



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN  
INGENIERIA

FACULTAD DE INGENIERIA

Modelación matemática de la transformación  
martensítica inducida por esfuerzo.

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

DOCTOR EN INGENIERIA

Ingeniería Mecánica-Mecánica Aplicada

P R E S E N T A :

M. en I. Jacinto Cortés Pérez

TUTOR:

Dr. Jorge Carrera Bolaños

AÑO 2007



**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: **Dr. José Gonzalo González Reyes**

Secretario: **Dr. Arturo Barba Pingarron**

1<sup>er.</sup> Vocal: **Dr. Jorge Carrera Bolaños**

1<sup>er.</sup> Suplente: **Dr. Luís Alejandro Ferrer Argote**

2<sup>do.</sup> Suplente: **Dr. Horacio Flores Zúñiga**

Lugar o lugares donde se realizó la tesis:

NOMBRE DEL LUGAR:

**Facultad de Estudios Superiores Aragón, UNAM  
Facultad de Ingeniería, UNAM  
Instituto de Investigaciones en Materiales, UNAM**

**TUTOR DE TESIS:**

**Dr. Jorge Carrera Bolaños**

---

**FIRMA**

## **Dedicatorias**

A mi esposa: Judith Salgado Salgado  
Por todo tu apoyo y comprensión, este es un logro de los dos.....hacemos un buen equipo

A mis hijos: Nayeli y Gerardo que son el motor de mi vida.

Nayeli: por que espero que algún día sepas todo lo que quiero para ti.

Gerardo: espero que cuando crezcas me comprendas porque sacrifique parte de tu niñez para lograr esta meta.

A mis padres: Celia Pérez Pérez y Nazario Cortés Hernández (q.p.d.)

Este trabajo es sólo una pequeña retribución a todo lo que me inculcaron, sobre todo el espíritu de superación.

A mis hermanos: Mario, Silvia y Claudia

Mario: eres mi ejemplo, tú me has enseñado que podemos alcanzar lo que parece inalcanzable.

Silvia: tienes el valor y la fuerza para lograr lo que quieras en la vida, no desmayes.

Claudia: porque me enseñaste que poder y no querer es el peor de los errores.

A mis sobrinos: Mario, Fernando, Sonia, Daniel y Gibran. Por que son la nueva generación para la que debemos construir un mundo mejor.

A mis cuñados: Jorge, Raúl, Roger y Gilberto por brindarme su amistad y su apoyo en todo momento.

A los alumnos del Laboratorio de Mecánica Aplicada del Centro Tecnológico Aragón por su apoyo constante y la motivación que representaron para concluir el presente trabajo: Dr. Francisco Sánchez Arévalo, M. en I. Antonio Souza Jiménez, M. en I. Nestor García Castillo, Ing. David Becerril García, Ing. José Juan Llanito Patiño, Raúl Rojo Vilorio, Paris Delgado Gómez, Carlos Resendiez Rodea, Arturo Martínez y todos aquellos que han transitado por el laboratorio y que me prestaron su apoyo en los momentos difíciles.

## Agradecimientos

A mi tutor

Dr. Jorge Carrera Bolaños. Por su apoyo incondicional para la realización del presente trabajo y por brindarme su amistad.

A los miembros del jurado

Dr. Gonzalo González Reyes, Dr. Horacio Flores Zúñiga, Dr. Luís Ferrer Argote y Dr. Arturo Barba Pingarron. Por sus valiosos comentarios los cuales contribuyeron a mejorar sustancialmente el presente trabajo.

Gracias Gonzalo, por todo el tiempo que le dedicaste a este trabajo y por que siempre confiaste en mí.

Gracias Horacio, porque me iniciaste en este maravilloso campo que es la investigación y siempre he contado con tu guía, tus consejos y sobre todo tu amistad.

Al Dr. Guillermo Pulos Cárdenas. Por el tiempo dedicado en el presente trabajos y por sus valiosas contribuciones. En especial por proponer una doble hipérbola para representar la función  $w(y)$  que es una parte fundamental del modelo desarrollado.

Al Lic. Raúl Salgado Salgado por su apoyo en la corrección de estilo del presente trabajo.

A Raúl Rojo Viloría por el apoyo técnico en la elaboración de varios de los diagramas y dibujos contenidos en el presente trabajo.

A la Arq. Lilia Turcott González, Directora de la FES Aragón, por brindarme su apoyo para la escritura del presente trabajo.

A la Facultad de Ingeniería y al Instituto de Investigaciones en Materiales de la UNAM por permitirme hacer uso de sus instalaciones sin lo que este trabajo no hubiera sido posible.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, por que me ha dado la oportunidad de cambiar mi vida. No solo me dio educación, me dio una beca para realizar mis estudios, la oportunidad de desarrollarme profesionalmente y un empleo del cual vivo. Invariablemente siempre seré orgullosamente “puma”.

A la sociedad mexicana, porque sus impuestos han hecho posible todo lo que he logrado hasta éste momento y lo que haré el resto de mi vida.

# Índice

Introducción	i
Capítulo 1.- Teoría de la transformación martensítica inducida por esfuerzo.	1
1.1.-Introducción	1
1.2 Generalidades de los MMF y de la TM.	2
1.2.1. Conceptos generales	2
1.2.2.- Comportamiento termo-mecánico de MMF	3
1.3.-Teoría de Patoor	5
1.3.1.- Aspectos cinemáticos de la transformación martensítica	5
1.3.2.-Aspectos termodinámicos	8
1.3.2.1.-Potenciales termodinámicos	8
1.3.2.2.-Fuerza termodinámica asociada a la transformación	11
1.3.2.3.-Evolución de la transformación	15
1.3.2.4.-La supertermoelasticidad de los MMF	16
1.4.-Teoría Fenomenológica de la transformación martensítica.	20
1.4.1.-Deformación transformacional	24
1.4.2.-Esfuerzo transformacional	25
1.5.-Discusión	28
Capítulo 2 Modelación matemática de la deformación durante la TM	31
2.1 Introducción	31
2.2.-Análisis de la deformación durante la TMIE	31
2.3.-Campo de desplazamientos	35
2.4.-Modelo matemático	42
2.4.1.-Fracción volumétrica transformada	43
2.4.2.-Campo de desplazamientos	47
2.4.3.-Cambio de base	51
2.4.4.-Bases de referencia	56
2.4.5.-Variación de la orientación entre dos ejes fijos	58
2.4.6.-Cambio de base del campo de desplazamientos	59
2.4.7.-Tensor de esfuerzos	59
2.4.8.-Tensor de constantes elásticas	60

2.4.9.-Relaciones constitutivas	61
Capítulo 3: Resultados	64
3.1.-Monocristales	64
3.1.1.-Monocristales sujetos a tensión	64
3.1.1.1 Simulación	74
3.1.2.- Monocristales en flexión	82
3.2.- Policristales	90
3.2.1.-Policristal en serie.	91
3.2.2.- Policristales en paralelo	97
3.2.2.1.-Pseudo policristal	98
3.3 Discusión	104
Capítulo 4.-Aplicaciones	106
4.1.- Persianas inteligentes	106
4.2.- Termoactuador	110
Conclusiones	114
Apéndice A.- Generalidades de los MMF	116
A.1.-Introducción	116
A.2.-Definición de Transformación martensítica	116
A.4.-Cambios estructurales	121
A.5.- Anisotropía mecánica de los MMF	129
A.5.1-Anisotropía de la fase austenítica.	130
A.5.2.-Anisotropía en el esfuerzo transformacional	132
A.5.3.-Anisotropía en la deformación transformacional	136
A.6.- Modelo propuestos	139
Referencias	142

## **Introducción**

El estudio del comportamiento termo-mecánico de materiales con memoria de forma (MMF) es de gran importancia desde el punto de vista tanto científico como tecnológico. Como se sabe dicho, comportamiento está asociado a una transformación de fase en estado sólido denominada transformación martensítica la cual, puede ser inducida por esfuerzo, temperatura, combinación de ambos y por campos magnéticos.

Desde el punto de vista de la ciencia básica, resulta de sumo interés estudiar dicho comportamiento ya que es no lineal, histerético, dependiente de la temperatura y altamente anisótropo. Debido a lo anterior, no puedan ser aplicadas las teorías conocidas (tales como: la elasticidad lineal, la plasticidad, la viscoelasticidad, etc.) para la resolución de problemas aún en arreglos de carga muy sencillos. En particular, la complejidad del comportamiento se torna más grave cuando se trata de materiales con memoria de forma policristalinos ya que se suman los efectos microestructurales. Es importante mencionar que los materiales más convenientes para las aplicaciones son precisamente los policristalinos ya que su producción resulta más económica que si se emplean monocristales.

Por otro lado, en lo que se refiere a la ciencia aplicada y la tecnología los MMF resultan de suma importancia debido a que tienen la capacidad de realizar acciones que generalmente requerían la combinación de elementos tanto mecánicos como eléctricos. Entre las áreas en las que actualmente se aplican estos materiales se encuentran: la automatización, la ingeniería aeroespacial, la medicina y la biótica, así como en infinidad de aplicaciones industriales donde han reemplazado a otros materiales y sistemas con mayor eficiencia y sencillez.

Es claro que para aplicar los MMF en algún dispositivo o sistema de manera eficiente, es necesario contar con ecuaciones de diseño que permitan predecir el comportamiento de los elementos mecánicos fabricados con estos materiales. Como se mencionó anteriormente, el comportamiento de los MMF es considerablemente complejo por lo que hoy en día la gran mayoría de las aplicaciones empleen elementos en arreglos de carga simples como lo son: tensión simple y flexión. Así mismo, la falta de conocimiento profundo sobre el comportamiento de los MMF ha traído como consecuencia que se limite su aplicación a dispositivos en los que la precisión no es una exigencia fundamental. Es claro que el desarrollo de teorías que faciliten el cálculo del comportamiento de estos materiales incrementaría sustancialmente su potencial de aplicaciones y se haría extensivo a un gran número de países que podrían emplearlos para resolver múltiples problemas en los que sus propiedades representen la solución idónea.

Es importante mencionar que hoy en día, sólo en países desarrollados como Estados Unidos, Alemania, Japón, Francia e Inglaterra entre otros, existen empresas dedicadas a la producción y comercialización de estos materiales. En países subdesarrollados, aunque existen grupos académicos dedicados a investigar su comportamiento, no se ha logrado realizar la transferencia tecnológica a la industria.

Considerando lo anterior, es claro que el estudio del comportamiento termomecánico de los MMF es un tema actual y relevante, como lo muestra la cantidad de trabajos que año con año son generados y difundidos, Es importante mencionar, que los enfoques con los que se estudia dicha temática tiene un espectro muy amplio debido a que comprende disciplinas

como la física, las matemáticas y la ingeniería. Lo cual se refleja en las publicaciones que han sido generadas los últimos 10 años. Es claro que desde el punto de vista de las ciencias básicas el objetivo, es desarrollar una teoría general que considere las leyes físicas aplicables en el fenómeno y genere modelos matemáticos que al ser resueltos brinden, a la persona que desee aplicar estos materiales, las predicciones necesarias para diseñar el (o los) elemento (s) que requiere.

No obstante lo anterior, como lo muestra la historia, muchos avances en la aplicación de diversos fenómenos físicos a la resolución de problemas tecnológicos han sido generados por ingenieros que al estar en contacto directo con el problema en cuestión proponen soluciones aproximadas que si bien no cuentan con gran precisión, resultan útiles para el aprovechamiento de las ventajas que ofrece el control del fenómeno en cuestión. De hecho resulta muy importante para el ingeniero partir de problemáticas concretas que le creen la necesidad de desarrollar conocimiento adecuado a sus necesidades, apoyándose en la parte científica de su formación. Cabe destacar que una buena cantidad de los modelos propuestos para simular el comportamiento de los MMF, especialmente los primeros que se generaron, son del tipo fenomenológico y emplean teorías conocidas que presentan cierta similitud con el comportamiento observado en dichos materiales. Como se sabe, dicha metodología es una práctica común en ingeniería y física como se puede apreciar en el empleo de las llamadas “analogías” que son ampliamente empleadas en la literatura.

En particular, el estudio del comportamiento mecánico de los MMF comprende tres aspectos fundamentales que pueden ser analizados desde distintos enfoques. Dichos aspectos son:

- a) La deformación que sufre el material durante la transformación martensítica, no puede ser representado por medio de funciones lineales excepto a nivel local por lo que obtener campos no lineales y continuamente diferenciables es uno de los problemas centrales
- b) El modo de deformación de estos materiales es el mismo cualquier orientación del material y sólo varía en 24 posibles variantes por lo que las grandes variaciones observadas, son en realidad un efecto de proyección que depende fuertemente del sistema de referencia en que se está observando el fenómeno.
- c) La relación entre el esfuerzo aplicado, la temperatura de prueba y la deformación responde a aspectos termodinámicos que controlan el progreso de transformación en el material.

Dichos aspectos han sido tratados por diversos autores y en general, el estudio del fenómeno se ha orientado en dos líneas un tanto independientes que son: el análisis basado en el equilibrio termodinámico y el estudio de la deformación que sufre la red cristalina durante la transformación martensítica. Aunque dichos enfoques han contribuido de manera importante al entendimiento del comportamiento de estos materiales, hasta hace poco, han sido visto de manera separada por lo que la correlación con el proceso de deformación mencionada en los incisos a) y b) ha sido un tanto superficial.

En el presente trabajo, se desarrolla un modelo matemático basado en una descripción matemática del proceso de deformación que sufren los materiales con memoria de forma durante la transformación martensítica. El modelo es del tipo fenomenológico pero considera los tres aspectos mencionados anteriormente de tal manera, que se integran a un modelo

capaz de considerar la no homogeneidad de la deformación, los efectos de la orientación del material y la relación termodinámica esfuerzo-temperatura-crecimiento de la nueva fase. Para representar la deformación (que llamamos distorsión en el cuerpo del trabajo para evitar que se confunda con el campo tensorial de deformaciones) se definió un campo vectorial clase  $C^3$  no homogéneo capaz de considerar las tres regiones de deformación diferenciada que se presenta al formarse una variante de martensita en el material. Para representar el efecto de orientación se emplearon tensores de transformación que relacionan la base definida por el elemento de transformación y la que define por el eje de aplicación de la carga y el plano de observación, ambas referidas a una tercera base definida por los ejes principales de la celda unitaria de la fase austenítica. Una complicación que tuvo que ser superada fue la aplicación del cambio de base a una función no homogénea para lo cual se recurrió a la composición de funciones en lugar del producto de tensores de transformación típicamente empleado para funciones lineales. Finalmente, para representar la relación: esfuerzo-temperatura-crecimiento de la nueva fase se empleó una función de Boltzmann cuyos parámetros fueron obtenidos considerando criterios de acumulación de energía durante la transformación martensítica inducida por esfuerzo.

El desarrollo del modelo, conduce a una relación: esfuerzo-deformación-temperatura general, que luego es aplicada a una familia de orientaciones de especial interés para los MMF. Los datos de entrada del modelo son: 1) las temperaturas críticas de material, 2) la razón de esfuerzo, 3) los sistemas de transformación, 3) la orientación del sistema de observación 4) la geometría de la muestra y 5) el modo de carga, todos ellos disponibles en la literatura o bien de fácil determinación.

El presente trabajo, está dividido en 4 capítulos y un apéndice en que se describen los aspectos generales de los MMF como son: las definiciones fundamentales, los parámetros de la transformación, las características generales del comportamiento mecánico de dichos material, haciendo énfasis en los tres tipos de anisotropía mecánica que se han reportado en la literatura, así como un resumen de los principales modelos matemáticos para simular el comportamiento de los MMF reportados en la literatura. Es importante mencionar que en dicho apéndice se presenta una colección de datos experimentales reportados en la literatura para las principales aleaciones con memoria de forma que han sido estudiadas en los últimos 30 años.

En el capítulo 1 se presentan las ideas principales de los enfoques: termodinámico y cristalográfico, bajo los cuales se ha estudiado el comportamiento mecánico de los MMF.

Posteriormente, en el capítulo 2 se presenta el desarrollo del modelo matemático que se propone en el presente trabajo el cual, como se mencionó anteriormente, considera por separado la deformación, el cambio de sistema de observación y la relación esfuerzo-temperatura-crecimiento de la nueva fase, para finalmente acoplar dichos términos en un conjunto de ecuaciones constitutivas.

En el capítulo 3, denominado resultados, se presentan la aplicación del modelo matemático desarrollado en el capítulo 2 a los casos de estudio mencionados anteriormente. El modelo que se obtiene es empleado para de simular los siguientes patrones que son de gran utilidad para el estudio del comportamiento de estos materiales mediante técnicas experimentales:

- a) La distorsión que sufre la superficie de observación de la muestra

- b) La distorsión que sufre una marca testigo dibujado sobre la superficie de observación.
- c) El campo de desplazamientos asociado la deformación
- d) Las curvas esfuerzo-deformación a temperatura constante, deformación-temperatura a esfuerzo constante, desplazamiento-temperatura a esfuerzo y/o deformación constante.

Dichos resultado son calculados para muestras hipotéticas tanto monocristalinas como policristalinas en los siguientes casos:

#### Monocristales

- a) En tensión simple a esfuerzo constante y enfriamiento
- b) En tensión simple a temperatura constante y esfuerzo variable
- c) En flexión en cantilever con carga constante puntual en su extremo libre

#### Policristales

- a) Policristal con granos en serie sujeto a esfuerzo constante y enfriamiento.
- b) Policristal con granos en serie sujeto a temperatura constante y esfuerzo incremental.
- c) Pseudo policristal con granos puntuales sujeto a tensión a temperatura constante bajo una condición de deformación constante.

Aunque los resultados teóricos obtenidos aplicando el modelo, no son comparados directamente con resultados experimentales se relacionan cualitativamente con comportamientos reportados en la literatura los cuales pueden ser estudiados de manera particular.

Finalmente, en el capítulo 4 se presentan dos aplicaciones de los MMF, denominadas: Persianas Inteligentes y Termo-actuador, en las cuales se pueden aplicar los casos simulados en el capítulo 3 para hacer más eficiente su diseño. Cabe destacar que originalmente, los dispositivos fueron diseñados empleando modelos ingenieriles simples, desarrollados previamente, que presentan severas limitaciones debido a que son incapaces de considerar en especial los aspectos anisotrópicos del material.

# Capítulo 1.- Teoría de la transformación martensítica inducida por esfuerzo.

## 1.1.-Introducción

En el presente trabajo, se desarrolla un modelo matemático capaz de simular la distorsión que sufre (n) un (los) Material (es) con Memoria de Forma (MMF) metálico (s) durante la Transformación Martensítica (TM) inducida ya sea por esfuerzo, a temperatura constante, o bien por enfriamiento si el esfuerzo se mantiene constante. El modelo que se propone es un modelo fenomenológico que integra los dos aspectos más importantes de la TM que son: a) la física del fenómeno, que considera principalmente el equilibrio termodinámico y b) los cambios que sufre la estructura cristalina del material. Así mismo, el modelo que se propone emplea los siguientes conceptos fundamentales de la mecánica del medio continuo:

1. El concepto de deformación no homogénea que se emplea para describir la distorsión que sufre el material al formarse y crecer una variante de martensita. Este aspecto es de gran importancia debido a que durante la transformación se presentan tres regiones donde la deformación es totalmente diferente y al progresar la transformación una de estas regiones crece, la segunda disminuye y la tercera se mantiene. Acoplar este modo de deformación representa una de las complicaciones más importantes del modelo.
2. El concepto de cambio de base de una función no homogénea que es empleado para proyectar la distorsión que sufre el material durante la TM al sistema de referencia definiendo por las cargas aplicadas y el plano de observación de la muestra. En este punto el principal problema es que la distorsión sufrida por el material es definida, mediante un campo no homogéneo, en un sistema de referencia (llamado: sistema de transformación) que en general es totalmente diferente al sistema de referencia en el que se observa la muestra. Adicionalmente, ambos sistemas de referencia son definidos por los llamados índices de Miller los cuales están referidos a un tercer sistema de referencia definido por la celda unitaria del material antes que inicie la transformación. Es claro que no pueden ser aplicadas las ecuaciones típicas del cambio de base de una función lineal para transformar una función no homogénea, como la que se emplea para describir la deformación (que en presente trabajo llamaremos “distorsión” para distinguirla del campo tensorial de deformación) del material ya que por definición es no lineal.
  - a) Las definiciones fundamentales de la elasticidad que a partir de la distorsión, nos permiten definir los campos: vectorial de desplazamientos y tensorial de deformaciones. Así mismo se consideran los conceptos de campo tensorial de esfuerzos, la ecuación vectorial de equilibrio así como la relación tensorial entre esfuerzos y deformaciones.

Es claro que para abordar el problema que se trata en el presente trabajo, es preciso hacer una revisión de los conceptos generales de la TM y los MMF por lo que el presente capítulo inicia con una breve descripción de los aspectos más relevantes del fenómeno mientras que

los detalles particulares se presentan en el apéndice A. Posteriormente, se abordan las dos teorías fundamentales sobre TM en MMF que se conocen hoy en día como lo son la que denominamos: “Teoría de Patoor” (TP) y la “Teoría Fenomenológica de la Transformación Martensítica”(TFTM). La primera aborda la parte física de la transformación, a partir del equilibrio termodinámico, mientras que la segunda trata los cambios que sufre el material en su estructura cristalina.

## 1.2 Generalidades de los MMF y de la TM.

### 1.2.1. Conceptos generales

Actualmente, se sabe que los MMF son aquellos que tienen la capacidad de tomar dos formas predeterminadas al variar la temperatura entre dos valores que dependen de la composición química del material [1]. En realidad se sabe que existen una serie de efectos que presentan los MMF entre los cuales se encuentran: el efecto memoria de forma simple, el doble efecto memoria de forma, el efecto superelástico, entre otros [1,2].

Así mismo se sabe que los efectos que presentan estos materiales se deben a que en ellos se presenta una transformación martensítica (TM) termoelástica a partir de una fase madre (llamada comúnmente austenita) que puede ser inducida por enfriamiento, esfuerzo, combinación de los anteriores así como por la aplicación de campos magnéticos [1,2].

Según ha sido reportado en la literatura, la TM es no difusiva, de primer orden en la que la red sufre una deformación de corte simple a partir de un plano que se mantiene invariante durante la transformación y que es llamado: “plano de hábito” [3]. En realidad, existen seis planos de hábito y cuatro direcciones por cada plano en las cuales se puede presentar la deformación de corte de la red. Un plano y una dirección de corte forman una variante de martensita y el conjunto de las 24 variantes se denomina sistema de transformación (ST).

Algunos rasgos importantes de la TM es que hay un intervalo de temperatura en que coexisten las fases austenita y martensita además de que se presenta una histéresis de transformación debido a que durante la transformación austenita →martensita ocurre una disipación de calor. Cuando la TM es inducida por enfriamiento, sin esfuerzo aplicado, se distinguen cuatro temperaturas críticas, dos ellas asociadas al inicio y fin de la transformación austenita →martensita y las otras dos asociadas a la transformación inversa [1].

Por convención, se asume que cuando el 10% del material ha transformado se considera que la transformación inició y cuando se alcanza el 90% se dice que ha concluido. La temperatura correspondiente al inicio de la transformación es llamada  $M_s$  mientras la de finalización se conoce como  $M_f$ . Para la transformación inversa las temperaturas son llamadas  $A_s$  y  $A_f$  respectivamente [1]. Las cuatro temperaturas críticas de un MMF pueden ser medidas practicando al material una prueba de calorimetría diferencial de barrido o bien una de resistividad.

La Transformación Martensítica Inducida por Esfuerzo (TMIE), que se obtiene cuando la temperatura se mantiene constante pero mayor que  $A_f$ , está regida por la ecuación de Calssius-Clapeyron la cual define la llamada razón de esfuerzo ( $\frac{\partial \sigma}{\partial M_s}$ ) que es una cantidad característica del tipo de transformación martensítica que se induce en el material [1,4]. El

esfuerzo  $\sigma$  al que se refiere la razón de esfuerzo es el que se requiere para iniciar la transformación y depende de la temperatura de prueba. En realidad, como se discute más adelante, el esfuerzo necesario para iniciar la transformación es un esfuerzo de corte que puede ser generado por un esfuerzo de tensión aplicado a la muestra o bien por un estado de esfuerzos planos. De cualquier modo, la transformación iniciará en aquella variante de martensita en la que se alcance primero el valor crítico.

La caracterización completa de las propiedades de Memoria de Forma de un material se puede apreciar en un diagrama Esfuerzo-Temperatura-Transformación (ETT) los cuales son particulares de cada MMF [5-8].

Es importante mencionar que existen diferentes tipos de martensitas que pueden ser inducidas a partir de diferentes tipos de austenitas observadas en MMF. En general, la austenita presenta estructuras con simetría cúbica centrada en el cuerpo mientras que las estructuras de la martensita son generalmente de largo período con celdas que pueden ser ortorrómbicas, triclinicas, etc [14]. En aleaciones con memoria de forma de cobre se han reportado estructura B2, L2<sub>1</sub> y DO<sub>3</sub> para la fase austenítica mientras que para la fase martensítica se habla de estructuras del tipo 2H, 6R, 9R y 18R [1,14].

### 1.2.2.- Comportamiento termo-mecánico de MMF

Es de gran importancia para el objetivo del presente trabajo elaborar una descripción del comportamiento termo-mecánico que presentan los MMF por lo que a continuación se da una breve reseña de los rasgos característicos del mismo.

Cuando la transformación es inducida por enfriando, cuando la muestra esta una temperatura menor a  $M_f$  y sin esfuerzo aplicado, el material conserva su forma macroscópica debido a que se presenta un mecanismo denominado: “formación de variantes auto-acomodantes” [1, 14]. Este mecanismo permite que las 24 variantes que se forman en el material se orienten de tal manera que la deformación generada por la distorsión de la red cristalina se acomoda conservando la forma macroscópica del material, aunque en la superficie de la muestra se puede apreciar la aparición de ciertas protuberancias que asemejan “agujas”. Si en este estado se aplica al material un ciclo de carga y descarga, se presenta una deformación aparentemente plástica que es totalmente recuperada al incrementar la temperatura por encima de  $A_f$ . Este comportamiento corresponde con el llamado efecto Memoria de Forma Simple que es característico de los MMF.

Cuando la transformación es inducida por esfuerzo, el mecanismo de formación de variantes auto-acomodantes no se presenta y de las 24 variantes sólo se formarán aquellas que se ven favorecidas por el esfuerzo aplicado. En este caso el material presenta una deformación elástica hasta 40 veces mayor a la de los materiales convencionales, por lo que este comportamiento es denominado superelástico [1, 7, 19 y 20]. Esta deformación, denominada deformación transformacional, inicia cuando el esfuerzo aplicado alcanza el valor crítico para la temperatura de prueba y progresa con ligeros incremento en el esfuerzo hasta llegar a un valor crítico superior que delimita el fin de la transformación. Si el proceso se invierte, la deformación es totalmente recuperada pero aparece una histéresis en el proceso.

Otro rasgo característico del comportamiento termomecánico de los MMF se presenta cuando estando el material a una temperatura mayor que  $A_f$ , es sometido a un esfuerzo constante y se va disminuyendo la temperatura. En este caso, el material presentará una deformación que se mantiene constante hasta que la temperatura alcanza un valor crítico  $M_s^\sigma$ , que depende de la magnitud del esfuerzo aplicado. Si se continúa enfriando el material la deformación incrementará progresivamente hasta que se alcanza una temperatura  $M_f^\sigma$ , que también depende del esfuerzo aplicado, a partir de la cual la deformación ya no incrementará más. Si se aplica el proceso inverso, es decir si se incrementa ahora la temperatura, la deformación será totalmente recuperada arrastrando la carga aplicada. Es importante mencionar que en este proceso también se presenta una histéresis, por lo que las temperaturas críticas correspondientes se trasladan a valores superiores.

Los tres efectos mencionados en los párrafos anteriores constituyen lo que es llamado: “el comportamiento termo-mecánico de los MMF” el cual, claramente se ve que difiere considerablemente del que presentan los materiales convencionales. Adicionalmente, existen otros rasgos que hacen más complejo dicho comportamiento, uno de ellos es la alta anisotropía mecánica que se presenta al menos en tres variantes: en la fase austenita, en el esfuerzo de transformación y en la deformación transformacional. Cabe mencionar que el comportamiento mecánico de las ambas fases: la austenita y la martensita por separado son linealmente elásticos sin embargo el proceso de transformación introduce una componente no lineal que lo complican considerablemente.

La anisotropía que se relaciona con la fase austenita está asociada a la simetría que presenta dicha fase, la cual, como se mencionó anteriormente, es del tipo CCC. Como se sabe, un cristal con dicha simetría contiene tres ejes de simetría diferentes lo que trae como consecuencia que el número mínimo de constantes elásticas necesarias para describir su comportamiento es 3 y no 2 como ocurre con los materiales isótropos [5]. Según se ha reportado en la literatura, la fase austenita de diversos MMF presentan coeficientes anisotrópicos que varían entre 11 y 15. Como consecuencia de lo anterior, el módulo elástico de la fase austenita presenta variaciones que van de 23 a 230 GPa cuando la orientación de la muestra cambia de la dirección  $[0 \ 0 \ 1]$  a la  $[1 \ 1 \ \bar{1}]$ [5, 21].

Por otro lado, la anisotropía asociada al esfuerzo transformacional se refiere a una fuerte dependencia de la magnitud de esfuerzo crítico con la orientación del material que ha sido reportado en la literatura. Dichas variaciones se debe a que la TMIE inicia cuando el esfuerzo de corte aplicado sobre un elemento del ST alcanza el valor crítico para la temperatura de prueba. Considerando que existen 24 posibles variantes de martensita que se pueden formar en un MMF es necesario calcular el esfuerzo de corte inducido por la carga aplicada en cada uno de los elementos del ST. En metalurgia mecánica generalmente se usa el Factor de Schmid (FS), o bien el Factor de Taylor (FT) que es su recíproco, para determinar la componente de corte (sobre un plano predeterminado) que es generado por una carga aplicada [4]. Como se sabe, el FS depende de la orientación ya que para calcularlo es necesario conocer la orientación del eje de aplicación de la carga así como los índices de Miller del plano y la dirección del cortante. En estados de esfuerzos biaxiales, se ha empleado el FT para construir diagramas de transformación análogos a los que se emplean en teoría de cedencia de materiales convencionales [9, 10, 16-18, 23-26].

Finalmente, la anisotropía asociada a la deformación transformacional se refiere a una variación severa de la magnitud de la deformación transformacional con la orientación que

ha sido observada en muestras policristalinas de diversos MMF sujetas a tensión uniaxial [5, 11,12, 19, 20]. Diversos autores han reportado dicho efecto en Aleaciones con Memoria de Forma (AMF) y se ha encontrado cierta correlación con el FS [19]. En realidad, como se muestra en el presente trabajo este efecto se refiere más bien a una proyección de la deformación de corte en el sistema de observación. Como se mencionó anteriormente, este aspecto es la parte fundamental del modelo que se desarrolla en el capítulo 2 debido a que representa una de las principales complicaciones para el diseño de dispositivos que aprovechen las propiedades de los MMF.

Es importante mencionar que en MMF policristalinos a los efectos mencionados anteriormente se suman los efectos asociados a la micro-estructura tales como el tamaño y la forma del grano. Según se ha reportado en la literatura, el tamaño de grano influye fuertemente tanto en la magnitud del esfuerzo de transformación así como en las temperaturas de transformación [15-18]. Un efecto similar se presenta en el esfuerzo de cedencia de materiales policristalinos convencionales [27].

Es importante considerar que en los últimos 15 años han sido publicados en la literatura una buena cantidad de modelos matemáticos que pretenden simular el comportamiento termomecánico de los MMF. En su mayoría los modelos publicados son fenomenológicos y se basan en teorías conocidas como: la plasticidad, la elastoplasticidad y la viscoelasticidad entre las más importantes [28-33]. Así mismo, otros modelos se basan en la física del fenómeno y sólo los más recientes se orientan a relacionar los cambios estructurales con el comportamiento macroscópico [32-33].

### 1.3.-Teoría de Patoor

A continuación se presenta una breve descripción del análisis termodinámico presentado por Patoor et al [4] el cual inicia definiendo la deformación en función de la fracción volumétrica de material que se encuentra en fase martensítica. Luego, dicho análisis continúa con la definición de los potenciales termodinámicos del material, es decir, la energía libre del sistema; cuando se encuentra en fase auténica, así como cuando se encuentran presentes ambas fases: auténica y la martensítica. Posteriormente, Patoor calcula la variación de la energía libre al pasar del primer estado al segundo, a partir de la cual determina la llamada: “fuerza termodinámica de la transformación” así como la “evolución de la transformación martensítica”. Dicho análisis conduce a dos condiciones que deben cumplirse simultáneamente durante la TM y son empleadas para definir el comportamiento termomecánico que presentan los MMF.

#### 1.3.1.- Aspectos cinemáticos de la transformación martensítica

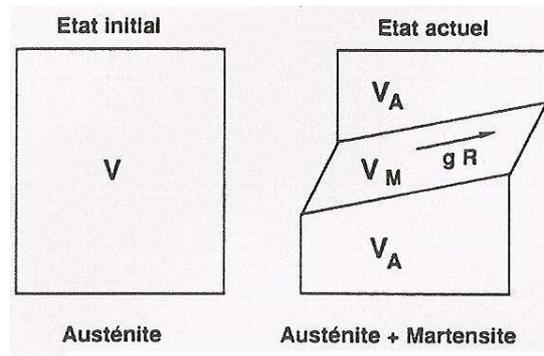
En un MMF cuyo volumen es  $V$ , el cual se encuentra sujeto a un esfuerzo  $\sigma$  y a una temperatura  $T$  se puede formar una variante de martensita, de volumen  $V_M$ , al aplicar un incremento del esfuerzo y/o un decremento de la temperatura. La deformación debida a la formación de la variante de matensita, la cual se muestra Figura 2.1, corresponde con una deformación de corte  $gR$  donde  $g$  es la magnitud del cortante y  $R$ , en el caso de que se trate del tensor de deformación, es un tensor de orden 2 que define la orientación cristalina de la variante relativa a la dirección del esfuerzo aplicado. Dicha deformación puede expresarse como:

$$\varepsilon = gR \frac{V_M}{V} \quad (1.1)$$

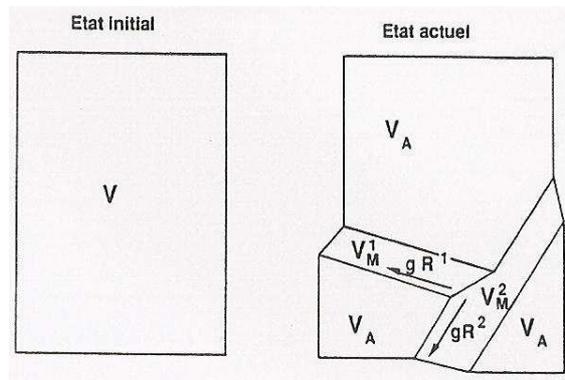
Donde: el cociente  $\frac{V_M}{V} = f$  es llamado, la fracción volumétrica de material transformado a la fase martensita.

Así mismo, la variación de la deformación depende de la variación de  $f$  de tal manera que:

$$d\varepsilon = gRdf \quad (1.2)$$



(a)



(b)

Figura 1.1. Diagramas que muestran la deformación que sufre un MMF durante la TM considerado por Patoor et al, a) aparición de una sola variante, b) aparición de diferentes variantes [4].

Por otro lado, si aparecen más de una variante ( $i=1$  hasta  $N$ ) de martensita en el material de manera simultánea, como se muestra en la Figura 1.1(b), entonces cada una de ellas contribuirá a la deformación global dependiendo de la fracción volumétrica de cada una de ellas  $f^i$  y su orientación propia  $R^i$ . En este caso la deformación puede ser expresada como:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^N gR^i f^i \quad (1.3)$$

De la expresión anterior, es claro que una variación de la fracción volumétrica de alguna de las variantes de martensita inducidas generará una variación de la deformación, lo cual se puede expresar como:

$$d\varepsilon = \sum_{i=1}^N gR^i df^i \quad (1.4)$$

Luego la deformación transnacional máxima  $\varepsilon_{Ms}$  que puede experimentar un MMF es:

-Para una sola variante:

$$f = \frac{V_M}{V} = 1, \quad \epsilon_{Ms} = gR \quad (1.5)$$

-Para el caso en que se forman diferentes variantes de martensita:

$$\sum f^i = \sum \frac{V_M^i}{V} = 1, \quad \epsilon_{Ms} = \sum_{i=1}^N gR^i f^i \quad (1.6)$$

Cabe destacar que cuando se formen diferentes variantes, la deformación global depende de la fracción volumétrica relativa de cada una de las diferentes variantes. Un diagrama donde se muestra la deformación que sufre un MMF cuando aparecen dos variantes de martensita se presenta en la Figura 1.1 (b).

Si se toma como estado de referencia la forma del material estando en una mezcla de fases: austenita+martensita, entonces al ocurrir la transformación inversa (martensita→austenita) se presentará una deformación en sentido contrario.

Es importante mencionar que el análisis expuesto anteriormente, se limita a materiales monocristalinos donde las plaquetas de martensita se pueden extender a lo largo de toda la muestra, lo cual no ocurre en el caso de materiales policristalinos.

En materiales policristalinos, el movimiento de las plaquetas de martensita está limitado por las fronteras de grano por lo que para que la transformación martensita progrese, se requieren fuerzas termodinámicas que son considerablemente mayores que las que se presentan en el caso de monocristales. Así mismo, en materiales policristalinos se presentan esfuerzos internos que pueden alcanzar el límite de ruptura del material.

Por otro lado, en los materiales policristalinos la orientación de las plaquetas de martensita en cada grano se torna un tanto impredecible lo cual limita la deformación transformacional máxima. Para MMF como Cu-Zn-Al o Ni-Ti monocristalinos se alcanzan deformaciones transformacionales de alrededor de 10% mientras que en policristales de la misma aleación la deformación transformacional presenta variaciones de entre 3% y 6%, en el primer caso, y 8% para el segundo.

Otros casos discutidos por Patoor, corresponden con la formación de variantes gemelas, así como la reorientación de variantes.

### 1.3.2.-Aspectos termodinámicos

Como se discutió en la sección anterior, el estudio de la cinemática de la TM nos permite definir las condiciones termo-mecánicas de la transformación austenita-martensita así como de la reorientación de variantes. Adicionalmente, es indispensable determinar cuantitativamente la variación de la deformación  $d\epsilon$  asociada a una variación de la temperatura  $dT$  y/o del esfuerzo aplicado  $d\sigma$ . La relación entre dichas variables puede ser determinada a través de un análisis termodinámico el cual se basa en el equilibrio de los diferentes términos de energía del sistema durante el cambio de fase.

#### 1.3.2.1.-Potenciales termodinámicos

Si se tiene un volumen  $V$  de material en fase austenita, a una temperatura  $T$  que se encuentra sometido a un esfuerzo  $\sigma$ , la energía  $G_A$  del sistema se compone de dos términos:

1.-Un término que representa la energía química  $VG_A^C$  correspondiente a la energía interna de la fase austenítica, la cual depende de la temperatura, y

2.-Un término que representa la energía mecánica  $W_P^A$  correspondiente con la energía potencial debida al esfuerzo  $\sigma$  y la energía elástica almacenada en la fase austenítica.

De tal manera que a una presión constante, la energía del sistema está dada por la suma de ambos términos es decir:

$$G_A = VG_C^A + W_P^A \quad (1.6)$$

Si las constantes elásticas del material son independientes de la temperatura entonces el término  $VG_C^A$  sólo depende de la temperatura.

Por otro lado, si un volumen  $V_M$  de martensita se forma en el material (como se muestra en la Figura 2.2), la energía libre  $G_{A+M}$  del sistema (austenita+martensita) es:

$$G_{A+M} = V_A G_C^A + V_M G_C^M + \Gamma S + W_P^{A+M} + E_{int} + E_{irr} \quad (1.7)$$

Donde:

$V_A G_C^A$  es la energía química de fase austenítica restante en el material (cuyo volumen es  $V_A < V$ );

$V_M G_C^M$  es la energía química de la martensita cuyo volumen es  $V_M$  y

$\Gamma S$  corresponde con la energía de la interfase austenita-martensita;

La energía mecánica potencial  $W_P^{A+M}$  representa la energía elástica almacenada en el sólido cuyo volumen es  $V_A + V_M = V$  y  $\Delta W_P^\sigma$  es la variación de la energía potencial asociada al esfuerzo aplicado  $\sigma$ .

En primera aproximación, considerando que las constantes elásticas de ambas fases son iguales, entonces:  $W_P^{A+M} = W_P^A + \Delta W_P^\sigma$

El término  $E_{int}$  describe la energía asociada a los esfuerzos internos, las interacciones entre variantes de martensita, entre las plaquetas de martensita y entre los límites de grano.

$E_{irr}$  se asocia a la disipación de calor por fricción interna.

Debido a que la TM es termo-elástica y reversible, los términos  $\Gamma S$  y  $E_{irr}$  son despreciables.

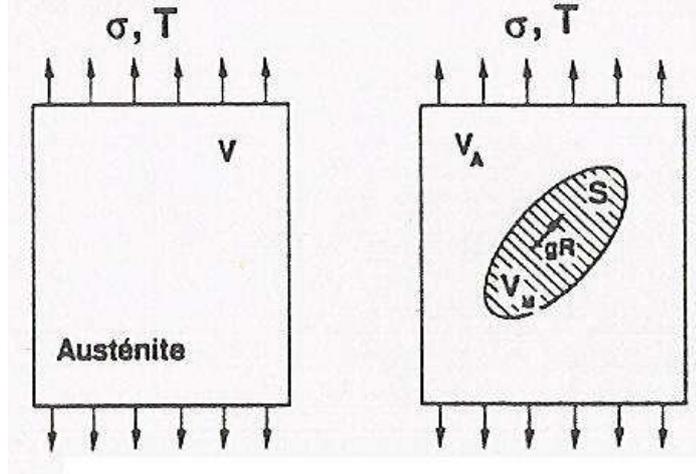


Figura 1.2. Formación de una plaqueta de martensita de volumen  $V_M$  [4].

Considerando las expresiones anteriores, la variación de la energía libre  $\Delta G$  entre ambos estados {A+M} y {A} se puede escribir como:

$$\Delta G = G_{A+M} - G_A = V_A G_C^A + V_M G_C^M + W_P^{A+M} + E_{int} - V G_C^A - W_P^A \quad (1.8)$$

De donde, empleando la relación  $V = V_A + V_M$  y la notación  $\Delta G_C^{MA} = G_C^M - G_C^A$  se obtiene:

$$\Delta G = V_M \Delta G_C^{MA} + (W_P^{A+M} - W_P^A) + E_{int} \quad (1.9)$$

Donde la variación de la energía potencial  $\Delta W_P^\sigma = W_P^{A+M} - W_P^A$  y la energía de interacción  $E_{int}$  depende de manera compleja de la orientación de las variantes activadas y de la microestructura del material. Dichos términos son definidos como:

$$\Delta W_P^\sigma \approx -\sigma V_M R g \quad (1.10)$$

y

$$E_{int} \approx \frac{1}{2} A \left( \frac{V_M}{V} \right) V_M \frac{V_M}{V} g \quad (1.11)$$

Del análisis anterior se tiene que para un volumen unitario, la variación de la energía libre

$\frac{\Delta G}{V}$ , considerando que  $\frac{V_M}{V} = f$ , se puede escribir como:

$$\Delta G = \Delta G_C^{MA} f - \sigma f R g + \frac{1}{2} A(f) f^2 g \quad (1.12)$$

donde:  $T$  es la temperatura,  $f$  es la fracción volumétrica del material transformado  $R$  es un tensor que determina la orientación de material,  $f R g$  es la deformación macroscópica del material asociada a la TM,  $\Delta G_C^{MA} = B T + C$  (para el caso de MMF) es un término que representa la energía química y por lo tanto  $B$  y  $C$  dependen solo de la composición del material y  $A(f)$  es una función compleja que toma especial importancia en el caso de policristales ya que representa la interacción entre los granos.

Finalmente, la energía libre por unidad de volumen se escribe en función de la fracción volumétrica  $f$ , del esfuerzo  $\sigma$  y la temperatura  $T$ :

$$\Delta G(f, \sigma, T) = (BT + C)f - \sigma Rg + \frac{1}{2} A(f)f^2 g \quad (1.13)$$

### 1.3.2.2.-Fuerza termodinámica asociada a la transformación

A partir del cambio en la energía libre del sistema ( $\Delta G$ ), el cual representa el potencial termodinámico de la transformación, que describe el estado del sistema austenita-martensita se puede calcular la fuerza termodinámica  $t$  asociada a la fracción volumétrica  $f$  derivando  $\Delta G$  respecto a  $f$ , lo que conduce a:

$$t = \frac{1}{g} \frac{\delta \Delta G}{\delta f} = \frac{B}{g} T + \frac{C}{g} - \sigma R + A(f)f + \frac{1}{2} f^2 \frac{dA}{df} \quad (1.14)$$

Despreciando el término  $\frac{1}{2} f^2 \frac{dA}{df}$  debido a que es muy pequeño en comparación con los otros términos, y a que  $f \leq 1$ , se tiene que:

$$t = \frac{B}{g} T + \frac{C}{g} - \sigma R + A(f)f \quad (1.15)$$

Luego considerando que el equilibrio termodinámico requiere que  $t=0$ , se llega a expresión:

$$\sigma R = \frac{B}{g} T + \frac{C}{g} + A(f)f \quad (1.16)$$

De la expresión anterior, es posible bosquejar un diagrama de transformación en un plano de estado termodinámico ( $T, \sigma$ ), como el que se muestra en la Figura 1.3, en el cual se definen los dominios en los que las fases austenita y martensita son estables. Así mismo, en el diagrama de la Figura 1.3 se aprecia la región en la que pueden coexistir ambas fases<sup>1</sup>. Para mayor precisión en la definición de los dominios, se admite que  $R \sim 1/2$  para el caso de que la muestra esté sujeta a un esfuerzo de tensión.

Es claro que para un estado en el que la fracción volumétrica transformada es cero, la ecuación (1.16) se convierte en:  $\frac{\sigma}{2} = \frac{B}{g} T + \frac{C}{g}$  la cual describe la frontera entre el dominio de la fase antenita y el de austenita+martensita. Dicha frontera corresponde con el estado termodinámico ( $T, \sigma$ ) para el cual la transformación puede iniciar.

---

<sup>1</sup> Es importante mencionar que el diagrama de la Figura 1.26 es el mismo que el que se presentó en la Figura 1.4 pero en este caso se ha discutido el origen del mismo.

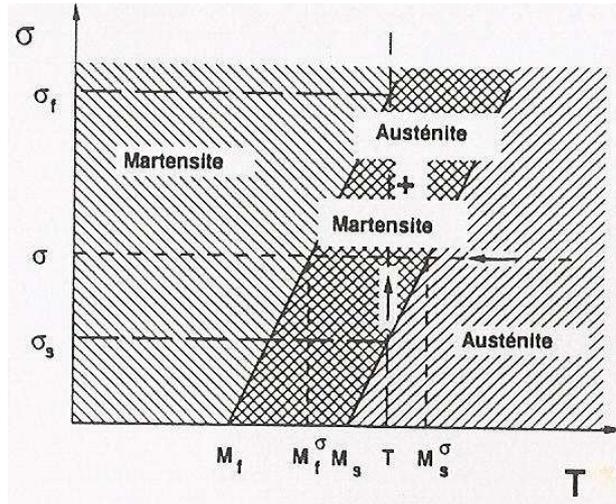


Figura 1.3. Diagrama de estados termodinámico ( $T, \sigma$ ) [4].

Cuando el esfuerzo aplicado  $\sigma$  es cero, la temperatura a la cual la transformación inicia es llamada  $M_s$ , la cual puede expresarse en términos de los coeficientes  $B$  y  $C$  como:

$$M_s = -\frac{C}{B} \quad (1.17)$$

Donde:  $M_s$  es una característica del material y depende, en primera aproximación, de la composición química. En materiales policristalinos, se ha reportado recientemente que esta temperatura y las demás temperaturas críticas dependen fuertemente del tamaño de grano [18].

Para un esfuerzo aplicado constante diferente de cero,  $\sigma$  en la Figura 1.3, la transformación austenita  $\rightarrow$  martensita comienza a una temperatura  $M_s^\sigma$  diferente de  $M_s$ .

De la misma forma, considerando la ecuación (1.16), es claro que la transformación martensítica se puede inducir a una temperatura  $T$  mayor que  $M_s$  aplicando un esfuerzo de magnitud  $\sigma_s$ . En este caso se dice que la deformación es inducida por esfuerzo.

De manera análoga, la frontera entre el dominio de la fase martensítica y la región donde coexisten la martensita y la austenita se obtiene haciendo  $f=1$  en la ecuación (1.16) de donde se obtiene que:

$$\frac{\sigma}{2} = \frac{B}{g} T + \frac{C}{g} + A(1) \quad (1.18)$$

De donde para  $\sigma=0$  la temperatura a la que finaliza la deformación es:

$$M_f = M_s - \frac{A(1)}{B} g \quad (1.19)$$

La diferencia  $M_s - M_f = gA(1)/B$  es independiente del esfuerzo y de la temperatura pero depende fuertemente de la composición química y de la microestructura. Así mismo, para una temperatura constante  $T$  se puede definir el rango de esfuerzos como:

$$R(\sigma_f - \sigma_s) = A(1) \quad (1.20)$$

En este caso dicha relación es independiente de la temperatura, más bien depende del material en el tiempo y de la naturaleza del esfuerzo aplicado. Para un estado de esfuerzos de tensión uniaxial  $R \sim 1/2$  mientras que para uno en cortante puro  $R \sim 1$ .

Además de permitirnos bosquejar el diagrama Esfuerzo-Temperatura-Transformación de la Figura 1.3, el análisis de los potenciales termodinámicos durante la TM, nos permite bosquejar los diagramas: fracción volumétrica transformada a Esfuerzo constante y a Temperatura constante que se muestran en la Figura 1.4.

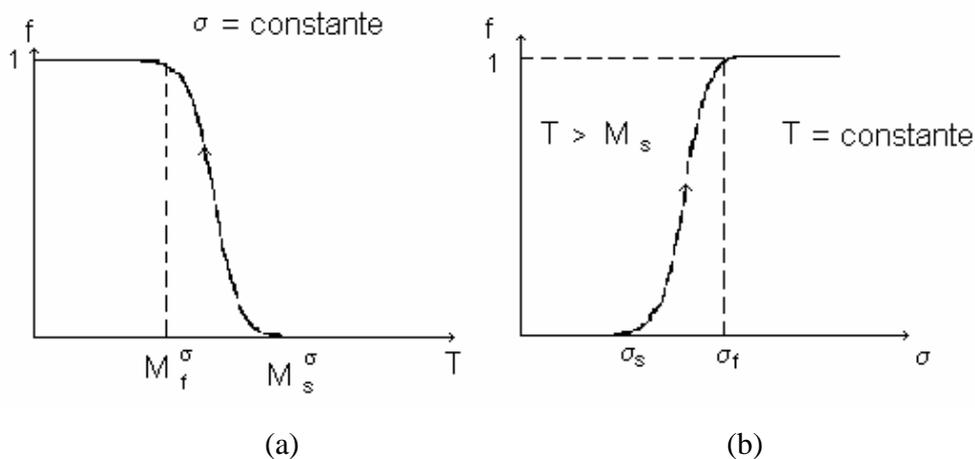


Figura 1.4. Variación de la fracción volumétrica transformada (a) a esfuerzo constante y (b) a Temperatura constante.

Para el caso de la transformación a esfuerzo constante, cuando  $T > M_s^\sigma$  la fracción volumétrica transformada es cero pero si la temperatura disminuye, la fracción volumétrica crece en el material hasta que lo cubre por completo ( $f=1$ ) cuando  $T = M_f^\sigma$ . Análogamente, para el caso de temperatura constante la transformación inicia en el material cuando el esfuerzo es igual a  $\sigma_s$  y finaliza cuando  $\sigma = \sigma_f$ .

Las consideraciones anteriores se aplican a la transformación austenita  $\rightarrow$  martensita sin embargo la transformación es reversible por lo que el análisis presentado anteriormente está limitado. Debe considerarse que existe una componente de energía no reversible que corresponde a una disipación de energía mecánica (la cual se transforma en calor) que origina una histéresis que se presenta durante la transformación inversa martensita  $\rightarrow$  austenita. El efecto de histéresis se traduce, en el diagrama  $(T, \sigma)$ , por un deslizamiento a la derecha de las fronteras de los dominios: austenita/austenita + martensita/martensita como se muestra en la Figura 1.5.

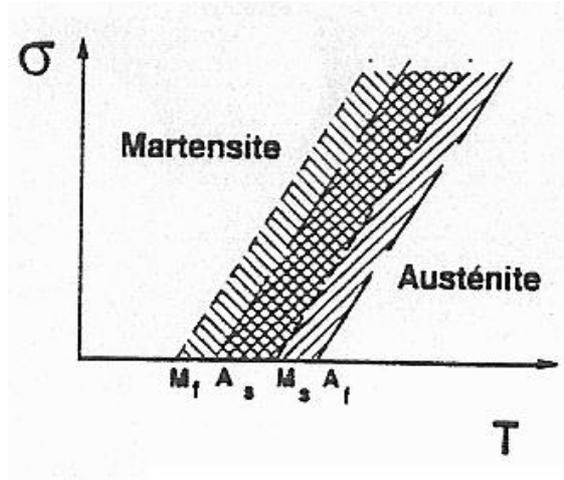


Figura 1.5. Efecto de la histéresis en el diagrama  $(T, \sigma)$  [4].

El efecto de deslizamiento de los dominios, asociado a la transformación, se puede representar por un término  $H(I)$  que se resta a la ecuación (1.16) cuando  $f=1$ , de donde se obtiene que:

$$R\sigma = \frac{B}{g}T + \frac{C}{g} + A(1) - H(1) \quad (1.21)$$

Para un esfuerzo nulo, la temperatura a la cual inicia la transformación inversa es llamada  $A_s$  y se escribe como:

$$A_s = M_f + g \frac{H(1)}{B} \quad (1.22)$$

Mientras que la temperatura a la cual finaliza la transformación inversa se denota por  $A_f$  y se obtiene a partir de una ecuación análoga a (1.21) introduciendo el término  $H(0)$  es decir:

$$R\sigma = \frac{B}{g}T + \frac{C}{g} - H(0) \quad (1.23)$$

Nuevamente para un esfuerzo igual a cero,  $T=A_f$  y se calcula como:

$$A_f = M_s + g \frac{H(0)}{B} \quad (1.24)$$

De donde se obtiene que la diferencia entre las temperaturas de transformación inversa es:

$$A_f - A_s = (M_s - M_f) + \frac{g}{B}(H(0) - H(1)) \quad (1.25)$$

Finalmente, para un ciclo completo de transformación, a esfuerzo constante y a temperatura constante se definen los términos  $H_\sigma$  y  $H_T$  como la histéresis a esfuerzo constante y temperatura constante respectivamente. Dichos término se muestra en la Figura 1.6.

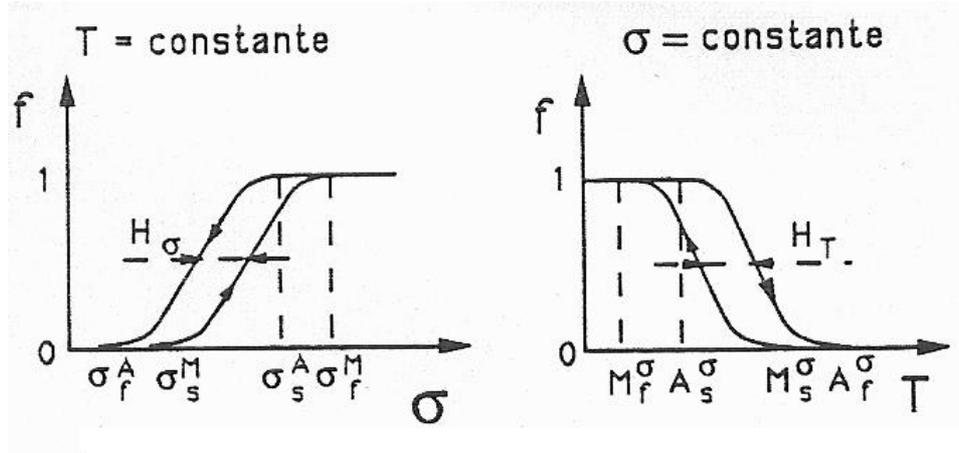


Figura 1.6. Efecto de la histéresis para los casos: a) Temperatura constante y b) Esfuerzo constante [4].

### 1.3.2.3.-Evolución de la transformación

En la sección anterior se presentaron las expresiones del potencial termodinámico de la transformación y de la fuerza termodinámica correspondiente las cuales permitieron, definir las condiciones bajo las cuales se puede llevar a cabo la TM. Es claro que si dichas condiciones se cumplen, entonces una variación del esfuerzo  $d\sigma$  y/o de la temperatura  $dT$  conducirá a una variación de la fracción volumétrica transformada  $df$  y viceversa.

Si para un estado  $(T, \sigma)$  se aplica un cambio de estado  $(T+dT, \sigma+d\sigma)$  manteniendo el equilibrio del sistema se presenta una variación de la fuerza termodinámicas  $dt$  tal que los efectos de  $dT$ ,  $d\sigma$  y  $df$  se anulen es decir:

$$dt = \frac{\delta t}{\delta f} df + \frac{\delta t}{\delta \sigma} d\sigma + \frac{\delta t}{\delta T} dT = 0 \quad (1.26)$$

De donde se obtiene que:

$$\frac{B}{g} dT - R d\sigma + A(f) df + f \frac{dA(f)}{df} df = 0 \quad (1.27)$$

Luego despreciando el término  $f \frac{dA(f)}{df} df$  y despejando  $df$  del término  $A(f) df$  se tiene que:

$$df = \frac{1}{A(f)} \left( R d\sigma - \frac{B}{g} dT \right) \quad (1.28)$$

De donde las condiciones para que crezca la fase martésica en el material son:

$$t=0 \quad \text{y} \quad \left( R d\sigma - \frac{B}{g} dT \right) > 0 \quad (1.29)$$

Es calor que dichas expresiones nos permite calcular la variación de la fracción volumétrica transformada en función de la variación de los parámetros de control  $d\sigma$  y  $dT$ . Cabe destacar que las relaciones (1.29) implican que  $df$  es positivo si  $d\sigma > 0$  y  $dT < 0$ . Esta

relación nos permite también calcular la deformación durante la TM y obtener una ley del comportamiento termomecánico del material la cual se desarrollará en la siguiente sección.

