

## Capítulo 8

# Conceptos básicos de los acelerómetros

### 8.1. Descripción general

Se iniciará por la definición de aceleración como cantidad física que resulta de interés registrar. La aceleración es una cantidad física que indica el ritmo o tasa con que aumenta o disminuye la velocidad de un móvil en función del tiempo. Su definición completa requiere señalar dirección y magnitud, razón por la que normalmente se representa mediante un vector. Sus dimensiones son longitud entre tiempo al cuadrado y sus unidades, según el sistema internacional, son  $m/s^2$ .

Los acelerómetros típicamente consisten de cuatro componentes: una masa móvil, llamada masa de prueba o masa sísmica; una suspensión formada por uno o varios soportes y resortes elásticos; un amortiguador; y un mecanismo mediante el cual se registra el desplazamiento de la masa móvil. La masa se utiliza para generar una fuerza debida a la aceleración o desaceleración del cuerpo sobre el que está montado el acelerómetro. La suspensión sujeta la masa móvil y cumple funciones de soporte rígido (de forma que impide el desplazamiento de la masa en las direcciones  $y$  y  $z$ , por ejemplo) y de resorte (de modo que regresa la masa a su posición original en la dirección  $x$ , una vez que la aceleración desaparece). El amortiguador es generalmente el volumen de aire, o ambiente controlado, capturado dentro del encapsulado o cavidad que rodea al dispositivo y se diseña para controlar el comportamiento de la masa móvil con el fin de obtener características favorables en la respuesta en frecuencia. El desplazamiento de la masa se transforma en una señal eléctrica de salida gracias al mecanismo de registro. Los acelerómetros lineales son clasificados en planares (registran sobre el eje  $x$  o  $y$ ) y fuera de plano (registran sobre el eje  $z$ ). La elección de ejes de registro se determina principalmente por las características de la aplicación. Actualmente existen prototipos de acelerómetros con capacidad de registro en los tres ejes cartesianos dentro de un mismo encapsulado.

Para analizar la operación del acelerómetro será necesario iniciar con la llamada segunda Ley del Movimiento de Newton, la cual mediante la ecuación 8.1 expresa la relación entre fuerza, aceleración y masa. Siendo las dos primeras cantidades vectoriales.

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (8.1)$$

A partir de esta ecuación es fácil comprender que la aceleración de un cuerpo (masa) se puede determinar midiendo la fuerza que actúa sobre dicho cuerpo. Un cuerpo (masa) sobre la superficie terrestre experimenta una aceleración de  $9,8 m/s^2$  o  $1 g$  si se le deja en caída libre. El cambio en la velocidad del cuerpo (masa) como función del tiempo es la aceleración que dicho cuerpo experimenta y de acuerdo con lo señalado por la

ecuación 8.1 se requiere de una fuerza actuando sobre él (masa) para crear los cambios de velocidad. Dado que no tiene significado hablar de la masa como un escalar negativo, es evidente que la fuerza y la aceleración como cantidades vectoriales tienen la misma dirección y sentido.

Dado que los acelerómetros son dispositivos que determinan la fuerza necesaria para crear un cambio de velocidad, al mantener la masa constante y acelerar el cuerpo o estructura sobre la que se encuentra montado el acelerómetro, el resorte que conecta la masa con la estructura es el medio de transmisión mecánica de la aceleración; el cual al no ser un cuerpo rígido se ve afectado por la inercia de la masa (se opone al movimiento) y cambia su longitud. El resorte se elonga o contrae como consecuencia del sentido de la aceleración (dado que el movimiento de la masa se encuentra restringido a uno de tipo rectilíneo) y dicha deformación medida en unidades de longitud es proporcional a la fuerza que la provoca. Así, la relación entre el desplazamiento del resorte y la fuerza que actúa directa o indirectamente sobre él se expresa mediante la ecuación 8.2.

$$\bar{F} = k\bar{x} \quad (8.2)$$

dónde  $k$  es una constante escalar de proporcionalidad entre la fuerza y el desplazamiento y se le conoce como constante del resorte. La medición del desplazamiento de la masa móvil respecto de la estructura de montaje es en realidad una cuantificación directa de la aceleración.

Cuando no existe fuerza alguna de fricción o amortiguamiento que se oponga a la fuerza que provoca la aceleración, el desplazamiento de la masa móvil se presenta en proporción directa a dicha aceleración. Cuando la velocidad y el sentido de movimiento se invierten, la tendencia del cuerpo a mantener su estado provoca un sobrevuelo en el desplazamiento y agrega una fuerza actuante sobre el resorte en oposición a la fuerza que genera la aceleración. Si este movimiento continúa de forma armónica con una frecuencia de oscilación tal que se agrega una fuerza sobre el resorte en oposición a la aceleración, cada vez que se invierte el sentido de movimiento, y además, no existen fuerzas de amortiguamiento o fricción, se presentará un desplazamiento superior al generado por la fuerza que induce la aceleración, alrededor de la frecuencia natural de resonancia del sistema masa-resorte.

El desplazamiento en la frecuencia natural se maximiza 90 grados desfasado respecto de la aceleración del cuerpo o estructura de montaje. De cualquier forma, cómo ya se ha mencionado, los sistemas masa-resorte en la mayoría de las configuraciones de los acelerómetros encuentran fuerzas de fricción o de arrastre en un medio viscoso (aire) que actúan sobre la masa móvil y que en consecuencia amortiguan las oscilaciones. Estas fuerzas de amortiguamiento generan desplazamientos no-lineales y, cómo se verá más adelante, afectan el ancho de banda y los rangos de frecuencias útiles del sistema. De este modo, cuando se habla de un acelerómetro en realidad se habla de un sistema masa-resorte-amortiguador cuya ecuación general en el dominio del tiempo se expresa como:

$$ma = m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx \quad (8.3)$$

lo que arroja la siguiente función de transferencia para dicho sistema:

$$H(s) = \frac{X(s)}{A(s)} = \frac{1}{s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}} \quad (8.4)$$

dónde  $c$  es el coeficiente de amortiguamiento de la masa móvil. Es importante señalar que la configuración mecánica presente en el acelerómetro fue estudiada en la sección 5 del capítulo 3 de este trabajo. En dicha sección se abordaron la respuesta en frecuencia, la frecuencia de resonancia y el factor de calidad de este tipo de sistemas.

Si se tienen en cuenta las definiciones de  $\omega_0^2$  y  $Q$  expresadas mediante las ecuaciones 3.109 y 3.122, respectivamente, y se atiende la discusión de la subsección 3.5.4, la ecuación 8.4 puede expresarse del siguiente modo:

$$H(s) = \frac{X(s)}{A(s)} = \frac{1}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

A partir de la ecuación 3.127 (para sistemas con amortiguamiento ligero) es posible obtener la sensibilidad mecánica (desplazamiento respecto de la aceleración) para acelerómetros operando a frecuencias mucho menores que su frecuencia de resonancia:

$$S_{mec} = \frac{m}{k} = \frac{1}{\omega_0^2} \quad (8.5)$$

Dicha ecuación muestra el compromiso existente en un sistema masa-resorte-amortiguador entre la sensibilidad mecánica y la frecuencia natural de oscilación (la cual puede ser coincidente o muy cercana a la frecuencia de resonancia en sistemas sin amortiguamiento o con muy baja disipación). Este compromiso entre sensibilidad mecánica y frecuencia natural de oscilación puede superarse colocando un sistema de control en lazo cerrado para la realimentación de fuerza sobre el elemento mecánico de registro como se ha señalado en la sección 6.1.4. Para una discusión más detallada sobre la sensibilidad de un sistema masa-resorte-amortiguador consúltese la subsección *Oscilación provocada por una vibración* del capítulo 3.

Es importante señalar que las frecuencias de resonancia de los acelerómetros basados en Sistemas Microelectromecánicos se encuentran en el rango de 100 a 20 mil  $Hz$  y los factores de calidad pueden ser desde inferiores a la unidad para acelerómetros sobreamortiguados hasta superiores a 100 para acelerómetros subamortiguados.

La presencia de fuerzas de amortiguamiento debidas al desplazamiento de la masa móvil en un medio viscoso completan el sistema masa-resorte-amortiguador. El amortiguamiento tienen dos fuentes o modalidades: la primera debida al deslizamiento de la masa móvil sobre las delgadas capas de aire atrapadas entre ella y la placa de semiconductor (oblea) y la segunda debida a la compresión del aire atrapado entre los perfiles de los electrodos (peine electrostático). Sin embargo, el coeficiente de amortiguamiento no puede considerarse como absolutamente invariable, pues depende en buena medida del diseño mecánico del acelerómetro y se incrementa con la deflexión vertical de los soportes de la masa móvil y con la frecuencia de oscilación de la masa.

Dado que la respuesta dinámica del sistema se ve afectada considerablemente por el amortiguamiento, debe cuidarse su magnitud en relación con otros parámetros de diseño. Por ejemplo, para un ancho de banda máximo, el elemento mecánico de registro debe estar críticamente amortiguado; y se puede mostrar que para  $c = 2m\omega_0$  es el caso.

