



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

**FACULTAD DE INGENIERIA**

**DIVISIÓN DE INGENIERÍA  
MECÁNICA E INDUSTRIAL**

**TESIS**

**Simulación numérica del flujo  
con superficie libre en un  
mezclador planetario.**

Para obtener el Título de  
**INGENIERO MECÁNICO**

**PRESENTA: CHRISTIAN DANIEL  
MAYA RAMÍREZ**

Director: Dr. William Vicente y Rodríguez



## AGRADECIMIENTOS.

*Gracias por sobre todas las cosas al Autor de la Vida, quien fue,  
es y será, Jesús. Gracias por tu apoyo incondicional.*

*A mi Papá Ausencio Maya Rojas por brindarme su apoyo y esta gran oportunidad.*

*A mi Mamá que con su gran amor, paciencia, y trabajo me han alentado a seguir luchando.  
Gracias mamá, este logro también es tuyo.*

*A mi princesita Eva, quien ha estado a mi lado cuando el espíritu flaquea.  
Gracias por tu apoyo princesita, TE AMO.*

*A mis hermanos Carlos Eliel Maya Ramírez y Karina Marisol Maya Ramírez  
por hacerme sentir vivo. Gracias.*

*A mis abuelitos Samuel Ramírez López, Inés Viveros Campos,  
Pomposo Maya Reyes y Karitina Rojas Romero.*

*A Eduardo Trejo Escalona quien me ha brindado un apoyo y una amistad incondicional,  
y me ha motivado a seguir adelante. Gracias Lalo.*

*A la Iglesia de Ocopulco, en quienes a través del ministerio de Cristo me han enseñado demasiado.  
Gracias, también son parte de este trabajo. Gracias Hermano Juan Manuel y gracias Hermana Marcela.*

*Al señor Filemón Almaraz que ha sido uno de mis mejores profesores, gracias por su amistad.*

*A William Vicente y Rodríguez por brindarme su tiempo y enseñanza  
para la elaboración de este trabajo y por su amistad.*

*A Rogelio Soto Ayala, a Jesús Javier Cortés Rosas, a Martín Salinas Vázquez y a Rodrigo Alberto Rincón Gómez,  
por su apoyo y aportes a este trabajo.*

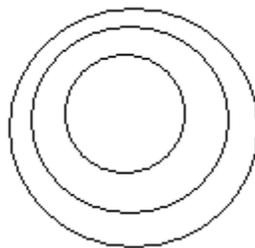
*Y gracias a todos los que contribuyeron directa o indirectamente a este logro.*

*El caballo se alista para el día de la batalla;  
más Jehová es el que da la victoria.*

*Proverbios 21:31*

*Del hombre son las disposiciones del corazón;  
más de Jehová es la repuesta de la lengua.*

*Proverbios 16:1*



## **1. INTRODUCCIÓN**

- 1.1. *Antecedentes*, 4
- 1.2. *Configuración y problema a resolver*, 10
- 1.3. *Método de solución*, 11
- 1.4. *Estructura de la tesis*, 12

## **2. ECUACIONES DE TRANSPORTE**

- 2.1. *Ecuación de conservación de masa*, 13
- 2.2. *Ecuación de Conservación de Cantidad de Movimiento (Ecuaciones de Navier-Stokes.)*, 13
- 2.3. *Ecuación General de Transporte*, 14
- 2.4. *Flujo Turbulento*, 15
- 2.5. *Promediado de las Ecuaciones*, 18
- 2.6. *Promediado de la Ecuación General*, 20
- 2.7. *Esfuerzos de Reynolds*, 23
- 2.8. *Modelo de Turbulencia  $\kappa$ - $\epsilon$* , 24

## **3. MÉTODO DE SOLUCION**

- 3.1 *Método de volúmenes finitos*, 26
- 3.2 *Método de la Celda Cortada (Cut Cell Method)*, 33
- 3.3 *Método de la Ecuación Escalar (Scalar Method Equation)*, 34

## **4. ANÁLISIS NUMÉRICO DEL COMPORTAMIENTO DEL FLUJO**

*4.1 Introducción, 36*

*4.2 Caso a simular, 36*

*4.3 Detalles numéricos, 37*

*4.4 Archivo MOF, 40*

*4.4.1 Archivo MOFOR perteneciente a la simulación, 42*

*4.5 Resultados y discusión, 47*

*4.5.1 Campos de velocidad, 48*

*4.5.2 Campos de presión, 52*

*4.5.3 Isosuperficies, 57*

## **CONCLUSIONES**

Conclusiones, 60

## **APÉNDICES**

### **A. MODELOS DE TURBULENCIA**

- A.1 Cierres de segundo orden, 63*
- A.2 Modelos de viscosidad turbulenta, 67*
- A.3 Modelo  $k - \varepsilon$ , 68*

### **B. ESQUEMAS DE DISCRETIZACIÓN**

- B.1 Esquemas lineales, 71*
  - B.1.1 Diferencias desplazadas de primer orden, 71*
  - B.1.2 Diferencias centradas, 72*
  - B.1.3 Híbrido, 73*

# Capítulo 1.

## 1 Introducción.

### 1.1 Antecedentes.

Dentro de la industria de procesos se tiene la necesidad de mezclar sustancias las cuales se encuentran en sus diferentes fases (líquido, sólido y gaseoso). Una definición de mezcla es la siguiente:

Una mezcla es una combinación de dos o más sustancias en la cual no ocurre transformación de tipo químico, es decir las sustancias participantes conservan su identidad y propiedades.

Existen diferentes tipos de mezclas, de las cuales pueden ser sólidos-sólidos, gases-gases y líquidos-líquidos entre otras. La siguiente clasificación muestra estas combinaciones:

#### **Mezclas de sólidos con sólidos.**

Las mezclas de sólidos precisan la trituración de cada uno de los componentes, que pueden ser:

**Mezclas homogéneas.** Son las conocidas mezclas de metales como aleaciones, de las cuales algunas tienen nombre como el bronce (cobre, cinc y estaño), el latón (cobre y cinc), acero inoxidable (hierro y cromo) o las amalgamas (mercurio y cualquier otro metal). Estas mezclas se preparan mezclando los metales en estado fundido y se deja enfriar para que solidifiquen conjuntamente.

**Mezclas heterogéneas.** Formadas por la unión de partículas sólidas de distinto tamaño, forma y características, habiendo dos grupos:

---

---

## SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO

---

---

**Disgregadas.** Estas mezclas se llevan a cabo con componentes sueltos y que pueden moverse entre sí. Ejemplo: arenas de playa, granulados como detergentes, etc.

**Aglutinadas.** En esta mezcla se tiene que uno o varios componentes que actúan como pegamento y la mezcla se convierte en un sólido rígido. Ejemplo: gran cantidad de rocas, hormigón, compósitos, etc.

### **Mezclas de gases con gases.**

Los gases tienen las partículas muy desunidas y separadas entre sí por lo que no tienen inconveniente en moverse entre las partículas de otro gas. Dos o más gases siempre se mezclan bien.

Las mezclas de gases se usan mucho en la industria, en los motores de combustión, incluso el aire que respiramos es una mezcla de gases (78 % de nitrógeno, 21 % de oxígeno, y 1% de otros gases).

### **Mezclas de líquidos con líquidos.**

En general, los líquidos se clasifican generalmente en dos grupos: hidrófilos o polares, y lipófilos o apolares. Dos líquidos se mezclan bien si tienen la misma naturaleza química y mal si presentan una estructura química diferente como el agua y el aceite.

### **Hay dos tipos de mezclas:**

**Disoluciones.** Son mezclas de aspecto claro y transparente donde las sustancias se mezclan íntimamente hasta nivel molecular, en la cual se dice que los líquidos

---

---

## SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO

---

---

son miscibles. Se pueden mezclar en cualquier proporción y siempre resulta una mezcla homogénea.

**Emulsiones.** Esta mezcla sucede entre dos líquidos inmiscibles. Al agitar vigorosamente uno puede quedar inmerso en otro como microgotitas. No es una mezcla a nivel molecular por lo que en reposo llegan a separarse. Con la ayuda de sustancias emulsionantes puede prolongarse la estabilidad de la emulsión.

Para realizar los procesos de mezclado en la industria se necesita el equipo pertinente para hacer las mezclas, estos equipos son llamados mezcladores, de los cuales existen diferentes clasificaciones; a continuación se muestra una clasificación de los mezcladores más comunes:

Como una primera clasificación de mezcladores se tiene la siguiente:

Los mezcladores se dividen en dos clases: los que generan corrientes paralelas al eje del mezclador y los que dan origen a corrientes en dirección tangencial o radial. Los primeros se llaman *mezcladores de flujo axial* y los segundos *mezcladores de flujo radial*.

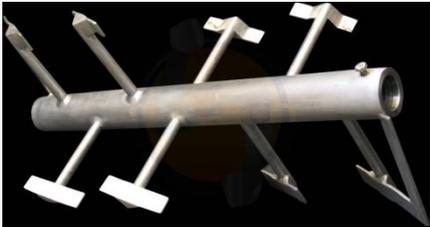
Como una segunda clasificación se tienen los mezcladores de acuerdo a su geometría, **tabla 1**:

Los tres tipos principales de mezcladores utilizados en la industria son los mezcladores de hélice, de paletas, y de turbina. Cada uno de estos tipos comprende muchas variaciones y subtipos que no se consideran aquí. En algunos casos también son útiles mezcladores especiales, pero con los tres tipos antes citados se resuelven, quizás, el 95% de los problemas de mezcla de líquidos.

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

Tipos de	Características	Clases
Mezcladores de flujos o Corrientes.	Se introducen los materiales por medio de una bomba y la mezcla se produce por interferencia de sus flujos corrientes. Sólo se emplean en los sistemas continuos o circulantes para la mezcla completa de fluidos miscibles.	<p>Mezcladores de chorro.</p> <p>Inyectores.</p> <p>Mezcladores de columna con orificios o de turbulencia.</p> <p>Sistemas de circulación mixta.</p> <p>Bombas centrífugas.</p> <p>Torres rellenas y de rociado.</p>  <p><b>Figura 1.</b> Mezclador de chorro.</p>
Mezcladoras de paletas o brazos.	Para problemas sencillos, un mezclador eficaz está formado por una paleta plana, que gira sobre un eje vertical. Son comunes los agitadores formados por dos y 3 paletas. Las paletas giran a velocidades bajas o moderadas en el centro del tanque, impulsando al líquido radial y tangencialmente, sin que exista movimiento vertical respecto del mezclador, a menos que las paletas estén inclinadas. Las corrientes de líquido que se originan se dirigen hacia la pared del tanque y después siguen hacia arriba o hacia abajo. Las paletas también pueden adaptarse a la forma	<p>Mezcladores de brazos rectos o de paletas en forma de remos.</p> <p>Mezclador de rastrillo.</p> <p>Paletas con lengüetas o dedos fijos.</p> <p>Paletas corredizas.</p> <p>Cubetas giratorias con paletas excéntricas.</p> <p>Paletas de doble movimiento.</p> <p>Paletas de movimiento planetario.</p>

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

	<p>del fondo del tanque, de tal manera que en su movimiento rozan la superficie o pasan sobre ella con una holgura muy pequeña.</p> <p>El mezclador de paletas consiste de una o varias paletas horizontales, verticales o inclinadas unidas a un eje horizontal, vertical o inclinado, que gira axialmente dentro del recipiente. De esta manera el material mezclado es empujado o arrastrado alrededor del recipiente siguiendo una trayectoria circular.</p>	<p>Bastidor o emulsificador.</p> <p>Mezclador con elevador por aire.</p> <p>Amasador.</p>  <p><b>Figura 2.</b> Mezclador de paletas.</p>
<p>Mezclador de hélices o helicoidales.</p>	<p>Un mezclador de hélice, es un mezclador de flujo axial, que opera con velocidad elevada y se emplea para líquidos pocos viscosos. Los mezcladores de hélice más pequeños, giran a toda la velocidad del motor. Las corrientes de flujo, que parten del mezclador, se mueven a través del líquido en una dirección determinada hasta que son desviadas por el fondo o las paredes del tanque. La columna de remolinos de líquido de elevada turbulencia, que parte del mezclador, arrastra en su movimiento al líquido estancado, generando un efecto considerablemente mayor que el que se obtendría mediante una columna estacionaria. Las palas de la hélice cortan o friccionan vigorosamente el líquido. Debido a la persistencia de las</p>	<p>Hélices con dispositivos para mezclar gases.</p> <p>Hélices con eje vertical.</p> <p>Hélice descentrada y con su eje inclinado penetrando por arriba.</p> <p>Hélice al costado del recipiente.</p> <p>Hélice en un tubo de aspiración.</p>  <p><b>Figura 3.</b> Mezclador de hélice.</p>

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

	<p>corrientes de flujo, los mezcladores de hélice son eficaces para tanques de gran tamaño.</p> <p>Proporcionan un medio poco costoso, sencillo y compacto, para mezclar materiales en un gran número de casos.</p>	
Mezcladores de turbinas o de impulsos centrífugos.	<p>La mayor parte de los mezcladores de turbinas se asemejan a mezcladores de múltiples y cortas paletas, que giran con velocidades elevadas sobre un eje que va montado centralmente dentro del tanque. Las paletas pueden ser rectas o curvas, inclinadas o verticales. El rodete puede ser abierto, semicerrado o cerrado. Los mezcladores de turbina son eficaces para un amplio intervalo de viscosidades; en líquidos poco viscosos, producen corrientes intensas, que se extienden por todo el tanque y demuelen las masas de líquido estancado.</p> <p>El mezclador de turbina contiene una o varias bombas centrífugas trabajando en un recipiente, casi sin contrapresión el material, entra en el impulsor axialmente por su abertura central. La turbina puede llevar una corona directriz con paletas curvas fijas (difusores) que desvían esas corrientes tangenciales hasta hacerlas radiales.</p>	<p>Soplante de turbina o ventilador centrífugo.</p> <p>Mezclador sencillo de turbina.</p> <p>Mezclador de turbina con paletas directrices fijas.</p> <p>Turbodispersor.</p> <p>Absorbedor turbogas.</p>
Varios tipos diversos.		<p>Mezclador de tambor:</p> <p>El molino coloidal.</p>

---

---

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

---

---

		El homogenizador.  Votador.  Mezclador de conos giratorios.
--	--	---

**Tabla 1.** Clasificación de mezcladores.

### **1.2 Configuración y problema a resolver.**

Anteriormente se presentaron diferentes tipos de mezcladores según su clasificación. El mezclador que nos interesa estudiar es el mezclador planetario, de tal modo que este trabajo se enfocará al estudio del comportamiento del fluido en este mezclador. Una breve descripción del mezclador planetario es la siguiente: El mezclador planetario es un dispositivo que cuenta con tres grados de libertad generalmente compuesto de un tazón, aspa, y un motor que mueve el aspa o paletas. El aspa puede levantarse para su retiro y/o limpieza, y en funcionamiento, éste gira sobre su propio eje y se traslada en el recipiente para alcanzar la mezcla requerida.

El mezclador planetario puede mezclar fases líquido/líquido, líquido/sólido y sólido/sólido; mezclando sin importar la diferencia en peso específico, tamaño, viscosidad y proporción de los componentes. Además, la carga y descarga del material durante el proceso son rápidas. El tazón puede estar cubierto contra enfriamiento y calentamiento y también esté provisto con una cobertura cónica para evitar polvo y derrames. Adicionalmente, el tazón puede ser retirado fácilmente de la máquina para lavado, limpieza y transporte de materiales mezclados.

### **1.3 Métodos de Solución.**

Dado que es importante entender el proceso de mezclado dentro del sistema para mejorar su eficiencia, se debe analizar el mismo, para tal caso, se ocuparán dos herramientas principales de análisis. Los dos métodos de análisis son: el método experimental y la simulación numérica. A continuación se hará una breve descripción de estos métodos:

El **Método Experimental** se fundamenta en el Método Científico y utiliza como procesos lógicos la inducción y la deducción. Consiste en realizar actividades con la finalidad de comprobar, demostrar o reproducir ciertos fenómenos hechos o principios en forma natural o artificial, con base en experiencias propias y que de esta manera se puedan formular hipótesis que permitan a través del proceso didáctico conducir a generalizaciones científicas, que puedan verificarse en hechos concretos en la vida diaria. Este proceso puede ser costoso pues requiere de modelos a escala e infraestructura que permita proceder a la experimentación, de tal manera que este método requiere de una inversión significativa para su desarrollo.

En esta tesis se utilizará la simulación numérica para el mezclador planetario que es el caso de estudio, de tal manera que se describirá a continuación el concepto de simulación numérica:

Una **simulación numérica** es una recreación matemática de un proceso natural. Mediante el uso de simulaciones numéricas se estudian procesos físicos, de ingeniería, económicos e incluso biológicos. El uso de simulaciones numéricas para estudiar un problema requiere normalmente un cuidadoso estudio de los métodos numéricos y algoritmos a utilizar y de los procesos fundamentales a incluir en la simulación.