#### 1.3.2.4.-La supertermoelasticidad de los MMF

A continuación se discuten brevemente los rasgos característicos de la deformación supertermoelástica correspondiente a la formación de una sola variante de martensita orientada por la aplicación de un esfuerzo y que progresa debido a un incremento del esfuerzo o bien una variación de la temperatura (decremento).

Para un monocristal en el cual se forma una sola variante de martensita, como se muestra en la Figura 1.7, la deformación se obtiene a partir de las relaciones 1.2, 1.16 y 1.28 como:

$$d\varepsilon = Rgdf$$

$$df = \frac{1}{A(f)} \left( Rd\sigma - \frac{B}{g} dT \right) \quad \text{si} \quad R\sigma = \frac{B}{g} T + \frac{C}{g} + A(f)f$$

De donde:

$$d\varepsilon = \frac{Rg}{A(f)} \left( Rd\sigma - \frac{B}{g} dT \right) \quad (1.30)$$

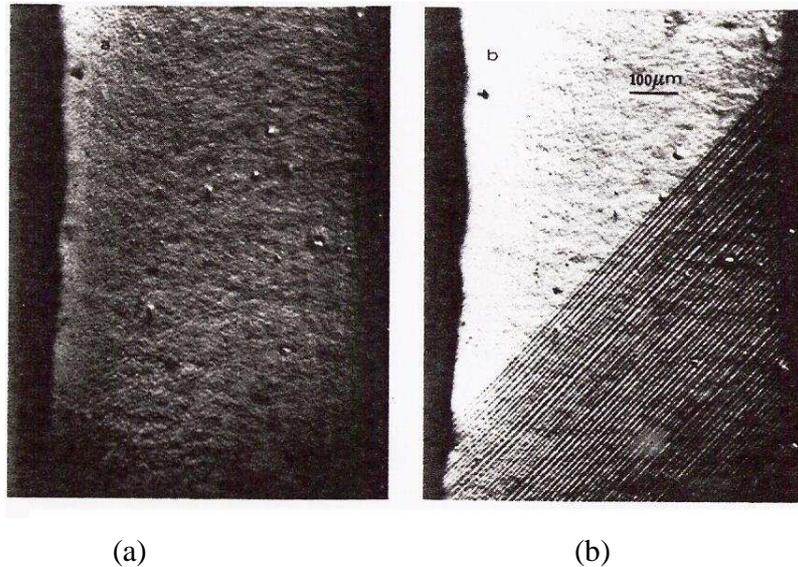


Figura 1.7. Micrografía de una probeta monocristalina de Cu-Zn-Al (a) en fase auténica y b) la parición de una variante de martensita debido a la aplicación de un esfuerzo [4].

Luego para un caso en el que la temperatura es constante, mayor que  $M_S$ , y reemplazando  $C$  por  $BM_S$  se obtiene que:

$$d\varepsilon = \frac{Rg}{A(f)} Rd\sigma \quad (1.31) \quad \text{si} \quad \sigma R = \frac{B}{g} (T - M_S) + A(f)f \quad (1.32)$$

Donde se puede apreciar que si Esfuerzo aplicado es cero y la Temperatura de prueba es mayor que  $M_S$ , el material se encuentra en fase austenita, es decir  $f=0$  y la ecuación (1.32)

no se satisface por lo que  $d\varepsilon=0$ . Es decir, que bajo dichas condiciones el material sufrirá una deformación elástica propia de la fase antenita.

Por otro lado, si es aplicado un esfuerzo al material cuando éste alcanza el valor de  $\sigma_s$  se tiene:

$$R\sigma_s = \frac{B}{g}(T - M_s) \quad (1.33)$$

Con lo que la ecuación (1.32) se satisface con un valor positivo y por lo tanto se tiene que un incremento del esfuerzo  $d\sigma$  conducirá a inducir la TM a la cual se asociará un incremento de deformación:

$$d\varepsilon = \frac{Rg}{A(0)} R d\sigma \quad (1.34)$$

Si se continúa incrementando el esfuerzo ( $d\sigma$ ), hasta alcanzar el valor límite, cuando  $f=1$ , el esfuerzo alcanzará el valor de  $\sigma_f$  lo cual conduce a la siguiente expresión:

$$R\sigma_f = \frac{B}{g}(T - M_s) + A(1) \quad (1.35)$$

Cuando este estado se alcanza, la transformación ha finalizado, el material se encuentra totalmente en fase martensítica y la deformación subsecuente será asociada a las propiedades elásticas de la nueva fase como se muestra en la Figura 1.8. Es importante mencionar que según esta teoría, para un monocristal, la deformación transformacional máxima será:

$$\varepsilon_{Ms} = gR \quad (1.36)$$

Si después de finalizada la transformación antenita→martensita se disminuye el esfuerzo aplicado ( $d\sigma<0$ ), manteniendo la temperatura constante ( $dT=0$ ), la transformación inversa (martensita→austenita) iniciará cuando el esfuerzo alcance el valor de  $\sigma_{A_s}$  el cual es menor que  $\sigma_f$  debido a la histéresis. La transformación inversa continuará hasta finalizar cuando el esfuerzo sea igual a  $\sigma_{A_f}$  menor que  $\sigma_s$ . Como se puede ver en la Figura 1.8 toda la deformación que se logró durante la TM es totalmente recuperada por lo que el comportamiento descrito es elástico. Dicha deformación puede alcanzar hasta un 10% lo cual es imposible de lograr en materiales convencionales. Debido a lo anterior el comportamiento anteriores es llamado superelástico o en pseudo elástico.

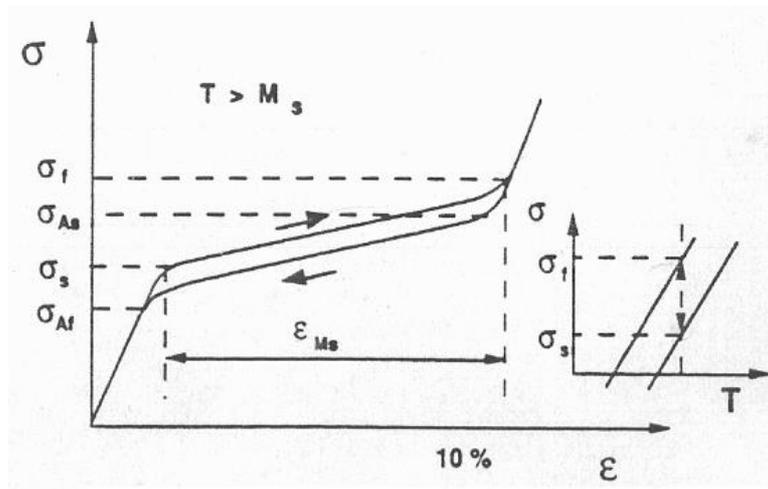


Figura 1.8. Curva esfuerzo deformación correspondiente a una prueba de tensión simple en la que se muestra la transformación martensítica inducida por esfuerzo así como la transformación inversa [4].

Es importante destacar que, como se aprecia en la Figura 1.9, para temperaturas mayores que  $M_s$  la magnitud del esfuerzo necesario para iniciar la TM ( $\sigma_s$ ) así como el de finalización ( $\sigma_f$ ) dependen fuertemente de la Temperatura; mientras que la deformación transformacional máxima  $\epsilon_{Ms}$  no. La variación de  $\sigma_s$  y  $\sigma_f$  con la temperatura, se aprecia claramente en las ecuaciones (1.33) y (1.35) y en el recuadro de la Figura 1.9.

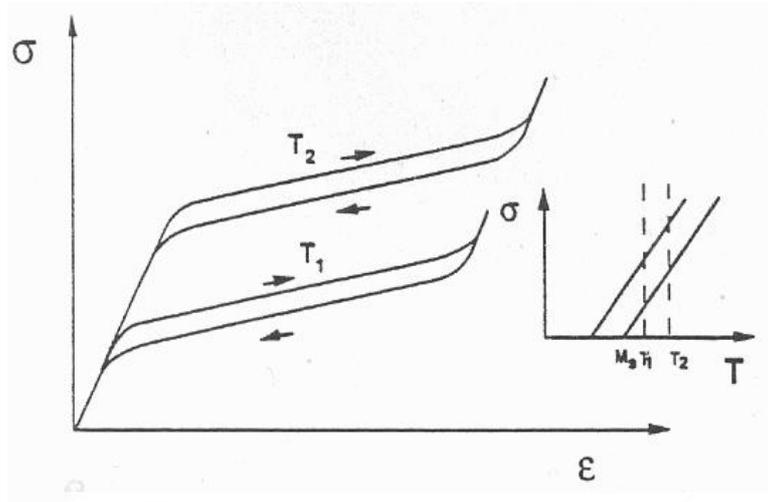


Figura 1.9. Efecto de la temperatura en el comportamiento superelástico [4].

Como ya ha sido mencionado anteriormente, en el caso de MMF policristalino, el fenómeno de la TM es considerablemente más complejo de describir. En la Figura 1.10, se ve claramente que la magnitud de la deformación transformacional máxima  $\epsilon_{Ms}$  es menor, la histéresis mayor y la transición entre el régimen elástico y el de transformación es más progresivo.

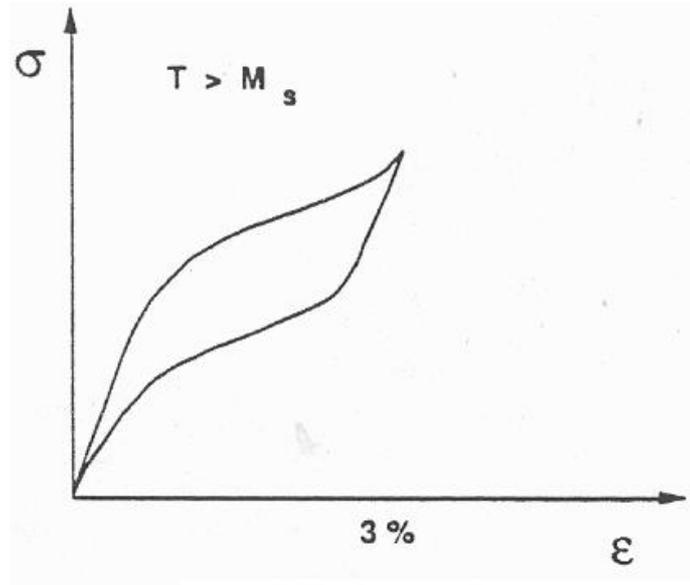


Figura 1.10. Efecto superelástico en una muestra policristalina [4].

Además del caso, en el que la TM es inducida a temperatura constante, discutido en los párrafos anteriores, el fenómeno de la TM inducida a esfuerzo constante tiene especial interés para este trabajo debido a que en pruebas reales, bajo esta condición, es posible inducir una sola variante de martensita.

A diferencia del caso superelástico, si se considera ahora una carga térmica a esfuerzo constante, la transformación martensítica comenzará cuando:

$$R\sigma = \frac{B}{g}(T - M_s) \quad (1.37)$$

Es decir, la temperatura a la cual iniciará la transformación  $M_s^\sigma$  dependerá de la magnitud del esfuerzo aplicado  $\sigma$  y de la temperatura  $M_s$ , es decir:

$$T = M_s^\sigma = \frac{Rg\sigma}{B} + M_s \quad (1.38)$$

Si a partir de dicho valor se aplica una  $dT$  negativa, es decir el material es enfriado, se obtiene:

$$df = -\frac{B}{g} \frac{1}{A(0)} dT \quad (1.39) \quad \text{y} \quad d\varepsilon = -B \frac{R}{A(0)} dT \quad (1.40)$$

Luego, cuando  $T$  alcanza el valor de  $M_f^\sigma$ :

$$R\sigma = \frac{B}{g}(M_f^\sigma - M_s) + A(1) \quad (1.41)$$

que corresponde con el fin de la transformación.

Estas ecuaciones, así como las correspondientes al comportamiento superelástico, serán referidas posteriormente en los capítulos 2 y 3 en donde se presenta el desarrollo del modelo que se propone para simular el comportamiento mecánico de los MMF.

A continuación se presentan las ideas principales de la llamada teoría fenomenológica de la transformación martensítica (TFTM) la cual pone especial énfasis en los aspectos cristalográficos durante la TM.

#### 1.4.-Teoría Fenomenológica de la transformación martensítica.

A pesar de que la teoría de Patoor brinda importantes condiciones para explicar el comportamiento de los MMF, dicha teoría es termodinámica y por ello, deja de lado una serie de aspectos estructurales que deben ser considerados para describir completamente el fenómeno. Como se mencionó anteriormente, los aspectos estructurales de la transformación martensítica son abordados por la llamada Teoría Fenomenológica de la Transformación Martensítica (TFTM) la cual parte del análisis de los cambios que sufre la estructura del material durante la transformación. A partir de ello, la TFTM brinda la posibilidad de determinar una serie de parámetros de gran importancia para el estudio de los MMF. El aspecto más importante que aborda dicha teoría consiste en la determinación de los llamados sistemas de transformación (ST) los cuales son indispensables para estudiar tanto el esfuerzo crítico como la deformación transformacional.

El objetivo de la TFTM es predecir cuantitativamente, desde un punto de vista cristalográfico, todos los parámetros cristalográficos asociados con la transformación tales como: el plano de hábito y la relación cristalina existente entre las fases austenita y la martensita, etc. Se sabe que existen dos teorías de la llamada: “teoría fenomenológica de la transformación martensítica (TFTM), las cuales hacen posible tales predicciones.

La TFTM fue desarrollada por Wechsler-Liberman-Red[35] y Bowles-Mackenzie [36] de manera independiente. Aunque las formulaciones son diferentes, se ha mostrado que ambas son equivalentes [1]. Debido a que es difícil explicar dicha teoría en forma extensa, a continuación se presentan las ideas principales aplicadas por Wechsler-Liberman-Red.

En principio, la TFTM propone la matriz de deformación  $P_1$  como operador, que representa la TM y que se puede expresar como:

$$P_1 = \Phi_1 P_2 B \quad (1.42)$$

donde: B representa la matriz de deformación de la red para crear la estructura de la fase martensítica a partir de la red de la austenítica,  $P_2$  es una matriz de corte de red invariante y  $\Phi_1$  es una matriz de rotación de la red.

En la TFTM el objetivo es minimizar la energía de deformación asociada a la transformación. Ya que dicha energía se concentra en la frontera de ambas fases, es posible eliminar la deformación de manera efectiva haciendo que la frontera sea un plano invariante, el cual no experimenta ninguna distorsión ni rotación durante la transformación. Es claro que un plano invariante no puede lograrse aplicando solamente la matriz B, por lo que es necesario aplicar  $P_2$  como se muestra esquemáticamente en la Figura 1.11. Aunque se puede lograr un plano sin distorsión aplicando  $P_2$ , se necesita  $\Phi_1$  para asegurar que no hay rotación.

De la ecuación (1.42) se ve claramente que la aplicación de  $B$ ,  $P_2 \Phi_1$  conduce a  $P_1$  la cual si se restringe a una condición de plano invariante se obtiene un sistema de ecuaciones cuya solución constituye la parte medular de la TFTM. Aunque se omiten la descripción detallada, a continuación se dan las ideas principales.

Si se hace  $P_2 B = F$ , siempre es posible descomponer  $F$  en el producto de una matriz simétrica  $F_S$  y una rotación  $\Psi$ . La parte simétrica puede diagonalizarse para los ejes principales de la transformación, entonces:

$$F = \Psi F_S = \Psi \Gamma F_d \Gamma^T \quad (1.43)$$

donde:  $F_d$  es una matriz diagonal,  $\Gamma$  es matriz para diagonalizar y  $\Gamma^T$  es la transpuesta de  $\Gamma$ . Luego, insertando esta expresión en la (1.42) se obtiene:

$$P_1 = \Phi_1 \Psi \Gamma F_d \Gamma^T \quad (1.44)$$

donde: todas las matrices excepto  $F_d$  son matrices de rotación por lo que sólo  $F_d$  contiene la deformación. Ya que  $F_d$  es diagonal, entonces se puede escribir como:

$$F_d = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (1.45)$$

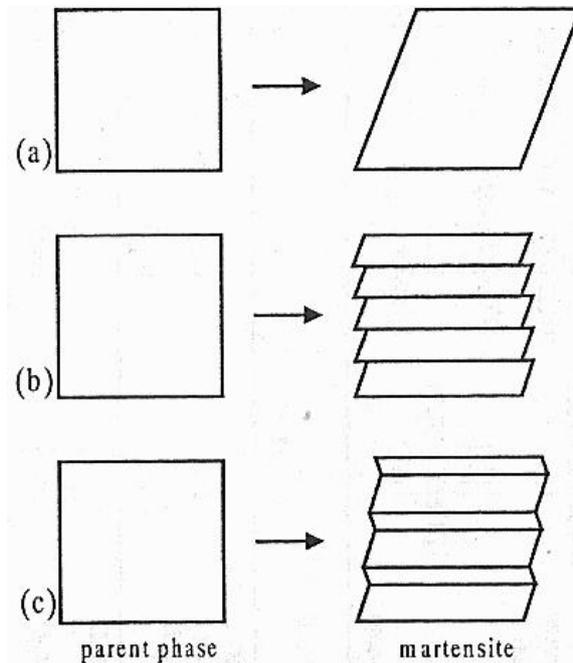


Figura 1.11. Esquema que muestra la razón por la cual se requiere un cortante de red invariante para describir la transformación martensítica; a) Cambio de forma debido a la TM; b) Acomodación de la deformación por deslizamiento; c) Acomodación por maclado[1].

Si se considera que  $F_d$  es la distorsión que puede cambiar una esfera unitaria en un elipsoide en los ejes principales, como muestra la Figura 1.12, es claro que la intersección entre la esfera y el elipsoide no es en general un plano. Sin embargo, si y sólo si una de las siguientes dos condiciones se satisface, existirá un plano sin distorsión [1].

- 1.- Una  $\lambda_i$  es 1, otra es mayor que 1 y la restante es menor que 1.
- 2.- Dos  $\lambda_i$ 's son igual a 1.

En la Figura 1.12 se muestra el primer caso, en el cual  $\lambda_3=1$  y se pueden distinguir dos planos sin distorsión. (Siguiendo la notación de Saburi y Nenno[1] las dos soluciones son llamadas (+) y (-)). La condición de que una  $\lambda_i$  es 1 requiere que la razón del ancho de macla ( $1-x$ ):  $x$  o la magnitud del deslizamiento así como un Cortante de Red Invariante (CRI) alcance un valor específico. Esto es, la condición de plano invariante es satisfecha sólo cuando el valor del CRI toma un valor específico. Aunque se omiten los detalles del análisis, es posible resumir la teoría en otros aspectos. Los datos de entrada necesarios para el análisis son los siguientes:

- 1) Los parámetros de red de las estructuras de ambas fases.
- 2) La correspondencia de las redes de ambas fases.
- 3) El Cortante de Red Invariante.

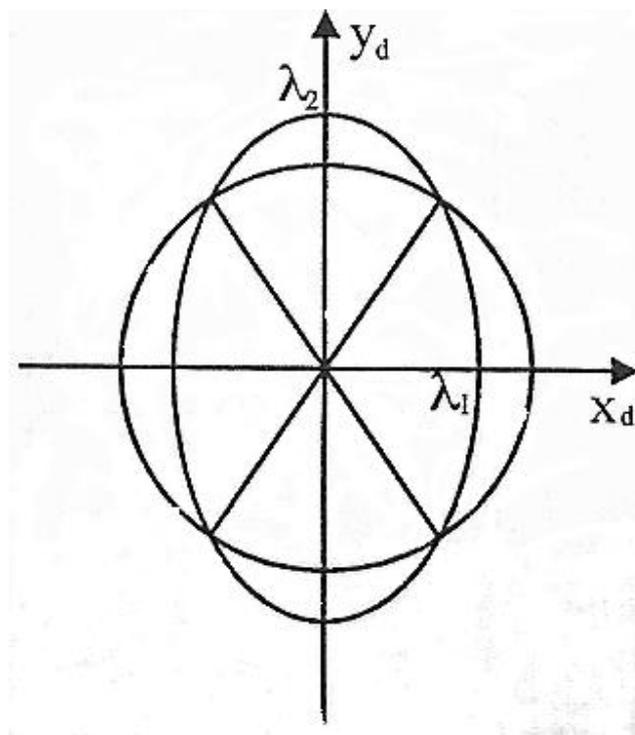


Figura 1.12. Deformación de una esfera unitaria transformada en un elipsoide por una función  $F_d$  in los ejes principales el sistema[1].

Dando los tres datos anteriores, es posible calcular todos los parámetros cristalinos, tales como: el plano de hábito, la relación de orientaciones, el modo de deformación, la razón del ancho de maclado, la orientación del plano  $K_1$ , etc. En la Figura 1.13 se presenta una

comparación entre los datos teóricos y experimentales para la transformación  $\beta_1$  ( $DO_3$ )  $\rightarrow$   $\gamma'_1$  (ortorrómbica) empleando un maclado tipo II<sup>2</sup> como un CRI en una aleación de Cu-Al-Ni monocristalina. También se puede apreciar claramente que hay excelente aproximación entre los datos teóricos (los símbolos cerrados) y los resultados experimentales (símbolos abiertos). Anteriormente, se pensaba que los CRI eran maclados tipo I pero los resultados teóricos no presentaban buena aproximación con los experimentales. Sin embargo, se ha encontrado que los CRI son maclados de tipo II en aleaciones como: Cu-Al-Ni, Ti-Ni, Cu-Sn, etc. La TFTM es aceptada para su aplicación si se eligen correctamente los CRI (Aunque siguen existiendo casos excepcionales como el {225} en el caso de la transformación en aleaciones de Fe-Cr-C). Como se mencionó, empleado la TFTM se han calculado los sistemas de transformación de aleaciones de Cu-Ni-Al, NiTi y NiAl que se muestran en la Tabla A.3 del apéndice A.

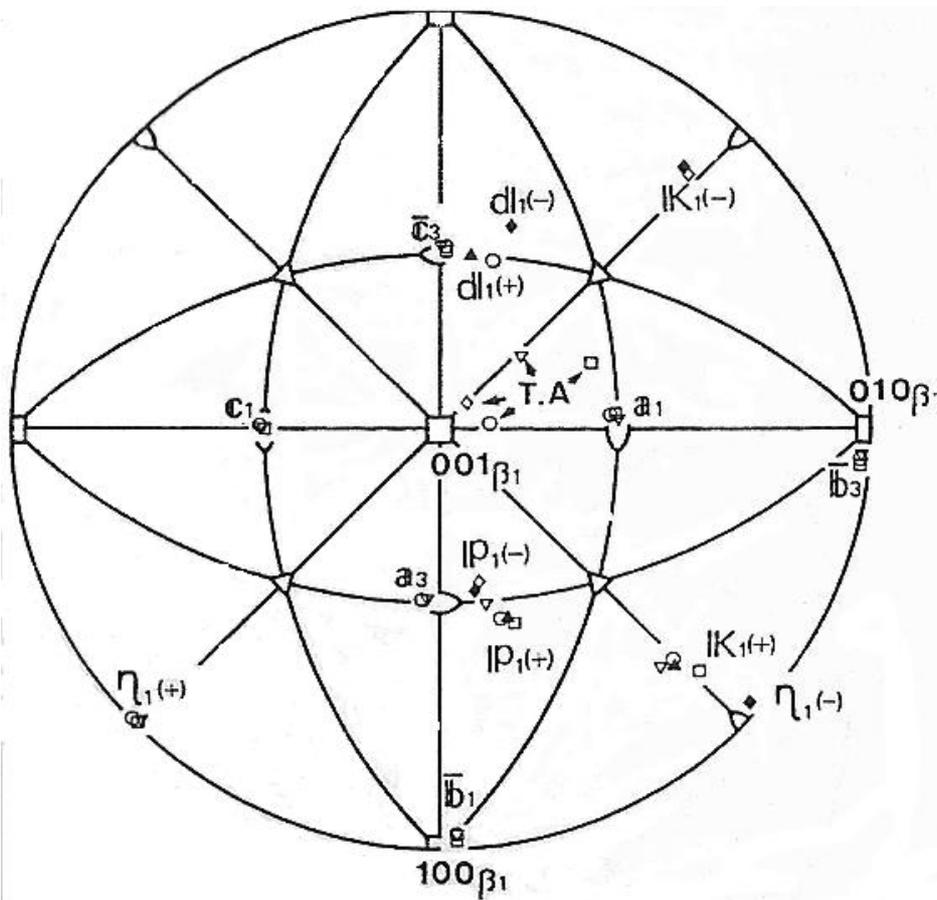


Figura 1.13. Comparación entre cálculos teóricos (empleando la TFTM) y datos experimentales para una transformación tipo  $\beta_1 \rightarrow \gamma'_1$  (ortorrómbica) en una aleación de Cu-Al-Ni monocristalina con maclado  $\langle 1 \ 1 \ 1 \rangle$  tipo II como cortante de red invariante; p1: plano de hábito, KI: KI plano normal, d1: dirección de modo de deformación [1].

<sup>2</sup> El maclado tipo II se refiere a una de las condiciones de plano invariante desarrollado en la teoría del maclado

### 1.4.1.-Deformación transformacional

Como se mencionó anteriormente, la transformación martensítica descrita por la teoría fenomenológica considera un plano invariante de donde la deformación asociada se compone de un corte y una dilatación como se muestra en la Figura 1.14. La matriz que representa dicha deformación de plano invariante se obtiene a continuación.

Representando el desplazamiento de una distancia unitaria del plano de hábito como:  $m_1 d_1$  (donde  $d_1$  es un vector unitario con componentes  $(d_1, d_2, d_3)$ ), y un vector normal al plano de hábito  $\mathbf{p}_1'$  (un vector renglón cuyas componentes son:  $(p_1, p_2, p_3) = (p_x, p_y, p_z)$ ) se tiene que:

$$\begin{aligned}
 P_1 x - x &= m_1 d_1 (p_1' x) \\
 P_1 x &= Ix + m_1 d_1 (p_1' x) = (I + m_1 d_1 p_1') x \\
 \therefore P_1 &= (I + m_1 d_1 p_1')
 \end{aligned}
 \tag{1.46}$$

Donde  $I$  es una matriz identidad,  $m_1$ ,  $d_1$ ,  $p_1'$  son todos calculados usando la teoría fenomenológica.

Esto es, a pesar de que la deformación transformacional es complicada (la cual consiste en una deformación de la red, el cortante de red invariante y la rotación de la red, que se puede calcular con (1.42)) puede ser macroscópicamente representado por la deformación de plano invariante, como se muestra en la Figura 1.14. En dicha Figura también se muestra la deformación de plano invariante puede ser resuelta en dos componentes: una de corte ( $m_1^n$ ) y una dilatación ( $m_1^p$ ), lo cual equivale a un cambio de volumen durante la transformación ( $\Delta V/V$ ). En realidad en la TM el cambio de volumen es muy pequeño (cerca de 0.3%) por lo que la deformación de plano invariante es muy cercana a la del cortante simple.

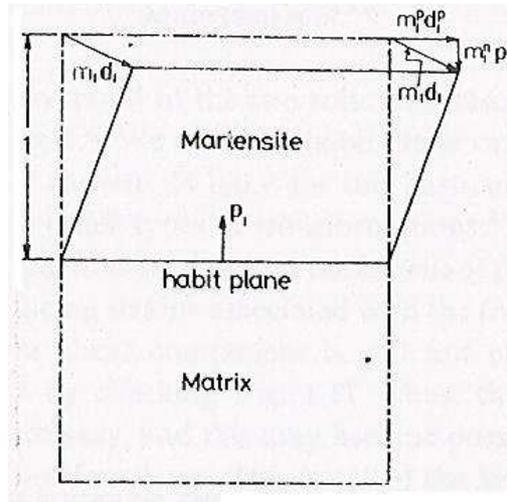


Figura 1.14. Diagrama que muestra la deformación que sufre un cristal durante la TM [1].

Es importante mencionar que la ecuación (1.46) representa un cortante simple definido en una base cuyos ejes son: el vector normal al plano de hábito  $\mathbf{p}_1$  y la dirección del corte  $\mathbf{d}_1$ . El gradiente de dicha función se puede expresar como:

$$P = I + m(p \otimes d) \quad (1.47)$$

donde:  $I$  es un tensor identidad y  $m$  es la magnitud del cortante.

La expresión (1.47) ha sido empleada recientemente por diversos autores [1, 32] para modelar el comportamiento mecánico de MMF sin embargo no han considerado los siguientes aspectos:

- a) La deformación que sufre el material durante la TM es una función no homogénea debido a que existe una región en la cual el material está sujeto al cortante dado por (1.47) y otra en la que el material se encuentra en fase austenítica y por lo tanto no aplica el cortante. Tanto en la Figura 1.1 como en la 1.14 se aprecia dicha condición.
- b) En general la deformación de corte que se mide en pruebas de tensión uniaxial durante la transformación inducida por esfuerzo es una proyección de (1.47) en la dirección de aplicación de la carga. Debido a lo anterior, es necesario referir la deformación una base definida por el eje de aplicación de la carga y el plano de observación.

Es claro que el inciso b) se relaciona con la anisotropía asociada a la deformación transformacional el cual ha sido estudiado por diversos autores, sin embargo los resultados obtenidos se limitan al caso uniaxial y no consideran la naturaleza evolutiva de la TM. El estudio de la deformación en casos bi y triaxiales es importante debido a que dichos estados son generalmente encontrados en elementos mecánicos típicos sujetos a arreglos de flexión, torsión, flexión-torsión, etc. los cuales son comúnmente empleados en dispositivos mecánicos.

#### 1.4.2.-Esfuerzo transformacional

Otra aplicación importante de los resultados que se obtienen de la TFTM es la determinación de los diagramas de transformación, también llamados: superficies de transformación, bajo estados de esfuerzos planos. Los diagramas de transformación, se obtienen empleando el Factor de Taylor, el cual se define como el inverso del Factor de Schmid, y los sistemas de transformación. El FS fue originalmente empleado para determinar el esfuerzo normal necesario para inducir la cedencia de un material monocristalino por deslizamiento de planos específicos [22]. En la Figura 1.15 se presenta un diagrama empleado generalmente para definir el llamado Factor de Schmid ( $FS$ ) el cual establece una relación entre el esfuerzo normal ( $\sigma$ ) generado por la fuerza aplicada ( $P$ ) y su proyección de corte ( $\tau_R$ ) paralelo a la dirección del deslizamiento, según la siguiente relación:

$$\sigma = \tau_R \cos(\lambda) \cos(\phi) = \tau_R FS \quad (1.48)$$

En el caso de MMF el plano de deslizamiento es equivalente al plano de hábito y la dirección de deslizamiento es referido a la dirección de corte. En forma general, el Factor de Schmid puede ser expresado en términos de los índices de Miller del plano de deslizamiento  $[H \ K \ L]$ , de la dirección de deslizamiento  $[h \ k \ l]$  y la orientación del eje la carga aplicada  $[f_1 \ f_2 \ f_3]$ , que genera un esfuerzo normal, como:

$$FS = \frac{(P, N)(P, e_R)}{|F|^2 |N| |e_R|} = \frac{\left( \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} \right) \left( \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} H \\ K \\ L \end{pmatrix} \right)}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2} \sqrt{H^2 + K^2 + L^2} (f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)} = \text{Cos}(\lambda) \text{Cos}(\phi) \quad (1.49)$$

Donde: los parámetros  $\lambda$ ,  $\phi$ , son el ángulo que forma el eje de aplicación de la carga ( $P$ ) con: el vector normal al plano de hábito ( $N$ ) y con la dirección de deslizamiento respectivamente,  $e_R$  es un vector paralelo a la dirección del esfuerzo de corte  $\tau_R$ .

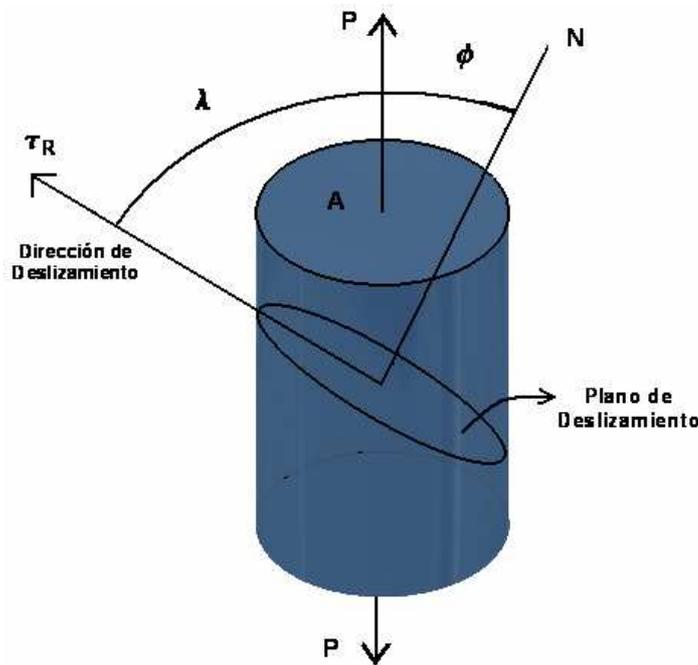


Figura 1.15. Diagrama que muestra los parámetros del Factor de Schmid [4].

De la ecuación 1.49, se tiene que el Factor de Taylor ( $FT$ ) representa la razón del esfuerzo de corte en la dirección del plano de deslizamiento al esfuerzo normal es decir:

$$FT = \frac{1}{FS} = \frac{\tau_R}{\sigma} \quad (1.50)$$

Los diagramas de transformación se obtienen calculando el factor de Taylor, para cada una de las 24 variantes de martensita que componen el sistema de transformación (ST) de un MMF dado. Para realizar dicho cálculo se considera un cristal cuya orientación es conocida el cual es sometido a estados de esfuerzos uniaxiales sucesivos (tanto en tensión como en compresión) en cada una de las dos direcciones perpendiculares entre sí.

Para un elemento del sistema de transformación  $(p_1, p_2, p_3)_i / [d_1, d_2, d_3]_i$ , se calcula el Factor de Taylor para estados de esfuerzos de tensión y compresión simple en las direcciones de  $P$  y  $S$ , perpendicular a  $P$ . Es claro que la orientación del material está dado por  $P$  y  $S$  y que para dicho elemento del sistema de transformación se puede obtener los 4 puntos que pueden graficarse en un diagrama  $\frac{\sigma_1}{\tau_0} - \frac{\sigma_2}{\tau_0}$  donde:  $\sigma_1$  corresponde con los esfuerzos, de tensión y compresión, a lo largo de  $P$  y  $\sigma_2$  en la dirección  $S$ . Los puntos mencionados son  $(FT_{i_1}, 0)$ ,  $(FT_{i_2}, 0)$ ,  $(0, FT_{i_3})$  y  $(0, FT_{i_4})$ . Dichos puntos son luego unidos mediante líneas que en conjunto generan diagramas como el que se muestra en la Figura 1.16 que corresponde con los cálculos realizados para una aleación de NiTi [11]

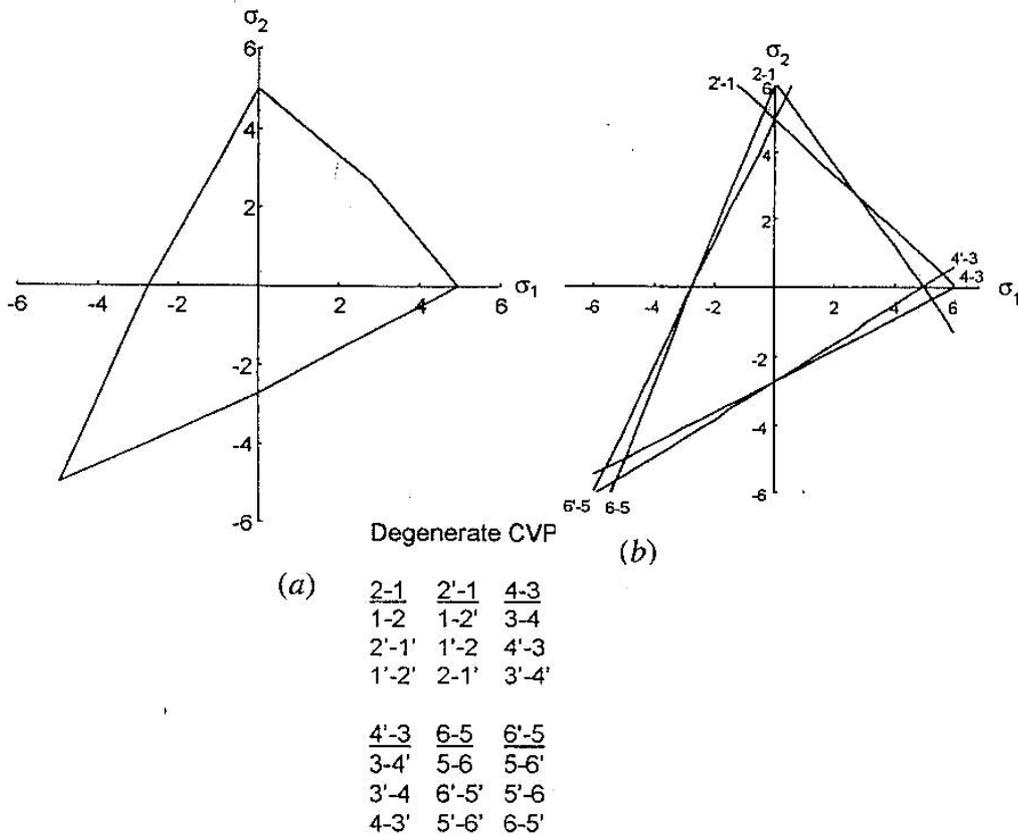


Figura 1.16. Diagrama de transformación para “pares de variantes correspondientes” con  $x_1 = [0 \ 0 \ 1]$  y  $x_2 = [0 \ \bar{1} \ 0]$  a) Líneas de pares de variantes correspondientes que bordean la superficie de transformación, (b) Todas las líneas de pares de variantes correspondientes [11].

El diagrama de transformación de la Figura 1.16(a) se construye con los segmentos de recta, que forman un polígono cerrado, que corresponden con los valores mínimos de FT. Siguiendo este método, fueron construidos los diagramas que muestran en la sección A.6.2 del apéndice. Estos diagramas son importantes debido a que con ellos es posible determinar el inicio de la transformación martensítica así como la variante que se formará bajo un

estado de esfuerzos biaxial conocido como es el caso de elementos sujetos a flexión, flexión-torsión, torsión, etc., que serán estudiados posteriormente.

### 1.5.-Discusión

De lo expuesto hasta aquí, es claro que ambas teorías: la teoría de Patoor y la TFTM, abordan aspectos fundamentales de la TM sin embargo, la forma en que son presentados parece un tanto inconexa.

Aunque la teoría de Patoor considera un término que representa la orientación de la variante de martensita que se forma en el material y que influye en la magnitud de la deformación transformacional y del esfuerzo crítico, no se define en su forma tensorial y sólo es aproximada para esfuerzos uniaxiales. Así mismo, como se mostró en la sección anterior, la TFTM considera la orientación del material para calcular la deformación máxima en función de la orientación del eje de aplicación de la carga en pruebas uniaxiales así como el esfuerzo de transformación (efectivo) para casos de esfuerzos biaxiales pero no considera la evolución de la transformación ni la naturaleza no homogénea de la misma.

Es importante mencionar que aunque la TFTM permite determinar el tensor de deformación [12], que se obtiene de la ecuación (1.46), éste corresponde con la deformación máxima asociada a la proyección de la deformación de corte en la dirección de aplicación de la carga. Dado que la deformación es no homogénea a través de la muestra, el valor máximo se cumple a nivel local; sin embargo si se mide en relación al tamaño de la muestra, o bien en una región donde se encuentra una mezcla de fases, el valor medido será siempre inferior al valor máximo. También, es importante mencionar que el tensor de deformación descrito por la ecuación (1.46) está descrito en una base definida por los vectores: normal al plano de hábito ( $\mathbf{p}$ ) y paralelo a la dirección del corte ( $\mathbf{d}$ ) la cual no corresponde con la base de observación de la muestra.

Por otro lado, Patoor establece que la deformación es proporcional a la fracción volumétrica transformada ( $f$ ) y que es función del esfuerzo y de la temperatura pero no define tal función. Por su parte, la TFTM no considera dicho parámetro y por lo tanto no permite calcular la variación de la deformación al variar el esfuerzo y/o la temperatura. Este efecto influye también en la deformación medida por alguno método experimental convencional. En especial, en un material policristalino, se ha reportado [34, 38-40] que la TM no alcanza a concluir en diversos granos debido a que el estado de esfuerzos es alterado por los campos de esfuerzos generados por la interacción intergranular.

Es claro que ninguna de las dos teorías presentadas en el presente capítulo considera la naturaleza no homogénea de la deformación ni su evolución lo cual, como se discutió anteriormente, puede representa ciertas imprecisiones en los cálculos; sobre todo en los casos en los que el campo de esfuerzos no es constante, como por ejemplo en elementos sometidos a flexión, torsión, flexión-torsión, etc. Un caso de gran importancia que requiere una buena predicción de la evolución de la transformación, así como su naturaleza no homogénea, es el comportamiento de policristales. Como se mencionó anteriormente, el estudio del comportamiento mecánico de MMF policristalinos es extremadamente complejo debido a que se deben cuantificar, no solo los efectos de cristalinos ya que los efectos microestructurales pueden tener mayor peso en el comportamiento global del material. Aunque el presente trabajo no tiene el alcance predecir el comportamiento de

MMF policristalinos, si brinda una herramienta de cálculo que puede ser de suma importancia para su estudio.

El modelo que se propone en este trabajo permite calcular el comportamiento mecánico de los granos por separado y éste puede ser comparado con el que se observa en los granos en conjunto. La comparación de estos comportamientos puede ser muy útil para determinar las interacciones intergranulares que se presentan en los materiales policristalinos en general y en particular en los MMF. Como se muestra en la sección de resultados, empleando el modelo que se desarrolla en el capítulo 2 es posible aproximar el comportamiento de materiales policristalinos con textura cristalina lo cual representa una contribución importante.

Por otro lado, el empleo de Técnicas de Análisis Experimental de Esfuerzos (TAEE) es una herramienta poderosa para el estudio del comportamiento mecánico de materiales así como para el diseño de elementos mecánicos [41]. De hecho, recientemente, han sido reportados en la literatura una serie de estudios en los que se emplea la técnica de extensometría eléctrica para el estudio de la transformación martensítica inducida bajo estados de esfuerzos planos en materiales policristalinos [23, 27].

No obstante, que las TAEE pueden ser un recurso valioso para el estudio del comportamiento de los MMF su aplicación requiere una adecuada caracterización de la respuesta del material para asegurar que las mediciones que se realizan con estas técnicas son razonables y por lo tanto no se está incurriendo en errores que pueden resultar significativos. Un caso claro, que se discute en el siguiente capítulo, se puede originar si se colocan extensómetros eléctricos en un MMF sometido a carga; como se ha mencionado, el campo de deformación durante la transformación martensítica no es homogéneo y por lo tanto se corre el riesgo de que sólo una parte de la región que cubre el extensómetro sufra la TM mientras que el resto no, lo cual evidentemente traerá como consecuencia que la medición del extensómetro no corresponda con el punto medio del extensómetro. Solo se puede afirmar lo anterior si el campo de deformaciones es constante o lineal.

Si bien es claro que el empleo de técnicas de campo como la fotoelasticidad, la mallas de Moire, y más recientemente el análisis de imágenes, pueden resultar más convenientes para estudiar el comportamiento de los MMF; es preciso considerar que la respuesta del material durante la transformación es totalmente diferente a la que presenta un material con comportamiento linealmente elástico. En la Figura 1.17 se muestra la distorsión que sufre la superficie libre de un MMF durante la TM. En esta Figura se aprecia claramente que aparece una plaqueta de martensita que cubre solo una región del material la cual, produce un cambio de relieve en la superficie de observación. Como se sabe, dicha deformación puede ser generada por la aplicación de un esfuerzo de tensión uniaxial en la muestra la cual no corresponde en absoluto con la deformación que experimenta un material linealmente elástico sometido al mismo estado de esfuerzos. Así mismo, es bien sabido que un material con comportamiento linealmente elástico sometido a tensión uniaxial experimenta una elongación en la dirección de aplicación del esfuerzo y una contracción en las otras dos direcciones perpendiculares.

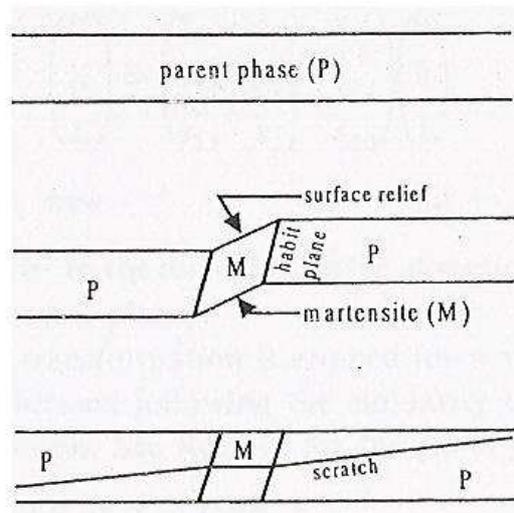


Figura 1.17. Distorsión de la superficie libre de una muestra que se presenta durante la TM inducida por la aplicación de un esfuerzo uniaxial [1].

Es claro que el hecho de que la respuesta de un MMF sea diferente al de un material linealmente elástico puede conducir a interpretaciones erróneas de resultados por lo que debe ser bien caracterizada la respuesta del material antes de emplear alguna TAEE. Es importante mencionar que un estado de esfuerzos plano puede inducir la misma deformación en el material que se muestra en la Figura 1.17, lo cual hace más complicado interpretar la información proveniente del empleo de TAEE.

Como se discutirá con detalle en la siguiente sección, el modelo que se propone integra ambas teorías aplicando algunos conceptos fundamentales de la mecánica del medio continuo. Dicho modelo consiste en un conjunto de ecuaciones constitutivas que permiten simular la evolución de la TM mediante un campo vectorial de desplazamientos no homogéneo parametrizado por una función escalar que representa la fracción volumétrica de material transformado, que es función de la temperatura y el esfuerzo efectivo aplicado. Así mismo, el modelo permite cuantificar los efectos de la orientación cristalina mediante la aplicación de una operación matemática conocida como cambio de base. Como se discute en la sección de resultados, el modelo permite simular diversos patrones de deformación tales como: campos de desplazamientos, distorsión de una marca testigo en la superficie de observación, distorsión de la superficie misma, etc., que pueden ser de gran utilidad para interpretar información proveniente de la aplicación de TAEE. Finalmente, como se muestra también en la sección de resultados, el modelo permite simular el comportamiento de elementos monocristalinos sujetos: tensión simple y flexión, así como de elementos policristalinos con granos en serie sujetos a tensión y un caso de un bicristal sujeto flexión.

## Capítulo 2 Modelación matemática de la deformación durante la TM

### 2.1 Introducción

En el capítulo 1 se presentaron los conceptos fundamentales de la TM desde los dos puntos de vista más importantes: el físico y el cristalográfico. Como se mostró en dicho capítulo ambos enfoques explican rasgos importantes de la TM, sin embargo se aprecian un tanto desarticuladas. Como se mencionó, el modelo que se propone integra ambos aspectos de la TM por lo que en el presente capítulo, se exponen los conceptos teóricos fundamentales en los que se basa dicho modelo.

Como primer paso en el desarrollo del modelo mencionado, se presenta un análisis de la deformación que sufre un MMF durante la TM en cual se emplean funciones lineales para cada una de las tres regiones que se distinguen durante la formación de una variante de martensita. Posteriormente, se definen los términos que componen el modelo propuesto, es decir: el crecimiento de la variante de martensita, la relación cinética, las tres bases cristalinas de trabajo, el cambio de base de un campo no lineal, etc. Dichos términos son luego empleados para definir campo de desplazamientos (clase  $C^\infty$  y no homogéneo) que describe la formación y crecimiento de una variante de martensita en el material en función de la orientación del cristal, el esfuerzo aplicado y la temperatura de prueba. A partir de dicho campo es definida una relación esfuerzo-deformación-temperatura que constituye el modelo matemático que se propone en el presente trabajo.

### 2.2.-Análisis de la deformación durante la TMIE

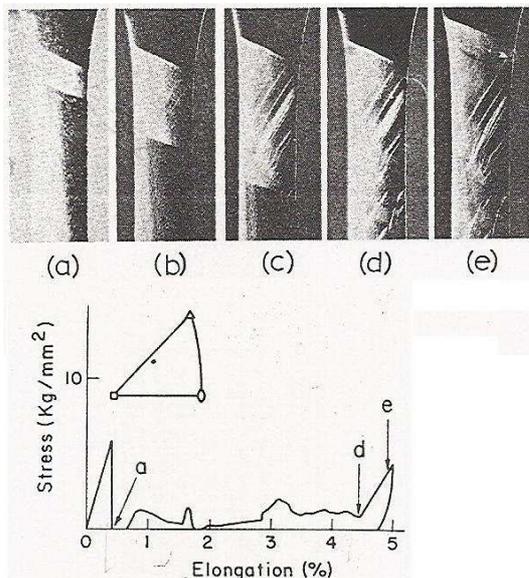
Para analizar la deformación que sufren los MMF durante la TM inducida por esfuerzo, o bien por enfriamiento a esfuerzo constante, es preciso considerar una serie de aspectos relevantes que han sido reportados en la literatura y que fueron mencionados en los capítulos precedentes:

- a) Se sabe que en algunos MMF monocristalinos, aparece una sola VM mientras que en la mayoría de los casos se ha observado que se forman variantes paralelas como se aprecia en la Figura 2.1 (a) y (b) que corresponden con una prueba de tensión uniaxial practicada a una aleación de Cu-Al-Ni.
- b) Como se muestra en la Figura 2.1 (c) durante la TM se presenta una distorsión en la superficie del material, lo cual se puede apreciar grabando una marca testigo sobre la superficie de observación.
- c) La TM inicia en una pequeña región del material y crece hasta cubrirlo completamente [19].
- d) La TM es un proceso dinámico que progresa conforme se incrementa el esfuerzo o bien se disminuye la temperatura y está limitado solamente por la velocidad del sonido [1].

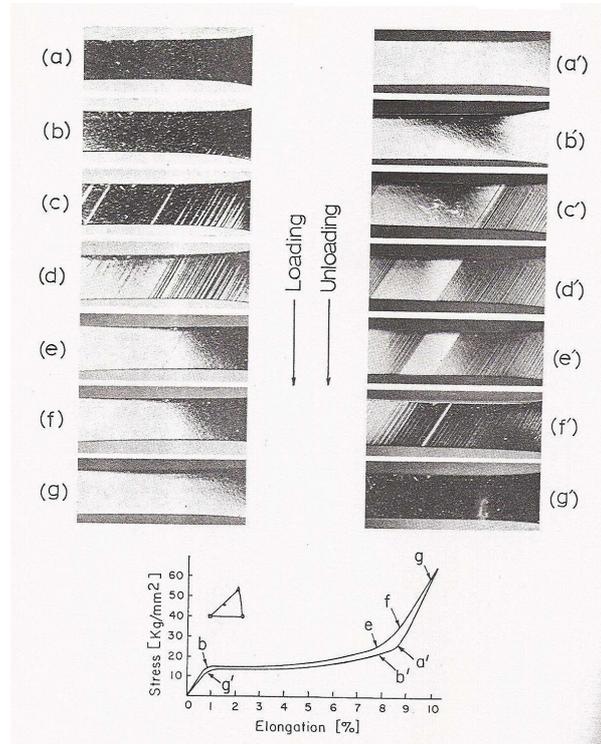
A partir de las apreciaciones anteriores es posible representar esquemáticamente, como en la Figura 2.2 (a), la distorsión que sufre el material al formarse y crecer una VM. En dicha Figura, se aprecia claramente que la deformación de corte se presenta sólo en una región del material y va creciendo ya sea al incrementar el esfuerzo aplicado o bien al disminuir la temperatura (si la prueba es a esfuerzo constante). Como consecuencia de lo anterior, en el

material aparecen tres regiones en las cuales la deformación es totalmente diferente, por lo que referir la deformación como un cortante simple es insuficiente para modelar el fenómeno.

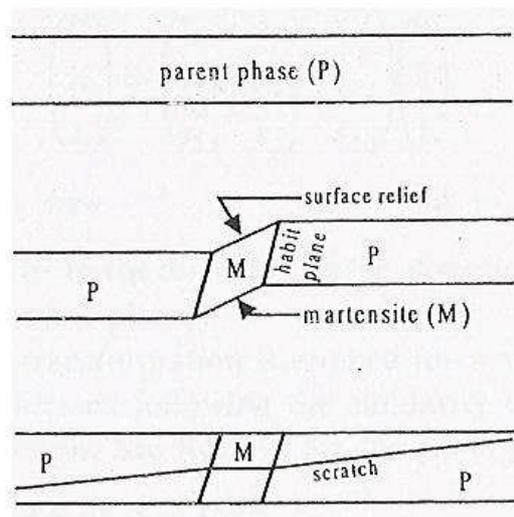
Por otro lado, en la Figura 2.2 (b) se muestra un esquema en el que se aprecia la forma en la que se presenta el cambio de relieve en la superficie de la muestra y la distorsión que sufre una marca testigo grabada en la superficie de observación. En dicha Figura se muestra también el desplazamiento que sufre la superficie de la muestra, el cual corresponde con una deformación de corte localizado en la región donde aparece la fase martensítica. Es importante mencionar que el desplazamiento mostrado en la Figura 2.2 (b) corresponde con una proyección de la deformación de corte que ocurre paralela a alguno de los planos de hábito.



(a)



(b)



(c)

Figura 2.1. Distorsión que sufre una muestra de Cu-Al-Ni monocristalina durante la transformación martensítica: a) para una transformación tipo  $\beta_1 \rightarrow \gamma_1'$ , b) para una transformación tipo  $\beta_1 \rightarrow \beta_1'$  y c) distorsión en la superficie de la muestra al formarse una VM[1,19]

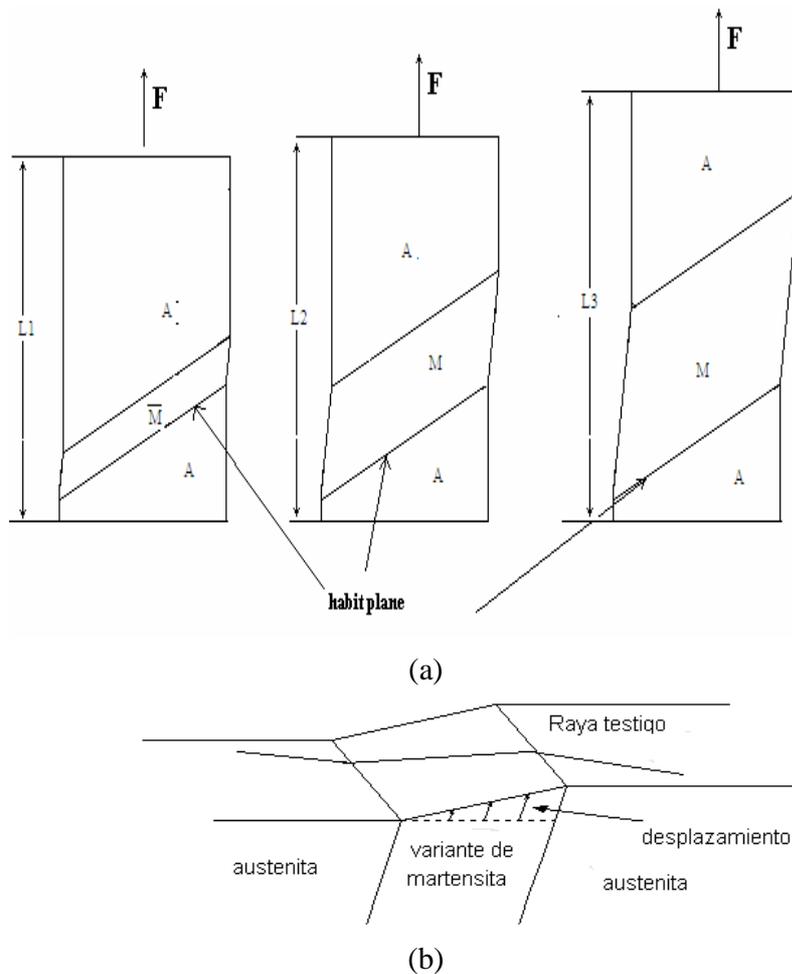
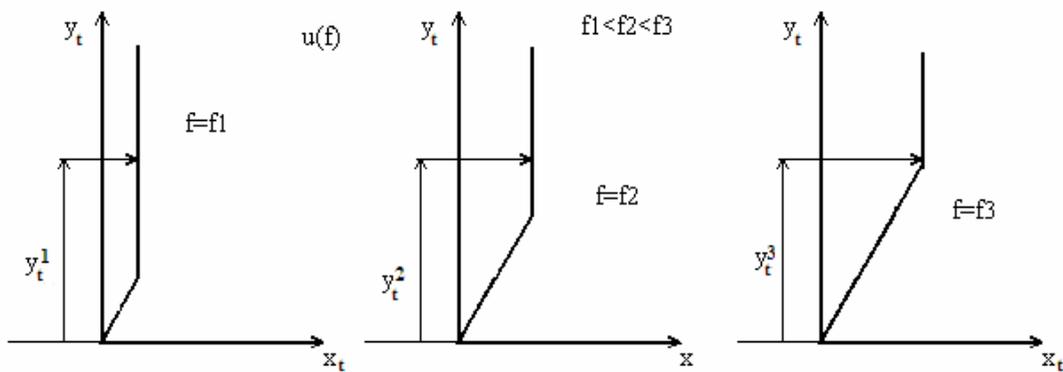


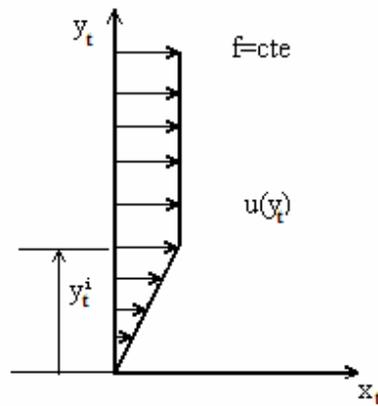
Figura 2.2. Patrones de deformación: a) formación y crecimiento de una VM y b) distorsión de una marca testigo grabada en la superficie libre del material [14].

