

## Parte II

# Principios físicos del funcionamiento de los Sistemas Microelectromecánicos



# Capítulo 3

## Teoría de elasticidad

El silicio cristalino tiene propiedades mecánicas que en algunos aspectos son mejores que las del acero y, al mismo tiempo, se trata del semiconductor más usado en la industria de la electrónica, para el diseño de componentes de diversa índole. Las propiedades mecánicas del silicio maquinado en volumen están modeladas en su totalidad por la teoría de la elasticidad dentro de un rango de temperatura considerable. Aunque se ha especulado acerca de que las características mecánicas del silicio pueden cambiar cuando la geometría de las estructuras se encuentra en la escala micrométrica, en realidad no existen cambios significativos en dichas propiedades. Por esta razón, las propuestas de diseños que se hacen a lo largo de este trabajo, se harán bajo la consideración de que las propiedades mecánicas de las microestructuras de silicio son idealmente elásticas. Esta asunción significa que si la deformación producida por fuerzas externas sobre una estructura de silicio no excede un cierto límite, dicha deformación desaparecerá una vez que las fuerzas dejen de actuar sobre la estructura.

Dado que un material con estructura cristalina como el silicio es anisotrópico por definición, sus propiedades mecánicas son dependientes de la orientación de los cristales que lo constituyen y las relaciones entre los parámetros mecánicos son modeladas de forma adecuada por ecuaciones tensoriales. Esto lleva a expresiones analíticas un tanto complejas que obligan a buscar formas de simplificarlas sin pérdida de generalidad, por esta razón, en el análisis mecánico de las estructuras creadas con silicio, se asumirá que el material es homogéneo, es decir, isotrópico. Debe aclararse que esta consideración no introduce errores significativos en los resultados analíticos frente a la evidencia experimental reportada en múltiples artículos técnicos. De cualquier modo, los resultados en general son suficientemente exactos para llevar a cabo el proceso de optimización de los diseños y como en la mayoría de los casos, el desempeño de los sensores mecánicos se ve afectado de forma mucho más significativa por la variación de los parámetros geométricos y mecánicos determinados por el control del proceso más que por las simplificaciones y aproximaciones. De cualquier modo, en la actualidad se dispone de herramientas computacionales de simulación de fenómenos físicos por el método de análisis de elemento finito, en las que es posible obtener resultados del comportamiento de las estructuras y materiales ya sean anisotrópicos o isotrópicos de forma relativamente simple, dichos resultados pueden compararse con los resultados analíticos obtenidos a partir de las ecuaciones y, eventualmente, con la evidencia experimental.

Dado que las estructuras basadas en vigas y diafragmas son importantes para los Sistemas Microelectromecánicos (MEMS), el análisis de su comportamiento mecánico basado en la teoría de la elasticidad será la primera parte de la exposición de los principios de funcionamiento.

### 3.1. Esfuerzo y deformación unitaria

#### 3.1.1. Esfuerzo

De acuerdo con la teoría de la elasticidad, las fuerzas externas actuando sobre un cuerpo sólido producen fuerzas internas entre las porciones del cuerpo y provocan una deformación [17]. Si las fuerzas no exceden

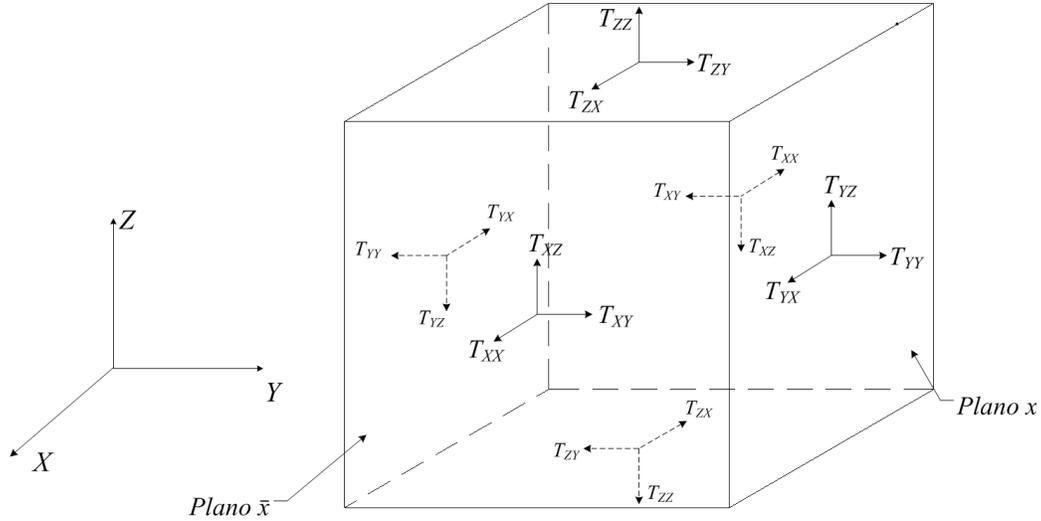


Figura 3.1: Componentes del tensor de esfuerzos.

de un cierto límite, la deformación desaparece una vez que las fuerzas dejan de actuar. Para describir las fuerzas internas, el tensor de esfuerzo es la forma más adecuada de hacerlo. Matemáticamente, el esfuerzo es un tensor de rango dos, el cual tiene nueve componentes expresados por la siguiente matriz:

$$T = \begin{pmatrix} T_{XX} & T_{XY} & T_{XZ} \\ T_{YX} & T_{YY} & T_{YZ} \\ T_{ZX} & T_{ZY} & T_{ZZ} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

En donde las tres componentes de la diagonal principal de la matriz, son llamados los esfuerzos normales y las seis componentes restantes se denominan esfuerzos cortantes. Para ilustrar la definición de los componentes del tensor de esfuerzos obsérvese la figura 3.1.

Las seis caras del cubo se denotan con:  $x, \bar{x}, y, \bar{y}, z, \bar{z}$ , de acuerdo con las normales de cada cara. La testa sobre los identificadores de algunos planos, denotan un signo negativo.  $T_{ij}$  denota un componente del tensor de esfuerzo y se define como la fuerza en la dirección específica  $j$  (el segundo subíndice) sobre una unidad de área en una superficie específica  $i$  (el primer subíndice) del cubo elemental. Los signos de los componentes del tensor están determinados por la dirección de la fuerza relativa a la normal del plano. Las componentes del tensor de esfuerzo generados por las fuerzas tangenciales sobre los planos  $x, y, z$  están definidos como positivos, en tanto que las debidos a fuerzas tangenciales actuando sobre los planos  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  son negativos. Por otra parte, para el plano  $\bar{y}$ , los componentes del esfuerzo provocados por una fuerza en la dirección de  $\bar{y}$  son positivos pero los provocados por una fuerza en la dirección  $y$  son negativos. Del mismo modo los componentes del esfuerzo provocados por fuerzas tangenciales en las direcciones  $\bar{x}$  y  $\bar{z}$  sobre el plano  $\bar{y}$  son definidas como positivas y aquellas debidas a fuerzas en las direcciones  $x$  y  $z$  sobre el mismo plano, son definidas negativas.

De acuerdo con la condición de balance de fuerzas, la componente  $T_{XX}$  en los dos planos opuestos y paralelos  $x$  y  $\bar{x}$  deben ser iguales en magnitud y signo, y del mismo modo ocurre con  $T_{YY}$  y  $T_{ZZ}$ . Por otra parte se tiene que la condición de balance de torques se expresa como:

$$T_{XY} = T_{YX}, T_{YZ} = T_{ZY}, T_{XZ} = T_{ZX} \quad (3.2)$$

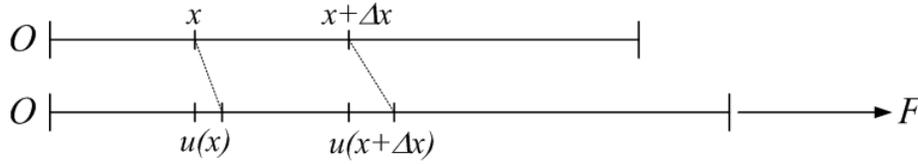


Figura 3.2: Deformación de un material unidimensional.

Esto significa que la matriz de tensores de esfuerzos  $T$  es simétrica y tiene sólo seis componentes independientes. Esto permite reescribir la ecuación 3.1 del siguiente modo.

$$T = \begin{pmatrix} T_{XX} & T_{XY} & T_{XZ} \\ T_{XY} & T_{YY} & T_{YZ} \\ T_{XZ} & T_{YZ} & T_{ZZ} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

### 3.1.2. Deformación unitaria

Bajo la acción de los esfuerzos se producen tensiones (físicamente apreciables como deformaciones) al interior de las estructuras[18]. Las cuales para el caso de un material unidimensional pueden apreciarse en la figura 3.2.

Si en un material unidimensional se denota con  $x$  a la posición original de una marca identificada sobre el material y con  $u(x)$  se denota al desplazamiento que experimentará dicha marca, debido a la elongación relativa del material bajo la acción de una fuerza, entonces para una posición  $x + \Delta x$  el desplazamiento será  $u(x + \Delta x)$  y la deformación unitaria en el material unidimensional tendrá un único componente representado por:

$$e = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.4)$$

Para un material tridimensional, la deformación que experimenta dicho material se puede apreciar en la figura 3.3.

Los componentes del desplazamiento para un punto  $\mathbf{r}(x, y, z)$  son  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$  y  $w(x, y, z)$  en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente. Del mismo modo para un punto  $\mathbf{r}'(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$  sus componentes de desplazamiento son  $u + \Delta u$ ,  $v + \Delta v$  y  $w + \Delta w$ , respectivamente (las tres son funciones de  $x$ ,  $y$  y  $z$ ). Así, el desplazamiento incremental entre el punto  $\mathbf{r}$  y el punto  $\mathbf{r}'$  puede expresarse como:

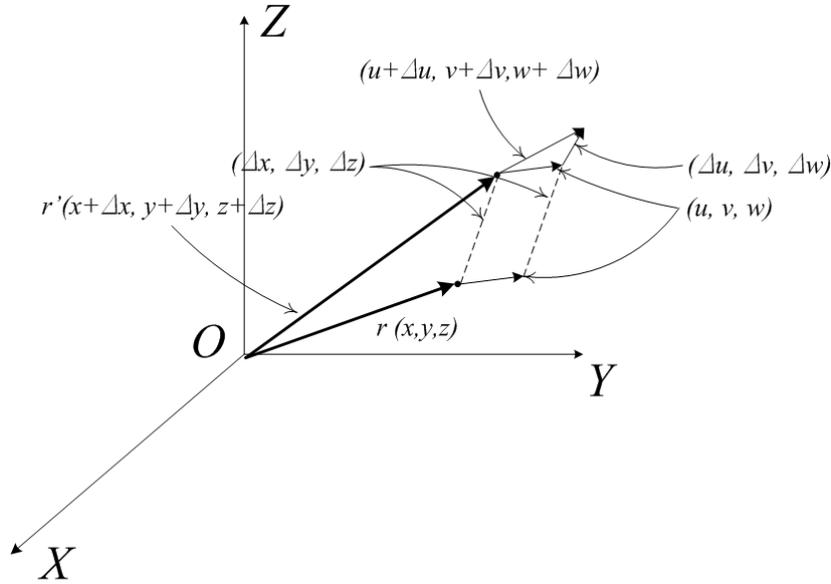


Figura 3.3: Deformación en un material tridimensional.

$$\begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Para un cuerpo rígido rotando alrededor del origen  $O$  de un sistema de coordenadas con una velocidad angular  $\bar{\omega}$ , la velocidad en el extremo final del vector  $\bar{r}(x, y, z)$  es  $\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$ . Recordando que  $\nabla \times \bar{v} = \nabla \times \bar{\omega} \times \bar{r} = (\nabla \cdot \bar{r}) \cdot \bar{\omega} - (\bar{\omega} \cdot \nabla) \bar{r} = 3\bar{\omega} - \bar{\omega} = 2\bar{\omega}$ , se tiene que  $\nabla \times \bar{v} = 2\bar{\omega}$ . Por otra parte, el desplazamiento angular  $\bar{\Phi} = \bar{\omega} \Delta t$  puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \hat{i} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \hat{j} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{k} \\ &= \Phi_X \hat{i} + \Phi_Y \hat{j} + \Phi_Z \hat{k} \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde:

$$\Phi_X = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \Phi_Y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \Phi_Z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.9)$$

Con lo cual el último término a la derecha en la ecuación 3.5 queda expresado como:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\Phi_Z & \Phi_Y \\ \Phi_Z & 0 & -\Phi_X \\ -\Phi_Y & \Phi_X & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

Además, si está restringido el movimiento rotacional del cuerpo rígido, el último término a la derecha en la ecuación 3.5 es cero y dicha ecuación queda expresada como:

$$\begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

La matriz de 3 x 3 presente en la ecuación se conoce como tensor de deformación unitaria y los elementos en la diagonal de la matriz son los componentes normales del tensor de deformación unitaria:

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.11)$$

Las tres componentes normales del tensor de deformación unitaria denotadas por las ecuaciones 3.11 representan las elongaciones relativas de la estructura a lo largo de los tres ejes coordenados. Los seis componentes del tensor fuera de la diagonal se conocen como deformaciones unitarias cortantes:

$$e_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = e_{yx}, e_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = e_{zy}, e_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = e_{xz} \quad (3.12)$$

Con lo cual la ecuación 3.10 queda como:

$$\begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = (e) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

donde  $(e)$  representa el tensor de deformación unitaria, un tensor de rango dos. Dado que el tensor de deformación unitaria es un tensor simétrico con sólo seis componentes independientes, puede simplificarse la notación para representarlo:

$$e_1 = e_{xx}, e_2 = e_{yy}, e_3 = e_{zz}, e_4 = e_{yz} = e_{zy}, e_5 = e_{zx} = e_{xz}, e_6 = e_{xy} = e_{yx} \quad (3.14)$$

y expresarlo del siguiente modo:

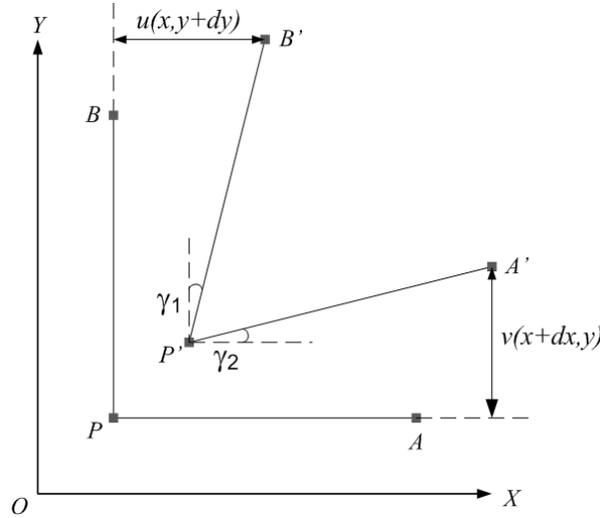


Figura 3.4: Deformación angular debido a esfuerzos cortantes.

$$(e) = \begin{pmatrix} e_1 & e_6 & e_5 \\ e_6 & e_2 & e_4 \\ e_5 & e_4 & e_3 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Las tres componentes de la deformación unitaria están relacionadas con la distorsión angular del material. Esto puede apreciarse si se considera el ángulo recto  $\widehat{APB}$  cuyos segmentos  $\overline{PA}$  y  $\overline{PB}$  son identificados con  $dx$  y  $dy$ , respectivamente, en el plano  $XY$  y se asume que debido a la deformación que experimenta dicha estructura los puntos  $A$ ,  $P$  y  $B$  son llevados hacia nuevas posiciones llamadas  $A'$ ,  $P'$  y  $B'$ , respectivamente (véase la figura 3.4). Si  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$  son los desplazamientos en las direcciones  $x$  y  $y$  para el punto  $P(x, y)$ . El desplazamiento del punto  $A$  en la dirección  $y$  es  $v(x + dx, y) = v(x, y) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx$  y el desplazamiento del punto  $B$  en la dirección  $x$  está dado por  $u(x, y + dy) = u(x, y) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) dy$ .

El segmento de línea  $\overline{P'A'}$  está inclinada lejos del segmento original  $\overline{PA}$  un ángulo:

$$\gamma_1 = \frac{v(x + dx, y) - v(x, y)}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.16)$$

Del mismo modo, el segmento de línea  $\overline{P'B'}$  está inclinada lejos del segmento original  $\overline{PB}$  un ángulo:

$$\gamma_2 = \frac{u(x, y + dy) - u(x, y)}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.17)$$

Además, el ángulo recto inicial  $\widehat{APB}$  se ve afectado por el ángulo total de deformación:

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.18)$$

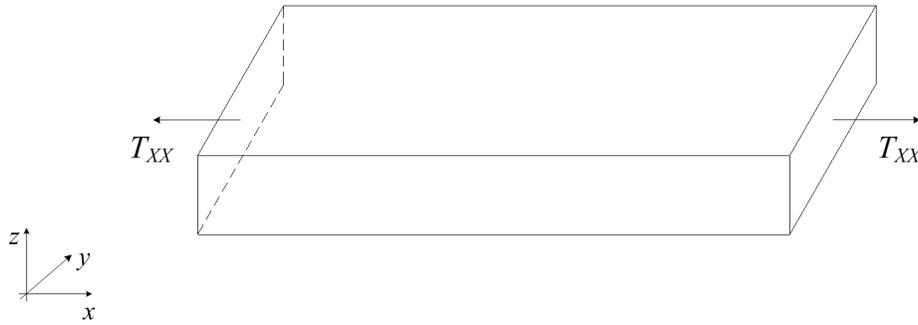


Figura 3.5: Un elemento con forma de paralelepípedo sometido a un esfuerzo normal.

Tomando en cuenta la ecuación 3.12, se tiene que  $e_6 = (\gamma_1 + \gamma_2)/2$ . Esto significa que la deformación unitaria  $e_6 = e_{xy}$  es la mitad de la distorsión angular. Los componentes  $e_4$  y  $e_5$  tienen significados geométricos similares en los planos  $YZ$  y  $XZ$ , respectivamente.

En mecánica de materiales es frecuente encontrar la definición del tensor de deformación unitaria como:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_6 & \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 & \varepsilon_2 & \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 & \varepsilon_4 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Así se tiene que  $\varepsilon_1 = e_1$ ,  $\varepsilon_2 = e_2$ ,  $\varepsilon_3 = e_3$ ,  $\varepsilon_4 = 2e_4$ ,  $\varepsilon_5 = 2e_5$  y  $\varepsilon_6 = 2e_6$ . Con lo cual la componente de deformación,  $\varepsilon_6 = (\gamma_1 + \gamma_2)$ , queda definida exactamente como la distorsión angular entre el plano  $ZX$  y el plano  $ZY$  en el material en lugar de quedar expresada como la mitad de la distorsión angular, y esto se extiende al resto de los componentes.

### 3.1.3. Ley de Hooke

Las relaciones lineales entre esfuerzo y deformación unitaria se conocen bajo el nombre genérico de Ley de Hooke [19]. Para ejemplificar esto en materiales homogéneos, se puede considerar un componente elemental con forma de paralelepípedo cuyas aristas sean paralelas a los sistemas coordenados como se muestra en la figura 3.5.

Si los lados opuestos del paralelepípedo que son perpendiculares al eje  $x$  son sujetos a la acción de un esfuerzo normal  $T_{XX}$ , la elongación relativa de un elemento está dado por:

$$e_{xx} = \frac{T_{XX}}{E} \quad (3.20)$$

donde  $E$  es una constante intrínseca de los materiales conocida como módulo de Young.  $E$  normalmente es mucho mayor que los esfuerzos permisibles, tanto así que la elongación  $\varepsilon_{ii}$  usualmente es menor que 0.01. Por lo tanto, la superposición puede ser usada para modelar las deformaciones que se presentan en la mayoría de las aplicaciones, sin provocar errores significativos. La extensión en la dirección  $x$  está siempre acompañada por contracciones en las direcciones laterales (es decir, en las direcciones  $y$  y  $z$ ):

$$e_{yy} = -\nu e_{xx}, \quad e_{zz} = -\nu e_{xx} \quad (3.21)$$

donde  $\nu$  es otra constante intrínseca de los materiales llamada razón o constante de Poisson. Si el elemento está sujeto a la acción de esfuerzos normales  $T_{XX}$ ,  $T_{YY}$  y  $T_{ZZ}$ , entonces los componentes de la deformación unitaria resultante se obtienen a partir de las ecuaciones 3.20 y 3.21 mediante el principio de superposición.