---

---

## **SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

---

---

Una simulación numérica difiere de un modelo matemático en que el primero constituye una representación en cada instante del proceso a simular mientras que el modelo constituye una abstracción matemática de las ecuaciones fundamentales necesarias para estudiar dicho fenómeno. Normalmente la utilización de una simulación numérica para estudiar un problema dado requiere una cuidadosa planificación del modelo matemático a utilizar y de los algoritmos necesarios para resolver dicho modelo. Los códigos numéricos de simulación numérica son una herramienta indispensable para dicho fin, de tal manera que el software utilizado para realizar la simulación numérica es el Phoenix, un software que se encarga de simular y estudiar el comportamiento de los fluidos.

### **1.4 Estructura de la Tesis.**

Posterior a este primer capítulo, en el capítulo 2, se presentan las ecuaciones instantáneas que gobiernan el movimiento del flujo reactivo, y a continuación, la deducción de las ecuaciones promediadas que se resolverán mediante un método de volúmenes finitos. Estas ecuaciones son: de continuidad, de cantidad de movimiento, conservación de la especie química.

La introducción al método de solución por volúmenes finitos se hace en el capítulo 3, el cuál permite resolver las ecuaciones de transporte que describen el flujo reactivo.

En el capítulo 4 se presenta la configuración a simular, así como los detalles numéricos que se utilizan en el modelo para simular este sistema. A continuación, se muestran las predicciones para un caso muestra.

Las conclusiones que se derivan del trabajo realizado se exponen en el capítulo 5, además de algunas recomendaciones para trabajos futuros.

## ***Presentación Capítulo 2.***

En este capítulo se presentarán las ecuaciones de transporte que caracterizan la hidrodinámica de flujo. Posteriormente, se realizará el promediado de Reynolds para la ecuación general de transporte y se explicará el modelo de turbulencia utilizado.

### ***2.1 Ecuación de conservación de masa.***

El principio de conservación de masa es uno de los principios fundamentales de la naturaleza y expresa que la masa se mantiene constante durante un proceso.

La conservación de masa para un flujo incompresible se expresa matemáticamente, en un sistema cartesiano, mediante la ecuación de continuidad enunciada en su forma diferencial se puede escribir como:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{2.1}$$

Dónde:  $u, v, w$  son las velocidades, en las tres direcciones [18].

### ***2.2 Ecuación de Conservación de Cantidad de Movimiento (Ecuaciones de Navier-Stokes).***

El producto de la masa y la velocidad del cuerpo se conoce como momento lineal o cantidad de movimiento del cuerpo. La segunda ley de Newton afirma que la aceleración de un cuerpo es proporcional a la fuerza neta que actúa sobre él e inversamente proporcional a su masa, y que la razón de cambio de la cantidad de movimiento de un cuerpo es igual a la fuerza neta que actúa sobre él. Por tanto, la cantidad de movimiento de un sistema permanece constante cuando la fuerza neta que actúa sobre él es cero y, por lo tanto, se conserva la cantidad de movimiento del sistema [18].

---

---

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

---

---

Así, la conservación de la cantidad de movimiento se expresa matemáticamente a través de las ecuaciones de Navier-Stokes:

En dirección “x”:

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad 2.2$$

En dirección “y”:

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad 2.3$$

En dirección “z”:

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad 2.4$$

### **2.3 Ecuación General de Transporte.**

Las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento, antes presentadas, pueden ser representadas por la ecuación general de transporte.

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\phi\mathbf{u}) = \text{div}(\Gamma\text{grad}(\phi)) + S_\phi \quad 2.5$$

dónde:

- $\phi$  es la variable del flujo.
- $\rho$  es la densidad.
- $\mathbf{u}$  es el campo vectorial de velocidades.
- $\Gamma$  es el coeficiente de difusión.
- $S_\phi$  representa el resto de términos que aparecen en la ecuación. A  $S_\phi$  se le llama término fuente.

---

---

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

---

---

Esta ecuación se puede leer como: incremento de  $\phi$  en un elemento de fluido en el tiempo + flujo de  $\phi$  en el elemento de fluido = incremento de  $\phi$  debido a difusión + incremento de  $\phi$  debido a fuentes.

Tanto la ecuación de conservación de masa, como las ecuaciones de Navier-Stokes son ecuaciones de transporte, por tal motivo se presenta a continuación la ecuación general, para la cual, más adelante, se realizarán los promedios de Reynolds y de esta manera se generalizará el promediado de la ecuaciones.

#### **2.4 Flujo Turbulento.**

Como se observa en la ecuación 2.6, las tensiones viscosas dependen de la variación respecto al tiempo de la deformación angular de los elementos de fluido, lo cual se expresa en su forma elemental como:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.6}$$

Siendo “ $u$ ” la velocidad del fluido, “ $y$ ” la distancia en la dirección perpendicular al movimiento y  $\mu$  la viscosidad dinámica, constante para cada fluido a una determinada temperatura.

Ahora bien, dado que:

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{2.7}$$

Y, por otro lado las fuerzas de inercia en una dimensión se pueden expresar como:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.8}$$

Entonces el número de Reynolds se expresa matemáticamente como:

---

---

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR  
PLANETARIO**

---

---

$$\text{Re} = \frac{\rho u \frac{\partial u}{\partial x}}{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} \quad 2.9$$

En la formula anterior, las derivadas espaciales de  $u$  en el numerador y denominador tienen dimensiones de  $V/L$  y  $V/L^2$  respectivamente, de donde se obtiene la expresión para el Reynolds:

$$\text{Re} = \frac{\rho V^2 / L}{\mu V / L^2} = \frac{VL}{\nu} \quad 2.10$$

Donde  $V$  y  $L$  son la velocidad y longitud características del flujo en cuestión y  $\nu$ , es el cociente entre la viscosidad dinámica y la densidad, y se conoce como viscosidad cinemática.

Se observa experimentalmente que para valores inferiores al llamado número de Reynolds crítico las capas adyacentes de fluido deslizan unas sobre otras de modo ordenado, lo cual constituye el régimen laminar.

Para valores de  $Re$  superiores al crítico el comportamiento del flujo cambia, tornándose aleatorio y caótico. El movimiento se vuelve no permanente, incluso con condiciones de contorno constantes. Es lo que se denomina régimen turbulento [16].

El número de Reynolds crítico no está exactamente determinado. Reynolds obtuvo los números 2000 y 12000 como valores inferior y superior, respectivamente, en el caso de tuberías, tomando como  $L$  el diámetro y como  $V$  la velocidad media. Para tuberías suele considerarse que el flujo es laminar por debajo de 2000, con una zona de transición entre 2000 y 4000. Para flujos en superficie libre, se utiliza el radio hidráulico como longitud característica por lo que los valores críticos resultan menores: laminar por debajo de 500 y turbulento por encima de 2000.

La naturaleza aleatoria del flujo turbulento y la elevada frecuencia con la que varían las diversas magnitudes dificulta enormemente en la práctica los cálculos basados en una descripción completa del movimiento de todas las partículas del fluido [19].

---



---

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

---



---

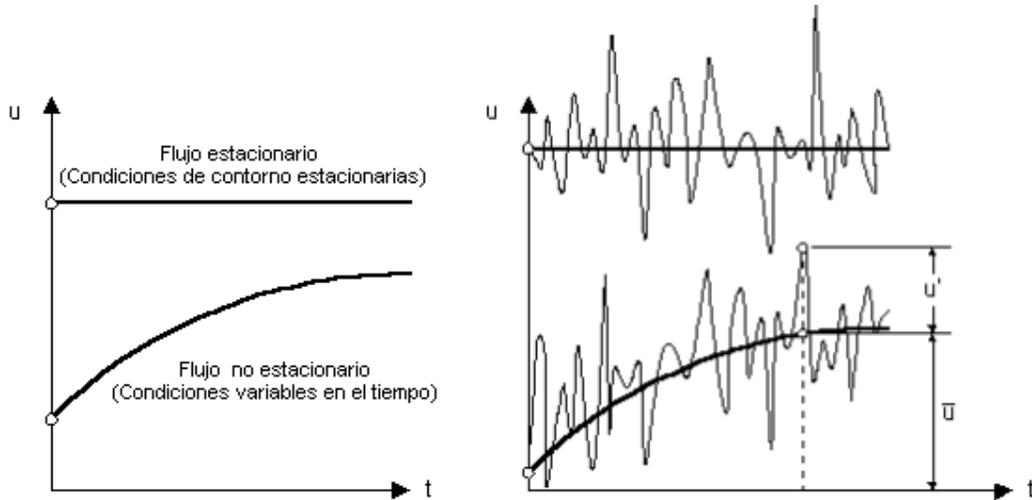


Figura 2.1. Las componentes de la velocidad  $u, v, w$  y la presión se descomponen en una magnitud que es la suma de su valor promedio turbulento y su fluctuación turbulenta .

Por otra parte  $u, v, w$ , que son las componentes de la velocidad y  $p$  la presión, se pueden descomponer en una magnitud (por ejemplo la primera componente de la velocidad  $u$ ) que es la suma de su valor promedio turbulento y su fluctuación turbulenta  $u'$ , así un flujo turbulento se caracteriza por los valores promedio  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$  y  $\bar{p}$  de las propiedades más sus fluctuaciones  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  y  $p'$ .

Entonces, los valores instantáneos de las propiedades se pueden expresar como:

$$u = \bar{u} + u' \tag{2.11}$$

$$v = \bar{v} + v' \tag{2.12}$$

$$w = \bar{w} + w' \tag{2.13}$$

$$p = \bar{p} + p' \tag{2.14}$$

---

---

## **SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

---

---

Si se logra visualizar un flujo turbulento se encuentran porciones de fluido en rotación, a los que se le denomina remolinos turbulentos. Estos presentan un amplio espectro de tamaños siendo los remolinos mayores comparables a las dimensiones del dominio. Las fuerzas de inercia predominan en los remolinos de mayor tamaño, mientras que su efecto es despreciable frente al de las fuerzas viscosas en los más pequeños.

Ahora bien, la energía necesaria para mantener el movimiento de los remolinos de mayor tamaño procede del flujo medio, por esta razón su descomposición en la suma del promedio y la fluctuación. Por otra parte, los remolinos menores obtienen energía principalmente de otros mayores y más débilmente del flujo medio. De esta manera, la energía cinética se va transmitiendo a remolinos cada vez más pequeños, a través de un proceso en cascada, hasta que es disipada por las fuerzas viscosas. Esta disipación produce las pérdidas de energía adicionales relacionadas con los flujos turbulentos.

Los remolinos de mayor tamaño tienen un comportamiento altamente anisótropo y dependiente del flujo medio, debido a su fuerte interacción con éste. Sin embargo, durante el proceso en cascada, la acción difusiva de la viscosidad va disminuyendo esta direccionalidad por lo que, para números de Reynolds suficientemente altos, el comportamiento de los remolinos más pequeños puede considerarse isotrópico.

### **2.5 Promediado de las Ecuaciones.**

Hasta este momento se han presentado las ecuaciones de transporte de conservación de masa y cantidad de movimiento, así como la ecuación general de transporte, además se ha hecho referencia al carácter turbulento del flujo. A continuación, se mostrará el promediado de las ecuaciones y se utilizará la ecuación general para ejemplificar [19].

Antes de continuar es necesario dejar en claro las reglas de los promediados de tal manera que sea más clara la explicación.

### 2.5.1 Reglas de los Promediados.

Para mostrar las reglas de los promediados se supondrán dos propiedades escalares  $\Phi$ ,  $\Psi$  y la magnitud vectorial “a”, que de igual manera se va a descomponer en su valor promedio más su fluctuación:

$$\phi = \bar{\phi} + \phi' \quad 2.15$$

$$\psi = \bar{\psi} + \psi' \quad 2.16$$

Ahora bien teniendo en cuenta que el promediado es una operación de integración resulta que:

$$\bar{\phi}' = \overline{(\phi - \bar{\phi})} = \bar{\phi} - \bar{\phi} = 0 \quad 2.17$$

También es posible hallar las siguientes relaciones:

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial s} = \frac{\partial \phi}{\partial s} \quad 2.18$$

$$\overline{\int \phi ds} = \int \bar{\phi} ds \quad 2.19$$

$$\overline{\phi + \psi} = \bar{\phi} + \bar{\psi} \quad 2.20$$

$$\overline{\phi \psi} = \bar{\phi} \bar{\psi} + \overline{\phi' \psi'} \quad 2.21$$

Y en caso de una magnitud vectorial y una escalar, por ejemplo  $\Phi$  y a, se tiene que:

$$\overline{\phi a} = \bar{\phi} \bar{a} + \overline{\phi' a'} \quad 2.22$$

---

---

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

---

---

Ahora bien, considerando que las operaciones divergencia y gradiente se reducen a la derivación, y que el operador Laplaciano equivale a la divergencia del gradiente

$$\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla \quad 2.23$$

Se tiene que:

$$\overline{\nabla \cdot a} = \nabla \cdot \bar{a} \quad 2.24$$

$$\overline{\nabla \phi} = \nabla \bar{\phi} \quad 2.25$$

$$\overline{\nabla \cdot \phi a} = \nabla \cdot \bar{\phi a} = \nabla \cdot \bar{\phi} \bar{a} + \nabla \cdot \bar{\phi}' \bar{a}' \quad 2.26$$

$$\overline{\Delta \phi} = \overline{\nabla \cdot \nabla \phi} = \nabla \cdot \overline{\nabla \phi} = \nabla \cdot \nabla \bar{\phi} = \Delta \bar{\phi} \quad 2.27$$

## 2.6 Promediado de la Ecuación general.

A continuación se mostrará el promediado de la ecuación general de transporte en cada término para generalizar el método.

### 2.6.1 Promediado Término Temporal

El término temporal es:

$$\frac{\partial(\rho \phi)}{\partial t} \quad 2.28$$

Sustituyendo la ecuación 2.15 en 2.28 y promediando tenemos que:

$$\frac{\partial(\rho(\bar{\phi} + \phi'))}{\partial t} \quad 2.29$$

Aplicando la 2.17 tenemos que:

---

---

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

---

---

$$\frac{\partial(\rho\bar{\phi})}{\partial t} \qquad 2.30$$

Siendo éste el término temporal promediado.

### 2.6.2 Promediado Término Temporal

El término difusivo es:

$$div(\Gamma grad(\phi)) \qquad 2.31$$

Sustituyendo la ecuación a 2.15 en 2.31 y promediando tenemos que:

$$div(\Gamma grad(\bar{\phi} + \phi')) \qquad 2.32$$

Aplicando la 2.17 tenemos que:

$$div(\Gamma grad(\bar{\phi})) \qquad 2.33$$

Siendo éste el término difusivo promediado.

### 2.6.3 Promediado Término Convectivo

El término convectivo es:

$$div(\rho\phi\mathbf{u}) \qquad 2.34$$

Sustituyendo la ecuación a 2.15 en 2.34 y promediando tenemos que:

$$div(\rho(\bar{v} + v')(\bar{\phi} + \phi')) \qquad 2.35$$

Desarrollando y promediando tenemos que:

---



---

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

---



---

$$div(\rho[\bar{v}\bar{\phi} + \bar{v}'\phi' + \bar{\phi}v' + \bar{v}'\phi']) \quad 2.36$$

Aplicando la 2.17 tenemos que:

$$div(\rho[\bar{v}\bar{\phi} + \bar{v}'\phi']) \quad 2.37$$

Siendo éste el término convectivo promediado.

#### 2.6.4 Ecuación General Promediada

Así la ecuación general queda:

$$\frac{\partial \rho \bar{\phi}}{\partial t} + div(\rho \bar{\phi} U) = div(\Gamma_{\phi} grad \bar{\phi}) + \left[ -\frac{\partial(\rho \bar{u}'\phi')}{\partial x} - \frac{\partial(\rho \bar{v}'\phi')}{\partial y} - \frac{\partial(\rho \bar{w}'\phi')}{\partial z} \right] + S_{\phi} \quad 2.38$$

Como se puede observar, al promediar las ecuaciones se generan términos adicionales que contienen a las fluctuaciones instantáneas y como resultado se tienen las incógnitas adicionales [19]:

$$\bar{u}'\phi', \bar{v}'\phi', \bar{w}'\phi'$$

#### 2.7 Esfuerzos de Reynolds

Al desarrollar el promediado en las ecuaciones de continuidad y Navier-Stokes, estas quedarían como:

Ecuación de Continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \bar{u}) = 0 \quad 2.39$$

Ecuaciones de Navier-Stokes en la componente x:

$$\frac{\partial \rho \bar{u}}{\partial t} + div(\rho \bar{u} U) = -\frac{\partial P}{\partial x} + div(\mu grad \bar{u}) + \left[ -\frac{\partial(\rho \bar{u}'u')}{\partial x} - \frac{\partial(\rho \bar{u}'v')}{\partial y} - \frac{\partial(\rho \bar{u}'w')}{\partial z} \right] + S_{Mx} \quad 2.40$$

En la componente y:

---



---

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

---



---

$$\frac{\partial \rho \bar{v}}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{v} U) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \text{div}(\mu \text{grad} \bar{v}) + \left[ -\frac{\partial(\rho \overline{u'v'})}{\partial x} - \frac{\partial(\rho \overline{v'v'})}{\partial y} - \frac{\partial(\rho \overline{v'w'})}{\partial z} \right] + S_{My} \quad 2.41$$

En la componente z:

$$\frac{\partial \rho \bar{w}}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{w} U) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \text{div}(\mu \text{grad} \bar{w}) + \left[ -\frac{\partial(\rho \overline{u'w'})}{\partial x} - \frac{\partial(\rho \overline{v'w'})}{\partial y} - \frac{\partial(\rho \overline{w'w'})}{\partial z} \right] + S_{Mz} \quad 2.42$$

Como se puede observar al promediar han aparecido productos cruzados de las fluctuaciones turbulentas de la velocidad por la densidad, los cuales tienen unidades de fuerza / superficie, éstos originan el Tensor de esfuerzos de Reynolds, mostrado a continuación:

$$\tau_{ij} = \rho \begin{bmatrix} \overline{u'u'} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'v'} & \overline{v'w'} \\ \overline{w'u'} & \overline{w'v'} & \overline{w'w'} \end{bmatrix} \quad 2.43$$

Donde  $i, j=1,2,3$ .