Considerando lo anterior, es claro que la deformación que sufre el material durante la TM es especialmente compleja debido a que es no homogénea y cambia al crecer la VM formada. Dicha característica se puede apreciar en los esquemas que se muestran en las Figura 2.3 (a) y (b), donde se representa el desplazamiento que sufriría una marca testigo grabada sobre una muestra en dirección perpendicular al plano de hábito. En la Figura 2.3 (a) se muestra la forma en que se distorsiona la línea conforme incrementa la fracción volumétrica del material transformado ( $f$ ) mientras que en la Figura 2.3 (b) se muestra el desplazamiento que sufre la línea para un valor de  $f$  dado.

Es claro en la Figura 2.3 (b), y en cada estado de la Figura 2.3 (a), que la línea acota tres regiones donde el desplazamiento es: a) nulo para  $-\infty < y_t \leq 0$  ; b) un cortante simple para  $0 \leq y_t \leq y_t^i$  ; c) una traslación constante para  $y_t^i < y_t < +\infty$  .



(a)



(b)

Figura 2.3. Desplazamiento que sufre una marca testigo gravada en una dirección perpendicular al plano de hábito: a) durante el crecimiento de una VM denotado por un incremento de la fracción volumétrica de material transformado ( $f$ ) y b) desplazamiento de la línea testigo en un instante en el que la fracción volumétrica transformada toma un valor dado.

En la Figura 2.3, se ve claramente que la interfase austenita-martensita, denotada por  $y_t^i$ , va ascendiendo conforme  $f$  incrementa. En la sección denominada: “modelación matemática de la formación de una variante de martensita”, se presenta un análisis más detallado de este proceso.

### 2.3.-Campo de desplazamientos

A continuación se presenta un breve análisis del proceso de la TM empleando funciones analíticas para describir el campo de deformación (cortante simple) proyectado a diferentes direcciones de observación. Dicho análisis muestra el efecto del cambio de dirección del eje de aplicación de la carga y del plano de observación en los “patrones” de deformación que se pueden medir al aplicar algunas TAE típicas. En dicho análisis se emplean funciones analíticas que aplican a cada región de material y se hace evidente que el cálculo de

desplazamientos y deformaciones, para determinadas regiones del material se va haciendo cada vez más complejo para casos de orientación del material típicamente encontradas en muestras reales.

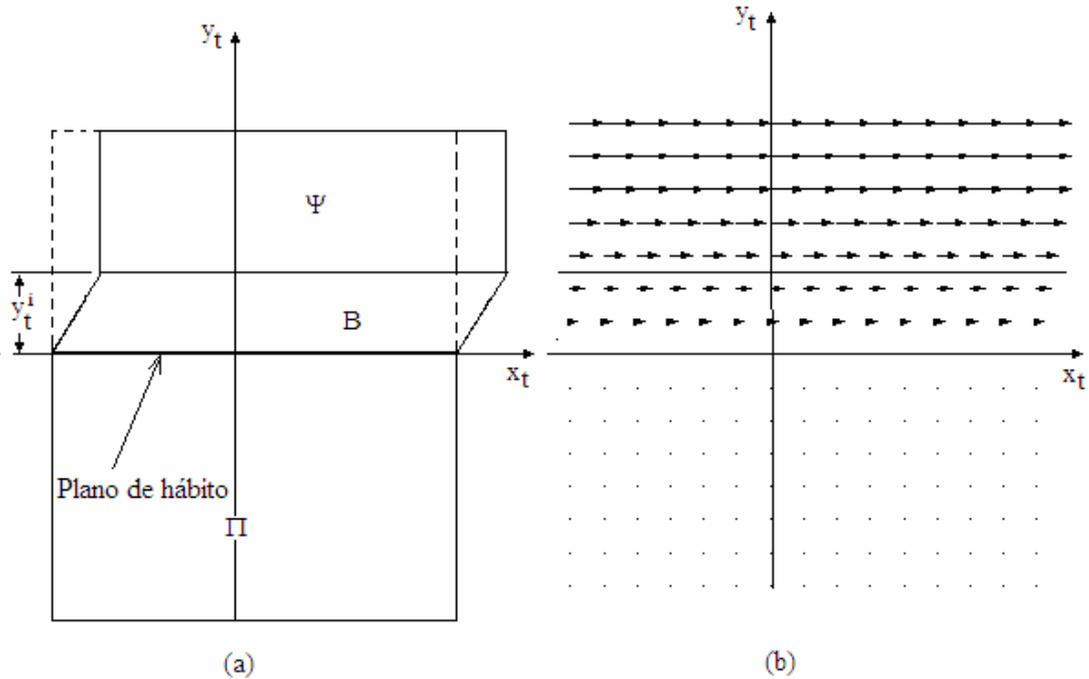


Figura 2.4. a) deformación asociada a la TMIE referida a una base  $e_t$  y b) campo de desplazamientos no homogéneo asociado.

Retomando el diagrama de la Figura 2.3, es claro que el desplazamiento que sufre la línea de la Figura es el mismo para cualquier otra línea perpendicular al plano de hábito por lo que podemos suponer que la distorsión de una muestra, así como el campo de desplazamientos asociado es de la forma del que se muestra en la Figura 2.4.

De la Figura 2.4 es claro que el campo de desplazamientos que describe dicha deformación puede escribirse como:

$$u(x_t, y_t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \dots -\infty \leq y_t \leq 0 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \delta y_t \\ 0 \end{pmatrix} & \dots 0 \leq y_t \leq y_t^i \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \delta y_{ii} \\ 0 \end{pmatrix} & \dots y_t^i \leq y_t \leq h \end{cases} \quad (2.1)$$

Donde  $\delta$  es la magnitud del cortante.

Es importante mencionar que dicho campo está definido en la base  $e_i = \{e_{i1}, e_{i2}, e_{i3}\}$  que se muestra en la Figura 2.4 donde  $e_{i2}$  es normal al plano de hábito y  $e_{i1}$  es paralelo a la dirección del cortante. Así mismo nótese que las tres regiones de desplazamientos ( $\Pi$ , B, y  $\Psi$ ) están acotadas por dos rectas paralelas al eje  $x_i$ .

Como se sabe, para inducir la TMIE es necesario que el factor de Schmid sea diferente de cero por lo que se requiere que el eje de aplicación de la carga forme un ángulo diferente de cero con los vectores: normal al plano de hábito ( $e_{i2}$ ) y paralelo a la dirección del deslizamiento ( $e_{i1}$ ). Es claro que dicha condición no se consigue si el eje de aplicación de la carga es paralelo a la dirección ( $e_{i1}$ ) en la Figura 2.4.

Considerando lo anterior, se tiene que para inducir la transformación se requiere que la orientación del material sea al menos similar a la que se muestra en la Figura 2.5 en la cual se define la nueva base:  $e_c = \{e_{c1}, e_{c2}, e_{c3}\}$  donde  $e_{c2}$  es paralelo al eje de aplicación de la carga y  $e_{c3}$  es perpendicular al plano de la Figura. Es claro que el campo de desplazamientos (2.1) deber ser referido a la nueva base lo cual en este caso, se puede lograr considerando que las bases  $e_i$  y  $e_c$  se encuentran rotadas rígidamente respecto a un eje  $e_{c3}$ . Dado que el campo (2.1) es lineal en cada región, entonces el nuevo campo se puede calcular empleando la típica ecuación empleada para cambiar la base de un tensor [43 y 44]:

$$u(X_c) = R_z \nabla u(X_i) R_z^T X_c \quad (2.2)$$

Donde:  $R_z$  es un tensor de rotación respecto al eje  $z_b$ ,  $X_c = (x_c, y_c, z_c)$  son las coordenadas de un punto en la base  $e_c$ .

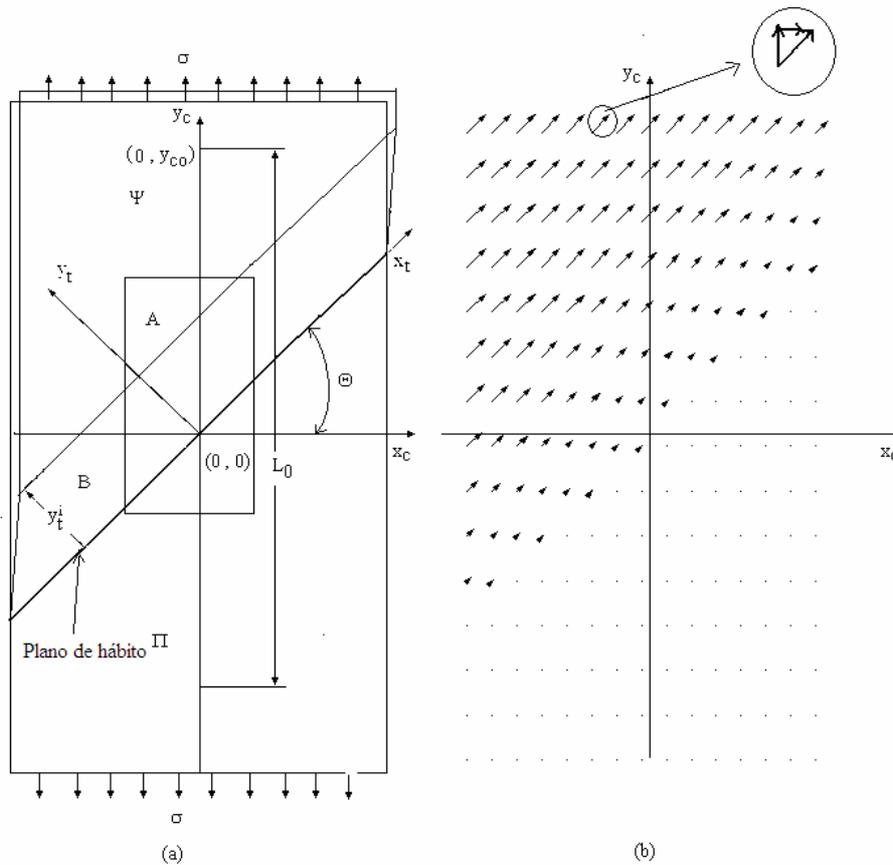


Figura 2.5. a) deformación asociada a la TMIE referida a una base  $e_c$  y b) campo de desplazamientos no homogéneo asociado

Así, aplicando la ecuación (2.2) a (2.1) se obtiene el siguiente campo de desplazamientos:

$$u(x_c, y_c) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \dots \dots \dots en \dots \Pi \\ \begin{pmatrix} \delta(y_c \cos^2[\theta] - x_c \cos[\theta] \text{Sen}[\theta]) \\ \delta(y_c \cos[\theta] \text{Sen}[\theta] - x_c \text{Sen}^2[\theta]) \\ 0 \end{pmatrix} \dots \dots en \dots B \\ \begin{pmatrix} \delta y_i^j \cos[\theta] \\ \delta y_i^j \text{Sen}[\theta] \\ 0 \end{pmatrix} \dots \dots \dots en \dots \Psi \end{cases} \quad (2.3)$$

Es claro que a diferencia del campo (2.1), en el campo (2.3) las regiones que acotan los tres desplazamientos están dadas por las siguientes rectas inclinadas:  $y_c = \text{Tan}(\theta)x_c$  e

$$y_c = \text{Tan}(\theta)x_c + \frac{y_t^i}{\text{Cos}(\theta)} \text{ respectivamente.}$$

Por otro lado, si se quiere observar la transformación mediante un microscopio óptico, es necesario que se presente un cambio en el relieve de la superficie de observación, puesto que se requiere un contraste de luz, lo cual no se presenta en el caso presentado en la Figura 2.5.

Para lograr lo anterior, es necesario que la orientación del material, es decir la orientación del plano de hábito respecto al eje de aplicación de la carga, sea tal que la superficie de observación se presente un cambio de relieve como en el caso que se presenta en la Figura 2.6. Nuevamente, para analizar esta nueva orientación es necesario definir la base de observación  $e_{cc} = \{e_{cc1}, e_{cc2}, e_{cc3}\}$  con  $e_{cc2}$  paralelo al eje de aplicación de la carga y  $e_{cc3}$  es perpendicular al plano de la Figura.

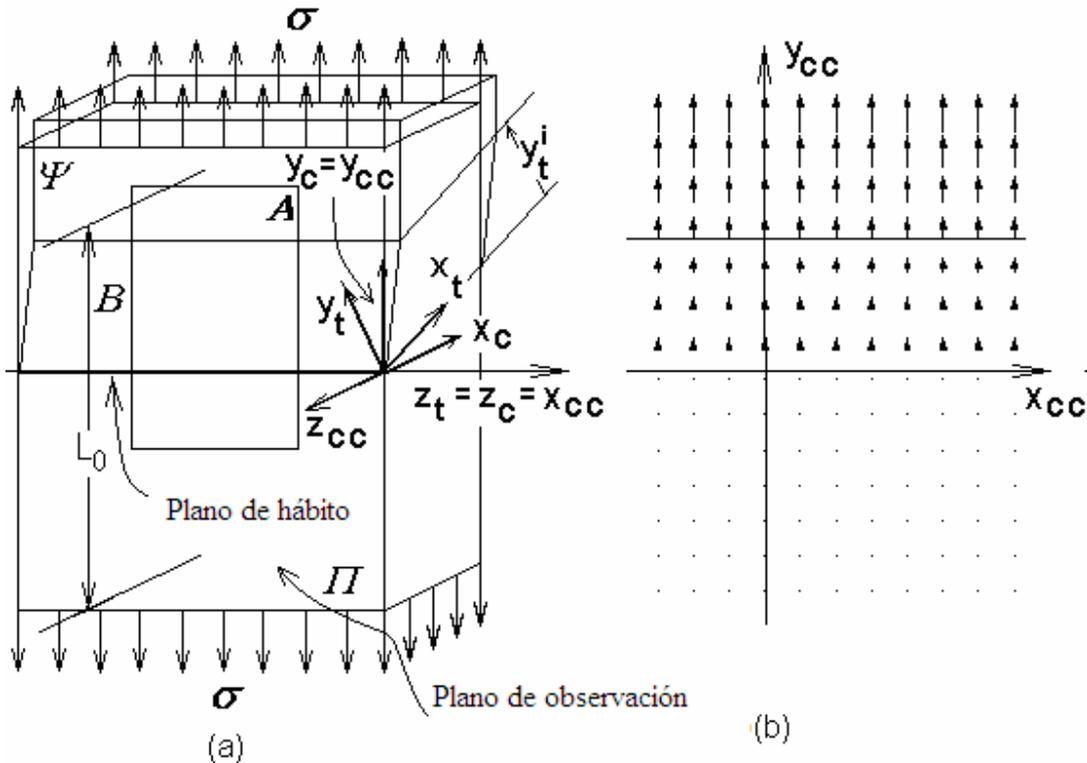


Figura 2.6. a) deformación asociada a la TMIE referida a una base  $e_{cc}$  y b) campo de desplazamientos no homogéneo asociado.

Como se puede ver, en este caso nuevamente la base de observación cambió y por lo tanto el campo (2.3) ya no sería válido. No obstante como en caso anterior puede obtenerse el campo requerido aplicando una rotación rígida, ahora con respecto al eje  $y_c$ , a la ecuación 2.2 es decir:

$$u(X_{CC}) = R_y R_z \nabla u(X_t) R_z^T R_y^T X_{CC} \quad (2.4)$$

Donde:  $R_y$  es un tensor que rota el sistema  $-\frac{\pi}{2}$  respecto al eje  $y_C$ ,  $X_{CC}=(x_{CC}, y_{CC}, z_{CC})$  son las coordenadas de un punto en la base  $e_{CC}$ .

Nuevamente, aplicando la ecuación (2.4) a (2.1) se obtiene el nuevo campo vectorial como:

$$u(x_{CC}, y_{CC}) = \left\{ \begin{array}{l} \left( \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \dots \dots \dots \text{en} \dots \Pi \\ \left( \begin{array}{l} 0 \\ \delta(y_{CC} \text{Cos}[\theta] \text{Sen}[\theta] - z_{CC} \text{Sen}^2[\theta]) \\ \delta(y_{CC} \text{Cos}^2[\theta] - z_{CC} \text{Cos}[\theta] \text{Sen}[\theta]) \end{array} \right) \dots \dots \text{en} \dots \text{B} \\ \left( \begin{array}{l} \delta y_i^i \text{Cos}[\theta] \\ \delta y_i^i \text{Sen}[\theta] \\ 0 \end{array} \right) \dots \dots \dots \text{en} \dots \Psi \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Donde, es claro que en este caso las tres regiones del campo 2.5 están acotadas por las rectas:  $y_{CC} = 0$  e  $y_{CC} = \frac{y_i^i}{\text{Cos}(\theta)}$  respectivamente.

Analizando cuidadosamente el procedimiento descrito anteriormente se puede ver que se presentan las siguientes complicaciones:

- a) Para una orientación real de la muestra, difícilmente es posible relacionar los elementos del sistema de transformación con la orientación del sistema de observación mediante rotaciones simples como se hizo en los casos descritos anteriormente. Así mismo, es importante mencionar que tanto los elementos del sistema de transformación como la orientación del sistema de observación son descritos mediante índices de Miller, los cuales están referidos a una base definida por los ejes de la celda unitaria de la fase austenítica [1, 19].
- b) Los campos presentados no son continuamente diferenciables en todo el dominio por lo que al calcular el campo de deformaciones se presentan discontinuidades en las interfases.
- c) Si se desea calcular el desplazamiento medio en una región "A" como la que se muestra en las Figura 2.5 (a) y 2.6 (a) se deben determinar las sub-regiones de "A" que caen dentro de las regiones  $\Pi$ , B, y  $\Psi$  para aplicar la función correspondiente. Lo anterior, puede involucrar una gran cantidad de cálculos así como cierta confusión.
- d) Calcular la evolución de la deformación requiere que los campos (2.1), (2.3) y (2.5) sean definidos en términos de un parámetro escalar que relacione el movimiento de la interfase con el incremento en la fracción volumétrica de material transformada.

Es claro que si se desea contar con un modelo matemático versátil es necesario resolver los inconvenientes mencionados arriba. No obstante, es claro que el análisis presentado en esta sección permite apreciar una serie de efectos importantes asociados a la deformación transformacional, debidos a la orientación del material, así como su naturaleza no homogénea.

Los efectos a los que se hace referencia son de suma importancia en particular para la aplicación de las TAEE las cuales, como se menciono anteriormente, son una herramienta poderosa tanto para el estudio del comportamiento mecánico de materiales como para el diseño de elemento mecánicos empleando MMF.

Es claro que en los campos (2.3) y (2.5) el desplazamiento que experimentaría un punto ubicado por encima de la interfase superior antenita-martensita o su proyección, depende fuertemente del valor del ángulo  $\theta$  es decir de la orientación del eje de aplicación de la carga respecto al plano de hábito. Nótese que los campos de desplazamientos que se muestran en las Figuras 2.5 (b) y 2.6 (b) son considerable diferentes entre sí y que estos se asocian a diferentes orientaciones del material. Sin embargo, es claro que se trata de diferentes proyecciones del campo (2.1) puesto que en todos los casos la deformación en la base  $e_i$  es la misma. Dicha variación corresponde con la anisotropía mecánica de los MMF asociada a la deformación transformacional que ha sido citada por diversos autores. En realidad, dado que se trata de proyecciones de la misma deformación debe reflexionarse si es apropiado referir este fenómeno como anisotropía.

Por otro lado, en las Figuras 2.5 (a) y 2.6 (a) se puede ver claramente que el desplazamiento y la deformación de la región "A" depende tanto del tamaño como de la posición donde es definida dicha región. Este efecto es importante porque corresponde con el que se obtendría si se coloca una galga extensométrica en el material. La lectura del extensómetro cambiaría considerablemente si la región transformada lo cubre en su totalidad o sólo una parte del mismo.

Análogamente, si se emplea un extensómetro mecánico de puntas para medir el cambio de longitud y luego se calcula la típica deformación ingenieril (deformación normal promedio) su valor dependerá fuertemente de la distancia  $L_0$  así como de la posición en la que son colocadas las puntas del instrumento.

Lo anterior resulta muy importante debido a que dichos efectos alterarían considerablemente las mediciones experimentales durante la TM si se emplean las técnicas experimentales mencionadas.

Así mismo, como también fue mencionado anteriormente, si se emplean técnicas experimentales de campo como lo es la fotoelasticidad o el análisis de imágenes, los patrones que se obtendrán difieren considerablemente de los que presentan materiales convencionales sometidos al mismo estado de esfuerzos. En las Figuras 2.5 (b) y 2.6 (b) se muestran los campos de desplazamientos asociados a la deformación del material los cuales pueden ser obtenidos experimentalmente empleando técnicas de análisis de imágenes.

Referente a las llamadas isocromáticas que se obtienen aplicando la técnica de fotoelasticidad, es claro que en la región donde aparece la plaqueta de martensita la diferencia de deformaciones principales es diferente de cero mientras que en las regiones donde el material no ha transformado toman un valor que puede ser positivo o negativo. Debido a lo anterior se espera que el patrón que se obtendrá en la región de la plaqueta de

martensita será una franja de color correspondiente al valor de la diferencia de deformaciones obtenida.

Es importante mencionar que tanto en el caso de la fotoelasticidad como en el de la correlación de imágenes, es probable que el patrón asociado a la transformación se presente acoplado al que se originó antes de que iniciara la TM lo cual debe tenerse presente.

Como se mencionó anteriormente el objetivo principal del presente trabajo es obtener un modelo matemático capaz de simular el comportamiento mecánico que presentan los MMF a través de una función continua y evolutiva. En la siguiente sección se presenta el desarrollo de dicho modelo matemático en el cual se resuelven los problemas discutidos en la presente sección.

#### 2.4.-Modelo matemático

De la discusión anterior, es claro que un modelo matemático que simule la deformación del material durante la TM, inducida por esfuerzo o por enfriamiento a esfuerzo constante, debe ser capaz de predecir y cuantificar los efectos descritos anteriormente a partir de la información elemental sobre el material. Dicha información debe ser: las temperaturas de transformación, los sistemas de transformación del material y la orientación cristalográfica de las cargas a las que está sometido. Para obtener el modelo es preciso considerar para materiales monocristalinos los siguientes aspectos:

- a) El comportamiento del material es no lineal por lo que deben considerarse al menos dos términos de la deformación, uno correspondiente al material antes de iniciar la transformación y otro que represente la deformación transformacional. Cabe destacar que se deben tomarse en cuenta los efectos de orientación (anisotropía mecánica) de ambos términos.
- b) Identificar claramente la(s) variante(s) de martensita que se formará(n) dado un estado de esfuerzos uni o biaxial .
- c) Que el campo de deformación que describa el modelo sea no homogéneo, evolutivo y continuamente diferenciable en todo el dominio.
- d) Calcular las proyecciones del campo de deformación para cualquiera de los elementos de transformación referido a una orientación cualquiera del material.
- e) Considerar la aparición de variantes paralelas.
- f) Simular deformación que sufrirían marcas testigo sobre la superficie de observación de la muestra.
- g) Generar los diversos patrones que se obtiene empleando TAEE (campos de desplazamientos, isocromáticas, etc.) [41].
- h) Considerar el caso en el que campo de esfuerzos no sea constante, como por ejemplo: en un arreglo de flexión o bien casos de tensión simple con restricciones de movimiento.

Por otro lado, con dicha información se requiere que el modelo permita calcular los siguientes parámetros para muestras policristalinas:

- a) Obtener una relación esfuerzo-deformación uni-axial que considere la parte linealmente elástica y la parte transformacional para una distribución de orientaciones conocida.
- b) El comportamiento de muestras policristalinas en arreglos de granos en serie y/o en paralelo para caso de tensión simple y flexión.
- c) Para casos de tensión uniaxial calcular los promedios de las deformaciones normales, paralelas a eje de aplicación de la carga, para casos típicos de textura cristalina.

El modelo que se propone en el presente trabajo, consiste en un campo tensorial no lineal evolutivo que describe la relación esfuerzo-deformación-temperatura que presentan los MMF metálicos. Dicha función consiste de dos partes fundamentales acopladas; una relación cinética (que relaciona la fracción volumétrica de material transformado con el esfuerzo, la temperatura y la orientación cristalina del material) y una deformación no homogénea y evolutiva que es función de la orientación del material.

A continuación se presentan los razonamientos que conducen la definición apropiada de la fracción volumétrica de material transformada.

#### 2.4.1.-Fracción volumétrica transformada

La relación cinética empleada en el modelo propuesto es esencialmente una función del tipo  $f : R \times R \rightarrow R$  que parte del hecho de que para iniciar la TMIE, así como para que ésta finalice, debe acumularse cierta cantidad de energía mecánica en el material la cual depende de la temperatura de prueba [4].

En la Figura 2.7 se muestra una curva esfuerzo-deformación típica de un MMF sujeto a tensión uniaxial en donde se muestran las cantidades de energía involucradas durante la transformación. De dicha Figura es posible definir los siguientes términos de energía:

$$E_1 = \frac{\sigma_c \varepsilon_1}{2} \quad (2.6)$$

$$E_2 = \frac{\varepsilon_0 (\sigma_f - \sigma_c)}{2} \quad (2.7)$$

$$E_3 = \varepsilon_0 \sigma_c \quad (2.8)$$

$$E_2 + E_3 = \frac{\varepsilon_0 (\sigma_f + \sigma_c)}{2} \quad (2.9)$$

Con:  $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \varepsilon_0$

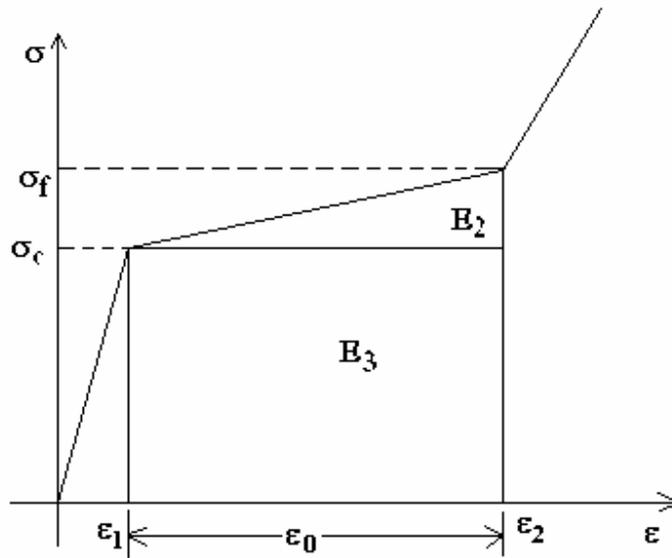


Figura 2.7. Gráfica esfuerzo-deformación típica de un MMF sujeto a tensión simple.

De la Figura 2.7 es claro que la energía  $E_3$  depende de la temperatura de prueba, de tal manera que cuando  $T$  es cercana a  $M_s$  dicho término tiende a cero y por lo tanto, la energía neta ( $E_N$ ) necesaria para finalizar la transformación deberá ser igual a  $E_2$ . Es claro también que cuando la temperatura es mayor que  $M_s$ ,  $E_3 \neq 0$  por lo que la energía neta ( $E_N$ ) tendrá que alcanzar también el valor de  $E_2$  para finalizar la transformación. De lo anterior es posible establecer la siguiente ecuación:

$$E_N = E - (E_2 + E_3) = E_2 \quad (2.10)$$

De donde:

$$E = 2E_2 + E_3 \quad (2.11)$$

Dividiendo la ecuación 2.10 por  $E_2$  se tiene que dicha ecuación puede describirse como:

$$\frac{E - (E_2 + E_3)}{E_2} = 1 \quad \text{cuando } f=0.9 \quad (2.12)$$

De la expresión anterior es claro que el valor de 1 es un límite superior, el cual se alcanza cuando la fracción volumétrica del material transformado ha llegado a un valor de 90%, por lo que la misma ecuación cuando la transformación inicia debería tomar un valor inferior. Por otro lado, de la teoría cinética de TM es claro que para que la fase martensítica sea estable a una temperatura mayor que  $A_f$  es necesario que se acumule cierta cantidad de energía y por lo que durante el proceso dicha energía se va acumulando. Siguiendo dicho razonamiento se tiene que es conveniente expresar la ecuación 2.11 de la siguiente manera:

$$E = 2E_2 + E_3 = (E_2 + E_3) + E_2 \quad (2.13)$$

De donde se puede considerar que en algún momento  $E$  sería igual con  $E_2 + E_3$  en cuyo caso la ecuación 3.12 será igual a cero. Dicha situación ocurre cuando la fracción volumétrica del material ha alcanzado un 50% de donde se obtiene la ecuación:

$$\frac{E - (E_2 + E_3)}{E_2} = 0 \quad \text{cuando } f=0.5 \quad (2.14)$$

Luego, es razonable suponer que la TM inicia cuando el término de la izquierda de la ecuación 2.12 alcanza el valor de -1 de donde se obtiene que:

$$\frac{E - (E_2 + E_3)}{E_2} = -1 \quad \text{cuando } f=0.1 \quad (2.15)$$

Donde claramente se ve que en este caso  $E = E_3$

Siguiendo el razonamiento de Patoor [4] este último resultado significa que para que se inicie la TM es necesario que el sistema acumule cantidad de energía mecánica.

Considerando las relaciones de las ecuaciones (2.6) a la (2.9) así como la relación de las ecuaciones (2.12), (2.14) y (2.15) y su relación con la fracción volumétrica transformada es claro que es posible definir la siguiente relación entre el esfuerzo y la fracción volumétrica transformada:

$$\frac{\sigma - \frac{\sigma_c + \sigma_f}{2}}{\frac{\sigma_f - \sigma_c}{2}} = C(f) \quad (2.16)$$

donde:

$$\begin{aligned} C(0.1) &= -1 \\ C(0.5) &= 0 \\ C(0.9) &= 1 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Es claro que, la relación  $C(f)$  que cumple con las condiciones establecidas por (2.17) es:

$$C(f) = \frac{1}{\ln(9)} \ln\left(\frac{f}{1-f}\right) \quad (2.18)$$

Lo cual nos conduce la siguiente relación:

$$\frac{\sigma - \frac{\sigma_c + \sigma_f}{2}}{\frac{\sigma_f - \sigma_c}{2}} = \frac{1}{\ln(9)} \ln\left(\frac{f}{1-f}\right) \quad (2.19)$$

De donde se obtiene la siguiente relación entre la fracción volumétrica transformada y el esfuerzo aplicado:

$$f = \frac{e^{\frac{(\sigma - \sigma_0)}{\delta\sigma}}}{1 + e^{\frac{(\sigma - \sigma_0)}{\delta\sigma}}} \quad (2.20)$$

donde:

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_c + \sigma_f}{2} \quad (2.21)$$

$$\delta\sigma = \frac{\sigma_f - \sigma_c}{2 \ln(9)} \quad (2.22)$$

Luego es claro que el esfuerzo crítico de inicio y de terminación de la transformación dependen de la temperatura según las siguientes relaciones:

$$\sigma_c = \frac{\partial \sigma_c}{\partial M_s} (T - M_s) \quad (2.23)$$

$$\sigma_f = \frac{\partial \sigma_c}{\partial M_s} (T - M_f) \quad (2.24)$$

En la Figura 2.8 se presentan las curvas que representan la variación de  $f$ , descrita con la ecuación (2.20), para los casos de esfuerzo constante y temperatura constante respectivamente. Claramente se ve que dicha función, simula convenientemente el comportamiento propuestos por Patoor para  $f$  en función del esfuerzo y de la temperatura que se mostraron en la Figura 1.4. Así mismo en la Figura 2.8 se muestra la derivada de (2.20) respecto a  $T$  y respecto a  $\sigma$  respectivamente.

Cabe mencionar que los esfuerzos:  $\sigma$ ,  $\sigma_c$  y  $\sigma_f$  de la función (2.20) son esfuerzos efectivos, es decir se trata de la combinación de esfuerzos normales y cortantes necesarios para inducir la transformación martensítica. En el caso de una prueba en tensión uniaxial, se trata del esfuerzo normal inducido por la carga aplicada por lo que considerando la ecuación de (1.48) se tiene que  $\sigma = \frac{\tau}{m}$ , donde  $m$  es el factor de Schmid. Cuando se trata de estados de esfuerzos biaxiales o triaxiales, el esfuerzo aplicado  $\sigma$  corresponde con una combinación de esfuerzos principales cuya determinación es compleja pero puede ser incorporada a la función (2.20).

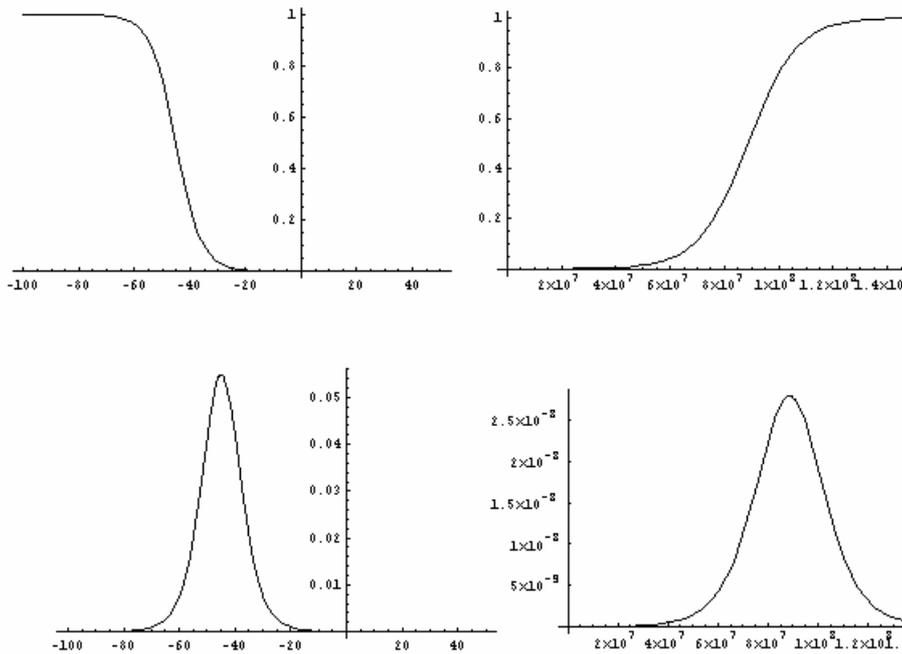


Figura 2.8. Gráfica de la función 2.20 a)  $T=Cte$ , b)  $\sigma=Cte$  así como sus derivadas respecto a la c) temperatura y d) al esfuerzo.

#### 2.4.2.-Campo de desplazamientos

Una vez determinada “ $f$ ” el siguiente paso en la modelación es relacionar el campo de desplazamientos definido por la ecuación (2.1), con la ecuación (2.20) definida en la sección anterior. Para lograr esto, se definirá una relación que describe el desplazamiento de la interfase austenita-martensita y de un punto localizado por encima de la misma en términos de la fracción volumétrica transformada “ $f$ ”.

Para realizar el análisis se hará referencia al diagrama de la Figura 2.9 donde se muestra la deformación que sufre una línea testigo (a-c) perpendicular al plano de hábito la cual es referida a la base  $e_t = \{e_{t1}, e_{t2}, e_{t3}\}$  que se indica en la Figura. En dicho diagrama se muestran los siguientes puntos de referencia:

- El punto **b** localizado sobre la interfase austenita-martensita
- Un punto **c** localizado sobre una línea horizontal paralela al plano de hábito
- La distancia **h** que representa la posición límite de la interfase austenita-martensita.

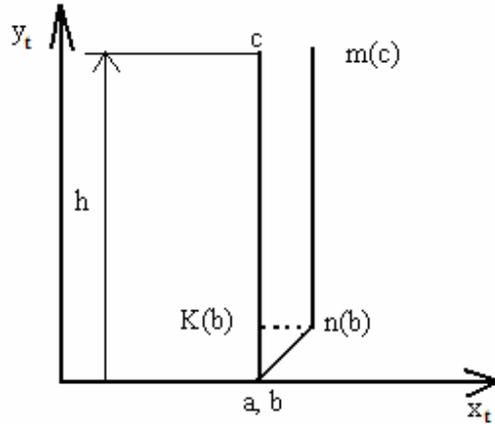


Figura 2.9. Deformación de la línea testigo durante la transformación martensítica.

En la Figura 2.9 se puede ver que las traslaciones que sufren los puntos  $b$  y  $c$  pueden ser expresados mediante las siguientes funciones:

a) Para describir la traslación que sufre el punto  $b$  durante la TM en términos de la fracción volumétrica  $f$ , es posible emplea una función lineal lo cual nos conduce a la siguiente expresión:

$$b(f) = (b_1 + \delta(c_2 - b_2))f, (c_2 - b_2)f + b_2) = (b_1 + \delta hf, hf + b_2) \quad (2.25)$$

donde:  $(b_1, b_2)$  y  $(c_1, c_2)$  son las coordenadas del punto  $b$  y  $c$  al iniciar la transformación,  $f$  es la fracción volumétrica de material transformado y  $h$  es la distancia que se indica en la Figura 2.9 y que representa el desplazamiento máximo de la interfase.

b) Para describir la traslación que sufre el punto  $c$  durante la TM se puede emplear siguiente expresión:

$$\begin{aligned} c(f) &= (b_1 + \delta(c_2 - b_2))f + c_1 - b_1, b_2 + (c_2 - b_2)f + c_2 - (c_2 - b_2)f + b_2) \\ &= (c_1 + \delta f(c_2 - b_2), c_2) = (c_1 + \delta fh, c_2) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Considerando las expresiones (2.25) y (2.26) es claro que se pueden definir también los siguientes vectores de desplazamiento para la interfase austenita-martensita y para el punto  $c$ , respectivamente, de la siguiente manera:

$$u_b = b(f) - b = \begin{pmatrix} \delta hf \\ hf \end{pmatrix} \quad (2.27) \quad \text{y} \quad u_c = c(f) - c = \begin{pmatrix} \delta fh \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

De las expresiones anteriores, es claro que el desplazamiento  $u_{b_2}(f) = hf$  es igual al que sufre  $y_{ii}$  de la Figura 2.9; la deformación de la región  $B = \{(x_t, y_t) \in R^2 | 0 \leq y_t \leq y_t^i, -\infty \leq x_t \leq +\infty\}$  (ver Figura 2.4) corresponde con la un cortante simple igual con  $\delta y_t$  mientras que para la región

$\Psi = \{(x_t, y_t) \in R^2 \mid y_t^i \leq y_t \leq h, -\infty \leq x_t \leq +\infty\}$  el desplazamiento es constante e igual a  $\delta hf$ .

Considerando lo anterior, se puede definir el siguiente campo de desplazamientos:

$$u(x_t, y_t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; & -\infty \leq y_t \leq 0 \\ \begin{pmatrix} \delta y_t \\ 0 \end{pmatrix}; & 0 \leq y_t \leq hf \\ \begin{pmatrix} \delta hf \\ 0 \end{pmatrix}; & hf \leq y_t \leq h \end{cases} \quad (2.29)$$

El cual, a diferencia del campo (2.1), es un campo parametrizado ya que es función tanto de la posición como de la fracción volumétrica transformada.

Es claro que el campo (2.29) no es continuamente diferenciable en  $y=0$  e  $y=hf$  lo cual, como se mencionó anteriormente, representa una serie de problemas para calcular el campo de deformaciones asociado. Para resolver lo anterior, en primer lugar se re-define el campo (2.29) de la siguiente manera:

$$u(x_t, y_t, z_t) = \begin{pmatrix} \delta hw(y_t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

donde:

$$w(y_t) = \begin{cases} 0 & ; -\infty \leq y_t \leq 0 \\ \frac{y_t}{hf} & ; 0 \leq y_t \leq hf \\ 1 & ; hf \leq y_t \leq h \end{cases} \quad (2.31)$$

Es decir se emplea la función  $w(y_t)$ , cuya gráfica se muestra en la Figura 2.10, para separar el problema de la discontinuidad del campo de desplazamientos. Es claro que el campo 2.31 puede hacerse continuamente diferenciable si  $w(y_t)$  lo es. Aunque existen muchas funciones varias veces continuamente diferenciables que pueden ser empleadas se propone una doble hipérbola [42] cuya forma general se expresa como:

$$w(y) = w_1 + \left( m_0 - \frac{w_1 - w_0}{y_1 - y_0} + \frac{1}{2} \left( -m_0 + \frac{w_1 - w_0}{y_1 - y_0} \right) \right) (y_t - y_0) + \left( \frac{w_1 - w_0}{y_1 - y_0} + \frac{1}{2} \left( m_1 - \frac{w_1 - w_0}{y_1 - y_0} \right) \right) (y_t - y_1) + \frac{1}{2} \left( -m_0 + \frac{w_1 - w_0}{y_1 - y_0} \right) \sqrt{r_0^2 + (y_t - y_0)^2} + \frac{1}{2} \left( -m_1 + \frac{w_1 - w_0}{y_1 - y_0} \right) \sqrt{r_1^2 + (y_t - y_1)^2} \quad (2.32a)$$

La curva “genérica” correspondiente a la ecuación anterior puede apreciarse en la Figura 2.10a donde se indican los parámetros de la ecuación (2.32a). Es claro que si se asignan los siguientes parámetros a la ecuación (2.32a):

$$w_0 = m_0 = m_1 = y_0 = 0$$

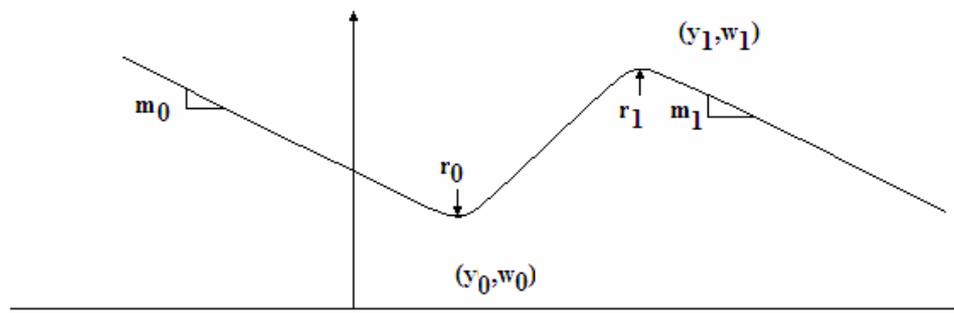
$$y_1 = hf$$

$$w_1 = 1$$

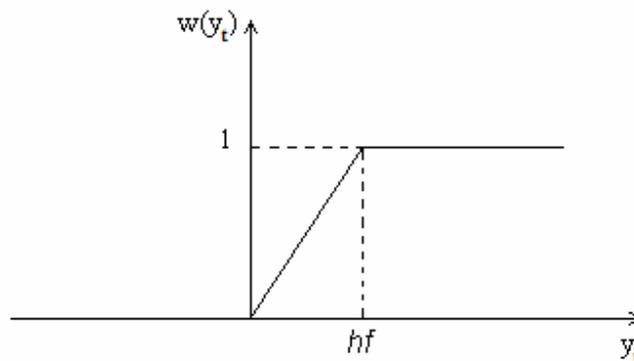
se obtiene la siguiente ecuación que describe el comportamiento mostrado en la Figura 2.10b:

$$w(y_t) = \frac{fh + \sqrt{r_0^2 + y_t^2} - \sqrt{r_0^2 + (y_t - fh)^2}}{2fh} \quad (2.32b)$$

Donde como se aprecia en la Figura 2.10,  $r_0$  es el radio de curvatura de la transición entre las regiones de la función  $w(y_t)$ .



(a)



(b)

Figura 2.10. Gráficas que muestran: (a) doble hipérbola como la definida por la ecuación y sus parámetros generales y (b) de la función  $w(y_t)$  definida por la ecuación 2.31b.

El hecho de que la ecuación (2.32b) permita controlar la transición entre las regiones del campo (2.30) es importante debido a que según se ha reportado en la literatura, a este parámetro se asocian pérdidas de energía importantes cuando la transformación ocurre a altas velocidades.

Considerando la ecuación (2.32b) es claro que el gradiente del campo vectorial (2.30) se puede expresar como:

$$\nabla u = \delta hf \frac{dw(y_t)}{dy_t} p \otimes d \quad (2.33)$$

donde:  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{d}$  son vectores normal al plano de hábito y paralelo a la dirección del corte respectivamente. Es importante mencionar que el gradiente (2.33) no es constante, puesto que  $w(y_t)$  no lo es.

Por otro lado, es claro que el campo (2.30) ha sido definido en una base fija al elemento del sistema de transformación y como se ha mencionado en múltiples ocasiones la base de observación no coincide con esta. Así mismo, como se mencionó también en la sección 2.2 tanto los elementos de transformación como la orientación del sistema de observación son referidos a una base definida por la celda unitaria de la fase austenítica. Como se mencionó también en la sección 2.2 pasar de la base de transformación, definida por  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{d}$ , a la base observación definida por el eje de aplicación de la carga y el plano de observación generalmente resulta considerablemente complicado si se pretende lograr mediante rotaciones simples. Dichas complicaciones deben ser resultas debido a que uno de los aspectos más importantes del comportamiento de los MMF es la alta anisotropía asociada a la deformación transformacional.

Para resolver dicho problema, a continuación se define un procedimiento para lograr los cambios de base al campo vectorial (2.30).

#### 2.4.3.-Cambio de base

Sean dos bases mínimas ortonormales  $e_t = \{e_{t1}, e_{t2}, e_{t3}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  y

$e_c = \{e_{c1}, e_{c2}, e_{c3}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ , que se muestran en la Figura 3.11 con el mismo

origen  $O$  y un vector  $v$  cuyas componentes en la base  $e_t$  son:  $\{v\}_{X_t} = \begin{pmatrix} v_{t1} \\ v_{t2} \\ v_{t3} \end{pmatrix}$  y en la base  $e_c$

son:  $\{v\}_{X_c} = \begin{pmatrix} v_{c1} \\ v_{c2} \\ v_{c3} \end{pmatrix}$ .

Así mismo sean:  $\{e_c\}_{X_t} = \{\{e_{c1}\}_{X_t}, \{e_{c2}\}_{X_t}, \{e_{c3}\}_{X_t}\} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right\}$  y

$\{e_t\}_{X_c} = \{\{e_{t1}\}_{X_c}, \{e_{t2}\}_{X_c}, \{e_{t3}\}_{X_c}\} = \left\{ \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} \right\}$  las componentes de  $e_c$  referido a la

base  $e_t$  y las de  $e_t$  referidas a la base  $e_c$

respectivamente.

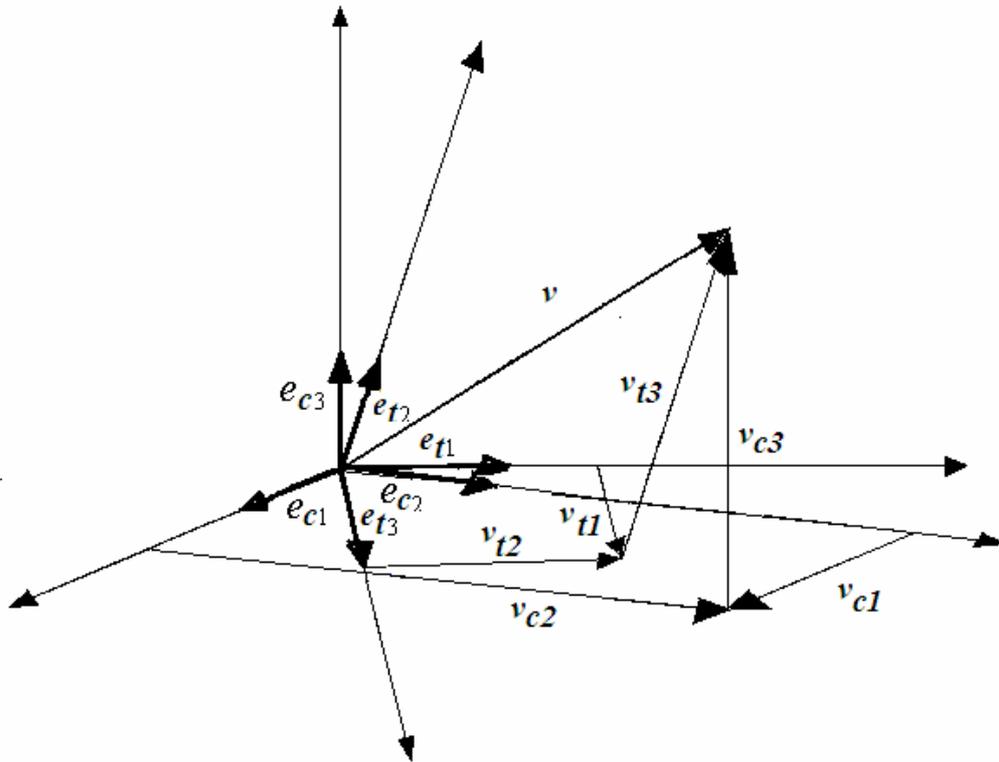


Figura 2.11. Representación gráfica de un vector  $v$  referido a las bases  $e_t$  y  $e_c$ .

Luego, considerando la definición de proyección escalar de un vector  $v$  sobre otro vector  $u$  cualesquiera, es claro que el vector  $v$  puede expresarse en ambas bases,  $e_t$  y  $e_c$ , como el producto de sus componentes escalares multiplicada por cada uno de los vectores de la base, es decir:

$$\{v\}_{X_t} = \begin{pmatrix} v_{t1} \\ v_{t2} \\ v_{t3} \end{pmatrix} = (e_{t1}, \{v\}_{X_t})e_{t1} + (e_{t2}, \{v\}_{X_t})e_{t2} + (e_{t3}, \{v\}_{X_t})e_{t3} = v_{t1}e_{t1} + v_{t2}e_{t2} + v_{t3}e_{t3} \quad (2.34)$$

$$\{v\}_{X_c} = \begin{pmatrix} v_{c1} \\ v_{c2} \\ v_{c3} \end{pmatrix} = (e_{c1}, \{v\}_{X_c})e_{c1} + (e_{c2}, \{v\}_{X_c})e_{c2} + (e_{c3}, \{v\}_{X_c})e_{c3} \quad (2.35)$$

$$= v_{c1}e_{c1} + v_{c2}e_{c2} + v_{c3}e_{c3}$$

Posteriormente, de la definición de producto tensorial de dos vectores y sus propiedades [43] es claro que las ecuaciones anteriores conducen a:

$$\begin{aligned} (e_{t1}, \{v\}_{X_t})e_{t1} + (e_{t2}, \{v\}_{X_t})e_{t2} + (e_{t3}, \{v\}_{X_t})e_{t3} &= [(e_{t1} \otimes e_{t1}) + (e_{t2} \otimes e_{t2}) + (e_{t3} \otimes e_{t3})]\{v\}_{X_t} \\ &= \left[ \sum_{i=1}^3 (e_{ii} \otimes e_{ii}) \right] \{v\}_{X_t} = I\{v\}_{X_t} = \{v\}_{X_t} \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned}
& (e_{C_1}, \{v\}_{XC})e_{C_1} + (e_{C_2}, \{v\}_{XC})e_{C_2} + (e_{C_3}, \{v\}_{XC})e_{C_3} = [(e_{C_1} \otimes e_{C_1}) + (e_{C_2} \otimes e_{C_2}) + (e_{C_3} \otimes e_{C_3})]\{v\}_{XC} \\
& = \left[ \sum_{i=1}^3 (e_{C_i} \otimes e_{C_i}) \right] \{v\}_{XC} = I\{v\}_{XC} = \{v\}_{XC}
\end{aligned} \tag{2.37}$$

expresiones que serán empleadas para escribir las componentes de  $v$  en la base  $e_C$  conociendo sus componentes referidos a la base  $e_t$  y/o las componentes de  $v$  en la base  $e_t$  conociendo sus componentes en la base  $e_C$ , es decir  $\{e_C\}_{Xt}$  y  $\{e_t\}_{XC}$  respectivamente. Lo anterior constituye uno de los problemas fundamentales del presente trabajo.

De las ecuaciones (2.36) y (2.37) así como de las propiedades del producto tensorial, es claro que la siguiente relación es válida:

$$\left[ \sum_{i=1}^3 (\{e_{C_i}\}_{Xt} \otimes \{e_{C_i}\}_{Xt}) \right] \{v\}_{Xt} = I\{v\}_{Xt} = \{v\}_{Xt} \tag{2.38a}$$

Así mismo, aplicando la definición de producto tensorial se obtiene:

$$(\{e_{C_1}\}_{Xt}, \{v\}_{Xt})\{e_{C_1}\}_{Xt} + (\{e_{C_2}\}_{Xt}, \{v\}_{Xt})\{e_{C_2}\}_{Xt} + (\{e_{C_3}\}_{Xt}, \{v\}_{Xt})\{e_{C_3}\}_{Xt} = \left[ \sum_{i=1}^3 (\{e_{C_i}\}_{Xt} \otimes \{e_{C_i}\}_{Xt}) \right] \{v\}_{Xt} \tag{2.38b}$$

De donde es claro que los términos  $(\{e_{C_i}\}_{Xt}, \{v\}_{Xt})$  representan la proyección escalar del vector  $v$  sobre cada uno de los vectores de la base  $e_C$ , es decir, los componentes  $v_{C_i}$ , las cuales son independientes de la base a la cual están referidos. Considerando lo anterior, se sigue que:

$$\begin{aligned}
& (\{e_{C_1}\}_{Xt}, \{v\}_{Xt})\{e_{C_1}\}_{Xt} + (\{e_{C_2}\}_{Xt}, \{v\}_{Xt})\{e_{C_2}\}_{Xt} + (\{e_{C_3}\}_{Xt}, \{v\}_{Xt})\{e_{C_3}\}_{Xt} \\
& = v_{C_1}\{e_{C_1}\}_{Xt} + v_{C_2}\{e_{C_2}\}_{Xt} + v_{C_3}\{e_{C_3}\}_{Xt} = \left[ \sum_{i=1}^3 (\{e_{C_i}\}_{Xt} \otimes \{e_{C_i}\}_{Xt}) \right] \{v\}_{Xt}
\end{aligned} \tag{2.38c}$$

Luego, considerando el miembro izquierdo de la expresión (2.38b) es claro debido a que las proyecciones  $(\{e_{C_i}\}_{Xt}, \{v\}_{Xt})$  multiplican a los vectores  $\{e_{C_i}\}_{Xt}$ , el resultado de la suma es el vector  $v$  referido a la base  $e_t$  que se estableció en (2.38a). Partiendo de lo anterior, se tiene que si se sustituyen los términos  $\{e_{C_i}\}_{Xt}$ , que multiplican a los las proyecciones escalares  $(\{e_{C_i}\}_{Xt}, \{v\}_{Xt})$ , el resultado es que la suma será el vector  $v$  referido a la base  $e_C$  es decir:

$$\begin{aligned}
& (\{e_{C_1}\}_{Xt}, \{v\}_{Xt})e_{C_1} + (\{e_{C_2}\}_{Xt}, \{v\}_{Xt})e_{C_2} + (\{e_{C_3}\}_{Xt}, \{v\}_{Xt})e_{C_3} = v_{C_1}e_{C_1} + v_{C_2}e_{C_2} + v_{C_3}e_{C_3} = \\
& = \left[ \sum_{i=1}^3 (e_{C_i} \otimes \{e_{C_i}\}_{Xt}) \right] \{v\}_{Xt} = \{v\}_{XC}
\end{aligned} \tag{2.39}$$

La importancia de esta expresión es que relaciona las componentes del vector  $v$  en cada una de las bases  $e_t$  y  $e_C$ , que es lo que se buscaba.

Volviendo a la ecuación (3.39), es claro que de los últimos dos términos se llega a que:

$$v_{C1}e_{C1} + v_{C2}e_{C2} + v_{C3}e_{C3} = \left[ \sum_{i=1}^3 (e_{Ci} \otimes \{e_{Ci}\}_{Xt}) \right] \{v\}_{Xt} = \{v\}_{XC} = A_{Xt \rightarrow XC} \{v\}_{Xt} \quad (2.40)$$

de donde, se ve que el término:  $A_{Xt \rightarrow XC}$  es el tensor que permite cambiar la base del vector  $v$ , de la base  $e_t$  a la base  $e_C$ .

Así mismo, considerando la expresión de la izquierda de (2.39) es evidente que se puede obtener un tensor que permita cambiar al vector  $v$  de la base  $e_C$  a la base  $e_t$  con la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} (e_{C1}, \{v\}_{XC}) \{e_{C1}\}_{Xt} + (e_{C2}, \{v\}_{XC}) \{e_{C2}\}_{Xt} + (e_{C3}, \{v\}_{XC}) \{e_{C3}\}_{Xt} &= v_{C1} \{e_{C1}\}_{Xt} + v_{C2} \{e_{C2}\}_{Xt} + v_{C3} \{e_{C3}\}_{Xt} \\ &= \left[ \sum_{i=1}^3 (\{e_{Ci}\}_{Xt} \otimes e_{Ci}) \right] \{v\}_{XC} = \{v\}_{Xt} = A_{XC \rightarrow Xt} \{v\}_{XC} \end{aligned} \quad (2.41)$$

de donde se puede observar que, considerando nuevamente la definición de  $\{e_{Ci}\}_{Xt}$  la expresión anterior conduce a:

$$\begin{aligned} \left[ \sum_{i=1}^3 (\{e_{Ci}\}_{Xt} \otimes e_{Ci}) \right] &= A_{XC \rightarrow Xt} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Que corresponde con la definición comúnmente dada en la literatura [44] para el cambio de base la cual establece que las columnas de la matriz de paso, de la base  $e_C$  a la base  $e_t$ , son los vectores de la base  $e_C$  referidos a la base  $e_t$ .