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{[T_{XX} - \nu(T_{YY} + T_{ZZ})]}{E} \\ e_{yy} &= \frac{[T_{YY} - \nu(T_{XX} + T_{ZZ})]}{E} \\ e_{zz} &= \frac{[T_{ZZ} - \nu(T_{XX} + T_{YY})]}{E} \end{aligned} \quad (3.22)$$

En las ecuaciones 3.22 las relaciones entre los componentes de la deformación unitaria normal y los componentes del esfuerzo normal están completamente definidas por las constantes intrínsecas de los materiales: módulo de Young,  $E$ , y constante (razón) de Poisson,  $\nu$ .

También para materiales homogéneos, las relaciones entre los tres componentes de la deformación unitaria cortante y los componentes del esfuerzo cortante serán:

$$e_{xy} = \frac{T_{XY}}{2G}, \quad e_{yz} = \frac{T_{YZ}}{2G}, \quad e_{zx} = \frac{T_{ZX}}{2G} \quad (3.23)$$

o

$$\varepsilon_{xy} = \frac{T_{XY}}{G}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{T_{YZ}}{G}, \quad \varepsilon_{zx} = \frac{T_{ZX}}{G} \quad (3.24)$$

donde  $G$  se conoce como módulo volumétrico. Las ecuaciones 3.23 y 3.24 indican que una componente de deformación unitaria depende únicamente de las componentes correspondientes de los esfuerzos cortantes. Finalmente, el módulo volumétrico para un material homogéneo se relaciona con el módulo de Young y la constante (razón) de Poisson de dicho material de la siguiente forma:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.25)$$

### 3.1.4. Relaciones generales entre esfuerzo y deformación unitaria

Generalmente, un cristal es anisotrópico en cuanto a sus propiedades mecánicas. Por lo tanto, las relaciones generales entre el tensor de esfuerzo y el tensor de deformación ([19] y [20]) se describen mediante la ecuación matricial:

$$(e) = (\Sigma)(T)$$

Un componente del tensor de deformación unitaria puede expresarse como:

$$e_{ij} = \sum_{k,l} \Sigma_{ijkl} T_{kl} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3)$$

Dado que  $(e)$  y  $(T)$  son ambos tensores de segundo grado con  $3 \times 3$  componentes y  $\Sigma$  es un tensor de grado 4 con  $9 \times 9$  componentes. El tensor  $\Sigma$  frecuentemente es llamado tensor de coeficientes de comportamiento. Dado que  $(T)$  y  $(e)$  son ambos tensores simétricos, se tienen sólo seis componentes independientes en cada uno. Simplificando la notación, se tiene:

$$e_{ij} = \sum_j \Sigma_{ij} T_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6)$$

Por lo tanto,  $\Sigma$  es una matriz de  $6 \times 6$  elementos. Dado que el silicio tiene una estructura reticular en forma de diamante,  $\Sigma$  puede reducirse aún más debido a la simetría cúbica del cristal. En un sistema de referencia cristalográfico existen sólo tres componentes independientes diferentes de cero,  $\Sigma_{11}$ ,  $\Sigma_{12}$  y  $\Sigma_{44}$ , en el tensor de coeficientes de comportamiento.

$$S = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \Sigma_{12} & \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \Sigma_{12} & \Sigma_{12} & \Sigma_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Sigma_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Sigma_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Sigma_{44} \end{pmatrix}$$

Las tres componentes diferentes de cero están relacionadas con las constantes del material de acuerdo con las siguientes ecuaciones:

$$\Sigma_{11} = \frac{1}{E}, \quad \Sigma_{12} = -\frac{\nu}{E} \quad \text{y} \quad \Sigma_{44} = \frac{1}{2G}$$

Nótese que  $G$  es un parámetro independiente cuando el material no es homogéneo. Tomando la definición regular de la deformación, se tiene:

$$(\varepsilon) = (S)(T) \tag{3.26}$$

donde  $(S)$  es una matriz de  $6 \times 6$  componentes y se le conoce como matriz de coeficientes de comportamiento. Para el silicio en su sistema de coordenadas cristalográficas, se tiene:

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{12} & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} \end{pmatrix}$$

donde  $S_{11} = \Sigma_{11}$ ,  $S_{12} = \Sigma_{12}$  y  $S_{44} = 2\Sigma_{44}$ . Algunas veces la ecuación 3.26 se expresa en su forma inversa:

$$(T) = (C)(\varepsilon)$$

donde  $(C)$  es una matriz de  $6 \times 6$  componentes llamada coeficiente de elasticidad. Para un cristal cúbico como los de silicio, en su sistema de referencia cristalográfico, existen sólo tres componentes independientes diferentes de cero, por lo que  $(C)$  queda expresada como:

$$(C) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix}$$

Las relaciones entre  $E$ ,  $G$ ,  $\nu$ , las componentes de  $(C)$ ,  $(S)$  y  $(\Sigma)$  serán:

$$\begin{aligned} \frac{1}{E} &= S_{11} = \Sigma_{11} = \frac{C_{11} + C_{12}}{(C_{11} - C_{12}) \cdot (C_{11} + 2C_{12})} \\ \nu &= -\frac{S_{12}}{S_{11}} = -\frac{\Sigma_{12}}{\Sigma_{11}} = \frac{C_{12}}{C_{11} + C_{12}} \\ \frac{1}{G} &= S_{44} = 2\Sigma_{44} = \frac{1}{C_{44}} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Con base en [21] los valores aceptados para el silicio en un sistema cristalográfico de referencia, son:  $C_{11} = 1.674 \times 10^{11}$  Pa,  $C_{12} = 0.652 \times 10^{11}$  Pa y  $C_{44} = 0.796 \times 10^{11}$  Pa. Por tanto, la matriz del coeficiente de elasticidad queda como:

$$(C) = \begin{pmatrix} 1.674 & 0.652 & 0.652 & 0 & 0 & 0 \\ 0.652 & 1.674 & 0.652 & 0 & 0 & 0 \\ 0.652 & 0.652 & 1.674 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.796 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.796 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.796 \end{pmatrix} \times 10^{11} \text{Pa}$$

Tomando las relaciones 3.27 se tienen tres componentes independientes para  $(\Sigma)$  y el tensor de coeficientes de comportamiento queda como:

$$(\Sigma) = \begin{pmatrix} 0.764 & -0.214 & -0.214 & 0 & 0 & 0 \\ -0.214 & 0.764 & -0.214 & 0 & 0 & 0 \\ -0.214 & -0.214 & 0.764 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.628 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.628 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.628 \end{pmatrix} \times 10^{-11} \text{Pa}^{-1}$$

Con lo cual, los tres parámetros mecánicos pueden calcularse:  $E = 1.31 \times 10^{11}$  Pa,  $\nu = 0.28$ , y  $G = 0.796 \times 10^{11}$  Pa. Sin embargo, en un sistema de referencia arbitrario los parámetros mecánicos son dependientes de la orientación, por lo que si se considera un sistema de referencia con el eje  $x'$  en la dirección  $[110]$ , el eje  $y'$  en la dirección  $[\bar{1}10]$  y el eje  $z'$  en la dirección  $[001]$ , el tensor de coeficientes de comportamiento será:

$$(\Sigma') = \begin{pmatrix} 0.589 & -0.039 & -0.214 & 0 & 0 & 0 \\ -0.039 & 0.589 & -0.214 & 0 & 0 & 0 \\ -0.214 & -0.214 & 0.764 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.628 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.628 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.978 \end{pmatrix} \times 10^{11} / \text{Pa} \quad (3.28)$$

El tensor de coeficientes de comportamiento en el sistema coordenado  $(x', y', z')$  puede calcularse a partir de  $\Sigma$  en el sistema de referencia cristalográfico a través de una transformación de coordenadas del tensor de rango 4.

A partir del tensor de coeficientes de comportamiento en un sistema de referencia arbitrario es fácil observar que los parámetros mecánicos son anisotrópicos. En el caso expuesto anteriormente a partir de los elementos  $\Sigma'_{11}$  y  $\Sigma'_{22}$  puede obtenerse el módulo de Young en las direcciones  $x'$  y  $y'$ :  $E_{x'x'} = E_{y'y'} = 1.7 \times 10^{11}$  y a partir de  $\Sigma'_{33}$  se tiene que el módulo de Young en la dirección  $z$  es  $E_{z'z'} = 1.31 \times 10^{11}$  Pa. Se observa también que el módulo volumétrico y la razón de Poisson son anisotrópicos. En el caso del módulo volumétrico se tiene que  $G = 0.796 \times 10^{11}$  [Pa] para  $T_{y'z'}$  y  $T_{x'z'}$ , y  $G = 0.511 \times 10^{11}$  [Pa] para  $T_{x'y'}$ . Para el esfuerzo normal  $T_{x'x'}$ , la constante de Poisson es de  $\nu = 0.066$  en la dirección  $y'$  y de  $\nu = 0.36$  en la dirección  $z'$ . En general para el desarrollo de cálculos manuales o simulaciones por computadora (fuera de las herramientas de análisis de elemento finito) se consideran los valores de las características mecánicas del silicio como:  $E = 1.7 \times 10^{11}$  [Pa],  $\nu = 0.3$  y  $G = 0.65 \times 10^{11}$  [Pa] y se considera que el material es isotrópico.

## 3.2. Esfuerzo y deformación unitaria en vigas

### 3.2.1. Esfuerzo y deformación en una viga flexionada

Considérese una viga de sección rectangular con un ancho  $b$  y grosor  $h$ , en la cual el largo  $L$  es mucho mayor que los dos parámetros previos. Se colocará un sistema de referencia en el centro geométrico de la sección transversal menor haciendo coincidir el eje de las abscisas con la dimensión  $L$  de la viga, el eje de las cotas irá hacia abajo siguiendo la dirección del grosor, como se muestra en la figura 3.6. Si ocurre una flexión en ambos extremos de la viga debida a un momento de flexión  $M$ , la cuál vista desde la perspectiva del plano  $x-z$  se aprecia como un doblez hacia arriba, es fácil apreciar que la parte concava o superior de la estructura (viga flexionada) experimentará una compresión y que la parte inferior o convexa experimentará una extensión. Existe un plano neutral entre la parte del volumen que está siendo comprimida y la parte que esta siendo estirada que no está sometido ni a compresión ni a extensión.

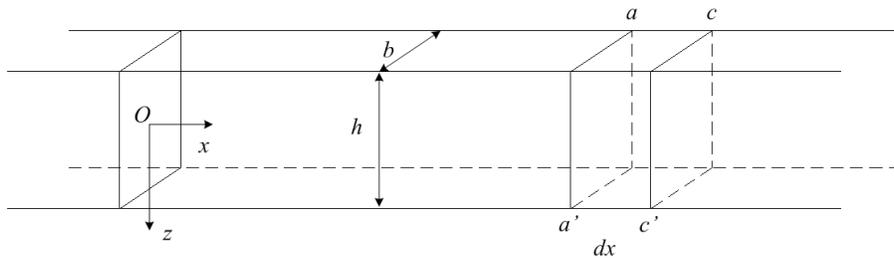


Figura 3.6: Sección elemental de una viga.

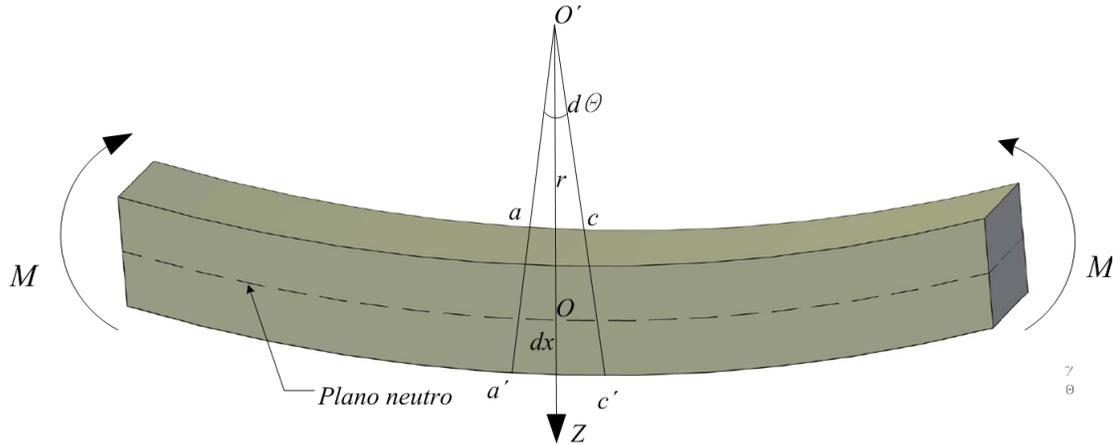


Figura 3.7: Combado de una viga bajo la acción de un momento de flexión.

Si se toma un elemento seccional de la viga, situado entre los planos  $aa'$  y  $cc'$ , cuyo largo se denomine  $dx$ , cuando se hable del desplazamiento en la dirección  $z$  que experimenta una parte de la viga bajo flexión, se podrá establecer dicho desplazamiento en términos de  $x$ , es decir:

$$\Delta z = f(x)$$

y se le conocerá como función de desplazamiento de la viga flexionada.

Si ahora se establece el centro de curvatura del trazo que modela la deformación del elemento seccional (cuyo largo es  $dx$ ) de la viga bajo flexión, se podrá obtener el radio de curvatura  $r$  como el segmento de recta entre el centro de curvatura y el punto  $O$  situado entre los planos  $aa'$  y  $cc'$  como lo muestra la figura 3.7 y sobre el plano neutro de la viga. Con base en lo anterior, se tiene que para un elemento seccional cualquiera sobre el plano neutro, la longitud de dicho elemento será  $dx = r d\theta$ .

Para un elemento sobre un plano alejado del plano neutro, el material está siendo comprimido o extendido en la dirección  $x$ . Si el material se elonga, se tiene que  $\Delta dx = (r + z) d\theta - r d\theta = z d\theta$ . La deformación unitaria para el plano alejado del plano neutro es la elongación relativa del material, esto es:

$$\varepsilon(z) = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{z d\theta}{r d\theta} = \frac{z}{r}$$

De acuerdo con la Ley de Hooke, el esfuerzo en dicha capa será:

$$T_{XX}(z) = \frac{Ez}{r} \quad (3.29)$$

El signo para la deformación unitaria o el esfuerzo es positivo para deformaciones por extensión y negativo para deformaciones por compresión. Hasta ahora sólo se ha analizado un esfuerzo normal y hacen falta dos esfuerzos normales más y tres esfuerzos cortantes, pero debido a que en las consideraciones del análisis se afirmó que la longitud de la viga es mucho mayor que sus otras dos dimensiones, entonces puede considerarse a este análisis como un análisis unidimensional.

El recíproco del radio de curvatura  $r$  para una curva  $f(x)$  es el valor absoluto de la segunda derivada de  $f(x)$ , esto es:

$$\frac{1}{r} = |f''(x)| \quad (3.30)$$

con lo cual a partir de la ecuación 3.29 se tiene que:

$$|T(x, z)| = Ez |f''(x)|$$

Para una condición de flexión como la mostrada en la figura (hacia arriba), se tiene que  $f''(x) < 0$ . Para un plano con  $z > 0$ , es decir, por debajo del plano neutral, si se toma un elemento seccional y se analiza su longitud, se verá que ésta se alarga, es decir, está siendo estirado el elemento seccional, por lo que  $T > 0$  y viceversa. Con lo cual puede establecerse la relación entre  $T$  y  $f''(x)$  como:

$$T(x, z) = -Ez f''(x) \quad (3.31)$$

### 3.2.2. Momento de flexión y momento de inercia

#### Fuerza axial de una viga

La fuerza axial de una viga es la suma de todas las fuerzas que actúan sobre la sección transversal. De la ecuación 3.31, la fuerza axial de una viga rectangular causada por una flexión pura será:

$$F = \int_{-h/2}^{h/2} T(z) b dz = -E b f''(x) \int_{-h/2}^{h/2} z dz = 0 \quad (3.32)$$

Al igualar la fuerza axial a cero es relativamente simple encontrar la posición del plano neutral, cuando la viga está sometida exclusivamente a una flexión.

#### Momento de flexión y momento de inercia

Al interior de la viga flexionada existen fuerzas internas a lo largo de sus secciones transversales, por lo que el momento de flexión se define como la suma de todos los momentos producidos por dichas fuerzas (que actúan contra el plano neutral):

$$M(x) = \int z dF = \int z T(z) dA = - \int E z^2 f''(x) b h dx \quad (3.33)$$

Para resolver la integral, se considera al origen del eje de las cotas sobre el plano neutral. Si el origen no está sobre el plano neutral y la posición del plano neutral está en  $z = a$ , debe emplearse  $(z - a)$  para sustituir a  $z$  en la ecuación 3.33. Además, si el ancho de la sección transversal no es uniforme, es decir,  $b = b(z)$ , se tiene que  $dA = b(z) dz$ , por lo que:

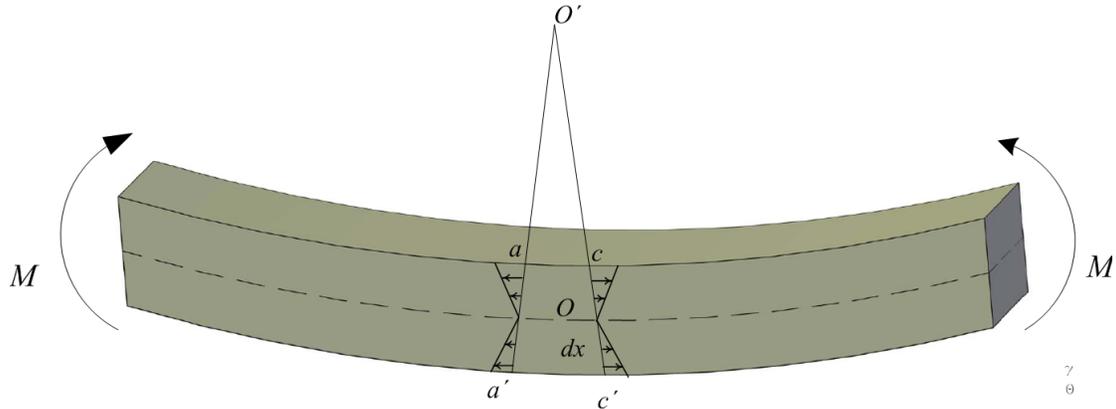


Figura 3.8: Las fuerzas provocan un momento de flexión.

$$M(x) = -Ef'''(x) \int z^2 b(z) dz \quad (3.34)$$

A esta integral se le conoce como momento de inercia de la viga y se le denota con  $I$ :

$$I = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 b(z) dz \quad (3.35)$$

Para una viga con una sección transversal rectangular de ancho  $b$  y grosor  $h$ , el momento de inercia de la viga es  $I = bh^3/12$ . Con lo cual la ecuación 3.34 puede escribirse como:

$$-EI f'''(x) = M(x) \quad (3.36)$$

Con este resultado y el de la ecuación 3.31, se tiene que:

$$T(x, z) = \frac{zM(x)}{I} \quad (3.37)$$

Las ecuaciones 3.36 y 3.37 son muy útiles para encontrar la función de desplazamiento  $f(x)$  y el esfuerzo en la viga, una vez que el momento de flexión es conocido.

De acuerdo con la definición, el momento de flexión es de signo positivo si la viga está doblada hacia arriba en ambos lados del elemento seccional, dado que  $dF$  es positivo para  $z > 0$  y negativo para  $z < 0$  como lo muestra la figura 3.8. La regla de los signos para fuerzas externas que generan momentos de flexión es: si se observa en el lado izquierdo del elemento seccional  $dx$ , el momento causado por una fuerza aplicada en el sentido horario es positivo; por otra parte, si se observa en el lado derecho del elemento seccional  $dx$ , el momento causado por una fuerza aplicada en el sentido anti-horario es positivo. En caso contrario, el momento de flexión es negativo si la viga está doblada hacia abajo en ambos lados.

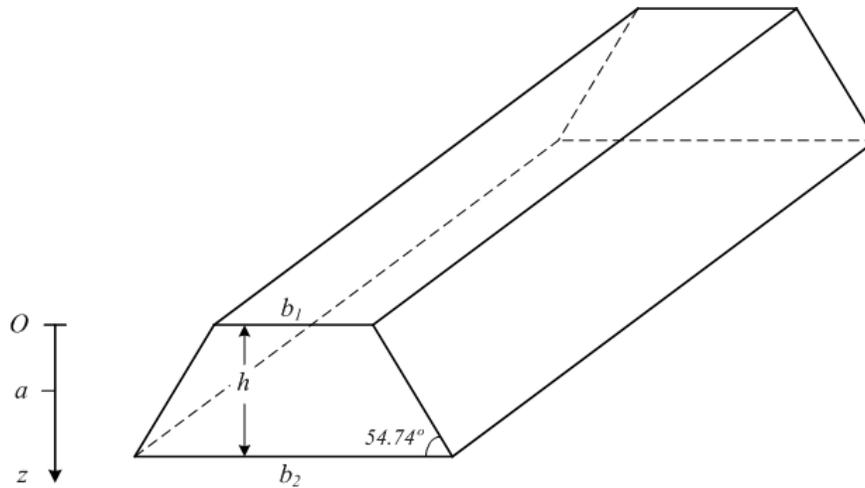


Figura 3.9: Corte seccional de una viga trapezoidal.