Finalmente, la cuantificación de la aceleración se hace mediante el registro del desplazamiento de la masa móvil (en relación con el cuerpo o estructura sobre la que está montado el acelerómetro) y su transformación en una señal eléctrica a través de distintos mecanismos de transducción; los más comunes son: un puente piezoresistivo (que aprovecha la variación de la resistencia eléctrica en materiales semiconductores ante la presencia de cargas mecánicas), un arreglo capacitivo variable (formado a partir de electrodos paralelos

móviles y fijos debidamente intercalados) o una celda piezoeléctrica (que aprovecha la generación de una polarización interna en respuesta a una tensión mecánica en materiales cristalinos). El voltaje obtenido como resultado de la transducción del desplazamiento se acondiciona mediante procesos de amplificación, filtrado y, eventualmente, conversión digital.

## 8.2. Configuración geométrica de un acelerómetro micromaquinado

A partir de las reglas de diseño del proceso PolyMumps se discutirá la forma de crear los distintos elementos que forman un acelerómetro micromaquinado capacitivo. Se iniciará con las capas y trabajos para la creación de la masa móvil (masa de prueba o masa sísmica). Se continuará con la creación de la suspensión mecánica a partir de arreglos de vigas voladas pegadas a la masa móvil, rígidas en las direcciones  $y$  y  $z$  y flexibles en la dirección  $x$  (definición que es arbitraria y que en nada afecta los análisis realizados). Se discutirá el amortiguamiento, sus distintas fuentes y modelado de acuerdo con las características del proceso PolyMumps. Se continuará con la configuración del transductor de desplazamiento a voltaje (peine electrostático en modo pasivo). Y se concluirá con la configuración del mecanismo de realimentación de fuerza (peine electrostático en modo activo) para mejorar la respuesta del sistema. En las discusiones sucesivas se adoptará como convención para la orientación de los ejes del espacio cartesiano la siguiente regla: el eje de las abscisas corresponde al ancho de las estructuras, el eje de las ordenadas corresponde al largo y el eje de las cotas corresponde al grosor o altura.

### 8.2.1. Masa móvil

La masa móvil se creará a partir del apilamiento de material de las capas estructurales móviles: Poly1 y Poly2. Para obtener la masa de una placa creada mediante este procedimiento se calculará el volumen de cada capa de material apilado y se multiplicará por su densidad. El grosor de la capa Poly1 es de  $2\ \mu\text{m}$  y el de la capa Poly2 es de  $1.5\ \mu\text{m}$  y es la única característica dimensional que el diseñador no puede modificar. Por otra parte, la densidad del silicio policristalino, de acuerdo con lo señalado en el Apéndice 2, es de:  $2,330\ \text{[kg/m}^3\text{]}$  o  $2,33 \times 10^{-15}\ \text{[kg}/\mu\text{m}^3\text{]}$ . Para la generación de la masa móvil por apilamiento de Poly1 y Poly2 se deben violar las reglas de diseño H, L, O y Q que marcan las distancias mínimas de rebase entre Poly1 y Poly-Poly2 Via, Poly2 y Poly1-Poly2 Via y Poly2 respecto de Poly1, según lo señalado en el apartado 10 de la sección *Más allá de las reglas de diseño del Manual de diseño con PolyMumps [81]*.

Al tratarse de placas muy largas y anchas será necesario colocarles agujeros de liberación para garantizar la penetración de los atacantes químicos empleados durante el proceso de remoción de las capas de sacrificio. De acuerdo con las reglas de diseño, los agujeros hechos en la capa Poly1 deben encerrar a los agujeros hechos en la capa Poly2 de modo que se garantice su adecuado grabado. Estos agujeros serán restados del volumen y por tanto de la masa total de las placas.

Así, para una placa de  $90\ \mu\text{m}$  por  $60\ \mu\text{m}$ , con sus respectivos agujeros de liberación (de  $4\ \mu\text{m}$  por  $4\ \mu\text{m}$ ) espaciados según las reglas de diseño ( $30\ \mu\text{m}$ ), con un grosor de  $2\ \mu\text{m}$ , la masa total será de:  $2,5015 \times 10^{-11}\ \text{[kg]}$ .

Para una placa con el mismo ancho y largo, con sus respectivos agujeros de liberación (de  $4\ \mu\text{m}$  por  $4\ \mu\text{m}$  en la primera capa de polisilicio y de  $8\ \mu\text{m}$  por  $8\ \mu\text{m}$  en la segunda capa, con un espaciado de  $30\ \mu\text{m}$ ), pero con un grosor de  $3.5\ \mu\text{m}$ , la masa total será de:  $4,3441 \times 10^{-11}\ \text{[kg]}$ .

Es importante que debajo de la masa móvil se coloque una plancha de polisilicio que sirva como referencia mecánica (para nivelación del depósito de las capas subsiguientes) utilizando la capa Poly0. Debe tenerse cuidado de aislar eléctricamente esta plancha para evitar generar un electrodo que atraiga la masa móvil cuando se polarice el transductor mecánico-electrico. La plancha en Poly0 debe rebasar en  $4\ \mu\text{m}$  por lado las dimensiones de la masa móvil para garantizar que no se presenten escurrimientos indeseados.

Si se desea ganar mayor masa sin crecer más las dimensiones de ancho y largo de la masa móvil, es conveniente utilizar la capa Metal del proceso PolyMumps. Esta capa se encuentra adherida a la capa Poly2, tiene un grosor de  $0.5 \mu\text{m}$  y está formada por oro que es mucho más denso que el polisilicio ( $19,300 \text{ [kg/m}^3]$  o  $19,3 \times 10^{-15} \text{ [kg}/\mu\text{m}^3]$ ). Los únicos aspectos que debe cuidarse son el encierro de la capa Metal por la capa Poly2 por al menos  $3 \mu\text{m}$  y los agujeros de la capa Metal que deben encerrar a los agujeros de la capa Poly2 en  $2 \mu\text{m}$  y deben estar espaciados entre sí  $30 \mu\text{m}$  como máximo.

Así, para una placa con un ancho de  $90 \mu\text{m}$  por  $60 \mu\text{m}$  con recubrimiento de oro, sus respectivos agujeros de liberación y un grosor de  $4 \mu\text{m}$  apilando las capas Poly1, Poly2 y Metal, la masa total será de:  $8,4434 \times 10^{-11} \text{ [kg]}$ . Es muy importante señalar que la rigidez del silicio policristalino es tal que la masa móvil es suficientemente rígida para no combarse o flexionarse por efecto de su propio peso en placas cuyas dimensiones se encuentran en el rango de los milímetros.

Los electrodos del mecanismo de transducción mecánico-eléctrico agregan masa a la placa móvil pues se encuentran pegados a ella y deben considerarse en el cálculo de la masa total de la masa de prueba o masa sísmica. Por otra parte, en general se desprecia la masa representada por las vigas voladas que forman la estructura de suspensión de la masa móvil, aún cuando están pegados a ella, debido a que actúan como los resortes y son al menos dos órdenes de magnitud menor.

Normalmente la conexión eléctrica de la masa móvil se hace a través de la suspensión mecánica, es decir, las vigas voladas que sostienen la masa móvil y que actúan como soportes y resortes también son los conductores eléctricos para la polarización del transductor mecánico eléctrico.

En la siguiente tabla, se hacen los calculos de la masa total para pequeñas celdas formadas a partir del apilamiento de las capas de material estructural del proceso PolyMumps.

Área [ $\mu\text{m}^2$ ]	Poly1 [kg]	Poly1+Poly2 [kg]	Poly1+Poly2+Metal [kg]	Agujeros
$10 \times 10$	$4,66 \times 10^{-13}$	$8,155 \times 10^{-13}$	$9,7 \times 10^{-13}$	No requiere
$20 \times 20$	$1,864 \times 10^{-12}$	$3,262 \times 10^{-12}$	$5,1534 \times 10^{-12}$	No requiere
$30 \times 30$	$4,194 \times 10^{-12}$	$7,3395 \times 10^{-12}$	$1,2898 \times 10^{-11}$	No requiere
$60 \times 60$	$1,6701 \times 10^{-11}$	$2,9060 \times 10^{-11}$	$5,581 \times 10^{-11}$	1
$90 \times 90$	$3,7448 \times 10^{-11}$	$6,4863 \times 10^{-11}$	$1,2739 \times 10^{-10}$	5
$120 \times 120$	$6,6433 \times 10^{-11}$	$1,1475 \times 10^{-10}$	$2,2765 \times 10^{-10}$	9
$60 \times 30$	$8,388 \times 10^{-12}$	$1,4679 \times 10^{-11}$	$2,7185 \times 10^{-11}$	No requiere
$90 \times 30$	$1,2582 \times 10^{-11}$	$2,2019 \times 10^{-11}$	$4,1473 \times 10^{-11}$	No requiere
$90 \times 60$	$2,5015 \times 10^{-11}$	$4,3441 \times 10^{-11}$	$8,4434 \times 10^{-11}$	2
$120 \times 30$	$1,6776 \times 10^{-11}$	$2,9358 \times 10^{-11}$	$5,576 \times 10^{-11}$	No requiere
$120 \times 60$	$3,3328 \times 10^{-11}$	$5,7821 \times 10^{-11}$	$1,1306 \times 10^{-10}$	3
$120 \times 90$	$4,9881 \times 10^{-11}$	$8,6285 \times 10^{-11}$	$1,7036 \times 10^{-10}$	6