En la Figura 2.12, se muestra un diagrama en el que se presenta una interpretación gráfica bidimensional de la ecuación (2.42) a partir de la cual se ve con claridad que la ecuación (2.41) puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} (e_{t1}, \{v\}_{Xt}) \{e_{t1}\}_{XC} + (e_{t2}, \{v\}_{Xt}) \{e_{t2}\}_{XC} + (e_{t3}, \{v\}_{Xt}) \{e_{t3}\}_{XC} &= v_{t1} \{e_{t1}\}_{XC} + v_{t2} \{e_{t2}\}_{XC} + v_{t3} \{e_{t3}\}_{XC} \\ &= \left[ \sum_{i=1}^3 (\{e_{ti}\}_{XC} \otimes e_{ti}) \right] \{v\}_{Xt} = \{v\}_{XC} = A_{Xt \rightarrow XC} \{v\}_{Xt} \end{aligned} \quad (2.43a)$$

La cual, conduce a la expresión para cambiar  $v$  de la base  $e_t$  a la base  $e_C$  conociendo las componentes  $\{e_{ti}\}_{XC}$ , es decir:

$$\left[ \sum_{i=1}^3 \{e_{ii}\}_{X_C} \otimes e_{ii} \right] = A_{X_t \rightarrow X_C} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.43b)$$

$$= \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ d_2 & 0 & 0 \\ d_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & f_1 & 0 \\ 0 & f_2 & 0 \\ 0 & f_3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & g_1 \\ 0 & 0 & g_2 \\ 0 & 0 & g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & f_1 & g_1 \\ d_2 & f_2 & g_2 \\ d_3 & f_3 & g_3 \end{pmatrix}$$

Es evidente que las ecuaciones (2.41) y la (2.43b) son equivalentes sin embargo, la última es más comúnmente empleada debido a que corresponde con la regla mencionada anteriormente la cual versa: que las columnas de la matriz de paso de la base  $e_t$  a la base  $e_C$  se forma haciendo con los vectores de la base  $e_t$  referidos a la base  $e_C$ , es decir  $\{e_{ii}\}_{X_C}$  [46]. Una interpretación gráfica de la ecuación (2.43b) para un caso bidimensional se muestra en la Figura 2.12

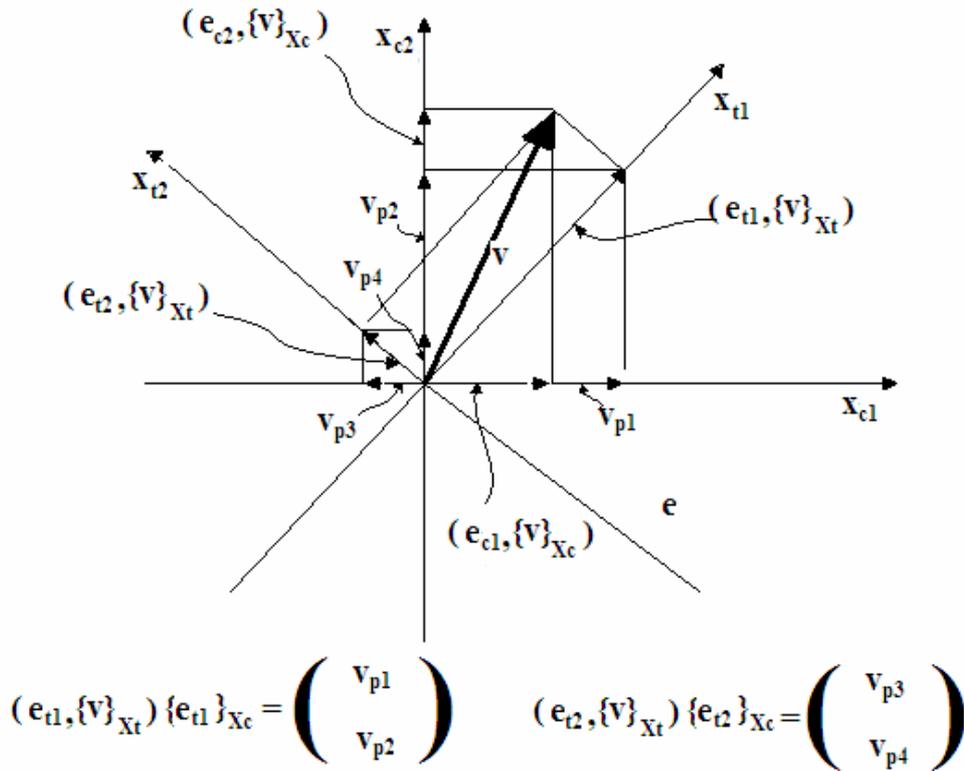


Figura 2.12. Proyecciones de un vector  $v$  en los vectores de las bases  $e_C$  y  $e_t$ .

Del razonamiento anterior, es claro que las siguientes expresiones son válidas para el cambio de base de un vector:

$$\begin{aligned}
\{v\}_{XC} &= A_{Xt \rightarrow XC} \{v\}_{Xt} \\
\{v\}_{Xt} &= A_{XC \rightarrow Xt} \{v\}_{XC} \\
A_{XC \rightarrow Xt} &= [A_{Xt \rightarrow XC}]^{-1}
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Luego de las ecuaciones anteriores se observa que el cambio de base de una función lineal ( $f(v)=u$ ),  $f: V \rightarrow V$ , cuyo gradiente es constante ( $\nabla f = cte$ ) se puede obtener de las ecuaciones (2.44) siguiendo el siguiente procedimiento.

Sean  $f(\{v\}_{Xt}) = \{u\}_{Xt}$  la función en la base  $e_t$  cuyo gradiente en la misma base es  $F$ . Así mismo, sean  $\hat{f}(\{v\}_{XC}) = \{u\}_{XC}$  la función en la base  $e_C$  y su gradiente igual a  $\hat{F}$ .

Es claro que por ser  $f$  una función lineal se cumple que:

$$f(\{v\}_{Xt}) = F\{v\}_{Xt} = \{u\}_{Xt} \tag{2.45}$$

$$\hat{f}(\{v\}_{XC}) = \hat{F}\{v\}_{XC} = \{u\}_{XC} \tag{2.46}$$

Luego, empleando las ecuaciones (2.44) y la ecuación (2.45) se tiene que:

$$F\{v\}_{Xt} = \{u\}_{Xt} = A_{XC \rightarrow Xt} \{u\}_{XC} = A_{XC \rightarrow Xt} \hat{F}\{v\}_{XC} = A_{XC \rightarrow Xt} \hat{F} A_{Xt \rightarrow XC} \{v\}_{Xt} \tag{2.47}$$

Luego, tomando el primero y último miembro de la igualdad anterior se tiene que

$$F = A_{XC \rightarrow Xt} \hat{F} A_{Xt \rightarrow XC} \tag{2.48}$$

Es la ecuación que nos permite cambiar de la base  $e_C$  a la  $e_t$  una función lineal. Es importante mencionar que si la función no es lineal, no es posible aplicar la ecuación anterior puesto que no se cumple con la igualdad:  $f(v) = Fv$ .

Para resolver dicho problema, se debe recurrir a la composición de funciones puesto que la ecuación (2.48) puede ser vista como tal ya que tanto  $F$ ,  $\hat{F}$ ,  $A_{XC \rightarrow Xt}$  como  $A_{Xt \rightarrow XC}$  representan a las funciones:  $f$ ,  $\hat{f}$ ,  $a$  y  $a^{-1}$ . Considerando lo anterior es claro que la ecuación (2.48) puede expresarse como:

$$Fv = f(v) = a^{-1}(\hat{f}(a(v))) \tag{2.49}$$

Cabe destacar que aunque  $f$  no es lineal,  $a$  y por lo tanto  $a^{-1}$  lo son por lo que podemos escribir la ecuación anterior como:

$$f(v) = A^{-1} \hat{f}(Av) = f(\{v\}_{XC}) = A_{XC \rightarrow Xt} \hat{f}(A_{Xt \rightarrow XC} \{v\}_{XC}) \tag{2.50}$$

#### 2.4.4.-Bases de referencia

Una vez definido el cambio de base de funciones lineales y no lineales, se aplicará este concepto al campo definido por (2.30) y (2.31) el cual debe ser referido a la base mínima definida por el eje de aplicación de la carga y la dirección de observación de la muestra. Es preciso considerar que, tanto los elementos del ST como la orientación del eje de aplicación de la muestra son referidos a una base mínima definida por los ejes principales de la celda

cúbica de la fase austenítica. Debido a lo anterior, es necesario definir las siguientes bases ortonormales que se muestran en la Figura 2.13:

- Una base, que llamaremos base de transformación,  $e_t = \{e_{t1}, e_{t2}, e_{t3}\}$  definida por los vectores  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{d}$  de la ecuación 2.47 de tal manera que  $e_{t2}=\mathbf{p}$  y  $e_{t1}=\mathbf{d}$ .
- Otra base mínima, que será llamada base de referencia,  $e = \{e_1, e_2, e_3\}$  y queda definida por las tres direcciones principales de una celda cúbica de la fase madre y;
- La tercera base mínima, denominada: base de observación,  $e_c = \{e_{c1}, e_{c2}, e_{c3}\}$  se define con la direcciones del eje de aplicación de la carga  $e_{c2}$  y un vector norma al plano de observación  $e_{c1}$ .

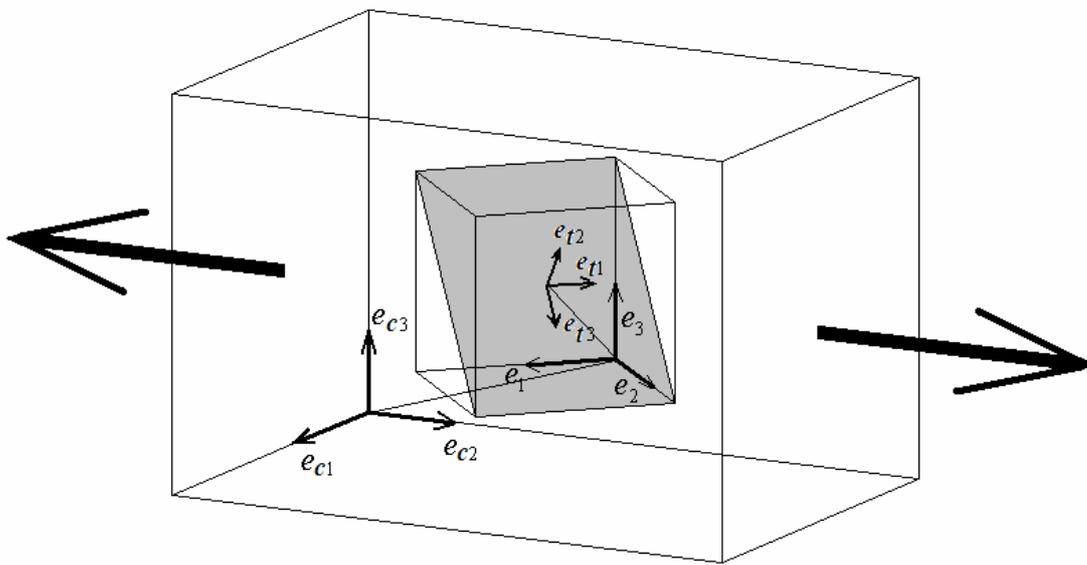


Figura 2.13. Base ortonormales involucradas en el estudio

Como se describió en la sección anterior, el cambio de base tanto de vectores como de funciones se logra aplicando un tensor de transformación  $A_{Xt \rightarrow Xc}$  cuyos elementos se calculan empleando el producto tensorial de los vectores de las bases correspondientes es decir:

$$A_{Xt \rightarrow Xc} = \sum_{i=1}^3 \{e_{ii}\}_{Xc} \otimes e_{ii} \quad (2.51)$$

donde:

$\{e_{ii}\}_{Xc}$ ,  $i= 1, 2, 3$ , son los vectores de la base  $e_t$  referidos a la base  $e_c$ .

Si tanto  $e_t$  como  $e_c$  son referidos a la base  $e$ , entonces:

$$A_{Xt \rightarrow Xc} = A_{X \rightarrow Xc} A_{Xt \rightarrow X} \quad (2.52)$$

donde:

Los tensores de transformación  $A_{X \rightarrow XC}$  y  $A_{X \rightarrow Xr}$  nos permiten cambiar de la base  $e$  a  $e_C$ ; de la  $e$  a la  $e_r$ ; y como se puede ver en la ecuación (2.52) de la  $e_t$  a la  $e_C$  respectivamente. Así mismo, los componentes de dichos tensores se pueden calcular conociendo los vectores de las bases  $e_t$  y  $e_C$  referidos a la base  $e$  mediante las ecuaciones:

$$A_{Xr \rightarrow X} = \sum_{i=1}^3 \{e_{ri}\}_X \otimes e_{ri} \quad (2.53)$$

$$A_{XC \rightarrow X} = \sum_{i=1}^3 \{e_{ci}\}_X \otimes e_{ci}; \quad (2.54)$$

$$A_{X \rightarrow XC} = [A_{XC \rightarrow X}]^{-1} = \sum_{i=1}^3 \{e_i\}_{XC} \otimes e_i \quad (2.55)$$

Como se mencionó, dada una función lineal  $q$  con gradiente  $\nabla q$  definida en la base  $e_t$ , el cambio de base de  $q$  a la base  $e_C$  se obtiene como:

$$q(X_C) = A_{X \rightarrow XC} A_{Xr \rightarrow X} \nabla q_{Xr} A_{X \rightarrow Xr} A_{XC \rightarrow X} \quad (2.56)$$

Sin embargo si la función es no lineal es necesario aplicar una composición de funciones en lugar de los productos de matrices como se describió en la sección anterior.

#### 2.4.5.-Variación de la orientación entre dos ejes fijos

Es posible hacer variar la orientación de la base  $e_C$  entre dos orientaciones fijas aplicando una rotación rígida de una base de referencia  $e_r$  y referirla a la base  $e$  con lo que la base  $e_C$  cambiará según un ángulo  $\theta$ . Por simplicidad, dicha rotación puede hacerse respecto a alguno de los ejes ortogonales de la base  $e_C$  pero puede ser respecto a un eje cualquiera. Es claro que la rotación referida a la base  $e$  se calcula como:

$$R_X = A_{Xr \rightarrow X} R_{Xr} A_{X \rightarrow Xr} \quad (2.57)$$

Donde  $R_X$  es una rotación rígida referida a la base  $e$ , y

$$A_{Xr \rightarrow X} = \sum_{i=1}^3 \{e_{ri}\}_X \otimes e_{ri} \quad (2.58)$$

Luego, el tensor  $A_{XC \rightarrow X}$  queda como:

$$A_{XC \rightarrow X} = \sum_{i=1}^3 R_X \{e_{ri}\}_X \otimes e_{ri} \quad (2.59)$$

Esta expresión es importante debido a que con ella es posible calcular los efectos de una función al variar la orientación del material entre dos orientaciones definidas y puede ser útil en el estudio de materiales cristalinos anisótropos como es el caso de los MMF que se estudian en el presente trabajo.

#### 2.4.6.-Cambio de base del campo de desplazamientos

Retomando la discusión del campo de desplazamientos (2.30) es claro que se trata de una función no lineal por lo que la aplicación de cambio de base debe realizarse empleando la ecuación (2.50) de donde se obtiene:

$$(x_t, y_t, z_t)^T = A_{XC \rightarrow Xt} (x_C, y_C, z_C)^T \quad (2.60)$$

$$u(x_C, y_C, z_C) = A_{Xt \rightarrow XC} u(x_t, y_t, z_t) \quad (2.61)$$

Donde:  $u(x_t, y_t, z_t)$  está dada por (2.30) y  $A_{XC \rightarrow Xt}$  por (2.52) a (2.55).

El campo definido por las ecuaciones (2.60) y (2.61) constituye la parte central del modelo propuesto en el presente trabajo ya que permite determinar los siguientes puntos de interés para un MMF particular:

- La gráfica del campo vectorial de desplazamientos que se obtendría en un experimento de correlación de imágenes durante la TM.
- La distorsión que sufriría una marca testigo dibujada sobre la superficie de observación de una muestra observada en un microscopio óptico, también durante la TM.
- La distorsión que sufriría la superficie de observación durante la TM
- El campo tensorial de deformación transformacional que se obtiene calculando la parte simétrica del gradiente del campo de desplazamientos.
- La deformación media (ingenieril) que se obtendría si se mide la deformación con un extensómetro de puntas en una prueba de tensión simple.
- El comportamiento de un MMF sujeto a flexión.
- El comportamiento de policristales en serie sujetos a tensión simple y a flexión.

#### 2.4.7.-Tensor de esfuerzos

Siguiendo el criterio para la determinación de los diagramas de transformación, definidos en la sección 1.4.2, es claro que conociendo el eje de aplicación de la carga y la dirección de observación es posible determinar la VM que se formará en el material calculando la componente de corte sobre cada uno de los elementos del ST. Lo anterior, puede realizarse empleando la operación cambio de base definida anteriormente aplicándola al tensor de esfuerzos  $T_{XC}$  como sigue:

$$T_{Xt} = A_{X \rightarrow Xt} A_{XC \rightarrow X} T_{XC} A_{X \rightarrow XC} A_{Xt \rightarrow X} \quad (2.62)$$

Es claro que la ecuación anterior, debe aplicarse a cada elemento del sistema de transformación y que la transformación iniciará en aquel elemento donde  $\tau_{x_t y_t}$  sea máximo. En el caso de una prueba de tensión uniaxial,  $T_{XC}$  será:

$$T_{XC} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

Mientras que para un estado de esfuerzos planos se tiene que:

$$T_{XC} = \begin{pmatrix} \sigma_{xc} & \tau_{xcyc} & 0 \\ \tau_{xcyc} & \sigma_{yc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

#### 2.4.8.-Tensor de constantes elásticas

Considerando que las constantes elásticas son conocidas, es posible calcular el valor de los módulos elásticos ingenieriles tales como el módulo de Young, el de Poisson y el de corte. Para el caso de tensión simple es posible calcular el valor del Módulo de Young aplicando un cambio de la base  $e$  a la base  $e_C$  del tensor de esfuerzos en tensión uniaxial. Luego evaluar dicho tensor en la ley de Hooke se obtiene el tensor de deformaciones en la base  $e_C$  que luego es referido a la base  $e$  es decir:

$$T_{XC} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

$$T_X = A_{XC \rightarrow X} T_{XC} A_{X \rightarrow XC} \quad (2.66)$$

$$\varepsilon_X = \varepsilon_X(T_X) = \begin{pmatrix} \frac{1}{MY_0} [\sigma_x - \nu_0(\sigma_y + \sigma_z)] & \frac{\tau_{xy}}{G_0} & \frac{\tau_{xz}}{G_0} \\ \frac{\tau_{xy}}{G_0} & \frac{1}{MY_0} [\sigma_y - \nu_0(\sigma_x + \sigma_z)] & \frac{\tau_{yz}}{G_0} \\ \frac{\tau_{xz}}{G_0} & \frac{\tau_{yz}}{G_0} & \frac{1}{MY_0} [\sigma_z - \nu_0(\sigma_x + \sigma_y)] \end{pmatrix} \quad (2.67)$$

$$\varepsilon_{XC} = A_{X \rightarrow XC} \varepsilon_X A_{XC \rightarrow X} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xc} & \gamma_{xcyc} & \gamma_{xczc} \\ \gamma_{ycxc} & \varepsilon_{yc} & \gamma_{yczc} \\ \gamma_{zxc} & \gamma_{zyc} & \varepsilon_{zc} \end{pmatrix} \quad (2.68)$$

Donde, aplicando el coeficiente anisotrópico “ $k$ ” correspondiente al MMF del que se trate, se tiene que:

$$G_0 = k \frac{MY_0}{2(1+\nu_0)} \quad (2.69)$$

De donde, finalmente el módulo de Young para una orientación dada (MY<sub>p</sub>) es:

$$MY_p = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_{yc}} \quad (2.70)$$

#### 2.4.9.-Relaciones constitutivas

Una vez definido el campo de desplazamientos asociado a la TM, así como el criterio de transformación y la variación del módulo de Young (todos ellos en función de la orientación del eje de aplicación de la carga), es posible definir un conjunto de ecuaciones constitutivas que describen el comportamiento mecánico de los MMF monocristalinos y policristalinos con textura cristalina. Para ello se considera la descomposición de la deformación, propuesta por Patoor et [4], en dos partes: una linealmente elástica y la otra transformacional, es decir:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_T = \boldsymbol{\varepsilon}_{le} + \boldsymbol{\varepsilon}_{tr} \quad (2.71)$$

En realidad, la expresión anterior corresponde con una aproximación de la relación deformación-esfuerzo mediante una serie de Taylor, sin esfuerzos residuales, trucada en su tercer término.

Para el caso de materiales monocristalinos, la deformación linealmente elástica ( $\boldsymbol{\varepsilon}_{le}$ ) en un caso de tensión uniaxial se obtiene de las ecuaciones (2.65) a (2.70), es decir:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{le} = \boldsymbol{\varepsilon}_{XC} = A_{X \rightarrow XC} \boldsymbol{\varepsilon}_X A_{XC \rightarrow X}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_X = \boldsymbol{\varepsilon}_X(T_X) = \begin{pmatrix} \frac{1}{MY_0} [\sigma_x - \nu_0 (\sigma_y + \sigma_z)] & \frac{\tau_{xy}}{G_0} & \frac{\tau_{xz}}{G_0} \\ \frac{\tau_{xy}}{G_0} & \frac{1}{MY_0} [\sigma_y - \nu_0 (\sigma_x + \sigma_z)] & \frac{\tau_{yz}}{G_0} \\ \frac{\tau_{xz}}{G_0} & \frac{\tau_{yz}}{G_0} & \frac{1}{MY_0} [\sigma_z - \nu_0 (\sigma_x + \sigma_y)] \end{pmatrix} \quad (2.72)$$

$$T_X = A_{XC \rightarrow X} T_{XC} A_{X \rightarrow XC} \quad T_{XC} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, la deformación transformacional ( $\boldsymbol{\varepsilon}_{tr}$ ) se obtiene calculando la parte simétrica del campo de desplazamientos dado por (2.30) previa aplicación de las transformaciones definidas por (2.60) y (2.61)

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{tr} = \frac{1}{2} \left[ \text{grad}(u(x_c, y_c, z_c)) + \text{grad}^T(u(x_c, y_c, z_c)) \right] \quad (2.73a)$$

$$u(x_c, y_c, z_c) = A_{Xt \rightarrow XC} u(x_t, y_t, z_t)$$

$$(x_t, y_t, z_t)^T = A_{XC \rightarrow Xt} (x_c, y_c, z_c)^T$$

$$u(x_t, y_t, z_t) = \begin{pmatrix} \delta h w(y_t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.73b) \quad w(y_t) = \begin{cases} 0 & ; -\infty \leq y_t \leq 0 \\ \frac{y_t}{hf} & ; 0 \leq y_t \leq hf \\ 1 & ; hf \leq y_t \leq h \end{cases} \quad (2.73c)$$

$$w(y_t) = \frac{fh + \sqrt{r_0^2 + y_t^2} - \sqrt{r_0^2 + (y_t - fh)^2}}{2fh} \quad (2.73d)$$

$$f = \frac{e^{\frac{(\sigma - \sigma_0)}{\delta\sigma}}}{1 + e^{\frac{(\sigma - \sigma_0)}{\delta\sigma}}} \quad (2.73e)$$

donde:

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_c + \sigma_f}{2} \quad \sigma_c = \frac{\partial \sigma_c}{\partial M_s} (T - M_s) \quad \sigma_f = \frac{\partial \sigma_c}{\partial M_s} (T - M_f)$$

$$\delta\sigma = \frac{\sigma_f - \sigma_c}{2 \ln(9)}$$

$$A_{X_t \rightarrow X_C} = A_{X \rightarrow X_C} A_{X_t \rightarrow X}$$

$$A_{X_t \rightarrow X} = \sum_{i=1}^3 \{e_{ii}\}_X \otimes e_{ii} \quad A_{X \rightarrow X_t} = [A_{X_t \rightarrow X}]^{-1} = \sum_{i=1}^3 \{e_i\}_{X_t} \otimes e_i$$

$$A_{X_C \rightarrow X} = \sum_{i=1}^3 \{e_{ci}\}_X \otimes e_{ci} \quad A_{X \rightarrow X_C} = [A_{X_C \rightarrow X}]^{-1} = \sum_{i=1}^3 \{e_i\}_{X_C} \otimes e_i$$

Como se mencionó anteriormente,  $e_i$ ,  $e_{ii}$  y  $e_{ci}$  son las bases definidas por: la celda unitaria de la fase austenítica (canónica), el sistema de transformación y el de observación respectivamente.

Las ecuaciones (2.73) representan el modelo matemático para simular el comportamiento mecánico de los MMF que se planteo como objetivo central del presente trabajo. Es claro que los datos de entrada del modelo son:

- Los sistemas de transformación y la magnitud del cortante del MMF que se pretenda simular. Es decir las familias de planos de hábito y las direcciones de corte. Como se muestra en la tabla A.3 del apéndice, estos datos han sido publicados para distintas aleaciones como Ni-Al, Ni-Ti y Cu-Ni-Al [12].
- La orientación de la muestra. La cual está compuesta por la dirección de la aplicación de la carga y el plano de observación; en el caso de pruebas en tensión simple; para el caso de flexión la orientación del eje longitudinal de la muestra y del plano que contiene la carga aplicada. Esta información se puede obtener empleando técnicas de difracción de electrones.

- c) Las temperaturas críticas del material. Las cuales se pueden obtener practicando a una muestra del material, un estudio de calorimetría diferencial de barrido o bien de resistividad eléctrica.
- d) La razón de esfuerzo del material. Que ha sido reportado en la literatura, para diferentes MMF y tipos de transformación, como se muestran en la Tabla A.1 apéndice.
- e) Las constantes elásticas del material en fase austenita. Las cuales, han sido reportado en la literatura para diversos MMF que se listan en la Tabla A.2 del apéndice.
- f) Las dimensiones de la muestra.

Es claro que los datos del sistema de transformación, así como la orientación de la muestra, son empleados para definir los tensores de transformación (2.53) y (2.54) mientras que las temperaturas críticas y la razón de esfuerzos son empleados para definir la fracción volumétrica transformada  $f$  dada por las ecuaciones (2.20) a (2.24).

Como se mostrará en los capítulos siguientes, dicho modelo permite simular los siguientes aspectos del comportamiento del MMF en función de la temperatura de prueba y/o el esfuerzo aplicado:

- a) La distorsión de la superficie de observación aplicando el campo de desplazamientos a la ecuación del plano de observación en forma paramétrica.
- b) La distorsión que sufre una marca testigo, grabada en la superficie de observación aplicando el campo de desplazamientos a la curva que describe la marca testigo, escrita en forma paramétrica.
- c) El campo de desplazamientos asociado a la transformación simplemente graficando el campo (2.61).

Así mismo, el modelo permite calcular lo siguiente:

- a) El desplazamiento y la deformación de cualquier punto en la muestra.
- b) Las curvas esfuerzo-deformación media y/o ingenieril para cargas de tensión a temperatura constante y/o a esfuerzo constante.
- c) Para casos de tensión uniaxial, la variación de la deformación promedio al cambiar la orientación del eje de aplicación de la muestra.
- d) El desplazamiento del punto de aplicación de la carga en función de la temperatura.

En el siguiente capítulo se presenta una colección de resultados obtenidos empleando el modelo desarrollado en el este capítulo, así como una comparación con algunos resultados reportados en la literatura.

## Capítulo 3: Resultados

Una vez desarrollado el modelo matemático que se mostró en las ecuaciones (2.53) del capítulo anterior, se procederá a presentar la aplicación del modelo a una serie de casos particulares que corresponden con arreglos de carga típicamente reportados en la literatura. Los resultados que se muestran corresponden con materiales monocristalinos sujetos a tensión uniaxial y flexión así como matariles policristalinos sujetos a tensión uniaxial.

### 3.1.-Monocristales

En la presente sección se muestran una serie de resultados que se obtuvieron aplicando el modelo descrito por las ecuaciones (2.53) a muestras monocristalinas en dos arreglos de carga: a) tensión uniaxial constante y temperatura variable y b) flexión en cantilever con una carga puntual constante en su extremo libre y enfriamiento.

Con el fin de simplificar el modelo de la ecuación (2.53) y apreciar los efectos del cambio en la orientación, se calculan las relaciones esfuerzo-deformación para una variación de la orientación del material comprendida entre dos direcciones cristalinias fijas, que corresponden con los vértices de la proyección estereográfica estándar de la celda unitaria de la fase austenítica.

#### 3.1.1.-Monocristales sujetos a tensión

Es claro que las relaciones propuestas por las ecuaciones (2.53) representan la forma general de las relaciones constitutivas de los MMF sin embargo resultan un tanto complejas. No obstante, dichas relaciones pueden expresarse de manera más simple si se consideran variaciones de orientaciones bien definidas, típicamente encontradas en AMMF texturizadas, así como elementos del sistema de transformación concretos. Un caso especialmente interesante corresponde con un monocristal cuyo sistema de transformación es cercano a  $\{0\ 1\ 1\}/\langle 0\ \bar{1}\ 1\rangle$  el cual es orientado de tal manera que el eje  $[\bar{1}\ 0\ 0]$  se mantiene constante mientras que el eje de aplicación de la carga varía de la dirección  $[0\ 0\ 1]$  a  $[0\ 1\ 1]$ . Tomando como elemento de transformación al par  $(0\ 1\ 1)/[0\ \bar{1}\ 1]$  se definen los parámetros de cambio de base que se muestra en la Tabla 3.1 y que se muestran gráficamente en la Figura 3.1. Siguiendo la convención anterior, las ecuaciones constitutivas quedan como:

$$\mathcal{E}_T = \begin{pmatrix} -\frac{\nu_0}{MY_0} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{[-1-\nu+k(\nu_0-3)+(k-1)(1+\nu_0)\text{Cos}(4\theta)]\sigma_0}{4kMY} & -\frac{(k-1)(1+\nu)\text{Sen}(4\theta)\sigma_0}{4kMY} \\ 0 & -\frac{(k-1)(1+\nu)\text{Sen}(4\theta)\sigma_0}{4kMY} & \frac{[k-1-\nu_0-3k\nu_0+(k-1)(1+\nu_0)\text{Cos}(4\theta)]\sigma_0}{4kMY} \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \delta \text{Cos}(\theta) \text{Sen}(\theta) \zeta & \frac{1}{4} \delta \text{Cos}(2\theta) \zeta \\ 0 & \frac{1}{4} \delta \text{Cos}(2\theta) \zeta & \frac{1}{2} \delta \text{Cos}(\theta) \text{Sen}(\theta) \zeta \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \delta \zeta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\text{Cos}(\theta) \text{Sen}(\theta) & \frac{1}{2} \text{Cos}(2\theta) \\ 0 & \frac{1}{2} \text{Cos}(2\theta) & \text{Cos}(\theta) \text{Sen}(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

$$\zeta = \frac{y_c \text{Cos}(\theta) + z_c \text{Sen}(\theta)}{\sqrt{r_0^2 + y_c^2 \text{Cos}^2(\theta) + z_c^2 \text{Sen}^2(\theta) + y_c z_c \text{Sen}(2\theta)}} + \frac{fh - y_c \text{Cos}(\theta) - z_c \text{Sen}(\theta)}{\sqrt{f^2 h^2 + r_0^2 - 2fy_c \text{Cos}(\theta) + y_c^2 \text{Cos}^2(\theta) - 2fz_c \text{Sen}(\theta) + z_c^2 \text{Sen}^2(\theta) + y_c z_c \text{Sen}(2\theta)}} \quad (3.2)$$

Donde se aprecia que el término  $\zeta$  es una función de la fracción volumétrica transformada  $f$  y de la orientación. Así mismo, si  $r_0$  es muy pequeño entonces  $\zeta$  tiende a ser igual

$$\begin{aligned} \frac{y_c \text{Cos}(\theta) + z_c \text{Sen}(\theta)}{\sqrt{(y_c \text{Cos}(\theta) + z_c \text{Sen}(\theta))^2}} + \frac{fh - y_c \text{Cos}(\theta) - z_c \text{Sen}(\theta)}{\sqrt{(-fh + y_c \text{Cos}(\theta) + z_c \text{Sen}(\theta))^2}} &= \\ \frac{y_c \text{Cos}(\theta) + z_c \text{Sen}(\theta)}{\sqrt{(y_c \text{Cos}(\theta) + z_c \text{Sen}(\theta))^2}} + \frac{fh - y_c \text{Cos}(\theta) - z_c \text{Sen}(\theta)}{\sqrt{[-(fh - y_c \text{Cos}(\theta) - z_c \text{Sen}(\theta))]^2}} &= 2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

De donde es claro que la deformación transformacional tiende a:

$$\mathcal{E}_{tr} = \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\text{Cos}(\theta) \text{Sen}(\theta) & \frac{1}{2} \text{Cos}(2\theta) \\ 0 & \frac{1}{2} \text{Cos}(2\theta) & \text{Cos}(\theta) \text{Sen}(\theta) \end{pmatrix} = \delta R_0 \quad (3.4)$$

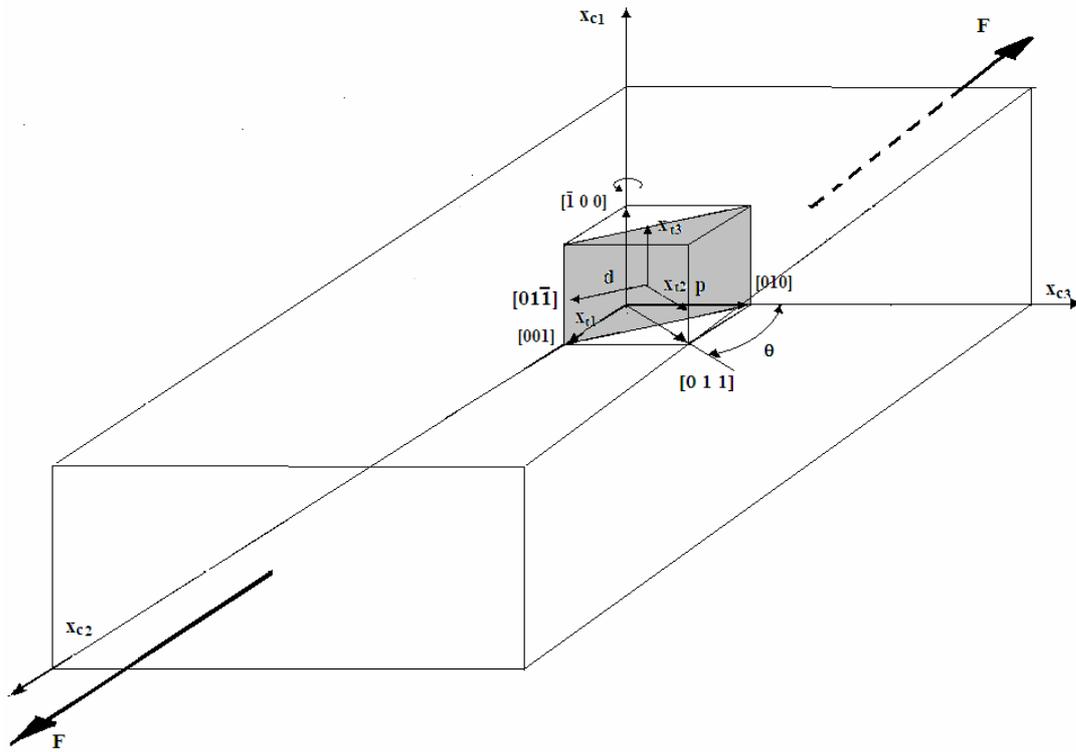


Figura 3.1. Diagrama que muestra los parámetros del caso de estudio.

Tabla 3.1. Definición de parámetros para el caso de estudio

Sistema de observación							
$\{e_{r_{01}}\}_X$	$\{e_{r_{02}}\}_X$	$\{e_{r_{03}}\}_X$	$\{e_{r_{f1}}\}_X$	$\{e_{r_{f2}}\}_X$	$\{e_{r_{f3}}\}_X$	$R_{XC}$	$R_X$
$\begin{pmatrix} \bar{1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \bar{1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bar{1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{Cos}(\theta) & \text{Sen}(\theta) \\ 0 & -\text{Sen}(\theta) & \text{Cos}(\theta) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{Cos}(\theta) & -\text{Sen}(\theta) \\ 0 & \text{Sen}(\theta) & \text{Cos}(\theta) \end{pmatrix}$
Sistema de transformación $(0 \ 1 \ 1) / [0 \ \bar{1} \ 1]$							
$\{e_{r_1}\}_X$	$\{e_{r_2}\}_X$		$\{e_{r_3}\}_X$				

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \bar{1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
---------------------------------------------------	---------------------------------------------	---------------------------------------------

Como se puede ver en la ecuación (3.4) la deformación transformacional puede ser expresada como el producto de la magnitud del cortante por un tensor que representa la orientación de material lo cual corresponde con la ecuación (1.5) propuesta por Patoor para la deformación transformacional máxima generada por una sola variante de martensita que se forma en el material [4]. De hecho si tomamos del campo tensorial (3.4) el elemento correspondiente con la deformación normal en la dirección de aplicación de la carga ( $\epsilon_{yc}$ ) se obtiene:

$\epsilon_{yc} = -\delta \text{Cos}(\theta) \text{Sen}(\theta)$  donde:  $\text{Cos}(\theta) \text{Sen}(\theta)$  es el factor del Schmid  $m$  puesto que para este caso:

$$m = (R_x \{e_{2r}\}_x, \{e_{1r}\}_x) (R_x \{e_{2r}\}_x, \{e_{2r}\}_x) = \text{Cos}(\theta) \text{Sen}(\theta) \quad (3.5)$$

Donde, como se puede ver en la Tabla 4.1:

$$\{e_{1r}\}_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \{e_{2r}\}_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \{e_{3r}\}_x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

$$R_x \{e_{2r}\}_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{Cos}(\theta) & -\text{Sen}(\theta) \\ 0 & \text{Sen}(\theta) & \text{Cos}(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{Cos}(\theta) - \text{Sen}(\theta) \\ \text{Sen}(\theta) + \text{Cos}(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Así mismo, es claro que el Factor de Schmid es igual a  $\frac{1}{2}$  cuando  $\theta = \frac{\pi}{4}$ . Lo cual fue referido por Patoor para un caso de tensión uniaxial [4].

No obstante lo anterior, es evidente que la deformación transformacional máxima no se alcanza de súbito en el material, más bien, como indica la ecuación (1.1), va incrementando conforme crece  $f$  y alcanza el valor máximo cuando  $f=1$ .

Para aclarar lo anterior, a continuación se calcula de la deformación normal media (o deformación ingenieril) empleando el campo de desplazamientos cuyo gradiente define el campo tensorial de deformación transformacional (3.1):

$$u(X_c) = \Omega \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \delta \text{Sen}(\theta) \\ \frac{1}{2} \delta \text{Cos}(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\Omega = fh + \sqrt{r_0^2 + y_c^2 \text{Cos}^2(\theta) + z_c^2 \text{Sen}^2(\theta) + z_c y_c \text{Sen}(2\theta) - \sqrt{f^2 h^2 + r_0^2 - 2fhy_c \text{Cos}(\theta) + y_c^2 \text{Cos}^2(\theta) - 2fhz_c \text{Sen}(\theta) + z_c^2 \text{Sen}^2(\theta) + z_c y_c \text{Sen}(2\theta)}} \quad (3.8)$$

El cual, se observa claramente que cuando  $r_0$  es muy pequeño, tiende a:

$$u(X_c) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \delta \text{Sen}(\theta) \left[ fh + \sqrt{(y_c \text{Cos}(\theta) + z_c \text{Sen}(\theta))^2} - \sqrt{(-fh + y_c \text{Cos}(\theta) + z_c \text{Sen}(\theta))^2} \right] \\ \frac{1}{2} \delta \text{Cos}(\theta) \left[ fh + \sqrt{(y_c \text{Cos}(\theta) + z_c \text{Sen}(\theta))^2} - \sqrt{(-fh + y_c \text{Cos}(\theta) + z_c \text{Sen}(\theta))^2} \right] \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Luego, tomando término  $u_2$ , evaluándolo en el punto  $(0, y_c, 0)$  y dividiéndolo por  $y_c$  se calcula la deformación ingenieril en la dirección de la aplicación de la carga como:

$$e_{rr} = -\frac{\left( fh + \sqrt{y_c^2 \text{Cos}^2(\theta)} - \sqrt{(-fh + y_c \text{Cos}(\theta))^2} \right) \delta \text{Sen}(\theta)}{2y_c} = \frac{fh \delta \text{Sen}(\theta)}{y_c} \quad (3.10)$$

De la ecuación anterior se ve que si  $y_c$  es igual con  $h / \text{Cos}[\theta]$  entonces se obtiene que:

$$e_{rr} = -f \delta \text{Cos}(\theta) \text{Sen}(\theta) = -\frac{f \delta \text{sen}(2\theta)}{2} \quad (3.11)$$

Expresión que haciendo  $\delta = g$  y  $R = -\text{Cos}(\theta) \text{Sen}(\theta) = -\frac{\text{sen}(2\theta)}{2}$  corresponde con la ecuación

(1.1) propuesta por Patoor et al [4] para describir la evolución de la transformación. Cabe mencionar que Otsuka y Wayman [1] han empleado una ecuación similar, que obtienen al simplificar la ecuación comúnmente empleada para calcular la deformación por maclado, para aproximar la deformación transformacional total en pruebas de tensión simple.

El significado del valor  $y_c = h / \text{Cos}[\theta]$  se ve claramente en la Figura 3.2 en donde se puede apreciar que dicho valor corresponde con la proyección de  $h$  sobre el eje de aplicación de la carga. Es importante mencionar que  $h$  es la altura máxima que puede alcanzar la franja de martensita en el material. Así mismo si en la ecuación (3.10) se sustituye un valor de  $y_c > h / \text{Cos}[\theta]$  el valor de  $e_{rr}$  disminuirá respecto al de la ecuación (3.11) lo cual corresponde con un incremento en la longitud base de medición en una prueba de tensión uniaxial empleando un extensómetro mecánico de puntas.

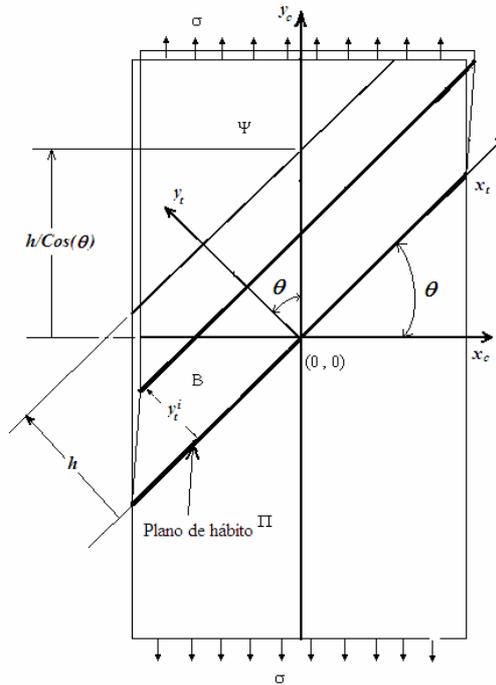


Figura 3.2. Proyección de  $h$  sobre el eje de aplicación de la carga.

Un resultado importante que se deriva de la ecuación (3.11) es la determinación de la función  $A(f)$  que se mencionó en la sección 1.1.2.1 donde se afirma que para un caso de temperatura constante la deformación debe cumplir con la expresión:

$$\frac{d\varepsilon}{d\sigma} = \frac{Rg}{A(f)} R \quad (3.12)$$

De donde, empleando (3.11) se obtiene que  $A(f)$  es:

$$A(f) = \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial T} (M_f - M_s) m^2}{2 \ln(9)(1-f)f} \quad (3.13)$$

Por otro lado, es importante mencionar que el resultado descrito por la ecuación (3.11) es muy útil debido a que permite expresar de manera muy sencilla la deformación transformacional en caso de tensión uniaxial. No obstante es necesario tener en cuenta que el elemento de transformación que se empleó para el caso abordado en estudio no corresponde con los que se han reportado en la literatura para diversas AMMF como: Cu-Al-Ni, Ni-Al y NiTi [11-13]. Como se describe posteriormente, para dichas AMMF la ecuación (3.11) cumple para orientaciones que varían de la dirección  $[0 \ 0 \ 1]$  a la  $[0 \ 1 \ 1]$  aún cuando los elementos de transformación son totalmente diferentes a los considerados en el caso hipotético. Lo anterior, hace de este caso de estudio muy relevante ya que es el más simple y ha sido referido tanto por la de Patoor [4] y Oztuka [1,19].

Cabe destacar que para otras variaciones de orientaciones como las que van de las direcciones  $[0 \ 0 \ 1]$  a la  $[1 \ 1 \ 1]$  así como de  $[0 \ 1 \ 1]$  a la  $[1 \ 1 \ 1]$ , la relación (3.11)

no cumple. En la Figura 3.3 se presenta una serie de gráficas donde se muestra la distribución de la deformación normal  $\varepsilon_{yc}$  a lo largo del eje de aplicación de la carga correspondiente a diferentes orientaciones, empleando las ecuaciones (2.73), así como la deformación calculada con la ecuación (3.11). En dicha Figura se aprecia claramente que la relación (3.11) cumple, con buena aproximación, sólo para orientaciones cercanas a la familia que va de la dirección  $[0 \ 0 \ 1]$  a la  $[0 \ 1 \ 1]$ .

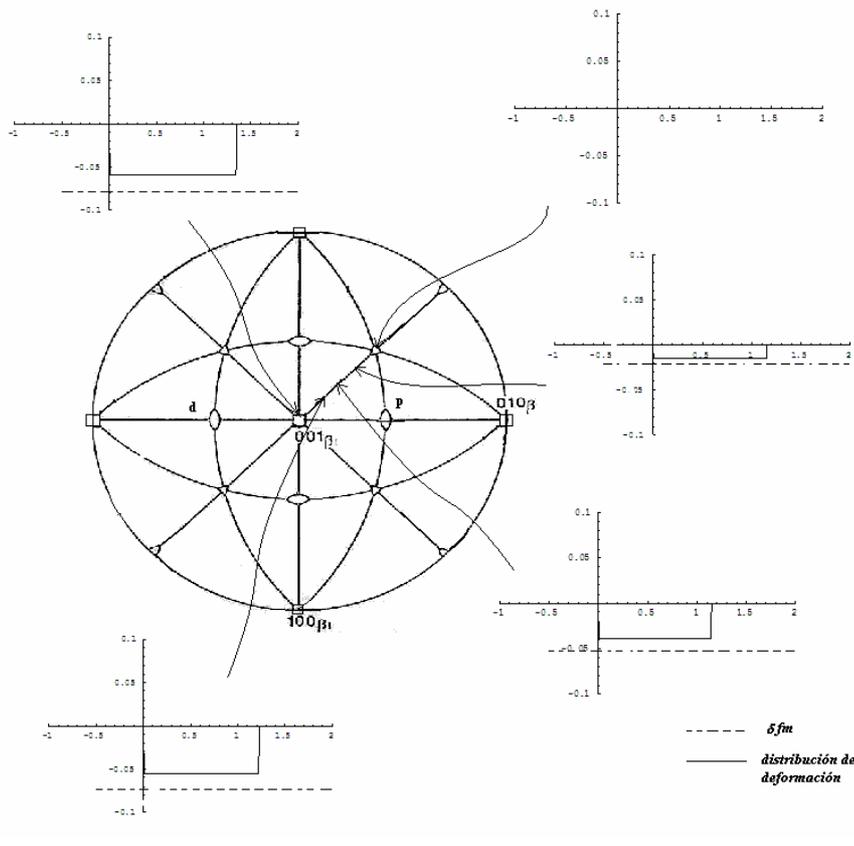
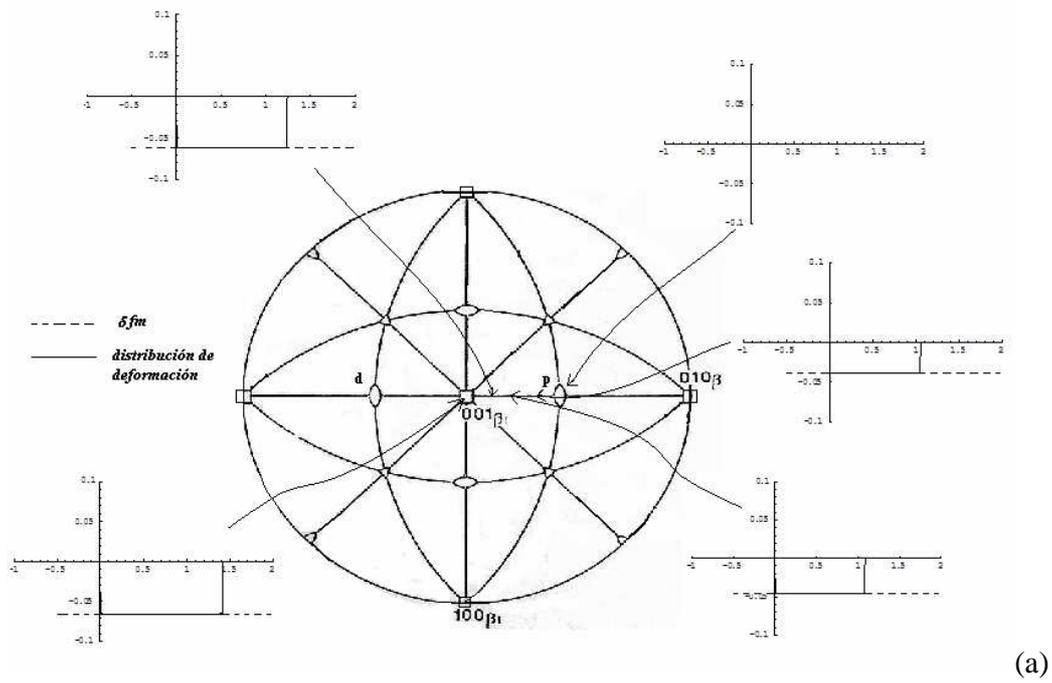
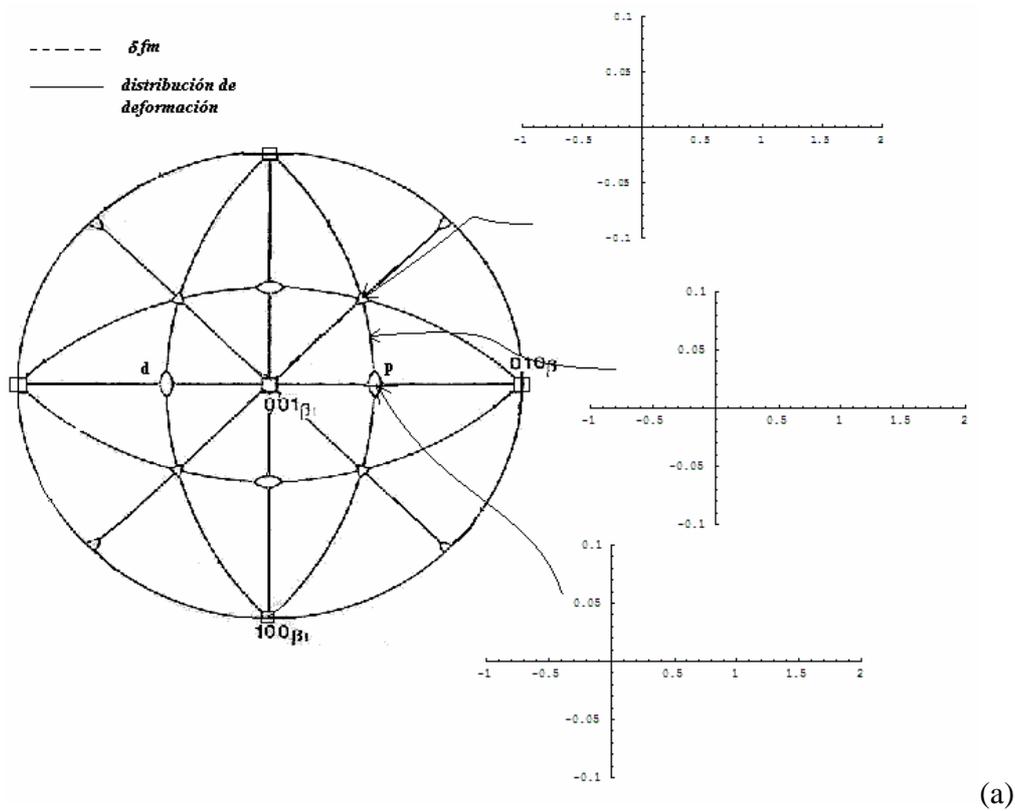
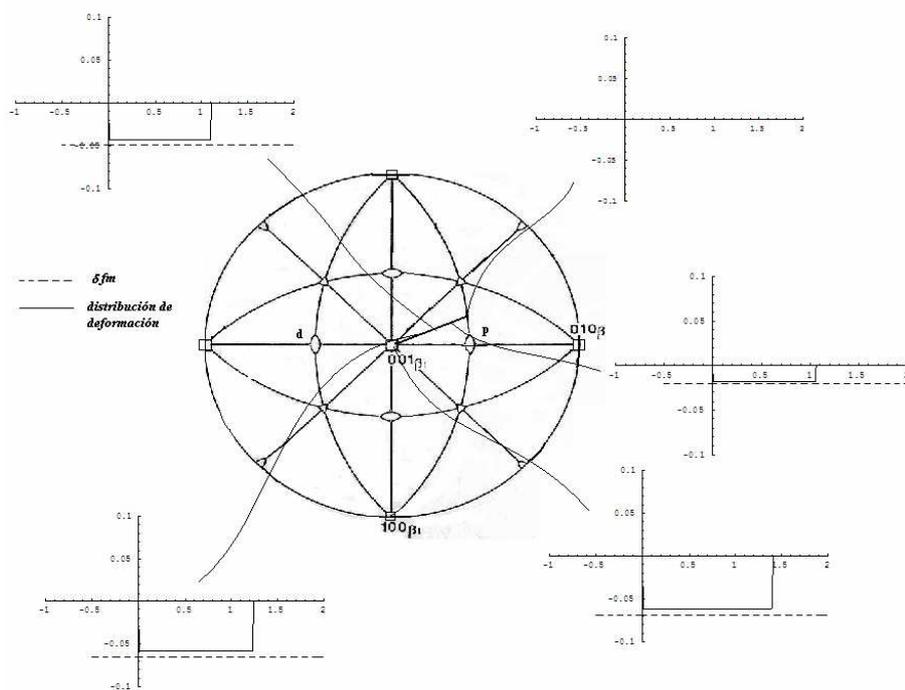


Figura 3.3. Diagramas estereográficos, correspondientes a la fase austenítica, que muestra la distribución de la deformación a lo largo del eje de aplicación de la carga ( $\epsilon_{yc}$ ) comparada con la deformación calculada empleando la ecuación (3.11): (a) orientaciones entre  $[0\ 0\ 1]$  y  $[0\ 1\ 1]$ ; (b) orientaciones entre  $[0\ 0\ 1]$  a  $[\bar{1}\ 1\ 1]$

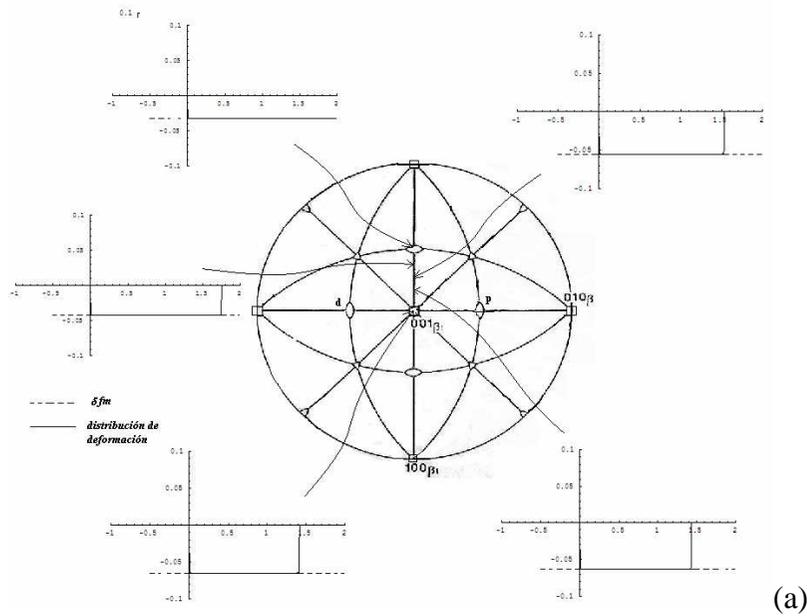


(a)

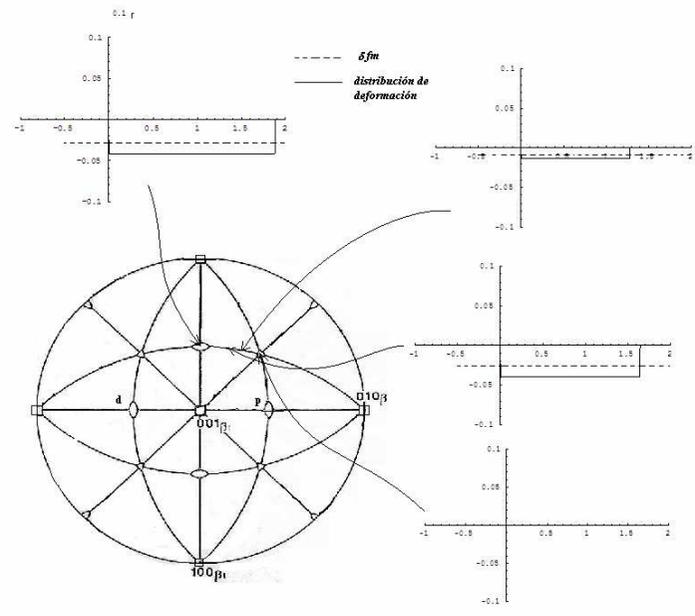


(b)

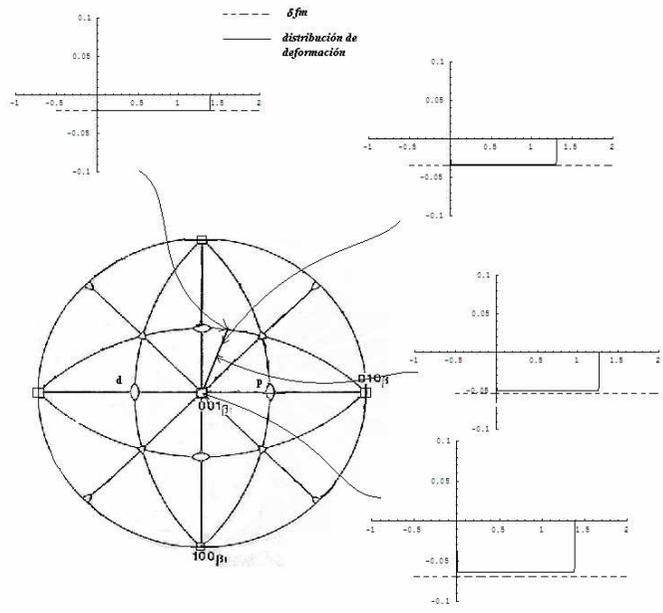
Figura 3.4. Figura 3.3. Diagramas estereográficos, correspondientes a la fase austenítica, que muestra la distribución de la deformación a lo largo del eje de aplicación de la carga ( $\epsilon_{yc}$ ) comparada con la deformación calculada empleando la ecuación (3.11). Orientaciones entre  $[0 \ 1 \ 1]$  y  $[\bar{1} \ 1 \ 1]$ ; (b) orientaciones entre  $[0 \ 0 \ 1]$  y  $[-0.35 \ 0.65 \ 0.65]$



(a)



(b)



(c)

Figura 3.5. Diagramas estereográficos, correspondientes a la fase austenítica, que muestra la distribución de la deformación a lo largo del eje de aplicación de la carga ( $\epsilon_{yc}$ ) comparada con la deformación calculada empleando la ecuación (3.11). a) Orientaciones entre  $[0\ 0\ 1]$  y  $[\bar{1}\ 0\ 1]$ ; b) Orientaciones entre  $[\bar{1}\ 0\ 1]$  y  $[\bar{1}\ 1\ 1]$ ; c) Orientaciones entre  $[0\ 0\ 1]$  y  $[-0.65\ 0.35\ 0.65]$

### 3.1.1.1 Simulación

Otro resultado que se presenta a continuación, también para el caso hipotético mencionado en la sección anterior, es el cálculo y graficación de los patrones de distorsión de la superficie de observación, de una marca testigo y del campo de desplazamientos asociado. Como se mencionó, esta información es de suma importancia para interpretar los resultados obtenidos empleando TAEE ya que permiten determinar de manera precisa los cambios que se presentan en la superficie de una muestra durante la TM.