Estas nuevas incógnitas han generado en los investigadores el interés por desarrollar y mejorar los denominados modelos de turbulencia, éstos cierran el sistema de ecuaciones.

A continuación se presentará el modelo de turbulencia utilizado en la simulación numérica, y en el apéndice A se presenta un resumen sobre éste.

## 2.8 Modelo de Turbulencia k-ε

Un modelo de turbulencia es un procedimiento para cerrar el sistema de ecuaciones antes mencionado, por esta razón existe una amplia variedad.

En el modelo de turbulencia k-ε los esfuerzos de Reynolds se aproximan a la tasa promedio de deformación, como se muestra a continuación:

---

---

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

---

---

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad 2.44$$

Donde  $i, j=1,2,3$

Boussinesq propuso en 1877 una relación análoga entre los promedios temporales de las velocidades de deformación y los esfuerzos de Reynolds:

$$\tau_{ij} = -\overline{\rho u_i u_j} = \mu_T \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad 2.45$$

Esta aproximación introduce un nuevo término, conocido como viscosidad turbulenta y se calcula como:

$$\mu_T = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad 2.46$$

Donde  $k$  se denomina como la energía cinética turbulenta y  $\varepsilon$  como la disipación viscosa y se calculan como:

$$k = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) \quad 2.47$$

$$\varepsilon = 2\nu \overline{e'_{ij} \cdot e'_{ij}} \quad 2.48$$

El modelo de turbulencia utilizado en la simulación numérica es el K-  $\varepsilon$  estándar y las ecuaciones de transporte que se resuelven para K y  $\varepsilon$  son:

---



---

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

---



---

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \text{div}(\rho k U) = \text{div}\left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \text{grad} k\right) + 2\mu_t E_{ij} \cdot E_{ij} - \rho \varepsilon \quad 2.49$$

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \text{div}(\rho \varepsilon U) = \text{div}\left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \text{grad} \varepsilon\right) + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} 2\mu_t E_{ij} \cdot E_{ij} - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad 2.50$$

Donde el primer término de la izquierda representa, la tasa de cambio de  $k$  o  $\varepsilon$ , el segundo término equivale al transporte de  $k$  o  $\varepsilon$  por convección, el tercer término al transporte de  $k$  o  $\varepsilon$  por difusión, el cuarto representa la tasa de producción de  $k$  o  $\varepsilon$ , menos la tasa de destrucción de  $k$  o  $\varepsilon$ .

Estas ecuaciones contienen 5 constantes ajustables y en el caso del modelo  $k$ - $\varepsilon$  estándar tienen los siguientes valores:

$$C_{\mu} = 0.09; \sigma_k = 1.00; \sigma_\varepsilon = 1.30; C_{1\varepsilon} = 1.44; C_{2\varepsilon} = 1.92$$

Es conveniente mencionar que la producción o destrucción de energía cinética turbulenta están íntimamente ligadas. La tasa de disipación  $\varepsilon$  es grande donde  $k$  es grande. La ecuación modelo para  $\varepsilon$  asume que la producción o destrucción de energía es proporcional a la producción y destrucción de  $k$ . Esto implica que  $\varepsilon$  se incrementa rápidamente si  $k$  se incrementa rápidamente y decrece lo suficientemente rápido para evitar valores negativos de energía cinética turbulenta si  $k$  decrece.

## Capítulo 3

### Método de Solución.

El método de volúmenes finitos, permite dar solución a las ecuaciones presentadas en el capítulo anterior, las cuales componen el comportamiento del medio de estudio. Por ello, en este capítulo se presenta dicho método de solución.

#### 3.1 Método de volúmenes finitos

Mediante una ecuación general, se pueden representar las ecuaciones medias de continuidad, cantidad de movimiento y del modelo de turbulencia, donde la variable dependiente está representada por  $\tilde{\phi}$  :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\tilde{\phi}) + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}_i\tilde{\phi}) - \nabla \cdot (\Gamma_\phi \nabla_\phi) = \bar{S}_\phi \quad (3.1)$$

Donde  $\Gamma_\phi$  es el coeficiente de difusión y  $\bar{S}_\phi$  es el término fuente. Los términos del lado izquierdo de la ecuación (3.1) son el término transitorio, convectivo y difusivo, respectivamente. Los términos  $\Gamma_\phi$  y  $\bar{S}_\phi$  están especificados para cada variable  $\tilde{\phi}$  . En el caso de la ecuación de continuidad,  $\tilde{\phi} = 1$  .

Esta ecuación general (3.1), se puede discretizar con el método de volúmenes finitos. Con este método, el dominio se divide en pequeños volúmenes de control (figura 1), asociando a cada uno de ellos un punto nodal. De manera similar, se discretiza el tiempo en intervalos temporales. La ecuación diferencial resultante, se integra en cada volumen de control y en cada intervalo temporal, y el resultado es una ecuación discretizada que relaciona los valores de  $\tilde{\phi}$  para un determinado grupo de puntos nodales. Esta ecuación algebraica expresa el principio de conservación de  $\tilde{\phi}$  en el volumen finito, de la misma manera que la ecuación diferencial lo expresa para un

---

---

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

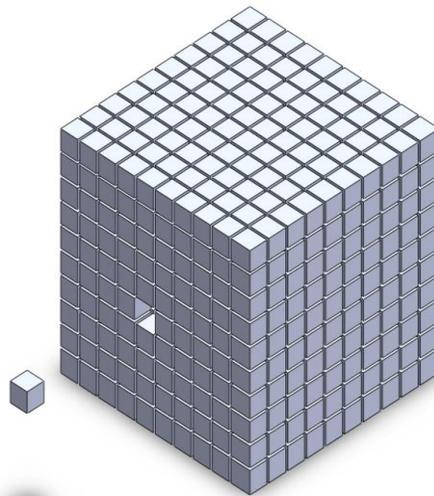
---

---

volumen infinitesimal. La ecuación algebraica para un nodo  $P$  puede expresarse en forma general como:

$$a_p \tilde{\phi}_p = \sum_{i,I=E,W,N,S,H,L} a_i \tilde{\phi}_I + a_T \tilde{\phi}_T + B \quad (3.2)$$

Donde el subíndice  $I$  representa las celdas vecinas,  $i$  la cara entre las celdas  $P$  e  $I$ ,  $T$  el valor correspondiente en el intervalo temporal anterior, y  $B$  el término fuente. La deducción detallada de la ecuación (3.2) puede consultarse en ([10] y [11]), así como en un gran número de textos de dinámica de fluidos computacional.



**Figura 3.1.** Representación del sistema discretizado en volúmenes finitos.

En el caso de una malla cartesiana, escalonada (“staggered”) y uniforme (celdas de iguales dimensiones espaciales), se puede emplear por sencillez un volumen de control bidimensional, como el que se muestra en la figura 3.2 (el espesor de la celda en dirección  $z$  puede considerarse la unidad.) En una malla escalonada, las variaciones se encuentran definidas en el centro de la celda, mientras que las

---



---

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

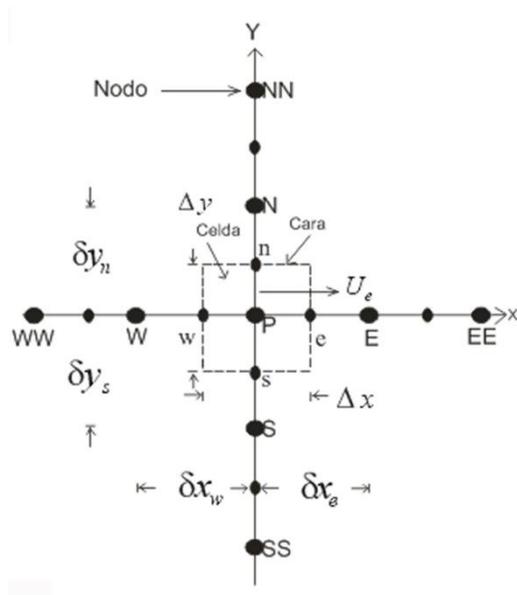
---



---

componentes de velocidad en cada dirección, correspondientes a la celda, se encuentran desplazadas a las caras de la celda.

En la figura 3.2, se muestra la notación de la celda y de sus vecinas. Dada una celda  $P$ , sus vecinas se nombrarán según las iniciales de los puntos cardinales (en inglés) en las direcciones “ $x$ ” e “ $y$ ” y como “*Low*” y “*High*” en la dirección  $z$ . Las caras de la celda se nombran con la misma nomenclatura, pero con letras minúsculas. A su vez, el tiempo también se discretiza. Las celdas en la dirección temporal se llaman intervalos temporales. La celda  $P$  en el paso temporal se nota como  $T$ .



**Figura 3.2.** Diagrama esquemático de un volumen de control bidimensional.

A continuación, se presentan los términos de la ecuación discretizada (3.3).

Definiendo tres expresiones mediante los símbolos  $F$ ,  $D$ , y  $Pe$  como:

$$F = \rho \tilde{v}_i, \quad D = \frac{\Gamma}{\delta_i}, \quad Pe = \frac{F}{D} \quad (3.3)$$

---



---

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

---



---

Donde  $\bar{v}_i$  es la velocidad en la cara  $i$ ,  $\delta_i$  es la distancia entre los nodos que incluyen la cara  $i$  y  $Pe$  es de número de Peclet, que es una relación entre la convección y la difusión. Las expresiones para  $F$  y  $D$  representan el efecto de los términos convectivo y difusivo, respectivamente, de la ecuación de transporte (3.1).

Los coeficientes  $a_i$  de la ecuación (3.2) son:

$$a_i = D_i f(|Pe|_i) + \max(-F_i, 0) \quad (3.4)$$

Los valores  $F$  y  $D$  en la cara de la celda de la ecuación (3.4) son:

$$F_i = (\bar{\rho}\bar{v})_i \Delta_i \quad D_i = \frac{\Gamma_i \Delta_i}{(\delta_i)}, \quad i=n, s, e, w \quad (3.5)$$

donde  $\Delta_i$  es la longitud de la cara  $i$ .

Para determinar  $F_i$  se necesita conocer  $\bar{\rho}$  y  $\bar{u}_i$  en la cara de la celda. El cálculo del término convectivo de la ecuación de transporte (1) requiere también el conocimiento de la variable escalar,  $\tilde{\phi}$ , en la cara de la celda. La velocidad  $\bar{v}_i$  está calculada en la cara de la malla escalonada; pero  $\bar{\rho}$  y  $\tilde{\phi}$  están calculados en el nodo y necesitan ser interpolados a la cara para calcular los coeficientes  $a_i$  de la ecuación discretizada (3.2).

La obtención de estas variables en la cara de la celda es importante para la precisión y convergencia de la solución. El cálculo de  $\bar{\rho}$  y  $\tilde{\phi}_i$  da lugar a los llamados esquemas de discretización. La función  $f(|Pe|)$  de la ecuación (3.4) depende del esquema de interpolación; por ejemplo, en el esquema de diferencias desplazadas,  $f(|Pe|)=1$ . Para el sistema híbrido [11]:

---



---

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

---



---

$$f(|Pe|) = \max(0.1 - 0.5|Pe|) \quad (3.6)$$

En el apéndice B se presentan estos esquemas de discretización lineales con más detalle, pues son los que se utilizarán en esta tesis en la discretización del término convectivo de las ecuaciones de cantidad de movimiento, energía, especies químicas y modelo de turbulencia.

El coeficiente para el término transitorio es:

$$a_T = \frac{\bar{\rho}_T \Delta x \Delta y}{\Delta t} \quad (3.7)$$

Para el cálculo del término  $D_i$  (3.5) se necesita obtener el coeficiente de difusión,  $\Gamma$ , en la cara de la celda. El coeficiente  $\Gamma$  no es necesariamente una constante, probablemente puede ser función de valores variables que se conocen en los nodos (por ejemplo, la temperatura) y por tanto es necesario interpolarlo en la cara. Esta interpolación puede ser aritmética o armónica. Como ejemplo, para la cara e, estas interpolaciones son:

$$\Gamma_e = \frac{\Delta x (\Gamma_P + \Gamma_E)}{2 \delta x_e} \quad \Gamma_e = \frac{2 \delta x_e}{\Delta x \left( \frac{1}{\Gamma_P} + \frac{1}{\Gamma_E} \right)} \quad (3.8)$$

El término fuente de la ecuación general (1),  $\bar{S}_\phi$ , se linealiza como:

$$\bar{S}_\phi = \bar{S}_{\phi,c} + \bar{S}_{\phi,v} \tilde{\phi}_p \quad (3.9)$$

donde el término  $\bar{S}_{\phi,v}$  se elige de acuerdo a la relación existente entre  $\bar{S}_\phi$  y  $\tilde{\phi}$ , en caso de depender el primero del segundo. El objetivo de la linealización del término fuente es mejorar la convergencia de la solución.

Con esta suposición, los términos B y  $a_p$  de la ecuación (3.2) son:

---

---

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

---

---

$$B = \bar{S}_{\phi_c} \Delta x \Delta y + a_T \tilde{\phi}_T \quad (3.10)$$

$$a_p = a_e + a_w + a_n + a_s + a_T - \bar{S}_{\phi,v} \Delta x \Delta y \quad (3.11)$$

La ecuación (3.2) se aplica en cada celda del dominio, para cada  $\bar{\phi}$  y para cada paso temporal  $\Delta t$ , por lo que se tiene un sistema de ecuaciones lineales (los coeficientes  $a$  pueden depender, directa o indirectamente de  $\tilde{\phi}$ , por lo que el sistema es realmente pseudo-lineal). Para resolver este sistema de ecuaciones se puede utilizar cualquier método de resolución de ecuaciones lineales.

En el cálculo de las velocidades a partir de las ecuaciones de cantidad de movimiento, se tiene el inconveniente de que la presión, cuyo gradiente aparece como término fuente en las ecuaciones de cantidad de movimiento, no tiene una ecuación propia para calcularla. Una solución ampliamente utilizada, es transformar la ecuación de continuidad en una ecuación para la presión.

Entre los algoritmos iterativos que se basan en este procedimiento, están los de la familia SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure- Linked Equations), ([12], [11] y [13]). El algoritmo utilizado en esta tesis para resolver el problema de acoplamiento velocidad-presión pertenece a esta familia.

El proceso de solución de este sistema de ecuaciones es iterativo y durante éste, las ecuaciones del sistema, en general, no se cumplen; el balance entre la parte izquierda y derecha de la ecuación se denomina residuo. La convergencia del proceso iterativo se da cuando los residuos disminuyen.

Para procurar acelerar esta convergencia, se utiliza un método de relajación de algunas de las variables dependientes y propiedades. Se emplean dos tipos de relajación: la inercial y la lineal. La relajación inercial se emplea para las velocidades y los parámetros de turbulencia, y aumenta la diagonal de la matriz de coeficientes el agregar a la ecuación de cualquier variable  $\tilde{\phi}$ , el término fuente:

---

---

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

---

---

$$\bar{S}_{\phi,r} = \frac{\bar{\rho}V_P}{\Delta t_f} (\tilde{\phi}_P^{(n-1)} - \tilde{\phi}_P^{(n)}) \quad (3.12)$$

donde  $V_P$  es el volumen de la celda P,  $\Delta t_f$  es el intervalo de tiempo falso y el superíndice n se refiere al número de iteración.

Para la presión y la densidad se emplea la relajación lineal dada por:

$$\tilde{\phi}_P^{(n)} = \alpha \tilde{\phi}_P^{sol} + (1 - \alpha) \tilde{\phi}_P^{(n-1)} \quad (3.13)$$

donde  $\alpha$  es el factor de relajación, el superíndice “sol” se refiere al valor de la propiedad proporcionado por el “solver” en la iteración actual. El factor de relajación  $\alpha$ , normalmente toma valores entre 0 y 1.

El criterio de convergencia utilizado para detener el proceso iterativo para un paso temporal dado y pasar al siguiente es tal que, para cada variable, la suma de los valores absolutos de los residuos en todo el dominio sea menor que un determinado porcentaje de un valor de referencia.

En este trabajo, se usa el código de Dinámica de Fluidos Computacional, PHOENICS [16], para resolver las ecuaciones que describen la aerodinámica del flujo, recordando que son, la de continuidad, de cantidad de movimiento, de energía, y de turbulencia.