### 8.2.2. Suspensión

La suspensión del acelerómetro se forma a partir de vigas voladas. Lo ideal en el comportamiento de la suspensión es que sea rígida en aquellas direcciones en las que no se desean efectuar mediciones y flexible en aquellas en las que se desea obtener registros. Para el caso del acelerómetro de un eje la suspensión debe ser rígida en dos de las tres direcciones coincidentes con los ejes ortogonales del espacio cartesiano, normalmente  $y$  y  $z$ , y flexible en la tercera dirección,  $x$ ; para el caso del acelerómetro de dos ejes la suspensión debe ser rígida en  $z$  y flexible en  $x$  y  $y$ . Para lograrlo, se crean arreglos geométricos a partir de vigas voladas, algunos de los cuales se mencionan en la tabla siguiente y se analizan a continuación:

Nombre de la suspensión	Rígido	Flexible
Simple	$y$	$x$ y $z$
Un doblez	$y$	$x$ y $z$
Doble doblez	$y$	$x$ y $z$
Serpentin	$y$ y $z$	$x$
De caja	$y$ y $z$	$x$
De caja con los bordes circulares	$y$ y $z$	$x$
Sagital	$y$ y $z$	$x$
Doble V	$y$	$x$ y $z$
Patas de cangrejo	$y$	$x$ y $z$
Langosta	$y$	$x$ y $z$
Tipo X	$y$	$x$ y $z$
Radial con vigas curvadas	- - -	$\theta$ y $z$
Espiral	- - -	$\theta$ y $z$

En algunos procesos de fabricación es posible lograr mayor rigidez en la dirección  $z$  aumentando el grosor de las vigas voladas que forman la suspensión, en el caso de PolyMumps esta situación está acotada a  $3.5 \mu\text{m}$  apilando las dos capas estructurales móviles (Poly1 y Poly2), lo cual en principio sería suficiente para hacer la suspensión más rígida en la dirección  $z$  que en la dirección  $x$ , pues el ancho o largo mínimo de cualquier estructura en Poly1 o Poly2 es de  $2\mu\text{m}$ ; sin embargo, la violación a las reglas de diseño para apilar las capas de Poly1 y Poly2 imponen una limitante en la relación entre el grosor y ancho de las vigas para evitar su fractura durante el proceso de grabado de la capa Poly2 y su posterior liberación, esta debe ser 1 a 1, lo que implica que el ancho mínimo de las vigas voladas formadas por apilamiento será de  $3.5 \mu\text{m}$  [81]; con lo cual se tendrá la misma rigidez en las direcciones  $z$  y  $x$ . En cuanto a la dirección  $y$ , la constante de rigidez de una viga sometida a compresión o elongación es cuatro órdenes de magnitud mayor que la constante de rigidez de esa misma viga sometida a flexión [82], por lo que con sólo colocar las vigas voladas de modo que su largo coincida con el eje de las ordenadas se limita el movimiento en dicha dirección.

Para la obtención de las constantes de rigidez de cada arreglo geométrico serán útiles las expresiones para calcular la rigidez total de resortes conectados en serie y en paralelo. Para el primer caso se tiene:

$$k_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \dots + \frac{1}{k_n}}$$

Para el segundo caso se tiene:

$$k_{eq} = k_1 + \dots + k_n$$

Una simple viga volada sujeta a la masa móvil del acelerómetro se considera como un resorte, por lo tanto, las suspensiones creadas a partir de arreglos geométricos de vigas voladas, son en realidad conexiones en serie y paralelo de resortes. La expresión para el cálculo de la constante de rigidez de una viga volada sometida a flexión lateral se obtiene a partir de la ecuación 3.42. Dicha expresión se obtuvo para una viga con carga concentrada en el extremo libre y libertad de giro en dicho extremo, cuya flexión será vertical (se presentará en el plano  $yz$  si se considera el largo de la viga coincidente con el eje de las ordenadas y al eje de las cotas como normal al plano de referencia formado por el sustrato). Pero en virtud de que la suspensión se flexionará en la dirección  $x$  cuando se presente una aceleración se hará el recalcu de la expresión 3.42; así, para una viga que se flexiona lateralmente y su extremo libre tiene libertad de giro, la expresión para la obtención de su constante de rigidez es:

$$k = \frac{Ehb^3}{4L^3} \quad (8.6)$$

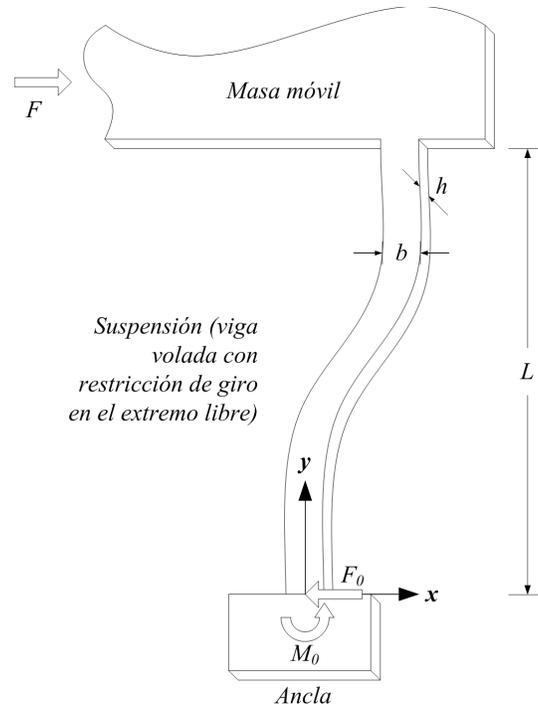


Figura 8.1: Suspensión formada a partir de vigas voladas sometidas a flexión lateral con restricciones de giro en su extremo adherido a la masa móvil.

En dónde  $b$ ,  $h$  y  $L$  son el ancho, grosor y longitud de la viga volada y  $E$  es módulo de Young para el silicio policristalino. Sin embargo, en los casos de las suspensiones que se utilizarán para mantener suspendida la masa móvil del acelerómetro, el extremo libre con la carga (aquel pegado a la masa móvil) no tiene libertad de giro, por lo que el coeficiente de rigidez o constante de elasticidad difiere considerablemente. De acuerdo con la figura 8.1 sea  $F$  una fuerza que provoca una aceleración  $a$  a la masa móvil pegada al extremo de la viga volada y considérese:

1. que la masa de la viga es mucho menor que la masa móvil, de modo tal que el peso de la viga puede ser despreciado, y
2. que la rigidez de la viga volada en la dirección del eje de las cotas ( $z$ ) es tal que el peso de la masa móvil no genera flexión alguna en la viga.

Para balancear la fuerza  $F$ , debe existir una fuerza de soporte,  $F_0$ , actuando sobre la viga, en el extremo anclado. La condición de balance de fuerzas en la dirección  $x$  lleva a establecer que  $F_0 = F$ . Además, debe existir un momento de flexión restrictivo,  $M_0$ , en el extremo anclado de la viga que balancee el momento de flexión provocado por la fuerza  $F$ .

El momento en el extremo anclado que es producido por el efecto de la fuerza es igual a  $FL$ , y el sentido en el que se presenta es horario. Para balancear los momentos de flexión, el momento de flexión restrictivo,  $M_0$ , debe ser igual a  $FL$ , en sentido antihorario. A partir de una posición  $y$  cualquiera, como se muestra en la figura 8.2, el momento de flexión a la izquierda queda expresado por  $-M_0 + F_0y$  y el momento de flexión a la derecha es igual a  $-\frac{F(L^2-y^2)}{2L} + \frac{F(L-y)^2}{2L}$  [83]. Considerando que se encuentra en equilibrio estático, se tiene que los momentos a izquierda y derecha de la posición  $y$  son iguales, es decir,  $M(y) = -\frac{F(L^2-y^2)}{2L} + \frac{F(L-y)^2}{2L}$ . Por lo tanto, la ecuación diferencial para calcular el desplazamiento en la dirección  $y$ , es decir,  $f(y)$  será:

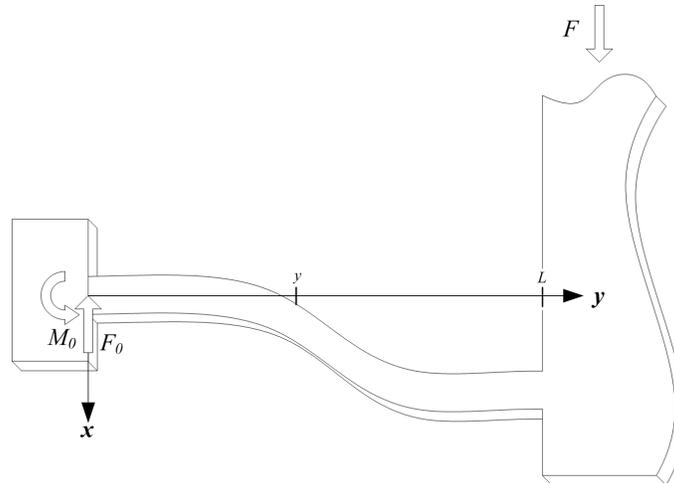


Figura 8.2: Equilibrio de fuerzas y momentos.