En las Figuras 3.6, 3.7 y 3.9 se muestran: a) el campo de desplazamientos, b) la distorsión que sufrirá un círculo dibujado sobre la superficie del observación, c) la distorsión de la superficie de observación y d) la curva deformación transformacional máxima-temperatura para tres orientaciones típicas del eje de aplicación de la carga, cuyos parámetros se muestran en la Tabla 3.2. Las imágenes mencionadas corresponden con la formación de una sola variante de martensita al someter una muestra de un MMF a esfuerzo constante y enfriamiento. Como se muestra más adelante la misma simulación puede realizarse para un caso en el que se forma variantes paralelas.

Tabla 3.2. Parámetros empleados para simular los campos que se muestran en las Figuras 3.6, 3.7 y 3.8.

Eje de aplicación de la carga	Esfuerzo aplicado (MPa)	Magnitud del cortante	Elemento de transformación	$M_S$ (°C)	$M_f$ (°C)	Razón de esfuerzo (MPa/°C)	Intervalo de prueba (°C)
$[0 \ 0 \ 1]$	100	-0.13	$(0 \ 1 \ 1)/[0 \ \bar{1} \ 1]$	-20	-40	2	$-50 \leq T \leq 50$
$[0 \ 1 \ 1]$	“	“	“	“	“	“	“
$[\bar{1} \ 0 \ 1]$	“	“	“	“	“	“	“
$[0.\bar{3}5 \ 0.66 \ 0.66]$	“	“	“	“	“	“	“

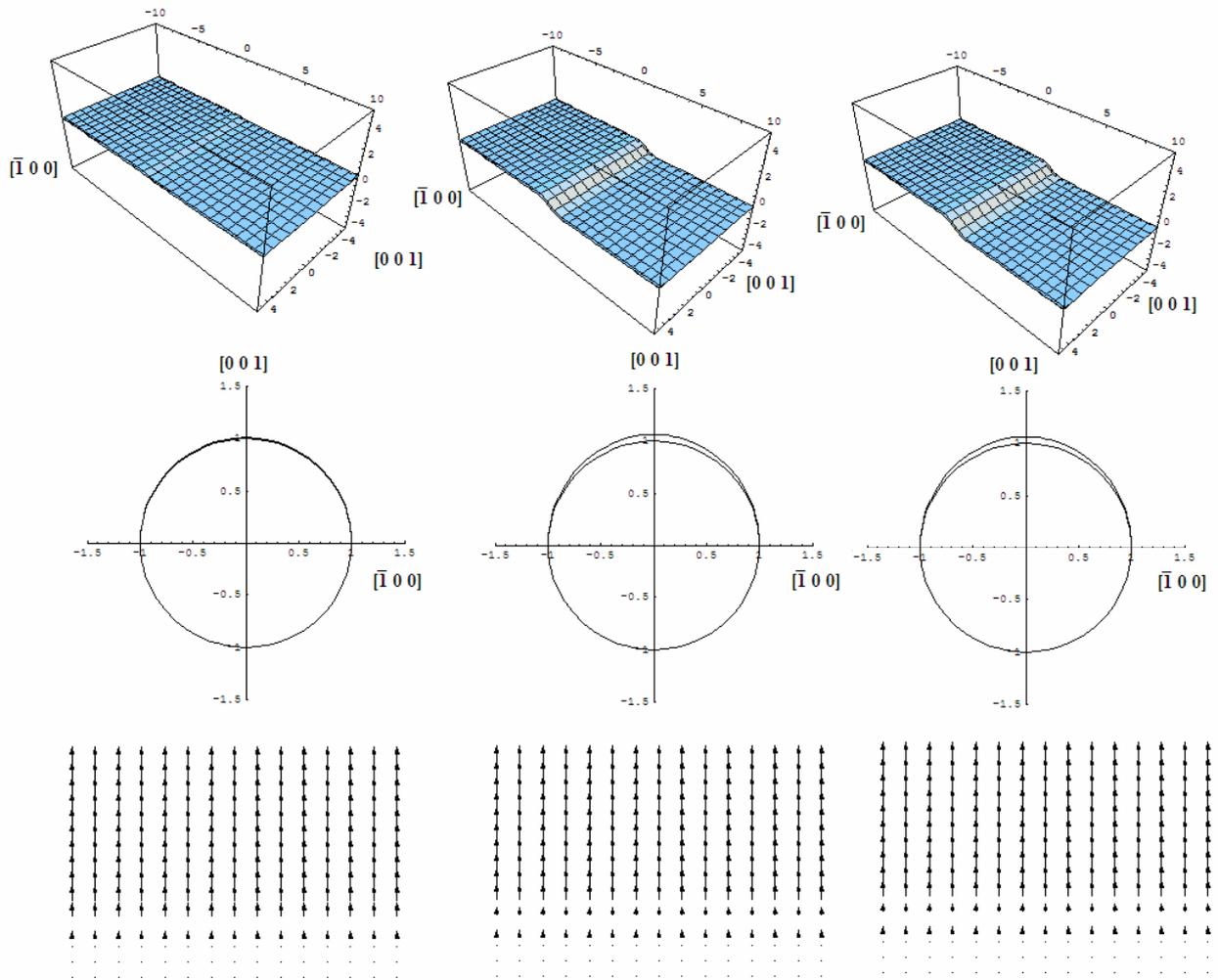


Figura 3.6. Simulación de la transformación martensítica inducida al aplicar un esfuerzo constante de 100MPa y enfriarla desde 50 °C hasta -50 °C. (a)  $T=T_1 > M^{\sigma}_{ss}$ , (b)  $T=T_2 < M^{\sigma}_{ss}$ , (c)  $T_3 < T_2$ , (d)  $T_4 < T_3$  y (d) Curva deformación-temperatura correspondiente.

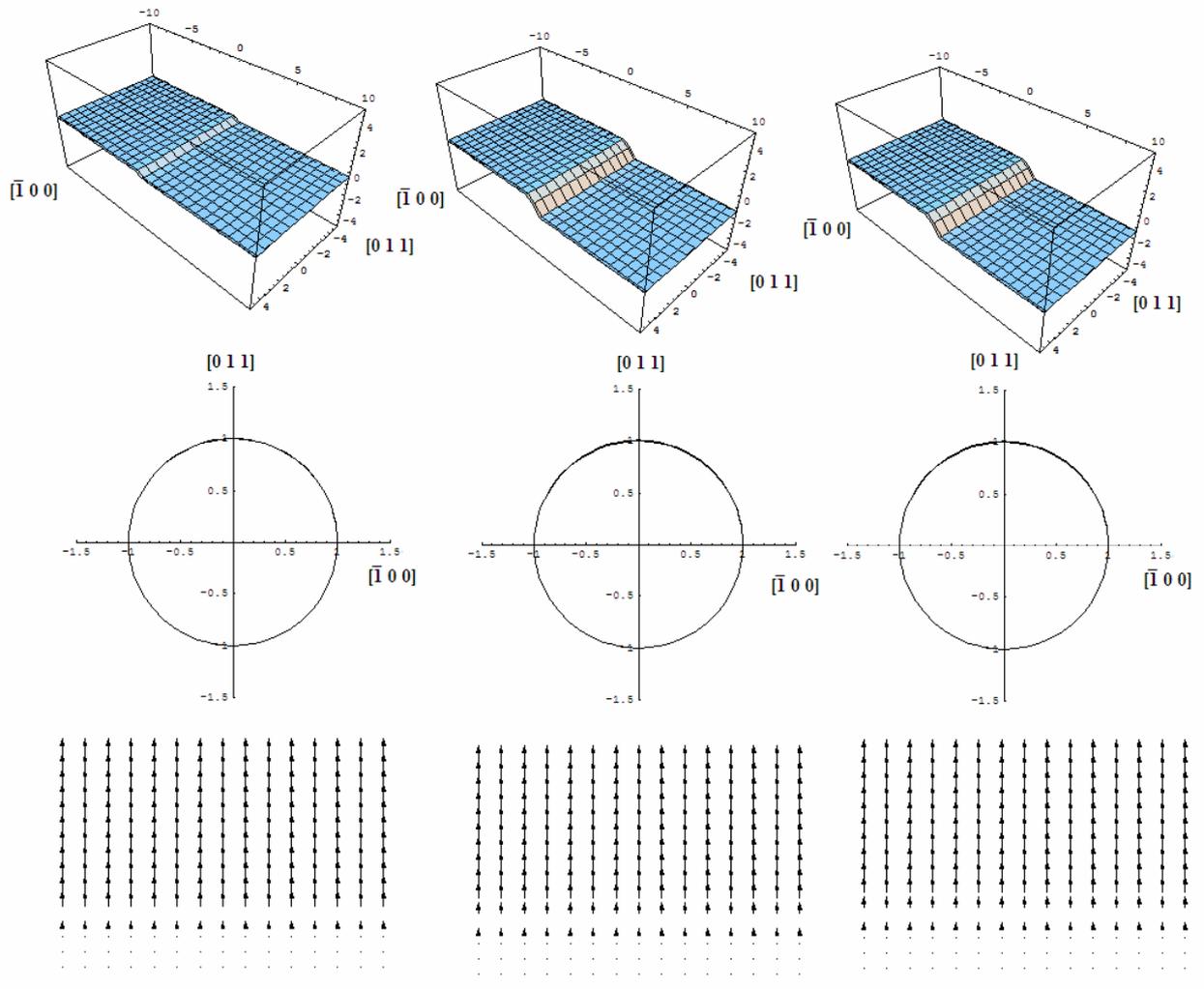


Figura 3.7. Simulación de la transformación martensítica inducida al aplicar un esfuerzo constante de 100MPa y enfriarla desde 50 hasta  $-50$ . (a)  $T=T_1 > M_s^{\sigma}$ , (b)  $T=T_2 < M_s^{\sigma}$ , (c)  $T_3 < T_2$ , (d)  $T_4 < T_3$  y (d) Curva deformación-temperatura correspondiente.

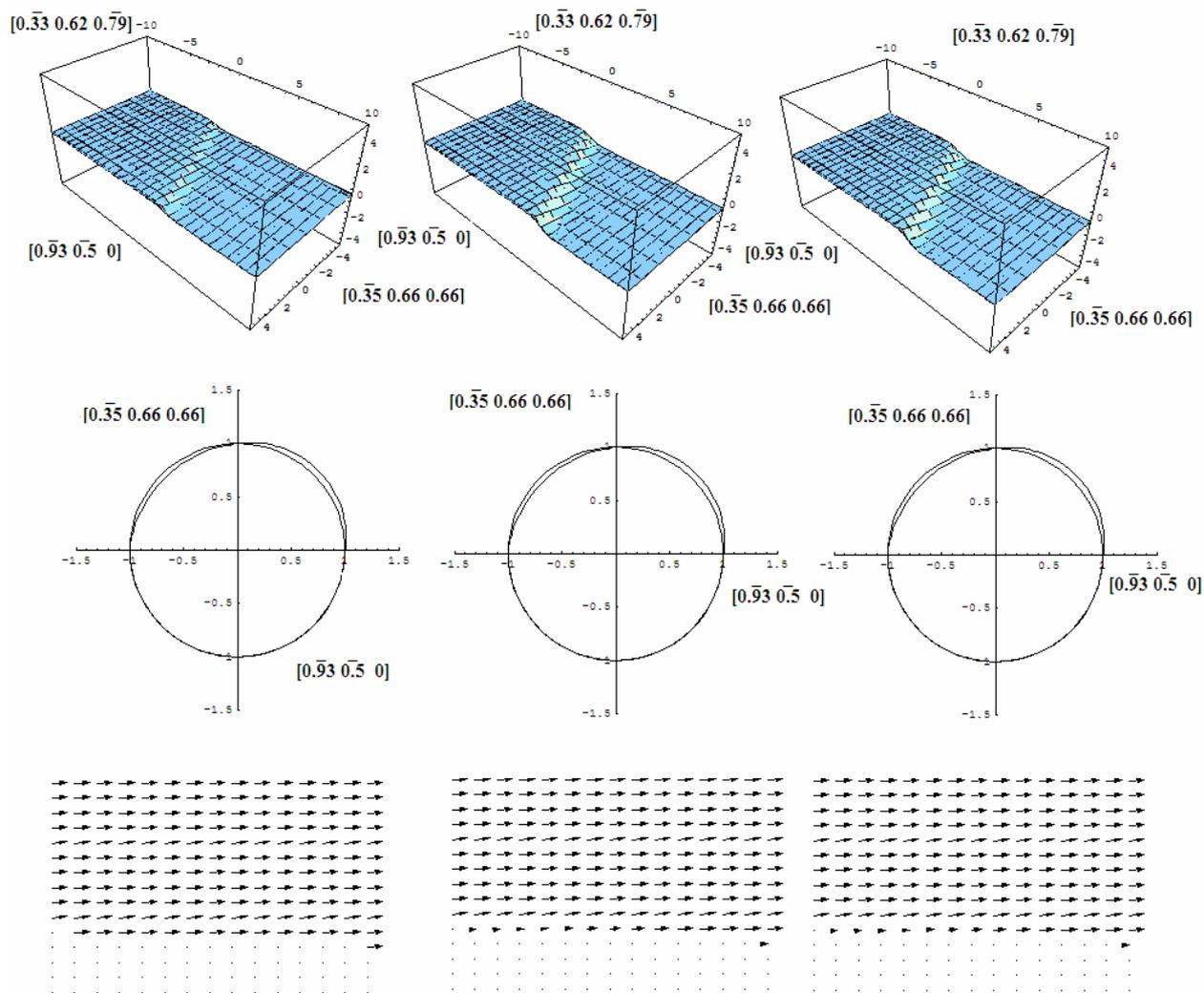


Figura 3.8. Simulación de la transformación martensítica inducida al aplicar un esfuerzo constante de 100MPa y enfriarla desde 50 hasta  $-50$ .: (a)  $T=T_1 > M_s^{\sigma}$ , (b)  $T=T_2 < M_s^{\sigma}$ , (c)  $T_3 < T_2$ , (d)  $T_4 < T_3$  y (d) Curva deformación-temperatura correspondiente.

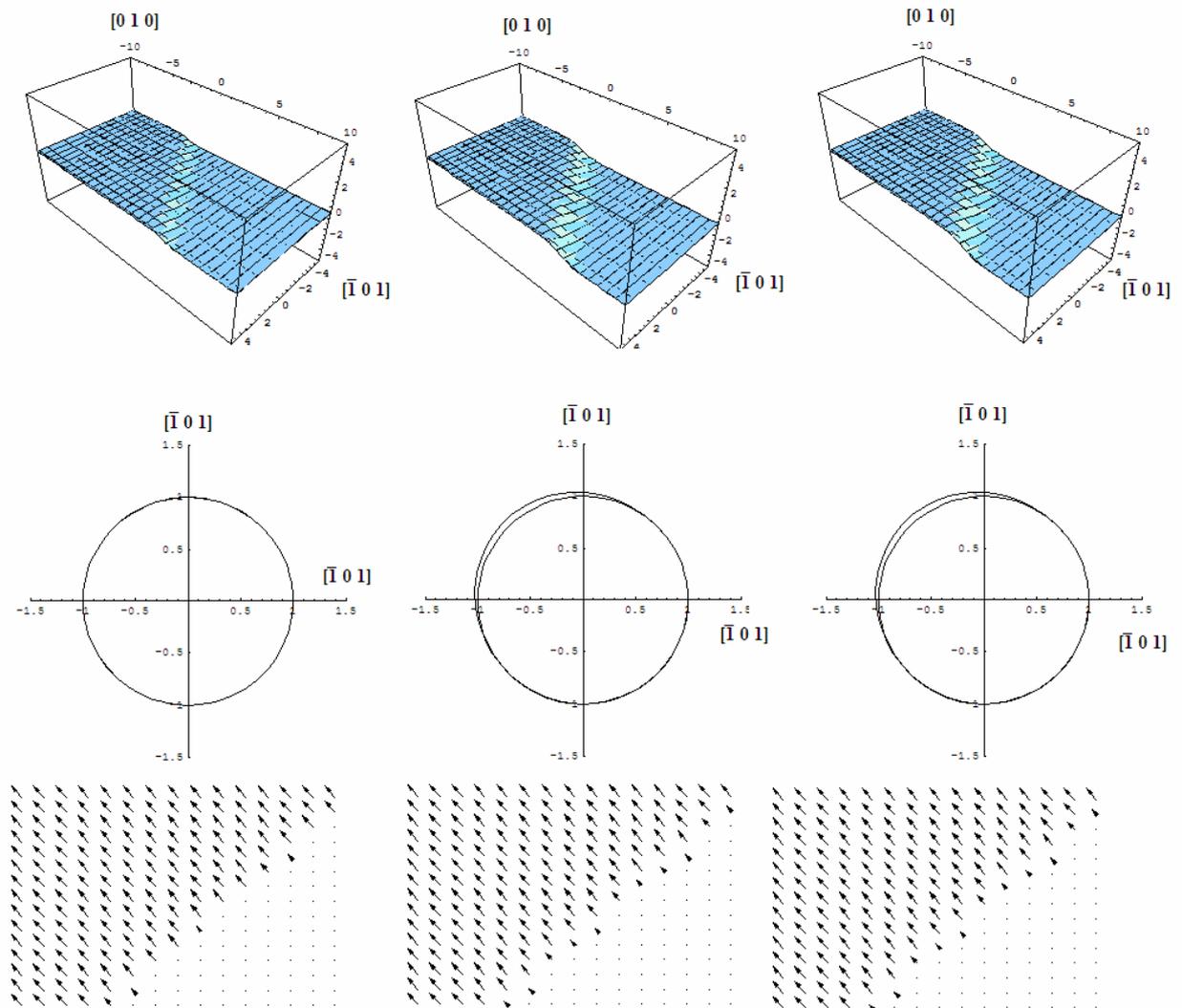


Figura 3.9. Simulación de la transformación martensítica inducida al aplicar un esfuerzo constante de 100MPa y enfriarla desde 50 hasta  $-50$ .: (a)  $T=T_1 > M_s^{\sigma}$ , (b)  $T=T_2 < M_s^{\sigma}$ , (c)  $T_3 < T_2$ , (d)  $T_4 < T_3$  y (e) Curva deformación-temperatura correspondiente.

Las gráficas de las Figuras 3.6 a la 3.9 revelan aspectos importantes que pueden ser empleados para interpretar información proveniente de observaciones experimentales. Entre los aspectos relevantes se encuentran:

- La línea que se forma en la superficie de observación corresponde con la intersección del plano de hábito con el plano de observación.
- El ángulo que forma la línea descrita en el inciso anterior con la dirección del eje de aplicación de la carga puede mantenerse para una gama de orientaciones por lo que no

es un criterio único para interpretar la imagen de microscopio óptico. En la Figura 3.10 se muestran los patrones de distorsión para una gama de orientaciones en las que el ángulo que forma la línea de intersección del plano de hábito con la del plano de observación es el mismo así como la dirección del desplazamiento. En este caso, la magnitud del desplazamiento es menor conforme cambia la orientación por lo que es necesario medirlo para distinguir la orientación del material.

- c) La dirección de los vectores del campo de desplazamientos corresponde con la dirección en la que se presenta la distorsión de la marca testigo. Es importante observar que la deformación es más evidente en la distorsión de la marca testigo por lo que para analizar la deformación puede resultar más conveniente dicho patrón que el campo de desplazamientos. Es claro que si se coloca un extensómetro eléctrico en la región donde fue dibujada la marca testigo, éste medirá sólo la componente normal de la deformación en la dirección de su eje longitudinal pero con mayor precisión que si se mide directamente de la imagen.

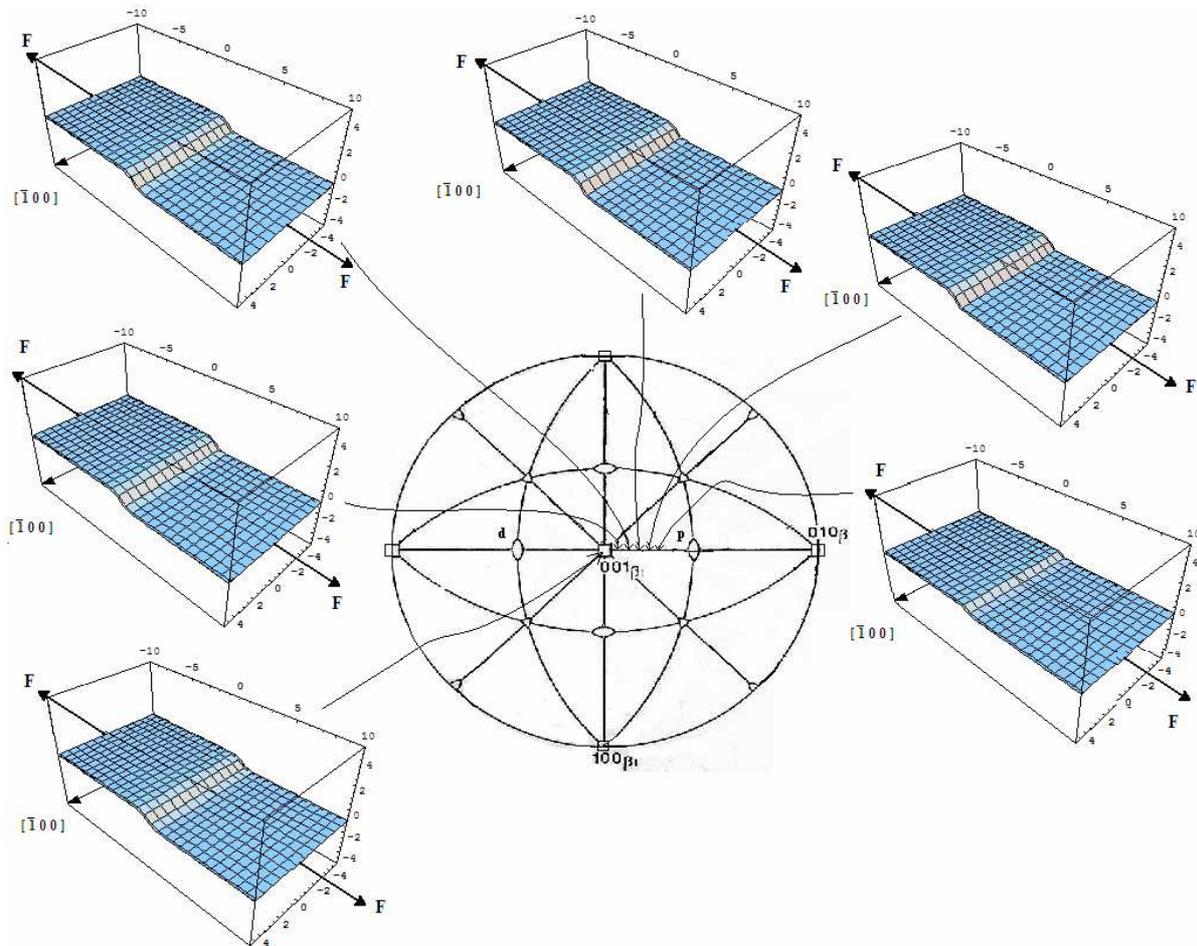


Figura 3.10. Simulación del comportamiento para una gama de orientaciones particular en la cual la dirección de campo de desplazamientos y el ángulo entre la línea de relieve y la dirección del eje de aplicación de la carga son iguales.

Por otro lado, para simular los patrones descritos en las Figuras 3.6 a la 3.9, para un caso en el que se forman variantes paralelas, es necesario corregir el modelo de las ecuaciones (2.73), modificando la relación (2.73d) para “n” número de variantes paralelas, es decir re-definiendo la función  $w(y_t)$  de (2.32a) de tal forma que se obtenga un comportamiento como el que se muestra en la Figura 3.11.

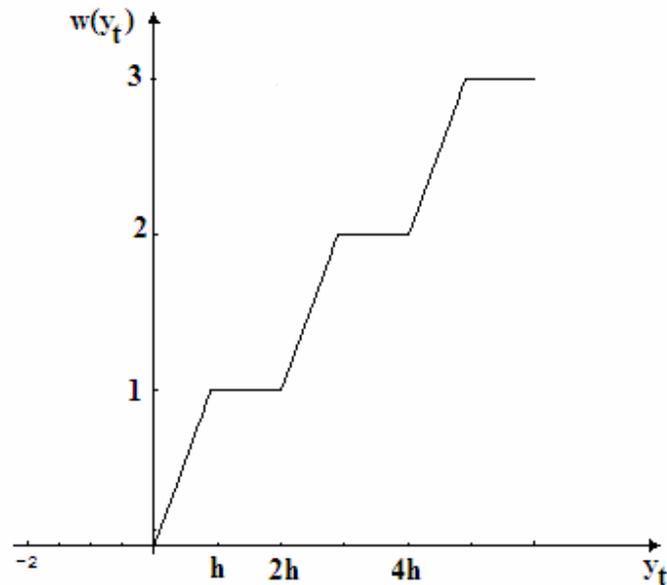


Figura 3.11. Curva  $w-y_t$  para el caso de 3 variantes paralelas.

El comportamiento de  $w(y_t)$  que se muestra en la Figura 3.11 se puede obtener aplicando la ecuación (2.32a) para cada escalón de la Figura 3.10 lo cual conduce a las siguientes ecuaciones:

Para el primer escalón:

$$w(y) = w_1 + \left[ m_0 - \frac{w_1 - w_0}{y_1 - y_{01}} + \frac{1}{2} \left( -m_0 + \frac{w_1 - w_0}{y_1 - y_{01}} \right) \right] (y_t - y_{01}) + \left[ \frac{w_1 - w_0}{y_1 - y_{01}} + \frac{1}{2} \left( m_1 - \frac{w_1 - w_0}{y_1 - y_{01}} \right) \right] (y_t - y_1) + \frac{1}{2} \left( -m_0 + \frac{w_1 - w_0}{y_1 - y_{01}} \right) \sqrt{r_0^2 + (y_t - y_{01})^2} + \frac{1}{2} \left( -m_1 + \frac{w_1 - w_0}{y_1 - y_{01}} \right) \sqrt{r_1^2 + (y_t - y_1)^2} \quad (3.14)$$

Para dos escalones:

$$\begin{aligned}
w(y) = & 2w_1 + \left[ m_0 - \frac{w_1 - w_0}{y_1 - y_{01}} + \frac{1}{2} \left( -m_0 + \frac{w_1 - w_0}{y_1 - y_{01}} \right) \right] (y_t - y_{01}) + \left[ m_0 - \frac{w_1 - w_0}{y_2 - y_{02}} + \frac{1}{2} \left( -m_0 + \frac{w_1 - w_0}{y_2 - y_{02}} \right) \right] (y_t - y_{02}) + \\
& \left[ \frac{w_1 - w_0}{y_1 - y_{01}} + \frac{1}{2} \left( m_1 - \frac{w_1 - w_0}{y_1 - y_{01}} \right) \right] (y_t - y_1) + \left[ \frac{w_1 - w_0}{y_2 - y_{02}} + \frac{1}{2} \left( m_1 - \frac{w_1 - w_0}{y_2 - y_{02}} \right) \right] (y_t - y_2) + \\
& \frac{1}{2} \left( -m_0 + \frac{w_1 - w_0}{y_1 - y_{01}} \right) \sqrt{r_0^2 + (y_t - y_{01})^2} + \frac{1}{2} \left( -m_0 + \frac{w_1 - w_0}{y_2 - y_{02}} \right) \sqrt{r_0^2 + (y_t - y_2)^2} + \frac{1}{2} \left( -m_1 + \frac{w_1 - w_0}{y_1 - y_{01}} \right) \sqrt{r_1^2 + (y_t - y_1)^2} + \\
& \frac{1}{2} \left( -m_1 + \frac{w_1 - w_0}{y_2 - y_{02}} \right) \sqrt{r_1^2 + (y_t - y_2)^2}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Para 3 escalones:

$$\begin{aligned}
w(y) = & 3w_1 + \left[ m_0 - \frac{w_1 - w_0}{y_1 - y_{01}} + \frac{1}{2} \left( -m_0 + \frac{w_1 - w_0}{y_1 - y_{01}} \right) \right] (y_t - y_{01}) + \left[ m_0 - \frac{w_1 - w_0}{y_2 - y_{02}} + \frac{1}{2} \left( -m_0 + \frac{w_1 - w_0}{y_2 - y_{02}} \right) \right] (y_t - y_{02}) + \\
& \left[ m_0 - \frac{w_1 - w_0}{y_3 - y_{03}} + \frac{1}{2} \left( -m_0 + \frac{w_1 - w_0}{y_3 - y_{03}} \right) \right] (y_t - y_{03}) + \\
& \left[ \frac{w_1 - w_0}{y_1 - y_{01}} + \frac{1}{2} \left( m_1 - \frac{w_1 - w_0}{y_1 - y_{01}} \right) \right] (y_t - y_1) + \left[ \frac{w_1 - w_0}{y_2 - y_{02}} + \frac{1}{2} \left( m_1 - \frac{w_1 - w_0}{y_2 - y_{02}} \right) \right] (y_t - y_2) + \left[ \frac{w_1 - w_0}{y_3 - y_{03}} + \frac{1}{2} \left( m_1 - \frac{w_1 - w_0}{y_3 - y_{03}} \right) \right] (y_t - y_3) + \\
& \frac{1}{2} \left( -m_0 + \frac{w_1 - w_0}{y_1 - y_{01}} \right) \sqrt{r_0^2 + (y_t - y_{01})^2} + \frac{1}{2} \left( -m_0 + \frac{w_1 - w_0}{y_2 - y_{02}} \right) \sqrt{r_0^2 + (y_t - y_{02})^2} + \frac{1}{2} \left( -m_0 + \frac{w_1 - w_0}{y_3 - y_{03}} \right) \sqrt{r_0^2 + (y_t - y_{03})^2} + \\
& \frac{1}{2} \left( -m_1 + \frac{w_1 - w_0}{y_1 - y_{01}} \right) \sqrt{r_1^2 + (y_t - y_1)^2} + \frac{1}{2} \left( -m_1 + \frac{w_1 - w_0}{y_2 - y_{02}} \right) \sqrt{r_1^2 + (y_t - y_2)^2} + \frac{1}{2} \left( -m_1 + \frac{w_1 - w_0}{y_3 - y_{03}} \right) \sqrt{r_1^2 + (y_t - y_3)^2}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

De donde se ve claro que las expresiones anteriores conducen a la siguiente ecuación generalizada para "n" variantes paralelas:

$$\begin{aligned}
w(y) = & \sum_{i=1}^n iw_1 + \left[ m_0 - \frac{w_1 - w_0}{y_i - y_{0i}} + \frac{1}{2} \left( -m_0 + \frac{w_1 - w_0}{y_i - y_{0i}} \right) \right] (y - y_{0i}) + \left[ \frac{w_1 - w_0}{y_i - y_{0i}} + \frac{1}{2} \left( m_1 - \frac{w_1 - w_0}{y_i - y_{0i}} \right) \right] (y - y_i) + \\
& \frac{1}{2} \left( -m_0 + \frac{w_1 - w_0}{y_i - y_{0i}} \right) \sqrt{r_0^2 + (y - y_{0i})^2} + \frac{1}{2} \left( m_1 - \frac{w_1 - w_0}{y_i - y_{0i}} \right) \sqrt{r_0^2 + (y - y_i)^2}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

La cual, considerando que:  $\frac{w_1 - w_0}{y_i - y_{0i}} = \frac{w_1 - w_0}{y_1 - y_0} = \frac{1}{fn}$  para cualquier i entonces la ecuación anterior queda como:

$$\begin{aligned}
w(y) &= \sum_{i=1}^n iw_1 + \left[ m_0 - \frac{w_1 - w_0}{y_1 - y_0} + \frac{1}{2} \left( -m_0 + \frac{w_1 - w_0}{y_1 - y_0} \right) \right] \sum_{i=1}^n (y - y_{0i}) + \left[ \frac{w_1 - w_0}{y_1 - y_0} + \frac{1}{2} \left( m_1 - \frac{w_1 - w_0}{y_1 - y_0} \right) \right] \sum_{i=1}^n (y - y_i) + \\
&\frac{1}{2} \left( -m_0 + \frac{w_1 - w_0}{y_1 - y_0} \right) \sum_{i=1}^n \sqrt{r_0^2 + (y - y_{0i})^2} + \frac{1}{2} \left( m_1 - \frac{w_1 - w_0}{y_1 - y_0} \right) \sum_{i=1}^n \sqrt{r_0^2 + (y - y_i)^2} \\
&= \sum_{i=1}^n iw_1 - \frac{1}{2} \frac{1}{fh} \sum_{i=1}^n (y - y_{0i}) + \frac{1}{2} \frac{1}{fh} \sum_{i=1}^n (y - y_i) + \frac{1}{2} \frac{1}{fh} \sum_{i=1}^n \sqrt{r_0^2 + (y - y_{0i})^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{fh} \sum_{i=1}^n \sqrt{r_0^2 + (y - y_i)^2} \\
&= \sum_{i=1}^n iw_1 + \frac{1}{2} \frac{1}{fh} \left[ \sum_{i=1}^n (y - y_i) - \sum_{i=1}^n \sqrt{r_0^2 + (y - y_i)^2} + \sum_{i=1}^n \sqrt{r_0^2 + (y - y_{0i})^2} - \sum_{i=1}^n (y - y_{0i}) \right] \\
i &= 1, 2, 3, 4, \dots
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Los resultados presentados hasta este punto muestran que el modelo desarrollado es útil para calcular el comportamiento del material en una dirección dada y la variación de este al cambiar dicha orientación. Así mismo, el modelo permite determinar las orientaciones del material en las cuales se puede obtener la máxima deformación transformacional lo cual puede ser muy útil para optimizar el diseño de dispositivos que emplean MMF.

Es claro también que empleando el modelo, es posible determinar la orientación cristalina del material a partir de observaciones de la deformación obtenidas al utilizar técnicas de análisis de imágenes lo puede resultar de gran utilidad para estimar el comportamiento del material al someterlo a determinada carga.

### 3.1.2.- Monocristales en flexión

Es claro que en muchas aplicaciones, los arreglos de flexión y flexión-torsión resultan muy convenientes para el aprovechamiento de las propiedades de los MMF por lo que en la presente sección se estudia un arreglo de flexión.

A continuación se presenta la simulación del comportamiento termomecánico de un elemento monocristalino sujeto a flexión en cantilever con carga puntual constante en el extremo libre que es enfriado desde una temperatura superior a  $A_f$  hasta una inferior a  $M_f$ . Las características de la muestra hipotética, así como los parámetros geométricos de la misma se muestran en la Figura 3.12. El elemento de transformación que se emplea en este caso es por simplicidad el  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

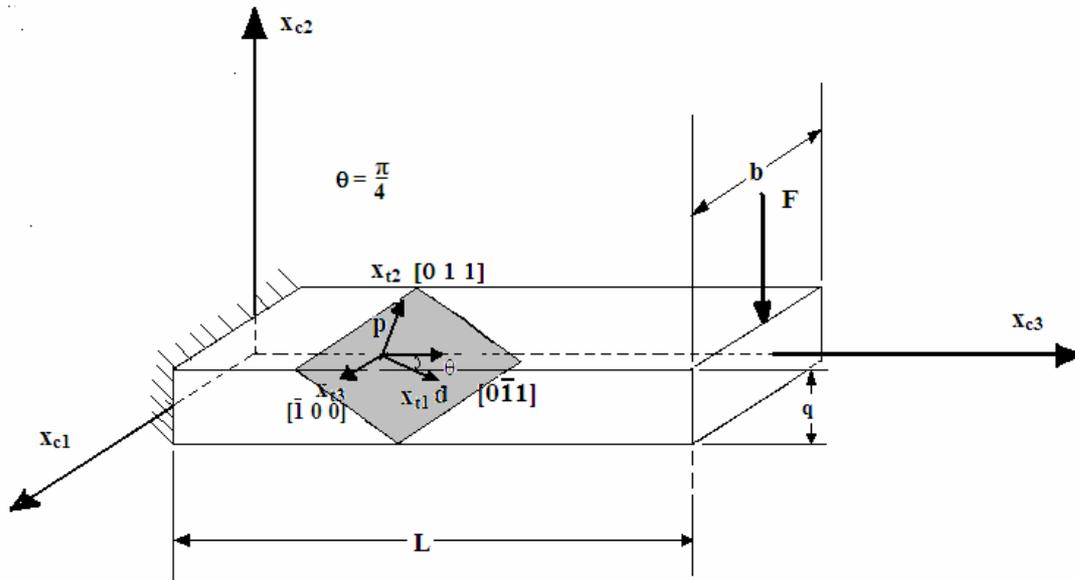


Figura 3.12. Características de la muestra hipotética estudiada en la presente sección.

Como se sabe, a diferencia del arreglo de tensión uniaxial, en el caso de flexión el campo tensorial de esfuerzos no es constante sino un campo biaxial. Considerando lo anterior, el primer paso para el análisis de un elemento en flexión es determinar la variante de martensita que se formará en el material, para lo cual, se considera el estado de esfuerzos referido al sistema de observación y se calcula el esfuerzo de corte para cada elemento del sistema de transformación. Es claro que el elemento de transformación seleccionado será aquel donde el esfuerzo de corte resulte mayor. Para el caso de estudio, la determinación de la variante de martensita se realiza empleando las ecuaciones 2.64 y 2.66 con el campo tensorial de esfuerzos referido a la base de observación es decir:

$$T_{XC} = \begin{pmatrix} \sigma_{xc} & \tau_{xcyc} & 0 \\ \tau_{xcyc} & \sigma_{yc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F(L-x_c)y_c}{I} & \frac{F\left(y_c^2 - \frac{q^2}{4}\right)}{2I} & 0 \\ \frac{F\left(y_c^2 - \frac{q^2}{4}\right)}{2I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Donde:

$$I = \frac{bq^3}{12}$$

Como se puede ver, para resolver el problema del monocristal en flexión, se está partiendo de que es conocido el campo tensorial de esfuerzos por lo que el procedimiento de solución consiste en determinar el campo de deformaciones y el campo de desplazamientos. Es claro que el procedimiento común consistiría en calcular las deformaciones empleando las relaciones esfuerzo-deformación, que en este caso es la ecuación (3.1). En dicha ecuación, el término transformacional es función del esfuerzo efectivo el cual, en este caso a diferencia del caso en tensión uniaxial, es función de la posición. Como se mencionó anteriormente, el material iniciará la transformación cuando el esfuerzo de corte alcance el valor crítico lo cual nos conduce a reemplazar en la ecuación (2.73e), el término  $\sigma$  por  $\tau$ . Luego, para calcular el esfuerzo transformacional se procede a transformar el campo tensorial de esfuerzos dado por 2.19 aplicando la ecuación de transformación (2.62) haciendo  $\tau$  igual a  $\tau_{xyt}$  en la ecuación (2.73e).

Siguiendo el procedimiento anterior, una vez calculado el campo tensorial de esfuerzos es posible el campo tensorial de deformaciones, sin embargo, el modelo desarrollado nos permite calcular directamente el campo de desplazamientos empleando la ecuación (2.73a). Una vez determinado el campo de desplazamientos es posible calcular la deformación y con ello es posible simular la distorsión que sufriría el elemento durante la transformación.

Es importante mencionar que se ha observado experimentalmente que en MMF monocristalinos sujetos a flexión se forman variantes paralelas, las cuales van apareciendo y creciendo conforme el esfuerzo, generado en cada punto, alcanza el valor crítico de transformación. Este efecto es considerado por el modelo propuesto en el presente trabajo ya que, como se mencionó en el párrafo anterior, el esfuerzo transformacional es función de la posición. Debido a lo anterior, es claro que la transformación iniciará en aquellos puntos donde el esfuerzo inducido por la carga aplicada alcance el valor crítico lo cual desde luego no ocurre al mismo tiempo en todas partes.

Para conseguir el efecto de formación de variantes paralelas es necesario definir el campo de desplazamientos (2.73) para regiones a través de la muestra donde la aparición de una variante de martensita ocurra cuando el esfuerzo de corte  $\tau_{xyt}$  alcance el valor crítico. Una vez que aparece la variante de martensita en una región determinada del material, ésta sufrirá una distorsión que afectará a la región contigua desplazándola rígidamente en tanto no aparezca en ella una variante de martensita. Luego, a la distorsión generada por la siguiente variante debe agregarse el desplazamiento rígido generado por la variante anterior. Para el caso de estudio que se aborda en la presente sección, se consideraron 4 regiones a lo largo del eje longitudinal de la viga de la Figura 3.12.

Para calcular la deformación en cada región es necesario re-definir apropiadamente la función  $w(y_t)$ , de la ecuación 2.32a, de tal manera que se forme una variante en el interior de cada región. Para ello se consideran que la longitud de cada región, a lo largo del eje de longitudinal de la viga, es un múltiplo “ $h$ ” para lo cual se definen los siguientes parámetros:

Primera región:

$$\begin{aligned}
w_{01} &= m_{01} = r_{01} = r_{11} = 0 \\
y_{01} &= a1h \\
y_{11} &= hf + a1h \\
w_{11} &= 1
\end{aligned}
\tag{3.20(a)}$$

segunda región:

$$\begin{aligned}
w_{02} &= m_{02} = r_{02} = r_{12} = 0 \\
y_{02} &= b1h \\
y_{12} &= hf + b1h \\
w_{12} &= 1
\end{aligned}
\tag{3.20(b)}$$

tercera región

$$\begin{aligned}
w_{03} &= m_{03} = r_{03} = r_{13} = 0 \\
y_{03} &= c1h \\
y_{13} &= hf + c1h \\
w_{13} &= 1
\end{aligned}
\tag{3.20(c)}$$

cuarta región

$$\begin{aligned}
w_{04} &= m_{04} = r_{04} = r_{14} = 0 \\
y_{04} &= d1h \\
y_{14} &= hf + d1h \\
w_{14} &= 1
\end{aligned}
\tag{3.20(d)}$$

Donde:

$(y_{0i}, w_{0i})$ ,  $(y_{1i}, w_{1i})$  son las coordenadas, definidas en la base  $e_t$ , de los puntos de inflexión de las curvas  $w(y_t)$  correspondientes a cada región;  $f$  es el parámetro que define la fracción volumétrica transformada en cada región;  $r_{0i} = r_{1i}$  son el radio de curvatura de la interface austenita-martensita. En la Figura 3.13 se muestran las curvas  $w(y_t)$  para cada región en donde se aprecia claramente que la doble hipérbola se desplazan a lo largo del eje  $y_t$ .

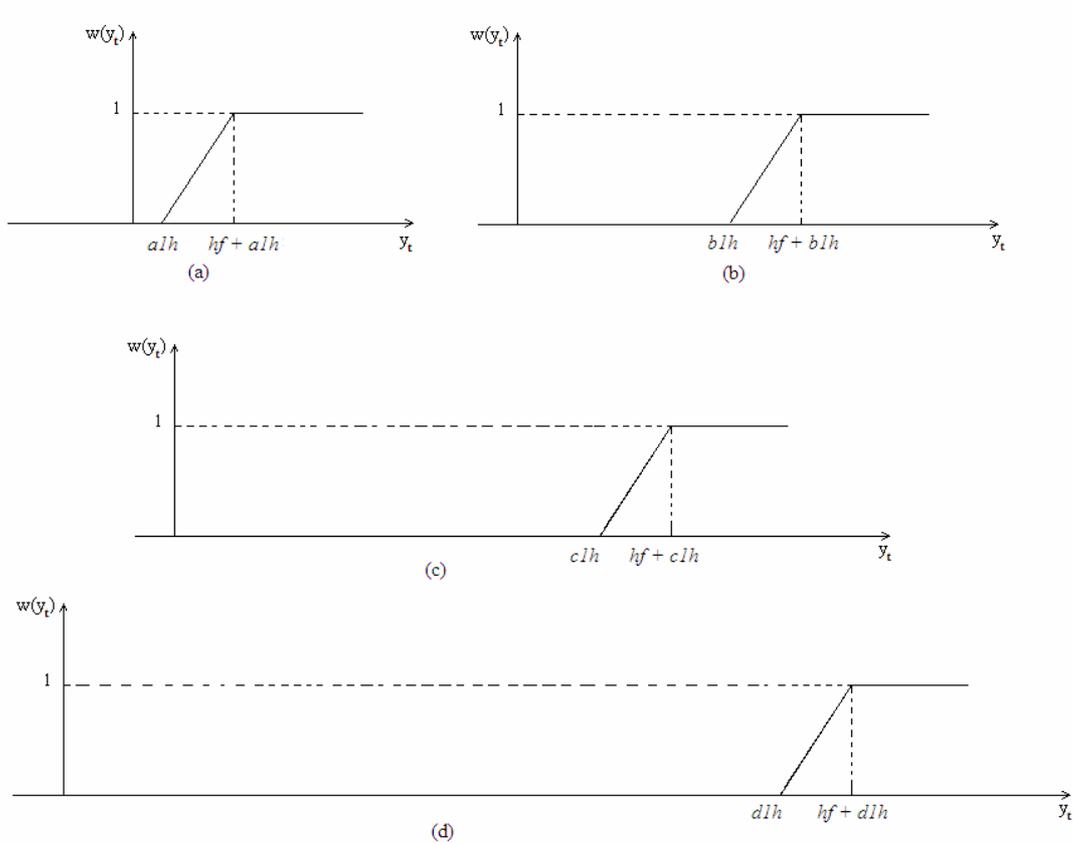


Figura 3.13. Función  $w(y_t)$  definida para las regiones: (a) primera, (b) segunda, (c) tercera y (d) cuarta.

En la Figura 3.14 se muestra la distorsión (amplificada) que sufre la viga al ser sometida a una carga constante de 10 N y enfriada desde una temperatura mayor que  $A_f$  hasta otra inferior a  $M_f$ . Los campos de desplazamientos asociados a cada una de las 4 regiones son:

Región 1

$$u(y_c) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ -\frac{1}{2} \delta \text{Sen}(\theta) \left[ fh + \sqrt{(-a1h + y_c \text{Cos}(\theta) + z_c \text{Sen}(\theta))^2} - \sqrt{(-(a1h + f)h + y_c \text{Cos}(\theta) + z_c \text{Sen}(\theta))^2} \right] \\ \frac{1}{2} \delta \text{Cos}(\theta) \left[ fh + \sqrt{(-a1h + y_c \text{Cos}(\theta) + z_c \text{Sen}(\theta))^2} - \sqrt{(-(a1h + f)h + y_c \text{Cos}(\theta) + z_c \text{Sen}(\theta))^2} \right] \end{array} \right\} \quad 3.21$$

Región 2

$$u(y_c) = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vartheta_1 - \vartheta_2 \\ \varsigma_1 + \varsigma_2 \end{Bmatrix}$$

$$\vartheta_1 = -\frac{1}{2} \delta \text{Sen}(\theta) \left[ fh + \sqrt{\left(-a1h + yc1 \text{Cos}(\theta) + \frac{1}{2} d \text{Sen}(\theta)\right)^2} - \sqrt{\left(-(a1h + f)h + yc1 \text{Cos}(\theta) + \frac{1}{2} d \text{Sen}(\theta)\right)^2} \right]$$

$$\vartheta_2 = \frac{1}{2} \delta \text{Sen}(\theta) \left[ fh + \sqrt{\left(-b1h + yc \text{Cos}(\theta) + z_c \text{Sen}(\theta)\right)^2} - \sqrt{\left(-(b1h + f)h + y_c \text{Cos}(\theta) + z_c \text{Sen}(\theta)\right)^2} \right]$$

$$\varsigma_1 = \frac{1}{2} \delta \text{Cos}(\theta) \left[ fh + \sqrt{\left(-a1h + yc1 \text{Cos}(\theta) + \frac{1}{2} d \text{Sen}(\theta)\right)^2} - \sqrt{\left(-(a1h + f)h + yc1 \text{Cos}(\theta) + \frac{1}{2} d \text{Sen}(\theta)\right)^2} \right]$$

$$\varsigma_2 = \frac{1}{2} \delta \text{Cos}(\theta) \left[ fh + \sqrt{\left(-b1h + y_c \text{Cos}(\theta) + z_c \text{Sen}(\theta)\right)^2} - \sqrt{\left(-(b1h + f)h + y_c \text{Cos}(\theta) + z_c \text{Sen}(\theta)\right)^2} \right]$$

3.22

Región 3

$$u(y_c) = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vartheta_1 - \vartheta_2 - \vartheta_3 \\ \varsigma_1 + \varsigma_2 + \varsigma_3 \end{Bmatrix}$$

$$\vartheta_1 = -\frac{1}{2} \delta \text{Sen}(\theta) \left[ fh + \sqrt{\left(-a1h + yc1 \text{Cos}(\theta) + \frac{1}{2} d \text{Sen}(\theta)\right)^2} - \sqrt{\left(-(a1h + f)h + yc1 \text{Cos}(\theta) + \frac{1}{2} d \text{Sen}(\theta)\right)^2} \right]$$

$$\vartheta_2 = \frac{1}{2} \delta \text{Sen}(\theta) \left[ fh + \sqrt{\left(-b1h + yc2 \text{Cos}(\theta) + \frac{1}{2} d \text{Sen}(\theta)\right)^2} - \sqrt{\left(-(b1h + f)h + yc2 \text{Cos}(\theta) + \frac{1}{2} d \text{Sen}(\theta)\right)^2} \right]$$

$$\vartheta_3 = \frac{1}{2} \delta \text{Sen}(\theta) \left[ fh + \sqrt{\left(-c1h + y_c \text{Cos}(\theta) + z_c \text{Sen}(\theta)\right)^2} - \sqrt{\left(-(b1h + f)h + y_c \text{Cos}(\theta) + z_c \text{Sen}(\theta)\right)^2} \right]$$

$$\varsigma_1 = \frac{1}{2} \delta \text{Cos}(\theta) \left[ fh + \sqrt{\left(-a1h + yc1 \text{Cos}(\theta) + \frac{1}{2} d \text{Sen}(\theta)\right)^2} - \sqrt{\left(-(a1h + f)h + yc1 \text{Cos}(\theta) + \frac{1}{2} d \text{Sen}(\theta)\right)^2} \right]$$

$$\varsigma_2 = \frac{1}{2} \delta \text{Cos}(\theta) \left[ fh + \sqrt{\left(-b1h + yc2 \text{Cos}(\theta) + \frac{1}{2} d \text{Sen}(\theta)\right)^2} - \sqrt{\left(-(b1h + f)h + yc2 \text{Cos}(\theta) + \frac{1}{2} d \text{Sen}(\theta)\right)^2} \right]$$

$$\varsigma_3 = \frac{1}{2} \delta \text{Cos}(\theta) \left[ fh + \sqrt{\left(-c1h + y_c \text{Cos}(\theta) + z_c \text{Sen}(\theta)\right)^2} - \sqrt{\left(-(c1h + f)h + y_c \text{Cos}(\theta) + z_c \text{Sen}(\theta)\right)^2} \right]$$

3.23

Región 4

$$u(y_c) = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vartheta_1 - \vartheta_2 - \vartheta_3 - \vartheta_4 \\ \varsigma_1 + \varsigma_2 + \varsigma_3 + \varsigma_4 \end{Bmatrix}$$

$$\vartheta_1 = -\frac{1}{2} \delta \text{Sen}(\theta) \left[ fh + \sqrt{\left(-a1h + y_c1 \text{Cos}(\theta) + \frac{1}{2} d \text{Sen}(\theta)\right)^2} - \sqrt{\left(-(a1h + f)h + y_c1 \text{Cos}(\theta) + \frac{1}{2} d \text{Sen}(\theta)\right)^2} \right]$$

$$\vartheta_2 = \frac{1}{2} \delta \text{Sen}(\theta) \left[ fh + \sqrt{\left(-b1h + y_c2 \text{Cos}(\theta) + \frac{1}{2} d \text{Sen}(\theta)\right)^2} - \sqrt{\left(-(b1h + f)h + y_c2 \text{Cos}(\theta) + \frac{1}{2} d \text{Sen}(\theta)\right)^2} \right]$$

$$\vartheta_3 = \frac{1}{2} \delta \text{Sen}(\theta) \left[ fh + \sqrt{\left(-c1h + y_c3 \text{Cos}(\theta) + \frac{1}{2} d \text{Sen}(\theta)\right)^2} - \sqrt{\left(-(c1h + f)h + y_c3 \text{Cos}(\theta) + \frac{1}{2} d \text{Sen}(\theta)\right)^2} \right]$$

$$\vartheta_4 = \frac{1}{2} \delta \text{Sen}(\theta) \left[ fh + \sqrt{\left(-d1h + y_c \text{Cos}(\theta) + z_c \text{Sen}(\theta)\right)^2} - \sqrt{\left(-(d1h + f)h + y_c \text{Cos}(\theta) + z_c \text{Sen}(\theta)\right)^2} \right]$$

$$\varsigma_1 = \frac{1}{2} \delta \text{Cos}(\theta) \left[ fh + \sqrt{\left(-a1h + y_c1 \text{Cos}(\theta) + \frac{1}{2} d \text{Sen}(\theta)\right)^2} - \sqrt{\left(-(a1h + f)h + y_c1 \text{Cos}(\theta) + \frac{1}{2} d \text{Sen}(\theta)\right)^2} \right]$$

$$\varsigma_2 = \frac{1}{2} \delta \text{Cos}(\theta) \left[ fh + \sqrt{\left(-b1h + y_c2 \text{Cos}(\theta) + \frac{1}{2} d \text{Sen}(\theta)\right)^2} - \sqrt{\left(-(b1h + f)h + y_c2 \text{Cos}(\theta) + \frac{1}{2} d \text{Sen}(\theta)\right)^2} \right]$$

$$\varsigma_3 = \frac{1}{2} \delta \text{Cos}(\theta) \left[ fh + \sqrt{\left(-c1h + y_c3 \text{Cos}(\theta) + \frac{1}{2} d \text{Sen}(\theta)\right)^2} - \sqrt{\left(-(c1h + f)h + y_c3 \text{Cos}(\theta) + \frac{1}{2} d \text{Sen}(\theta)\right)^2} \right]$$

$$\varsigma_4 = \frac{1}{2} \delta \text{Cos}(\theta) \left[ fh + \sqrt{\left(-d1h + y_c \text{Cos}(\theta) + z_c \text{Sen}(\theta)\right)^2} - \sqrt{\left(-(d1h + f)h + y_c \text{Cos}(\theta) + z_c \text{Sen}(\theta)\right)^2} \right]$$

3.24

donde:  $f$  está dada por la ecuación (2.73e) empleando  $\tau_{xyt}$  del campo de esfuerzos 3.19;  $h$  es el ancho de la variante de martensita medida a lo largo del eje  $y_i$ ;  $a1h$ ,  $b1h$ ,  $c1h$  y  $d1h$  son la posición, medida a lo largo del eje  $y_t$ , de cada una de las cuatro regiones;  $\theta$  es el ángulo que forma eje cristalino orientado a lo largo del eje longitudinal de la viga respecto a la dirección  $[0 \ 1 \ 1]$  como se muestra en la Figura 3.12.

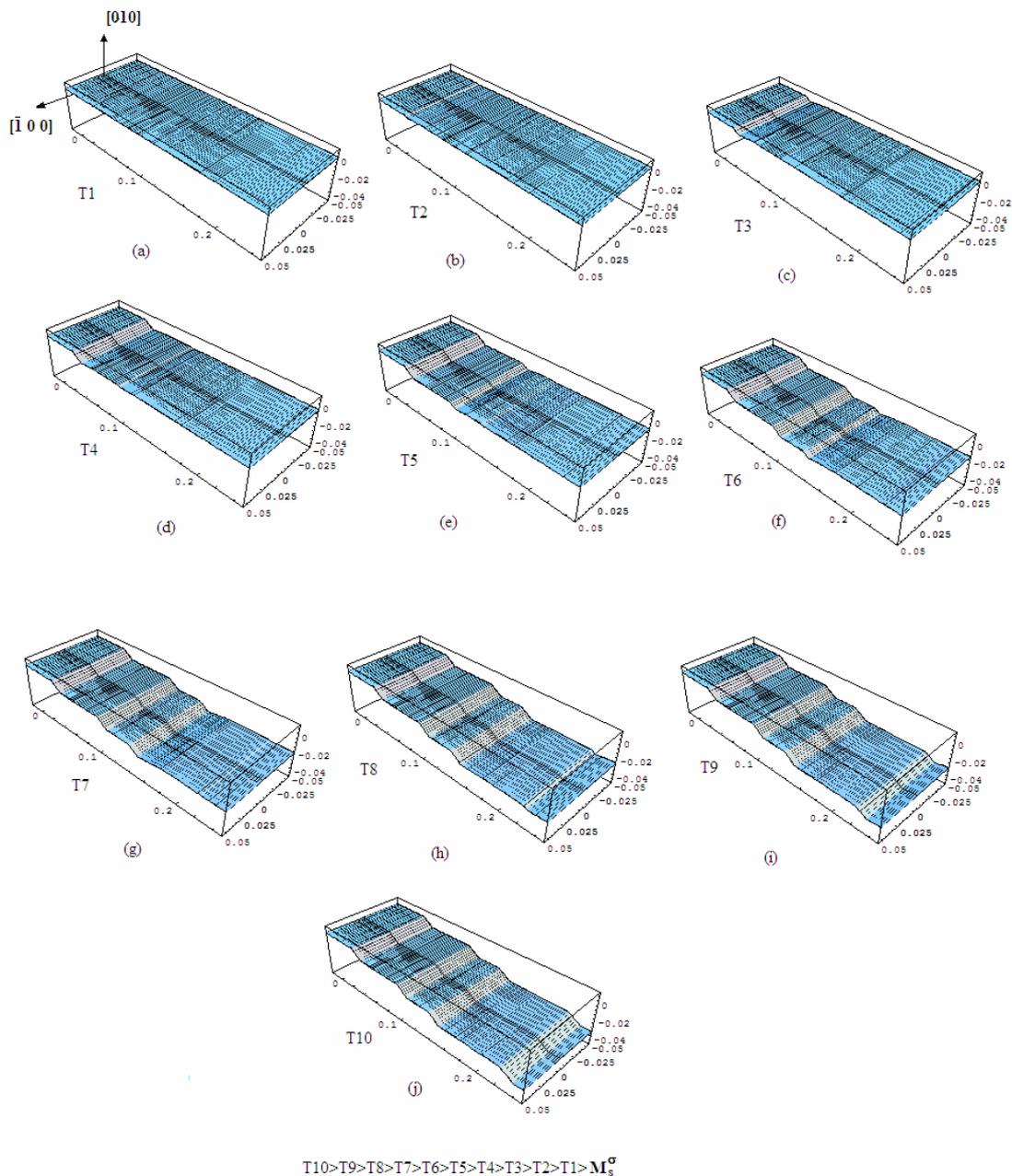


Figura 3.14. Distorsión que sufre una viga sujeta a flexión en cantilever con carga puntual constante y enfriamiento.