### **3.2 Método de la Celda Cortada (Cut Cell Method).**

Ya se ha presentado el método de los volúmenes finitos utilizando una malla cartesiana, sin embargo dada la complejidad de la geometría, una malla cartesiana no representa adecuadamente un dominio computacional tan complejo, por tanto es

---

---

## SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO

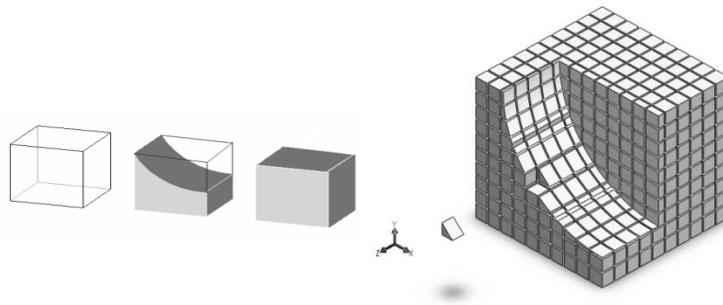
---

---

necesario recurrir a una alternativa que permita el uso de una malla cartesiana, con lo cual se facilitará la convergencia del método numérico.

Este trabajo ha planteado utilizar el método de la celda cortada, con la intención de evitar una excesiva deformación de la malla, lo cual mejora el tiempo de cálculo y el alcance de la convergencia.

El método de la celda cortada desarrollado por Ingram et al [24] se basa en el método de los volúmenes finitos, pues divide el dominio computacional en pequeños volúmenes de control, sin embargo su ventaja principal radica en poder utilizar geometrías muy complejas. El método divide el dominio computacional en tres tipos de celdas: celdas sólidas, celdas de flujo y celdas parcialmente sólidas.

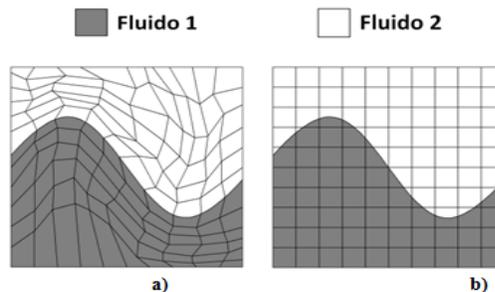


*Figura 6. Representación esquemática de los tres tipos de celdas que se pueden encontrar en un dominio computacional que utiliza el método Cut-Cell.*

El tratamiento matemático para las celdas vacías es el mismo que se ha presentado al inicio de este capítulo, para las celdas sólidas al no existir ningún flujo a través de ellas no son consideradas dentro del cálculo y en las celdas parcialmente sólidas es necesario llevar a cabo interpolaciones que cuantifique el flujo que atraviesa por éstas y lo relacionen con las propiedades de sus vecinos.

### **3.3 Método de la Ecuación Escalar (Scalar Method Equation).**

El método utilizado para la simulación de la superficie libre SEM se encuentra en el código numérico PHOENICS y forma parte de los métodos VOF, presentados por Hirt and Nichols [25]. Estos métodos son conocidos como métodos de malla fija o Eulerianos (Figura 7b), ya que la malla es tratada como un marco de referencia fijo, a través del cual el fluido se mueve, es decir, la malla generada inicialmente se utiliza en todo el cálculo, por lo que no existe ninguna dificultad geométrica, sin embargo, dado que el movimiento del fluido no coincide con la malla de cálculo, es necesario un tratamiento especial para seguir el movimiento de la superficie libre.



**Figura 7.** Tratamiento de la superficie libre a) Lagrangiano b) Euleriano.

Este método es utilizado en problemas de flujo con movimiento de superficie libre y es capaz de modelar dos o más fluidos mediante la solución de un conjunto de ecuaciones de fracción volumétrica, donde la misma variable es fijada para cada uno de los fluidos del dominio, basándose en la consideración de que los fluidos son inmiscibles. Para cada fase que se agrega se introduce una variable llamada “fracción volumétrica de la fase” en la celda de cálculo, teniendo en cuenta que la suma de todas las fracciones volumétricas de todas las fases es la unidad. Si la fracción volumétrica de cada una de las fases se conoce en cada posición, las variables y propiedades en cada celda son representativas de una de las fases o de la interfase, dependiendo de los valores de la fracción volumétrica.

Así, la fracción volumétrica de un fluido es denotada como  $c$  y pueden cumplirse tres condiciones:

---

---

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

---

---

- $c = 1$  Celda llena de fluido 1 
- $c = 0$  Celda llena del fluido 2 
- $0 < c < 1$  Celda con interface 

Por tanto, es necesario resolver una ecuación de transporte adicional para la fracción de volumen de la primera fase,  $c$ .

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \text{div}(c\vec{v}) = 0 \tag{3.14}$$

Esta ecuación, tiene la misma forma que ecuación de continuidad, con la diferencia de que la densidad  $\rho$  es sustituida por  $c$ .

De esta manera, las propiedades del líquido efectivo varían en el espacio de acuerdo con la fracción de volumen de cada fase, de la siguiente manera:

$$\rho = \rho_1 c + \rho_2 (1 - c) \tag{3.15}$$

Donde los subíndices 1 y 2 denotan los dos fluidos (líquido y gas), respectivamente. Así, si un volumen de control está parcialmente lleno con un fluido y parcialmente con el otro fluido (es decir,  $0 < c < 1$ ), se supone que ambos fluidos tienen la misma velocidad y presión, teniendo en cuenta que la interfase no representa un límite, por lo que no hay necesidad de establecer condiciones de contorno en ella.

## **Capítulo 4**

### **Análisis Numérico del Comportamiento del Flujo**

#### **4.1 Introducción.**

Parte importante del estudio en esta tesis es el de conocer el comportamiento del flujo dentro del mezclador planetario, ya que de acuerdo con la configuración que tenga se obtendrán diferentes resultados.

En este apartado se detallan brevemente las características y los procedimientos llevados a cabo numéricamente, para poder determinar el comportamiento del flujo dentro del mezclador planetario. También se abordan los parámetros más importantes y las consideraciones tomadas.

#### **4.2 Caso a simular.**

Durante varios años las industrias, han realizado estudios de manera experimental en mezcladores planetarios, por lo que la información obtenida en esos experimentos, no es de dominio público. Debido a eso, se tuvo la necesidad de iniciar la teoría sobre estos sistemas que son muy comunes y será el punto de partida para los siguientes trabajos sobre mezcladores planetarios.

#### **4.3 Detalles Numéricos.**

El caso que se va a simular es el de un mezclador planetario industrial, el cual cuenta con un tanque (objeto en color gris), un agitador (objeto en color azul) y una varilla (objeto en color café) que sostiene y da movimiento relativo al agitador, figura 4.1. En la tabla 4.2 se muestran las dimensiones de dichas partes del

---

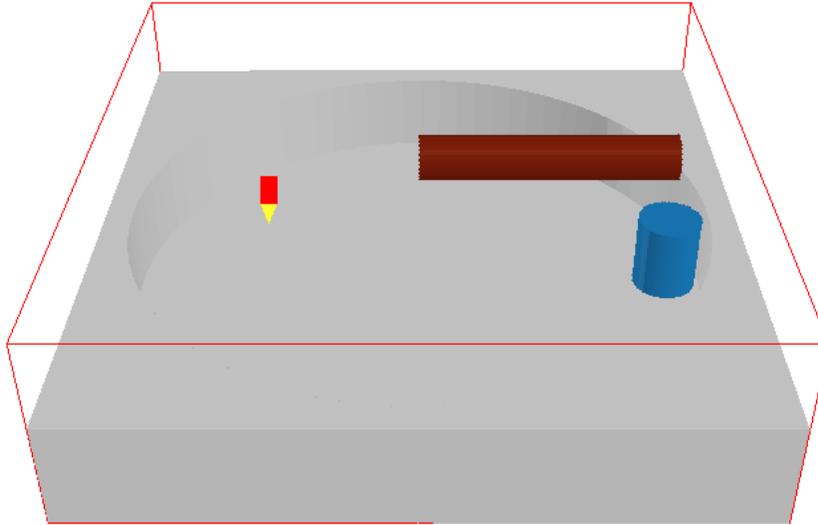
---

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

---

---

sistema de mezclado. El sistema del mezclador planetario está lleno de agua que va desde la base del tanque hasta aproximadamente 3/4 del mismo.



*Figura 4.1 Partes del sistema de mezclado.*

NOMBRE	COLOR	DIMENSIONES
Agitador	Azul	Diámetro=0.1 m. Altura=0.12 m.
Varilla	Café	Diámetro=0.07 m. Largo= 0.4 m.
Tanque	Gris	Diámetro=0.92 m. Altura=0.13 m.

*Tabla 4.2 dimensiones de los elementos del sistema mezclador.*

El giro de traslación y rotación del agitador hace posible que la mezcla del fluido se lleve a cabo; el fluido que se encuentra dentro del mezclador está en contacto directo con la atmósfera. El fluido que se encuentra dentro del tanque es mezclado por el agitador de manera que se lleve a cabo la mezcla; el agitador consta de dos movimientos, uno de rotación y otro de traslación. El movimiento de rotación es dos veces más grande que el movimiento de traslación y el agitador es de forma cilíndrica en esta configuración. La velocidad de rotación del agitador es de

---

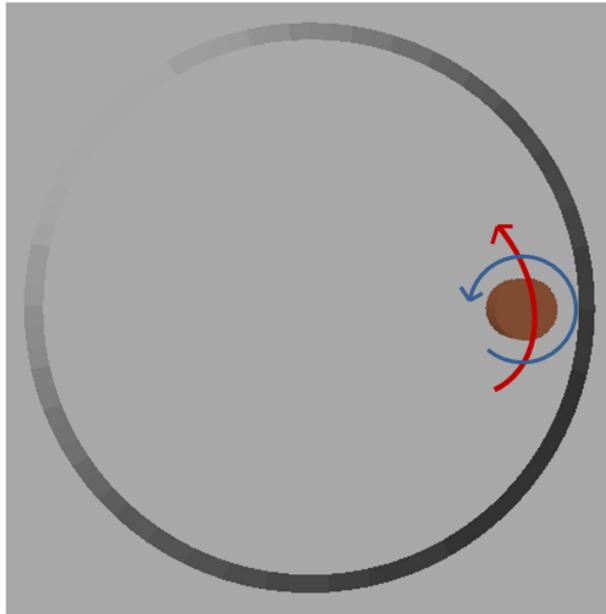
---

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

---

---

$6.2832 \times 10^{-3}$  m/s, mientras que la de traslación es de 0.0126 m/s. Tanto el movimiento de traslación como el movimiento de rotación del agitador se llevan a cabo en sentido antihorario, figura 4.3.



**Figura 4.3** Sentido del movimiento de rotación (flecha azul) y traslación (flecha roja) del agitador.

El dominio del sistema cuenta con un tamaño en  $X$  y  $Y$  de 1m, y en  $Z$  de 0.31 m. El mallado consta de 60 celdas en  $X$  y  $Y$ , y de 20 en  $Z$ , de esta forma es como se discretizó el dominio del sistema. En la figura 4.4 se muestra el mallado en la dirección  $X$ , mientras que en la dirección  $Y$  se muestra en la figura 4.5, el mallado en  $Z$  se muestra en la figura 4.6.

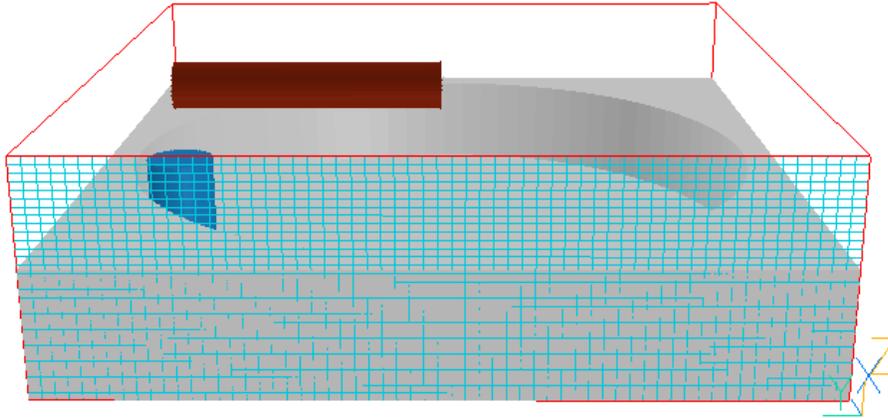
---

---

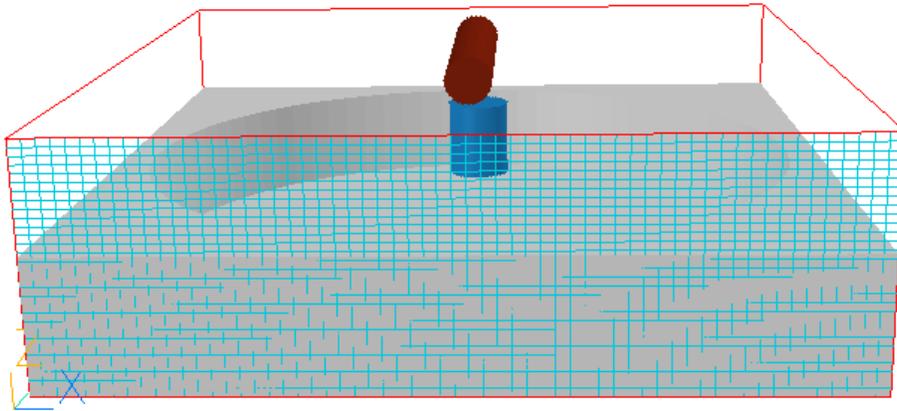
**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

---

---



*Figura 4.4* Mallado sobre el plano X.



*Figura 4.5* Mallado sobre el plano Y.

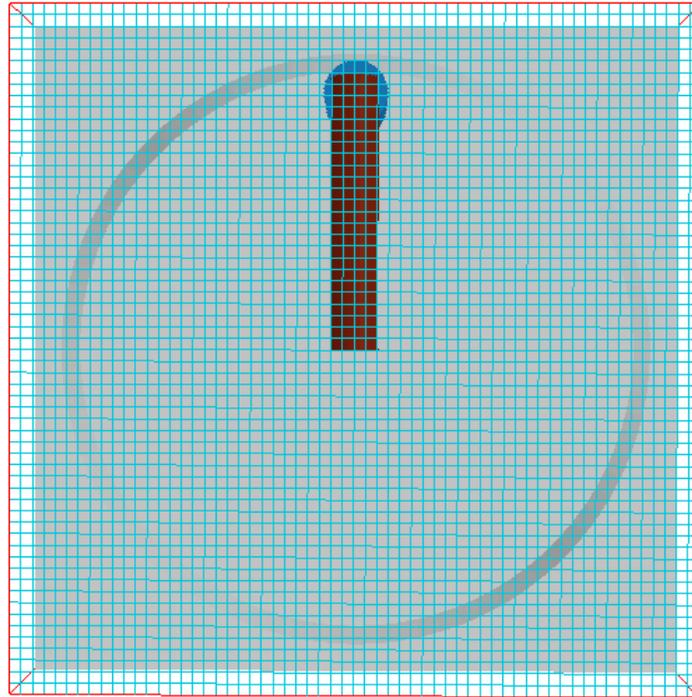
---

---

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

---

---



*Figura 4.6 Mallado sobre el plano Z.*

#### **4.4 Archivo MOFOR.**

Es necesario que las partes del sistema de mezclado tengan movimiento para que la simulación se pueda llevar a cabo, de tal manera que en este breve apartado se hace una descripción general del archivo MOFOR utilizado en esta simulación.

A continuación se hará una explicación de la estructura del archivo MOFOR:

Primeramente un archivo MOFOR consta de dos partes, MOTION (movimiento) y HIERARCHY (jerarquía). HIERARCHY describe los objetos que están presentes, y cómo se relacionan entre sí geoméricamente y cinemáticamente. MOTION define cómo sus parámetros definidos varían con el tiempo.

La primera línea del código MOFOR comienza con la palabra HIERARCHY, los caracteres pueden ser mayúsculas o minúsculas.

---

---

## **SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

---

---

La segunda línea consta de las palabras UNIT METRES que hace referencia al tipo de unidades manejadas en el dominio computacional en las partes del sistema.

Los otros comandos utilizados en la parte HIERARCHY del archivo MOFOR son: ROOT, OFFSET, JOINT Y END SITE. Estos comandos se describen a continuación.

ROOT (raíz): Es usado usualmente para declarar el origen del espacio CFD de la red. Generalmente es seguido por el número de raíces (ROOTS) y/o articulaciones (JOINTS) entre corchetes.

JOINT: Es la declaración en el código el cual hace referencia a que existe una unión cinemática entre elementos del sistema en el dominio computacional. Éste es seguido por una sección de definiciones que consiste en un corchete abierto con un corchete de cierre correspondiente.

OFFSET: Es la posición del origen del eje relativo de rotación para un movimiento de traslación y rotación circulares.