$$-EI f''(y) = -\frac{F(L^2 - y^2)}{2L} + \frac{F(L - y)^2}{2L} \quad (8.7)$$

Si además se considera que  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 0$  y  $f''(L) = 0$ , la solución a la ecuación 8.7 será:

$$f(y) = \frac{F}{2EIL} \left[ \frac{2Ly^3}{6} - \frac{y^4}{6} \right] = \frac{ma}{2EIL} \left[ \frac{2Ly^3}{6} - \frac{y^4}{6} \right] \quad (8.8)$$

Por lo que el desplazamiento máximo en el extremo libre de la viga se calcula a partir de:

$$\begin{aligned} f_{\text{máx}} &= f(L) = \frac{maL^3}{12EI} \text{ e } I = \frac{hb^3}{12} \\ \therefore f_{\text{máx}} &= f(L) = \frac{maL^3}{Ehb^3} \end{aligned} \quad (8.9)$$

De dónde se obtiene el valor para  $k$ :

$$k = \frac{Ehb^3}{L^3} \quad (8.10)$$

Con lo que el valor para la constante de elasticidad o rigidez en una viga (resorte) con restricciones de giro en su extremo libre resulta cuatro veces mayor que la obtenida para una cuyo extremo gira sin restricciones. Así para una suspensión formada por vigas voladas simples adheridas a la masa móvil, la constante de rigidez total se calculará a partir de la ecuación 8.10 multiplicándola por el número de vigas adheridas a la masa.

Por otra parte, es muy importante analizar la rigidez de las suspensiones en la dirección normal al plano de movimiento (regularmente  $z$ ) en los dispositivos inerciales como el acelerómetro para anticipar un posible

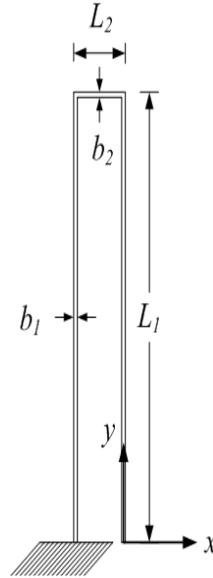


Figura 8.3: Suspensión formada a partir de una viga volada doblada.

colapso de la suspensión debido al peso de la masa suspendida y porque cualquier flexión en la dirección normal al plano de movimiento tendrá un impacto importante en el coeficiente de amortiguamiento del sistema.

Así, la rigidez en la dirección  $z$  para la viga volada recién analizada será:

$$k_z = \frac{Ebh^3}{L^3}$$

Para una suspensión formada por una viga con un doblez [84] como la mostrada en la figura 8.3, la constante de elasticidad (o rigidez) en la dirección  $x$  será:

$$k = \frac{3EI}{L_1^3} \left( \frac{L_2\psi + 2L_1}{2L_2\psi + L_1} \right) = \frac{Eh}{4} \left( \frac{b_1}{L_1} \right)^3 \left( \frac{L_2\psi + 2L_1}{2L_2\psi + L_1} \right)$$

dónde  $\psi = (b_1/b_2)^3$ . Si además se cumple que  $b_1 = b_2 = b$ , la expresión se simplifica y queda como:

$$k = \frac{3EI}{L_1^3} \left( \frac{L_2 + 2L_1}{2L_2 + L_1} \right) = \frac{Ehb^3}{4L_1^3} \left( \frac{L_2 + 2L_1}{2L_2 + L_1} \right)$$

Para esta suspensión la rigidez en la dirección  $z$  se calcula a partir de:

$$k_z = \frac{3EGI_y I_t}{3EI_y L_2 (L_1^2 + L_1 L_2) + GI_t (2L_1^3 + L_2^3)}$$

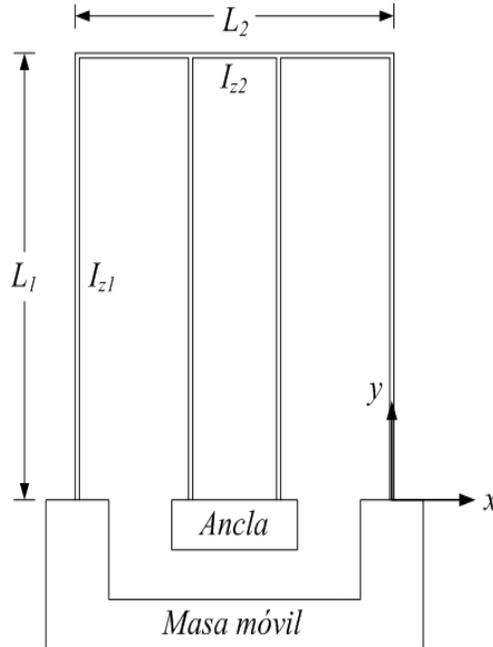


Figura 8.4: Suspensión formada a partir de un par de vigas voladas dobladas y conectadas entre sí.

dónde  $I_y$  es el momento de inercia para las flexiones en la dirección  $z$ , el cual se obtiene mediante  $I_y = \frac{bh^3}{12}$ ,  $I_t$  es el momento de inercia torsional, el cual para secciones transversales muy delgadas,  $b \ll h$ , se calcula a través de  $I_t = \frac{b^3h}{3}$  o para el caso en que  $h \ll b$ ,  $I_t$  se obtiene a partir de  $I_t = \frac{bh^3}{3}$  o para el caso en que el grosor es menor o igual que el ancho de la viga,  $h \leq b$ ,  $I_t$  se calcula a través de  $I_t = \frac{bh^3(\frac{16}{3} - \frac{3.36h}{b})}{16}$  y  $G$  es el módulo volumétrico, el cual se obtiene mediante  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ .

Para una suspensión del tipo doble dobléz [85] como la mostrada en la figura 8.4, la constante de elasticidad (o rigidez) en la dirección  $x$  será:

$$k = \frac{12EI_{z1}}{L_1^3} \frac{L_{21}^2 + 14L_{21}\kappa + 36\kappa^2}{4L_{21}^2 + 41L_{21}\kappa + 36\kappa^2}$$

dónde  $L_{21} = L_2/L_1$  y  $\kappa = I_{z2}/I_{z1}$ . Para el caso en que  $I_{z2} \gg I_{z1}$  se tiene que:

$$k = \frac{12EI_{z1}}{L_1^3}$$

Para esta suspensión la rigidez en la dirección  $z$  se calcula a partir de:

$$k_z = \frac{3EI_y}{L_1^3}$$

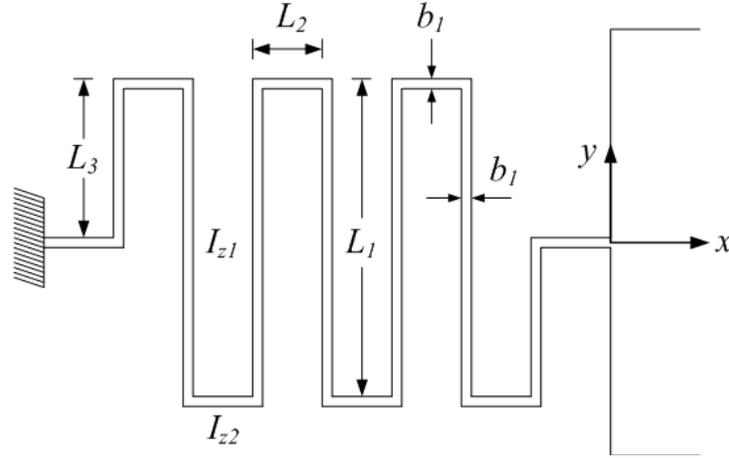


Figura 8.5: Suspensión tipo serpiente. Muy útil en microensambles.

dónde  $I_y$  es el momento de inercia para las flexiones en la dirección  $z$ , el cual se obtiene mediante  $I_y = \frac{bh^3}{12}$ .