Es claro que una vez determinado el campo de desplazamientos es posible calcular el desplazamiento que sufrirá cualquier punto en la muestra. El cálculo de la curva

desplazamiento-temperatura para el punto de aplicación de la carga resulta importante debido a que se puede obtener experimentalmente de manera muy simple [45].

Para calcular la curva desplazamiento-temperatura para el punto de aplicación de la carga se emplea la ecuación 3.24 evaluándola en el punto  $(x_c, y_c, z_c)=(0, L, \pm d/2)$ . Como se puede ver si la relación esfuerzo-deformación se escribe de tal manera que la orientación del material se encuentra entre dos orientaciones predeterminadas, como es el caso de la ecuación 4.1, es posible determinar la orientación en la que se obtendrá el máximo desplazamiento del punto de aplicación de la carga.

En la Figura 3.15 se muestran una serie de curvas desplazamiento-temperatura correspondientes al punto de aplicación de la carga para distintas orientaciones denotada por el ángulo  $\theta$ .

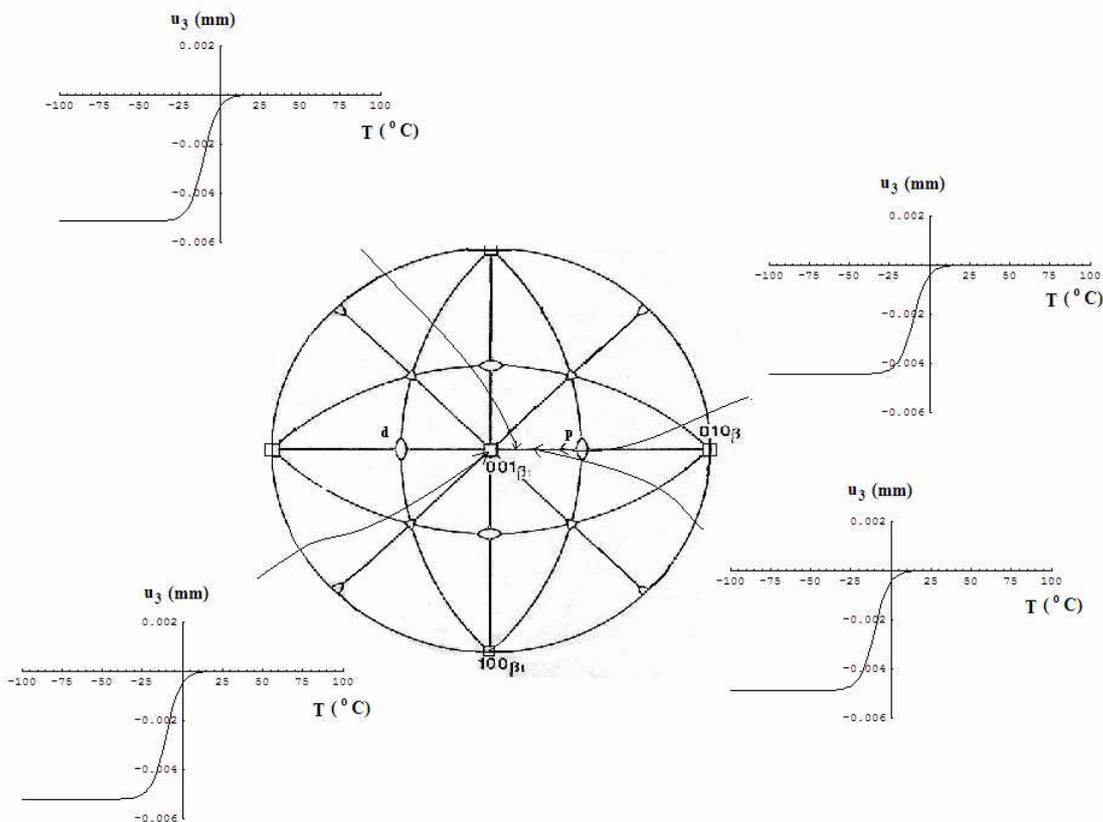


Figura 3.15. Curvas desplazamiento ( $u_3$ )-temperatura para distintas orientaciones de la muestra hipotética cuyos parámetros son definidos en la Figura 3.12 para valores de  $\theta$  que van de 0 a 45 °C.

### 3.2.- Policristales

En la presente sección, se muestra la aplicación del modelo desarrollado a un caso ideal de policristales conocido como: “policristal en serie” el cual se supone que se encuentra sujeto a esfuerzo constante y temperatura variable. Otro caso que se aborda en la presente sección

corresponde con un caso hipotético en el cual se suponen granos puntuales con orientaciones definidas según una función de distribución. También en este caso se considera que el material se encuentra sujeto a una prueba de tensión axial sólo que en este caso, a diferencia del primero, se supone que se encuentra bajo un estado de deformación constante.

El caso de cristales en serie es importante debido a que se desarrollan algunos conceptos de textura cristalina mientras que los resultados que arroja el segundo caso de estudio presentan gran similitud con el comportamiento reportado en la literatura para MMF conformados mediante consolidación de cintas obtenidas por solidificación rápida.

### 3.2.1.-Policristal en serie.

El policristal en serie que se estudia a continuación, está formado por monocristales colocados en serie a lo largo de la dirección de aplicación de la carga. Para mayor simplicidad se considera que los granos tienen una forma regular y que son del mismo tamaño. Así mismo se considera que en todos los granos se induce la misma variante de martensita y que presentan una orientación preferencial de tal forma que poseen en común el eje  $[\bar{1} 0 0]$ . En la Figura 3.16 se muestra un esquema que representa el caso de estudio donde se pueden ubicar los parámetros del material así como la variación en la orientación de un grano a otro representada por  $\theta$ . Este modelo permite obtener una aproximación del comportamiento de MMF que puede ser útil para un caso simple que podría ser similar al de un alambre policristalino muy delgado.

Para calcular el desplazamiento de los granos se considera que el material se encuentra sometido al mismo esfuerzo en cualquier sección transversal y que el desplazamiento en el límite de un grano es el mismo que el del grano siguiente con lo que se asegura la compatibilidad en las deformaciones. Considerando que las dimensiones del material son pequeñas comparadas con su longitud entonces el análisis se concentrará en calcular el desplazamiento de un punto situado en el eje longitudinal de la muestra, en el último grano del policristal, para luego calcular la deformación normal promedio (ingenieril) de la muestra. Cabe destacar que el modelo permite calcular la deformación en cualquier punto de la muestra, sin embargo analizar el problema como se mencionó anteriormente puede ser útil para diversas aplicaciones.

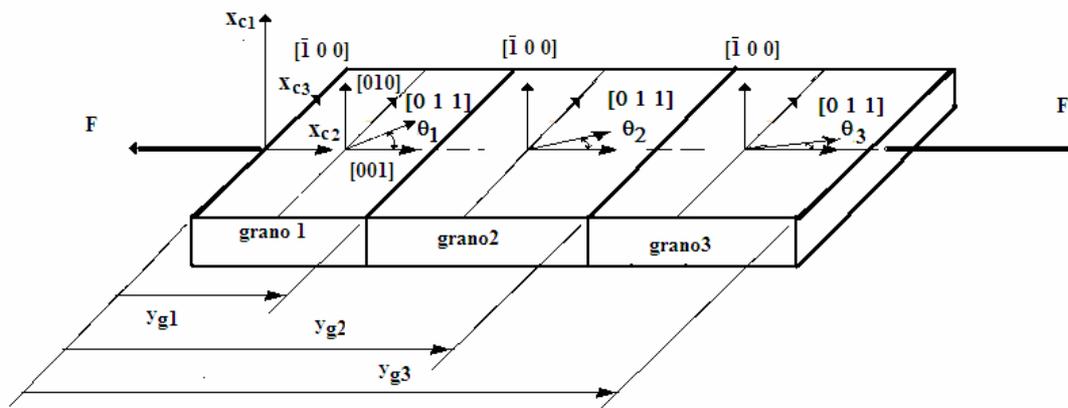


Figura 3.16. Parámetros del policristal en serie que se estudia en la presente sección.

Para realizar los cálculos mencionados, se aplica el modelo de las ecuaciones (2.59) y (2.73) considerando regiones en las cuales, como se mencionó anteriormente, la orientación es tal que tienen en común la dirección  $[\bar{1} \ 0 \ 0]$  mientras que la dirección que coincide con el eje de aplicación de carga varía entre las direcciones  $[0 \ 0 \ 1]$  y  $[0 \ 1 \ 1]$ . Como se muestra en la Figura 3.16 el ángulo  $\theta$  es el que forma la dirección paralela al eje de aplicación de la carga con el la dirección  $[0 \ 1 \ 1]$  en cada grano. Es importante mencionar que dicha variación de orientaciones es similar con la llamada textura de Hinckel la cual, según se ha reportado en la literatura [39], se presenta en MMF en forma de cintas obtenidas por solidificación rápida y en alambres.

Como se hizo en el caso del monocristal sujeto a flexión, para calcular la deformación en cada grano es necesario re-definir apropiadamente la función  $w(y_i)$ , definida con la ecuación (2.32a), de tal manera que se forme una variante de martensita en el interior de cada grano. Para ello, se consideran que la longitud de cada grano, a lo largo del eje de aplicación de la carga, es  $2.5h$  y con ello se definen los siguientes parámetros para cada grano:

Primer grano:

$$\begin{aligned} w_{01} &= m_{01} = r_{01} = r_{11} = 0 \\ y_{01} &= h \\ y_{11} &= hf_1 + h \\ w_{11} &= 1 \end{aligned} \tag{3.25(a)}$$

Segundo grano:

$$\begin{aligned} w_{02} &= m_{02} = r_{02} = r_{12} = 0 \\ y_{02} &= 3h \\ y_{12} &= hf_2 + 3h \\ w_{12} &= 1 \end{aligned} \tag{3.25(b)}$$

Tercer grano

$$\begin{aligned} w_{03} &= m_{03} = r_{03} = r_{13} = 0 \\ y_{03} &= 6h \\ y_{13} &= hf_3 + 6h \\ w_{13} &= 1 \end{aligned} \tag{3.25(c)}$$

Donde:

$(y_{0i}, w_{0i})$ ,  $(y_{1i}, w_{1i})$  son las coordenadas, definidas en la base  $e_i$ , de los puntos de inflexión de las curvas  $w(y_i)$  correspondientes a cada grano;  $f_i$  es el parámetro que define la fracción volumétrica transformada en cada grado y que en este caso es diferente para cada uno debido a que tienen diferente orientación;  $r_{0i} = r_{1i}$  son el radio de curvatura de la interface austenita-martensita.

En la Figura 3.17 se muestran las curvas  $w(y_t)$  para cada grano mientras que en la Figura 3.18 se muestra la distorsión que sufre la superficie de observación también para cada grano, cuyos parámetros fueron definidos anteriormente y que se muestran en la Tabla 3.3, sometido a la misma carga constante y a enfriamiento.

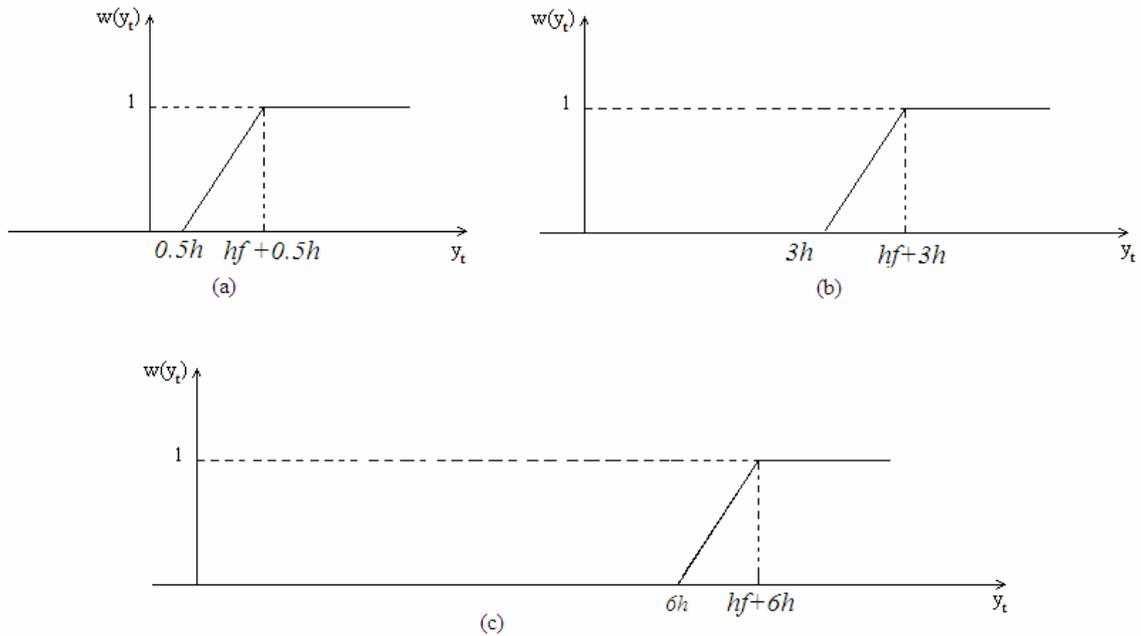
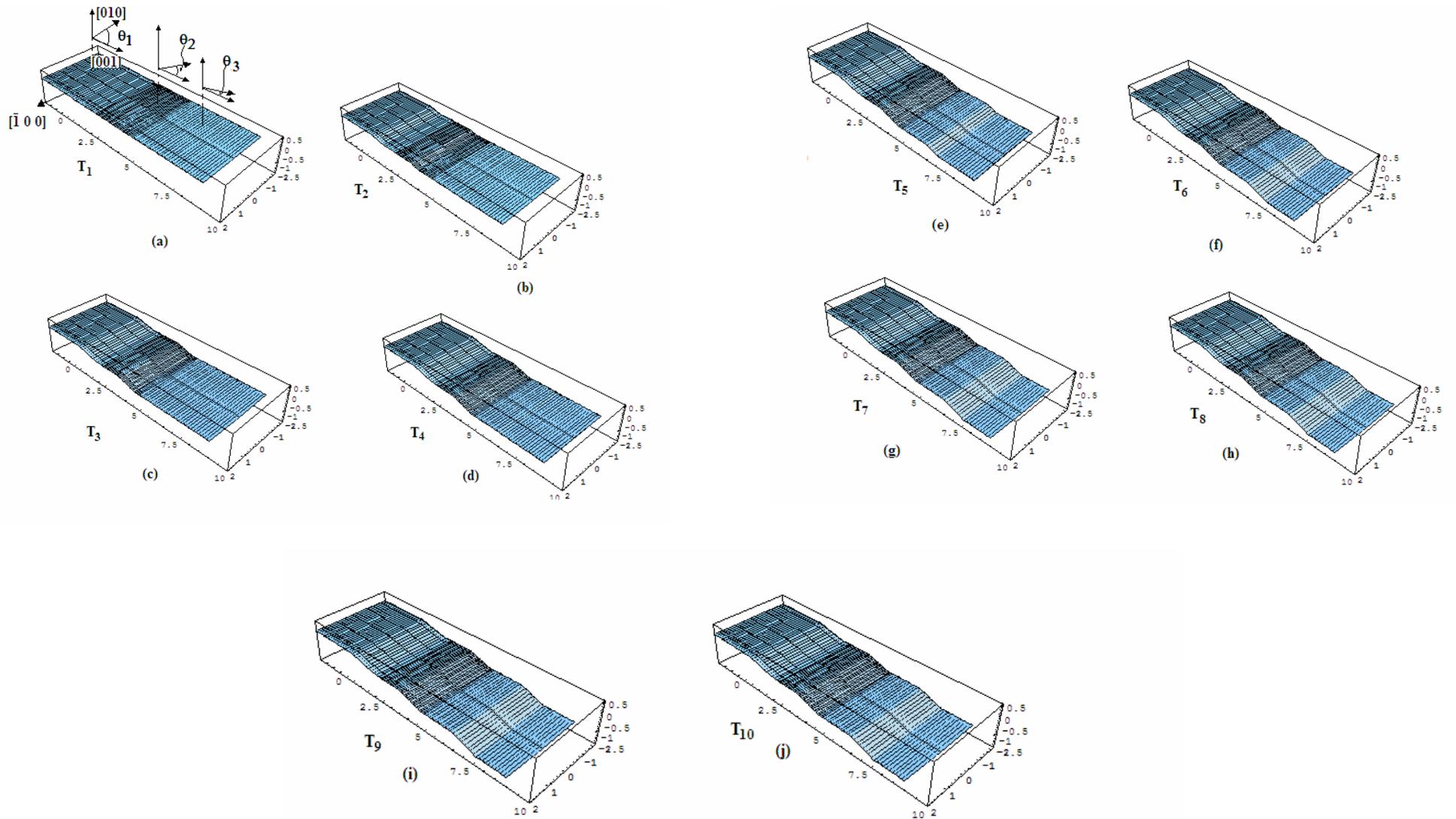


Figura 3.17. Funciones  $w(y_t)$  empleadas para modelar el policristal en serie.

Tabla 3.3. Parámetros del policristal en serie cuyo comportamiento se muestra en la Figura 3.18.

Sistema de observación								
Orientaciones fijas						Variación de orientación para cada grano		
$\{e_{r01}\}_X$	$\{e_{r02}\}_X$	$\{e_{r03}\}_X$	$\{e_{rf1}\}_X$	$\{e_{rf2}\}_X$	$\{e_{rf3}\}_X$	grano 1 $\Theta_1$	grano 2 $\Theta_2$	grano 3 $\Theta_3$
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \bar{1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bar{1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\cos^{-1}\left[\frac{\pi}{4}\right]$	$\cos^{-1}\left[\frac{3\pi}{16}\right]$	$\cos^{-1}\left[\frac{\pi}{8}\right]$
Sistema de transformación $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \bar{1} & 1 \end{pmatrix}$								
$\{e_{i1}\}_X$	$\{e_{i2}\}_X$				$\{e_{i3}\}_X$			

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \bar{1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
---------------------------------------------------	---------------------------------------------	---------------------------------------------



$$T_8 < T_7 < T_6 < T_5 < T_4 < T_3 < T_2 < T_1 < M_s^{\sigma}$$

Figura 3.18. Distorsión que sufre la superficie de observación del plocristal en serie (estudiado en la presente sección) sometido a carga de tensión constante y enfriamiento.

Por otro lado, para calcular la deformación ingenieril del policristal se consideran las siguientes ecuaciones que definen el desplazamiento en el límite de cada grano dividido por la longitud de medición. Dichas ecuaciones fueron calculadas evaluando la ecuación 3.73 en cada límite de grano.

Primer grano

$$e_{yc1} = \frac{u(0, y_{g1}, 0)}{y_{g1}} = \left(\frac{2}{5}\right) \frac{\delta}{2\sqrt{2}} \left[ -f_1 h - \sqrt{\left(h - \frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2} + \sqrt{\left(h - f_1 h - \frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2} \right] \quad 3.26$$

Segundo grano

$$e_{yc2} = \frac{u(0, y_{g2}, 0)}{y_{g2}} = \frac{1}{5h} \left[ \frac{\delta}{2\sqrt{2}} \left( -f_1 h - \sqrt{\left(h - \frac{5h}{2\sqrt{2}}\right)^2} + \sqrt{\left(h + f_1 h - \frac{5h}{2\sqrt{2}}\right)^2} \right) - \frac{1}{2} \delta \left( f_2 h + \sqrt{\left(-3h + 5h \cos\left(\frac{3\pi}{16}\right)\right)^2} - \sqrt{\left(-(3 + f_2)h + 5h \cos\left(\frac{3\pi}{16}\right)\right)^2} \right) \text{Sen}\left(\frac{3\pi}{16}\right) \right] \quad 3.27$$

Tercer grano

$$e_{yc3} = \frac{u(0, y_{g3}, 0)}{y_{g3}} = \frac{2}{15h} \left[ \frac{\delta}{2\sqrt{2}} \left( -f_1 h - \sqrt{\left(h - \frac{5h}{2\sqrt{2}}\right)^2} + \sqrt{\left(h + f_1 h - \frac{5h}{2\sqrt{2}}\right)^2} \right) - \frac{1}{2} \delta \left( f_2 h + \sqrt{\left(-3h + 5h \cos\left(\frac{3\pi}{16}\right)\right)^2} - \sqrt{\left(-(3 + f_2)h + 5h \cos\left(\frac{3\pi}{16}\right)\right)^2} \right) \text{Sen}\left(\frac{3\pi}{16}\right) \right] - \frac{2}{2(15h)} \delta \left[ f_3 h + \sqrt{\left(-6h + \frac{15}{2} h \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2} - \sqrt{\left(-(6 + f_3)h + \frac{15}{2} h \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2} \right] \text{Sen}\left(\frac{\pi}{8}\right) \quad 3.28$$

donde:  $y_{gi}$  es la distancia del origen al i-ésimo límite de grano medido en la base  $e_c$  como se muestra en la Figura 3.18. Para el caso de estudio  $y_{g1} = \frac{5}{2}h$ ,  $y_{g2} = 5h$  y  $y_{g3} = \frac{15}{2}h$ .

Es claro que la ecuación anterior puede generalizarse para un número mayor de cristales así como para diferentes tamaños de grano como:

$$e_{yci} = \frac{\delta}{L_T} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left[ -f_i h - \sqrt{\left(y_{vi} - y_{gi} \cos(\theta_i)\right)^2} + \sqrt{\left(y_{vi} + f_i h - y_{gi} \cos(\theta_i)\right)^2} \right] \text{Sen}(\theta_i) \quad 3.29$$

Donde:  $y_{gi}$  es la posición del i-ésimo grano y  $y_{vi}$  es la posición de la variante de martensita que se forma en el i-ésimo grano en la base  $e_t$  que se muestran en la Figura 3.17;  $\theta_i$  es el ángulo que se muestra en la Figura 3.16.

En la Figura 3.19, se muestran una curva Deformación (Ingenieril)-Temperatura para el caso estudiado en la presente sección.

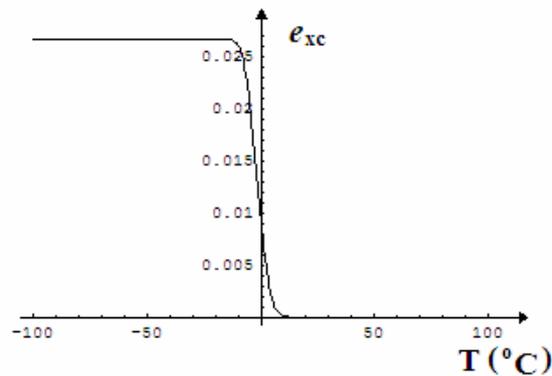


Figura 3.19. Curva Deformación (Ingenieril)-Temperatura correspondiente al policristal en serie con 3 granos estudiado en la presente sección.

Es importante mencionar que el análisis que ha sido presentado en la presente sección puede presentar una serie de variantes que tendrían que ser resueltos para hacerlo más eficiente. Entre dichas variantes se encuentran las siguientes:

- a) Podrían aparecer variantes paralelas en el interior de cada grano.
- b) La frontera de cada grano puede no ser perpendicular al eje de aplicación de la carga.
- c) En una prueba de tensión simple real el equipo empleado pudiera no permitir sólo un grado de libertad.

Los casos anteriores pueden ser resueltos empleando el modelo desarrollado en el presente trabajo y aunque no se incluye puede ser abordado en un trabajo posterior.

### 3.2.2.- Policristales en paralelo

El caso de estudio denominado: policristal con granos en paralelo es otro caso hipotético que se considera que los granos de una muestra, sujeta a tensión uniaxial, son monocristales con distinta orientación dispuestos de tal manera que su frontera es paralela al eje de aplicación de la carga. Dicha configuración, a diferencia de la de policristal en serie que se discutió en la sección anterior, se basa en el supuesto de que la muestra se encuentra sujeta a deformación constante. Bajo dicha condición el problema fundamental consiste en mantener la compatibilidad de la deformación en las fronteras de cada grano.

Es importante mencionar que en una muestra policristalina real los granos se encuentran dispuestos de tal manera que ambas configuraciones, la de policristal en serie y en paralelo, se presentan de manera combinada por lo que no se puede dejar de lado el estudio de los granos en paralelo. Cabe destacar que algunos autores como Ashby[22], ha propuesto que la compatibilidad de las deformaciones se logra gracias al movimiento de dislocaciones en la región próxima a la frontera del grano lo cual puede interpretarse como un mecanismo que suaviza la transición entre granos. Otros autores [13] han propuesto un modelo denominado “de cristal confinado” que en general considera que la deformación más intensa ocurre en el interior del grano. En todo caso ambos modelos pretenden suavizar la transición entre granos vecinos.

A continuación se presenta una variante del modelo desarrollado en el presente trabajo, en el que se supone que una muestra esta constituida por granos similares a hilos muy delgados de espesor despreciable que se extienden a lo largo del eje de aplicación de la carga. Así mismo, el modelo supone que la orientación de cada grano a lo ancho de la muestra, cambia de manera suave pero progresiva.

### 3.2.2.1.-Pseudo-policristal

Para iniciar el análisis, se tomará el término  $\varepsilon_{tr}$  de la relación (3.11) ya que dicho término representa la variación de la deformación para una gama de orientaciones en la que el eje de aplicación de la carga va de la dirección  $[0 \ 1 \ 0]$  a la  $[0 \ 1 \ 1]$ . Considerando lo anterior, es claro que la suma de estos términos constituye una relación esfuerzo-deformación-temperatura uniaxial que permite simular la deformación normal, en la dirección del eje de aplicación de la carga, durante la transformación martensítica inducida por esfuerzo o bien por efecto combinado. Dicha relación puede ser escrita como:

$$\varepsilon_T = \varepsilon_{le} + \varepsilon_{tr} = \frac{\sigma}{Me} + \delta f m \quad (3.30)$$

Donde, se puede apreciar que el término transformacional ( $\varepsilon_{tr} = \delta f m = f \varepsilon_{0max}$ ) depende de la orientación del cristal, representado por el factor de Schmid “ $m$ ”, y de la fracción volumétrica transformada ( $f$ ) mientras que el término linealmente elástico toma la forma de la ley de Hooke, el cual, también depende de la orientación si se considera la alta anisotropía mecánica de la fase auténica de los MMF descrita en la ecuación 3.1 es decir:

$$\varepsilon_{le} = s(MY_0, \theta, k, \nu_0) \sigma = \frac{\sigma}{MY(\theta)} \quad (3.31)$$

donde:  $MY$  es el módulo de Young de la fase austenítica en función de la orientación del cristal  $\theta$ , de los módulos elásticos de referencia del material:  $MY_0, \nu_0$ ; así como del coeficiente anisotrópico  $k$ .

Así mismo, es claro que para la gama de orientaciones que va de la dirección  $[0 \ 1 \ 0]$  a la  $[0 \ 1 \ 1]$  se cumple que el término correspondiente con la deformación transformacional máxima ( $\varepsilon_{0max} = \delta m$ ) depende de la orientación, puesto que es directamente proporcional al factor de Schmid, y toma valores escalares por lo que puede ser representado por una función del tipo:

$$\varepsilon_0 : V \rightarrow \Re \quad (3.32)$$

donde:  $V$  representa un vector que define la orientación del cristal y  $\Re$  un escalar que determina la deformación transformacional máxima.

Es importante mencionar que la variación de orientaciones descrita anteriormente, corresponde la llamada textura de Heinckel, que ha sido reportada en la literatura por diferentes autores para varios tipos de AMF producidas por solidificación rápida o bien después de cierto porcentaje de deformación cuando es producido por laminado [11, 25, 38, 39].

Por otra parte, si consideramos que un policristal esta constituido por una serie de monocristales con distintas orientaciones, y que éstas varían según la condición mencionada anteriormente, entonces podemos decir que a cada región donde se encuentra un grano le podemos asociar un

escalar que representa la orientación de cada grano. Dicha condición puede ser representada gráficamente como se muestra en la Figura 4.20 donde se muestran, para un caso plano, un grupo de granos ocupan una cierta región  $R_{ij}$ , en el plano  $x$ - $y$  a los cuales se les asocia un escalar  $\epsilon_{0max}$  que representa la orientación de cada uno.

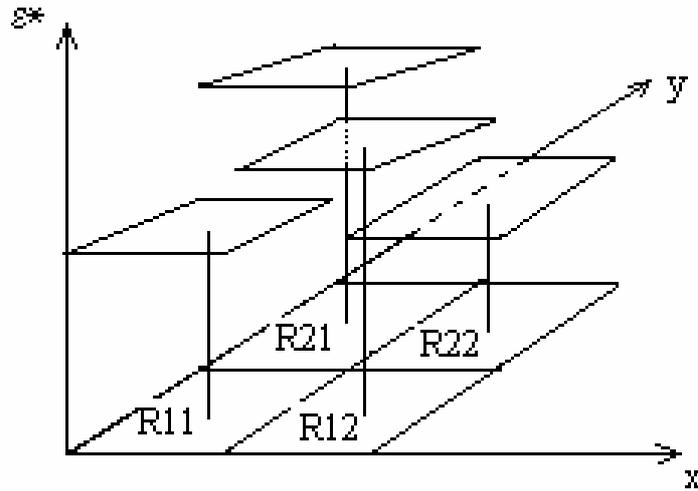


Figura 3.20. Diagrama  $x$ - $y$ - $\epsilon_0$

Lo anterior nos permite considerar que para un policristal,  $\epsilon_{0max}$  puede ser visto como una función del tipo:

$$\epsilon_{0max} : B \rightarrow \mathfrak{R} \quad (3.33)$$

donde:

$B$  = es el una región del plano  $x$ - $y$

$\mathfrak{R}$  = es un conjunto de escalares

Claramente vemos que si hacemos que los granos sean pequeños, en el límite,  $\epsilon_{0max}$  tiende ha ser una función continua que representa la distribución de orientaciones del policristal. Lo anterior, se puede expresar de la siguiente manera:

$$\epsilon_T = \frac{\sigma}{MY(\theta)} + \epsilon_{0max}(X)f \quad (3.34)$$

Donde  $X=(x,y)$

Con estas consideraciones, se tiene que es posible proponer una distribución de orientaciones, ya sea hipotética o proveniente de datos reales, que puede ser empleada para formular el

problema de la determinación del campo de esfuerzos en un policristal cuando éste es sometido a una deformación normal constante en la dirección de la aplicación de la carga. Según se ha reportado en la literatura [25, 40] la condición de deformación constante ha sido empleada por algunos autores al estudiar la deformación policristales sin confinamiento sometidos a pruebas de tensión uniaxial; dicha condición es llamada comúnmente modelo de Taylor.

Usar el modelo de Taylor simplifica considerablemente el problema sin embargo no se está considerando la compatibilidad de las deformaciones por lo que deben tomar los resultados que se obtengan como aproximaciones.

Siguiendo con el razonamiento anterior, el problema a resolver se simplifica considerablemente si se asume que la orientación de los granos varía en la dirección “x” de la Figura 3.20 y que el eje de aplicación de la carga es paralelo al eje “y”. Luego suponiendo que los esfuerzos de corte que pueden aparecer son despreciables y sólo existen esfuerzos normales en la dirección y, entonces una solución que satisface las ecuaciones de equilibrio sería:

$$\sigma_y = \sigma_y(x) \quad (3.35)$$

El problema es simple debido a que sólo tiene que resolverse (3.34) para una deformación y una distribución de orientaciones dadas. Luego el problema se reduce a resolver una ecuación algebraica no lineal para lo cual se puede emplear cualquier método numérico conocido.

Luego, una vez determinado  $\sigma_y(x)$  para diferentes valores de deformación es posible construir una curva esfuerzo medio-deformación  $\bar{\sigma} - \epsilon$  tomando:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{b} \int_{x_1}^{x_2} \sigma(x) dx \quad (3.36)$$

donde:

$\bar{\sigma}$  = esfuerzo medio

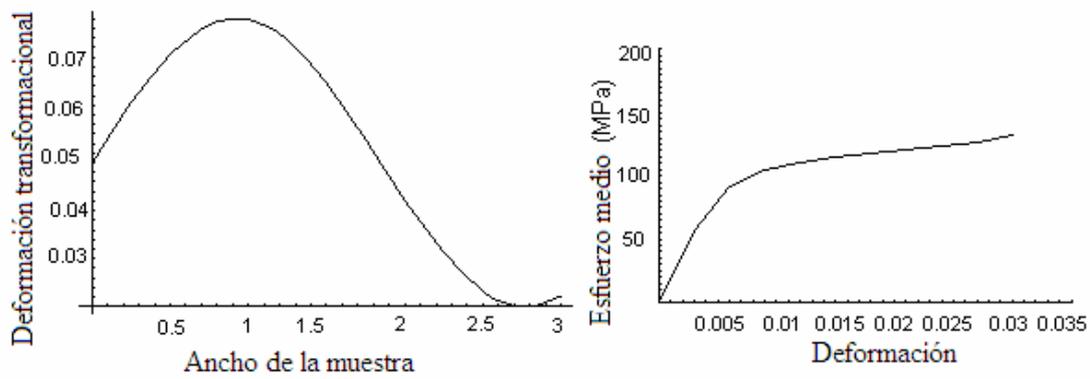
$b = x_2 - x_1$  es el ancho de la muestra

El modelo obtenido puede ser considerado como pseudo-uniaxial más que uniaxial ya que la distribución de orientaciones varía en la dirección “x” pero el comportamiento mecánico es calculado en la dirección “y”.

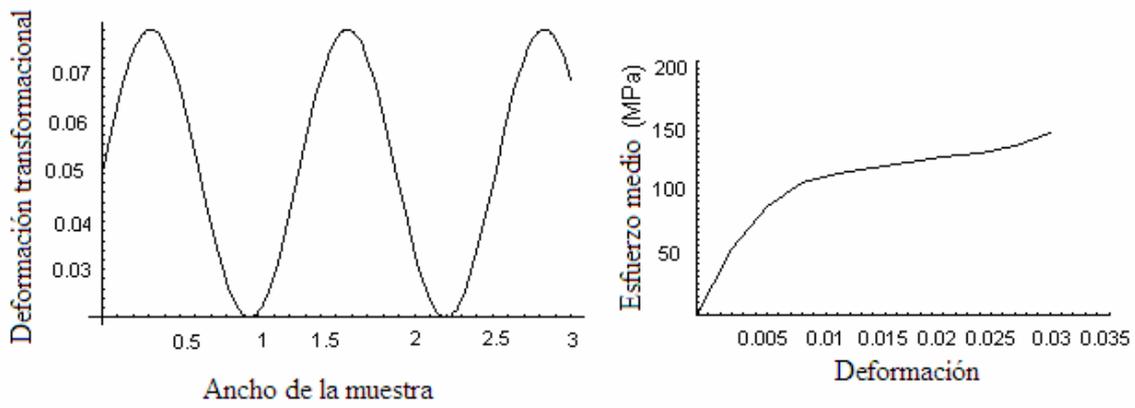
A continuación se presentan una serie de casos hipotéticos en los que se proponen distribuciones de orientaciones arbitrarias y son calculadas las curvas  $\bar{\sigma} - \epsilon$ . Así mismo, los resultados calculados son comparados cualitativamente con datos reportados en la literatura.

En la Figura 3.21, se muestran tres casos hipotéticas (llamados: H1, H2 y H3) con diferentes distribuciones de orientaciones y las curvas  $\bar{\sigma} - \epsilon$  calculadas empleando la ecuación (3.40). En dicha Figura se aprecian rasgos que han sido asociados al tamaño de grano y a la textura cristalina en diversos trabajos reportados en la literatura [17, 46, 47, 48].

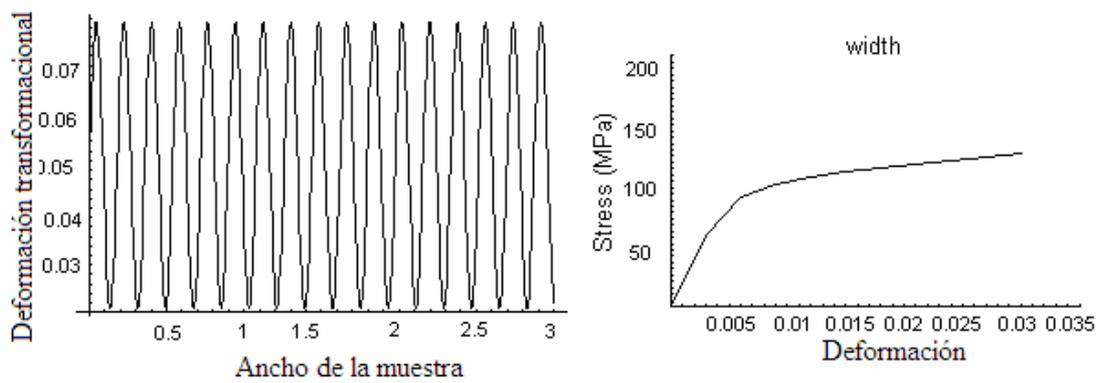
Así mismo, en la Figura 3.22 se muestran dos curvas deformación temperatura ( $\epsilon - T$ ) correspondientes a la muestra H3 de la Figura 3.21 tomando dos valores de esfuerzo medio constante. En dichas curvas se puede apreciar el efecto de retardo en la terminación de la transformación observada en MMF policristalinos [46-48].



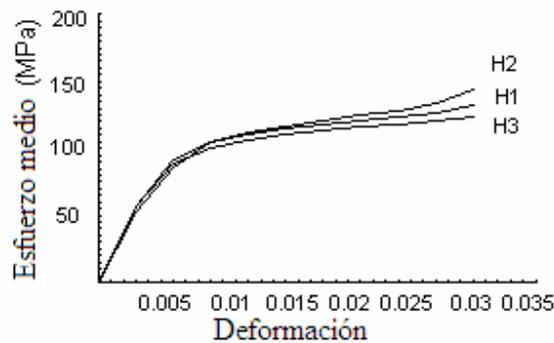
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 3.21. Distribución de orientaciones y curvas Esfuerzo medio-Deformación a una temperatura  $T > M_s$  para las muestras hipotéticas H1, H2 y H3: a) Muestra H1; b) Muestra H2; c) Muestra H3 y d) Comparación de las curvas Esfuerzo medio-Deformación de las tres muestras.

Por otro lado, en la Figura 3.23 se muestran curvas  $\bar{\sigma} - \varepsilon$  para tres temperaturas diferentes correspondientes con la muestra H2 de la Figura 3.21. En dichas gráficas se aprecia claramente un cambio en el comportamiento del material conforme la temperatura de prueba se aproxima a  $M_s$ . Dichos cambios en el comportamiento han sido observados en pruebas experimentales reportadas en la literatura [46 y 47].

Un caso de especial interés es mostrado en la Figura 3.24(a) donde se muestra la curva  $\bar{\sigma} - \varepsilon$  para el primer caso de la Figura 3.21 pero hasta una deformación de 8%. Dicho comportamiento resulta muy importante debido a que el comportamiento observado en la curva de la Figura 3.24 se asemeja considerablemente con una curva experimental reportada en la literatura [17] que corresponde con una muestra de Cu-Al-Ni fabricada con cintas obtenidas por Metl-Spinning y sinterizadas. La similitud de ambas curvas, al menos en su forma, motiva un estudio más detallado sobre las hipótesis empleadas para llegar al modelo que nos llevó a estos resultados.

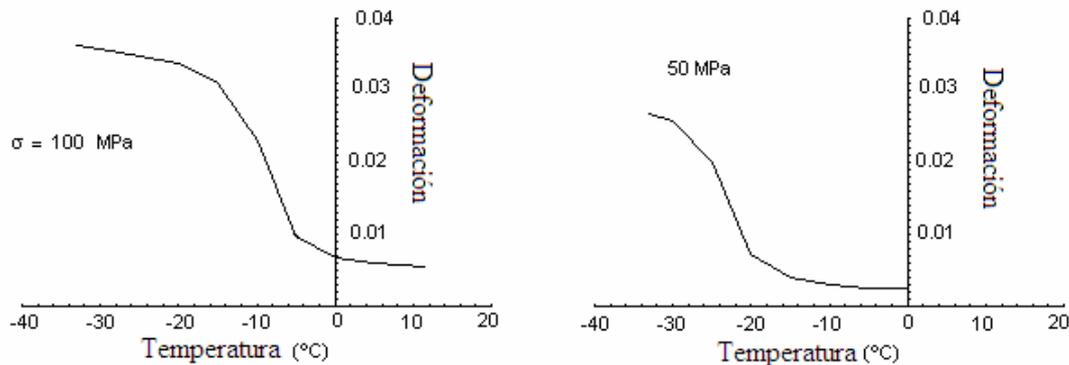


Figura 3.22. Curvas deformación-temperatura correspondientes a la muestra H3.

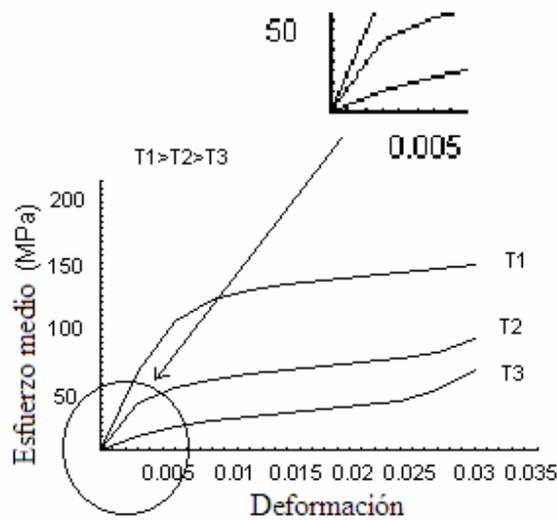


Figura 3.23. Curvas Esfuerzo medio-Deformación para tres distintas temperaturas (mayores que  $M_s$ ) correspondientes a la muestra hipotética H2.

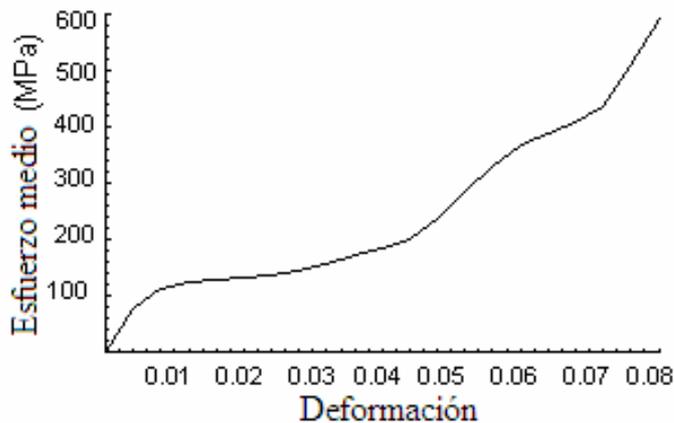


Figura 3.24. Muestra H1 deformada a una  $T > M_s$ , deformada un 8%.

Revisando los resultados obtenidos en la presente sección, surgen algunas observaciones relevantes sobre las distribuciones de orientaciones que se muestran en la Figura 3.21.

- El caso H1 puede representar dos granos con una transición suave, es decir, que el cambio de orientación es gradual lo que sería equivalente tener una frontera “ancha” donde la red va re-orientándose “suavemente”.
- El caso H2 puede ser visto como un grano central con una orientación acotado por dos granos de la misma orientación, uno en cada lado. Es decir, la muestra tiene tres granos, dos ellos con la misma orientación, y la frontera entre ellos es “suave”.

- El caso H3 representa granos de dos orientaciones alternadas y una frontera “suave”.

Esta forma de interpretar las distribuciones de orientaciones abordadas en la presente sección, puede motivar un estudio especial que comprenda la realización de pruebas experimentales que permitan comparar los resultados teóricos con los experimentales. No obstante, es preciso tener en cuenta que posiblemente sea complicado obtener muestras con orientaciones cercanas a las empleadas en la presente sección.

### 3.3 Discusión

Los casos expuestos en el presente capítulo muestran el potencial para simular el comportamiento mecánico de MMF del modelo desarrollado. A pesar de que fueron aplicados a casos hipotéticos es posible aplicarlos a MMF de los cuales se disponga de información sobre los sistemas de transformación, la razón de esfuerzo, las temperaturas críticas y, en el caso de policristales, la distribución de orientaciones.

Así mismo, es claro que los parámetros empleados en los casos presentados deben ser refinados para mejorar la aproximación. No obstante, los cálculos realizados muestran la capacidad del modelo para calcular los comportamientos típicamente obtenidos mediante técnicas experimentales conocidas. Entre los parámetros que pueden ser refinados en el modelo desarrollado se encuentran:

Para el caso de monocristales:

- a) Determinar el ancho de las franjas de martensita a partir de mediciones experimentales.
- b) Aplicar condiciones de frontera más apegadas a las que se presentan en pruebas de tensión uniaxial usando equipos convencionales.
- c) Considerar orientaciones que correspondan con muestras reales que permitan comparar los cálculos con datos experimentales para casos tanto de tensión uniaxial como en flexión.

Para el caso de policristales en serie:

- a) Ensayar casos de textura diferentes al empleado en el caso presentado.
- b) Calcular el comportamiento considerando geometrías de los granos diferentes a las empleadas en el caso presentado.
- c) Realizar los cálculos considerando la formación de variantes paralelas en el interior de cada grano.
- d) Aplicar condiciones de frontera más apegadas a las que se presentan en pruebas de tensión uniaxial usando equipos comerciales.

Para los pseudo-policristales

- a) Estudiar muestras con granos muy pequeños y con distribuciones de orientaciones reales o bien con granos bastos para comparar el comportamiento calculado y que muestran los datos experimentales.

La importancia de los casos estudiando en el presente trabajo se debe a que muchas aplicaciones de los MMF emplean estos arreglos de carga. En la siguiente sección, se presentan dos aplicaciones de los MMF en los que se requiere contar con un modelo matemático que permita

predecir el comportamiento del material en arreglos de tensión uniaxial y flexión en cantilever, ambos casos a carga semi-costante y temperatura variable (enfriamiento).

La primera aplicación, se refiere a un dispositivo denominado actuador termomecánico [52 y 53] el cual emplea un par de alambres sujetos a tensión proveniente de un resorte helicoidal comprimido. El segundo caso, en cambio, se refiere a otro dispositivo llamado: persianas inteligentes [51] el cual emplea láminas sujetas a flexión cuya carga proviene del propio peso de los vidrios.

En ambas aplicaciones, se propone emplear una aleación de Cu-Al-Be debido a que según se ha reportado en la literatura, presenta buena las siguientes ventajas respecto a otras AMM base cobre [8, 49, 50]. Las principales ventajas del Cu-Al-Be respecto a otras AMMF de cobre se encuentran:

- a) La posibilidad de obtener temperaturas de transformación por debajo del ambiente conservando las propiedades superelásticas.
- b) Se trata de una aleación que presenta en todo su dominio superelástico la transformación martensítica tipo:  $\beta \rightarrow \beta'$  por lo que presente grandes deformaciones transformacionales y una histéresis pequeña.
- c) Presenta excelente estabilidad térmica en su fase beta a temperaturas superiores a 100 °C.

Cabe destacar que actualmente, dicha aleación ha sido fabricada exitosamente en México en forma de láminas y cintas (obtenidas por solidificación rápida) pero no así en el caso de alambres. No obstante, se están realizando estudios orientados a la producción de alambres de Cu-Al-Be por lo cual se espera que en breve se domine la técnica.

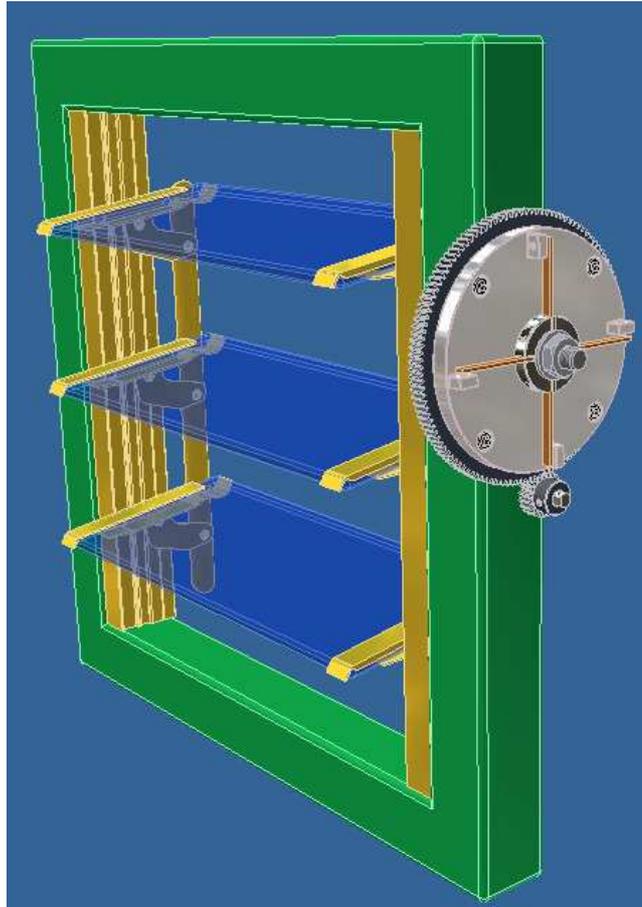
## Capítulo 4.-Aplicaciones

### 4.1.- Persianas inteligentes

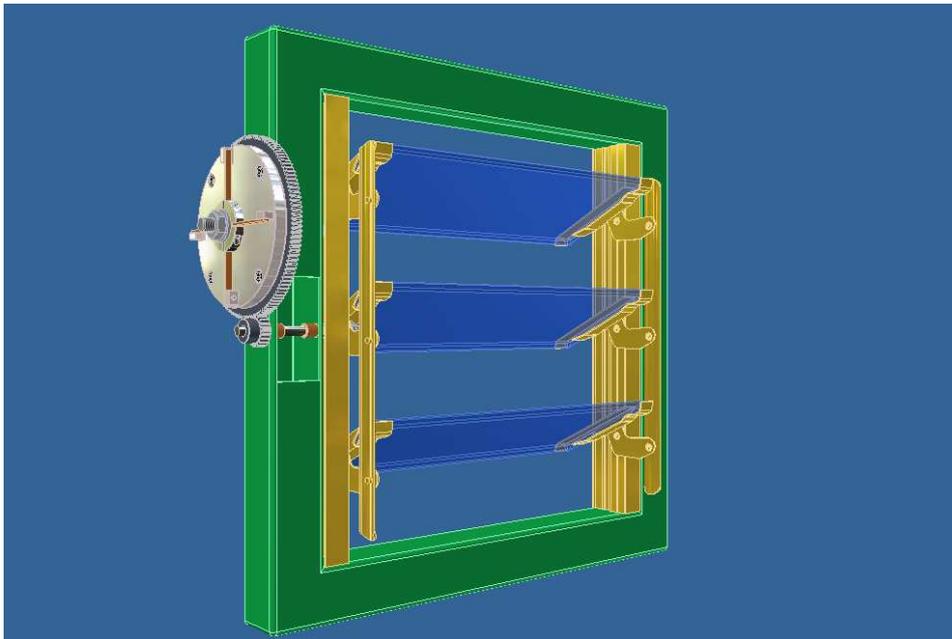
El diseño de las persianas inteligentes, parte de una persianas convencionales para ventilación, a las cuales les fue adaptado un mecanismo que transmite una componente del peso de los vidrios a unas láminas fabricadas con una aleación de Cu-Al-Be con memoria de forma.

En la Figura 4.1 se presenta un esquema general del arreglo propuesto para las persianas inteligentes. La principal variante de las persianas inteligentes, respecto a las convencionales, es el mecanismo formado por las partes (1), (4) y (5) que se muestra en detalle en la Figura 4.1 (b). La carcasa móvil así como el eslabón de transmisión llevan fijo, cada uno, un engrane; ambos pueden estar directamente conectados o bien mediante un tren de engranes. Otra variante del diseño original de las persianas fue la inversión de la dirección del giro de los vidrios lo cual permite que el peso de los vidrios generen la carga que se requiere aplicar a las placas con memoria de forma para que presente el efecto deseado.

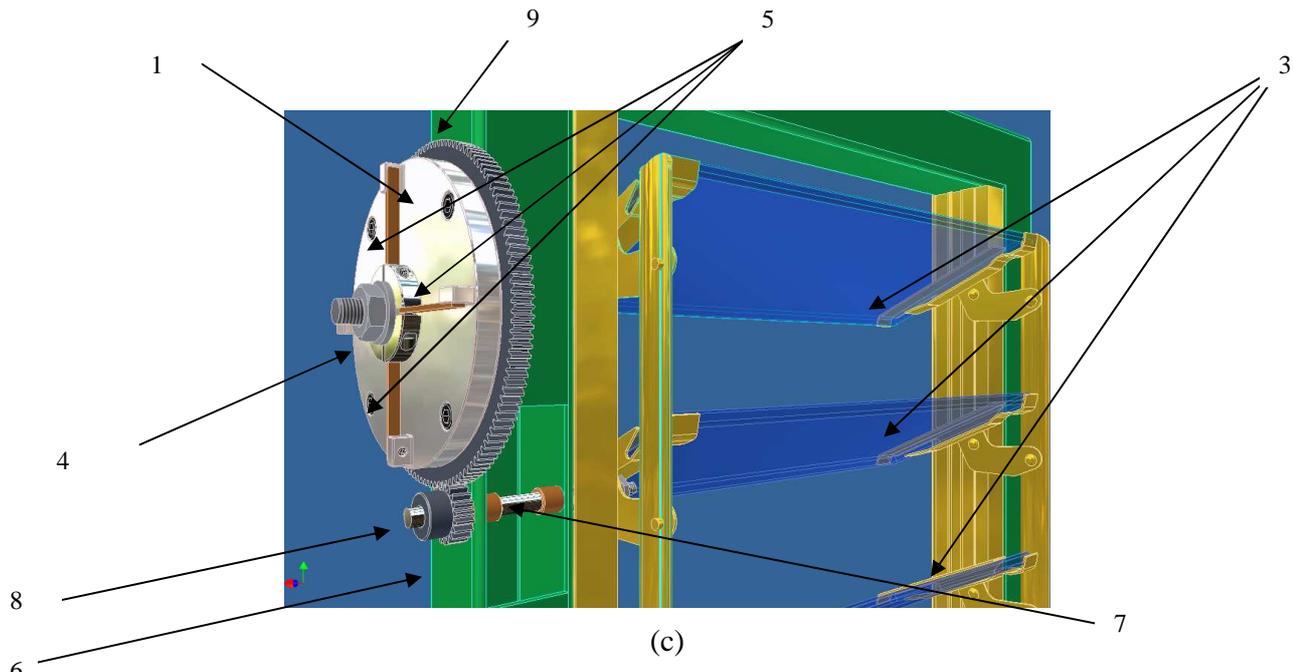
La operación de las persianas consiste en la apertura y/o cierre de los vidrios al enfriar y/o calentar las láminas con memoria de forma respectivamente. Como se mencionó anteriormente, el mecanismo mostrado en la Figura 4.1 transmite una componente del peso de los vidrios a las láminas con memoria de forma; si la temperatura del ambiente es inferior a su temperatura crítica  $M_f^\sigma$ , la carga causará una deflexión considerable en las mismas manteniendo cerrados los vidrios. Si la temperatura de las láminas incrementa por encima la  $A_s^\sigma$  del material, la deflexión de las láminas se restituirá arrastrando la carga aplicada abriendo los vidrios.



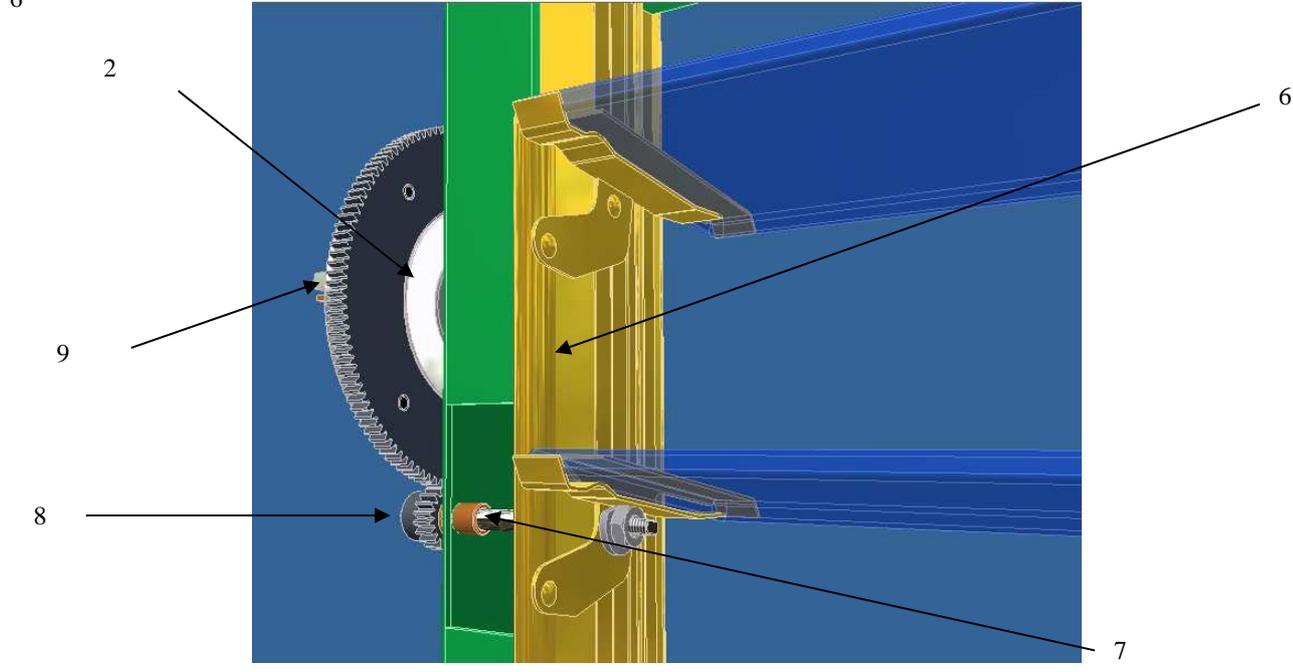
(a)



(b)



(c)



(d)

- |                                  |                                      |
|----------------------------------|--------------------------------------|
| 1 Carcaza móvil                  | 6 Marco                              |
| 2 Barra sujetadora de la carcaza | 7 Eslabón de transmisión             |
| 3 Vidrios                        | 8 Engrane del eslabón de transmisión |
| 4 Empotramiento                  | 9 Engrane de la carcaza              |
| 5 Láminas con memoria de forma.  |                                      |

Figura 4.1. Arreglo de persianas inteligentes: (a) y (B) Esquema general y (c) y (d) detalles del mecanismo.