Frecuentemente, las vigas están hechas de silicio micromaquinado en volumen por medio de atacantes anisotrópicos, en cuyo caso la sección transversal es un trapecioide en lugar de un rectángulo. Obsérvese la figura 3.9.

El ángulo en la parte inferior es  $\alpha = \tan^{-1} \sqrt{2}$ , si se coloca el origen del eje de las cotas en la parte superior, se tiene:

$$b(z) = b_1 + z\sqrt{2}$$

y de acuerdo con la condición de fuerzas axiales nulas, necesaria para tener un fenómeno de flexión pura, se tiene que:

$$\int_0^h b(z) T(z) dz = 0$$

Si ahora se considera que la posición del plano neutral es  $z = a$ , se tiene que  $T(z) \approx (z - a)$ , por lo que la posición  $a$  puede encontrarse utilizando la condición:

$$\int_0^h b(z) (z - a) dz = 0 \quad (3.38)$$

A partir de esta ecuación se tiene que  $a$  puede calcularse como:

$$a = \frac{(b_1 + 2b_2) h}{3(b_1 + b_2)} \quad (3.39)$$

Si ahora se considera que  $b_1$  y  $b_2$  son mucho mayores de  $h$  se tiene que  $a \approx h/2$ , es decir, que puede ser aproximada como una viga rectangular. Por otra parte si  $b_1 = 0$  (una viga con sección triangular), se tiene  $a = 2h/3$ , con lo cual puede apreciarse que el resultado es un poco diferente que el obtenido para una viga rectangular.

Una vez que se encuentra la posición del plano neutral puede calcularse el momento de inercia de la viga. De acuerdo con la definición, se tiene:

$$I = \int_0^h b(z) (z - a)^2 dz \quad (3.40)$$

De las ecuaciones 3.39 y 3.40, el momento de inercia de una viga con sección transversal trapezoidal será:

$$I = \frac{h^3 (b_1^2 + 4b_1b_2 + b_2^2)}{36(b_1 + b_2)}$$

### 3.2.3. Desplazamiento de vigas bajo peso

Si las dimensiones geométricas, los parámetros del material de la viga, las fuerzas externas y las condiciones de frontera se conocen, la función de desplazamiento  $f(x)$  puede encontrarse a partir de la ecuación 3.36 y las condiciones de frontera. Una vez que  $f(x)$  es encontrada, los esfuerzos en la viga pueden ser calculados mediante el uso de la ecuación 3.31. A continuación se analizarán las configuraciones más comunes en las vigas.

#### Viga volada con carga concretada en un extremo

Considérese una viga volada con una sección transversal rectangular con la carga concentrada en un extremo como la mostrada en la figura 3.10.

El ancho, grosor y longitud de la viga son  $b$ ,  $h$ , y  $L$ , respectivamente. Sea  $F$  la fuerza provocada por una masa  $m$  colocada en el extremo libre de la viga y la aceleración gravitacional, es decir,  $F = mg$ . Y también se asume que la masa  $m$ , es mucho mayor que la masa de la viga, de modo tal que el peso de la viga puede ser despreciado. Para balancear la fuerza  $F$ , debe existir una fuerza de soporte,  $F_0$ , actuando sobre la viga, en el extremo anclado. La condición de balance de fuerzas en la dirección  $z$  lleva a establecer que  $F_0 = F$ . Además, debe existir un momento de flexión restrictivo,  $M_0$ , en el extremo anclado de la viga que balancee el momento de flexión provocado por la fuerza  $F$ .

El momento en el extremo anclado que es producido por el peso de la carga es igual a  $FL$ , y el sentido en el que se presenta es horario. Para balancear los momentos de flexión, el momento de flexión restrictivo,  $M_0$ , debe ser igual a  $FL$ , en sentido antihorario.

A partir de una posición  $x$  cualquiera, como se muestra en la figura, el momento de flexión a la izquierda queda expresado por  $(-M_0 + F_0x)$  y el momento de flexión a la derecha es igual a  $-F(L - x)$ . Considerando que se encuentra en equilibrio estático, se tiene que los momentos a izquierda y derecha de la posición  $x$  son iguales, es decir,  $M(x) = -F(L - x)$ . Por lo tanto, la ecuación diferencial para calcular  $f(x)$  será:

$$-EI f''(x) = -F(L - x) \quad (3.41)$$

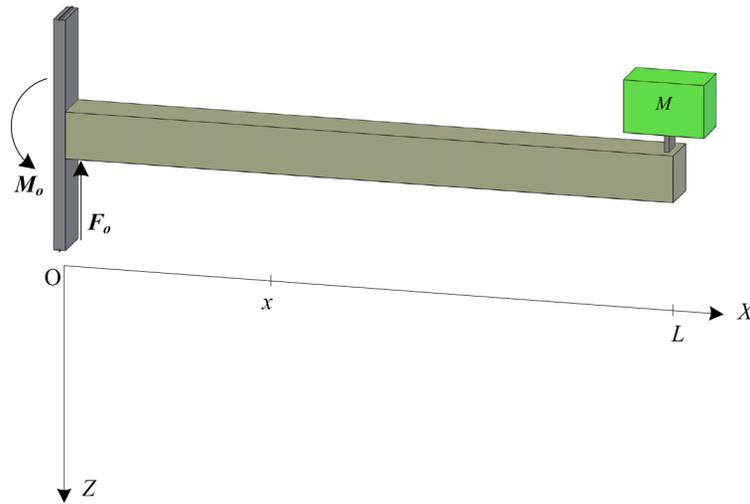


Figura 3.10: Viga volada con carga concentrada en un extremo.

Si además se considera que  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 0$  y  $f''(L) = 0$ , la solución a la ecuación 3.41 [22] será:

$$f(x) = \frac{F(3L-x)x^2}{6EI} = \frac{2mg(3L-x)x^2}{Ebh^3}$$

Por lo que el desplazamiento máximo en el extremo libre de la viga se calcula a partir de:

$$f_{\text{máx}} = f(L) = \frac{FL^3}{3EI} = \frac{4mgL^3}{Ebh^3}$$

Si se considera a la viga como un resorte, su constante se obtiene mediante la expresión:

$$k = \frac{Ebh^3}{4L^3} \quad (3.42)$$

A partir de la ecuación 3.31, el esfuerzo en la superficie superior de la viga, es decir, en  $z = -h/2$  será:

$$T(x) = -E \left( -\frac{h}{2} \right) f''(x) = \frac{Fh(L-x)}{2I} = \frac{6mg(L-x)}{bh^2} \quad (3.43)$$

El esfuerzo tiene su máximo cuando  $x = 0$  y decrece linealmente cuando  $x$  tiende a  $L$ . Por lo tanto, de la ecuación 3.43, el esfuerzo máximo en  $x = 0$  [22], queda expresado como :

$$T_{\text{máx}} = \frac{FhL}{2I} = \frac{6mgL}{bh^2}$$

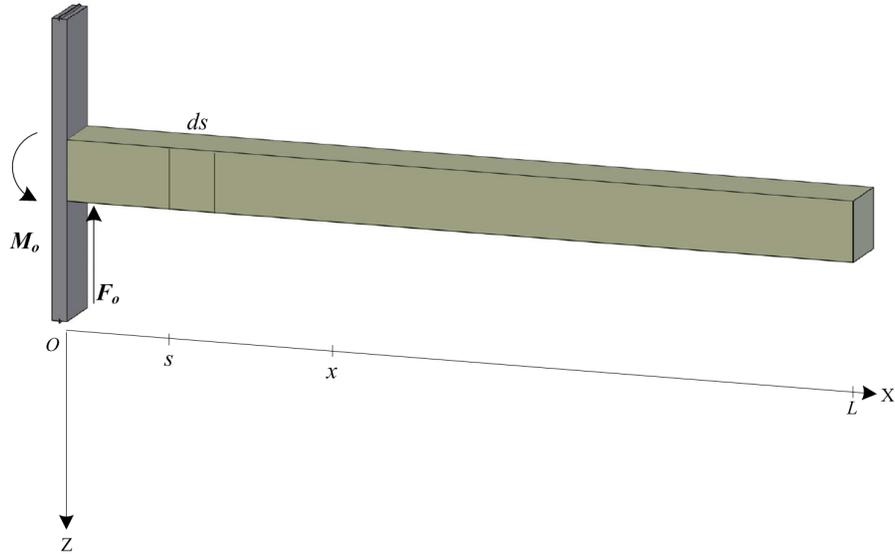


Figura 3.11: Viga volada con carga distribuida.

### Flexión de una viga volada bajo la acción de su propio peso

Si no existe una carga concentrada en el extremo libre de una viga volada y la carga que experimenta la viga es sólo su propio peso, entonces la carga se encuentra distribuida de manera uniforme como lo muestra la figura 3.11.

La ecuación diferencial que modela el momento de flexión se expresa como:

$$-EI f''(x) = m_b g x - M_0 - \int_0^x \frac{m_b g}{L} (x - s) ds \quad (3.44)$$

donde  $m_b$  es la masa total de la viga, esto es,  $m_b = \rho b h L$ ,  $g$  es la aceleración debida a la gravedad y el último término a la derecha es un movimiento de flexión provocado por el peso de la viga distribuido entre 0 y  $x$ . Después de resolver la integral, se tiene que la ecuación queda como:

$$-EI f''(x) = m_b g x - M_0 - \frac{m_b g x^2}{2L} \quad (3.45)$$

Si se considera que las condiciones límite para la viga son  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 0$  y  $f''(L) = 0$ , y se resuelve la ecuación 3.45, se tiene que el momento restrictivo será:

$$M_0 = \frac{m_b g L}{2} = \frac{\rho b h g L^2}{2}$$

y el desplazamiento de la viga [22] queda como:

$$f(x) = \frac{m_b g x^2 (x^2 - 4Lx + 6L^2)}{24ELI} = \frac{m_b g x^2 (x^2 - 4Lx + 6L^2)}{2Ebh^3} \quad (3.46)$$

Por lo tanto, el desplazamiento máximo al final de la viga se obtiene a partir de:

$$f_{m\acute{a}x} = \frac{m_b g L^3}{8EI} = \frac{3m_b g L^3}{2Ebh^3}$$

o

$$f_{m\acute{a}x} = \frac{3\rho g L^4}{2Eh^2} \quad (3.47)$$

Así, el esfuerzo en la superficie superior de la viga se obtiene mediante:

$$T(x) = -E \left( -\frac{h}{2} \right) f''(x) = \frac{m_b g (L-x)^2}{4LI} = \frac{3m_b g (L-x)^2}{bh^2 L}$$

y el esfuerzo máximo en  $x = 0$  [22], nos lleva a que:

$$T_{m\acute{a}x} = \frac{m_b g h L}{4I} = \frac{3m_b g L}{bh^2} = \frac{3\rho g L^2}{h} \quad (3.48)$$

### Vigas doblemente ancladas

Para una viga con ambos extremos anclados (normalmente llamada puente) como lo muestra la figura , si la carga bajo la que se encuentra es su propio peso, la ecuación para el desplazamiento es similar a lo expresado por las ecuaciones 3.44 y 3.45, pero dado que la viga está sujeta en ambos extremos, las fuerzas de reacción son  $F_0 = m_b g/2$  para ambos extremos. Por lo tanto, la ecuación que define la función de desplazamiento será:

$$-EI f''(x) = \frac{m_b g x}{2} - M_0 - \frac{m_b g x^2}{2L} \quad (3.49)$$

Las condiciones límite para la viga son  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 0$ ,  $f(L) = 0$  y  $f'(L) = 0$ , con lo cual a partir de la ecuación 3.49, puede calcularse  $M_0$  como:

$$M_0 = \frac{m_b g L}{12} = \frac{\rho g b h L^2}{12}$$

y la función de desplazamiento de la viga:

$$f(x) = \frac{m_b g}{24ELI} x^2 (L-x)^2 = \frac{\rho g}{2Eh^2} x^2 (L-x)^2$$

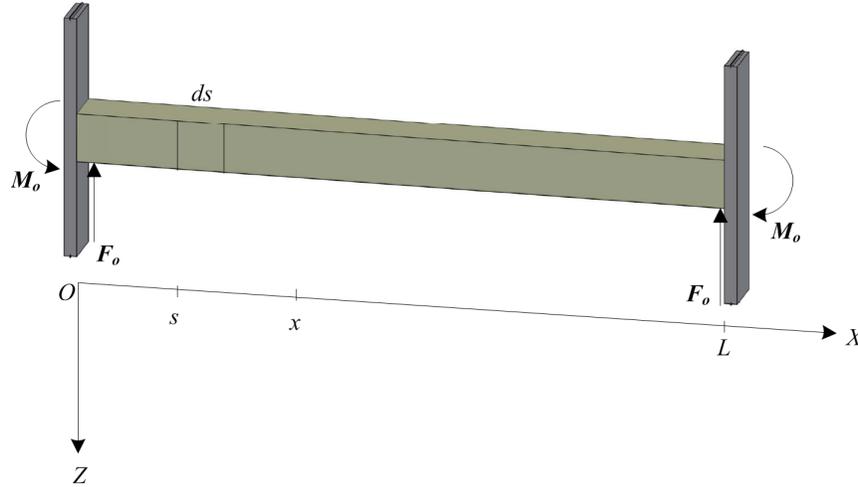


Figura 3.12: Viga doblemente anclada (puente) y sus características.

El desplazamiento máximo de la viga, el cual se presenta en  $x = L/2$ , será:

$$f_{máx} = \frac{\rho g L^4}{32 E h^2} \quad (3.50)$$

El esfuerzo en la superficie superior de la viga, en  $z = -h/2$ , se calcula a partir de:

$$T(x) = -E \left( -\frac{h}{2} \right) f''(x) = \frac{m_b g h}{24 I L} (L^2 - 6xL + 6x^2)$$

El esfuerzo máximo, en  $x = 0$  y  $x = L$ , se calcula a partir de:

$$T_{máx} = \frac{m_b g h L^2}{24 I L} = \frac{\rho g L^2}{2h} \quad (3.51)$$

Si se comparan las ecuaciones 3.51 y 3.48 es evidente que el esfuerzo máximo en una viga doblemente anclada es menor que el que se presenta en una viga volada, por un factor de 6, bajo las mismas condiciones. También si se comparan las ecuaciones 3.50 y 3.47 es posible apreciar que el desplazamiento máximo de una viga doblemente anclada es mucho menor que el de una viga volada por un factor de 48.

### Vigas doblemente ancladas y con una masa central

La estructura de vigas doblemente ancladas soportando una masa central es frecuentemente utilizada para la creación de sensores inerciales (tal es el caso de los acelerómetros y giroscopios), resonadores y actuadores mecánicos (como en el caso de los interruptores). En general la masa central es mucho más ancha y gruesa que las vigas que la sostienen, de modo tal que la flexión que se presenta en la estructura que forma la masa central puede ser despreciada, veáanse las figuras 3.13 y 3.14. Si la carga de la estructura es su peso propio actuando en la dirección  $z$ , el desplazamiento de la masa es parecido al de un pistón debido a la simetría de la estructura en las direcciones  $x$  y  $y$ . Por lo tanto, para el análisis se puede considerar sólo la mitad de la estructura.

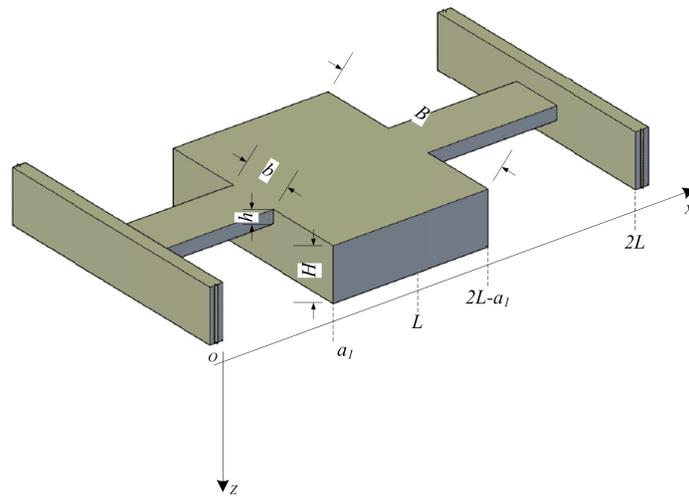


Figura 3.13: El dibujo esquemático de una estructura formada por dos vigas voladas sosteniendo una masa.

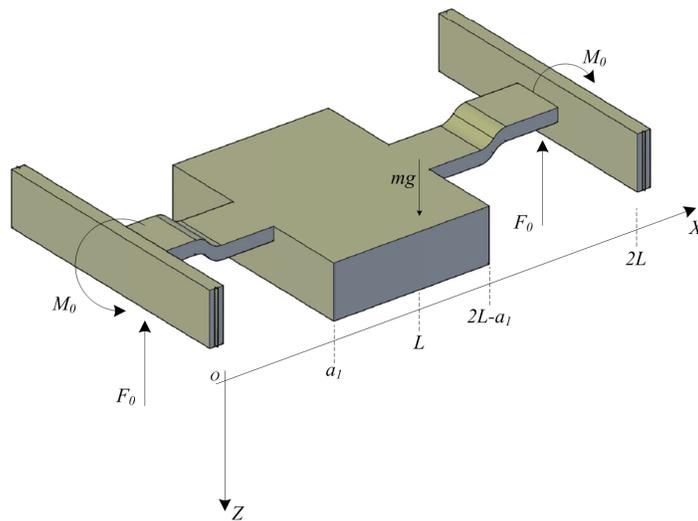


Figura 3.14: Flexión del par de vigas voladas que sostienen una masa por efecto del peso.

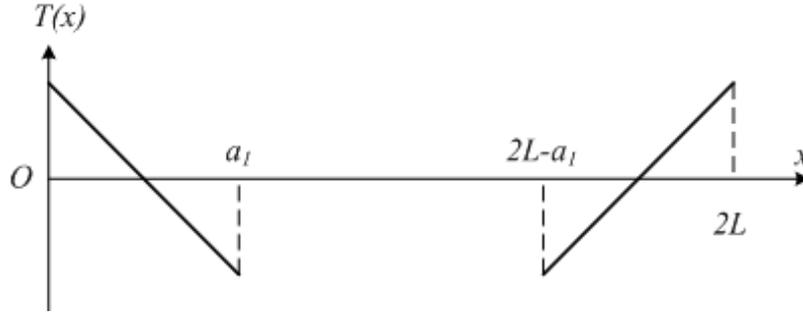


Figura 3.15: Distribución del esfuerzo sobre la superficie de la viga.

Para la viga izquierda, la expresión para el desplazamiento es similar a la ecuación 3.49:

$$-EI f''(x) = \frac{mg}{2}x - M_0 - \frac{\rho b h g x^2}{2}$$

donde el momento de inercia  $I$  es igual a  $bh^3/12$ ,  $M_0$  es el momento de flexión restrictivo que debe calcularse y  $m$  es la masa total de la estructura (vigas y masa reunidas) con valor  $m = 2(L - a_1)BH\rho + 2bha_1\rho$ .

Bajo la consideración de que la masa de las vigas es mucho menor que la masa del cuerpo central, la ecuación puede simplificarse para quedar como:

$$-EI f''(x) = \frac{mg}{2}x - M_0 \quad (3.52)$$

Si las condiciones límite para la ecuación 3.52 son  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 0$ ,  $f'(a_1) = 0$  y  $f''(\frac{1}{2}a_1) = 0$ , entonces:

$$M_0 = \frac{1}{4}mga_1$$

Por lo tanto, el esfuerzo máximo en la superficie superior de la viga será:

$$T(x) = \frac{3mg}{bh^2} \left( \frac{1}{2}a_1 - x \right)$$

La distribución del esfuerzo se muestra en la gráfica de la figura 3.15.

