Q_E = \frac{16M_p d_0 \omega p_{atm}}{\rho_{atm} \bar{v} L^2} \frac{1}{p}$$

para una placa rectangular con largo a , ancho b , grosor H y densidad ρ , la ecuación anterior puede reescribirse como:

$$Q_E = \frac{16\rho H \omega p_{atm}}{\beta \rho_{atm} \bar{v}} \left(\frac{d_0}{L}\right) \frac{1}{p}$$

donde $\beta = \frac{l^2}{ab}$. Dado que $\bar{v} \cong \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M_m}}$ y $\frac{p_{atm}}{\rho_{atm}} = \frac{RT}{M_m}$, esta última ecuación puede escribirse como:

$$Q_E = \frac{8\sqrt{\pi}\rho H \omega}{\beta\sqrt{2}} \left(\frac{d_0}{L}\right) \sqrt{\frac{RT}{M_m}} \frac{1}{p}$$

se tiene que $\beta = 2/\pi$, con lo cual el factor de calidad para el amortiguamiento provocado por presión sobre una película de aire en bajo vacío será:

$$Q_E = (2\pi)^{\frac{3}{2}} \rho H \omega \left(\frac{d_0}{L}\right) \sqrt{\frac{RT}{M_m}} \frac{1}{p} \quad (4.75)$$

o el coeficiente de amortiguamiento:

$$c_r = \frac{M_p \omega}{Q_E} = 0,0635 \left(\frac{L}{d_0}\right) \sqrt{\frac{M_m}{RT}} P A \quad (4.76)$$

Esta relación es válida bajo la condición de que el número de Knudsen K_n sea muy grande, de modo tal que las colisiones entre las moléculas de gas puedan ser despreciadas. Si K_n no es lo suficientemente grande, el factor de calidad será menor que el consignado en la ecuación 4.75. Comparando la ecuación 4.75 con 4.69, la relación entre el factor de calidad del amortiguamiento provocado por presión sobre una película de aire calculado por el modelo de transferencia de energía y el obtenido mediante el modelo de Christian se obtiene a partir de:

$$Q_E = 16\pi \left(\frac{d_0}{L}\right) Q_{Chr}$$

Dado que el valor de β puede subestimarse, el valor del factor de calidad puede estar sobreestimado.

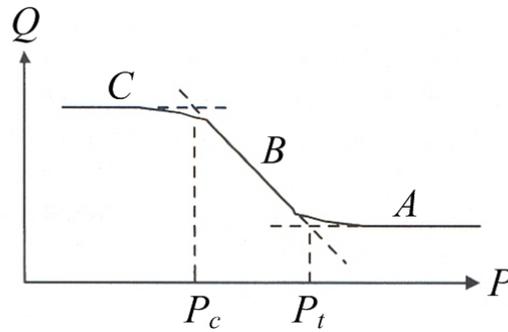


Figura 4.29: Dependencia del factor de calidad de la presión del aire.

4.5.4. Amortiguamiento en alto vacío

De acuerdo con el modelo de moléculas libres, la fuerza de amortiguamiento en aire enrarecido es proporcional a la presión del aire. Por lo tanto, la fuerza de amortiguamiento provocada por el aire disminuye, o, el factor de calidad se incrementa, con la disminución de la presión. Sin embargo, el factor de calidad deja de incrementarse, cuando la fricción interna y las pérdidas en los soportes se convierten en los principales mecanismos de disipación de energía. Para microestructuras hechas de silicio, el factor de calidad en alto vacío, Q_0 , se encuentra en el rango de $10^4 \sim 10^5$. Una vez que Q_0 es obtenido a partir de mediciones, el coeficiente de amortiguamiento provocado por la fricción interna y las pérdidas en los soportes puede calcularse utilizando:

$$c_0 = \frac{M_p \omega}{Q_0}$$

donde M_p es la masa de la placa oscilante. Por lo tanto, la ecuación diferencial para la oscilación en aire enrarecido puede modificarse para quedar como:

$$m\ddot{x} + (c_r + c_0)\dot{x} + kx = F$$

donde c_r se obtiene a partir de las ecuaciones 4.68 o 4.76, dependiendo del modelo empleado.

Asumiendo que el factor de calidad de la placa oscilante sea alrededor de 5×10^4 , la placa está hecha de silicio con un grosor de $200 \mu m$ y la frecuencia natural de la estructura es $1 kHz$. La presión crítica, P_c , a la cual el factor de calidad se estabiliza a pesar del decremento de la presión puede calcularse mediante las ecuaciones 4.68 o 4.76 dependiendo del modelo empleado.

La relación entre el factor de calidad y la presión (desde una atmósfera hasta alto vacío) se muestra en la gráfica de la figura 4.29:

El comportamiento del factor de calidad a alta presión se muestra en la sección A de la gráfica. Bajo condiciones de alta presión, Q está determinado por la geometría y la dirección de movimiento de la estructura. El mecanismo de amortiguamiento podría deberse a la presión sobre una película de aire, al deslizamiento entre placas sobre una película de aire, a la fuerza de arrastre o a la combinación de todos estos mecanismos.

Cuando la presión disminuye hasta el rango de $10^2 \sim 10^3 Pa$, Q se incrementa de forma considerable. El factor de calidad es inversamente proporcional a la presión del aire en la región. La presión de transición, P_t ,

desde el sector A hasta el sector B , es normalmente de varios cientos de pascales. El valor exacto dependerá de la geometría y los modos de oscilación de la estructura.

En alto vacío, cuando el amortiguamiento por aire es pequeño, los efectos de la fricción interna y las pérdidas de energía en los soportes de la estructura deben considerarse en el análisis. El factor de calidad está determinado principalmente por la fricción interna y las pérdidas en los soportes si el vacío es lo suficientemente alto y Q puede volverse constante como lo muestra el sector C de la gráfica bajo estas condiciones. El valor exacto dependerá, nuevamente, de la geometría de la estructura.