CHANNELS (canales): Son los grados de libertad, los cuales definen que tipos de datos dependientes del tiempo están definidos para determinada unión cinemática; la unión puede trasladarse o rotar, o ambos, sobre algún eje.

END SITE: Este comando indica el fin del movimiento de la unión cinemática.

La segunda parte del código MOFOR consta de la parte MOTION el cual es un comando obligatorio e identifica el comienzo de la parte en función del tiempo del archivo MOFOR, el cual es seguido por una línea especificando el número de cuadros (FRAMES). Los FRAMES son los números de cuadros de tiempo en el

---

---

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR  
PLANETARIO**

---

---

cual los datos están dados; el número de FRAMES o cuadros puede ser muy grande o muy pequeño que el “time steps” (pasos de tiempo) del dominio computacional, pero todos ellos son de igual tamaño.

La siguiente línea dentro de la parte MOTION, Frame Time, (tiempo de cuadro) es el tiempo de separación de cada conjunto de datos, de tal manera, que el tiempo total de conjunto de datos es igual a (Frames – 1) x Frame Time.

**4.4.1 Archivo MOFOR perteneciente a esta simulación.**

HIERARCHY

UNITS METRES

ROOT Cham

{

JOINT VARILLA

{

    OFFSET 0.5 0.5 0.0

    CHANNELS 1 Zrotation

    JOINT PALETA

    {

        OFFSET 0.0 0.4 0.0

        CHANNELS 1 Zrotation

        End Site

    }

    End Site

  }

}

MOTION

Frames: 201

---



---

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

---



---

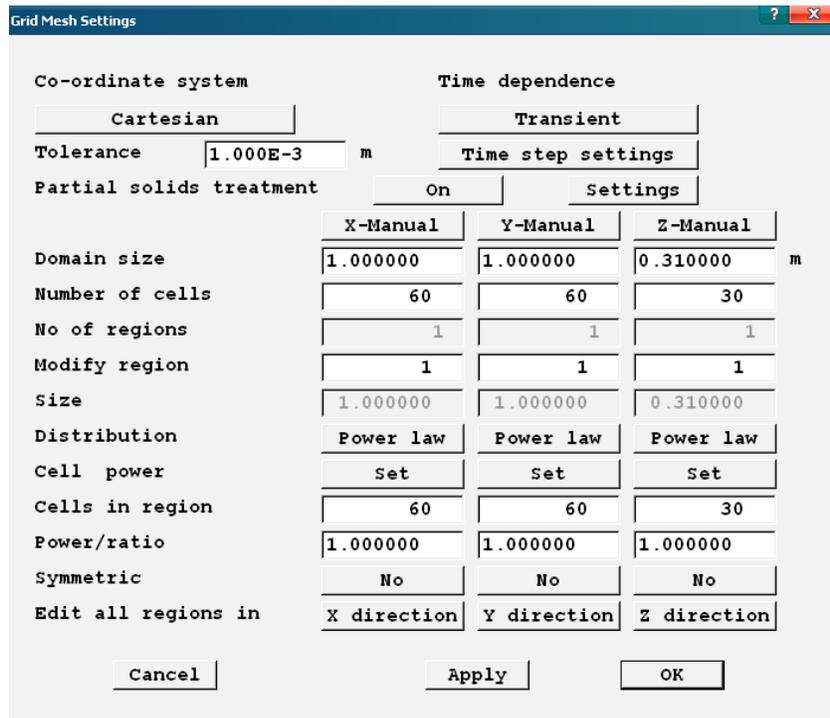
Frame Time: 0.05

0.0000 0.000

... ..

360 1440

Las características del sistema se muestran en la figura 4.7, donde se puede ver claramente el tamaño del dominio y el mallado del mismo.



*Figura 4.7 Condiciones geométricas del dominio.*

La formulación de la ecuación del sistema es elíptica-decalada, además se utiliza el modelo de superficie libre llamado ecuación escalar. El modelo de turbulencia utilizado en esta simulación es laminar; todas estas condiciones se muestran en la figura 4.8.

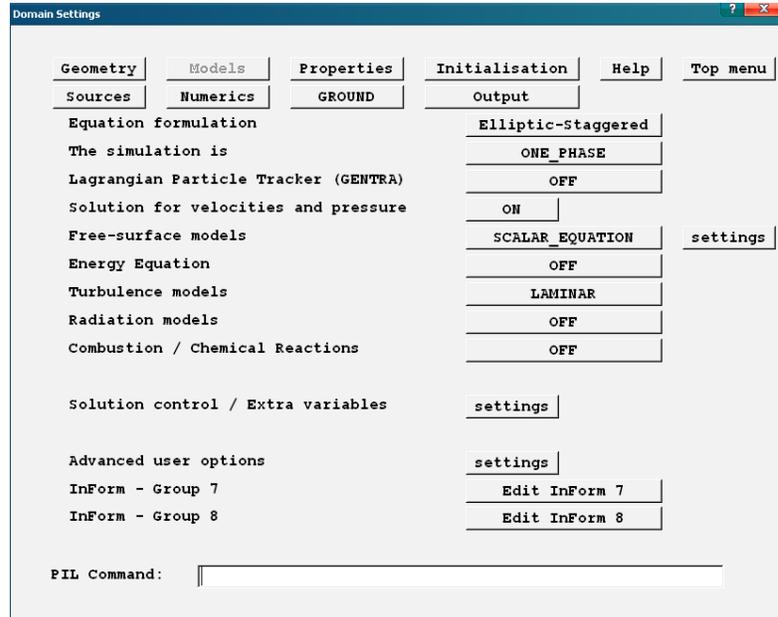
---

---

## SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO

---

---



*Figura 4.8 Modelos utilizados en la simulación numérica.*

Los fluidos utilizados para llevar a cabo la simulación numérica son aire a 20 °C y 1 atmósfera de presión, y agua a 20 °C; el agua es denominada como fluido pesado y el aire como fluido ligero. Estas condiciones se muestran en la figura 4.9.

## SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO

Domain Settings

Geometry Models Properties Initialisation Help Top menu

Sources Numerics GROUND Output

Light fluid 0 Air at 20 deg C, 1 atm, treated..

Heavy fluid 67 WATER at 20. deg C

NOTE: Only CONSTANT DENSITY fluids should be chosen.

Domain initially full of LIGHT fluid

Property storage

PIL Command:

Figura 4.9 Condiciones de los fluidos que están contenidos en el dominio.

Las velocidades dentro del sistema  $u$ ,  $v$  y  $w$  son inicialmente de cero, esto se muestra claramente en la figura 4.10.

Domain Settings

Geometry Models Properties Initialisation Help Top menu

Sources Numerics GROUND Output

Activate Restart for all variables Reset initial values to default

Initial conditions additive NO

InForm - Group 11 Edit InForm 11

Initial value for each variable

Variable	P1	U1	V1	W1	ENUL
FIINIT Value	AMBIENT	0.000000	0.000000	0.000000	1.00E-10

Apply

Name of restart file PHI

Restart cut-cell values YES from pbcl.dat

PIL Command:

Figura 4.10 Condiciones iniciales del sistema.

---

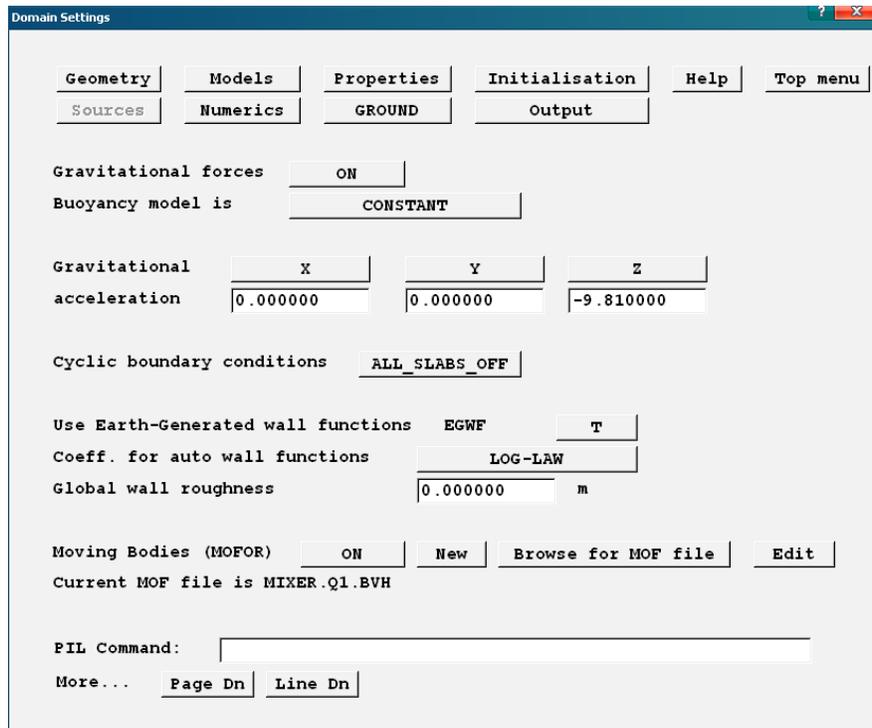
---

## SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO

---

---

Las fuerzas gravitatorias en este caso, actúan en dirección negativa al eje Z y son constantes, figura 4.11.



*Figura 4.11 Fuerzas gravitatorias.*

Para dar movimiento al agitador se necesita activar el módulo de archivos MOFOR el cual se puede ver en la figura 4.12 encerrado por un óvalo rojo, en el mismo, se carga un archivo escrito en algún editor de texto como workpad o block de notas; el archivo se carga desde este módulo, dando movimiento al sistema dentro del dominio computacional.

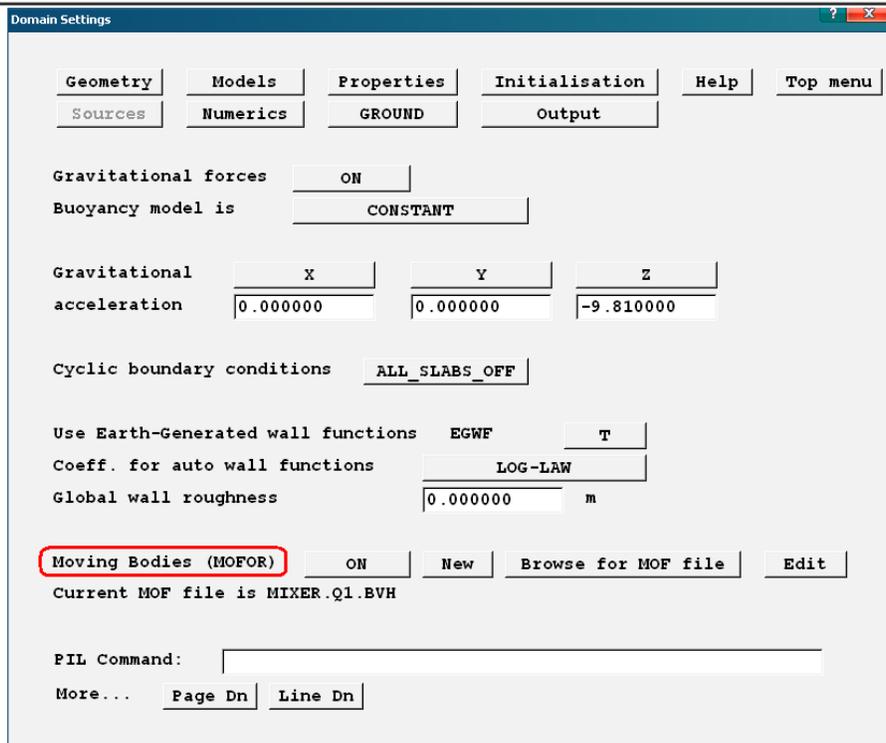
---

---

## SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO

---

---

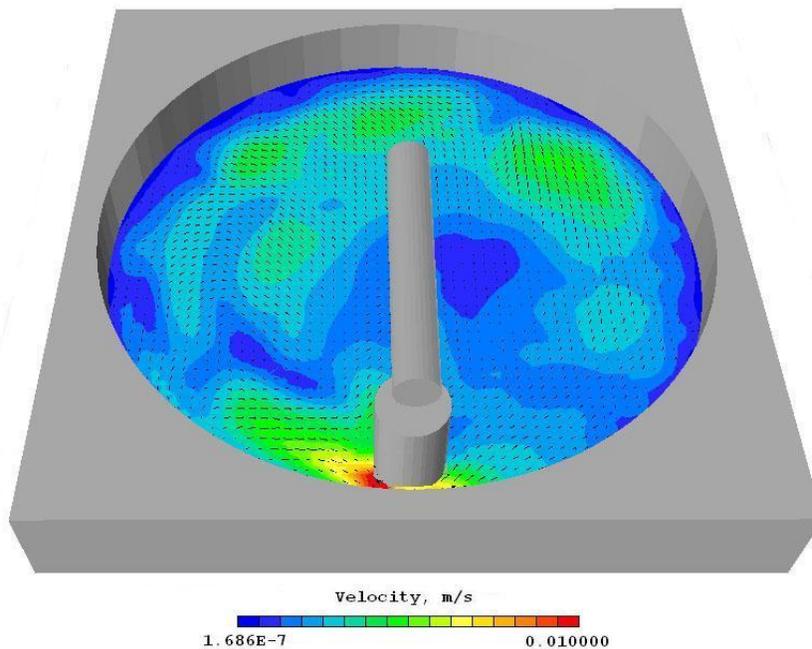


*Figura 4.12 Módulo de archivos MOFOR.*

### 4.5 Resultados y discusión.

Los parámetros importantes que se muestran a continuación son la velocidad ( $V1$ ), presión ( $P1$ ), la presencia de la fase líquida ( $SURN$ ). Estos parámetros indican cómo se comporta el fluido dentro del mezclador. Para cada uno de los parámetros fueron tomadas diferentes imágenes en diferentes perspectivas para así tener un mejor estudio y visualización del fenómeno estudiado; de tal modo que también se realizaron en diferentes tiempos en los cuales ocurrió la simulación de dicho fenómeno. Los tiempos fueron tomados para 1, segundo, (el cual corresponde al inicio del proceso) y 150 segundos, (el cual corresponde a tres cuartas partes del inicio del proceso) en el caso de la velocidad y la isosuperficie, en el caso de la presión, fueron tomados en el tiempo 1 segundo, (inicio del proceso) 50 segundos, (una cuarta parte del inicio del proceso) y 100 (dos cuartas partes del inicio del proceso de mezclado) segundos de haber iniciado el proceso.

### 4.5.1 Campos de velocidad.



*Figura 4.13 Campos de velocidad (inicio de la mezcla.  $t=1s$ ).*

En las Figuras 4.13 y 4.14 se muestran en diferentes vistas los campos de velocidad en las proximidades del agitador, dentro del mezclador. Después de que comienza el proceso de agitación, las velocidades del fluido cambian haciendo que los campos de velocidad del fluido sean modificados y las velocidades sean diferentes dentro del tanque. En las zonas más próximas al agitador se puede observar un mayor valor de la velocidad, esto se debe al movimiento relativo (de rotación) del agitador con respecto a la varilla (movimiento de traslación).

Cabe mencionar que el movimiento de rotación del agitador es de suma importancia para la mezcla del fluido, ya que además de estar mezclando con un movimiento de traslación lo hace con uno de rotación.

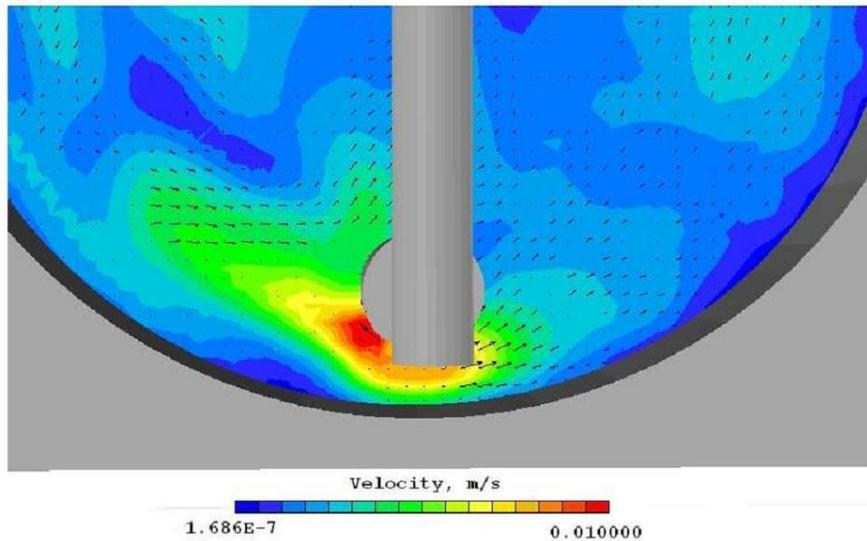
---

---

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

---

---



*Figura 4.14 Campos de velocidad (acercamiento, inicio de la mezcla.  $t=1$  s).*

En la figura 4.14 se muestra con mayor claridad el comportamiento de los campos de velocidad dentro del tanque mezclador, por la parte de enfrente es de 0.01 m/s la cual representa la velocidad a la cual se mueve el agitador alrededor del centro del mezclador, de tal modo que la máxima velocidad está en la proximidad del agitador.