Puede observarse que los esfuerzos sobre la superficie de la viga varían linealmente desde un máximo positivo en un extremo a un máximo negativo en el otro. Los valores para ambos máximos (tanto el positivo como el negativo) son el mismo:

$$T_{m\acute{a}x} = \frac{3a_1}{2bh^2}mg$$

El desplazamiento de la viga izquierda queda expresado por:

$$f(x) = \frac{mg}{Ebh^3}x^2 \left( \frac{3}{2}a_1 - x \right)$$

en cuanto al desplazamiento de la masa central se tiene:

$$f(a_1) = \frac{mg}{2Ebh^3}a_1^3$$

y si las vigas son consideradas como un resorte, la constante del resorte es:

$$k = \frac{2Ebh^3}{a_1^3} \quad (3.53)$$

### 3.2.4. Flexión por deformación residual de vigas compuestas

En diversos tipos de aplicaciones prácticas es frecuente que las vigas se recubran con capas de materiales tales como dióxido de silicio, nitruro de silicio, material fotoresistivo, aluminio y otros metales que proporcionen aislamiento, pasivación, activación o sirven para algunos otros propósitos de diseño. Por ejemplo, la estructura más ampliamente utilizada es la viga de silicio con una película de dióxido de silicio en la parte superior. Ya que la película de dióxido de silicio crece o es depositada a altas temperaturas y el coeficiente de expansión térmica de la película es diferente al de la viga, esfuerzos y deformaciones residuales surgen cuando la viga compuesta ( $\text{SiO}_2/\text{Si}$ ) se enfría hasta llegar a una temperatura ambiente. Este esfuerzo/deformación es frecuentemente llamado esfuerzo/deformación térmica o residual.

La deformación residual provocará la flexión o curvatura de la viga y la operación normal de la viga será impredecible. Por lo que, el efecto de flexión debido a la deformación residual puede utilizarse para la creación de dispositivos dentro de los Sistemas Microelectromecánicos.

Las expresiones generales para ubicar el plano neutral y la curvatura de una viga de dos capas se obtuvieron del trabajo de Townsend, Barnett y Brunner [23]. Con estas expresiones el esfuerzo/deformación térmico presente en una viga puede calcularse. Como parte de las aplicaciones de estas ecuaciones, se obtiene también la ecuación de Stoney, que relaciona el esfuerzo/deformación en una película delgada con la curvatura de la viga. Al final de esta sección se obtienen las expresiones para vigas de múltiples capas.

#### Viga compuesta de dos capas

Considerando la flexión de la viga compuesta ( $\text{SiO}_2/\text{Si}$ ) como se muestra en la figura 3.16, se define a  $t_{ox}$  como el grosor de la capa de dióxido de silicio y a  $t_{si}$  como el grosor del silicio, y el grosor de la viga se supone mucho más pequeño que el ancho y largo de la viga. Supóngase que el dióxido de silicio crece a una temperatura de  $T'$  y la longitud de la viga compuesta es  $L'$  y ninguna deformación interna aparece en la viga a esta temperatura.

Si las capas de dióxido de silicio y silicio son unidas y enfriadas hasta una temperatura ambiente  $T$ , la longitud de la película de dióxido será:

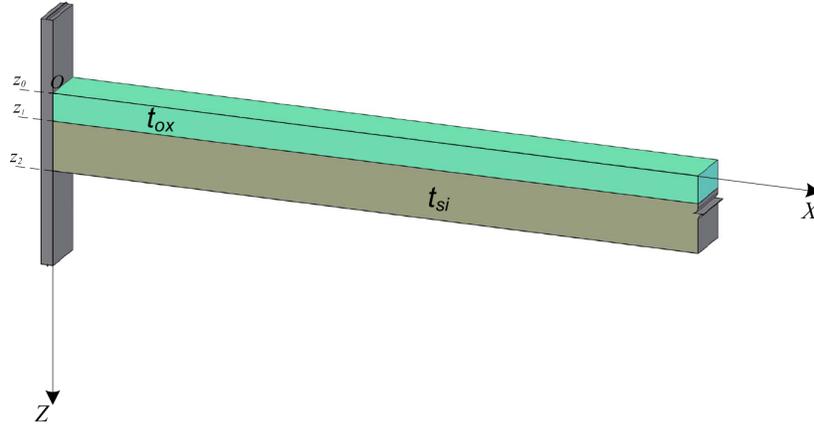


Figura 3.16: Viga compuesta por dos capas: óxido de silicio ( $\text{SiO}_2$ ) y silicio (Si).

$$L_{ox} = L' (1 - \alpha_{ox} \Delta T) \quad (3.54)$$

donde  $\Delta T = T' - T$  y  $\alpha_{ox}$  es el coeficiente de expansión térmica del dióxido de silicio. Por otra parte, la longitud de la viga de silicio se obtiene a partir de:

$$L_{si} = L' (1 - \alpha_{si} \Delta T) \quad (3.55)$$

donde  $\alpha_{si}$  es el coeficiente de expansión térmica del silicio. Los valores más comúnmente usados para los coeficientes de expansión térmica son:  $\alpha_{ox} = 0.5 \times 10^{-6} [K^{-1}]$  y  $\alpha_{si} = 2.6 \times 10^{-6} [K^{-1}]$ .

Como  $\alpha_{ox}$  es mucho menor que  $\alpha_{si}$ , el dióxido de silicio está comprimido y el silicio está estirado en la viga compuesta a temperatura  $T$ . Por lo tanto, la longitud resultante de la viga compuesta,  $L$ , estará entre  $L_{si}$  y  $L_{ox}$ , es decir  $L_{ox} > L > L_{si}$ . Y dado que  $\alpha_{ox} \Delta T$  y  $\alpha_{si} \Delta T$  son mucho más pequeños que la unidad, el esfuerzo en la película de dióxido será:

$$\varepsilon_{ox} = \frac{L - L_{ox}}{L} \doteq \ln \frac{L}{L_{ox}}$$

Y la deformación en la capa de silicio será:

$$\varepsilon_{si} = \frac{L - L_{si}}{L} \doteq \ln \frac{L}{L_{si}}$$

Dado que un extremo de la viga no está anclado, la fuerza total en dicho extremo es cero. Por lo tanto, se tiene que:

$$E_{si} t_{si} \ln \frac{L}{L_{si}} + E_{ox} t_{ox} \ln \frac{L}{L_{ox}} = 0 \quad (3.56)$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.54 y 3.55 en 3.56, se tiene que la longitud de la viga a temperatura  $T$  será:

$$L = L' (1 - \alpha_{eff} \Delta T) \quad (3.57)$$

donde  $\alpha_{eff}$  es el coeficiente efectivo de expansión térmica de la viga compuesta:

$$\alpha_{eff} = \frac{E_{si} t_{si} \alpha_{si} + E_{ox} t_{ox} \alpha_{ox}}{E_{si} t_{si} + E_{ox} t_{ox}}$$

Aunque la fuerza total actuando en el extremo de la viga compuesta es nula, esta condición de deformación no necesariamente satisface la condición de equilibrio de momentos. En general, el resultado será que la viga compuesta se flexione. La deformación provocada por la flexión se suma para satisfacer la condición de equilibrio de momentos. Si la función de desplazamiento de la viga es  $f(x)$ , la deformación provocada por la flexión será  $-(z - z_0) f''(x)$ , donde,  $z_0$  es la posición del plano neutral y  $f''(x)$  es la curvatura de la viga. Generalmente, el efecto de flexión es más importante que el efecto de cambio en la longitud de la viga.

Cuando la deformación provocada por la flexión se considera, el esfuerzo en el dióxido de silicio se obtiene a partir de:

$$T_{ox} = E_{ox} \ln \frac{L}{L_{ox}} - E_{ox} (z - z_0) f''(x)$$

y el esfuerzo en el silicio se calcula con la siguiente expresión:

$$T_{si} = E_{si} \ln \frac{L}{L_{si}} - E_{si} (z - z_0) f''(x)$$

Además, se tiene que la posición del plano neutral se calcula a partir de:

$$z_0 = \frac{E_{ox} t_{ox} (0 + z_1) + E_{si} t_{si} (z_1 + z_2)}{2(E_{ox} t_{ox} + E_{si} t_{si})}$$

o mediante:

$$z_0 = \frac{E_{ox} t_{ox} (0 + t_{ox}) + E_{si} t_{si} (2t_{ox} + t_{si})}{2(E_{ox} t_{ox} + E_{si} t_{si})} \quad (3.58)$$

La curvatura de una viga compuesta, puede encontrarse a través del uso de la condición de balance de momentos de fuerza contra el plano neutral:

$$\int_0^{z_1} E_{ox} \ln \frac{L}{L_{ox}} (z - z_0) dz - E_{ox} f''(x) \int_0^{z_1} (z - z_0)^2 dz + \int_{z_1}^{z_2} E_{si} \ln \frac{L}{L_{si}} (z - z_0) dz - E_{si} f''(x) \int_{z_1}^{z_2} (z - z_0)^2 dz = 0$$

La expresión para la curvatura de la viga compuesta, puede obtenerse a partir de esta ecuación y queda como:

$$f''(x) = \frac{\int_0^{z_1} E_{ox} \ln \frac{L}{L_{ox}} (z - z_0) dz + \int_{z_1}^{z_2} E_{si} \ln \frac{L}{L_{si}} (z - z_0) dz}{E_{ox} \int_0^{z_1} (z - z_0)^2 dz + E_{si} \int_{z_1}^{z_2} (z - z_0)^2 dz}$$

De las ecuaciones 3.54, 3.55 y 3.57, se tiene que  $\ln(L/L_{ox}) \doteq (\alpha_{ox} - \alpha_{eff}) \Delta T = \varepsilon_{ox}$  y  $\ln(L/L_{si}) \doteq (\alpha_{si} - \alpha_{eff}) \Delta T = \varepsilon_{si}$ . Por lo tanto, la curvatura de la viga queda como:

$$f''(x) = 3 \frac{E_{ox} (\alpha_{ox} - \alpha_{eff}) t_{ox} \left( \frac{0+z_1}{2} - z_0 \right) + E_{si} (\alpha_{si} - \alpha_{eff}) t_{si} \left( \frac{z_1+z_2}{2} - z_0 \right)}{E_{ox} \left( (z_1 - z_0)^3 - (0 - z_0)^3 \right) + E_{si} \left( (z_2 - z_0)^3 - (z_1 - z_0)^3 \right)} \quad (3.59)$$

Con las ecuaciones 3.58 para  $z_0$  y la ecuación 3.59 para  $f''(x)$ , pueden obtenerse el esfuerzo y la deformación para la viga compuesta.

Considérese ahora una situación, que es muy común encontrar, en la que la película de dióxido de silicio sea mucho más delgada que el sustrato de silicio, es decir  $t_{si} \gg t_{ox}$ . En cuyo caso, la posición del plano neutral puede aproximarse mediante,

$$z_0 = \frac{1}{2} t_{si}$$

Si se sustituye este valor en la ecuación 3.59, se tiene que:

$$f''(x) = 6 \frac{E_{ox} \varepsilon_{ox} t_{ox}}{E_{si} t_{si}^2}$$

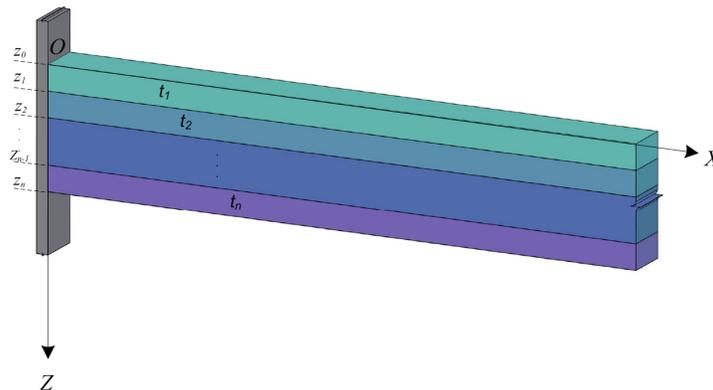
Por lo tanto, la deformación residual en el óxido se expresa como:

$$\varepsilon_{ox} = \frac{E_{si} t_{si}^2}{6 E_{ox} t_{ox}} f''(x)$$

Y el esfuerzo residual en el óxido se obtiene a partir de:

$$T_{ox} = \frac{E_{si} t_{si}^2}{6 t_{ox}} f''(x)$$

Expresión que es conocida como la ecuación de Stoney, la cual es ampliamente empleada para relacionar la flexión de una viga con el esfuerzo y deformación de una delgada capa de material sobre ella.

Figura 3.17: Viga compuesta por  $n$  capas.

### Viga compuesta por múltiples capas

Al igual que en el caso de una viga compuesta por dos capas, en una viga compuesta por  $n$  capas (véase la figura 3.17) es posible también conocer la longitud resultante, la posición del plano neutral y la curvatura.

La longitud de la viga a una temperatura  $T$  se obtiene a partir de:

$$L = L' (1 - \alpha_{eff} \Delta T)$$

donde:

$$\alpha_{eff} = \frac{E_1 t_1 \alpha_1 + E_2 t_2 \alpha_2 + \dots + E_n t_n \alpha_n}{E_1 t_1 + E_2 t_2 + \dots + E_n t_n}$$

Y en esta última expresión se tiene que  $E_i$ ,  $t_i$  y  $\alpha_i$  son el módulo de Young, el grosor de la viga y el coeficiente de expansión térmica de la capa  $i$ -ésima, respectivamente.

La posición de plano neutral se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$z_0 = \frac{E_1 t_1 (0 + z_1) + E_2 t_2 (z_1 + z_2) + \dots + E_n t_n (z_{n-1} + z_n)}{2 (E_1 t_1 + E_2 t_2 + \dots + E_n t_n)}$$

donde  $z_i = \sum_{j=1}^i t_j$  ( $i = 1, 2, 3 \dots n$ ), es la posición de la parte baja de la  $i$ -ésima capa. La curvatura de la viga será:

$$f''' = \frac{N}{D}$$

donde

$$N = \int_0^{z_1} E_1 \ln\left(\frac{L}{L_1}\right) (z - z_0) dz + \int_{z_1}^{z_2} E_2 \ln\left(\frac{L}{L_2}\right) (z - z_0) dz + \dots + \int_{z_{n-1}}^{z_n} E_n \ln\left(\frac{L}{L_n}\right) (z - z_0) dz$$

$$D = E_1 \int_0^{z_1} (z - z_0)^2 dz + E_2 \int_{z_1}^{z_2} (z - z_0)^2 dz + \dots + E_n \int_{z_{n-1}}^{z_n} (z - z_0)^2 dz$$

Con una transformación similar a la hecha para la viga de SiO<sub>2</sub>/Si, se tiene que:

$$N = \Delta T \left\{ \begin{array}{l} E_1 (\alpha_1 - \alpha_{eff}) t_1 \left[ \frac{1}{2} (0 + z_1) - z_0 \right] + E_2 (\alpha_2 - \alpha_{eff}) t_2 \left[ \frac{1}{2} (z_1 + z_2) - z_0 \right] + \dots \\ + E_n (\alpha_n - \alpha_{eff}) t_n \left[ \frac{1}{2} (z_n + z_{n-1}) - z_0 \right] \end{array} \right\}$$

$$D = \frac{1}{3} \left\{ \begin{array}{l} [(z_1 - z_0)^3 - (0 - z_0)^3] + [(z_2 - z_0)^3 - (z_1 - z_0)^3] + \dots \\ + [(z_n - z_0)^3 - (z_{n-1} - z_0)^3] \end{array} \right\}$$

En condiciones prácticas, las diferentes capas serán depositadas o crecidas a diferentes temperaturas, lo cual provocará la presencia de deformaciones intrínsecas en las diferentes capas y complica mucho de forma considerable el análisis.

### 3.2.5. Desplazamiento angular de vigas sujetas a torsión

Cuando un torque,  $T$ , es aplicado en el extremo libre de la viga volada, la viga es retorcida (desplazamiento angular) hasta que su torque de restauración balancea el torque aplicado. Dentro de los límites elásticos, la relación entre el ángulo de torsión,  $\phi$ , y el torque será:

$$T = k_\phi \phi \quad (3.60)$$

donde  $k_\phi$  es conocida como la constante de torsión de la viga. La constante de torsión es igual al torque de restauración por unidad de desplazamiento angular. La viga diseñada para ser sometida a un movimiento torsional es frecuentemente llamada barra o viga de torsión.

#### Viga de torsión rectangular

Para una viga sujeta a torsión con sección transversal rectangular, la expresión teórica para el cálculo de la constante de torsión es un tanto complicada de obtener, pero si se recurre al trabajo de J. P. Timoshenko y J. N. Goodier [24] se tiene que  $k_\phi$  puede calcularse mediante la expresión:

$$k_\phi = \frac{1}{3L} G a^3 b \left( 1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{a}{b} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh \frac{n\pi b}{2a} \right) \equiv \frac{k_1 G a^3 b}{L} \quad (3.61)$$

donde  $a$  y  $b$  son la longitud de los lados corto y largo de la sección transversal rectangular, es decir,  $b > a$ , y el coeficiente  $k_1$  es:

$$k_1 = \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{a}{b} \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh \frac{n\pi b}{2a} \right) \quad (3.62)$$

Para  $a = b$  se tiene que  $k_1 = 0,141$ . Diversos valores para  $k_1$ , a partir de la relación entre  $a$  y  $b$  se muestran en la siguiente tabla (factores para relaciones de torsión):

$b/a$	1,0	1,2	1,5	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0	10	$\infty$
$k$	0,675	0,759	0,848	0,93	0,968	0,985	0,997	0,999	1	1
$k_1$	0,141	0,166	0,196	0,229	0,249	0,263	0,281	0,291	0,312	0,333
$k_2$	0,208	0,219	0,231	0,246	0,258	0,267	0,282	0,291	0,312	0,333

En el caso de una sección rectangular muy delgada, es decir,  $b \gg a$ , se tiene que:

$$k_1 = \frac{1}{3} \left( 1 - 0,63 \frac{a}{b} \right)$$

El máximo esfuerzo de deformación sobre la barra se presenta en los puntos de la parte media del lado más largo del rectángulo como se muestra en la figura 3.18. El esfuerzo máximo de deformación se calcula a partir de:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{G_{\phi} a}{L} - \frac{8G_{\phi} a}{\pi^2 L} \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cosh(n\pi b/2a)} \equiv k \frac{G_{\phi} a}{L} \quad (3.64)$$

donde:

$$k = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cosh(n\pi b/2a)}$$

Para el caso de una sección transversal rectangular muy delgada ( $b \gg a$ ) la suma de la serie infinita puede ser despreciada, para dejar  $k = 1$ . En el caso de una sección transversal cuadrada ( $b = a$ ) se tiene que  $k = 0,675$ .

Si se define  $k_2 = k_1/k$  y se toman las ecuaciones 3.60, 3.61 y 3.64 se tiene que el esfuerzo máximo de deformación será:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{T}{k_2 a^2 b}$$

Diversos valores para las constantes  $k$  y  $k_2$  pueden obtenerse de 3.63. La aplicación del movimiento de torsión es muy útil en los sensores y actuadores microelectromecánicos, la estructura más común es la de una masa suspendida mediante un par de vigas de torsión como la mostrada en la figura 3.19. El torque actúa sobre las vigas cuando la masa es sujeta a una aceleración en su dirección normal (considerando a la masa como una placa) y las vigas de torsión son dobladas repetidamente. Dado que el ángulo de torsión es proporcional al torque y, a su vez, éste es proporcional a la aceleración, puede tomarse el ángulo de torque

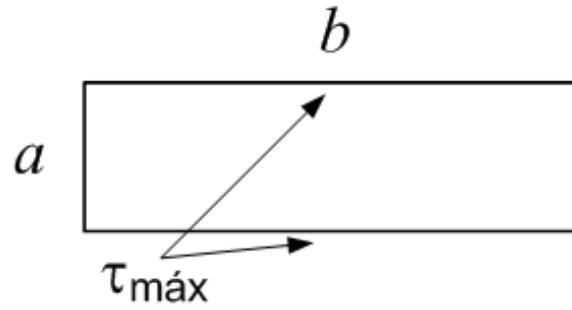


Figura 3.18: Sección transversal de la barra de torsión rectangular.

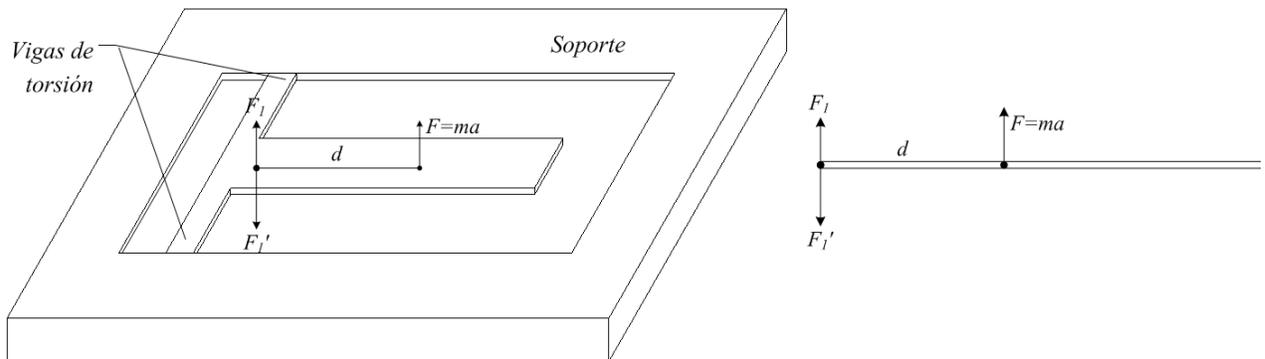


Figura 3.19: Microestructura con barras de torsión. A la izquierda una perspectiva del dispositivo. A la derecha una vista seccional.

como una medida de la aceleración. Muchos acelerómetros micromaquinados disponibles de forma comercial han sido fabricados empleando este principio.