La parte medular del diseño consistió en la determinación del comportamiento desplazamiento-temperatura de las láminas con memoria de forma para la carga proveniente de los vidrios. Para

la determinación de dicho comportamiento fue necesario determinar la carga proveniente de los vidrios, la cual no es constante, más bien depende del desplazamiento, y elegir una relación esfuerzo-deformación-temperatura que simule convenientemente el comportamiento del MMF empleado. En primera aproximación, la relación esfuerzo-deformación-temperatura empleada fue desarrollada considerando que, al aparecer la nueva fase en el material, el elemento se comportará como si estuviera constituido por dos materiales diferentes [54, 55]. Luego, empleando la teoría de vigas se obtuvo el modelo matemático que a continuación se muestra y cuya solución es el comportamiento que se busca.

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{F(v)(l-x)dv}{IE(x)} = \frac{F(v)(l-x)dv}{I[E_M + f_A(E_A - E_M)]} \quad (4.1)$$

donde:  $F(v)$  es la carga debida los vidrios la cual, es función del desplazamiento puesto que es la componente del peso de los vidrios perpendicular a los mismos.

$v$  es el desplazamiento del eje neutro de la lámina

$E_A$ ,  $E_M$  son la primera y segunda pendiente que se observan en una curva Esfuerzo-Deformación obtenida de una prueba en tensión simple práctica al material de las láminas a una temperatura mayor que  $A_f$ .

$f_A$  es la fracción volumétrica de material en fase austenítica.

$I = \frac{bh^3}{12}$  es el momento de inercia del área de la sección transversal de las láminas

$b$ ,  $h$  y  $l$  son las dimensiones de una lámina sujeta a flexión en cantilever como se muestra en la Figura 4.2.

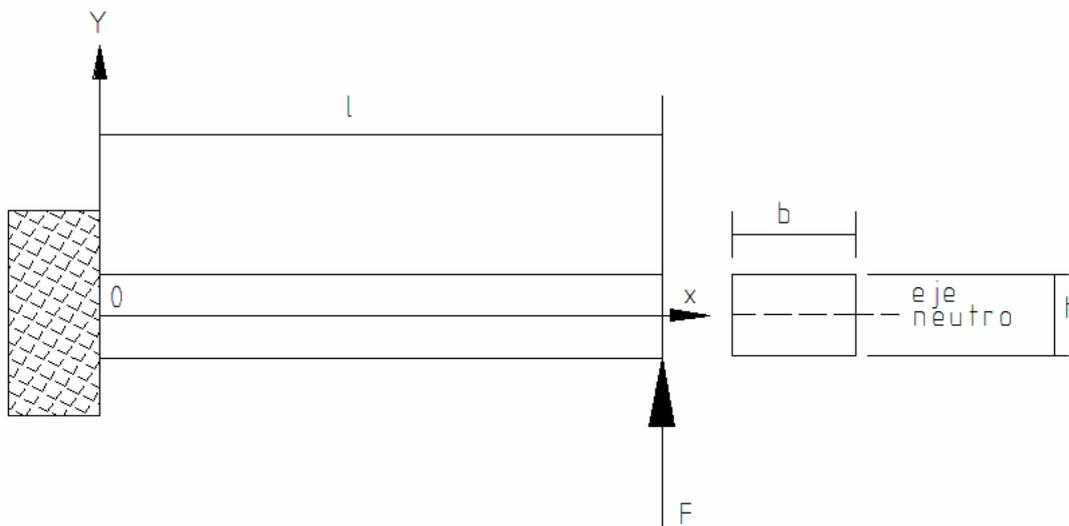


Figura 4.2. Arreglo de una viga en cantilever sujeta una carga puntual en su extremo libre.

Es claro que los términos de la ecuación (4.1) deben ser definidos considerando el mecanismo que transmite el peso de los vidrios a las láminas con memoria de forma. Después de considerar lo anterior y realizando algunas simplificaciones se llega a la siguiente ecuación:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{h(r_2 w d_1)^2 (l-x)^2 (\pi r_1 - 2r_2 v)^2 dv}{\pi n (l r_1)^2 I [r_2 d_1 w h (\pi r_1 - 2r_2 v) (l-x) E_M + 2\sigma_c \ln l r_1 (E_A - E_M)]} \quad (4.2)$$

donde:  $w$  es el peso de los vidrios

$r_1$ ,  $r_2$  son los radios base del engrane del eslabón de transmisión y del engrane de la carcaza respectivamente

$r_3$  es el brazo de palanca de la carcaza a las láminas con memoria de forma.

$n$  es el número de láminas

$\sigma_c$  es el esfuerzo crítico

Es claro que la ecuación anterior es no lineal, sin embargo, puede ser resuelta para el punto de aplicación de la carga mediante algún método numérico como el Runge-Kuta. La solución de la ecuación (4.2) nos proporciona el comportamiento desplazamiento-temperatura de las persianas con lo cual es posible predecir el funcionamiento de las mismas.

Como se puede ver en la ecuación (4.2) están implícitos todos aspectos que se deben considerar en el diseño de las persianas tales como:

- El intervalo de temperaturas en el que se desea que abran y cierren las persianas, el cual depende de la magnitud de la carga aplicada.
- La amplificación del desplazamiento que se requiere para que sea apreciable la apertura y cierre de los vidrios.
- El número de láminas que deben ser instaladas para que el esfuerzo en cada una de ellas no exceda de 100MPa.

No obstante, la solución que se puede obtener siguiendo el procedimiento anterior requiere determinar experimentalmente los valores de  $E_A$  y  $E_M$  de los materiales que serán empleados y no es posible determinar las variaciones del comportamiento asociadas al cambio de orientación del material, si éste es un monocristal o bien un policristal con textura cristalino.

El modelo desarrollado en el presente trabajo puede ser aplicado para el caso en que el elemento con memoria de forma es monocristalino siguiendo el razonamiento descrito en la sección 3.2 pero considerando que la carga es función del desplazamiento. El resultado que se obtiene en este caso es una ecuación algebraica no lineal que puede ser resuelta empleando cualquier método numérico conocido.

Por otro lado, si el elemento con memoria de forma es policristalino, la ecuación 3.34, desarrollada en la sección 3.3.2 puede ser empleada para generar curvas esfuerzo deformación a diferentes temperaturas las cuales permitirán obtener los módulos  $E_M$  y  $E_A$  que se requieren en las ecuación 4.1 o bien en la 4.2.

#### 4.2.- Termoactuador

El termo-actuador diseñado aprovecha la elongación y contracción de dos alambres con memoria de forma para generar un movimiento circular continuo mediante ciclos de calentamiento y enfriamiento [52, 53]. Un esquema general del termo-actuador que fue diseñado se puede apreciar en la Figura 4.3. Como se puede ver en la Figura, el dispositivo consiste de un par de alambres fabricados con un MMF sujetos a tensión por medio de un resorte helicoidal que trabaja en compresión; el conjunto resorte-alambre se acoplan a la corredera de un

mecanismo biela-manivela-corredera, el cual a su vez se encuentra acoplado a un cuadrilátero articulado.

Cuando los alambres son calentados por encima de su temperatura crítica ( $A^{\sigma_s}$ ), experimentan una contracción que comprime el resorte desplazando la corredera hacia la izquierda. El mecanismo biela-manivela-corredera convierte el movimiento longitudinal en un desplazamiento angular de la manivela. Mediante el mecanismo de cuatro barras articuladas, el desplazamiento angular es convertido en un giro de  $180^\circ$ . Cuando el alambre es enfriado la contracción desaparece, el resorte se restituye y el mecanismo permite que se complete el giro del eje acoplado a la salida del cuadrilátero articulado. La operación del dispositivo consiste pues, en ciclos continuos de calentamiento y enfriamiento.

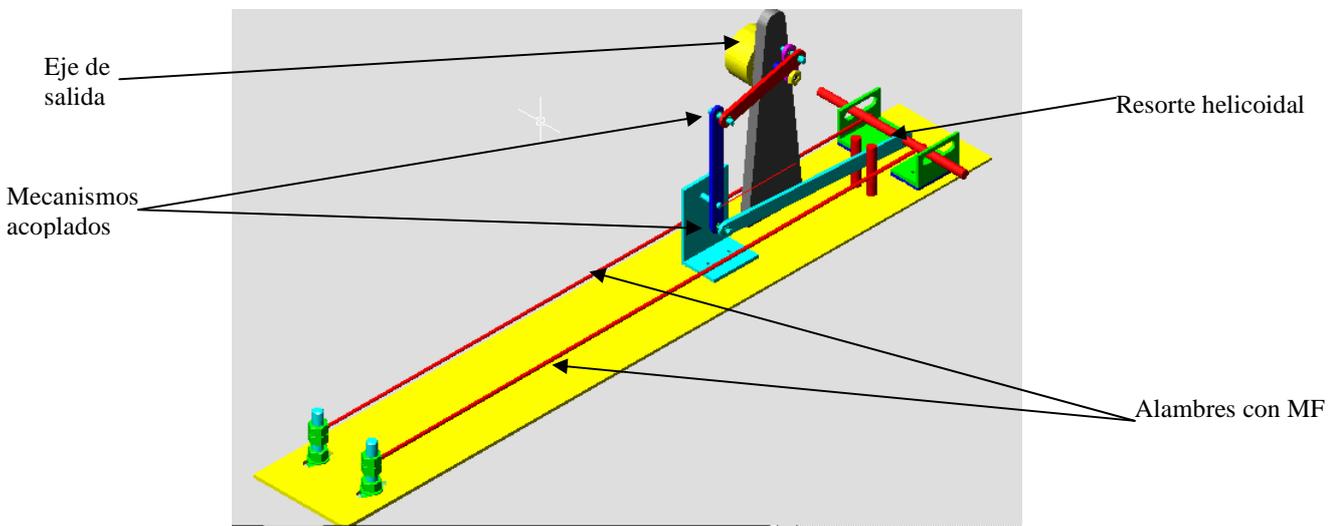


Figura 4.3. Esquema general del termo-actuador.

El primer aspecto considerado para el diseño del dispositivo fue la determinación del desplazamiento de la corredera la cual es arrastrada por el resorte cuando los alambres con memoria de forma son calentados. Para ello, fue necesario emplear un modelo que nos permitiera conocer el comportamiento carga-desplazamiento-temperatura del alambre para lo cual en primera aproximación se empleó una ecuación previamente desarrollada [56] que aproxima el comportamiento de los MMF mediante parábolas. Dicho modelo requiere que se realicen pruebas de tensión a distintas temperaturas a una muestra de material que será empleado para la aplicación lo cual no resulta muy práctico ni eficiente. En dicha ecuación es preciso determinar  $\sigma_A$  en función del desplazamiento, o bien de la deformación, ya que la carga aplicada proviene del resorte y depende de la compresión del mismo. Por otro lado, es preciso tomar en consideración que el esfuerzo aplicado sobre cada alambre no debe exceder de 100 MPa y que la deformación máxima recuperable depende del MMF empleado.

Considerando el esquema de la Figura 4.4 tenemos que, el esfuerzo aplicado en los alambres y la deformación del mismo pueden ser escritas como:

$$\varepsilon = \frac{l_0 - l}{l_0} \quad (4.3)$$

$$\sigma_A = \sigma = \frac{Kl_0}{A} \varepsilon$$

donde:  $l_0$  es la longitud del alambre sin carga

$l$  es la longitud del alambre a aplicarle un esfuerzo  $\sigma$

$K$  es la constante del resorte

$A$  es el área de la sección transversal del alambre

Considerando las restricciones de esfuerzo y deformación máximas recomendadas para el diseño, se dieron por conocidos: a) la constante del resorte, b) el área de la sección transversal del alambre. Así mismo de las ecuaciones del modelo empleado se determinan: a) la longitud que deben tener los alambres ( $l_0$ ) y b) la contracción máxima que sufrirán ( $l_f$ ).

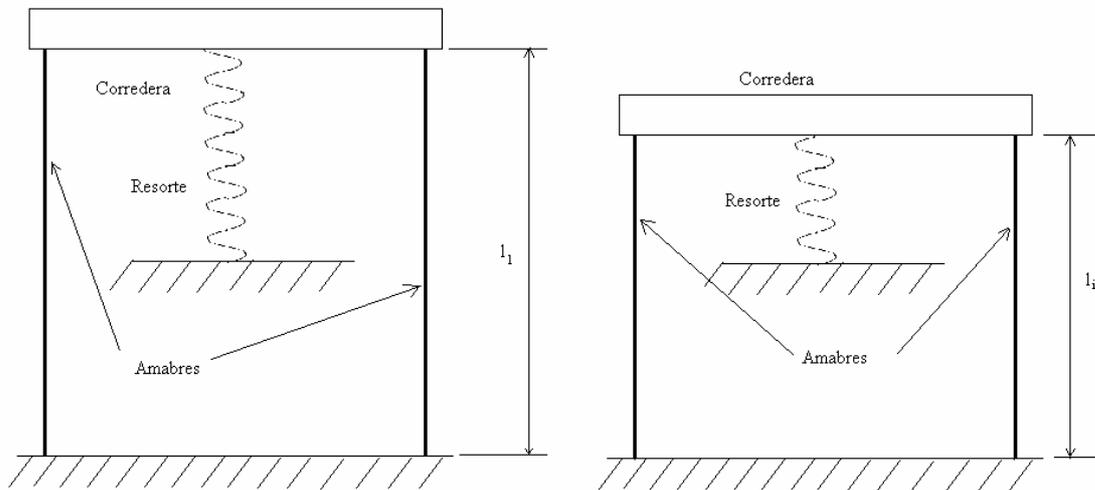


Figura 4.4. Conjunto: alambres-corredera-resorte del termo-actuador.

Por otro lado, es preciso tomar en consideración que el alambre cambiará de forma siempre y cuando esté sujeto a una precarga proveniente del resorte. Es decir, que los alambres estarán sujetos a un esfuerzo inicial y esta disminuirá conforme el resorte se contraiga. Lo anterior indica que los alambres estarán sujetos a un esfuerzo variable que dependerá de la deformación.

El esfuerzo y la deformación inicial de los alambres ( $\varepsilon_0$ ) pueden ser determinadas empleando las ecuaciones del modelo empleado tomando una  $l_1$  como la longitud que adquieren los alambres al ser aplicada la precarga ( $\sigma_1$ ).

$$\varepsilon_1 = \frac{l_0 - l_1}{l_0}$$

$$\sigma_A = \sigma_1 + \frac{kl_0}{A} \Delta\varepsilon \quad (4.4)$$

$$\sigma_1 = \frac{kl_0}{A} \varepsilon_1$$

donde:

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_1$$

Como podemos ver si  $\varepsilon$  de la ecuación (4.4) es igual con  $\Delta\varepsilon$  de la ecuación anterior y tomando  $\sigma_A$  del modelo empleado se tiene que (4.4) se convierte en una ecuación algebraica no lineal. Si se conocen los parámetros del material empleado, dicha ecuación puede ser resuelta para  $\Delta\varepsilon$  en función de la temperatura empleando algún método numérico conocido como el de Newton-Raphston.

Luego conociendo  $\Delta\varepsilon$  es posible determinar la longitud que tomará el resorte para cada temperatura mediante la ecuación:

$$l = l_0 [1 - (\varepsilon_1 + \Delta\varepsilon)] \quad (4.5)$$

El diseño de los mecanismos acoplados queda determinado tomando como desplazamiento de la corredera el valor de  $l$ , la condición de que el eslabón de salida proporcione un giro de  $180^\circ$  al calentar el alambre y las restricciones de espacio disponible.

Es claro que el modelo desarrollado en el presente trabajo, que se presentó en el capítulo 3, puede ser aplicado a este problema como una relación: esfuerzo-deformación-temperatura en los siguientes casos:

- a) Si el alambre es monocristalino y se conoce la orientación del mismo se puede emplear el razonamiento presentado en la sección 3.1 considerando la variación de la carga proveniente del resorte.
- b) Si el alambre es policristalino y puede ser considerado como un policristal en serie, y se conoce la variación de las orientaciones, se puede aplicar el razonamiento presentado en la 3.3.1 considerando la variación de la carga aplicada.
- c) Si el alambre no puede ser considerado como un policristal en serie pero se conoce la distribución de orientaciones se puede emplear el procedimiento de la sección 3.3.2 ya sea para determinar el desplazamiento o bien para obtener los parámetros que requiere el modelo parabólico mencionado, sin necesidad de realizar pruebas de tensión a la muestra de material que será empleado.

## Conclusiones

Se obtuvo un modelo matemático que permite simular el comportamiento termomecánico que presentan los MMF tanto en forma de monocristales como de policristales. El modelo obtenido está compuesto por tres partes fundamentales los cuales permiten representar los aspectos más importantes de fenómeno:

- a) Un campo vectorial no homogéneo capaz de considerar de manera acoplada las tres regiones de deformación que se presentan durante la transformación.
- b) Una relación cinética que relaciona el esfuerzo aplicado, constante o variable, la temperatura y el crecimiento de la nueva fase en el material.
- c) La aplicación de la operación “cambio de base” aplicada a una función no lineal que relacionan los parámetros de red de los sistemas de transformación y los parámetros de orientación de la muestra, ambos referidos a una base canónica. Esta parte del modelo permite considerar los efectos anisotrópicos de la deformación transformacional.

Los datos de entrada del modelo son parámetros propios del material como los sistemas de transformación, las temperaturas de transformación, la razón de esfuerzo, así como los parámetros de la orientación de la carga y/o del sistema de observación.

El modelo desarrollado permite simular los siguientes patrones y curvas que se pueden obtener mediante técnicas experimentales:

- a) Distorsión de la superficie de observación que puede ser obtenida mediante microscopía óptica.
- b) La distorsión que sufre una marca testigo gravada en la superficie de observación de la muestra.
- c) El campo de desplazamiento que puede ser obtenido mediante correlación de imágenes.
- d) Las curvas esfuerzo-deformación, deformación-temperatura y desplazamiento temperatura en un punto de la muestra los cuales son obtenidas en pruebas de tensión simple y flexión en cantilever.

El modelo desarrollado fue aplicado para calcular los comportamientos descritos en los siguientes casos:

### Monocristales

- a) Sujetos a tensión simple a carga constante y enfriamiento.
- b) Tensión simple a temperatura constante.
- c) Flexión en cantilever bajo carga constante y enfriamiento.

### Policristales

- a) En un arreglo de cristales en serie sujetos a tensión simple a temperatura constante y enfriamiento.
- b) En un arreglo de pseudos-policristal con granos puntuales sujetos a deformación constante y enfriamiento.

Así mismo, con el fin de presentar aplicaciones concretas de los casos resueltos para el modelo desarrollado fueron diseñados dos dispositivos que emplean MMF en forma de placas y alambres sujetos a flexión en cantilever y tensión uniaxial respectivamente. Los dispositivos diseñados fueron:

- a) Persianas inteligentes que emplean láminas fabricadas con una AMF sujetas a flexión en cantilever con carga variable.
- b) Actuador termomecánico que usa alambres fabricados con un MMF sujetos a tensión a carga variable.

## Apéndice A.- Generalidades de los MMF

### A.1.-Introducción

Los llamados Materiales con Memoria de Forma (MMF) son aquellos que presentan un cambio en su forma al ser calentados por encima de cierta temperatura crítica. Dicho comportamiento se debe a que en ellos se presenta una transformación de fase denominada martensítica a partir de una fase madre llamada austenita la cual puede ser inducida por temperatura, esfuerzo o combinación de ambas (esfuerzo y temperatura) y por la aplicación de campos magnéticos[1, 2 ].

En realidad, los MMF presentan una serie de efectos entre los cuales se encuentran: el efecto memoria de forma simple, el efecto superelástico, el efecto combinado y el doble efecto memoria de forma entre otros. Como se discutirá posteriormente dichos efectos, se asocian a la transformación martensítica.

El efecto memoria de forma simple consiste esencialmente en una recuperación de la deformación, aparentemente plástica, impuesta a un material estando a una temperatura menor la temperatura crítica y que es recuperada por un simple calentamiento.

El efecto superelástico consiste en que el material con memoria de forma estando a una temperatura por encima de la crítica y ser sometido a esfuerzos, es capaz de experimentar deformación de hasta 100 veces mayor que la que pueden experimentar los materiales convencionales.

El efecto combinado consiste en que el material sujeto a una carga constante, toma dos formas predeterminadas al variar la temperatura entre dos temperaturas críticas.

El comportamiento del material al experimentar el doble efecto memoria de forma es esencialmente el mismo que en el caso anterior, es decir el material toma dos formas predeterminadas al variar la temperatura, sólo que en este caso no se aplica carga alguna. Dicho efecto se obtiene después de que el material es sometido a un proceso termomecánico llamado educación.

### A.2.-Definición de Transformación martensítica

La transformación martensítica (TM), que caracteriza a los MMF y que es la responsable de los efectos asociados, ha sido definida como una transformación displaciva, de primer orden constituida principalmente por una deformación de corte [3].

Es displaciva porque durante la TM no hay difusión atómica y, por lo tanto, no hay cambio en la composición química del material, los átomos presentan pequeños desplazamientos menores al parámetro de red. Como se puede apreciar en la Figura 1.1, durante la TM la estructura de la fase madre sufre una distorsión del tipo cortante puro acompañado de un pequeño movimiento coordinado de los átomos del centro llamado “Shuflé”.

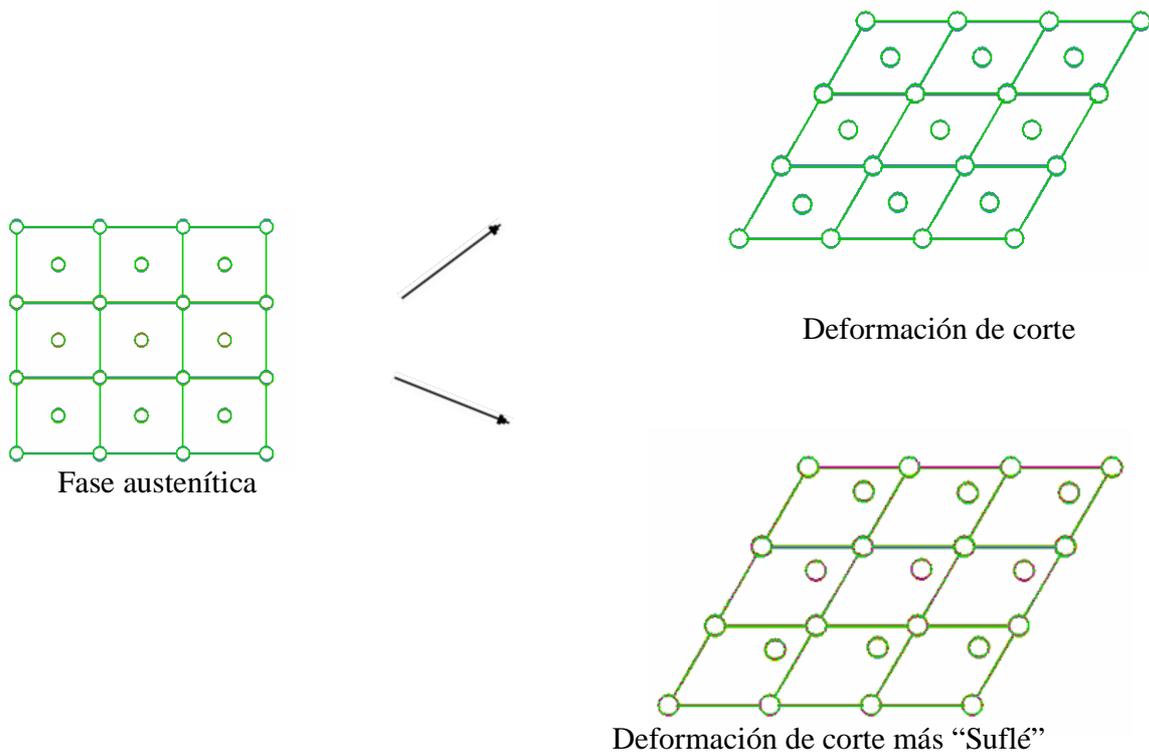


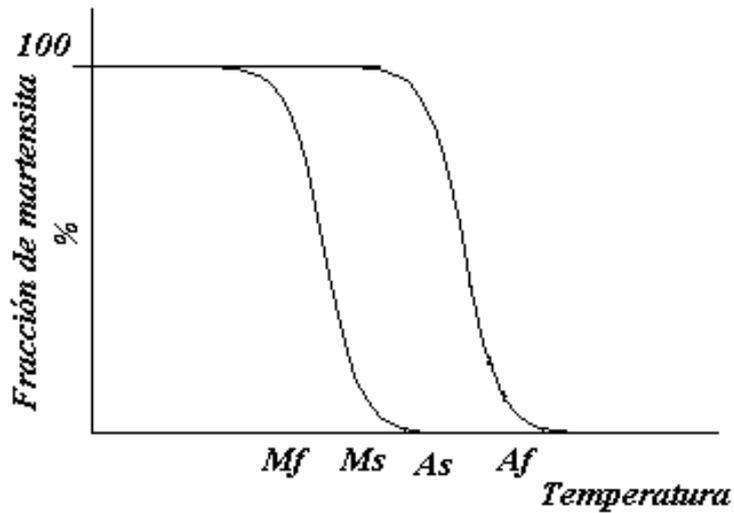
Figura A.1. Diagrama que muestra la deformación que sufre la estructura de la fase madre durante la TM.

Por ser de primer orden, presentan discontinuidades en las primeras derivadas de sus potenciales termodinámicos como son: el volumen, la presión, etc. Existe un intervalo de temperatura en el cual ambas fases, la austenítica y la martensítica, coexisten además de que se presenta una entalpía de formación.

Cuando la TM es inducida por enfriamiento, puede ser descrita mediante un diagrama como el que se muestra en la Figura A.2 donde se presenta una gráfica fracción volumétrica transformada-temperatura ( $f - T$ ). En la Figura A.2 se puede ver que existen cuatro temperaturas característica para la transformación martensítica y su inversa. Dichas temperaturas son  $M_s$ ,  $M_f$ ,  $A_s$ ,  $A_f$  las cuales representan el inicio y el fin de la transformación martensítica así como el inicio y fin de la transformación inversa, respectivamente. Claramente se ve en la Figura A.2 que  $f$  (fracción volumétrica de martensita) varía en el intervalo  $0 \leq f \leq 1$ .

Por convención, se considera que la TM, así como su inversa, ha iniciado cuando el 10% de la fracción volumétrica del material ha transformado y se considera que ha finalizado cuando se alcanza el 90% [1].

Por otro lado, debido a que la transformación martensítica es de primer orden se presenta una



entalpía de transformación ( $\Delta H$ ) la cual puede ser observada en una prueba de calorimetría diferencial de barrido. En la Figura A.3 se muestra una curva típica: flujo de calor-temperatura que se obtiene en una calorimetría diferencial de barrido practicada a un MMF.

Figura A.2. Curva fracción volumétrica-temperatura

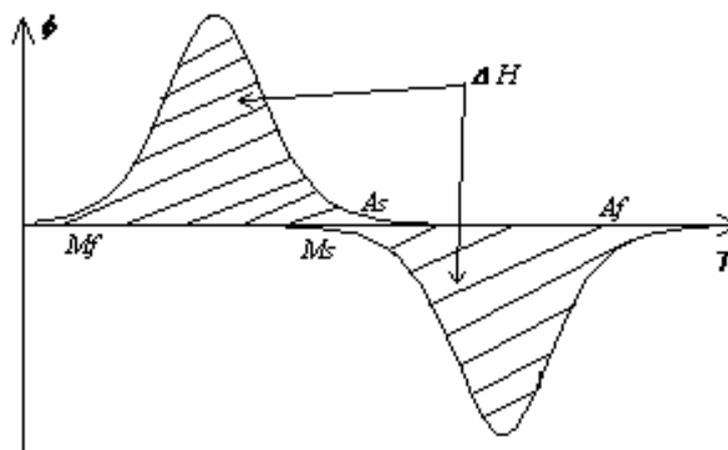


Figura A.3. Curva flujo de Calor-Temperatura, típica de una prueba de calorimetría diferencial de barrido en un material con memoria de forma

La parte superior de la curva de la Figura A.3 corresponde con el enfriamiento y la parte inferior con el calentamiento. Cabe destacar que en la Figura A.3 se muestran las temperaturas críticas mostradas también en la Figura A.2 así como la entalpía de formación.

Según se ha reportado en la literatura [1, 4], la fracción volumétrica transformada ( $f$ ) es proporcional a la entalpía de transformación ( $\Delta H$ ) lo cual puede expresarse como:

$$f \propto \int_{T_1}^T \phi dT \quad (\text{A.1})$$

donde:  $\phi$ , como se puede ver en la Figura A.3, es el flujo de calor a través del material como función de la temperatura. Tomando solamente la parte superior de la curva mostrada en la Figura A.3, que corresponde con el enfriamiento de la muestra, tenemos que  $T_1$  puede ser tomada como  $-\infty$  y  $T$  como una temperatura menor  $M_s$ . De lo anterior, se ve claramente que:

$$\Delta H = \int_{-\infty}^{\infty} \phi dT \quad (\text{A.2})$$

La entalpía de formación es un parámetro de gran importancia para los MMF ya que es propio de cada tipo de transformación. Como se explicará posteriormente, existen varios tipos de martensitas que pueden ser inducidas a partir de distintos tipos de austenitas que pueden presentarse en los MMF. Los diferentes tipos de austenitas y martensitas se deben a que poseen diferentes estructuras aunque la estructura de la fase austenita en los MMF posee simetría cúbica centrada en el cuerpo.

Por otro lado, como se mencionó, la transformación martensítica puede ser inducida por esfuerzo o bien por una combinación de esfuerzo y enfriamiento. Este tipo de transformación así como aquella que se induce por enfriamiento solamente, representada en las Figuras A.2 y A.3, pueden ser apreciadas en los diagramas esfuerzo-temperatura-transformación como el que se muestra en la Figura A.4.

En la Figura A.4 se aprecia que cuando la transformación martensítica es inducida por enfriamiento ( $\sigma=0$ ) esta inicia en  $T=M_s$  y finaliza en  $T=M_f$  lo cual es consistente con el diagrama mostrado en las Figuras A.2 y A.3. Por otro lado, en Figura A.4 también se puede ver que cuando la transformación martensítica es inducida por esfuerzo ( $T= \text{constante} > M_s$ ) ésta inicia cuando el esfuerzo alcanza un cierto valor crítico  $\sigma_c$  y termina cuando el esfuerzo es igual a  $\sigma_f$  y que ambos dependen de la temperatura a la cual se realiza la prueba.

En realidad, los diagramas esfuerzo-temperatura-transformación de AMM son considerablemente más complejos que el de la Figura A.4 ya que algunos MMF presentan diferentes tipos de transformaciones en determinados rangos de temperatura, como es el caso de aleaciones de Cu-Al-Ni [5, 6], y en la mayoría de los casos se presentan transformaciones sucesivas es decir transformaciones del tipo: martensita-martensita. En la Figura A.4 se muestran los diagramas esfuerzo-temperatura-transformación correspondientes al Cu-Al-Ni[5,6], Cu-Zn-Al[7] y Cu-Al-Be[8].

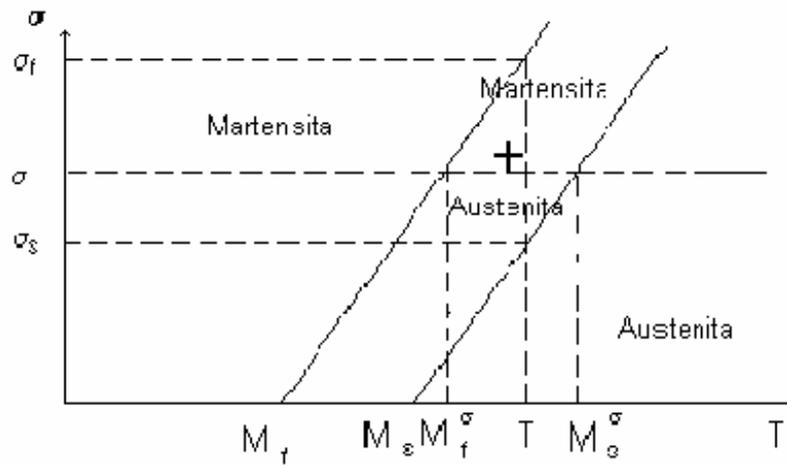
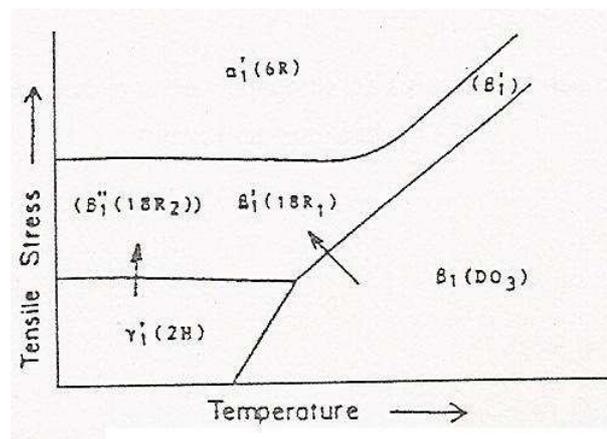
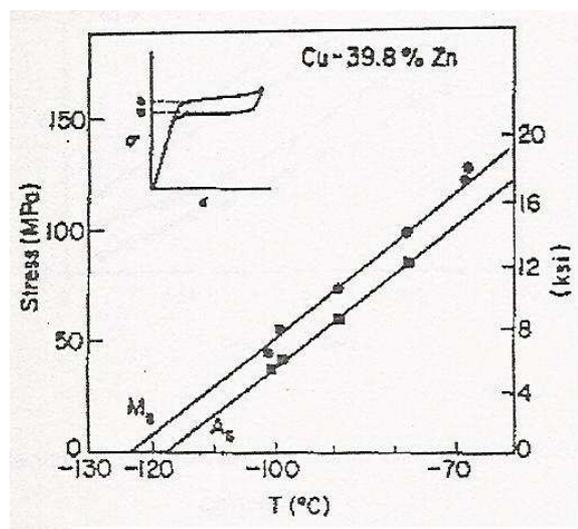


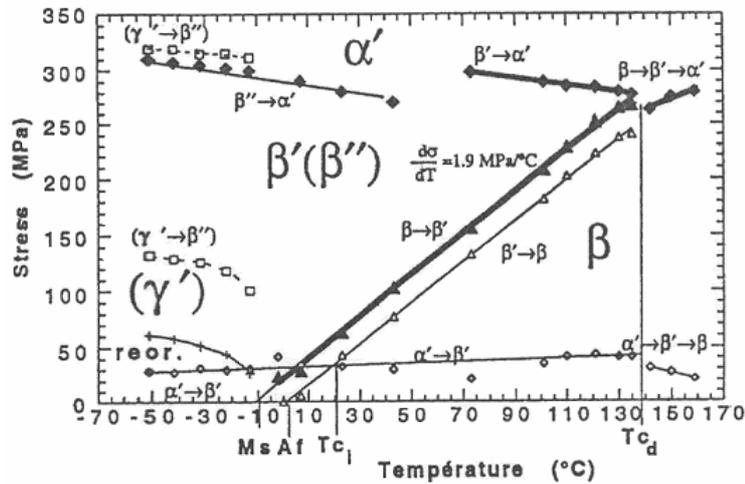
Figura A.4. Diagrama esfuerzo-Temperatura-Transformación típico de un material con memoria de forma.



(a)



(b)



(c)

Figura A.5. Diagrama esfuerzo-temperatura-transformación correspondientes a AMF:

a) Cu-Al-Ni[6], b) Cu-Zn-Zl[7 ] y c) Cu-Al-Be[8 ].

Según se ha reportado en la literatura [1, 4], la magnitud del esfuerzo crítico ( $\sigma_c$ ) depende de la temperatura y sigue la relación de Calssius-Clapeyron, la cual puede ser escrita como:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial M_s} = -\frac{\Delta H}{T \varepsilon_o} \quad (\text{A.3})$$

donde:  $\frac{\partial \sigma}{\partial M_s}$  es la razón de esfuerzo (las cual corresponde con la pendiente de la recta que se

muestra en la Figura A.4),  $\Delta H$  es la entalpía de transformación,  $T$  es la temperatura a la cual se induce la transformación y  $\varepsilon_o$  es la deformación transformacional la cual depende de la orientación cristalográfica del material que se discutirá ampliamente más adelante.

Es importante mencionar que el valor de la razón de esfuerzos, así como el de la entalpía de formación y la deformación transformacional son diferentes para cada tipo de TM que se presenta en cada MMF y que se describen posteriormente. Así mismo, es importante destacar que el valor del esfuerzo crítico ( $\sigma_c$ ), que es el esfuerzo necesario para iniciar la transformación a temperatura constante, corresponde con el que se obtiene en pruebas en tensión uniaxial. Para estados de esfuerzos planos o tridimensionales, la determinación del esfuerzo crítico es considerablemente más complejo ya que se trata más bien del esfuerzo “efectivo” necesario para iniciar la transformación. Como se discutirá posteriormente, en los últimos años se han venido realizando una serie de estudios al respecto ya que este parámetro del comportamiento de los MMF es uno de los que presenta alta anisotropía mecánica [9-21, 23, 24, 25].

#### A.4.-Cambios estructurales

Según se ha reportado en la literatura, la fase madre en MMF posee una estructura de simetría cúbica centrada en el cuerpo, en distintas modalidades [1,14]. Por su parte la estructura de la

fase martensítica es generalmente de largo período con celdas unitarias que pueden ser: ortorómbica, monoclinica, triclínica, entre otras[1,14]. En la Figura A.6 se muestran las estructuras de las fases austenítica y martensítica típicamente presentes en AMM de cobre.

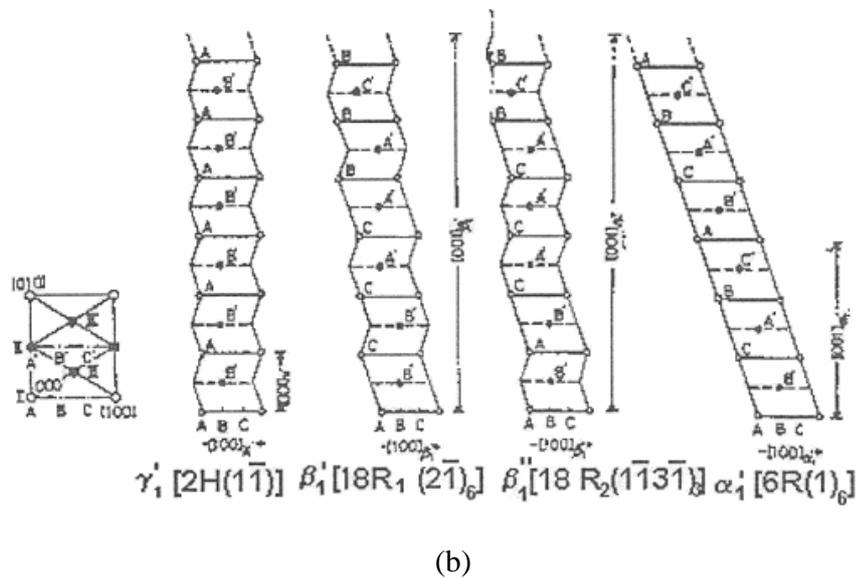
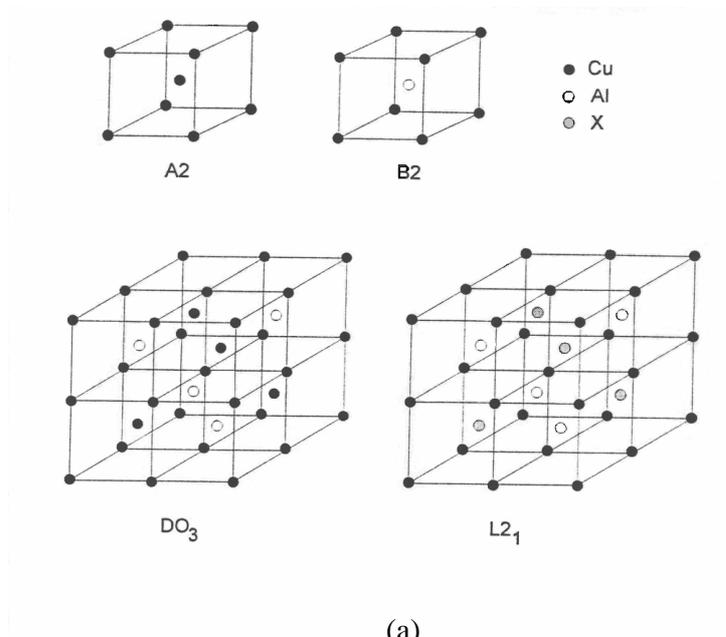


Figura A.6. Estructuras típicamente presentes en AMF base cobre: a) fase austenítica y b) fase martensítica [1, 14].

De hecho, según se ha reportado en la literatura, en AMF base cobre se pueden presentar transformaciones del tipo  $\beta \rightarrow \beta'$  y  $\beta \rightarrow \gamma'$ . La letra griega  $\beta$  corresponde con la fase austenítica, generalmente desordena, cuya estructura puede ser ya sea B2 o A2 mientras que las estructura

DO<sub>3</sub> o L2<sub>1</sub> corresponden con estructuras ordenadas y se denotan como  $\beta_1$ . Por otro lado la fase martensítica, en aleaciones de cobre, puede tomar cualquiera de las 4 estructuras que se muestran en la Figura 6 y se denotan por  $\beta'$ ,  $\beta''$ ,  $\gamma'$  y  $\alpha'$ . Cuando las estructuras son ordenadas se denotan por:  $\beta'_1$ ,  $\beta''_1$ ,  $\gamma'_1$  y  $\alpha'_1$ .

Como ha sido reportado [1], existe un plano que se mantiene invariante durante la transformación martensítica, dicho plano es llamada plano de hábito o basal. Como se mencionó, durante la TM se presenta una deformación de red que es esencialmente una deformación de corte paralela al plano de hábito. Cuando la transformación es inducida por esfuerzo inicia cuando la(s) componente(s) cortante(s) paralela(s) a dicho plano alcanzan cierto valor crítico. Una vez iniciada la transformación ésta progresará ya sea al disminuir la temperatura, si la transformación es inducida por enfriamiento, o bien con ligeros incrementos del esfuerzo aplicado, si la transformación es inducida por esfuerzo, hasta cubrir todo el material.

En un cristal con estructura cúbica se han encontrado que existen 6 planos de hábito con 4 posibles direcciones de corte cada uno con lo cual es posible obtener 24 variantes de martensita en el material [1]. Cuando la transformación es inducida por enfriamiento, se presenta un mecanismo de autoacomodo que permite que el volumen del material se mantenga prácticamente constante, sin embargo, cuando la transformación es inducida por esfuerzo o por combinación de esfuerzo y temperatura la formación de variantes toma rasgos especialmente importantes que se describen a continuación.

En pruebas de tensión uniaxial, se ha encontrado que la variante que se formará será aquella que posea el máximo valor del factor de Schmid para la orientación del cristal [1]. De hecho, estudios recientes realizados en aleaciones de Cu-Ni-Al[11] y Ni-Ti[12] han revelado que de las 24 posibles variantes de martensita que pueden ser inducidas por esfuerzo existen grupos de 4 variantes equi-probables, es decir que tienen el mismo factor de Schmid para una orientación fija de la muestra. La formación de variantes favorecidas por la orientación es especialmente crítica para la determinación del esfuerzo crítico ( $\sigma_c$ ) sobre todo para estados de esfuerzos biaxiales o triaxiales. Recientemente, se han reportado en la literatura un buen número de trabajos en los que se estudia este aspecto de los MMF. Los estudios presentados, los cuales se basan en la llamada teoría fenomenológica de la transformación martensítica (TFTM) y en el modelo de Taylor, muestran que el valor del esfuerzo crítico, más bien definido como un esfuerzo equivalente, depende fuertemente de la orientación del cristal. En este mismo tópico de estudio, Patoor et al [9] han propuesto un criterio macroscópico, análogo al de Von-Mises para del esfuerzo de cedencia en materiales convencionales, que pretende estimar la combinación de esfuerzos principales, es decir el esfuerzo equivalente, requerida para que se presente la transformación martensítica en el material. En general, en el criterio propuesto por Patoor se observa que el “diagrama” de transformación es considerablemente asimétrico [9].

#### 1.4.1.-Formación de variantes autoacomodantes

Como se mencionó, existe una diferencia apreciable entre la estructura de la fase austenítica y la fase martensítica; sin embargo, cuando la transformación es inducida por enfriamiento el volumen del material se mantiene prácticamente constante [1]. Lo anterior se debe a que en los MMF, a diferencia de lo que ocurre en otros tipos de transformaciones martensíticas, se presenta un mecanismo de auto-acomodo reversible llamado: “formación de variantes autoacomodantes” [1]. Dicho mecanismo consiste esencialmente en que las variantes de martensita que aparecen

en el material se orientan de tal manera que se compensa la deformación de una con la de otra que se orientó en dirección opuesta. Un diagrama bidimensional que muestra el mecanismo de autoacomodo se presenta en la Figura A.7 (a) mientras que la Figura A.7 (b) se muestra un diagrama para el caso tridimensional.

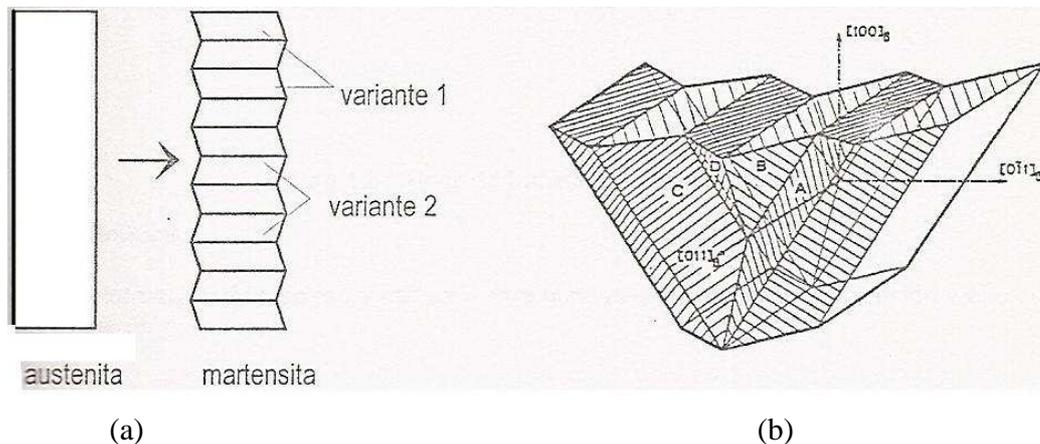


Figura A.7. Diagramas que muestran el mecanismo de autoacomodo que se presenta en los MMF durante la transformación martensítica inducida por enfriamiento: (a) Diagrama bidimensional y [14] (b) diagrama tridimensional [14].

Es importante mencionar que en los MMF la transformación martensítica es de tipo termoelástica, a diferencia de otras transformaciones martensíticas observadas principalmente en aceros, por lo que progresa sólo si disminuye la temperatura en el material y se recupera en cuanto la temperatura incrementa [1]. Así mismo, es importante mencionar que cualquiera de la 24 variantes de martensita que se forme en el material recuperará la estructura de la fase austenítica que la originó [1]. La importancia de las dos características anteriores es que son las que permiten que se presente en los MMF el llamado: “efecto memoria de forma simple”.

En el caso de transformaciones martensíticas no termoelásticas, el mecanismo de autoacomodo es el deslizamiento de planos atómico el cual no es reversible [1]. Esta característica se manifiesta en el tamaño de la histéresis la cual es considerablemente mayor en este caso que el de transformaciones martensíticas termoelásticas como las que se presentan en MMF. En la Figura A.8 se muestran una serie de curvas  $f-T$  para diferentes tipos de transformaciones martensíticas en donde se aprecia claramente el gran tamaño de la histéresis para transformaciones tipo Burts típica de transformación martensítica no termoelásticas.

Por otro lado, cuando la transformación es inducida por esfuerzo el mecanismo formación de variantes autoacomodantes no se presenta y debido a ello la transformación se caracteriza por una gran deformación elástica.

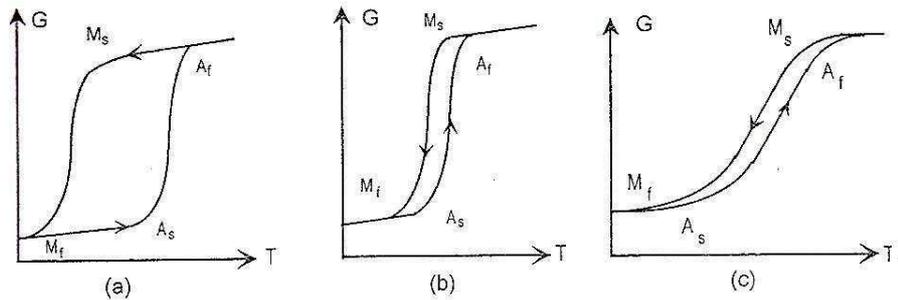


Figura A.8.- Diferentes tipos de curvas G-T para distintos tipos de transformaciones martensíticas. a) tipo Burst b) y c) termoelásticas.

#### A.5.-Comportamiento Mecánico de los MMF

La transformación martensítica inducida por esfuerzo involucra una variación considerable del comportamiento esfuerzo-deformación ( $\sigma$ - $\epsilon$ ) respecto al que presentan los materiales convencionales. En la Figura A.9 se muestra un diagrama esfuerzo-deformación-temperatura donde se aprecian los diferentes comportamientos que presenta una aleación de Ni-Ti con memoria de forma [7].

En la Figura A.9, se aprecian claramente los siguientes comportamientos:

- a) A una temperatura menor que  $M_f$ , si el material es cargado y descargado persiste una deformación aparentemente plástica que es recuperada al calentar el material por encima de la temperatura  $A_f$ . Este comportamiento corresponde con el llamado: “efecto memoria de forma simple” que fue descrito en la sección A.1. Como se mencionó, al enfriar el material, por debajo de  $M_f$ , se presenta el mecanismo de formación de variantes autoacomodantes por lo que la forma de la muestra se mantiene prácticamente invariable. Al cargar el material, ocurre que las variantes de martensita se reorienta en la dirección en la que los esfuerzos cortantes inducidos por la carga son mayores. Al retirar la carga sólo algunas de las variantes reorientadas recuperan su orientación original mientras que otras no, lo que ocasiona que en el material persista una deformación macroscópica. Cuando el material es calentado por encima de  $A_f$ , todas las variantes de martensita retornan a la estructura de la fase autenítica, la cual es cúbica, por lo que la deformación es totalmente recuperada. Es mecanismo es mostrado en un esquema simple en la Figura A.10 en donde se emplea un modelo bidimensional.

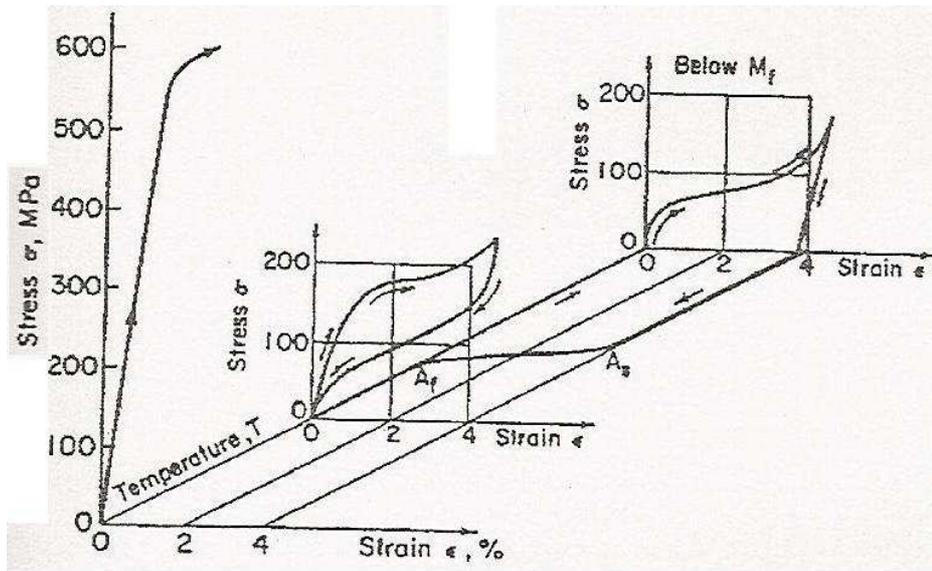


Figura A.9. Comportamiento mecánico a diferentes temperaturas que presentó una aleación de Ni-Ti con memoria de forma [7].

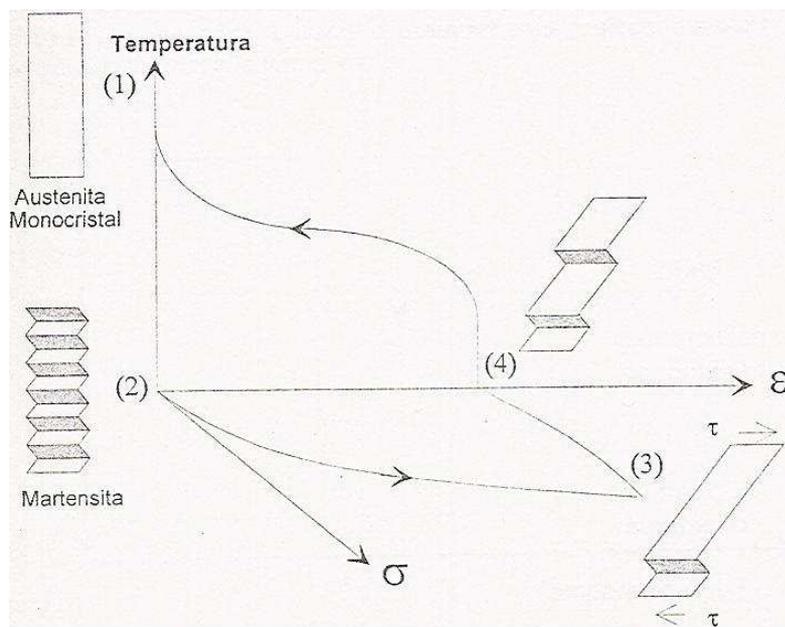


Figura A.10. Diagrama esquemático que muestra los efectos estructurales involucrados en el efecto memoria de forma simple [14].

- b) Estando el material a una temperatura mayor que  $A_f$ , es decir en fase austenítica, al ser aplicado un ciclo de carga y descarga en una prueba de tensión uniaxial la curva esfuerzo-deformación que se obtiene corresponde con el llamado: “lazo superelástico” el cual se asocia a la transformación martésica inducida por esfuerzo (TMIE) [5]. Para valores bajos de esfuerzo el material presenta un comportamiento lineal, similar a que presentan los materiales que siguen la ley de Hooke. Sin embargo a determinado valor

de esfuerzo, que depende de la temperatura de prueba, se presenta una meceta de deformación que se caracteriza por un incremento en la deformación originada por pequeños incrementos en el esfuerzo. En la Figura A.11 se muestran una serie de curvas esfuerzo-deformación correspondientes a una aleación de Cu-Zn-Al [7] sometida a cargas de tensión uniaxial a temperaturas  $T > A_f$ . Claramente, se observa en la Figura A.11 que el valor del esfuerzo crítico ( $\sigma_C$ ), que corresponde con el esfuerzo al cual se presenta la meceta, cambia con la temperatura lo cual es consistente con el diagrama mostrado en la Figura A.4.

En la región lineal de las curvas esfuerzo-deformación, el material se encuentra en fase auténica y el comportamiento observado corresponde con el comportamiento elástico de dicha fase, mientras que la meceta se asocia a la TMIE y la deformación es proporcional a la fracción volumétrica del material transformado. La deformación que sufre el material durante la transformación, la cual es la llamada: “deformación transformacional” ( $\epsilon_0$ ) [1], depende de cada MMF y de la orientación cristalina y se debe a que sólo se induce en el material aquellas variantes de martensita que se ven favorecidas por el esfuerzo aplicado, es decir no se presenta el mecanismo de autoacomodo. Es importante mencionar que la deformación transformacional corresponde con el tamaño de la meceta en materiales monocristalinos como se muestra en la Figura A.12.

Al finalizar la meceta el material nuevamente se presenta un comportamiento lineal con una pendiente constante el cual se debe a que el material ha transformado totalmente y la pendiente constante se asocia al comportamiento elástico de la fase martensítica. Finalmente, al descargar el material se observa claramente que se presenta una histéresis debida a la disipación de energía, en forma de calor, que caracteriza a la transformación martensítica.

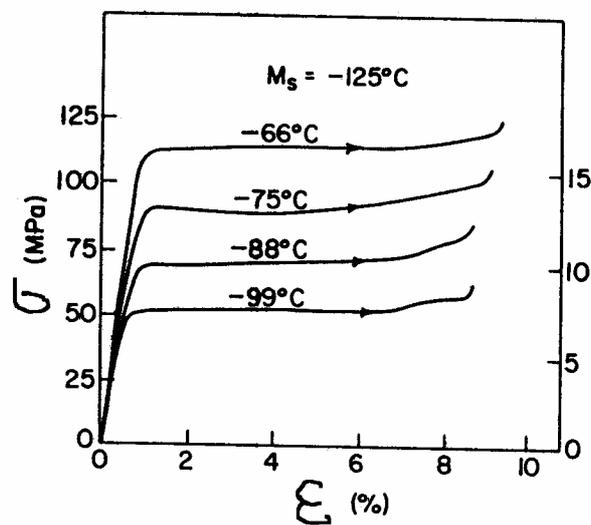


Figura A.11. Comportamiento esfuerzo-deformación correspondiente a una muestra de Cu-Zn-Al con memoria de forma sometida a pruebas de tensión uniaxial a diferentes temperaturas  $T > A_f$  [7].