Para tener una mejor apreciación de proceso de mezclado, se muestran a continuación diferentes imágenes que muestran el comportamiento del fluido durante el mezclado a los 150 segundos de que comenzó el proceso. Se puede observar que existe una diferencia comparativa con respecto al comportamiento del fluido en un tiempo de 1 segundo, es evidente que los campos de velocidad se han modificando proporcionando nuevos datos para el fluido en proceso de mezclado. Una estela de movimiento de fluido es dejada detrás del cuerpo solido, que simula el aspa.

Las imágenes siguientes muestran la evolución del proceso en un tiempo correspondiente a 150 segundos de haber iniciado el proceso de mezclado del fluido; en estas imágenes se muestra que el fluido ha tenido una modificación más en cuanto al a configuración de velocidades. La figura 4.15 corresponde a una

---

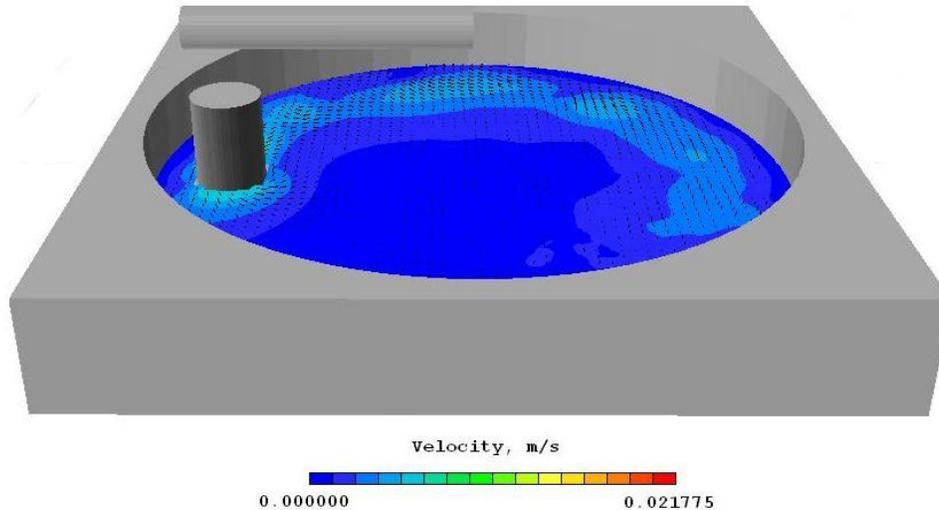
---

## SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO

---

---

proyección axonométrica, la figura 4.16 a una vista superior, y la figura 4.17, un acercamiento superior en la que se puede observar de una mejor manera el tamaño, sentido y dirección de los vectores.



*Figura 4.15 Campos de velocidad (tiempo  $t=150$  s).*

Al realizar los cálculos numéricos para la velocidad del agitador se obtiene un valor de 0.0126 m/s, el cual no difiere de forma significativa con el valor proporcionado en la simulación numérica (ver valor de la velocidad máxima en la fig. 4.14).

De forma semejante al calcular el valor de la velocidad máxima, la cual es la suma de la velocidad de traslación de la varilla más la velocidad de rotación del agitador; ésta nos proporciona un valor calculado de 0.019 m/s, la cual no difiere de forma importante del valor proporcionado por la simulación numérica. En la figura 4.16 se tiene un acercamiento del proceso de mezclado para apreciar a detalle lo que sucede en las proximidades del agitador, de tal modo que se pueden apreciar la dirección y el sentido de los vectores, los cuales corresponden al movimiento de la varilla y del agitador.

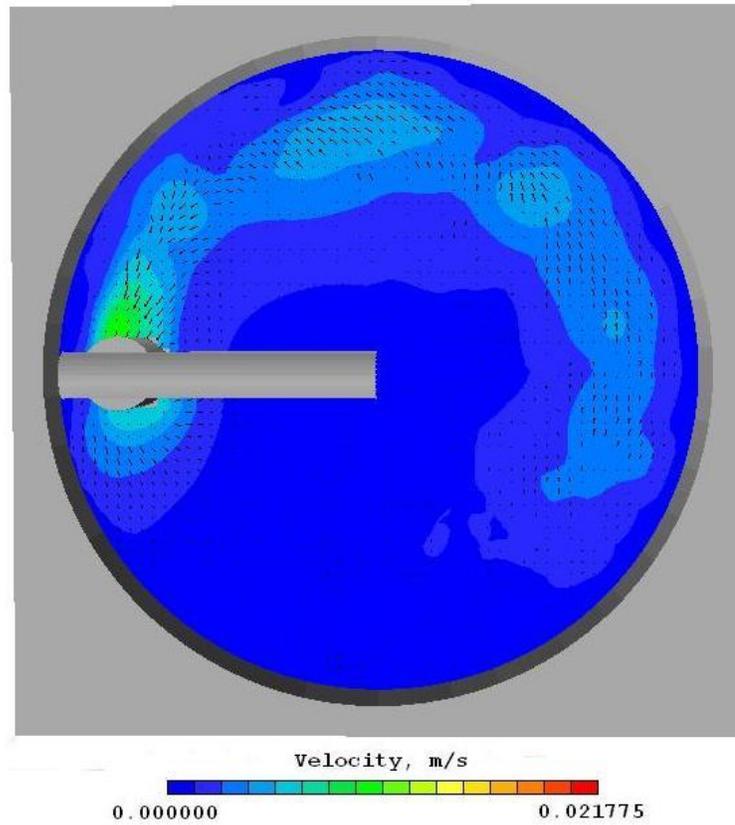
---

---

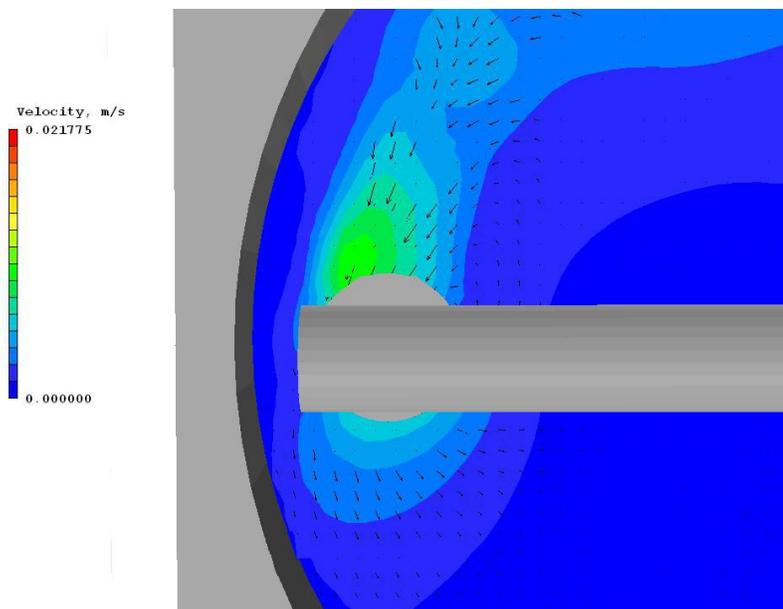
**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

---

---



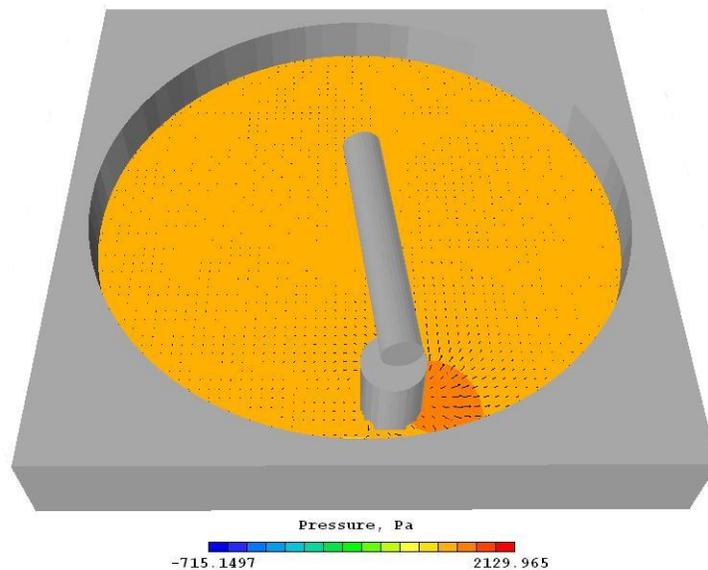
**Figura 4.16** Campos de velocidad (vista superior tiempo  $t=150$  s).



**Figura 4.17** Campos de velocidad (acercamiento vista superior tiempo  $t=150$  s).

### 4.5.2 Campos de Presión.

En la figura 4.18 se muestra la distribución del campo de presión para un tiempo igual a 1 segundo, mostrando de esta manera la forma en la que actúa la presión sobre el fluido; el agitador proporciona un empuje al fluido provocando movimiento al mismo. Es importante mencionar que este efecto es de suma importancia ya que este movimiento de traslación en conjunto con el de rotación del agitador propician el efecto de mezclado sobre el fluido.



*Figura 4.18 Campos de presión (tiempo  $t=1$  s).*

En las figuras 4.19 y 4.20 se muestra este mismo comportamiento visto desde otras perspectivas indicando y visualizando de mejor manera el fenómeno después de haber transcurrido 1 segundo de tiempo desde su inicio. Las diferencias de color en las figuras muestran que las presiones en las distintas regiones cerca del agitador son diferentes, de tal manera que el color naranja

---

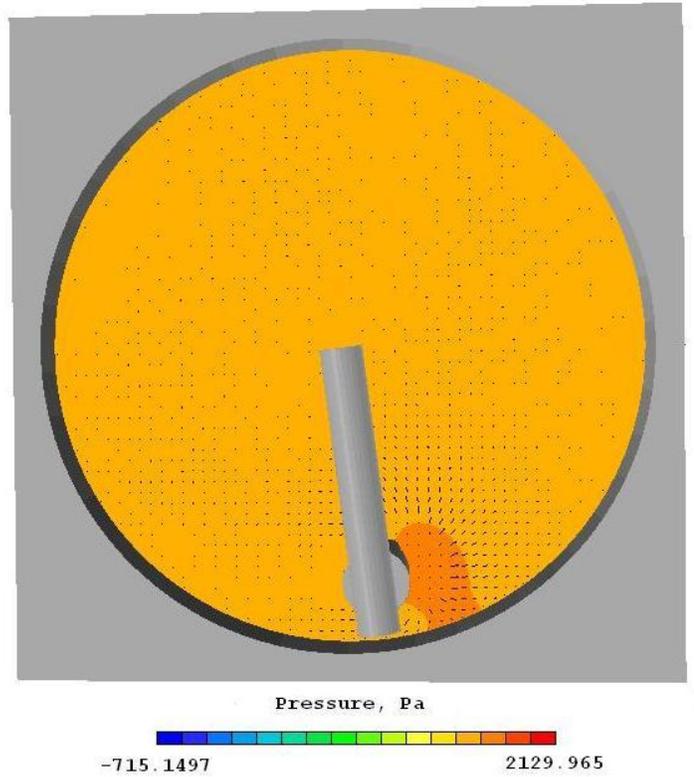
---

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

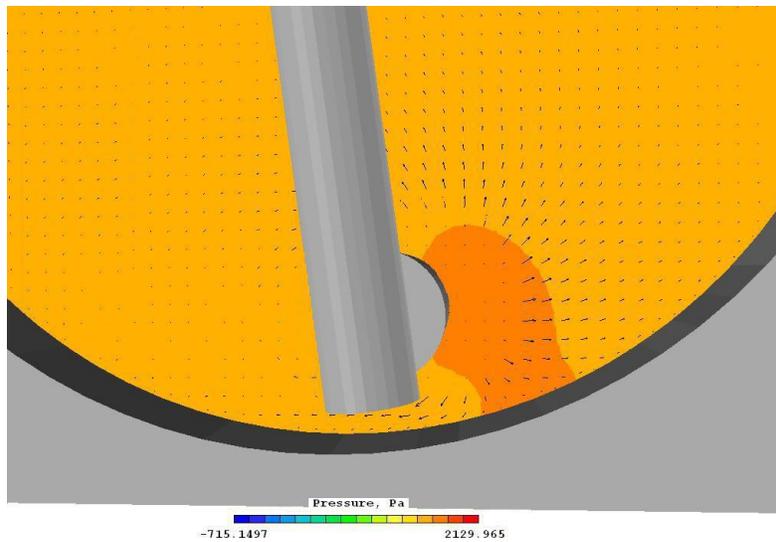
---

---

muestra una presión mayor que el color amarillo que predomina en las figuras respectivas.



**Figura 4.19** Campos de presión (vista superior tiempo  $t=1$  s).



**Figura 4.20** Campos de presión (acercamiento vista superior tiempo  $t=1$  s).

---

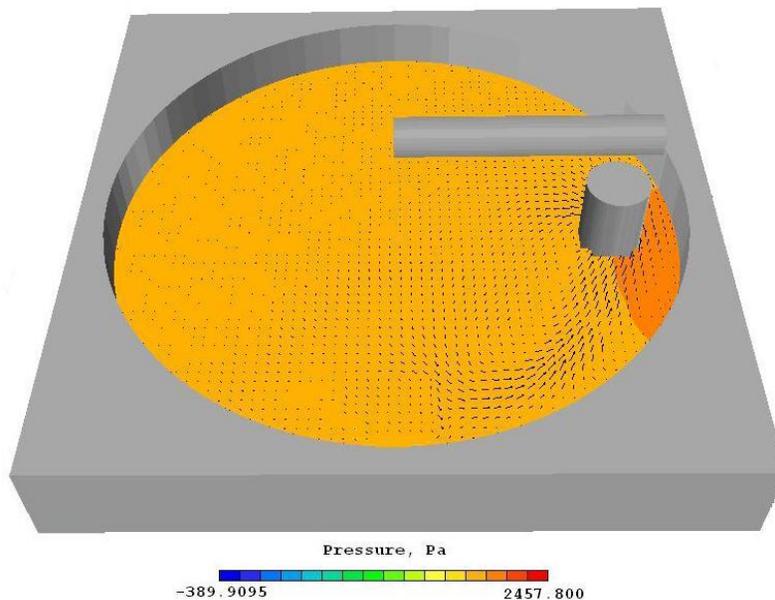
---

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

---

---

Después de haber transcurrido 50 segundos desde el inicio del proceso de mezclado, se puede observar que el campo de presiones ha cambiado (fig. 4.21), en este caso la presión ha aumentado con respecto a la etapa anterior que corresponde al tiempo de 1 segundo (Fig. 4.19). Es muy importante que exista diferencia significativa en el aumento de las presiones en el proceso de mezclado ya que esta diferencia es la que indica que tan eficiente es el proceso.



**Figura 4.21** Campos de presión ( tiempo  $t=50$  s).

La figura 4.22 muestra la distribución de presiones sobre el fluido, además de la dirección y sentido de los vectores que indican cómo actúa la presión sobre el fluido mezclado; además, se puede observar claramente que el movimiento de rotación del agitador influye directamente sobre el comportamiento del fluido, esto lo demuestra la configuración de los vectores alrededor del agitador (figura 4.23).

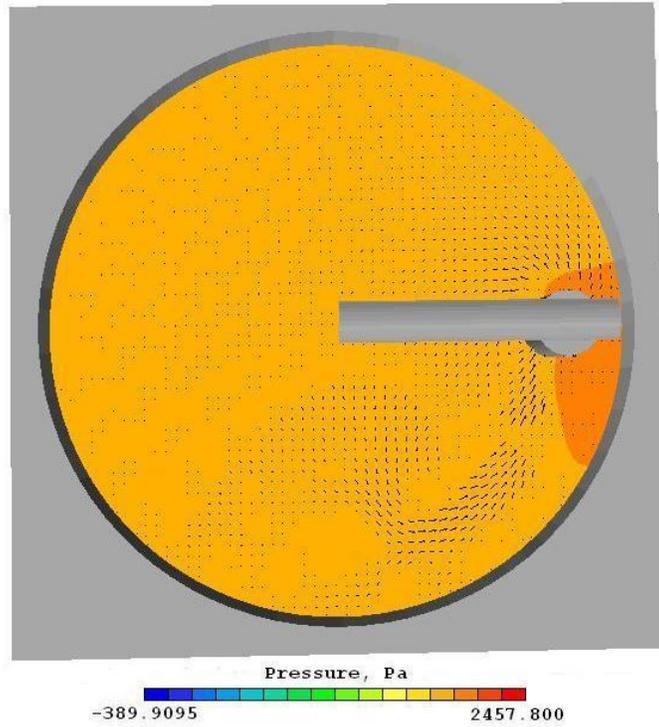
---

---

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

---

---



*Figura 4.22 Campos de presión (vista superior tiempo  $t=50$  s).*

En la siguiente figura (Fig. 4.23) se puede observar con mejor detalle la distribución y configuración de los campos de velocidad.