Para una extructura de vigas de torsión como la mostrada en la figura 3.19, si la masa se denomina  $m$  y el centro de masa está fuera del eje formado por las vigas de torsión una distancia  $d$ , la fuerza inercial  $F = ma$  actuando sobre el centro de masa puede descomponerse en dos componentes: una fuerza  $F_1 = ma$  actuando en el centro del eje que de las vigas de torsión y un torque  $T_1 = mad$  formado por las fuerzas  $F_1$  y  $F$ . Por lo tanto, la masa sufrirá un desplazamiento en la dirección normal (pequeña) debido a la flexión de las vigas provocada por  $F_1$  sumada al movimiento de torsión generado por  $T_1$ . En un caso más general, cuando la sección transversal de la viga no es rectangular, de modo tal que el eje de las vigas de torsión no se puede ubicar fácilmente, la fuerza aplicada puede descomponerse tomando como referencia un eje auxiliar llamado centro cortante de las vigas de torsión. El centro cortante es un punto en la sección transversal de la viga dónde puede aplicarse una fuerza perpendicular a la viga sin provocar torsión sobre ésta. Para una viga rectangular, el centro cortante coincide con el centro geométrico del corte transversal.

### 3.3. Método de la energía para el análisis de la frecuencia de oscilación

#### 3.3.1. Sistema masa-resorte

##### Frecuencia de oscilación de un sistema masa-resorte

Una estructura mecánica vibratoria frecuentemente es simplificada como un modelo masa-resorte. La figura 3.20 ilustra una configuración típica para el modelo masa-resorte.

El origen del eje  $x$  está en el centro geométrico de la cara del bloque en su posición de equilibrio. Un desplazamiento de la masa desde su posición de equilibrio,  $x$ , provoca que una fuerza de recuperación actúe sobre la masa como acción del resorte,  $F = -kx$ , donde  $k$  es la constante de elasticidad del resorte. El signo negativo implica que la fuerza apunta en sentido opuesto al sentido de crecimiento del eje  $x$ . Si no existe otra fuerza actuando sobre la masa, la ecuación diferencial para el movimiento de la masa será:

$$m\ddot{x} = -kx$$

Si se define  $\omega^2 = k/m$ , se tiene que:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{3.65}$$

La solución general a la ecuación 3.65 es una oscilación sinusoidal de la masa:

$$x = A \text{sen}(\omega t + \alpha) \tag{3.66}$$

donde  $\omega$  es la frecuencia natural (radial) de la oscilación,  $A$  es la amplitud de la oscilación y  $\alpha$  un ángulo de fase. La frecuencia natural (radial)  $\omega$  está determinada únicamente por los parámetros  $k$  y  $m$ .

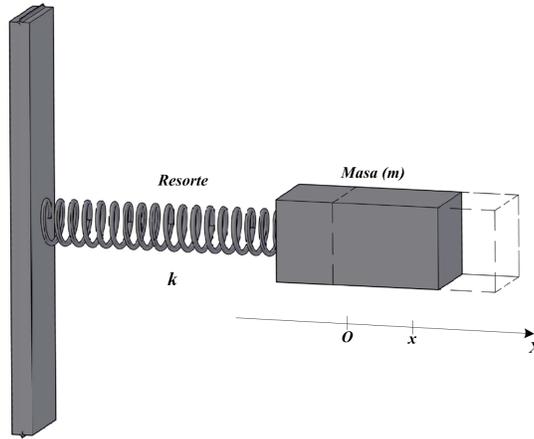


Figura 3.20: Modelo masa-resorte.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.67)$$

La amplitud  $A$  y el ángulo de fase pueden obtenerse a partir de las condiciones iniciales del sistema. Por ejemplo, para  $x = x_0$  y  $\dot{x} = v_0$  en  $t = 0$ , se tiene que:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

y

$$\alpha = \arctan\left(\frac{x_0\omega}{v_0}\right)$$

La frecuencia natural de oscilación,  $\omega$  (más adelante llamada  $\omega_0$ ), puede encontrarse también por medio del principio de conservación de la energía del propio sistema. Dado que la oscilación del sistema masa-resorte puede ser descrita por medio de la ecuación 3.66, la energía potencial del sistema será:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}A^2k \sin^2(\omega t + \alpha)$$

y la energía cinética del sistema se obtiene a partir de:

$$E_K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}A^2\omega^2m \cos^2(\omega t + \alpha)$$

Por lo tanto, la energía total,  $E$ , del sistema será:

$$E = E_p + E_K$$

Cuando  $\omega t + \alpha = 0$ , se tiene  $E = E_{K \text{ máx}} = mA^2\omega^2/2$  y cuando  $\omega t + \alpha = \pi/2$ , se tiene  $E = E_{P \text{ máx}} = kA^2/2$ . De acuerdo con el principio de la conservación de la energía,  $E_{K \text{ máx}} = E_{P \text{ máx}} = E$ , por lo que se tiene:

$$\frac{1}{2}mA^2\omega^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

Lo cual conduce al mismo resultado que el mostrado en la ecuación 3.67.

### Frecuencia de oscilación de una viga volada con una masa en el extremo libre

Ahora se analizará la frecuencia de oscilación de una viga volada con una masa,  $m$ , en el extremo libre. Si se asume que la masa colocada en el extremo, es mucho mayor que la masa de la viga y que ésta puede ser despreciada, esta estructura puede considerarse como una sistema masa-resorte. Para encontrar la constante de elasticidad del resorte puede analizarse la relación fuerza desplazamiento de la masa. De acuerdo con la ecuación 3.42, la constante de elasticidad de la viga será:

$$k = \frac{Ebh^3}{4L^3}$$

Sustituyendo este valor de  $k$  en la ecuación 3.67, la frecuencia radial de la estructura masa-viga se calcula mediante la siguiente expresión:

$$\omega = \sqrt{\frac{Ebh^3}{4L^3m}}$$

Por lo tanto, la frecuencia de oscilación del sistema masa-resorte se obtiene a partir de:

$$f = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{Ebh^3}{L^3m}}$$

Por lo que la frecuencia de la oscilación está sólo en función de los parámetros estructurales.

### Frecuencia de oscilación de una viga doblemente anclada y con masa central

Para una viga doblemente anclada con masa central, si la masa de las vigas y la flexión de la masa al centro de la viga son despreciables, la estructura puede considerarse como un sistema masa resorte y la constante del resorte estará dada por la ecuación 3.53. Por lo tanto, la frecuencia natural (radial) de oscilación de la estructura será:

$$\omega = \sqrt{\frac{2Ebh^3}{ma_1^3}}$$

donde  $m = 2\rho BH(L - a_1)$  es la masa que se tiene al centro de la viga.

### Frecuencia de oscilación para una viga sujeta a torsión

El mismo método empleado hasta ahora, puede ser utilizado para vigas sujetas a torsión. Si se considera una barra sujeta a torsión con una masa colocada en un extremo, cuando la barra es torcida un ángulo  $\varphi$  en dicho extremo, el torque de recuperación actuando sobre la masa debido a la barra de torsión será:

$$T = -k_\varphi \varphi$$

donde  $k_\varphi$  es la constante de elasticidad de la barra sujeta a torsión. Si el momento de inercia para la rotación de la masa es  $I_\varphi$ , de acuerdo con la segunda ley de Newton, la ecuación diferencial para la oscilación angular será:

$$I_\varphi \ddot{\varphi} + k_\varphi \varphi = 0 \quad (3.68)$$

La solución a la ecuación 3.68 es una oscilación angular  $\varphi = \Phi \sin(\omega t + \alpha)$ . En donde la frecuencia natural (radial) de la oscilación angular se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_\varphi}{I_\varphi}}$$

### 3.3.2. Método de Rayleigh-Ritz

En la sección previa se analizaron las frecuencias de oscilación de sistemas con masas concentradas y un resorte de masa despreciable. Pero estas relaciones no pueden emplearse para calcularse la frecuencia de oscilación para un sistema con masa distribuida. Existe un método más general, basado en el principio de conservación de la energía, útil para calcular la frecuencia de oscilación de sistemas con masa distribuida, el cual se llama método de Rayleigh-Ritz [25]. Se abordará el método de Rayleigh-Ritz para una viga uniforme con sección transversal rectangular, el resultado será aplicable a otras microestructuras haciendo el análisis y modificaciones pertinentes.

Considérese la energía almacenada en un elemento seccional,  $dx$ , en la posición  $x$  sobre la viga, tal como se muestra en la figura 3.21. El eje  $x$  del sistema de referencia se considera coincidente con la línea centroidal de la viga y el eje  $z$  está orientado en la dirección definida por el grosor de la viga, con el sentido positivo hacia abajo. El desplazamiento de la viga en la dirección  $z$  es una función de  $x$  y  $t$ , es decir,  $f(x, t)$ .

#### Energía potencial

Para una flexión pura en el plano  $x - z$ , el esfuerzo y la deformación en la viga será:  $\varepsilon = -zf''(x, t)$  y  $T = -Ezf'''(x, t)$ , respectivamente. Para una capa delgada de la viga con grosor  $dz$ , las áreas frontal y posterior se calcularán mediante  $bdz$  (donde  $b$  es el ancho de la viga) y las fuerzas normales en ambos extremos quedan expresadas mediante:

$$dF = Tbdz = -Ezf'''(x, t)bdz$$

La elongación de dicha capa en la dirección  $x$ , debido a las fuerzas que actúan sobre ella, se obtiene a partir de:

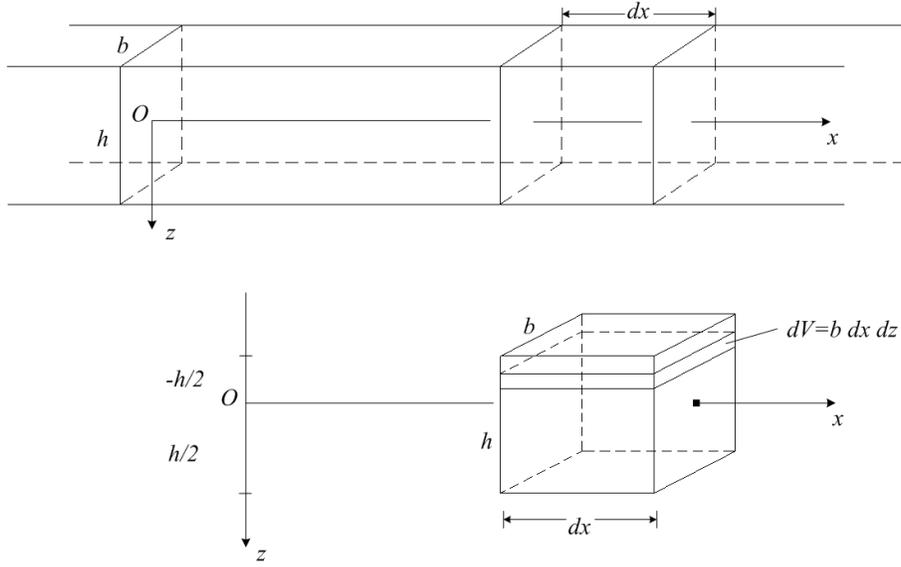


Figura 3.21: Análisis de la energía potencial en una viga.

$$\Delta(dx) = \varepsilon dx = -zf''(x, t) dx \quad (3.69)$$

La energía almacenada en la capa de grosor  $dz$ , la cual es generada por la deformación debida a la flexión de la viga, se expresa mediante:

$$\Delta(dE_p) = \frac{1}{2} df \cdot \Delta(dx)$$

De la ecuación 3.69, la energía potencial en la capa de grosor  $dz$  será:

$$\Delta(dE_p) = \frac{1}{2} E z^2 f''^2(x, t) b dx dz$$

Y la energía potencial almacenada en la sección de viga de largo  $dx$ , será:

$$dE_p = \frac{1}{2} E f''^2(x, t) \left( \int_{-h/2}^{h/2} b z^2 dz \right) dx = \frac{1}{2} E f''^2(x, t) I dx$$

Para la viga completa de longitud  $L$ , la energía potencial total provocada por la flexión será:

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^L EI f''^2(x, t) dx$$

**Energía cinética**

La energía cinética de un elemento seccional de longitud  $dx$  se obtiene mediante:

$$dE_K = \frac{1}{2} \rho b h dx \left( \frac{df}{dt} \right)^2$$

Y la energía de la viga completa será:

$$E_K = \frac{1}{2} \int_0^L \rho b h \left( \frac{df}{dt} \right)^2 dx$$

**Funciones de forma aproximadas a los modos de oscilación**

En general, la oscilación de una viga puede describirse mediante:

$$f(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n W_n(x, t)$$

Donde  $W_n(x, t)$  es la función de onda del  $n$ -ésimo modo de oscilación con una oscilación sinusoidal de frecuencia radial  $\omega_n$  y una función de forma,  $W_n(x)$ :

$$W_n(x, t) = W_n(x) \text{sen}(\omega t + \alpha_n)$$

Matemáticamente,  $W_n(x, t)$  es una función característica de la ecuación diferencial para el sistema oscilatorio que se abordará en la siguiente sección.

**Cociente de Rayleigh**

Para el modo de oscilación designado por el subíndice  $n$ , la energía potencial será:

$$E_P = \frac{1}{2} c_n^2 \int_0^L EI [W_n''(x)]^2 \text{sen}^2(\omega_n t + \alpha_n) dx$$

y la energía cinética del modo de oscilación se obtendrá a partir de:

$$E_K = \frac{1}{2} c_n^2 \int_0^L \rho b h W_n^2(x) \omega_n^2 \cos^2(\omega_n t + \alpha_n) dx$$

Por el principio de conservación de la energía,  $E_{P \text{ máx}} = E_{K \text{ máx}} = E$ , la frecuencia de oscilación del modo puede encontrarse a partir de la siguiente ecuación:

$$\omega_n^2 = \frac{\int_0^L EI W_n''^2(x) dx}{\int_0^L \rho b h W_n^2(x) dx} \quad (3.70)$$

La ecuación 3.70 puede emplearse para una viga con una sección transversal no uniforme; si el área de la sección transversal  $A(x)$  es usada para sustituir el producto  $bh$  en el denominador:

$$\omega_n^2 = \frac{\int_0^L EI W_n''^2(x) dx}{\int_0^L \rho A(x) W_n^2(x) dx}$$

Expresión que es conocida como el cociente de Rayleigh y el método para la obtención de la frecuencia de oscilación es conocido como el método Rayleigh-Ritz.

### La naturaleza del método Rayleigh-Ritz

Con el cociente de Rayleigh, la frecuencia de oscilación de un modo específico de oscilación puede encontrarse si la función de forma de dicho modo de oscilación es conocida. Normalmente es difícil encontrar las funciones de forma para una estructura. De cualquier modo, la frecuencia de oscilación para un modo de oscilación fundamental (con la frecuencia de oscilación más baja) puede encontrarse mediante el cociente de Rayleigh con gran precisión cuando una función de desplazamiento estático es empleada como una aproximación de la función de forma. En la mayoría de los casos, el modo básico de oscilación tiene gran importancia y el efecto de los modos superiores de oscilación pueden despreciarse ya que sus frecuencias son mucho más altas que la del modo básico de oscilación.

Para algunos modos superiores de oscilación, si es posible encontrar una aproximación apropiada de la función de forma  $W_n(x)$  (basados en la información de las condiciones de frontera, nodos, entre otros datos), entonces las frecuencias de oscilación pueden encontrarse mediante el cociente de Rayleigh con precisión muy aceptable.

Dado que la función de forma  $W_n(x)$  usada para el cálculo de la frecuencia de oscilación mediante el cociente de Rayleigh es una aproximación de la función característica real, el resultado es siempre más alto que el valor verdadero característico de la correspondiente función característica. De cualquier modo, la aproximación usualmente es muy buena para la frecuencia fundamental de oscilación. Los resultados para el primer y segundo armónico pueden resultar también en buenas aproximaciones si las funciones de forma empleadas son las adecuadas.

### 3.3.3. Frecuencias de oscilación de una viga

Ahora se empleará el método de Rayleigh-Ritz para encontrar las frecuencias de oscilación de algunas estructuras típicas basadas en vigas [26]. Las estructuras analizadas son las configuraciones básicas más utilizadas en microsensores y microactuadores.

**Viga volada**

La función de desplazamiento estático para una viga volada dada en la ecuación 3.46 puede reescribirse como:

$$f(x) = \frac{\rho g}{2Eh^2} x^2 (x^2 - 4Lx + 6L^2) = cx^2 (x^2 - 4Lx + 6L^2) \quad (3.71)$$

Esta función puede emplearse como una función de forma aproximada para el cálculo de la frecuencia fundamental de oscilación de la viga volada. Sustituyendo la ecuación 3.71 en la ecuación 3.70 se obtiene:

$$\omega_1 = 3,53 \sqrt{\frac{EI}{m_b L^3}} = 1,019 \frac{h}{L^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3.72)$$

donde  $m_b = bhL\rho$  es la masa de la viga volada.

**Viga volada con una masa sujeta en el extremo libre**

Para una viga volada con una masa colocada en el extremo libre,  $m$ , que es mucho mayor que la masa de la viga, la función de desplazamiento estático será:

$$f(x) = c(3L - x)x^2 \quad (3.73)$$

Sustituyendo 3.73 en la ecuación 3.70 para  $W_n(x)$ , se tiene:

$$\omega_1^2 = \frac{36 \int_0^L EI (L - x)^2 dx}{4mL^6}$$

o

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3EI}{mL^3}} = \sqrt{\frac{Ebh^3}{4mL^3}} \quad (3.74)$$

Si la masa de la viga,  $m_b$ , no es despreciable, la frecuencia de oscilación de la estructura masa-viga puede calcularse empleando el método de Rayleigh-Ritz con la misma función de forma que la usada para el caso en que la masa de la viga es despreciable. Usando la ecuación 3.73 como la función de forma, se tiene:

$$\omega_1^2 = \frac{36 \int_0^L EI (L - x)^2 dx}{\int_0^L \rho bh (3Lx^2 - x^3)^2 dx + 4mL^6} = \frac{Ebh^3}{4 \left( m + \frac{33}{140} m_b \right) L^3}$$

o

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{Ebh^3}{4\left(m + \frac{33}{140}m_b\right)L^3}} \quad (3.75)$$

Cuando las ecuaciones 3.75 y 3.74 son comparadas, se aprecia que la masa distribuida de la viga,  $m_b$ , es equivalente a una masa de  $(33/140)m_b$  colocada en el extremo libre de la viga. A continuación se justifica la razón de esta aproximación analizando un caso extremo. Si se utiliza la ecuación 3.75 para una viga volada que no tiene masa alguna colocada en su extremo libre, es decir  $m = 0$ , se tiene:

$$\omega_1 = 1,0299\sqrt{\frac{Ebh^3}{m_bL^3}} = 1,0299\frac{h}{L^2}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

que comparada con la ecuación 3.72, se observa que son muy parecidas. Lo cual recuerda que el método de Rayleigh-Ritz no es sensible a los detalles de la función de forma que se emplee.

Por otra parte, si la masa de la viga y la masa colocada en el extremo libre son consideradas, se puede demostrar que la expresión más precisa para obtener la frecuencia de la oscilación básica sería:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{Ebh^3}{4mL^3} \left( \frac{1 + \frac{3}{4}m' + \frac{3}{20}m'^3}{1 + \frac{552}{560}m' + \frac{26}{80}m'^2 + \frac{26}{720}m'^3} \right)} \quad (3.76)$$

donde  $m' = \rho bhL/m$ . Si la ecuación 3.76 es aproximada hasta la primera potencia de  $m'$ , el resultado es exactamente el mismo que el obtenido mediante la ecuación 3.75.

### Viga doblemente anclada

De acuerdo con la ecuación 3.46, la función de desplazamiento de una viga doblemente anclada será:

$$f(x) = cx^2(L-x)^2 \quad (3.77)$$

Si se sustituye esta expresión en la ecuación 3.70 para  $W_n(x)$ , se tiene:

$$\omega_1 = \frac{22,45}{L^2}\sqrt{\frac{IE}{\rho bh}} = \frac{4,738^2}{L^2}\sqrt{\frac{IE}{\rho bh}} = 6,48\frac{h}{L^2}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3.78)$$

Cuando esta última expresión es comparada con la ecuación 3.72, la frecuencia de la oscilación básica para la viga doblemente anclada es más alta que para una viga volada por un factor de alrededor de 6.4.