Para una suspensión del tipo serpiente [86] como la mostrada en la figura 8.5, con un ancho y grosor idéntico en cada elemento, la constante de elasticidad (o rígeidez) en la dirección  $x$  con un número par de segmentos será:

$$k_x = \frac{48[(\gamma + L_1)n^2 - 3L_1n + 2L_1]EI_{z1}}{L_1^2[(3\gamma^2 + 4\gamma L_1 + L_1^2)n^3 - 2L_1(5\gamma + 2L_1)n^2 + (5L_1^2 + 6\gamma L_1 - 9\gamma^2)n - 2L_1^2]}$$

dónde  $\gamma = I_{z1}L_2/I_{z2}$  y  $n$  es el número de segmentos del serpiente. Por otra parte, para un número impar de segmentos, la constante de elasticidad en la dirección  $x$  será:

$$k_x = \frac{48[(\gamma + L_1)n - L_1]EI_{z1}}{L_1^2(n-1)[(3\gamma^2 + 4\gamma L_1 + L_1^2)n + 3\gamma^2 - L_1^2]}$$

Para este mismo tipo de suspensión, la constante de elasticidad (o rígeidez) en la dirección  $y$  con un número par de segmentos será:

$$k_y = \frac{48[(3\gamma + L_1)n - L_1]EI_{z1}}{L_2^2n[(3\gamma^2 + 4\gamma L_1 + L_1^2)n^3 - 2L_1(5\gamma + 2L_1)n^2 + (5L_1^2 + 6\gamma L_1 - 9\gamma^2)n - 2L_1^2]}$$

Y para un número impar de segmentos:

$$k_y = \frac{48EI_{z1}}{L_2^2n[(\gamma + L_1)n^2 - 3L_1n + 2L_1]}$$

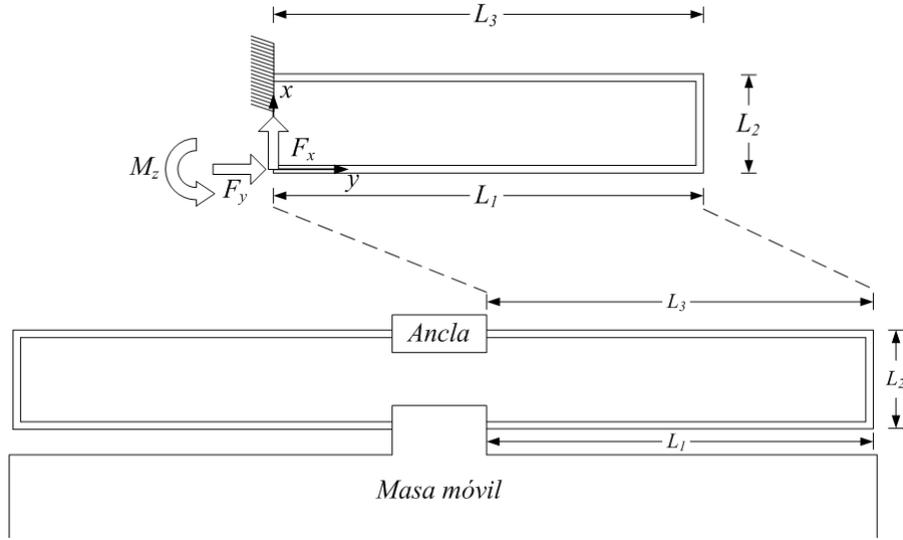


Figura 8.6: Suspensión tipo caja con bordes rectangulares.

Para esta suspensión la rigidez en la dirección  $z$  se calcula a partir de:

$$k_z = \frac{3EGI_y I_t}{6EI_y L_1 L_2 (L_1 + 3L_2) + 4GI_t (L_1^3 + 2L_2^2)}$$

dónde  $I_y$  es el momento de inercia para las flexiones en la dirección  $z$ , el cual se obtiene mediante  $I_y = \frac{bh^3}{12}$ ,  $I_t$  es el momento de inercia torsional, el cual para secciones transversales muy delgadas,  $b \ll h$ , se calcula a través de  $I_t = \frac{b^3 h}{3}$  o para el caso en que  $h \ll b$ ,  $I_t$  se obtiene a partir de  $I_t = \frac{bh^3}{3}$  o para el caso en que grosor es menor o igual que el ancho de la viga,  $h \leq b$ ,  $I_t$  se calcula a través de  $I_t = \frac{bh^3(\frac{16}{3} - \frac{3,36h}{b})}{16}$  y  $G$  es el módulo volumétrico, el cual se obtiene mediante  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ . Para una suspensión en forma de caja con los bordes a noventa grados [87] como la que se muestra en la figura 8.6, con un ancho y grosor idéntico en cada elemento, la constante de elasticidad (o rigidez) en la dirección  $x$ , para un sólo lóbulo, será:

$$k = \frac{6(4L_1 L_2 + L_2^2 + 4L_2 L_3 + 12L_1 L_3)EI}{L_2 L_3^4 + 3L_1 L_3^4 + L_1^3 L_2^2 + 4L_1^3 L_2 L_3 + 3L_1^2 L_2 L_3^2 + 4L_1 L_2 L_3^3 + L_1^4 L_2 + 3L_1^4 L_3 + L_2^2 L_3^3}$$

Si además se cumple que  $L_1 = L_3$ , la constante de rigidez en la dirección  $x$ , también para un lóbulo, será:

$$k = \frac{6EI}{L_1^3} \left( \frac{L_2 + 2L_1}{2L_2 + L_1} \right)$$

Para esta suspensión (si se cumple que  $L_1 = L_3$ ), la rigidez en la dirección  $z$ , para un sólo lóbulo, se calcula a partir de:

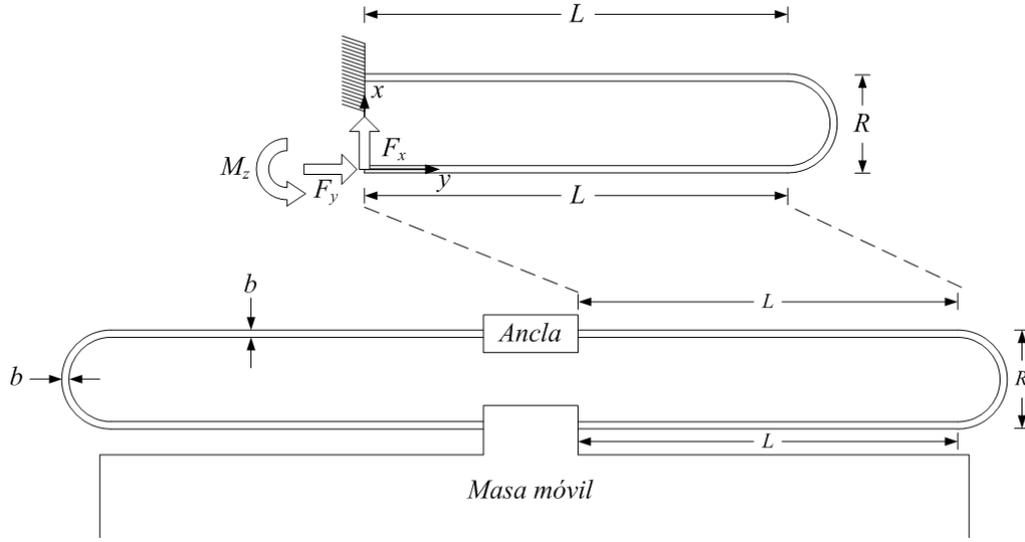


Figura 8.7: Suspensión de caja con bordes circulares.

$$k_z = \frac{6EGI_y I_t}{3EI_y L_2(L_1^2 + L_1 L_2) + GI_t(2L_1^3 + L_2^3)}$$

Para una suspensión en forma de caja con los bordes circulares [88] como la mostrada en la figura 8.7, con un ancho, grosor y largo idénticos en cada elemento recto y  $R > 10b$ , la constante de elasticidad (o rígidez) en la dirección  $x$  será:

$$k = \frac{12(2L + \pi R)EI}{3\pi^2 R^4 - 6\pi^2 L^2 R^2 + 18\pi^2 L^2 R + 6\pi L R^3 - 8\pi L^3 R + 36\pi L^3 - 24R^4 + 24L^2 R^2 + 2L^4} \quad (8.11)$$

Para el caso en que  $R < 10b$ , la constante de elasticidad (o rígidez) en la dirección  $x$  será:

$$k = \frac{12(8e^2 A^2 L^2 + 8\pi e^2 A^2 L I + 2\pi e A L I + 3\pi^2 e A I^2 - 4\pi e A L I - 2\pi^2 I^2)e E A I}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6}$$

dónde:

$$\begin{aligned} d_1 &= -6\pi^3 R^2 I^3 + 12\pi^3 L^2 I^3 + 24\pi^2 L R I^3 - 18\pi^3 L^2 I^3 - 28\pi e^2 A^2 L^4 I - 96\pi e A L^2 R I^2 \\ d_2 &= -50\pi^2 e A L^3 I^2 - 36\pi^2 L R I^3 - 12\pi^2 e^2 A^2 L^3 I^2 - 12\pi^3 e A L^2 I^3 - 24\pi^2 e A L R I^3 + 12\pi^2 e A L^3 I^2 \\ d_3 &= -12\pi^2 e A L R^2 I^2 + 6\pi^2 e A L^3 I^2 + 96e^2 A^2 L^3 R I - 96e A L R^2 I^2 + 8e^3 A^3 L^5 - 24\pi R^2 I^3 \\ d_4 &= 20\pi e^3 A^3 L^4 I + 48\pi^2 e^2 A^2 L^3 I^2 + 144\pi e^2 A^2 L^2 R I^2 + 48\pi^2 e A L R I^3 - 48\pi e A R^2 I^3 + 48\pi R^2 I^3 \\ d_5 &= 26\pi e^2 A^2 L^4 I - 24\pi e A L^2 R I^2 - 12\pi^2 L R I^3 + 18\pi^3 e A L^2 I^3 + 24\pi e^2 A^2 L^2 R^2 I + 24\pi^2 e^2 A^2 L R^2 I^2 \\ d_6 &= 6\pi^2 e A L R^2 I^2 + 9\pi^3 e A R^2 I^3 \\ A &= bh \end{aligned}$$