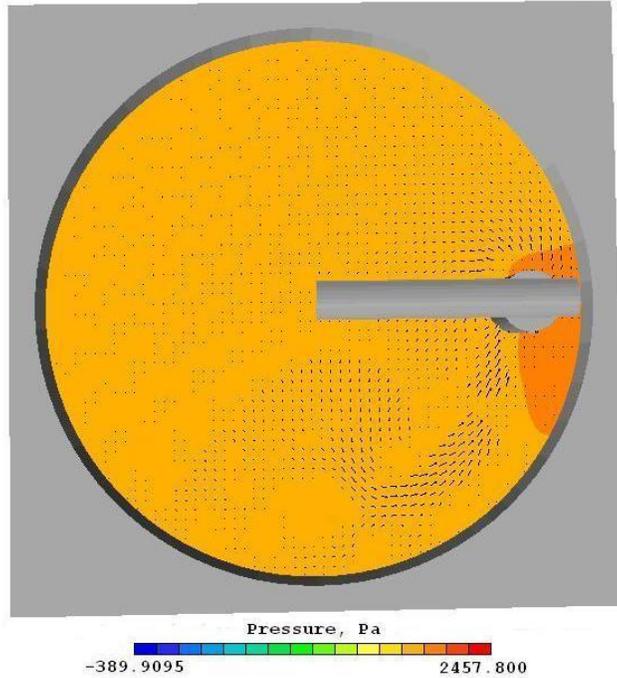
---

---

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

---

---



*Figura 4.23 Campos de presión (acercamiento vista superior tiempo  $t=50$  s).*

En un tiempo correspondiente a 100 segundos (fig.4.24) se puede observar que sigue existiendo un aumento de presión, esto es debido a que el fluido anteriormente ya estaba siendo mezclado. Es importante mencionar que el agitador comienza a generar fenómenos de vorticidad, debido principalmente al movimiento de rotación del agitador.



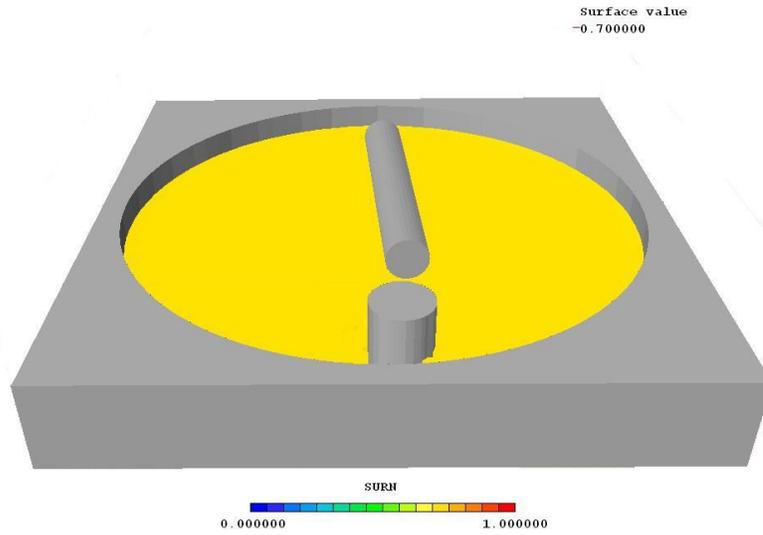
---

---

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

---

---



*Figura 4.25 Isosuperficie (tiempo  $t=1$  s).*

En la siguiente imagen se aprecia de mejor manera la perturbación del fluido provocada por el agitador (Fig. 4.26).



*Figura 4.26 Isosuperficie (vista superior tiempo  $t=1$  s).*

---

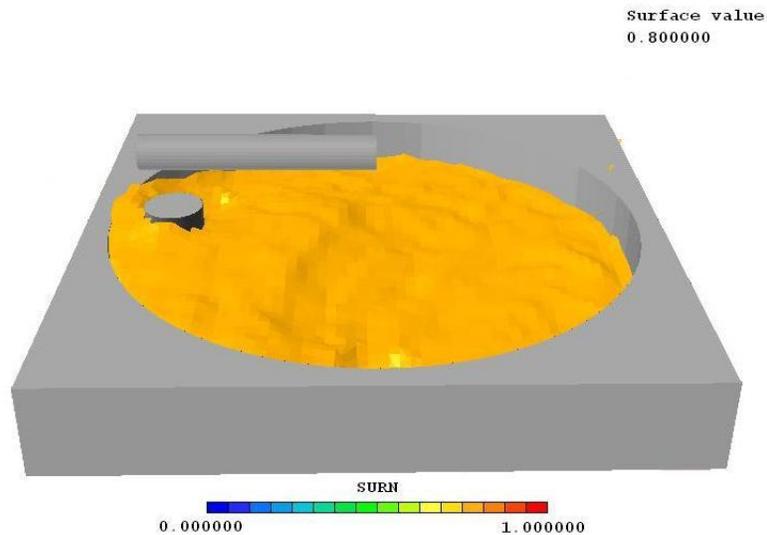
---

## SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO

---

---

Es evidente que a lo largo del proceso de mezclado, mientras más transcurra el tiempo, el fluido continuará siendo perturbado, esto debido a la velocidad de giro tanto de traslación como de rotación del agitador. En la figura 4.27 es ya aún más evidente que el fluido ha alcanzado una mayor homogeneidad en los campos de velocidad (comparar con Fig. 4.16).



*Figura 4.27* Isosuperficie (tiempo  $t=150$  s).

La perturbación del fluido es muy evidente; en la figura 4.28 se muestra de mejor manera los efectos del mezclado en un tiempo que corresponde a los 150 segundos de haber iniciado el proceso. El fluido al experimentar una fuerza de empuje debido al agitador comienza a tener diferencias de altura (ver Fig. 4.27), las cuales ya no son homogéneas (Fig. 4.28) y esto hace que haya un desplazamiento del fluido dentro del tanque que lo contiene, provocando que sea un factor importante en el proceso de mezclado y que en conjunto con el movimiento de rotación del agitador, provoque un mezclado más completo en el fluido. El fluido por la parte de enfrente del aspa es levantado por el movimiento de ésta.

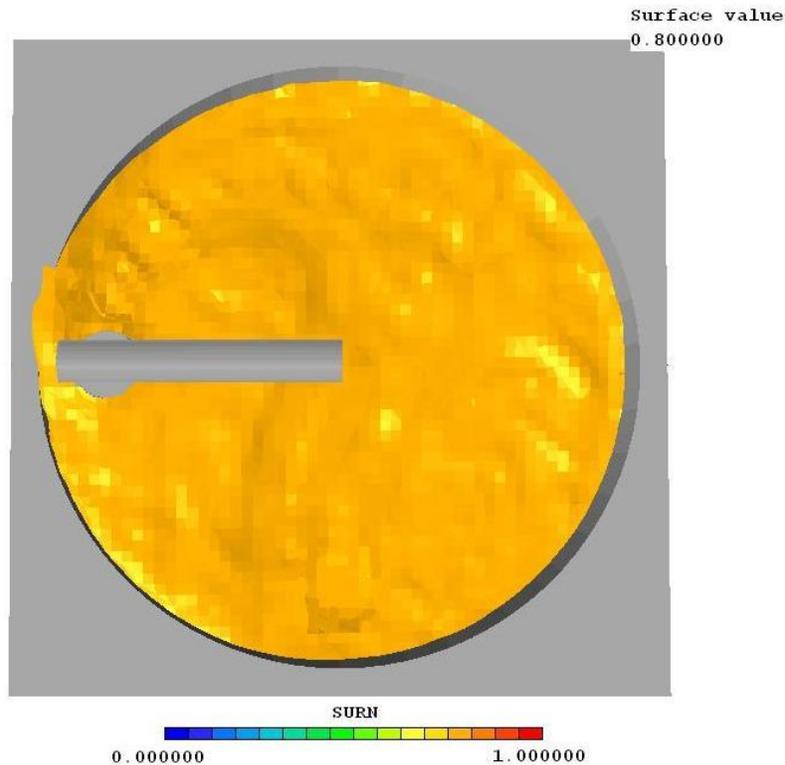
---

---

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

---

---



*Figura 4.28 Isosuperficie (vista superior tiempo t=150 s).*

## **Capítulo 5**

### **CONCLUSIONES**

En este trabajo se realizó la simulación numérica del comportamiento de un fluido en un mezclador planetario. Se analizó el comportamiento del fluido comparativamente dentro del tanque y en las proximidades del agitador. El flujo es modelado por medio de las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y energía en términos de valores medios, las cuales son resueltas mediante el método de volúmenes finitos.

El estudio es de gran importancia ya que los mezcladores planetarios son de gran uso en la industria y es de suma importancia poder tener estudios acerca del comportamiento de los fluidos dentro de ellos para poder optimizar el proceso de

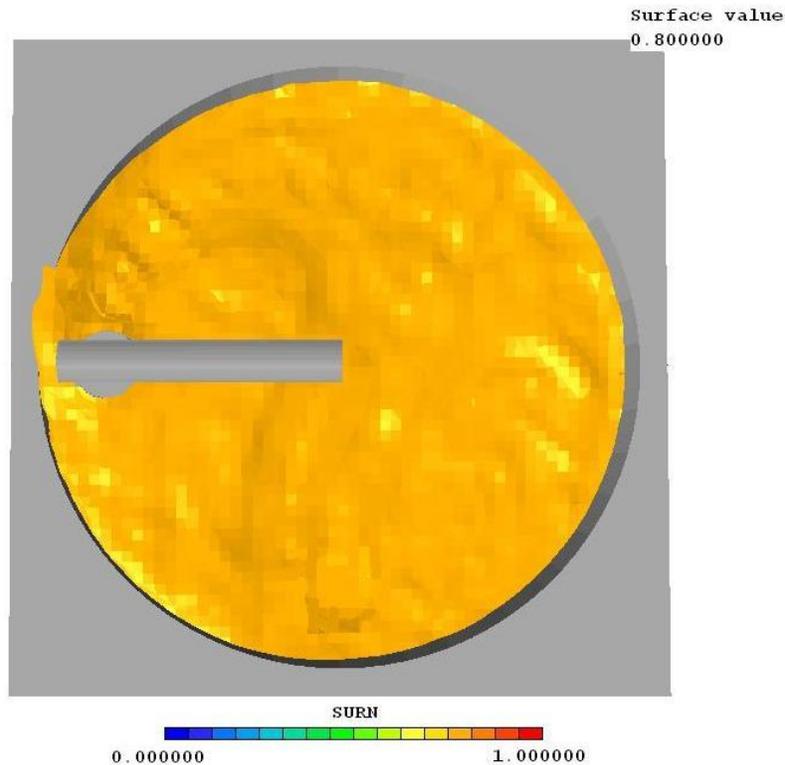
---

---

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

---

---



*Figura 4.28 Isosuperficie (vista superior tiempo t=150 s).*

## **Capítulo 5**

### **CONCLUSIONES**

En este trabajo se realizó la simulación numérica del comportamiento de un fluido en un mezclador planetario. Se analizó el comportamiento del fluido comparativamente dentro del tanque y en las proximidades del agitador. El flujo es modelado por medio de las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y energía en términos de valores medios, las cuales son resueltas mediante el método de volúmenes finitos.

El estudio es de gran importancia ya que los mezcladores planetarios son de gran uso en la industria y es de suma importancia poder tener estudios acerca del comportamiento de los fluidos dentro de ellos para poder optimizar el proceso de

---

---

## **SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

---

---

mezclado, que es el objetivo primordial de un mezclador planetario, mezclar de forma óptima el fluido que lo contiene.

El análisis proporcionó los resultados del comportamiento del fluido cuando el agitador y la varilla del agitador se movían a determinada velocidad, lo que demuestra la importancia de la velocidad de rotación y de traslación del agitador; son de suma importancia los dos aspectos mencionados anteriormente para un mezclador planetario.

Se puede apreciar que al transcurrir el tiempo en el proceso de mezclado, el fluido se ve cada vez más perturbado, de tal modo que la velocidad aumenta por causa del agitador, además de que se puede observar el cambio de presión en el fluido, lo que provoca que haya una diferencia de alturas en el mismo, esto se puede ver con más claridad en la isosuperficie que corresponde a un tiempo de 150 segundos.

El movimiento de traslación realiza una función importante durante el proceso de mezclado, pues es el que al perturbar de forma local con mayor intensidad al fluido, optimiza dicho proceso de mezclado; es importante aclarar que tanto el movimiento de traslación como el de rotación en conjunto ayudan a realizar de forma completa y complementaria la perturbación del fluido dentro del tanque para que se lleve a cabo dicho proceso de mezclado. De hecho, este movimiento va dejando una estela de movimiento de fluido, que perturba el flujo, después de que pasó por un determinado punto.

Como recomendación para futuros trabajos, se sugiere analizar el efecto que tendría combinar diferentes velocidades, tanto de traslación como de rotación del agitador, así como la geometría del mismo. Otra recomendación es la de simular el efecto de la viscosidad del fluido en el proceso de mezclado. Finalmente, también se recomienda validar con datos experimentales, los resultados del modelo numérico.

## *Apéndice A*

### **MODELOS DE TURBULENCIA.**

A continuación se introducen, de manera concisa, algunos de los modelos que se pueden utilizar para representar el efecto de la turbulencia en el flujo reactivo del quemador simulado en esta tesis. Los modelos se clasifican en dos categorías:

- Modelos de tipo “difusividad turbulenta”, esencialmente variantes del método conocido como  $k-\varepsilon$ .
- Cierres de segundo orden, en la forma de modelos de transporte de los esfuerzos de Reynolds.

En primer lugar, se presentará la ecuación exacta para los esfuerzos de Reynolds, seguida por los cierres de segundo orden, que constituyen el transporte de esfuerzos de Reynolds, utilizados en este trabajo. Posteriormente, se presenta el modelo utilizado en esta tesis, el modelo de turbulencia  $k-\varepsilon$  estándar.

### A.1 Cierres de segundo orden.

La ecuación de transporte exacta para los esfuerzos de Reynolds  $(u_i'' u_j'')$  es [3]:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i'' u_j'') + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_k u_i'' u_j'') = & - \underbrace{\left( u_i'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} u_j'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \right)}_{(a)} \\
 & - \underbrace{\left( u_i'' \frac{\partial p'}{\partial x_j} + u_j'' \frac{\partial p'}{\partial x_i} \right)}_{(b)} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_i'' u_j'' u_k'')}_{(c)} \\
 & - \underbrace{\rho \left( u_i'' u_k'' \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + u_j'' u_k'' \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right)}_{(d)} \\
 & - \underbrace{\left( \tau_{ik} \frac{\partial u_j''}{\partial x_k} + \tau_{ik}'' \frac{\partial u_i''}{\partial x_k} \right)}_{(e)} \tag{90}
 \end{aligned}$$

Los términos del lado derecho de la ecuación (90) representan, el efecto del gradiente de presión media (a), la correlación entre gradientes de presión fluctuante y fluctuaciones de velocidad (b), el transporte turbulento de los esfuerzos de Reynolds (c), la producción de los esfuerzos de Reynolds por velocidad de deformación media (d), y la disipación viscosa (e). De los términos anteriores, en (a), (b), (c), y (e) están presentes correlaciones desconocidas, y por tanto requieren modelización.

---



---

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

---



---

Si se hace uso de la definición (44) del capítulo 2, el término que expresa el efecto del gradiente de presión media ( $a$ ), se puede escribir como:

$$-\left(\overline{u_i'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} u_j'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}}\right) = \frac{\overline{\rho' u_j''}}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\overline{\rho' u_i''}}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \quad (91)$$

La correlación  $\overline{\rho' u_j''}$  se puede modelar de una ecuación de conservación truncada como [3]:

$$\overline{\rho' u_j''} = -\frac{1}{4.3} \frac{\tilde{k}}{\varepsilon} u_i'' u_j'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \quad (92)$$

donde  $k = 1/2 u_i'' u_i''$  es la energía cinética turbulenta y  $\varepsilon$  es su tasa de disipación. La contribución de este término es muy pequeña y frecuentemente se desprecia ([23] y [25]).