Supóngase ahora que la función de forma para una viga doblemente anclada puede ser:

$$f(x) = c\left(1 - \cos 2\pi\frac{x}{L}\right) \quad (3.79)$$

pareciera que esta función es diferente de aquella mostrada en la ecuación 3.77, pero la forma general de las ecuaciones 3.79 y 3.77 son similares dado que ambas satisfacen las mismas condiciones de frontera:

$$f(0) = 0, f'(0) = 0, f(L) = 0 \text{ y } f'(L) = 0$$

Sustituyendo la expresión 3.79 en la ecuación 3.70, se tiene:

$$\omega_1 = 6,58 \frac{h}{L^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3.80)$$

Resultado que es más cercano, aunque un poco mayor, al resultado mostrado en la ecuación 3.78, dado que la constante exacta es 6,4585. Por tanto, la ecuación 3.77 es una mejor aproximación para la función de forma que la ecuación 3.79.

### Frecuencias de armónicos superiores

La función de forma del primer armónico superior para una viga doblemente anclada es anti-simétrica con un nodo en el punto central de la viga. Por tanto, la función de forma tiene las siguientes condiciones de frontera:

$$f(0) = f(L) = 0; f'(0) = f'(L) = 0; f(L/2) = 0, f''(L/2) = 0 \quad (3.81)$$

Dado que la función de forma es anti-simétrica y el cociente de Rayleigh es una función par de  $x$ , la frecuencia de oscilación puede encontrarse para la longitud de la viga entre  $x = 0$  y  $x = L/2$ .

Si la función de forma que satisface la condición de frontera tiene una forma polinomial:

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 \quad (0 \leq x \leq L/2) \quad (3.82)$$

al satisfacer las condiciones de frontera 3.81, se tendrá que  $a = -(5/4)L$  y  $b = (3/8)L^2$ . De este modo, la función de forma aproximada será:

$$f(x) = c \left( x^4 - \frac{5}{4}Lx^3 + \frac{3}{8}L^2x^2 \right) \quad \left( 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \right) \quad (3.83)$$

La gráfica de esta función se muestra en la figura 3.22:

Si se utilizan las ecuaciones 3.70 y 3.83 para la región  $0 \sim L/2$ , es posible encontrar la frecuencia radial para el primer armónico superior:

$$\omega_2 = \frac{(7,8621)^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = 17,84 \frac{h}{L^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3.84)$$

Esta es también una buena aproximación para el primer armónico superior ya que el valor exacto de la constante es 17,8034.

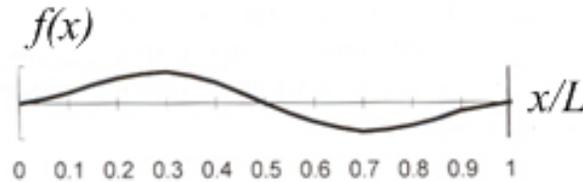


Figura 3.22: Función de forma aproximada para el primer modo superior de vibración.

### 3.4. Modos de oscilación y flexión de una viga

El método de Rayleigh-Ritz sólo puede ser empleado para encontrar un valor característico aproximado de la oscilación del sistema cuando una función de forma aproximada puede ser hallada. De cualquier modo, dado que la función de desplazamiento estático es normalmente una buena aproximación para la función de forma del principal modo de oscilación de un sistema, el método de Rayleigh-Ritz es muy efectivo en la ubicación de la frecuencia para un modo fundamental de oscilación. Para modos de oscilación de mayor frecuencia, el método de Rayleigh-Ritz es, en principio, aplicable pero da paso a la especulación sobre las características de las funciones de forma.

Existe un método más básico para encontrar las frecuencias de oscilación y las funciones de forma para todos los modos de oscilación, que es formular y resolver la ecuación diferencial del sistema oscilatorio [27]. Generalmente se trata de un proceso complicado para problemas prácticos, así que normalmente se emplean métodos numéricos para este fin. En este trabajo será utilizada, para el diseño de los dispositivos, una herramienta de simulación numérica que se basa en el método de análisis de elemento finito. Sin embargo, en esta sección se abordará el planteamiento y la solución de las ecuaciones diferenciales para problemas de vibraciones de estructuras basadas en vigas.

#### 3.4.1. Ecuación diferencial para la oscilación libre de una viga

Considérese un elemento seccional,  $dx$ , de una viga [28] como el mostrado en la figura 3.23.

La fuerza interna cortante aplicada sobre el costado izquierdo de la sección se dirige hacia arriba y se denota con  $F$  y la fuerza interna cortante aplicada sobre el costado derecho se dirige hacia abajo y se denota con  $F + dF$ . El momento de flexión aplicado sobre los costados izquierdo y derecho son  $M$  y  $M + dM$ , respectivamente. Y  $q(x)$  es la fuerza de la carga por unidad de longitud de la viga. Dado que  $F$  y  $F + dF$  se encuentran en direcciones opuestas, la fuerza neta  $dF$  provocará una aceleración del elemento seccional. Esto es, la relación del balance de fuerzas queda expresada mediante:

$$dF + q(x) dx = \rho A \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} dx$$

donde  $q(x) dx$  es la fuerza provocada por la carga sobre el elemento seccional  $dx$  ( $q = \rho gbh$  si la carga es el propio peso de la viga),  $A$  es el área de la sección transversal y es igual a  $bh$  y  $f(x, t)$  es la función de desplazamiento de la viga. De esta relación se tiene:

$$\frac{dF}{dx} + q(x) = \rho A \frac{d^2 f(x, t)}{dt^2} \quad (3.85)$$

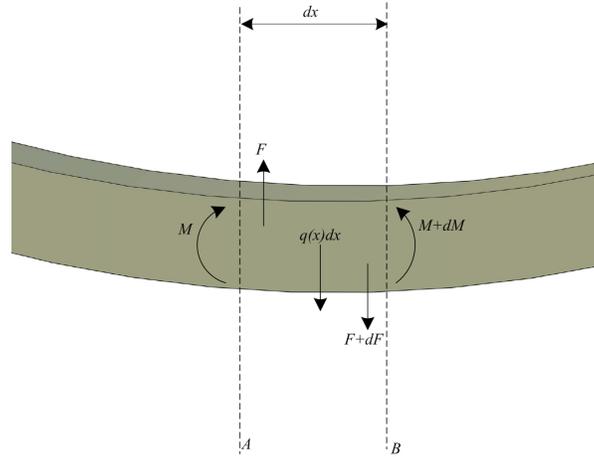


Figura 3.23: Fuerzas y momentos actuando sobre la sección de una viga en movimiento oscilatorio.

Del balance de los momentos de flexión que actúan sobre el elemento seccional, se tiene:

$$M + Fdx - \frac{q(dx^2)}{2} = M + dM$$

Por lo tanto, para un elemento seccional infinitesimal  $dx$  se tiene:

$$F = \frac{dM}{dx} \quad (3.86)$$

Sustituyendo 3.86 en 3.85 se encuentra que:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + q(x) = \rho A \frac{d^2 f}{dt^2}$$

De acuerdo con la relación existente entre el momento de inercia y el momento de flexión (ecuación 3.36), es decir,  $M = EI f''(x)$ , se tiene:

$$EI \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = q(x) \quad (3.87)$$

Esta es la ecuación diferencial parcial lineal que gobierna la oscilación de la viga. Si no existe carga sobre la viga, la ecuación se reduce a [39]:

$$EI \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad (3.88)$$

Por otra parte, al sustituir la ecuación 3.36 en 3.86, se encuentra que la fuerza cortante puede expresarse como:

$$F = -EI f'''(x)$$

Y dado que la fuerza cortante en el extremo libre de la viga es cero, las condiciones de frontera para dicho extremo serán  $d^3 f/dx^3 = 0$  y  $f''(x) = 0$ .

### 3.4.2. Frecuencias de oscilación de una viga doblemente anclada

Utilizando las condiciones de frontera correspondientes al problema práctico, la ecuación 3.88 puede resolverse para encontrar las frecuencias de oscilación y las correspondientes funciones de forma para diferentes modos de oscilación [30]. Para una viga doblemente anclada (un puente) con longitud  $L$ , las condiciones serán:

$$f(0) = 0, f(L) = 0, f'(0) = 0 \text{ y } f'(L) = 0 \quad (3.89)$$

La solución general a la ecuación 3.88 puede ser vista como la superposición de diferentes modos de oscilación, es decir:

$$f(x, t) = \sum_n W_n \left( \frac{x}{L} \right) (A_n \cos \omega_n t + B_n \sen \omega_n t) \quad (3.90)$$

donde  $\omega_n$  es la frecuencia radial y  $W_n$  la función de forma del  $n$ -ésimo modo de oscilación. Sustituyendo la ecuación 3.90 en la ecuación 3.88 y empleando una variable adimensional  $\eta = x/L$ , se obtienen las ecuaciones para  $W_n(\eta)$ :

$$W_n''''(\eta) - \frac{\rho A}{EI} L^4 \omega_n^2 W_n(\eta) = 0$$

Se define  $(k_n)^4 = \rho A L^4 \omega_n^4 / EI$  y del mismo modo se tendría que  $\omega_n^2 = E I k_n^4 / (\rho A L^4)$ , por tanto:

$$W_n''''(\eta) - k_n^4 W_n(\eta) = 0$$

Si se toma  $W_n = e^{\lambda \eta}$  como una solución, se tiene:

$$\lambda^4 - k_n^4 = 0$$

Por lo tanto, las soluciones a la ecuación serán:

$$\lambda = k_n, -k_n, ik_n, -ik_n$$

Por lo que, el planteamiento general de la función de forma será:

$$W_n(\eta) = A e^{k_n \eta} + B e^{-k_n \eta} + C e^{ik_n \eta} + D e^{-ik_n \eta} \quad (3.91)$$

o

$$W_n(\eta) = A \operatorname{sen}(k_n \eta) + B \cos(k_n \eta) + C \operatorname{senh}(k_n \eta) + D \operatorname{cosh}(k_n \eta)$$

Ya que las funciones características de la ecuación diferencial (las funciones de forma), son ortogonales [27], se cumple la siguiente relación:

$$\int_0^L W_m W_n dx = 0 \quad (\text{para } m \neq n)$$

Sustituyendo 3.91 en 3.89, se obtienen las ecuaciones para calcular  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k_n & -k_n & ik_n & -ik_n \\ e^{k_n} & e^{-k_n} & e^{ik_n} & e^{-ik_n} \\ k_n e^{k_n} & -k_n e^{-k_n} & ik_n e^{ik_n} & -ik_n e^{-ik_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = 0 \quad (3.92)$$

Para soluciones no triviales, el determinante de la matriz en la ecuación 3.92 debe ser cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k_n & -k_n & ik_n & -ik_n \\ e^{k_n} & e^{-k_n} & e^{ik_n} & e^{-ik_n} \\ k_n e^{k_n} & -k_n e^{-k_n} & ik_n e^{ik_n} & -ik_n e^{-ik_n} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.93)$$

El determinante se reduce a:

$$\operatorname{cosh}(k_n) \cos(k_n) - 1 = 0 \quad (3.94)$$

Este resultado indica que los valores característicos,  $k_n$ , para las funciones de forma, deben satisfacer la ecuación 3.94. Una vez que  $k_n$  es encontrada a partir de la ecuación 3.94, la frecuencia de oscilación correspondiente es determinada mediante:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_n^4 EI}{L^4 \rho A}}$$

o

$$f_n = \frac{k_n^2}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

Algunos de los valores de  $k_n$  que se encontrarán mediante la ecuación 3.94 se listan a continuación:

$$\begin{aligned}
k_0 &= 0 && \text{no representa un modo de oscilación} \\
k_1 &= 4,73, \quad k_2 = 7,8532, \quad k_3 = 10,996 \\
k_n &\approx \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) && \text{para } n > 3 \quad (\text{a partir de la aproximación de } \cos(k_n) = 0)
\end{aligned}$$

La frecuencia radial del modo fundamental de oscilación será:

$$\omega_1 = \frac{4,73^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = 6,4585 \frac{h}{L^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3.95)$$

y la frecuencia radial del primer armónico de alta frecuencia:

$$\omega_2 = \frac{7,8532^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = 17,803 \frac{h}{L^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3.96)$$

Comparando las ecuaciones 3.95 y 3.96 con los resultados obtenidos mediante el método de Rayleigh-Ritz, es decir, las ecuaciones 3.80 y 3.84, se tiene que las discrepancias entre las frecuencias de oscilación encontradas por el método de Rayleigh-Ritz y los resultados exactos obtenidos anteriormente son sólo de un uno por ciento y también que los valores encontrados por medio del método de Rayleigh-Ritz son siempre mayores.

El propósito principal del análisis anterior es aclarar que las frecuencias naturales de oscilación de una viga doblemente anclada forman un espectro infinito de frecuencias de oscilación correspondientes al espectro de los modos infinitos de oscilación. Esto es generalmente verdadero para sistemas oscilatorios y la situación es generalmente mucho más complicada si el sistema mecánico tiene más grados de libertad.

La frecuencia de oscilación de una viga volada puede abordarse a partir del proceso mostrado en esta sección. Para una viga volada, las condiciones de frontera serán [27]:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(L) = 0 \quad \text{y} \quad f'''(L) = 0$$

y las  $k_n$  encontradas serán:

$$k_1 = 1,875, \quad k_2 = 4,694, \quad k_3 = 7,855, \quad k_4 = 10,996, \quad k_5 = 14,137 \quad \text{y} \quad k_6 = 17,279$$

Entonces, la frecuencia radial del modo fundamental de oscilación se obtiene a partir de:

$$\omega_1 = \frac{1,875^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = 1,015 \frac{h}{L^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Cuando el resultado se compara con lo obtenido mediante el método de Rayleigh-Ritz expresado por la ecuación 3.72, la diferencia es menor a uno por ciento.

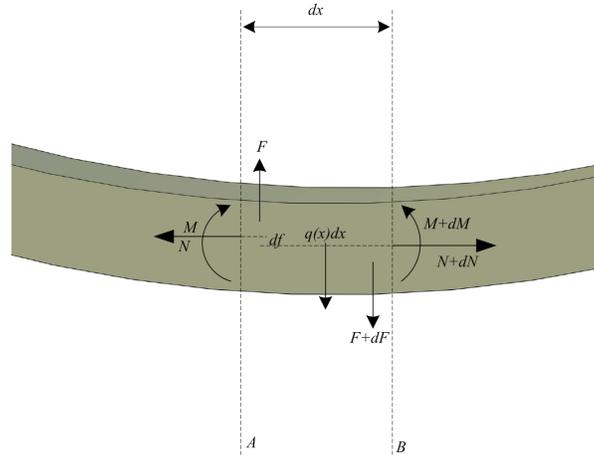


Figura 3.24: Fuerzas y momentos actuando sobre la sección de una viga bajo la acción de una fuerza axial.

### 3.4.3. Oscilación bajo la acción de una fuerza axial

En los análisis previos de esta sección sobre las frecuencias de oscilación libre de una viga no se ha considerado la acción de una fuerza axial. Sin embargo, una fuerza axial puede presentarse en muchos casos e influir de forma significativa sobre la oscilación. Uno de sus principales efectos será provocar que la frecuencia de oscilación del modo de oscilación se recorra. Este efecto es utilizado para propósitos de medición en sensores basados en resonadores. Por tanto, es importante obtener la ecuación diferencial para el caso de una viga bajo la acción de una fuerza axial y analizar los efectos de dicha fuerza sobre la frecuencia de oscilación.

#### Ecuación diferencial de una viga bajo la acción de una fuerza axial

Para una viga bajo la acción de una fuerza axial, la oscilación libre de amplitud pequeña puede ser descrita por medio de una ecuación diferencial parcial. Considérese un elemento seccional,  $dx$ , de una viga. Las fuerzas internas presentes en ambos extremos de la viga se ilustran en la figura 3.24.

En esta figura, a diferencia de la empleada cuando se analizó la oscilación libre de una viga, aparecen un par de fuerzas axiales (denotadas por  $N$  y  $N + dN$ ) sobre ambos extremos del elemento seccional. El efecto de las fuerzas axiales provoca un momento de flexión adicional  $Ndf = Nf'(x)dx$ . El balance de momentos de flexión lleva al planteamiento de la siguiente ecuación:

$$M + Fdx - N \frac{df}{dx} dx = M + dM$$

Por lo tanto, se tiene:

$$F = \frac{dM}{dx} + N \frac{df}{dx}$$

Y sustituyendo esta relación en la ecuación 3.85, se tiene:

$$EI \frac{\partial^4 f(x, t)}{\partial x^4} - N \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} = q(x)$$

Si la carga  $q(x)$  es despreciable, se tiene:

$$EI \frac{\partial^4 f(x, t)}{\partial x^4} - N \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.97)$$

### Solución a la ecuación diferencial de una viga bajo la acción de una fuerza axial

Para resolver la ecuación, se utiliza la misma metodología que la empleada en la discusión para obtener las frecuencias de oscilación de una viga doblemente anclada. Por tanto, si se asume que:

$$f(x, t) = \sum_n W_n(\eta) (A_n \cos \omega_n t + B_n \sen \omega_n t)$$

Sustituyendo  $f(x, t)$  en 3.97 para el  $n$ -ésimo modo de oscilación, se obtiene:

$$W_n''''(\eta) - \frac{NL^2}{EI} W_n''(\eta) - \frac{\rho AL^4}{EI} \omega_n^2 W_n(\eta) = 0 \quad (3.98)$$

donde  $\eta = x/L$ . Asumiendo que  $W_n(\eta) = Ae^{\lambda\eta}$ , se tiene la ecuación para  $\lambda$ :

$$\lambda^4 - \frac{NL^2}{EI} \lambda^2 - \frac{\rho AL^4}{EI} \omega_n^2 = 0$$

Si se define:

$$\beta = \frac{NL^2}{2EI} \quad (3.99)$$

y

$$k_n^4 = \frac{\rho AL^4}{EI} \omega_n^2 \quad (3.100)$$

La ecuación para  $\lambda$  queda como:

$$\lambda^4 - 2\beta\lambda^2 - k_n^4 = 0$$

Por lo tanto, se tienen las soluciones:

$$\lambda = \pm i \sqrt{\sqrt{\beta^2 + k_n^4} - \beta}, \quad \pm \sqrt{\sqrt{\beta^2 + k_n^4} + \beta}$$

Si ahora se definen:

$$k_{n1} = \sqrt{\sqrt{\beta^2 + k_n^4} - \beta}, \quad k_{n2} = \sqrt{\sqrt{\beta^2 + k_n^4} + \beta} \quad (3.101)$$

se obtienen las soluciones:

$$\lambda_1 = ik_{n1}, \quad \lambda_2 = -ik_{n1}, \quad \lambda_3 = k_{n2} \text{ y } \lambda_4 = -k_{n2}$$

Por lo tanto, la solución general a la ecuación 3.98 será:

$$W_n(\eta) = Ae^{ik_{n1}\eta} + Be^{-ik_{n1}\eta} + Ce^{k_{n2}\eta} + De^{-k_{n2}\eta}$$

Para satisfacer las condiciones de frontera de la viga y seguir el mismo procedimiento dado en el caso de la viga doblemente anclada, para el cálculo de las soluciones no triviales,  $k_n$  debe satisfacer la siguiente ecuación [30]:

$$\cos k_{n1} \cosh k_{n2} - \frac{\beta}{k_n^2} \operatorname{sen} k_{n1} \operatorname{senh} k_{n2} - 1 = 0 \quad (3.102)$$

Las funciones de forma correspondientes, serán:

$$W_n(\eta) = \frac{\cosh(k_{n2}\eta) - \cos(k_{n1}\eta)}{\cosh(k_{n2}) - \cos(k_{n1})} - \frac{\operatorname{senh}(k_{n2}\eta) - \operatorname{sen}(k_{n1}\eta)}{\operatorname{senh}(k_{n2}) - \operatorname{sen}(k_{n1})}$$

Si no existe la fuerza axial, es decir,  $N = 0$ , la ecuación 3.102 se vuelve la ecuación 3.94. Si  $N \neq 0$ ,  $\beta$  puede determinarse a partir de la ecuación 3.99. Entonces, las ecuaciones 3.101 y 3.102 pueden ser utilizadas para encontrar  $k_n$ . Por lo tanto,  $k_n$  es una función de  $\beta$  (esto es, una función de la fuerza axial  $N$ ). La correspondiente frecuencia de oscilación  $\omega_n$  puede calcularse por medio de la expresión 3.100:

$$\omega_n(\beta) = k_n^2(\beta) \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}}$$

El procedimiento para encontrar  $k_n$  para un valor específico de  $N$  que satisfaga las ecuaciones 3.101 y 3.102 es un proceso muy elaborado numéricamente. Sin embargo, S. Bouwstra encontró que las soluciones pueden aproximarse mediante la siguiente relación analítica:

$$\omega_n(N) = \omega_n(0) \sqrt{1 + \gamma_n \frac{NL^2}{12EI}} \quad (3.103)$$

donde  $\gamma_n$  son un conjunto de coeficientes que representan la contribución de la fuerza axial. Los valores de  $k_n$  (con fuerza axial nula) y de  $\gamma_n$  se muestran en la siguiente tabla:

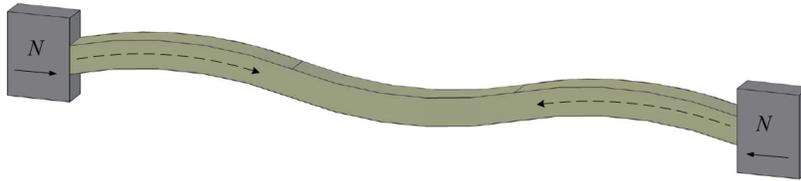


Figura 3.25: Flexión (combaro) de una viga doblemente anclada.

n	$k_n$	$\gamma_n$
1	4.73	0.2949
2	4.8532	0.1453
$\geq 3$	$(n + \frac{1}{2}) \pi$	$\frac{12(k_n-2)}{k_n^3}$

El error ocasionado por la aproximación de la ecuación 3.103 es menor al 0,5 % bajo la condición de que  $NL^2/12EI < 1$ .