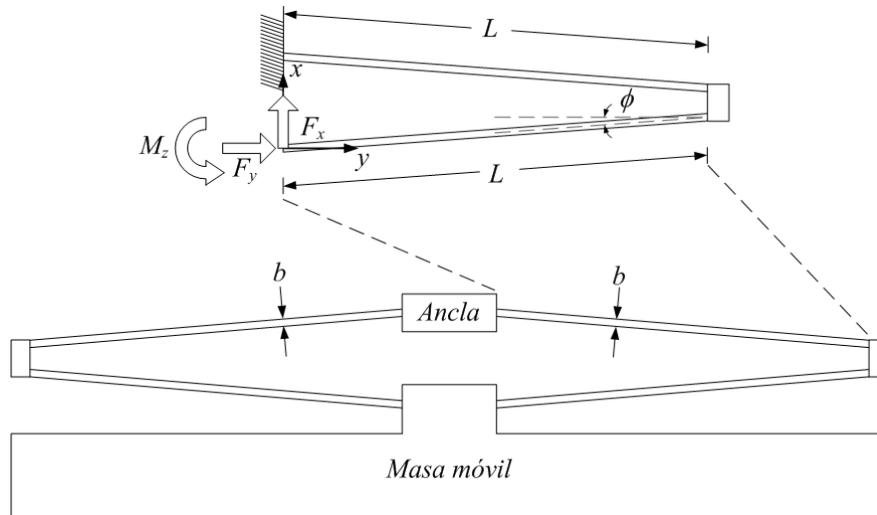


Figura 8.8: Suspensión sagital. Muy sensible pues puede amplificar un movimiento por factores mayores a 10.

y  $e$  es la excentricidad, cuya expresión de cálculo será:

$$e = \frac{R - b}{\ln\left(\frac{2R+b}{2R-b}\right)}$$

Para esta suspensión, la rigidez en la dirección  $z$  se calcula a partir de:

$$k_z = \frac{6EGI_y I_t}{3EI_y R[8LR + \pi(L^2 - 2LR + 3R^2)] + GI_t[4L^3 + 3\pi L^2 R + 6\pi LR^2 + 3\pi R^3]}$$

dónde  $I_y$  es el momento de inercia para las flexiones en la dirección  $z$ , el cual se obtiene mediante  $I_y = \frac{bh^3}{12}$ ,  $I_t$  es el momento de inercia torsional, el cual para secciones transversales muy delgadas,  $b \ll h$ , se calcula a través de  $I_t = \frac{b^3 h}{3}$  o para el caso en que  $h \ll b$ ,  $I_t$  se calcula a partir de  $I_t = \frac{bh^3}{3}$  o para el caso en que grosor es menor que el ancho de la viga,  $h < b$ ,  $I_t$  se calcula a través de  $I_t = \frac{bh^3\left(\frac{16}{3} - \frac{3.36h}{b}\right)}{16}$  y  $G$  es el módulo volumétrico, el cual se obtiene mediante  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ .

Para una suspensión tipo sagital [89] como la mostrada en la figura 8.8, con un ancho, grosor y largo idénticos en cada elemento, la constante de elasticidad (o rigidez) en la dirección  $x$  será:

$$k = \frac{12EI}{L^3 \cos^2 \phi}$$

Y la rigidez en la dirección  $z$  se calculará a partir de:

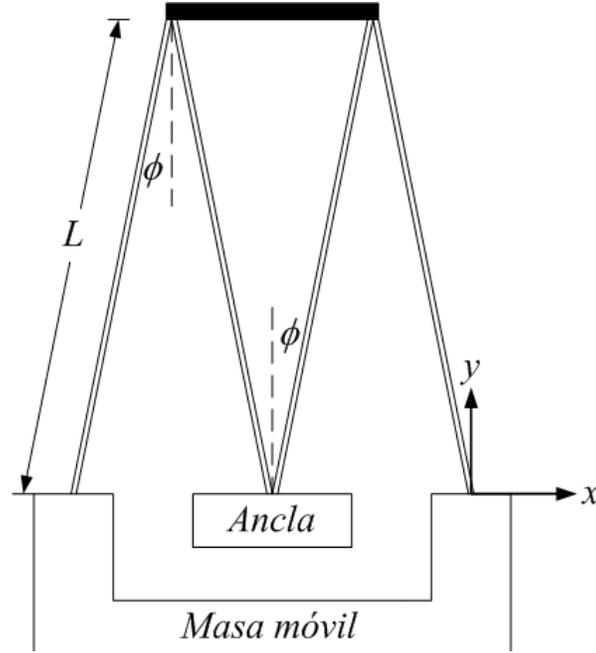


Figura 8.9: Suspensión en forma de doble V.

$$k_z = \frac{24}{L} \frac{EGI_y I_t}{d_1 + d_2 + d_3}$$

donde

$$\begin{aligned} d_1 &= 6EI_y((L_A - 2u)^2 \sin^2 \phi + 2(L_R + 2L \sin \phi)(L_R \cos \phi + (2L \cos \phi + L_A - 2u) \sin \phi) \cos \phi) \\ d_2 &= GI_t(6L_R^2 + 14L^2 + 3(L_A - 2u)^2 + 3((L_A - 2u)^2 - 2(L_R^2 + 2L^2)) \cos(2\phi) - 6(2u - L_A)(L - 2L_R \sin \phi) \cos \phi) \\ d_3 &= 6GI_t L((L_A - 2u) \cos(3\phi) + L \cos(4\phi) + 4L_R \sin \phi - 2L_R \sin(3\phi)) \\ u &= \frac{GI_t(L_A \cos \phi + L \cos(2\phi)) \cos \phi + (EI_y - GI_t)L_R \sin \phi \cos \phi + EI_y(L_A + 2L \cos \phi) \sin^2 \phi}{2(GI_t \cos^2 \phi + EI_y \sin^2 \phi)} \end{aligned}$$

Para una suspensión tipo doble V [90] como la mostrada en la figura 8.9, la constante de elasticidad (o rigidez) en la dirección  $x$  será:

$$k = \frac{12EI \cos \phi}{L^3} \left(1 + \frac{\cos \phi}{2}\right)$$

Para una suspensión tipo patas de cangrejo [91] como la mostrada en la figura 8.10, con secciones transversales rectangulares en ambos segmentos de la viga, la constante de elasticidad (o rigidez) en la dirección  $x$  será:

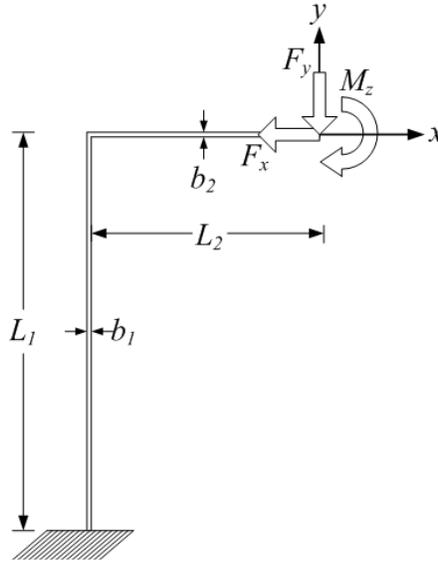


Figura 8.10: Suspensión tipo patas de cangrejo. Normalmente el segmento más largo se coloca de forma ortogonal a la dirección de movimiento.

$$k = \frac{Eh}{4} \left( \frac{b_1}{L_1} \right)^3 \left( \frac{4L_1 + \psi L_2}{L_1 + \psi L_2} \right)$$

dónde  $\psi = (b_1/b_2)^3$ . Para una suspensión tipo langosta [92] como la mostrada en la figura 8.11, con un ancho y grosor idénticos en cada elemento, la constante de elasticidad (o rigidez) en la dirección  $x$  será:

$$k = \frac{3(20L_1^4 + 24L_1^3L_2 + 24L_1^2L_2^2 + 12L_1L_2^3 + 64L_1L_2^2 + 48L_2^3 - 3L_2^4)EI}{d_1 + d_2}$$

donde:

$$\begin{aligned} d_1 &= 48L_2^6 + 16L_1^7 - 15L_2^7 + 80L_1^4L_2^2 + 192L_1^3L_2^3 + 336L_1^2L_2^4 + 272L_1L_2^5 \\ d_2 &= 60L_1^6L_2 + 180L_1^5L_2^2 + 244L_1^4L_2^3 + 144L_1^3L_2^4 + 3L_1^2L_2^5 - 57L_1L_2^6 \end{aligned}$$