Con fines de modelación, la correlación entre gradientes de presión fluctuante y fluctuaciones de velocidad, ( $b$ ), frecuentemente se divide en una parte re-distributiva y una parte isótropa [2]:

$$\left(\overline{u_i'' \frac{\partial p'}{\partial x_j} + u_j'' \frac{\partial p'}{\partial x_i}}\right) = -\left(\overline{u_i'' \frac{\partial p'}{\partial x_j} + u_j'' \frac{\partial p'}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} u_k'' \frac{\partial p'}{\partial x_k}}\right) - \frac{2}{3} \overline{\delta_{ij} u_k'' \frac{\partial p'}{\partial x_k}} \quad (93)$$

La parte isótropa se divide en dos términos, uno de transporte por presión y otro de dilatación por presión:

$$-\frac{2}{3} \overline{\delta_{ij} u_k'' \frac{\partial p'}{\partial x_k}} = \underbrace{-\frac{2}{3} \overline{\delta_{ij} \frac{\partial p' u_k''}{\partial x_k}}}_{(I)} + \underbrace{-\frac{2}{3} \overline{\delta_{ij} p' \frac{\partial u_k''}{\partial x_k}}}_{(II)} \quad (94)$$

---



---

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

---



---

En flujos de baja velocidad  $Ma \ll 1$ , el término (II) de la ecuación (94) generalmente se desprecia [13]. El término (I) se suma al término de transporte turbulento de los esfuerzos de Reynolds (c) para formar el término:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (C_{ijk}) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \overline{\rho u_i'' u_j'' u_k''} + \frac{2}{3} \delta_{ij} \overline{\rho' u_k''} \right) \quad (95)$$

El término  $C_{ijk}$  se modela mediante un cierre de tipo gradiente [7]:

$$C_{ijk} = -C_s \frac{\tilde{k}}{\tilde{\varepsilon}} u_k'' u_i'' \frac{\partial u_j''}{\partial x_l} \quad (96)$$

El término (e) es la correlación de la disipación viscosa:

$$\overline{\tau_{ik} \frac{\partial u_j''}{\partial x_k}} + \overline{\tau_{ik}'' \frac{\partial u_i''}{\partial x_k}} = \overline{\rho} \varepsilon_{ij} \quad (97)$$

Si se supone isotropía local, el término  $\varepsilon_{ij}$  se puede escribir en función de la disipación de energía cinética turbulenta,  $\varepsilon$ , como [3]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \tilde{\varepsilon} \delta_{ij} \quad (98)$$

La tasa de disipación de la energía cinética turbulenta,  $\tilde{\varepsilon}$ , se calcula de la siguiente ecuación de transporte, deducida por procedimientos similares a los utilizados en el caso de densidad constante [3]:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho \tilde{\varepsilon}}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho \tilde{\varepsilon} u_j}) = - \underbrace{C_{\varepsilon 1} \overline{\rho} \frac{\tilde{\varepsilon}}{\tilde{k}} u_k'' u_j'' \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_j}}_{(A)} - \underbrace{C_{\varepsilon 2} \overline{\rho} \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{\tilde{k}}}_{(B)} + \underbrace{C_{\varepsilon 3} \frac{\tilde{\varepsilon}}{\tilde{k}} \frac{\overline{\rho' u_j''}}{\overline{\rho}} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j}}_{(C)}$$

---



---

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

---



---

$$+ \frac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{\left( C_\varepsilon \bar{\rho} \frac{\tilde{k}}{\tilde{\varepsilon}} u_j'' u_k'' \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_j} \right)}_{(D)} \quad (99)$$

donde, de acuerdo con lo expuesto anteriormente, el término (C) se desprecia.

La parte re-distributiva de la correlación entre gradientes de presión fluctuante y fluctuaciones de velocidad, expresión (93), usualmente se divide en dos partes: una que incluye cantidades turbulentas y otra que incluye la tasa de deformación media.

Modelos para este término han sido propuestos, por ejemplo por Launder et al [18] (modelo ML), Gibson y Younis [7] (modelo MG) y Musonge [24] (modelo MJ).

Denotando al término redistributivo como  $\Pi_{ij}$ , los modelos se escriben como:

$$\begin{aligned} \Pi_{ij} = & -C_1 \bar{\rho} \tilde{\varepsilon} \left( \frac{u_i'' u_j''}{\tilde{k}} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \right) + C_2 \delta_{ij} \bar{\rho} u_l'' u_m'' \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_m} - C_3 \bar{\rho} P_{ij} + C_4 \bar{\rho} \tilde{k} \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \\ & - \frac{2}{3} C_4 \bar{\rho} \tilde{k} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} - \left( \frac{2}{3} C_2 + C_3 \right) \left( \bar{\rho} u_i'' u_j'' \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_i} + \bar{\rho} u_i'' u_l'' \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_j} \right) \quad (100) \end{aligned}$$

donde

$$P_{ij} = -\left( u_i'' u_k'' \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_k} + u_j'' u_k'' \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} \right).$$

Las constantes de las ecuaciones (96), (99), y (100) se presentan en la tabla 2.

---



---

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

---



---

Sustituyendo las ecuaciones (95), (98) y (100) en la ecuación de los esfuerzos de Reynolds (90) se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} u_i'' u_j'') + \frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{\rho} \tilde{u}_k u_i'' u_j'') = \frac{\partial}{\partial x_k}(C_{ijk}) - \bar{\rho} \left( u_i'' u_k'' \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_k} + u_j'' u_k'' \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} \right) - \frac{2}{3} \bar{\rho} \tilde{\mathcal{E}} \delta_{ij} + \Pi_{ij} \quad (101)$$

**Tabla 2: Constantes de las ecuaciones (96), (99) y (100).**

Modelo	MG	ML	MJ
C <sub>e1</sub>	1.4	1.44	1.40
C <sub>e2</sub>	1.8	1.90	1.90
C <sub>e3</sub>	0.15	0.15	0.18
C <sub>e4</sub>	0.22	0.21	0.22
C <sub>1</sub>	3	1.50	3.00
C <sub>2</sub>	0.3	-0.582	-0.44
C <sub>3</sub>	-	0.764	0.46
C <sub>4</sub>	-	-0.182	-0.23

## A.2 Modelos de viscosidad turbulenta.

Estos modelos son un método alternativo para determinar los esfuerzos de Reynolds  $u_i'' u_j''$ . Están basados en el concepto de viscosidad turbulenta y suponen que, de la misma manera que en un flujo laminar, los esfuerzos viscosos son proporcionales al gradiente de la velocidad, en un flujo turbulento, los esfuerzos causados por las fluctuaciones turbulentas son proporcionales al gradiente de la velocidad media. Esta relación entre los esfuerzos de Reynolds y las variables medias es:

$$\bar{\rho} u_i'' u_j'' = -\bar{\rho} \nu_T \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \left( \bar{\rho} \tilde{k} + \bar{\rho} \nu_T \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \quad (102)$$

---

---

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

---

---

Donde  $\nu_T (= \mu_T/\bar{\rho})$  es la viscosidad turbulenta. A diferencia de la viscosidad molecular ( $\nu = \mu/\rho$ ),  $\nu_T$  no es una propiedad del fluido, sino una característica del estado del flujo, y puede variar significativamente de un punto a otro dentro del mismo flujo.

Para el flujo turbulento de escalar, el concepto de viscosidad turbulenta o, propiamente, de difusividad turbulenta, se expresa como:

$$\rho u_i'' u_\alpha'' = -\bar{\rho} \frac{\nu_T}{S_{C_T}} \frac{\partial \tilde{\phi}_\alpha}{\partial x_i} \quad (103)$$

donde  $S_{C_T}$  es el número de Schmidt/Prandtl turbulento.

La viscosidad turbulenta  $\nu_T$ , puede calcularse de diferentes formas, dando lugar a una variedad de modelos con un número variable de ecuaciones diferenciales. Los más populares de estos modelos son, probablemente, los de la familia del modelo  $k - \varepsilon$ . Las variantes utilizadas en este trabajo se presentan a continuación.

### A.3 Modelo $k - \varepsilon$

Este modelo es el empleado en ésta tesis. En él, se define como:

$$\nu_T = C_\mu \frac{\tilde{k}^2}{\tilde{\varepsilon}} \quad (104)$$

Donde  $C_\mu$  es una constante determinada experimentalmente. Los valores de  $\tilde{k}$  y  $\tilde{\varepsilon}$  se calculan a través de la ecuaciones de transporte.

La ecuación para la energía cinética turbulenta,  $\tilde{k}$  se obtiene de la ecuación (1), haciendo  $i = j$ , aplicando la hipótesis de isotropía local, y dividiendo entre dos:

---



---

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

---



---

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \tilde{k}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \tilde{u}_j \tilde{k}) + \rho \overline{u_i'' u_j''} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_j} = - \frac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{\left( \frac{1}{2} \overline{\rho u_j'' u_i'' u_i''} \right)}_{(a)} - \rho \tilde{\varepsilon} \quad (105)$$

Los esfuerzos de Reynolds  $u_i'' u_j''$  se expresan de acuerdo con la ecuación (102).

El término (a) se aproxima como:

$$- \left( \frac{1}{2} \overline{\rho u_j'' u_i'' u_i''} \right) \approx \frac{\mu_T}{\sigma_k} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} \quad (106)$$

Sustituyendo las expresiones (13) y (17) en la ecuación (18), se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \tilde{k}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \tilde{u}_j \tilde{k}) = \rho(P_k - \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho \frac{\nu_T}{\sigma_k} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j} \right) \quad (107)$$

donde:

$$P_k = \nu_T \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{2}{3} \left( \tilde{k} + \nu_T \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} \quad (108)$$

Aplicando hipótesis similares a las utilizadas para la ecuación de  $\tilde{k}$  (107), la ecuación para la disipación de la energía cinética turbulenta,  $\tilde{\varepsilon}$ , se obtiene a partir de la ecuación (99):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \tilde{\varepsilon}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \tilde{u}_j \tilde{\varepsilon}) = \rho \frac{\tilde{\varepsilon}}{\tilde{k}} (C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} \tilde{\varepsilon}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \rho \frac{\nu_T}{\sigma_k} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_j} \right) \quad (109)$$

Las constantes de las ecuaciones (107) y (109) se muestran en la tabla 3.

---

---

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

---

---

*Tabla 3: Constantes del modelo  $k-\varepsilon$  estándar.*

$C_\mu$	$\sigma_k$	$\sigma_\varepsilon$	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$
0.09	1.0	1.314	1.44	1.92

El modelo  $k-\varepsilon$ , tal y como ha sido presentado, se comporta satisfactoriamente en flujos sencillos, normalmente flujos parabólicos para los cuales el modelo fue desarrollado en la década de 1970. En flujos más complejos, incluidos aquellos con rotación o con curvatura apreciable en las líneas de corriente, como los investigados en esta tesis, las hipótesis de isotropía en las que se basa el modelo no son aplicables, y las predicciones proporcionadas por el modelo son, en general, menos satisfactorias. La popularidad de este tipo de modelos, en la que su sencillez y economía juegan un papel importante, ha dado lugar a una serie de modificaciones o variantes, que intentan compensar estas deficiencias, sin tener que abandonar la hipótesis de viscosidad turbulenta a favor de cierres de segundo orden.

## **Apéndice B**

### **ESQUEMAS DE DISCRETIZACIÓN**

A continuación, se presentan los esquemas lineales que se usan en la discretización del término convectivo de la ecuación general (1), en el capítulo 2.

En la formulación de la ecuación discretizada (2), se requiere conocer la densidad  $\rho$  y la variable escalar,  $\phi$ , en la cara de la celda. Estas variables se calculan en el nodo de la celda, por lo que es necesario interpolar entre celdas para conocer su valor en la cara. De tal modo que el cálculo de  $\phi$  y  $\rho$  en la cara de la celda da lugar a los llamados esquemas de discretización. La determinación de los valores de estas

---

---

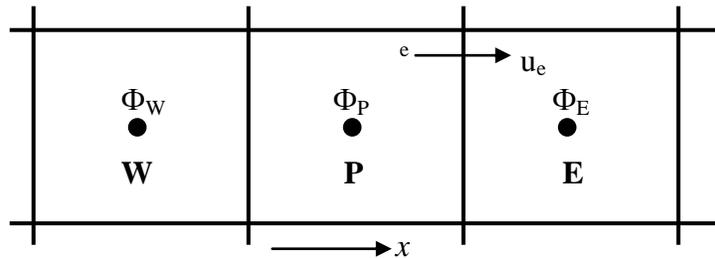
**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

---

---

variables en la cara es importante para la precisión y convergencia de la solución numérica.

Enseguida se presentan los esquemas de discretización lineales y no lineales empleados en esta tesis. Estos esquemas se describirán con base en el sistema de celdas que se ilustra en la figura 15. Como ejemplo, se obtendrá el valor de  $\phi$  en la cara  $e$  de la celda P. La velocidad en la cara  $e$  se considerará, sin pérdida de generalidad, positiva ( $u_e > 0$ ).



*Figura 15. Diagrama esquemático de celdas.*

## **B.1 Esquemas lineales**

### **B.1.1 Diferencias desplazadas de primer orden**

Con este esquema se supone que el valor de la variable  $\phi$  en la cara  $e$  es igual al nodo adyacente aguas arriba, es decir, para  $u_e > 0$  [17]:

---

---

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

---

---

$$\phi_e = \phi_P \quad (110)$$

Esta alternativa es de implementación sencilla, acotada y altamente estable casi bajo cualquier situación pero tiene como inconvenientes, su precisión, ser de primer orden y presentar problemas de difusión numérica. Esta falsa difusión es mayor si en el flujo hay un desalineamiento en la dirección del flujo y las líneas de malla, como por ejemplo, en flujos de recirculación.

### **B.1.2 Diferencias centradas**

Este esquema supone la variación lineal de  $\phi$  entre los nodos P y E; por tanto, el valor de la cara e es:

$$\phi_e = \frac{\phi_E + \phi_P}{2} \quad (111)$$

Este esquema tiene una precisión de segundo orden, pero tiene el inconveniente de no estar acotado, por lo que puede presentar inestabilidades numéricas. El límite de estabilidad de este esquema viene dado en función del número de Peclet, ecuación (79) en el capítulo 3, que es un parámetro comparativo entre los procesos convectivo y difusivo.

Para situaciones en que los procesos convectivos dominan sobre los difusivos ( $Pe > 2$ ), por ejemplo, para flujos con número de Reynolds altos, el esquema presenta oscilaciones numéricas.

---

---

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR PLANETARIO**

---

---

**B.1.3 Híbrido**

Este esquema fue introducido por Spalding [22] y consiste en combinar los esquemas de diferencias desplazadas y centradas para calcular el valor de la propiedad  $\phi$  en la cara del volumen de control. La selección del esquema se hace en función del número de Peclet de la celda:

- Si  $Pe \leq 2$ , se usan diferencias centradas:

$$\phi_e = \frac{\phi_E + \phi_P}{2} \quad (112)$$

- Si  $Pe > 2$ , se usan diferencias desplazadas:

$$\phi_e = \phi_p, \quad Pe > 2 \quad (113)$$

Para flujos con bajo número de Reynolds/Peclet, el esquema utilizado es el de diferencias centradas, y por tanto resulta de orden 2; sin embargo, el esquema presenta problemas asociados al esquema de diferencias desplazadas cuando el flujo está dominado por los procesos de convección  $Pe > 2$ .

Los esquemas lineales de alto orden presentan una buena precisión, pero no están acotados, por lo que pueden presentar oscilaciones numéricas. Su uso no es recomendado en el cálculo de cantidades que no aceptan valores negativos, o en general de cantidades acotadas, tales como concentraciones, pues las oscilaciones introducidas por el modelo pueden sacar al escalar de su dominio de definición.

## ***Bibliografía***

- [1] **Aris, R.** Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics.  
Prentice Hall International Series in the Physical and Chemical Engineering Sciences. 1962.
- [2] **Biagioli, F.** Comparison Between Presumed and Monte Carlo PDF Transport Methods for Turbulent Combustion Modeling. AIAA-Journal of Propulsion and Power, 13(1):109-116. 1997.
- [3] **Briggs, G.A.** Plume Rise and Buoyancy Effects. Atmospheric Science and Power Production, pp. 327-366. 1984.
- [4] **Daly, B. J.,** Harlow, F. H. Transport Equations in Turbulence. Physics of Fluids, 3(11):2634-2649. 1970.
- [5] **Favre, A.** Problems of Hydrodynamics and Continuum Mechanics. SIAM. 1969.
- [6] **Ferziger, H. H.,** Peric, M. Computational Methods for Fluid Dynamics. Springer-Verlag. 1996.
- [7] **Lauder, B. E.,** Reece, G. J., Rodi, W. Progress in the development of a Reynolds stress turbulence closure. Journal of Fluid Mechanics, 65:537. 1975.

---

---

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR  
PLANETARIO**

---

---

- [8] **Launder, B. E.**, Spalding, D. B. Lectures in Mathematical Models of Turbulence. Academic Press. 1972.
- [9] **Lindstedt, R. P.**, Váos, E. M. Modeling of Premixed Flames with Second Moment Methods. Combustion and flame, 116:461-485. 1999
- [10] **Ludwing, J. C.**, Qin, H. Q., Spalding, D. B. The PHOENICS Reference Manual. Technical Report CHAM TR/200, CHAM Ltd, London. 1989.
- [11] **Lumey, J. L.** Pressure-Strain Correlation. Physics of Fluids. 18(6):750. 1975.
- [12] **Patankar, S. V.**, Spalding, D. B. A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three Dimensional Parabolic Flows. Int. J. Heat and Mass Transfer, 15. pp. 1787-1806. 1972.
- [13] **Patankar, S. V.** Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. Series in Computational Methods in Mechanics and Thermal Science. Hemisphere Publishing Corporation. 1980.
- [14] **Siegel, R.**, Howell J. R. Thermal Radiation Heat Transfer. McGraw-Hill, 2nd edition. Washington. 1981.

---

---

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE EN UN MEZCLADOR  
PLANETARIO**

---

---

[15] **Spalding, D. B.** A Novel Finite-Difference Formulation for Differential Expressions Involving Both First and Second Derivates. Int. Journal. Num. Methods Engineering, 4, pp. 551. 1972.

[16] **Spalding, D. B.** Mathematical Modeling of Fluid Dynamics, Heat Transfer and Math Transfer Process. Technical Report HTS/8011, Imperial College of Science Technology and Medicine. 1980.