#### Frecuencia de oscilación de una viga bajo la acción de fuerzas axiales

Para variaciones pequeñas en la frecuencia, puede hacerse una aproximación adicional por medio de la ecuación 3.103:

$$\omega_n(N) = \omega_n(0) \left( 1 + \frac{\gamma_n}{2} \frac{NL^2}{13EI} \right)$$

o bien

$$f_n(N) = f_n(0) \left( 1 + \frac{\gamma_n}{2} \frac{NL^2}{12EI} \right)$$

#### 3.4.4. Flexión de una viga doblemente anclada

De acuerdo con la discusión anterior, la frecuencia de oscilación de la viga decrece conforme decrece también la fuerza compresiva axial sobre la viga, de hecho la frecuencia puede disminuir hasta cero para un cierto valor de la fuerza compresiva axial  $N_b$  y la viga se flexiona como muestra la figura 3.25.

Por ejemplo, un puente hecho de dióxido de silicio, en un microsistema, puede flexionarse (combarse) debido a un esfuerzo o tensión sobre el propio puente provocado por el efecto térmico de expansión del

material. El valor del esfuerzo o tensión en el puente que hace que la viga empiece a combarse es conocido como *buckling strain* o *buckling stress* [31].

Para una fuerza axial compresiva  $N$ , la ecuación 3.97 puede reescribirse como:

$$EI \frac{\partial^4 f(x, t)}{\partial x^4} + N \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

Si se supone que  $f(x, t) = X(x)T(t)$ , se tiene:

$$EIX''''(x)T(t) + NX''(x)T(t) + \rho AX(x)\ddot{T}(t)$$

Si la oscilación es de tipo sinusoidal, es decir  $T(t) = C \sin(\omega t + \alpha)$ , se tiene la ecuación para  $X(x)$ :

$$\frac{EI}{\rho A} X''''(x) + \frac{N}{\rho A} X''(x) - \omega^2 X(x) = 0 \quad (3.104)$$

Si se tiene que la forma de  $X(x)$  es  $e^{\lambda \frac{x}{L}}$  la ecuación anterior queda como:

$$\frac{EI}{\rho AL^4} \lambda^4 + \frac{N}{\rho AL^2} \lambda^2 - \omega^2 = 0 \quad (3.105)$$

donde  $L$  es la longitud de la viga. La solución a esta última ecuación será:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \pm \sqrt{-\frac{NL^2}{2EI} + \sqrt{\left(\frac{NL^2}{2EI}\right)^2 + \frac{\rho AL^4}{EI} \omega^2}} = \alpha \\ \lambda_{3,4} &= \pm i \sqrt{\frac{NL^2}{2EI} + \sqrt{\left(\frac{NL^2}{2EI}\right)^2 + \frac{\rho AL^4}{EI} \omega^2}} = \beta \end{aligned}$$

Las soluciones a la ecuación 3.105 pueden escribirse como:

$$\lambda_1 = \alpha, \lambda_2 = -\alpha, \lambda_3 = i\beta \text{ y } \lambda_4 = -i\beta$$

Por lo tanto, la solución general a la ecuación 3.104 toma la forma:

$$X(x) = A \sinh\left(\alpha \frac{x}{L}\right) + B \cosh\left(\alpha \frac{x}{L}\right) + C \sin\left(\beta \frac{x}{L}\right) + D \cos\left(\beta \frac{x}{L}\right)$$

Las condiciones de frontera para una viga doblemente anclada (un puente) serán:

$$X(0) = 0, X(L) = 0, X'(0) = 0 \text{ y } X'(L) = 0$$

Sustituyendo la forma general de la solución en las condiciones de frontera se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 B + D &= 0 \\
 A \operatorname{senh} \alpha + B \operatorname{cosh} \alpha + C \operatorname{sen} \beta + D \cos \beta &= 0 \\
 A \frac{\alpha}{L} + C \frac{\beta}{L} &= 0 \\
 A \frac{\alpha}{L} \operatorname{cosh} \alpha + B \frac{\alpha}{L} \operatorname{senh} \alpha + C \frac{\beta}{L} \cos \beta + D \frac{\beta}{L} \cos \beta &= 0
 \end{aligned} \tag{3.106}$$

Para soluciones no triviales, el determinante de la matriz en la ecuación 3.106 debe ser cero:

$$\begin{vmatrix}
 0 & 1 & 0 & 1 \\
 \operatorname{senh} \alpha & \operatorname{cosh} \alpha & \operatorname{sen} \beta & \cos \beta \\
 \frac{\alpha}{L} & 0 & \frac{\beta}{L} & 0 \\
 \frac{\alpha}{L} \operatorname{cosh} \alpha & \frac{\alpha}{L} \operatorname{senh} \alpha & \frac{\beta}{L} \cos \beta & -\frac{\beta}{L} \operatorname{sen} \beta
 \end{vmatrix} = 0$$

El determinante queda como:

$$\operatorname{senh} \alpha \operatorname{sen} \beta \left( \frac{\alpha^2 - \beta^2}{L^2} \right) + \frac{\alpha\beta}{L^2} (\operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta - \cos \beta \operatorname{cosh} \alpha - \operatorname{senh}^2 \alpha + \operatorname{cosh} \alpha \cos \beta + \operatorname{cosh}^2 \alpha) = 0$$

De acuerdo con las siguientes relaciones  $\beta = \alpha^2 + NL^2/EI$ ,  $\operatorname{cosh}^2 \alpha - \operatorname{senh}^2 \alpha = 0$  y  $\cos^2 \beta + \operatorname{sen}^2 \beta = 0$ , se puede reducir el resultado del determinante hasta:

$$\frac{\alpha\beta}{L^2} (1 - \operatorname{cosh} \alpha \cos \beta) = \frac{N}{EI} \operatorname{senh} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

Dado que  $\alpha\beta/L^2 = \omega\sqrt{\rho A/EI}$ , se tiene:

$$\omega = \sqrt{\frac{N}{EI\rho A}} \cdot \frac{\operatorname{senh}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta)}{2[1 - \operatorname{cosh}(\alpha) \cos(\beta)]}$$

Además dadas las aproximaciones de  $\alpha \cong \omega L\sqrt{\rho A/N}$  y  $\beta \cong L\sqrt{N/EI}$  para  $\omega \cong 0$ , se obtiene:

$$\beta \operatorname{sen} \beta = 2(1 - \cos \beta), \text{ o, } \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} \left( \beta \cos \frac{\beta}{2} - 2 \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} \right) = 0$$

Existen dos soluciones a la ecuación: 1)  $\beta = 2n\pi$  desde  $\operatorname{sen}(\beta/2) = 0$  y 2)  $\beta = 0$  (es decir,  $N = 0$ ) desde  $\tan(\beta/2) = (\beta/2)$ . Obviamente, el valor más pequeño de la solución diferente de cero  $\beta = 2\pi$  es el estado de flexión (combado) de la viga y la fuerza compresiva que lo provoca se obtiene a partir de:

$$N_b = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2 E b h^3}{3L^2} = 3,29 \frac{E b h^3}{L^2} \tag{3.107}$$

Esto significa que el esfuerzo que flexiona la viga se calcula mediante:

$$T_b = \frac{\pi^2 E h^2}{3L^2}$$

Debe mencionarse que si la fuerza que flexiona la viga se obtiene a partir de la ecuación 3.102 mediante la *condición de frecuencia cero*, la constante en la ecuación 3.107 es 3,39 en lugar de 3,29.

## 3.5. Vibraciones forzadas y amortiguadas

### 3.5.1. Fuerza de amortiguamiento

Para las vibraciones libres como las descritas hasta ahora, no es necesario que el sistema trabaje frente a fuerzas resistivas de modo tal que su energía total se mantiene constante en cualquier momento. En la práctica, la oscilación de un sistema real siempre enfrenta resistencias de fuerzas disipativas, tales como la viscosidad del aire, la fricción, la transmisión acústica, entre otras. El sistema, por tanto, hace un trabajo positivo. La energía para hacer dicho trabajo proviene de la energía de la oscilación y normalmente se convierte en energía térmica. Por lo tanto, el amortiguamiento es un proceso en el que la energía es tomada del sistema en movimiento oscilatorio.

Generalmente, el amortiguamiento es inevitable en los sistemas. Por ejemplo, la fricción interna en un resorte (flexión) siempre es disipativa y transforma, en cada ciclo, parte de la energía de la oscilación en energía térmica. Otra causa común de amortiguamiento es el movimiento a través de un fluido viscoso como el aire.

Una aproximación de primer orden, de una fuerza de amortiguamiento,  $F_d$ , es la proporcionalidad a la velocidad del movimiento, es decir:

$$F_d = -c\dot{x}$$

donde  $c$  es conocido como el coeficiente de amortiguamiento y el signo negativo significa que la fuerza se opone al movimiento (se presenta en el sentido opuesto). Un sistema en movimiento oscilatorio con amortiguamiento es normalmente modelado como muestra la figura 3.26.

El efecto de amortiguamiento es representado por un amortiguador. El amortiguamiento es un factor que contribuye a que el movimiento cese. En muchos casos, se toman acciones para reducir el amortiguamiento de modo que el movimiento pueda mantenerse con un mínimo suministro de energía por ciclo de oscilación. Sin embargo, en muchos casos, el amortiguamiento es introducido de forma deliberada para reducir las oscilaciones del sistema.

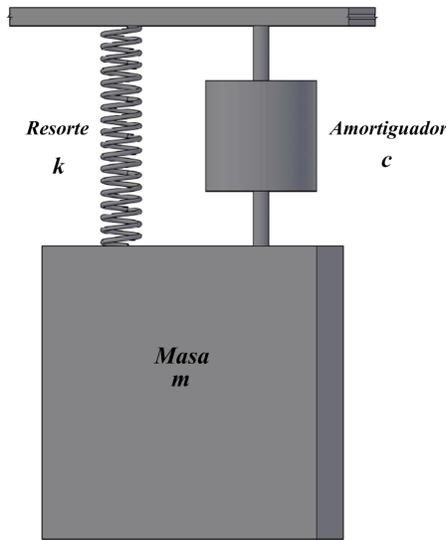


Figura 3.26: Modelo simplificado de un sistema oscilatorio con amortiguamiento.

### 3.5.2. Vibraciones con amortiguamiento

Para un sistema con movimiento oscilatorio, la ecuación diferencial que lo describe es de segundo orden:

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x}$$

donde  $m$  es la masa y  $c$  el coeficiente de amortiguamiento. Así, se tiene:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (3.108)$$

al definir

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (3.109)$$

y

$$n = \frac{c}{2m} \quad (3.110)$$

se llega a:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_0^2x = 0 \quad (3.111)$$

donde  $\omega_0$  es la frecuencia natural del sistema oscilatorio si no existe amortiguamiento (es decir, se trata de una oscilación libre) y  $n$  es conocido como coeficiente de amortiguamiento. Si se considera que la forma general de  $x = Ae^{\lambda t}$ , se tiene entonces que:

$$\lambda^2 + 2n\lambda + \omega_0^2 = 0$$

cuyas soluciones serán:

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega_0^2}$$

el desempeño del sistema puede discutirse en términos de la razón entre  $n$  y  $\omega_0$ . La razón  $\zeta = n/\omega_0$  es conocida como razón de amortiguamiento o coeficiente de amortiguamiento relativo del sistema.

### Subamortiguamiento

Si  $n < \omega_0$ , es decir,  $\zeta < 1$ , se tiene:

$$\lambda_{1,2} = -n \pm i\sqrt{(\omega_0^2 - n^2)}$$

Y la solución a la ecuación 3.111 tiene la forma:

$$x = Ae^{-nt} \operatorname{sen} \left( \sqrt{\omega_0^2 - n^2}t + \alpha \right)$$

lo cual indica que el sistema oscilará, pero a diferencia de un sistema con oscilación libre, se tiene: (i) la frecuencia de la oscilación es  $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - n^2} = \omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}$ , la cual es menor que la frecuencia de oscilación libre  $\omega_0$ , y (ii) la amplitud de la oscilación decae de forma exponencial con el tiempo.

### Sobreamortiguamiento

Si  $n > \omega_0$ , es decir,  $\zeta > 1$ , se tiene:

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{(n^2 - \omega_0^2)}$$

y

$$x = e^{-nt} \left( c_1 e^{\sqrt{n^2 - \omega_0^2}t} + c_2 e^{-\sqrt{n^2 - \omega_0^2}t} \right)$$

de donde se concluye que no existe oscilación en el movimiento y que la masa regresa lentamente a su posición de equilibrio.

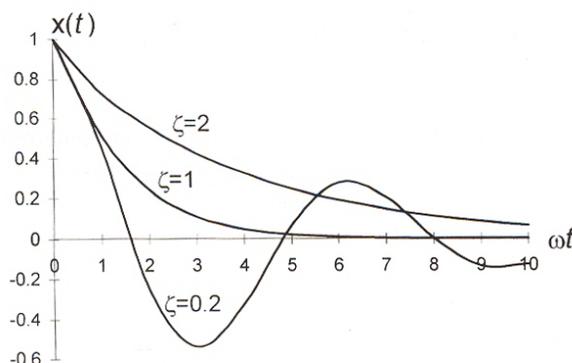


Figura 3.27: Grafica con las atenuaciones de amplitud de oscilación en sistemas con diferentes coeficientes de amortiguamiento.

### Críticamente amortiguado

Si  $n = \omega_0$ , es decir,  $\zeta = 1$ , se tiene  $\lambda_1 = \lambda_2 = -n = -\omega_0$  y la solución especial a la ecuación 3.111 es  $x_1(t) = c_1 e^{-nt}$ . Asumiendo que la forma de la solución general es  $x = A(t)x_1(t)$  y sustituyéndolo en la ecuación 3.111, se tiene  $d^2A/dt^2 = 0$ . Por lo tanto, la forma general de la solución a la ecuación 3.111 será:

$$x(t) = c_1 e^{-nt} (c_2 t + c_3)$$

de donde se concluye que no existe oscilación pero el tiempo que toma al sistema lograr un desplazamiento nulo es el mínimo.

La figura 3.27 muestra la relación de  $x(t)$  respecto de  $\omega t$  para las tres condiciones de amortiguamiento.

### Respuesta al escalón unitario

Para un sistema masa-resorte, la posición de equilibrio de la masa ocurre cuando  $x = 0$ . Bajo la acción de una fuerza constante  $F_0$  sobre la masa, la posición de equilibrio se alcanza cuando  $x_0 = F_0/k$ .

Si se define a  $F_0$  como una fuerza de magnitud constante y unitaria a partir de  $t = 0$ , se tiene la masa se mueve de su posición de equilibrio,  $x = 0$ , hacia adelante a su nueva posición de equilibrio,  $x_0 = F_0/k$ . Si el efecto del amortiguamiento es despreciable, el sistema tendrá una energía total  $E = F_0 x_0$  cuando la masa alcance la posición  $x_0$  debido al trabajo hecho por la fuerza. Dado que la energía potencial en esta condición es  $kx_0^2/2 = F_0 x_0/2$ , la masa debe tener una energía cinética  $F_0 x_0/2$  en  $x_0$ . Esto significa que la masa deberá seguir adelante después de pasar por  $x_0$  hasta alcanzar  $x'$ , donde el trabajo hecho por la fuerza aplicada es igual a la energía potencial elástica:

$$F_0 x' = \frac{1}{2} k x'^2$$

Ya que  $x' = 2x_0$  no es una posición de equilibrio, la masa retrocederá hasta  $x = 0$ . De este modo, la masa oscilará entre 0 y  $2x_0$ . Cuando el efecto del amortiguamiento sea considerable, la oscilación cesará y la masa

alcanzará finalmente la posición de equilibrio  $x = x_0$  cuando el exceso de energía sea consumido por efecto del amortiguamiento. Por lo tanto, la respuesta del sistema a un escalón depende de forma importante del amortiguamiento.

El proceso puede ser descrito por medio de la ecuación:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \quad (3.112)$$

Dado que  $F_0 = kx_0$ , se tiene:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k(x - x_0) = 0$$

Si se define  $x_1 = x - x_0$  se obtiene la ecuación diferencial en términos de  $x_1$ :

$$m\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + kx_1 = 0 \quad (3.113)$$

Con las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_0 & \text{para } t = 0 \\ \dot{x}_1 &= 0 & \text{para } t = 0 \end{aligned} \quad (3.114)$$

Por lo tanto, las soluciones a la ecuación 3.111 son aplicables a la ecuación 3.113 y las condiciones iniciales 3.114 pueden utilizarse para determinar las constantes en la solución.

Para el caso de un sistema subamortiguado, es decir,  $\zeta < 1$ , el sistema oscila antes de alcanzar la posición de equilibrio. Así, la expresión para  $x(t)$  será:

$$x = x_0 \left( 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_0 t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{sen} \left( \sqrt{1-\zeta^2}\omega_0 t + \alpha \right) \right)$$

donde  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  y  $\alpha = \operatorname{sen}^{-1} \sqrt{1-\zeta^2}$ .

Para el caso de un sistema críticamente amortiguado, es decir,  $\zeta = 1$ , el sistema alcanza la posición de equilibrio sin oscilar. La dependencia de la posición  $x$  con respecto del tiempo será:

$$x = x_0 \left( 1 - (1 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t} \right)$$

Para el caso de un sistema sobreamortiguado, éste alcanzará su posición de equilibrio lentamente. La expresión para  $x(t)$  será:

$$x = x_0 \left( 1 - \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_0 t} + \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_0 t} \right)$$

En la figura 3.28 se muestran las curvas de respuesta en el tiempo para los tres casos abordados.

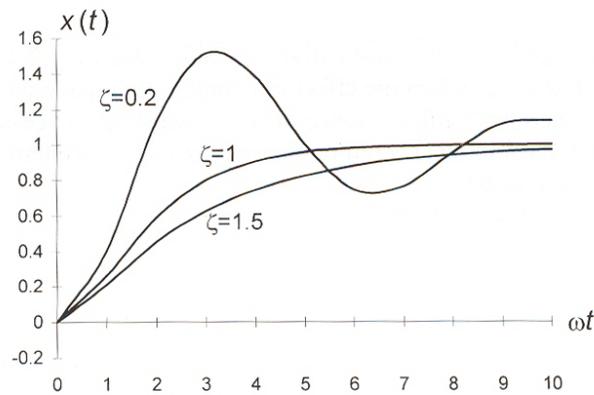


Figura 3.28: Respuesta a una fuerza con forma de escalón para diferentes coeficientes de amortiguamiento.