Es importante mencionar que en el caso de MMF monocristalinos se presenta la meceta de deformación, descrita anteriormente, mientras que en materiales policristalinos se observa más bien un cambio de pendiente como se aprecia en la Figura A.12.

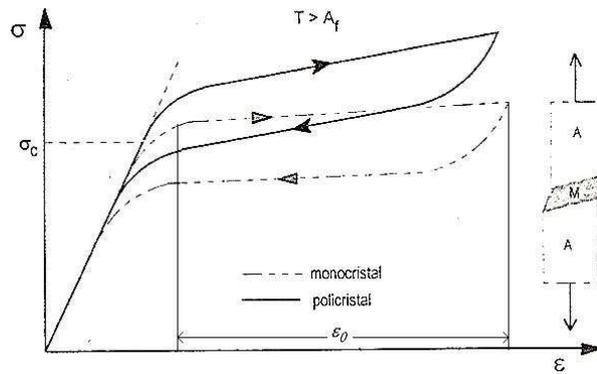


Figura A.12. Curvas esfuerzo-deformación correspondientes a un MMF monocristalino y otro policristalino.

El cambio de pendiente en los materiales policristalinos, se asocia a la alta anisotropía que presenta la deformación transformacional así como a otros efectos asociados a la microestructura. Recientemente, se ha reportado en la literatura [15-16] que en pruebas de tensión uniaxial el tamaño realito del grano altera considerablemente el valor del esfuerzo crítico en los MMF. Así mimo, se ha reportado también que el tamaño de grano altera el valor de las temperaturas críticas del material [17].

Es importante resaltar que la forma de las curvas esfuerzo-deformación correspondientes a cada tipo de transformación martensítica suelen presentar cambios importantes como se aprecia en la Figura A.13. En dicha Figura se muestran las curvas esfuerzo-deformación que se obtienen a inducir, en pruebas de tensión uniaxial, dos tipos de transformación martensítica por esfuerzo: una del tipo  $\beta \rightarrow \beta'$  y la otra del tipo  $\beta \rightarrow \gamma'$  en una aleación de Cu-Al-Ni [19, 20].

Como se puede apreciar en la Figura A.5 (a), cada tipo de transformación que se muestra en la Figura A.13 está acotada por una recta cuyas pendientes son diferentes entre sí. En la Tabla A.1 se presentan los valores de la razón de esfuerzo ( $\frac{\partial \sigma}{\partial T}$ ), la entalpía de transformación ( $\Delta H$ ) y la deformación transformacional ( $\epsilon_0$ ) correspondientes a cada tipo de transformación martensítica que se puede inducir en aleaciones de Cu-Al-Ni con memoria de forma.

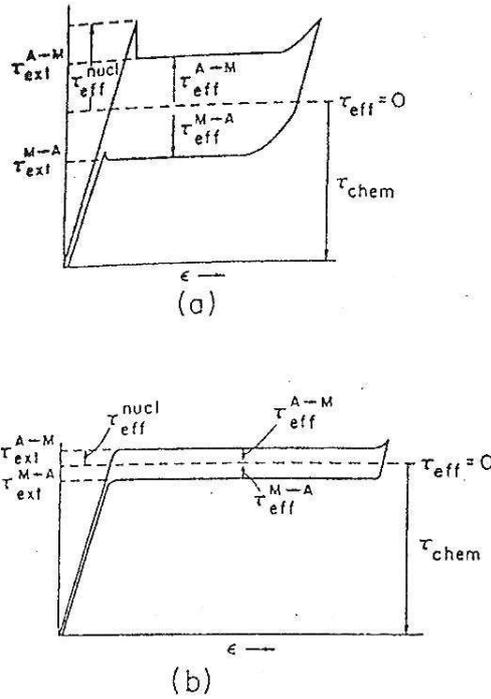


Figura A.13. Diferentes tipos de curvas esfuerzo-deformación generadas por dos tipos diferentes de transformaciones martensíticas presente en aleaciones de Cu-Al-Ni. a)  $\beta \rightarrow \beta'$  y b)  $\beta \rightarrow \gamma'$  [19].

Tabla A.1. Parámetros correspondientes a los diferentes tipos de transformación martensítica inducida por esfuerzo que se presentan en un aleaciones de Cu-Al-Ni[19].

Kind of transformation	$(d\sigma)/dT$ (MPa/K)	$\epsilon_0$	$\Delta S$ (J/mole · K)	$\Delta H$ (J/mole)	$\Delta H$ (cal/mole)	T (K)
$\gamma'_1 \rightleftharpoons \beta'_1$	-0.206	0.056	0.086	17.3	4.1	200
$\beta'_1 \rightleftharpoons \alpha'_1$	-0.139	0.112	0.117	46.7	11.2	400
$\beta'_1 \rightleftharpoons \alpha'_1$	-0.174	0.145	0.145	36.4	8.7	250
$\beta_1 \rightleftharpoons \beta'_1$	2.04	0.085	-1.30	-389	-93.0	300

Adicionalmente, la magnitud de la deformación transformacional ( $\epsilon_0$ ), que se muestra en la Figura A.12, presenta también un efecto anisotrópico severo ya que se ha reportado en la literatura que varía con la orientación cristalográfica [5, 11, 12, 13, 19]. Dicho efecto será discutido con más profundidad en la siguiente sección.

#### A.5.- Anisotropía mecánica de los MMF

Como se mencionó anteriormente, existen al menos tres aspectos relevantes referentes a la anisotropía mecánica que presentan los MMF. Dichos aspectos están relacionados con la estructura de la fase austenítica así como con la posición relativa de los planos de hábito y con la proyección de la deformación relativa al sistema de observación.

Como ya se dijo, la fase austenítica de las AMF posee generalmente una estructura de simetría cúbica centrada en el cuerpo, en sus distintas modalidades; B2, L2 y DO<sub>3</sub>. Por su parte, la estructura de la fase martensítica es generalmente de largo período con celdas unitarias que pueden ser: ortorrómbica, monoclinica, triclínica, entre otras[1]. A continuación, se presenta una

breve descripción de los tipos de anisotropía mecánica mencionados anteriormente, destacando los estudios que han sido realizados en cada caso.

#### A.5.1-Anisotropía de la fase austenítica.

Como se sabe, la fase austenítica en AMM presenta una estructura del tipo cúbico centrada en el cuerpo y cumple con la ley de Hooke de donde, es claro que se requieren 3 constantes elásticas independientes para describir su comportamiento. Según se ha reportado en la literatura [21], diversas AMF de cobre presentan anisotropía en su fase austenítica que van de 10.7 a 15 como se muestra en la Tabla A.2. Lo anterior tiene implicaciones severas en el valor de los módulos elásticos (ingenieriles) tales como: el módulo de Young y el de corte, ya que varían considerablemente con la orientación del material. De hecho se han reportado en la literatura, para AMF de Cu-Al-Ni, variaciones del módulo de Young de entre 23 y 230 MPa [5] como se muestra en la Figura A.14. En general, este efecto no ha sido considerado por los autores que proponen modelos para simular el comportamiento de los MMF a pesar de que puede ser significativo.

Tabla A.2. Valores de constantes elásticas de diversas AMF base cobre[21]

Elastic Constant at 293K x 10 <sup>10</sup> Pa	Cu-Al-Be Ms=260K	Cu-Al-Be Ms<30K	Cu-19.3Zn-13.0Al Ms=280K	Cu-15.1Zn-16.9Al Ms=220K	Cu-20.8Zn-12.7Al Ms=158K	Cu-14Al-4.2Ni Ms=264K
C <sub>L</sub>	22.87	22.76	20.3	23.1	19.4	23.1
C <sub>22</sub>	14.16	14.28	13.0	14.2	11.6	13.4
C <sub>12</sub>	12.74	12.54	11.8	12.8	10.2	11.7
C <sub>44</sub>	9.42	9.35	8.6	9.6	8.4	9.7
C'	0.71	0.87	0.54	0.7	0.71	0.87
A	13.2	10.7	15	13.5	11.8	11.0

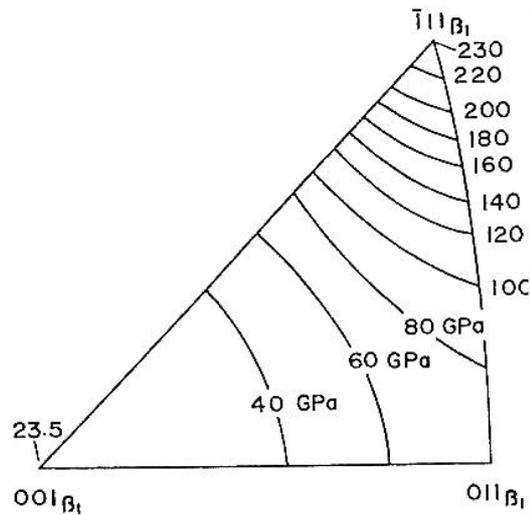


Figura A.14. Variaciones del Módulo de Young de la fase austenítica en aleaciones de Cu-Al-Ni.[5]

El origen de este tipo de anisotropía es la simetría de la celda unitaria. Una celda cúbica, como la de la fase austenítica, posee al menos 3 ejes de simetría: uno de 90° otro de 180° y otro más de 270° los cuales corresponden con las direcciones de las familias:  $\langle 0\ 0\ 1 \rangle$ ,  $\langle 0\ 1\ 1 \rangle$  y  $\langle 1\ 1\ 1 \rangle$  respectivamente. Los ejes de simetría de la celda cúbica se muestran en la Figura A.15.

Según se ha reportado en la literatura [22], la simetría de la celda cúbica hace que el número de constantes elásticas independientes sólo pueda ser reducido a 3 y no a 2 como sucede con los materiales isótopos. Como se muestra en la Tabla A.2 para materiales anisótropos con 3 constantes elásticas se define el llamado coeficiente de anisotropía A como [21,22]:

$$A = \frac{2C_{44}}{(C_{11} - C_{12})} \quad (\text{A.4})$$

Donde: las constantes  $C_{11}$ ,  $C_{12}$  y  $C_{44}$  son las constantes elásticas típicas del tensor de constantes elásticas reportadas en la literatura [21,22].

Cuando el coeficiente de anisotropía es cercana a 1 las variaciones del módulo elástico es pequeña, como ocurre con muchos materiales convencionales como el acero y el aluminio, sin embargo, para aleaciones de cobre dicho valor es mayor que 10 por lo que el módulo elástico presenta variaciones de 1 orden de magnitud.

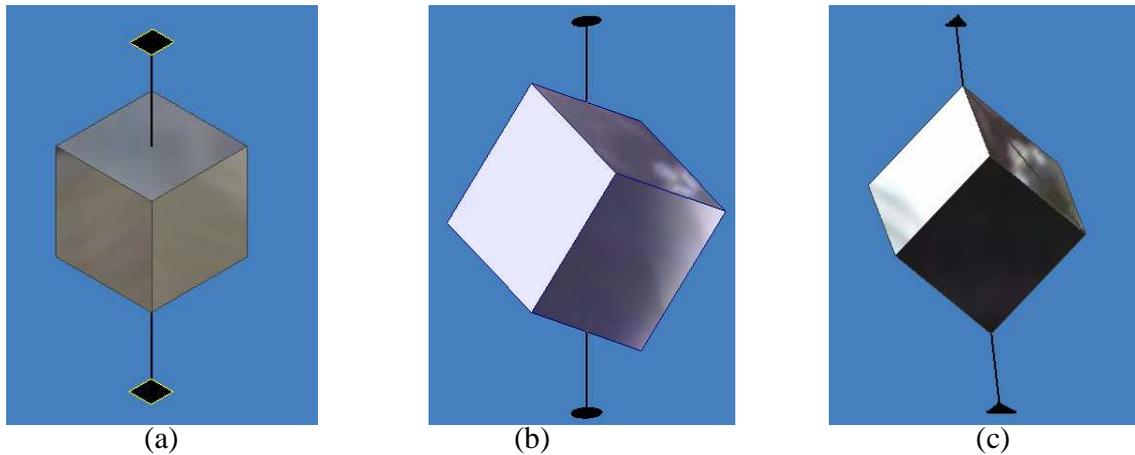


Figura A.15. Ejes de simetría de una estructura cúbica. a) Eje de simetría 4 ( $90^\circ$ ), b) eje de simetría 2 ( $180^\circ$ ) y c) eje de simetría 3 ( $120^\circ$ ).

#### A.5.2.-Anisotropía en el esfuerzo transformacional

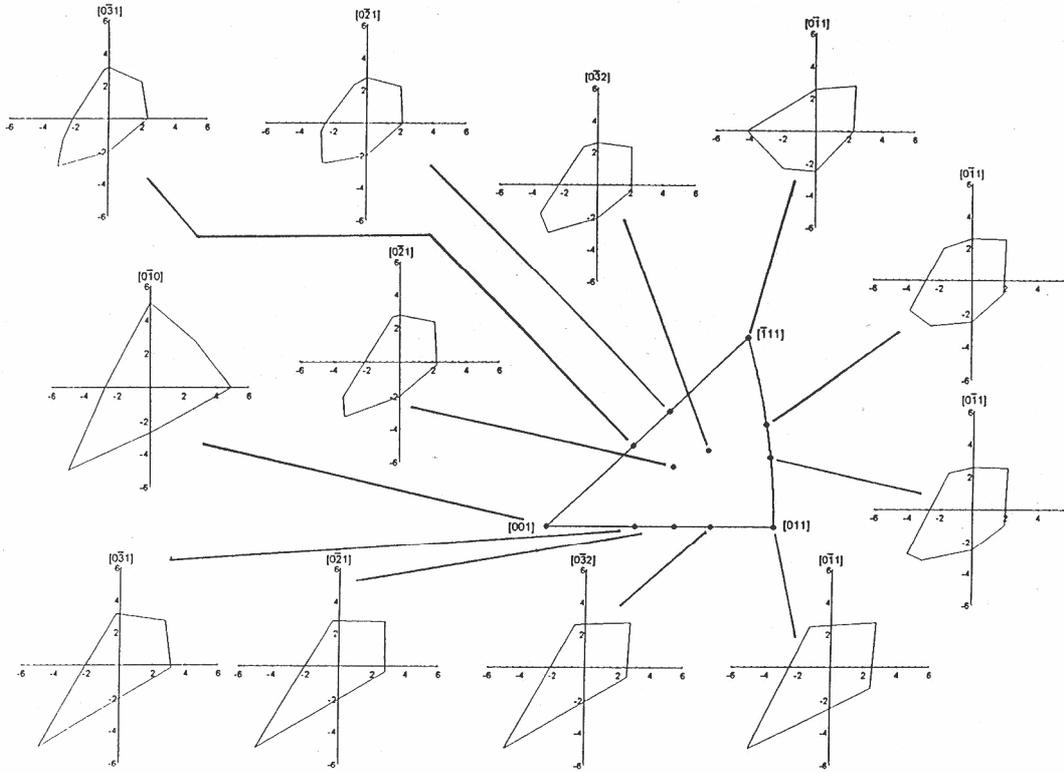
La anisotropía que se discute en la presente sección se relaciona con el esfuerzo necesario para iniciar la TM. Como se mencionó, cuando la TM es inducida por esfuerzo, la transformación iniciará cuando la(s) componente(s) cortante(s) paralela(s) a algunos de los planos de hábito alcanzan un valor crítico. En muestras sometidas a tensión uniaxial, se ha encontrado que la variante que se formará será aquella que posea el máximo valor del factor de Schmid para la orientación del cristal. De hecho, estudios recientes realizados en aleaciones de Cu-Ni-Al[12] y Ni-Ti[11] han revelado que de las 24 posibles variantes de martensita que pueden ser inducidas por esfuerzo existen grupos de 4 equiprobables, es decir que tienen el mismo factor de Schmid para una orientación fija del material.

La formación de variantes favorecidas por la dirección del esfuerzo aplicado es especialmente importante para la determinación del esfuerzo crítico ( $\sigma_c$ ) sobre todo para estados de esfuerzos biaxiales o triaxiales. Como se mencionó, se han reportado en la literatura un buen número de trabajos en los que se estudia este aspecto de los MMF. Los estudios presentados, muestran que la combinación de los esfuerzos principales necesarios para inducir la TM varían considerablemente con la orientación del cristal [11 y 12].

Como se sabe, para estados de esfuerzos biaxiales es posible representar gráficamente la combinación de esfuerzos necesaria para iniciar la transformación en un plano  $\sigma_1$ - $\sigma_2$ . Como referencia de dicha representación, la más conocida es la elipse rotada  $45^\circ$  que representa la teoría de cedencia de Von-Mises usada frecuentemente en materiales convencionales [4].

Considerando la definición típica del Factor de Schmid [4], es claro que su valor depende del llamado: Sistema de Transformación (ST) del material. El ST de una AMF está compuesto por las 24 combinaciones de planos de hábito y las direcciones de deslizamiento en las que se pueden inducir una variante de martensita. Los ST son particulares de cada AMF y son obtenidos empleando la TFTM y mediciones realizadas durante la TM empleando microscopía de transmisión[11 y 12]. En la Tabla A.3 se presenta una relación de los ST reportados en la literatura para aleaciones de Ni-Ti, Ni-Al Cu-Ni-Al [11 y 12]. Así mismo, en las Figura A.17,

A.18 y A.19 se muestran los diagramas de transformación, para diferentes orientaciones señaladas en la proyección estereográfica de la celda cúbica de la fase auténtica, correspondientes a estados de esfuerzos planos en aleación de Ni-Ti [11], Cu-Ni-Al[12] y Ni-Al[12] con MF.



Transformation surfaces associated with 12 different crystal orientations. The  $x_i$  axes are graphically represented on the stereographic triangle.

Figura A.17. Diagramas de transformación, para diferentes orientaciones, correspondiente a una aleación de Ni-Ti con MF [11].

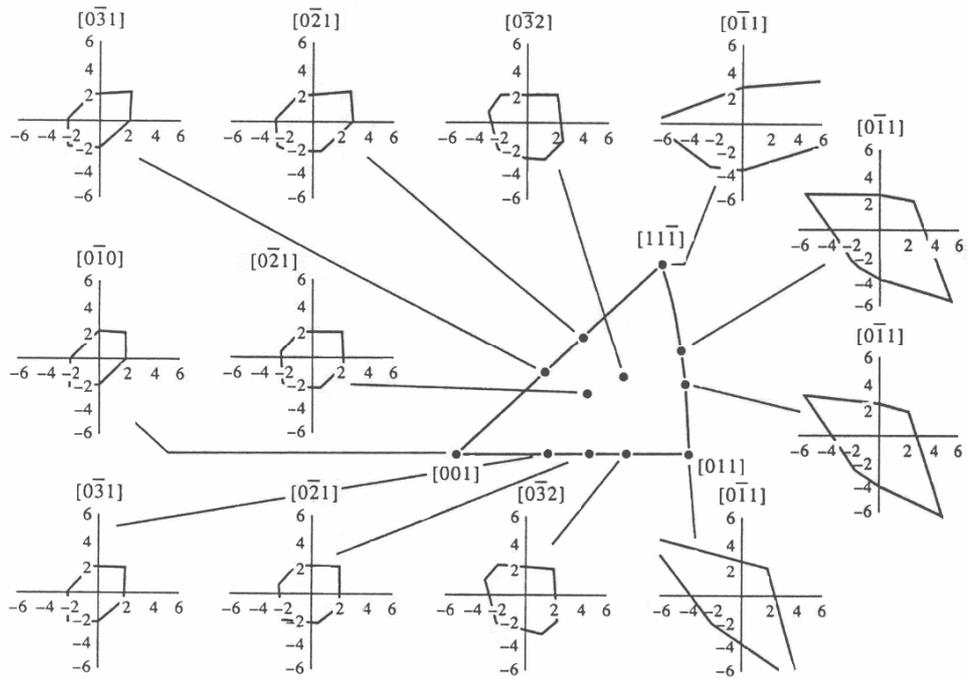


Figura A.18. Diagramas de transformación, para diferentes orientaciones, correspondiente a una aleación de Cu-Ni-Al con MF [12].

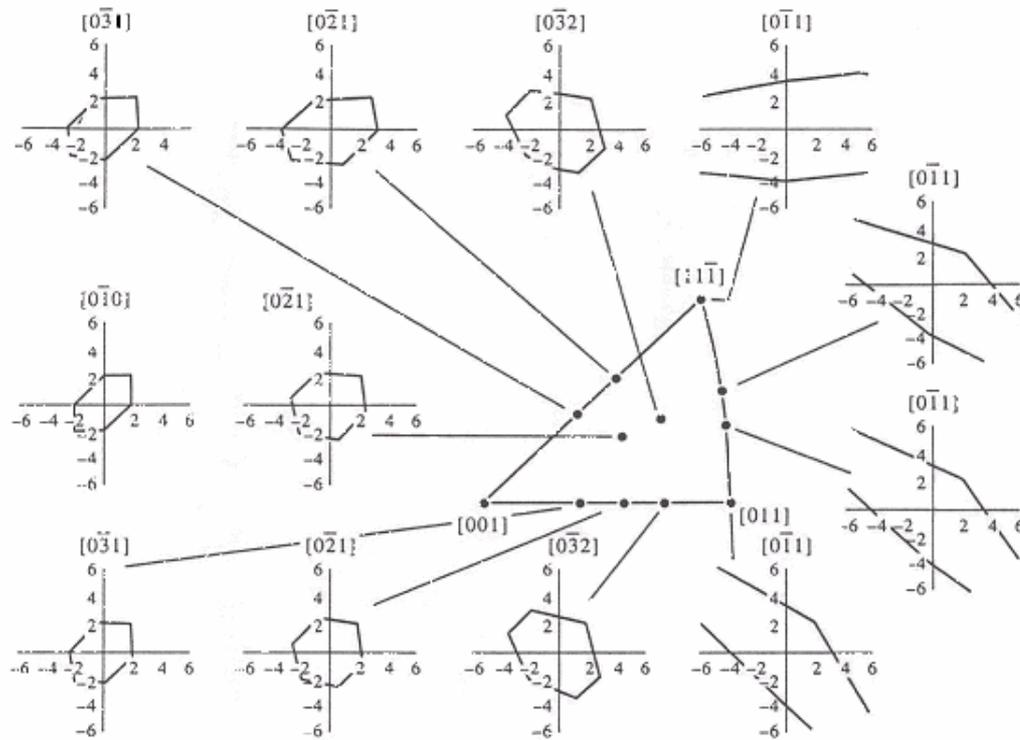


Figura A.19. Diagramas de transformación, para diferentes orientaciones, correspondiente a una aleación de Ni-Al con MF [12].

Tabla A.3. Sistemas de transformación para diferentes AMF obtenidas empleando la TFTM [12].

Phenomenological theory of martensite crystallography output			
SMA	Transformation system: habit plane/shear direction Ref. [13]	Magnitude of shear Ref. [13]	Dilatation strain to shear strain ratio
NiTi	$\{0.8889, 0.4044, 0.2152\} / \langle 0.4114, 0.4981, 0.7633 \rangle$	0.1307	0.026
Cu-Al-Ni	$\{0.7276, 0.6347, 0.2603\} / \langle 0.6787, 0.7213, 0.1384 \rangle$	0.0932	0.032
Ni-Al	$\{0.7135, 0.6944, 0.0936\} / \langle 0.6885, 0.7196, 0.0904 \rangle$	0.1222	0.025

En los diagramas de las Figuras A.17 a la A.19 se aprecia que aunque la forma de las curvas de transformación difieren considerablemente entre sí para un mismo material, se aprecia cierta similitud en cuando las orientaciones varían sobre alguno de los ejes del diagrama estereográfico como por ejemplo: de la dirección  $[0\ 0\ 1]$  a la  $[0\ 1\ 1]$ , de la  $[0\ 0\ 1]$  a la  $[1\ 1\ \bar{1}]$  y de la  $[0\ 1\ 1]$  a la  $[1\ 1\ \bar{1}]$ . Dicha uniformidad ha motivado a diversos autores como Patoor et al [10] y otros [16-18, 23-26] a proponer diagramas de transformación “genéricos”, tanto teóricos como experimentales, análogo al de Von-Mises para del esfuerzo de cedencia, que pretende estimar la combinación de esfuerzos principales, es decir el esfuerzo equivalente, requerida para que se presente la transformación martensítica en el MMF policristalinos. En general estos criterios coinciden en que el “diagrama” de transformación es considerablemente asimétrico. En la Figura A.20 se presentan algunos de los diagramas propuestos por algunos mencionados anteriormente.

En realidad, actualmente se han realizado trabajos que tienen como fin determinar los diagramas de transformación que siguen los MMF policristalinos y se han encontrado efectos asociados a la microestructura tales como el tamaño de grano y la textura cristalina [27]. Como era de esperarse, dichos aspectos influyen en el comportamiento de elementos sujetos a estados de esfuerzos planos puesto que, como se mencionó anteriormente, se ha encontrado que alteran considerablemente el comportamiento en tensión simple.

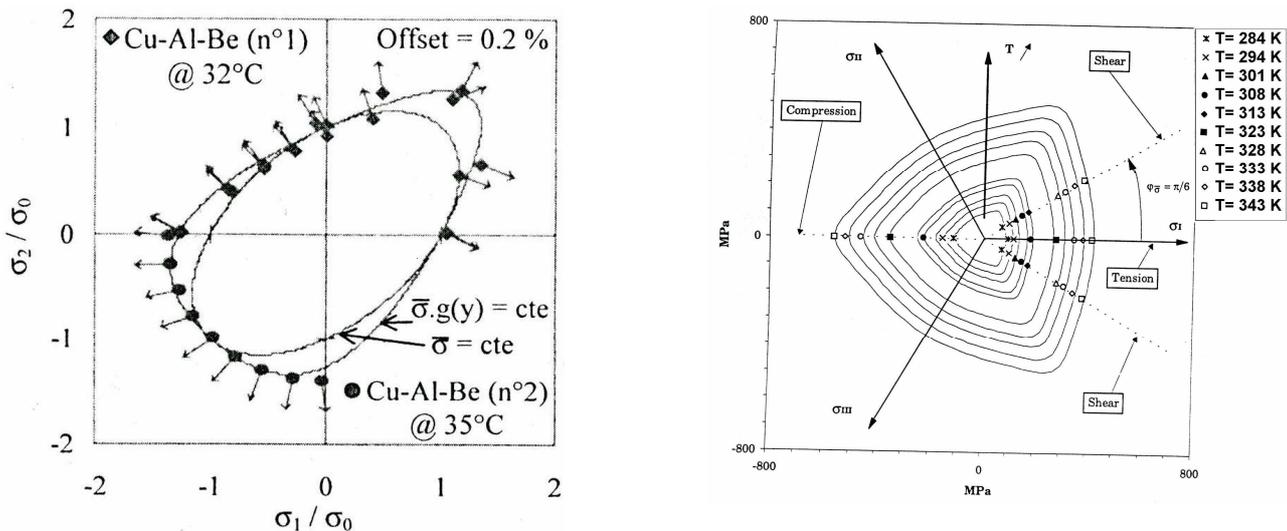


Figura A.20. Criterios de transformación reportados en la literatura para: a) Cu-Al-Be [23]; b) NiTi [24].

### A.5.3.-Anisotropía en la deformación transformacional

En la presente sección se discutirán los rasgos fundamentales de la anisotropía mecánica asociada a la deformación transformacional ( $\epsilon_0$ ). Como se mencionó en la sección anterior, la magnitud de  $\epsilon_0$  que se observa en las curvas esfuerzo-deformación en pruebas de tensión uniaxial, que corresponde con la TMIE, presenta también rasgos de anisotropía severos que se ha reportado en la literatura por diversos autores [5, 11, 12, 19, 20]. Según los estudios realizados por Otsuka et al en aleaciones monocristalinas de Cu-Al-Ni sujetas a tensión uniaxial [19 y 20], la deformación transformacional para transformaciones del tipo:  $\beta \rightarrow \beta'$  varía entre 8.6% y menos de 1%. Según Otsuka, el valor más alto de la deformación transformacional se obtiene cuando la orientación del eje de aplicación de la carga es cercana a la dirección [001] mientras que el más bajo se alcanza cuando la orientación correspondiente es cercana a la dirección [111].<sup>1</sup> De manera similar para el mismo material, Otsuka encontró que para una transformación del tipo  $\beta \rightarrow \gamma'$  la deformación transformacional varía entre 4.7 y 1% para las mismas orientaciones.

El mismo efecto de variación en la magnitud de la deformación transformacional ha sido reportado para AMF tales como Ni-Ti y Ni-Al [11 y 12], entre otras, y aunque las magnitudes de las deformaciones transformacionales varía de una aleación a otra, se aprecia un rango de variación muy importante similar al reportado en Cu-Al-Ni. En la Figura A.21, se presentan una

<sup>1</sup> Ambas dirección están referidas a la estructura de la fase austenítica la cual, es generalmente de simetría cúbica.

serie de diagramas estereográficos donde se muestra la variación que sufre la deformación transformacional al variar la orientación del eje de aplicación de la carga para aleaciones de Ni-Ti, Cu-Ni-Al, Ni-Al y Cu-Al-Ni.

Un aspecto relevante de la variación de la deformación transformacional fue reportado por Ozuka et al [19] quienes encontraron cierta relación entre la variación de la deformación transformacional y del factor de Schmid para aleaciones de Cu-Al-Ni. Dicha relación se puede apreciar en los diagramas de la Figura A.22.

Es claro que si existe una relación entre la magnitud de la deformación transformacional y el factor de Schmid entonces deben ser tomados en cuenta los ST de cada AMF lo cual explica las diferencias encontradas entre los comportamientos que se muestran en las proyecciones estereográficas de la Figura A.21. Como se mencionó en la sección A.2, durante la transformación martensítica la red cristalina sufre una deformación de corte cuya magnitud ha sido determinada, así como los ST de cada AMF, empleando la TFTM. La magnitud del cortante así como los ST de las aleaciones NiTi, Cu-Ni-Al y NiAl se muestra en la Tabla A.3.

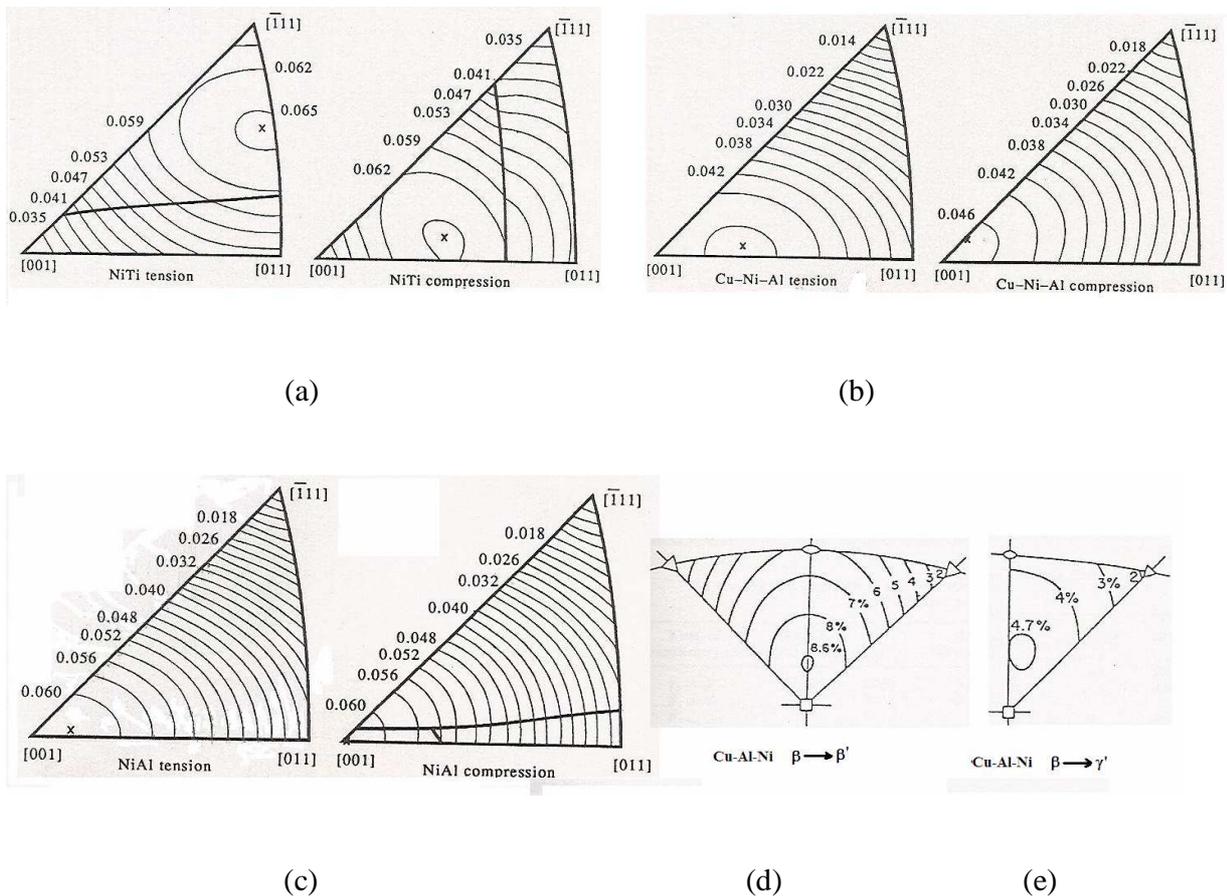


Figura A.21. Variación de la deformación transformacional para a) NiTi en tensión y compresión [11], b) Cu-Ni-Al en tensión y compresión, c) NiAl en tensión y compresión, Cu-Al-Ni para transformaciones tipo [12] d)  $\beta \rightarrow \beta'$  [19] y e)  $\beta \rightarrow \gamma'$  [19].

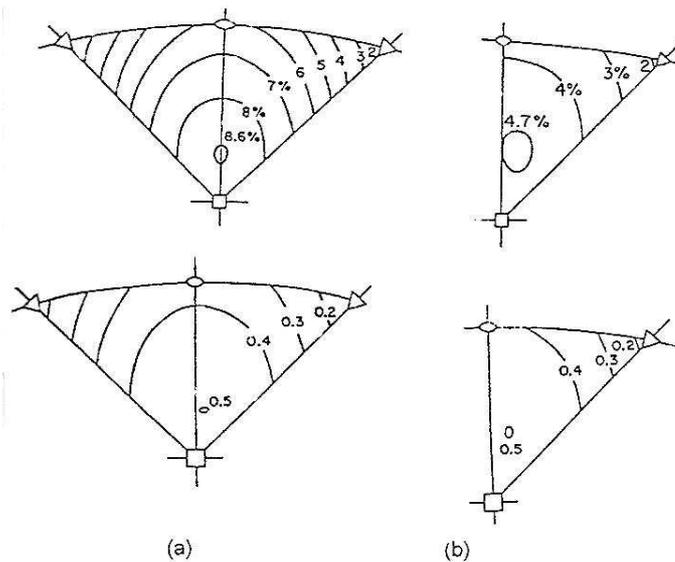


Figura A.22. Relación entre la deformación transformacional y el factor de Schmid reportado por Otzuka en aleaciones de Cu-Al-Ni.[19].

El presente trabajo aborda justamente este rasgo de la anisotropía mecánica de los MMF por lo que a continuación se presenta una breve discusión sobre los diagramas de las Figuras A.20 y A.21. Entre los puntos sobresalientes se pueden mencionar los siguientes:

- En todos los casos se presenta una variación drástica en el valor de la deformación transformacional pero considerablemente distintas de un material a otro.
- En general los comportamientos en tensión y en compresión difieren entre sí, siendo el más simétrico el caso del Ni-Al.
- Los máximos valores de deformación transformacional se alcanzan en orientaciones cercanas a la dirección  $[0 \ 0 \ 1]$  para los casos de las aleaciones: Ni-Al, Cu-Ni-Al y Cu-Al-Ni (en ambos tipos de transformaciones). Nuevamente el Ni-Al se aproxima más a dicha condición mientras que en Ni-Ti es el que más se aleja.
- Comparando la deformación transformacional y el factor de Schmid para la aleación Cu-Al-Ni, en ambos tipos de transformación, se aprecia una relación proporcional lo cual hace suponer que para las otras aleaciones se presentará también. En realidad, como se mostrará posteriormente esta relación sólo se cumple para cierta gama de orientaciones pero no puede ser generalizado ni aún para el caso de la aleación Cu-Al-Ni.
- Los elementos del sistema de transformación, que se muestran en la Tabla A.3, para la aleación Ni-Al se aproxima al  $\{1 \ 1 \ 0\}/\langle 0 \ \bar{1} \ 1 \rangle$  lo cual al parecer está relacionado cierta regularidad del comportamiento.

Es claro que el origen del comportamiento mostrado anteriormente se relaciona directamente con los cambios en la estructura de material durante la TM por lo que el cálculo de la deformación transformacional debe considerar los parámetros estructurales del material. Diversos autores [19] han empleado una ecuación que fue originalmente desarrollada para

calcular la deformación debida a la aparición de una macla, para calcular la deformación transformacional en la dirección de aplicación de la carga. Dicha ecuación se escribe como:

$$\begin{aligned}\varepsilon_o &= \sqrt{\left[m_1^p (R \cdot p_1)\right]^2 + 2mp_1^p (R \cdot p_1)(R \cdot d_1^p) + 1 - 1 + m_1^n (R \cdot p_1)} \\ &= \sqrt{\left(m_1^p \sin\chi_0\right)^2 + 2m_1^p \sin\chi_0 \cos\lambda_0 + 1 - 1 + m_1^p \sin\chi_0}\end{aligned}\quad (A.6)$$

donde:  $\varepsilon_o$  es la deformación transformacional,  $\lambda_0$  es el ángulo entre el eje de aplicación de la carga y la dirección del esfuerzo cortante,  $d_1^p$ ,  $\chi_0$  es el ángulo entre el eje de aplicación de la carga y el plano de hábito,  $p_1$  es un vector unitario normal al plano de hábito y  $R$  es un vector unitario paralelo a la orientación del cristal.

La ecuación A.6 brinda buena aproximación para calcular la deformación transformacional total que sufre un MMF a nivel local. No obstante, dicha ecuación no permite calcular el campo de deformación ni la evolución del mismo.

Como se sabe, para diseñar dispositivos que aprovechen las propiedades de los MMF, se requiere contar con un modelo matemático que represente con buena aproximación la relación entre esfuerzos y deformaciones, es decir, una ecuación constitutiva. Es claro que la ecuación A.6 no constituye una relación constitutiva para MMF ya que no involucra el esfuerzo aplicado, la temperatura ni la evolución de la transformación desde el inicio hasta la terminación.

En la siguiente sección se describen una serie de modelos matemáticos reportados en la literatura que proponen relaciones constitutivas que pretenden simular el comportamiento termo-mecánico que presentan los MMF.

#### A.6.- Modelo propuestos

Existen en la literatura una buena cantidad de modelos matemáticos que buscan simular el comportamiento esfuerzo-deformación-temperatura que presentan los MMF en la región superelástica. Dichos modelos son en general de tipo fenomenológicos y pretenden simular el comportamiento macroscópico observado en MMF tanto monocristalinos como policristalinos. Varios de estos modelos se basan en teorías conocidas como son: la elastoplásticidad y la viscoelásticidad, entre otros. A continuación se presenta una breve descripción de los principales modelos reportados en la literatura.

El modelo desarrollado por Delobelle y Lexcelent [28] es citado como un modelo viscoplástico con variables cinemáticas internas. El modelo parte del supuesto de que la deformación está compuesta de 3 partes: una elástica, una viscoplástica y otra pseudoelástica. Las dos últimas componentes de la deformación son funciones de una variable interna global. Así mismo, dicho modelo considera la interacción entre variantes de martensita.

Por otra parte, en un estudio sobre el efecto del comportamiento pseudoelástico en pruebas a esfuerzo uniaxial constante, Leclerq et al [29] proponen un modelo termodinámico donde usa la fracción transformada como variable interna y considera la deformación total compuesta por una parte elástica y una transformacional. Las ecuaciones que se proponen son las siguientes:

$$\begin{aligned}
\sigma &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^e} = E \varepsilon^e \\
\varepsilon &= \varepsilon^e + \varepsilon^{tr} \\
\varepsilon^{tr} &= \gamma z_\sigma
\end{aligned} \tag{A.7}$$

donde:  $\sigma$  es el esfuerzo aplicado,  $\rho$  es la densidad,  $\psi$  es la energía libre específica,  $E$  es el módulo elástico de la austenita,  $\varepsilon^e$  es la deformación elástica,  $\varepsilon^{tr}$  es la deformación transformacional,  $\gamma$  es la máxima deformación durante la transformación en el caso unidimensional,  $z_\sigma$  fracción volumétrica de la martensita orientada,  $\dot{z}_\sigma$  es la derivada de  $z_\sigma$  con respecto al tiempo de  $z_\sigma$ .

Otro modelo reportado en la literatura es el propuesto por Graesser y Cozzarelli[30] quienes proponen un conjunto no lineal de ecuaciones constitutivas parametrizadas para simular el comportamiento pseudoelástico. Los parámetros de dichas ecuaciones son los que controlan la histéresis, el esfuerzo residual, las mesetas de carga y descarga y la transición de fase misma. El modelo consta de dos partes una elástica y una inelástica las cuales se superponen para describir los distintos comportamientos observados en los MMF. Este modelo se base en un modelo elastoplástico que los autores desarrollaron previamente para estudiar el comportamiento mecánico de materiales convencionales tanto en la región elástica como en la plástica. Un aspecto relevante de este modelo es que considera la histéresis transformacional.

En un primer trabajo, Graesser propone un modelo unidimensional el cual luego es generalizado al caso tridimensional. El modelo unidimensional propuesto por Graesser es el siguiente:

$$\begin{aligned}
\sigma &= E \left[ \varepsilon - |\varepsilon| \left| \frac{\sigma - \beta}{Y} \right|^{n-1} \left( \frac{\sigma - \beta}{Y} \right) \right] \\
\beta &= E \alpha \left[ \varepsilon - \frac{\sigma}{E} + f_T |\varepsilon|^c \operatorname{erf}(a\varepsilon) \right]
\end{aligned} \tag{A.8}$$

donde:  $\sigma$  esfuerzo uniaxial,  $\varepsilon$  es la deformación uniaxial,  $\beta$  esfuerzo residual,  $E$  es el Módulo de Young,  $\nu$  razón de Poisson,  $Y$  es el esfuerzo necesario para inducir la transformación martensítica a una temperatura dada,  $\alpha$  es una constante que determina la pendiente de la región inelástica,  $n$  es una constante que controla transición de la región elástica a la inelástica,  $f_T$  es una constante que controla el tipo y el tamaño de la histéresis,  $a$  es constante que controla la cantidad elástica recobrada,  $c$  es una constante que controla la pendiente de la meceta de descarga,  $|x|$  es el valor absoluto de  $x$ ,  $\operatorname{erf}(x)$  es la función error de argumento  $x$ .

Posteriormente este modelo fue generalizado al caso tridimensional de donde los autores proponen las siguientes ecuaciones constitutivas para el comportamiento pseudoelástico de MMF:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ij} &= \frac{1-\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \sqrt{3K_2} \left( \sqrt{3J_2^o} \right)^{n-1} \left( \frac{s_{ij} - b_{ij}}{\sigma_c} \right) \\
b_{ij} &= \frac{2}{3} E \alpha \left[ \varepsilon_{ij}^{in} + f_T \left( \frac{2}{3} \sqrt{3I_2} \right)^{c-1} \operatorname{erf} \left( \frac{2}{3} a \sqrt{3I_2} \right) \right] \\
\varepsilon_{ij}^{in} &= \varepsilon_{ij} - \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} + \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}
\end{aligned} \tag{A.9}$$

donde  $I_2$ ,  $K_2$  y  $J_2^o$  son respectivamente los segundos invariantes de: el tensor de distorsión (deviator) de deformación, el tensor de distorsión (deviator) de la rapidez de deformación y del tensor de “sobre esfuerzo”. Las cantidades  $\sqrt{3I_2}$  y  $\sqrt{3K_2}$ , son análogos a las respectivas mediciones de deformación plástica efectiva y rapidez de esfuerzo plástico efectivo que se usan en plasticidad.

Por su parte Rohan et al [31] han propuesto un modelo uniaxial que se basa en la variación de los potenciales termodinámicos durante formación de una variante “doble”. El modelo toma como punto de partida que dichos potenciales son biconvexos. Otros autores como Brinson et al [32,34], han retomado el principio de que la deformación del material durante la TM es esencialmente un cortante simple paralelo al plano de hábito. Bajo este principio y consideraciones de energía representadas por una relación cinética para la fracción volumétrica de material transformado ( $f$ ), Brinson et al han propuesto un modelo para simular el comportamiento de los MMF. El modelo considera la evolución de la deformación durante la transformación pero ha sido empleado para más bien para estudiar los efectos de disipación de energía durante el proceso de descarga.

El modelo que se propone en el presente trabajo supera algunas de las limitaciones que presentan los modelos reportados en la literatura. En particular el modelo que se presenta es una relación esfuerzo-deformación-temperatura que considera los parámetros cristalinos de la TM y la orientación de la muestra, la naturaleza no homogénea de la deformación, la evolución de la deformación bajo esfuerzo y/o temperatura constante, los parámetros característicos del material. Estudiar estos aspectos de la deformación transformacional es importante para explicar algunas dispersiones encontradas experimentalmente y contribuir a optimizar la capacidad predictiva del comportamiento de los MMF.

## Referencias

- 1 K. Otsuka and C. M. Wayman. Introduction to Shape Memory Materials. Shape Memory Materials. Cambridge University Press. Pp.1-27. (1998).
- 2 K. N. Melton. General applications of SMA's and smart materials. Shape Memory Materials. Cambridge University Press. Pp.220-240. (1998).
- 3 M. Olson, G. B. Cohen, P. C. Clapp. On the classification of displacive phase transformations. Proceeding of the international conference on martensite transformation. ICOMAT 79, Cambridge-Massachusetts, USA, 1979, pp. 1-11.
- 4 Patoor E., Berveiller M. *Les alliages à mémoire de forme*, Technologies de pointe. Hermes, PARIS, 1990.
- 5 Otsuka and C. M. Wayman. Mechanism of shape memory effect and superelasticity. Shape Memory Materials. Cambridge University Press. pp.27-97. (1998).
- 6.- K. Otsuka, H. Sakamoto and K. Shimizu. Successive Stress-Induced Martensitic Transformation and Associated Transformation Pseudoelasticity in Cu-Al-Ni. Acta Metallurgica, 27, 585-601. (1979).
- 7 C. M. Wayman, T. M. Duering. An Introduction to martensite and shape memory. Engineering Aspects of Shape Memory Alloys. London: Butterworth-Heinemann, 1990, pp. 3-20.
- 8 A. Houtocour, A Eberhard, E Patoor and Berveiller. Thermomechanical Behavior of Monocrystalline Cu-Al-Be Shape Memory Alloys and Determination of the Metastable Phase Memory Properties. *Proceedings of de III European Symposium on Martensitic Transformations* BARCELONA, SPAIN: PLANES a, (ed), J. de Physique Colloque C2, 459. (1994).
- 9 E.Patoor, A Eberhardt and M. Berveiller. Micromechanical Modeling of Superelasticity in Shape Memory Alloys. *Proceedings of de III European Symposium on Martensitic Transformations* BARCELONA, SPAIN: PLANES a, (ed), J de Physique Colloque C-2, pp. 501-506. (1994).
- 10 E. Patoor, M. El Amrani, A Eberhardt and M. Berveiller. Determination of the Origin for the Disymmetry Observed between Tensile and Compression Tests on Shape Memory Alloys. *Proceedings of de III European Symposium on Martensitic Transformations* BARCELONA, SPAIN: PLANES a, (ed), J de Physique Colloque C-2, p. 495. (1994).
- 11 T. E. Buchheit and J. A. Wert. Modeling the Effects of Stress State and Crystal Orientation on the Stress-Induced Transformation of Ni-Ti Single Crystals. Metallurgical and Materials Transactions A. 25A. pp. 2383-2389. (1994).
- 12 T. E. Buchheit, S. L. Kumpf and J. A. Wert. Modeling the Stress-Induced Transformation Behavior of Shape Memory Alloy Single Crystals. Acta metall. mater.43-11. pp. 4189-4199. (1995).
- 13 R. J. Comstock, T. E. Buchheit, M. Somerday and J. A. Wert. Modeling the Transformation Stress of Constrained Shape Memory Alloy Single Crystals. Acta Mater. 44-9, pp. 3505-3514. (1996).

- 14 H. Flores. Stabilité thermodynamique de la phase beta et L'effet memoire double sens d'un alliage a memoire de forma du type Cu-Al-Be. Thèse de doctorat: Inst. Nat. Sc. Appl., Lyon., FRA 1993.
- 15 M. Somerday, R. J. Comstock, JR. And J. A. Wert. Effect of Grain Size on the Observed Pseudoelastic Behavior of a Cu-Zn-Al Shape Memory Alloy. *Metallurgical and Materials Transactions A*. 28A. pp. 2335-2341. (1997).
- 16 G. N. Sure and L. C. Brown. *The Mechanical Properties of refined  $\beta$  Cu-Al-Ni Strain-Memory Alloys*. *Metallurgical Transactions A*. 5<sup>a</sup>. pp. 613-1621. (1984).
- 17 S. S. Leu, Y. C. Chen, R. D. Jean. Effect of rapid solidification on mechanical properties of Cu-Al-Ni shape memory alloys. *Journal of Materials Science*. 27. pp. 2792-2798. (1992).
- 18 G. A. Lara-Rodríguez, G. González, H. Flores-Zúñiga, J. Cortés-Pérez. The effect of solidification and grain size on the transformation temperatures of Cu-Al-Be melt spun alloys. *Materials Characterization* **57**, pp. 154-159. (2006).
- 19 K. Otsuka and C. M. Wayman. Superelasticity Effects and Stress-Induced Martensitic Transformations in Cu-Al-Ni Alloys. *Acta Metallurgica*, 24, 207-226. (1976).
- 20 K. Otsuka, H. Sakamoto and K. Shimizu. Successive Stress-Induced Martensitic Transformations and Associated Transformation Pseudoelasticity in Cu-Al-Ni. *Acta Metallurgica*, 27, 585-601. (1979).
- 21 D. Rios, S. Belkahala, A. Canales, H. Flores and G. Guenin. Elastic Constants Mesurement of beta Cu-Al-Be Alloys. *Scripta Metallurgica et Materialia*, 25, 1315-1355. (1991).
- 22 G. E. Dieter, *Mechanical Metallurgy*, McGraw-Hill, 1961
- 23 C. Bouvet, S. Calloch and . C. Lexcelent. Machanical Behavior of a Cu-Al-Be Shape Memory Alloy under multiaxial proportional and nonproportional loadings. *Journal of Engineering Material and Technology*. 124 , pp. 112-123. (2002).
- 24 V. Novák, P. Zárubová. Anisotropy of transformation characteristics of Cu-Base shape Memory alloys. *Materials Science and Engineering. A* 234-236. pp. 414-417. (1997).
- 25 W. M. Huang and J. J. Zhu. To predict the behavior of shape memory alloys under proportional load. *Mechanics of Materials*. 34, pp. 547-561. (2002).
- 26 K. Gasll, H. Sehitoglu, H. J. Maier and K. Jacobus. Stress-Induced Martensitic Phase Transformation in Polycrystalline Cu-Zn-Al Shape Memory Alloys under Different Stress Satate. *Metallurgical and Materials Transactions A*. 29A, pp. 765-773. (1998).
- 27 J. Cortés-Pérez, A. Souza Jiménez, G. A Lara Rodríguez, L. A. Ferrer A. and H. Flores Zúñiga. Experimental study of stress induced martensite transformation under plane state of stress. En preparación
- 28 P. Delobelle and C. Lexcelent. A Phenomenological three dimensional model for pseudoelastic behavior of Shape Memory Alloys. *J. de Physique IV.C-1*, pp293-300. (1996).
- 29 S. Lecterq, G. Bourbon and C. Lexcelent. Plasticity Like Model of Martensite Phase in Shape Memory Alloys. *Proceedings of de III European Symposium on Martensitic Transformations* BARCELONA, SPAIN: PLANES a, (ed), *J de Physique Colloque C-2*, p. 513. (1994).

- 30 E. J. Graesser, F.A. Cozzarelli. A proposed Three-Dimensional Constitutive Model for Shape Memory Alloys. *Journal of Intelligent. Materials Systems and Structures* 5, pp. 78-89. (1994).
- 31 Rohan Abeyaratne, Sang-Joo Kim and J. K. Knowles. A one-dimensional continuum model for shape memory alloys. *Int. J. Solids Structures*. 31. No. 16, pp.2229-2249. (1994).
- 32 L. C. Brinson. Constitutive behavior of shape memory alloys: one dimensional thermomechanical derivation with non-constant material functions and redefined martensite internal variable. *Conference on Recent Advances in Adaptive and Sensory Materials and their Applications*, Virginia Tech, Blacksburg, V. A. 27-29 April. Technomic Publishing. New York. (1992)
- 33 L. C. Brinson One dimensional constitutive behavior of shape memory alloys: thermomechanical derivation with non-constant materials functions. *J. Intelligent Materials Systems and Structures*, 4(2), 229-242. (1993).
- 34 L. C. Brinson, Ina Schmidt and Rolf Lammering. Stress-Induced transformation behavior of a polycrystalline NiTi shape memory alloy: Micromechanical Investigations via in situ Optical Microscopy. Submitted to *JMPS*, (2003).
- 35 M. S. Wechsler, D. S. Liberman and T. M. A. Red. *Trans. AIME* 197 (1953) 1503.
- 36 J. S. Bowles and J. K. Mackenzie. *Acta Metall.*, 2 (1954) 129, 138, 224.
- 37 F. Sánchez, G. Pulos. "Micro and macromechanical experimental study of stress-induced martensitic transformation in a Cu-Al-Be polycrystalline shape memory alloy". *Material Science Forum*. Vol. 509. (2004).
- 38 U. F. Kocks, C. N. Tomé and H. R. Wenk. *Texture and Anisotropy*. Cambridge University Press. (1998).
- 39 K. Bhattacharya and R. V. Kohn. Symmetry, Texture and the Recoverable Strain of Shape Memory Polycrystals. *Acta Mater.* 44-2, pp. 529-542. (1996).
- 40 N. J. Park and H. J. Bunge. Texture Transformation and Properties of CuZnAl Shape Memory Alloys. *Materials Science Forum*. Vols. 273-275. pp. 547-552. (1998).
- 41.-J. W. Dally and W. F. Riley. *Experimental Stress Analysis*. Mc Graw-Hill. 3er ed. (1991)
- 42 N. M. Temme, *Special functions and introduction to the classical functions of mathematical physics*. J. Wiley, New York. (1996).
- 43 M. E. Gurtin. *An Introduction to Continuum Mechanics*. Academic Press, London. pp. 165-227. (1981).
- 44 F. Granero R. *Algebra y Geometría analítica*. MacGraw-Hill. Pp 213-260. (1985)
- 45 L. Chavarria. Puesta en marcha de un dispositivo para obtener muestras con el doble efecto memoria de forma. Tesis de licenciatura UNAM. p115. (1997).
- 46 H. Flores, J. Cortés. Superelasticity in Cu-Al-Be Shape Memory Alloys. *Proceeding of the International Conference of Advanced Materials: ICAM-95*, Simp. 24. CANCÚN MEX., 1995.
- 47 J. Cortés. Superelasticidad en aleaciones Cu-Al-Be con Memoria de Forma. Tesis de Licenciatura en Ingeniería Mecánica. ENEP Aragón, UNAM, 1997.

- 48 H. Sakamoto and K. Shimizu. *Experimental Investigation of Cyclic Deformation and Fatigue Behavior of Polycrystalline Cu-Al-Ni Shape Memory Alloys above  $M_s$* . Transactions of Japan Institute of Metals, 8, pp 592-600. (1986).
- 49 Belkahala (S), Guenin (G). Martensitic Transformation and Matallurgical Study of low Temperature Cu-Al- Be Ternary Alloy. *European Symposium on Martensitic Transformation and Shape Memory Properties*. Aussuis, FRA: Edited by G. Guenin, *J. de Phys. IV. Colloque C-4*, 145-150. (1991).
- 50 H. Flores Zúñiga, D. Rios-Jara, F.C. Lovey and G. Guénin. Thermal stability of Beta Phase in a Cu-Al-Be Shape Memory Alloy. *Proceedings of the Euopean symposium on Martensitic Transformations*, BARCELONA, SPAIN: PLANES a, (ed), *J. de Physique Colloque C-2*, p. 171. (1994).
- 51 J. Cortés P., J. Jiménez G., O. P. Abarca, H. Flores Z. *Diseño de Persianas Inteligentes empleando un Material con Memoria de Forma*. Memorias del V Congreso Anual dela Sociedad Mexicana de Ingeniería Mecánica. México. pp. 147-153. (1999).
- 52 J. Cortés-Pérez, H. Becerril C., G. A. Lara R. y H. Flores Zúñiga. *Diseño de un termo-actuador empleando alambres con memoria de forma*. Memorias del XXII Taller internacional de calderas, recipientes a presión, temas afines y exposición industrial. P-4. (2002).
- 53 J. Cortés-Pérez, H. Becerril C., G. A. Lara R. y H. Flores Zúñiga. *Diseño de un termo-actuador basado alambres con memoria de forma*. Ingeniería. UANL. VI-18. pp. 37-43. (2003)
- 54 J. Cortés P., J. Jiménez G., J. A. Gutiérrez M., F. M. Sánchez A., H. Flores Z. *Análisis de la flexión en un elemento con Memoria de forma*. Memorias del V Congreso Anual dela Sociedad Mexicana de Ingeniería Mecánica. México. pp. 154-161. (1999).
- 55 J. Cortés-Pérez, F. Sánchez Arévalo, A. Souza Jiménez, F. Paris Delgado G.,G. A. Lara Rodríguez, L. A. Ferrer Argote y H. Flores Zúñiga. *Variación de las propiedades mecánicas de un material con MMF*. Memorias del XXII Taller internacional de calderas, recipientes a presión, temas afines y exposición industrial. P-5. (2002).
- 56 J. Cortés P. Contribución al Estudio de la Pseudoelasticidad en Aleaciones con Memoria de Forma. Tesis de Maestría. DEPFI, UNAM. (1998).