Para una suspensión completa, formada por cuatro lóbulos, la expresión deberá multiplicarse por cuatro. En cuanto a la rigidez en la dirección  $z$ , ésta se calculará a partir de:

$$k_z = \frac{3EGI_yI_t}{6EI_y(L_1 + L_2)(L_1^2 + L_1L_2 + L_2^2) + GI_t + (4L_1^3 + 6L_1L_2(L_1 + L_2) + 3L_2^3)}$$

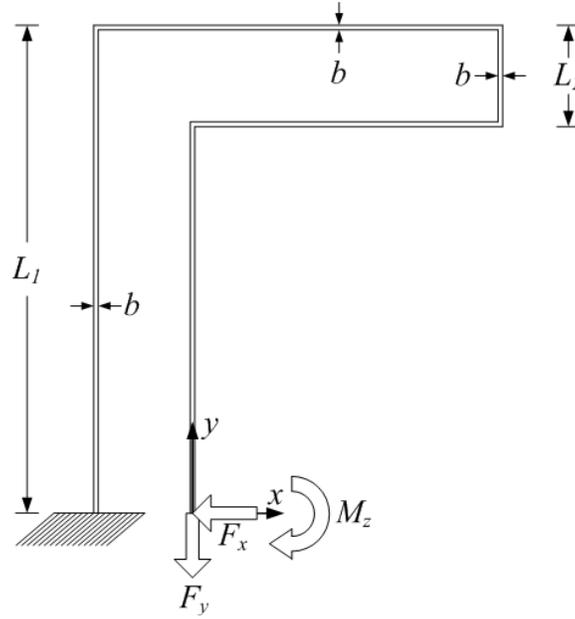


Figura 8.11: Suspensión tipo langosta. Se utilizan cuatro, una en cada esquina, para sostener una placa rectangular.

También para un sólo lóbulo. Ahora bien, para una suspensión en forma de X [93] como la mostrada en la figura 8.12, la constante de elasticidad (o rígedez) en la dirección  $x$  será:

$$k = \frac{1}{\left[ \frac{L}{Ebh} (\sin \phi + c_2 \cos \phi)^2 + \frac{L^3}{3EI} (\cos \phi - c_2 \sin \phi)^2 - 2c_1 \frac{L^2}{2EI} (\cos \phi - c_2 \sin \phi) + c_1^2 \frac{L}{EI} \right]}$$

dónde

$$c_1 = \frac{2 \frac{L}{Ebh} \frac{L^2}{2EI} \cos \phi}{\frac{L}{EI} \left( \frac{L}{Ebh} + \frac{L^3}{3EI} \right) - \frac{L^4}{4E^2 I^2} + \left[ \frac{L}{EI} \left( \frac{L}{Ebh} - \frac{L^3}{3EI} \right) + \frac{L^4}{4E^2 I^2} \right] \cos(2\phi)}$$

$$c_2 = - \frac{\left[ \frac{L}{EI} \left( \frac{L}{Ebh} - \frac{L^2}{2EI} \right) + \frac{L^4}{4E^2 I^2} \right] \sin \phi \cos \phi}{\frac{L}{EI} \frac{L}{Ebh} \cos^2 \phi + \left( \frac{L}{EI} \frac{L^3}{3EI} - \frac{L^4}{4E^2 I^2} \right) \sin \phi}$$

Para una suspensión tipo radial con vigas curvadas, la constante de elasticidad (o rígedez) en la dirección  $x$  será:

$$k = \frac{n(-9 + 6\phi^2 + 16 \cos \phi - 7 \cos 2\phi - 4\phi(2 + \cos \phi) \sin \phi)EI}{R(-9\phi + 2\phi^3 + 8\phi \cos \phi + \phi \cos 2\phi + 8 \sin \phi + 4 \sin 2\phi)}$$

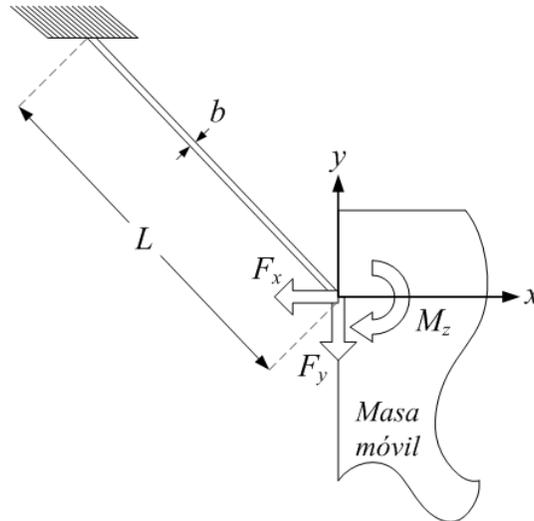


Figura 8.12: Suspensión tipo X, este tipo de suspensión toma su nombre debido a que se colocan cuatro soportes inclinados (dos por lado) para una placa (masa) móvil.

dónde  $n$  es el número de vigas curvadas que forman la suspensión radial. Para una suspensión basada en una espiral, con un gran número de vueltas, la constante de elasticidad (o rigidez) en la dirección  $\theta$  será:

$$k = \frac{EI}{L}$$

dónde  $L$  es la longitud total de la espiral.

### 8.2.3. Amortiguador

En tanto que la masa móvil y la suspensión elástica pueden ser diseñadas para condiciones estáticas, el diseño del amortiguador debe proporcionar un óptimo coeficiente general de amortiguamiento dinámico considerando los tres principales fenómenos disipativos que afectan el movimiento del dispositivo:

1. amortiguamiento debido a la fuerza de arrastre (desplazamiento del dispositivo en un medio viscoso estable),
2. amortiguamiento por compresión de películas de aire (entre los electrodos móviles y fijos) y
3. amortiguamiento por deslizamiento sobre películas de aire.

Los principales elementos con que cuenta el diseñador para lograr un coeficiente de amortiguamiento óptimo son: la geometría del dispositivo y las condiciones de presión en el encapsulado. Así, para el cálculo del coeficiente general de amortiguamiento  $c$  de la ecuación 8.3 se sumarán los efectos de los tres fenómenos disipativos más importantes:

$$c_{\text{gral}} = c_{\text{arrastre}} + c_{\text{compresion}} + c_{\text{deslizamiento\_sustrato}} + c_{\text{deslizamiento\_abierto}}$$

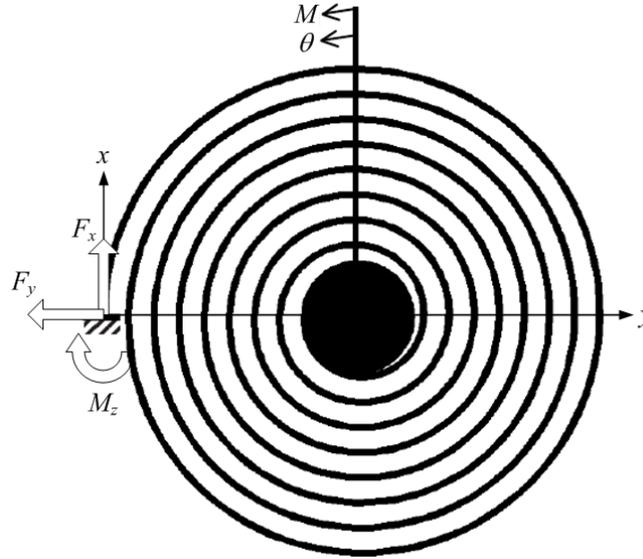


Figura 8.13: Suspensión en forma de espiral. La masa móvil se encuentra sujeta al centro de la espiral y se presenta un par como entrada.

Cada término de la suma corresponde a un tipo de amortiguamiento presente en el Sistema Microelectromecánico.

A partir de la ecuación 4.9 puede calcularse  $c_{arrastra}$ :

$$c_{arrastra} = \frac{32\mu B_m}{6}$$

dónde  $\mu$  es la viscosidad del aire y  $B_m$  el ancho de la placa que forma la masa móvil.

En cuanto a  $c_{compresion}$ , éste puede calcularse a partir de la ecuación 4.20:

$$c_{compresion} = \frac{\mu L_e h_e^3 n}{d_e^3}$$

dónde  $L_e$  es el traslape del largo de los electrodos,  $h_e$  es el grosor de los electrodos,  $n$  es el número de electrodos móviles y  $d_e$  es la separación entre electrodos (uno fijo y otro móvil).

Respecto del amortiguamiento debido al deslizamiento sobre la película de aire atrapada entre la placa que forma la masa móvil y el sustrato,  $c_{deslizamiento\_sustrato}$ , éste puede calcularse a partir de la ecuación 4.57:

$$c_{deslizamiento\_sustrato} = \frac{\mu B_m L_m}{d_{ms}}$$

dónde  $L_m$  es el largo de la placa que forma la masa móvil y  $d_{ms}$  es la distancia entre dicha placa y el sustrato.