### 3.5.3. Oscilación provocada por una fuerza

El sistema masa-resorte puede ser llevado a una oscilación continua por medio de una fuerza periódica que actúe sobre la masa [32]. Si la fuerza es de tipo sinusoidal con una frecuencia  $\omega$  y una amplitud  $F_0$ , entonces:

$$F = F_0 \text{sen}(\omega t)$$

así, la ecuación diferencial para el sistema será:

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} + F_0 \text{sen}(\omega t) \quad (3.115)$$

La solución a la ecuación 3.115 toma la forma:

$$x = x_1 + x_2$$

donde  $x_2$  es una solución específica a la ecuación 3.115 y  $x_1$  es una solución general a la ecuación diferencial homogénea del sistema amortiguado, esto es, la ecuación para  $x_1$  será:

$$m\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + kx_1 = 0$$

La solución a ésta última ecuación es una oscilación amortiguada (para  $n < \omega_0$ ):

$$x_1 = Ae^{-nt} \text{sen}\left(\sqrt{\omega_0^2 - n^2}t + \alpha\right)$$

Si se asume que  $x_2$  es una oscilación estable:

$$x_2 = B \operatorname{sen}(\omega t - \varphi)$$

donde  $B$  es la amplitud de la oscilación resultante y  $\varphi$  es el corrimiento en la fase de la oscilación respecto de la aplicación de la fuerza sinusoidal. Si se sustituye  $x_2$  en la ecuación 3.115, se tiene:

$$[B(\omega_0^2 - \omega^2) - f \cos \varphi] \operatorname{sen}(\omega t - \varphi) + (2nB\omega - f \operatorname{sen} \varphi) \cos(\omega t - \varphi) = 0$$

donde  $f = F_0/m$ . Para satisfacer esta ecuación se tiene:

$$B(\omega_0^2 - \omega^2) - f \cos \varphi = 0$$

y

$$2nB\omega - f \operatorname{sen} \varphi = 0$$

Por lo tanto, se tiene que la amplitud y el corrimiento en la fase se expresan mediante:

$$B = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}} \quad (3.116)$$

y

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{2n\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (3.117)$$

Con lo cual, la solución a la ecuación 3.115 será:

$$x = Ae^{-nt} \operatorname{sen} \left( \sqrt{\omega_0^2 - n^2} t + \alpha \right) + B \operatorname{sen}(\omega t - \varphi)$$

Esta solución muestra que en los primeros instantes se presenta una salida de gran amplitud a la oscilación forzada y amortiguada, llevando el sistema de un sobrepaso a oscilaciones transitorias de corta duración.

### Frecuencia de oscilación

La frecuencia de una oscilación estable es la misma que la frecuencia de la fuerza de excitación. De cualquier modo, se presenta un corrimiento en la fase que es función de la frecuencia de oscilación libre  $\omega_0$ , la frecuencia de la fuerza de excitación y la razón de amortiguamiento o coeficiente de amortiguamiento relativo, tal como lo indica la ecuación 3.117.

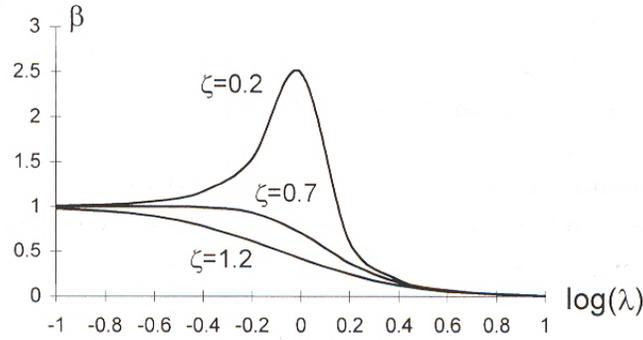


Figura 3.29: Relaciones entre la amplitud y la frecuencia para diferentes coeficientes de amortiguamiento.

### Amplitud

La amplitud de la oscilación estable está dada por la ecuación 3.116 y puede reescribirse como:

$$B = \frac{B_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\left(\frac{\zeta}{\omega_0}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

donde  $B_0 = F_0/k$  es el desplazamiento estático de la masa provocado por la fuerza constante  $F_0$ . Si  $\omega/\omega_0$  es indicado por  $\lambda$  y se introduce una amplitud relativa  $\beta = B/B_0$ , se tiene:

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + 4\zeta^2 \lambda^2}} \quad (3.118)$$

Para una fuerza de amplitud constante  $F_0$ , se presenta dependencia de  $\beta$  de la frecuencia de excitación.

1. Para el caso de frecuencias bajas,  $\omega \ll \omega_0$  o  $\lambda \ll 1$ ,  $\beta \approx 1$ , lo cual significa que la amplitud es la misma que el desplazamiento provocado por la fuerza constante  $F_0$ .
2. Para el caso en que  $\omega \approx \omega_0$  o  $\lambda \approx 1$ , la amplitud tiene un máximo en  $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ . Si el amortiguamiento es pequeño ( $\zeta < 0,7$ ),  $\omega$  es muy cercana a  $\omega_0$  y  $\beta$  es aproximadamente igual a  $1/2\zeta$ , cociente que se hará muy grande para valores pequeños de  $\zeta$ . El pico de resonancia desaparece en  $\zeta \geq 0,7$ . En este caso, la curva para la relación  $\beta \sim \omega$  tiene la mayor región plana (esto es, el mayor ancho de banda). Por lo tanto,  $\zeta = 0,7$  es frecuentemente conocido como condición óptima de amortiguamiento.
3. Para el caso en que  $\omega \gg \omega_0$  o  $\lambda \gg 1$  se tiene que  $\beta \approx 1/\lambda^2$ . Esto significa que la amplitud decae rápidamente con la frecuencia. La figura 3.29 contiene la gráfica que muestra la dependencia de la frecuencia de la amplitud relativa.

Puede apreciarse que la amplitud de una oscilación forzada está en función de la frecuencia de excitación y de la razón de amortiguamiento (coeficiente de amortiguamiento relativo).

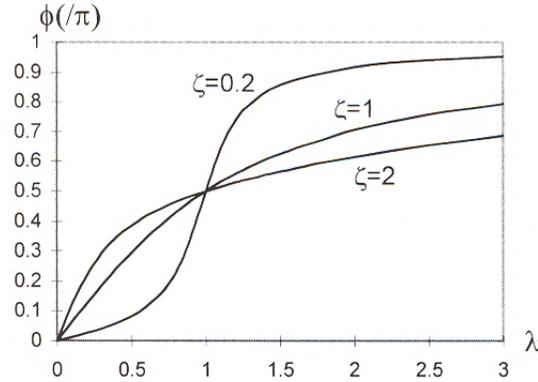


Figura 3.30: Corrimiento de fase de vibraciones forzadas para diferentes coeficientes de amortiguamiento.

### Corrimiento de la fase

La oscilación forzada toma su frecuencia de la fuerza de excitación, pero se presenta un corrimiento en la fase como el mostrado en la ecuación 3.117. Para una  $\omega$  pequeña,  $\varphi$  está cercana a cero.  $\varphi$  aumenta conforme  $\omega$  lo hace, alcanza  $\pi/2$  a la frecuencia natural del sistema y se aproxima a  $\pi$  a muy altas frecuencias, tal como muestra la gráfica de la figura 3.30.

### 3.5.4. Resonancia y factor de calidad

#### Frecuencia de resonancia

De acuerdo con la ecuación 3.118 para un amortiguamiento ligero, la amplitud tiene un máximo alrededor de la frecuencia de oscilación libre. Este fenómeno es conocido como resonancia y la frecuencia correspondiente es llamada, frecuencia de resonancia. Utilizando la condición  $d\beta/d\lambda = 0$ , se tiene que la frecuencia de resonancia de una oscilación forzada se presenta en  $\lambda_r = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$  o  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ . Ya que la frecuencia de la oscilación natural del sistema (sin amortiguamiento) es  $\omega_0$  y la frecuencia de la oscilación amortiguada es  $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$ , se tiene que para un amortiguamiento ligero,  $\omega_0$ ,  $\omega_d$  y  $\omega_r$  están muy cercanas entre sí.

En la frecuencia de resonancia la amplitud relativa alcanza un valor máximo:

$$\beta_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

Para un amortiguamiento ligero, se tiene la amplitud en resonancia:  $\beta_r \doteq 1/2\zeta$ .

#### Corrimiento en la fase en resonancia

Sustituyendo  $\omega_r$  en la ecuación 3.117, se tiene que el corrimiento en la fase en resonancia queda expresado por:

$$\varphi_r = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - 2\zeta^2}}{\zeta} \quad (3.119)$$

Para el caso de un amortiguamiento ligero,  $\varphi_r \doteq \tan^{-1}(1/\zeta) \doteq \pi/2$  o  $\zeta = 1/\tan \varphi_r$ .

### Factor de calidad

Para muchas aplicaciones de registro de mediciones, la agudeza del pico de resonancia es importante, a fin de lograr una alta resolución o una alta precisión en las mediciones. El parámetro que indica lo espigado de la curva de resonancia es el *Factor de Calidad* o *Factor Q* del sistema. Existen diversas definiciones para el factor de calidad y todas ellas son equivalentes para amortiguamientos leves.

La primera definición establece a  $Q$  como el valor pico de la amplitud relativa en la frecuencia de resonancia, es decir:

$$Q = \beta_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (3.120)$$

Por supuesto, se intuye de antemano que  $Q$  esté relacionado con la razón de amortiguamiento (coeficiente de amortiguamiento relativo)  $\zeta$ , de modo que entre más pequeño sea la razón de amortiguamiento, mayor será el factor de calidad.

La segunda definición toma en cuenta aspectos físicos.  $Q$  se define como la razón entre la energía total del sistema y la energía promedio perdida en un radián de frecuencia de resonancia, es decir:

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E} \quad (3.121)$$

donde  $E$  es la energía total de la oscilación del sistema y  $\Delta E$  es la energía disipada por el amortiguamiento en un ciclo (igual a  $2\pi$  radianes) de oscilación. La ecuación 3.121 se deduce a partir de la siguiente discusión.

Para un sistema oscilando en su frecuencia de resonancia  $\omega_r$ , el desplazamiento será:

$$x = A \operatorname{sen} \omega_r t$$

Y la energía total del sistema se obtiene a partir de:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega_r^2$$

La disipación de energía en un ciclo será:

$$\Delta E = - \int_0^T F_d \dot{x} dt$$

donde  $F_d$  es la fuerza de amortiguamiento, es decir,  $F_d = -c\dot{x}$ . Por lo tanto, se tiene:

$$\Delta E = \int_0^T c \dot{x}^2 dt = \pi c A^2 \omega_r$$

y

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E} = \frac{m\omega_r}{c} \quad (3.122)$$

Si se consideran  $n = \frac{c}{2m}$  y  $\zeta = \frac{n}{\omega_0} \cong \frac{n}{\omega_r}$ , se tiene  $Q \cong \frac{1}{2\zeta}$ .

La tercera definición para  $Q$  es similar a la definición de  $Q$  para un circuito eléctrico resonante. La energía de un sistema oscilatorio es proporcional al cuadrado de la amplitud de la oscilación. En resonancia, el sistema tiene su máxima energía:

$$E_r = C\beta_r^2$$

La amplitud relativa para un medio de la energía máxima es  $\beta_r/\sqrt{2}$ . Existen dos frecuencias para la amplitud: una que es menor que  $\omega_r$  y la otra que es mayor que  $\omega_r$ . Si las dos frecuencias se denominan como  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , se tiene que las frecuencias relativas correspondientes,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , pueden encontrarse por medio de la ecuación:

$$\frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4\zeta^2\lambda^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\beta_r$$

Tanto  $\lambda_1$  como  $\lambda_2$  se obtienen a partir de:

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{1-2\zeta^2} \left( 1 \pm \frac{\zeta}{1-2\zeta^2} \right)$$

Esto conduce a:

$$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{1-2\zeta^2} \frac{2\zeta}{1-2\zeta^2} = \frac{2\zeta}{\sqrt{1-2\zeta^2}}$$

Por lo tanto, para un amortiguamiento ligero, se tiene:

$$\frac{\lambda_r}{\Delta\lambda} = \frac{1-2\zeta^2}{2\zeta} \doteq \frac{1}{2\zeta}$$

Lo cual significa que el factor de calidad  $Q$  puede definirse también como:

$$Q = \frac{\lambda_r}{\Delta\lambda} \quad (3.123)$$

Es claro que las tres definiciones son equivalentes para una razón de amortiguamiento (coeficiente de amortiguamiento relativo) pequeña, es decir, para un valor grande de  $Q$ . Para microestructuras resonantes de silicio inmersas en aire, el valor del factor de calidad es usualmente del orden de  $10^2$  y puede alcanzar y rebasar valores en el orden de  $10^5$  en el vacío.

### La medición de $Q$

El factor  $Q$  es un parámetro muy importante para caracterizar un sistema oscilatorio. En tanto que la razón de amortiguamiento (coeficiente de amortiguamiento relativo) que determina el factor de calidad  $Q$  es normalmente muy pequeño y difícil de estimar teóricamente, el factor  $Q$  de un sistema es encontrado generalmente mediante mediciones experimentales.

El primer método se basa en la definición básica según la cual  $Q$  es igual a la amplitud relativa de la oscilación en resonancia del sistema,  $\beta_r$ . Por lo tanto, si se encuentra la relación amplitud-frecuencia para una fuerza de excitación constante con frecuencias que vayan desde cero hasta una frecuencia mayor que la frecuencia de resonancia,  $Q = \beta_r$  podrá encontrarse en la frecuencia de resonancia. Dado que los registros deberán cubrir un gran rango de frecuencias y la amplitud puede variar en varios órdenes de magnitud, dicho registro puede resultar lento e impreciso.

El segundo método toma en cuenta la ecuación 3.123 y encuentra  $Q$  mediante registros de amplitud y frecuencia en un rango pequeño alrededor de la frecuencia de resonancia. Primero se encuentra la frecuencia de resonancia  $f_r$  y la amplitud de la oscilación en resonancia  $A_r$ . A continuación se establece la relación amplitud-frecuencia alrededor de la frecuencia de resonancia mediante mediciones que ubiquen las frecuencias  $f_1$  y  $f_2$  cuyas amplitudes son  $A_r/\sqrt{2}$ . Finalmente el valor del factor  $Q$  se obtiene mediante la relación  $Q = f_r/(f_1 - f_2)$ .

El tercer método recurre a la primera definición del factor de calidad (3.120) y a la definición del corrimiento de fase en resonancia (3.119) y encuentra  $Q$  de forma indirecta a partir de su relación con la razón de amortiguamiento ( $\zeta$ ), el cual a su vez está relacionado con el corrimiento de la fase en resonancia. Por lo tanto, primero se encuentra la frecuencia radial de resonancia  $\omega_r$  y a partir de ello el corrimiento de fase  $\varphi_r$  en resonancia. Finalmente el factor de calidad  $Q$  puede calcularse mediante  $Q = \tan \varphi_r/2$ .

### 3.5.5. Oscilación provocada por una vibración

En muchos casos un sistema masa-resorte puede ser puesto a oscilar mediante su exposición a una vibración mecánica [33]. Por ejemplo, un acelerómetro montado sobre un generador eléctrico que vibra cuando está en funcionamiento. En estos casos, la fuerza de inercia aplicada sobre la masa de prueba del giroscopio está relacionada tanto con la frecuencia de la vibración como con la amplitud.

Considérese un acelerómetro micromaquinado montado sobre una máquina de dimensiones macroscópicas y asúmase que la masa del acelerómetro es mucho menor que la de la máquina, de modo tal que la vibración de la máquina no se ve afectada por su medición mediante el acelerómetro. El caso se ilustra en la figura 3.31:

El acelerómetro se representa mediante un sistema masa-resorte-amortiguador y su movimiento se encuentra restringido a una dimensión. La vibración de la máquina será:

$$x_M = d_0 \text{sen } \omega t$$

donde  $d_0$  es la amplitud de la vibración y  $\omega$  la frecuencia de la vibración. Si el desplazamiento de la masa de prueba es  $x_m$ , la fuerza elástica del resorte sobre la masa de prueba es  $-k(x_m - x_M)$  dado que el acelerómetro se mueve con la máquina. Por lo tanto, la ecuación diferencial para la masa de prueba será:

$$m\ddot{x} + c(\dot{x}_m - \dot{x}_M) + k(x_m - x_M) = 0 \quad (3.124)$$

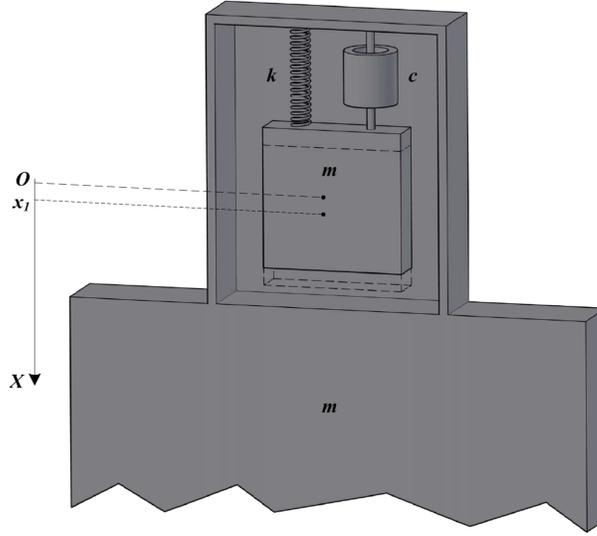


Figura 3.31: Oscilación inducida por una vibración mecánica.

Si se define el desplazamiento relativo de la masa de prueba respecto de la máquina como  $\xi = x_m - x_M$ , la ecuación 3.124 puede reescribirse como:

$$m\ddot{\xi} + c\dot{\xi} + k\xi = -m\ddot{x}_M = ma_0 \sin \omega t \quad (3.125)$$

donde  $a_0 = d_0\omega^2$  es la amplitud de la aceleración de la vibración.

La ecuación 3.125 es una ecuación diferencial para una oscilación forzada por una fuerza periódica  $ma_0 \sin \omega t = md_0\omega^2 \sin \omega t$ . Para una condición de amortiguamiento ligero, la solución a la ecuación será:

$$\begin{aligned} \xi &= B \sin(\omega t - \varphi) \\ B &= \frac{d_0(\omega^2/\omega_0^2)}{\sqrt{(1 - \omega^2/\omega_0^2)^2 + (\omega^2/\omega_0^2)/Q^2}} \\ \varphi &= \tan^{-1}\left(\frac{\omega\omega_0}{Q(\omega_0^2 - \omega^2)}\right) \end{aligned}$$

donde  $\omega_0$  es la frecuencia natural de la vibración del acelerómetro y  $\varphi$  es el corrimiento de fase.

Para el caso de una frecuencia de vibración baja,  $\omega \ll \omega_0$  y  $(1 - \omega^2/\omega_0^2) \gg \omega/Q\omega_0$ , se tiene  $\varphi \approx 0$  y

$$B = \frac{d_0\omega^2/\omega_0^2}{1 - \omega^2/\omega_0^2} \doteq d_0 \left( \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{\omega^4}{\omega_0^4} \right)$$

El desplazamiento de la masa de prueba con respecto de la máquina se calcula a partir de:

$$\xi = \frac{md_0\omega^2}{k} (1 + \omega^2/\omega_0^2) \sin \omega t \quad (3.126)$$

Para la calibración del acelerómetro, la amplitud de aceleración  $d_0\omega^2$  frecuentemente se mantiene constante pero se varía la frecuencia de la vibración. Dado que la salida del acelerómetro es normalmente proporcional a  $\xi$ , la ecuación 3.126 establece que la sensibilidad del acelerómetro es una función de la frecuencia de vibración:

$$S(\omega) = \frac{md_0\omega^2}{k} (1 + \omega^2/\omega_0^2) \equiv S_0 (1 + \omega^2/\omega_0^2) \quad (3.127)$$

donde  $S_0 = md_0\omega^2/k$  es la sensibilidad a muy baja frecuencia y  $S(\omega)$  es la sensibilidad a la frecuencia  $\omega$ . Puede mostrarse que la sensibilidad  $S(\omega)$  es mayor que  $S_0$  por 10% a una frecuencia de  $\omega = 0,316\omega_0$  para un acelerómetro con amortiguamiento ligero.

Si la frecuencia de vibración  $\omega$  iguala la frecuencia de resonancia  $\omega_{res}$  del acelerómetro, se tiene  $B = Qd_0$ . Esto significa que la amplitud de la vibración de la masa de prueba puede ser mucho mayor que la de la vibración de excitación si el acelerómetro no está adecuadamente amortiguado.

Para el caso de una frecuencia de vibración alta,  $\omega \gg \omega_0$ , se tiene  $B = d_0$  y  $\varphi = 180^\circ$ . Por lo tanto,  $\xi = x_m - x_M = -d_0 \sin \omega t$  o  $x_m \approx 0$ . Esto significa que a alta frecuencia, la masa de prueba no sigue del todo a la vibración. Dado que la masa de prueba se mantiene estática si se observa desde el sistema de referencia que tiene asociado, su desplazamiento relativo respecto de su base de sujeción puede emplearse como un espejo para observar la vibración de la máquina. En este caso, la amplitud, en lugar de la aceleración, de la vibración puede ser registrada.