Acerca del amortiguamiento debido al deslizamiento sobre la película de aire atrapada entre la placa que forma la masa móvil y alguna referencia mecánica en la parte superior,  $c_{deslizamiento\_abierto}$ , éste puede calcularse a partir de la ecuación 4.60:

$$c_{deslizamiento\_abierto} = \frac{\mu B_m L_m}{\sqrt{2\mu/\rho_{aire}\omega}}$$

donde  $\omega$  es la frecuencia de oscilación de la masa móvil y  $\rho_{aire}$  la densidad del aire.

Por lo tanto para un Sistema Microelectromecánico como el acelerómetro capacitivo diferencial el coeficiente general de amortiguamiento será:

$$c_{gral} = \mu \left[ \frac{32B_m}{6} + \frac{L_e h_e^3 n}{d_e^3} + \frac{L_m B_m}{d_{ms}} + \frac{L_m B_m}{\sqrt{2\mu/\rho_{aire}\omega}} \right] \quad (8.12)$$

La mayoría de los estudios disponibles en la actualidad sobre amortiguamiento debido a la interacción de una estructura micromecánica con el fluido que la envuelve, consideran únicamente el fenómeno de compresión de aire entre placas que se aproximan, es decir, el movimiento mayoritariamente estudiado corresponde a uno de tipo normal entre la masa móvil (formada por capas de material estructural) y el sustrato. En contraparte, existen muy pocos estudios comparativos entre los modelos matemáticos y los registros experimentales para los casos de amortiguamiento debido al deslizamiento de placas sobre películas de aire, y hasta ahora se ha documentado una discrepancia de alrededor del 20% entre los modelos teóricos y los datos de laboratorio para este tipo de fenómeno.

Para el caso en que el acelerómetro se encuentre inmerso en aire enrarecido, es decir, se hubiera encapsulado al dispositivo en bajo vacío, la separación entre las moléculas de los gases de forman el aire que rodea el acelerómetro es tal que la interacción entre ellas se considera nula y sus defectos completamente irrelevantes, razones por las que el amortiguamiento debido al deslizamiento sobre la película de aire atrapada entre el sustrato y la placa móvil (masa móvil) y la placa móvil y alguna referencia mecánica en la parte superior son despreciables y sólo se analizan los efectos provocados por el arrastre (choque de moléculas de aire contra la masa móvil) y la compresión de películas delgadas de aire atrapadas entre los electrodos del transductor mecánico-eléctrico del dispositivo. Así se tiene que, en aire enrarecido, el coeficiente general de amortiguamiento se obtiene a partir de las ecuaciones 4.68 y 4.76:

$$c_{ae\_gral} = c_{ae\_arrastre} + c_{ae\_compresion} = 4\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{M_m}{RT}} PA + 0,0635n \left( \frac{L_e}{d_e} \right) \sqrt{\frac{M_m}{RT}} PA \quad (8.13)$$

dónde  $M_m$  es la masa molar del aire,  $R = 8,31 \left[ \frac{kg \cdot m^2}{s^2 \cdot K} \right]$  es la constante universal molar de los gases,  $T$  es la temperatura a la que se encuentra el gas (expresada en la escala Kelvin),  $P$  la presión a la que se encuentra sometido el gas,  $A$  es el área de la sección transversal de la placa en dirección ortogonal a la dirección de movimiento sobre la cual impactarán las moléculas de aire ( $B_m h_e$ ),  $n$  es el número de pares de electrodos colocados a lo largo de la placa móvil,  $L_e$  es la longitud del traslape entre los electrodos del transductor mecánico eléctrico y  $d_e$  su separación inicial.

En el proceso de diseño, debe tenerse en cuenta que la razón de amortiguamiento para un sistema masa-resorte-amortiguador, como el acelerómetro, normalmente se fija alrededor de 0,7 (valor conocido como condición óptima de amortiguamiento) de modo que el sistema alcance su mejor respuesta en frecuencia a una señal de entrada (tal como se señala en la subsección *Efectos del amortiguamiento debido al aire sobre la dinámica de los Microsistemas* del capítulo 4).

#### 8.2.4. Transductor mecánico-eléctrico

Aunque existen distintos métodos de transducción mecánica-eléctrica aplicables a los Sistemas Microelectromecánicos, en el presente trabajo se ha optado por un esquema capacitivo debido a su facilidad de implantación en los procesos de micromaquinado de superficie, a su insensibilidad ante variaciones de temperatura y a la simplicidad de su funcionamiento.

Como se discutió en la subsección *Medición mediante balance de fuerzas electrostáticas* del capítulo 6 y a lo largo de todo ese capítulo, la mejor configuración para el transductor mecánico eléctrico es el de un capacitor diferencial realimentado para el balance de fuerzas electrostáticas, tal como lo muestran las figuras 6.10, 6.11 y 6.22. De acuerdo con la discusión planteada en dicho capítulo y en particular en las ecuaciones 6.5, 6.6, 6.9, 6.24, 6.25, 6.26 y 6.27 si se cumple con las siguientes condiciones:

1.  $\beta$  (coeficiente de realimentación del circuito que incluye  $A_{op}$ ) es positivo y muy grande (mayor a 5) para evitar que la aceleración crítica que provoca el efecto de llegada tenga un valor muy pequeño y eventualmente se elimine dicho efecto mediante la realimentación, es decir,  $\beta$  es mucho mayor que  $kd$ ,
2. la frecuencia  $\omega$  de la componente de CA de la señal eléctrica de polarización para los electrodos es mucho mayor que la frecuencia de la aceleración de entrada y que la frecuencia natural de oscilación de la estructura mecánica,
3. los desplazamientos de los electrodos son muy pequeños,  $x \approx 0$ , y
4. en  $V_R = V_0 + V_1 \text{sen } \omega t$ , la amplitud de  $V_1$  es mucho menor que la de  $V_0$  de modo que la fuerza electrostática generada por la componente de alta frecuencia de  $V_R$  es despreciable.

entonces, el voltaje de salida se obtiene de forma aproximada a partir de:

$$V_{Out} = A_2 V_{FB} \approx \frac{A_2 d_e^2 m_{total} a}{2nL_e h_e \epsilon \epsilon_0 V_0} \quad (8.14)$$

donde  $A_2$  es la ganancia de lazo abierto del amplificador operacional al final del proceso de acondicionamiento de señal planteado en la figura 6.11,  $d_e$  es la distancia de separación entre electrodos fijos y móviles,  $m_{total}$  es la masa de la placa y de los electrodos móviles,  $a$  es la aceleración experimentada por el dispositivo,  $n$  es el número de pares de electrodos,  $L_e$  es el traslape a lo largo entre los electrodos móviles y los electrodos fijos,  $h_e$  es el grosor de los electrodos,  $\epsilon$  es la permitividad relativa del aire,  $\epsilon_0$  es la permitividad del vacío y  $V_0$  es la componente de CD del voltaje con que se alimentan los electrodos. Y cómo puede apreciarse en la ecuación anterior (8.14), el voltaje  $V_{Out}$  es proporcional a la aceleración aplicada al dispositivo, razón por la que puede emplearse como registro directo para su cuantificación.

Por otra parte, debe tenerse en consideración que el uso del esquema de realimentación para el balance de fuerzas electrostáticas afecta la constante elástica del sistema, incrementándola y generando una constante elástica efectiva:

$$k_{ef} = k_{suspension} + \frac{2nL_e h_e \epsilon \epsilon_0 V_0^2 \alpha A_{op}}{d_e^3}$$

donde  $\alpha$  es una constante de proporcionalidad entre  $V_0$  y  $V_1$  según lo señalado en la subsección *Efectos de la excitación eléctrica en un capacitor configurado para el balanceo de fuerzas* del capítulo 6. La alteración de la constante elástica del sistema se debe a la realimentación en el transductor mecánico-eléctrico que también afecta la frecuencia de resonancia del acelerómetro (corriéndola hacia la derecha) y aumenta su rango de operación, pero puede afectar la sensibilidad del Sistema Microelectromecánico.

### 8.2.5. Factor de calidad

En la subsección *Resonancia y factor de calidad* del capítulo 3 se abordan tres definiciones para el factor de calidad. La primera de ellas hace referencia al valor pico de la amplitud relativa en la frecuencia de resonancia y establece que:

$$Q = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

donde  $\zeta$  es la razón de amortiguamiento (coeficiente de amortiguamiento relativo) del sistema y se define como  $\zeta = \frac{c}{2m\omega_0}$  ( $m$  es la masa y  $\omega_0$  la frecuencia natural de oscilación del sistema). La segunda definición es la razón entre la energía total del sistema y la energía promedio perdida en un radián de frecuencia de resonancia, por lo que:

$$Q = \frac{m\omega_r}{c}$$

dónde  $m$  es la masa,  $\omega_r$  es la frecuencia de resonancia y  $c$  el coeficiente de amortiguamiento del sistema. La tercera definición remite a la primera para casos en que el amortiguamiento del sistema es muy ligero:

$$Q = \frac{1}{2\zeta}$$

Es importante señalar que el factor de calidad para microestructuras de silicio inmersas en aire es usualmente del orden de  $10^2$  y puede alcanzar valores del orden de  $10^5$  en el vacío.