



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

*“SIMULACIÓN NUMÉRICA DE VORTICES DE TAYLOR EN CILINDROS  
CONCÉNTRICOS CON ALETAS ANULARES”*

## TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**INGENIERO MECÁNICO**

P R E S E N T A:

JAVIER ADALBERTO JAIMES ARRIAGA

DIRECTOR DE TESIS: ING. MILTON CARLOS ÁLVAREZ SÁNCHEZ

MÉXICO, CIUDAD UNIVERSITARIA

2012



*Dedicado a mi padre.*

*Y recuerda lo que el viejo dijo... "hijo, en lo que sea pero el mejor"*

*Aún mejor: "todo está en los libros"*

## Contenido

Capitulo 1: Introducción	5.
1.1 Flujo circular de Couette	5.
1.2 Criterio de estabilidad de Rayleigh	6.
1.3 Trabajo de Taylor	7.
4.1 Aplicaciones del fenómeno	12.
Capitulo 2: Ecuaciones de transporte	13.
2.1 Introducción	13.
2.2 Continuidad	13.
2.3 Conservación de la cantidad de movimiento	14.
2.4 Número adimensional de Taylor	18.
Capitulo 3: Método de solución	20.
3.1 Introducción	20.
3.2 Método de volúmenes finitos	20.
3.2.1. Término temporal	22.
3.2.2. Término fuente	23.
3.2.3. Término difusivo	23.
3.2.4. Término convectivo	23.
Capitulo 4: Simulación numérica de vórtices de Taylor	25.
4.1 Introducción	25.
4.2 Configuración geométrica y detalles numéricos	25.
4.2.1 Geometrías del cilindro interior	26.
4.2.2 Discretización del volumen de control	27.
4.3 Resultados numéricos	28.
4.3.1 Cilindro liso	28.
4.3.2 Cilindro con dos aletas anulares	35.
4.3.3 Cilindro con cinco aletas anulares	36.

4.3.4 <i>Cilindro con ocho aletas anulares</i>	38.
4.3.4 <i>Comparación de los casos</i>	40.
Capítulo 5: Conclusiones y recomendaciones para trabajos futuros	44.
5.1 <i>Conclusiones</i>	44.
5.2 <i>Recomendaciones para trabajos futuros</i>	44.
Apéndice A: Flujo de Taylor-Couette	45.
Bibliografía	47.

## Capítulo 1: Introducción

**Objetivo:** Estudiar el efecto que provocan aletas anulares colocadas en el cilindro interior en la formación de los vórtices de Taylor.

### 1.1 Flujo circular de Couette

Los flujos anulares presentados en un sistema entre cilindros concéntricos, en donde la rotación de uno o ambos cilindros provoca el movimiento del fluido contenido entre ellos, fue estudiado por primera vez por Couette en 1890. El objetivo principal del trabajo de Couette fue el de realizar una medición de la viscosidad dinámica  $\mu$  de un fluido contenido entre dos cilindros concéntricos muy largos. El trabajo de Couette se realizó con una velocidad angular de 1 rev/s, en régimen de flujo laminar. Couette obtuvo mediciones experimentales del momento ejercido por el giro del cilindro exterior en un cilindro interior en reposo sostenido por un alambre. Midió la torsión en el alambre, siendo esta proporcional al torque del cilindro.

De la ley de la viscosidad de Newton se tiene que el esfuerzo cortante es proporcional al gradiente de la velocidad multiplicado por el coeficiente de viscosidad ( $\mu$ , viscosidad dinámica), el torque ejercido por la rotación de un cilindro y transmitido por el fluido a otro cilindro concéntrico esta dado por la ecuación:

$$M = A * \tau(r) * r$$

donde  $A$  es el área superficial del cilindro y  $\tau(r)$  es el esfuerzo cortante. Con los datos para el torque calculados en el experimento se puede calcular el esfuerzo cortante. Con la distribución de velocidad para el flujo de Couette entre cilindros concéntricos infinitamente largos,

$$V(r) = Ar + \frac{B}{r}$$

se calcula el gradiente de velocidad; combinando las ecuaciones que expresan el gradiente de velocidad, la ley de la viscosidad de Newton y el torque en función del cortante se obtiene una ecuación para calcular el torque ejercido en el cilindro interior en función de los radios de los cilindros interior y exterior ( $r_1, r_2$ ), la velocidad angular  $\Omega$  y la longitud  $h$  del cilindro interior en los que se mide el par,

$$M = -4\pi\mu \left\{ \frac{r_1^2 r_2^2 h}{(r_2^2 - r_1^2)} \right\} \Omega$$

Midiendo el torque en el régimen laminar Couette pudo determinar la viscosidad dinámica del agua destilada, siendo así, el dispositivo de Couette el primer viscosímetro que se conoce. Aun en la actualidad se sigue midiendo la viscosidad de

esta manera. La medición de la viscosidad fue el principal resultado que obtuvo Couette.

Los experimentos de Couette introdujeron un nuevo concepto en la dinámica de fluidos, el flujo cortante entre dos placas conocido como flujo de Couette, una en movimiento y otra en reposo, ya sean circulares o planas.

Se han realizado investigaciones sobre la estabilidad del flujo de Couette a altas velocidades angulares del cilindro exterior. Se encontró (de forma analítica, verificada con estudios experimentales) que para el espacio entre cilindros suficientemente pequeño el flujo es estable. Además se atribuye la inestabilidad del flujo de Couette al aumento de la velocidad de rotación del cilindro exterior, o quizá a las imperfecciones de los aparatos usados en los experimentos<sup>1</sup>.

La investigación hecha por Couette fue el preámbulo al estudio de las inestabilidades generadas en el flujo anular contenido entre dos cilindros concéntricos. Las inestabilidades generadas en este sistema fueron el principal tema de estudio de Taylor. Además, Taylor enfocó su investigación en comprobar si el criterio de estabilidad de Rayleigh se podía aplicar a fluidos viscosos. Con el fin de conocer un poco el trabajo de Rayleigh, en la siguiente sección se resume de forma breve el criterio de estabilidad.

### *1.2 Criterio de estabilidad de Rayleigh*

Con el objetivo de estudiar un problema meteorológico, la dinámica de ciclones y anticiclones, que son sistemas que giran alrededor de un centro; Rayleigh publicó un artículo que se enfoca en esta investigación. Él considero un fluido invíscido girando con respecto de un centro, supuso que el producto de la distancia radial por la velocidad angular  $rv$  permanece constante en cualquier tiempo, expresándolo matemáticamente con la ecuación de Euler (conservación del momento angular para flujo no viscoso).

Si se considera la estabilidad en una distribución de velocidades radial generada por la velocidad angular  $v(r)$  en una capa de fluido girando en equilibrio, esto es, sin que haya perturbaciones que ocasionen una distorsión en la forma del flujo, girando con orden; Rayleigh desarrolló un argumento. Asumió que el fluido esta en equilibrio, esto significa que en cualquier ubicación la fuerza centrífuga se equilibra por el gradiente de presión radial,

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\rho V^2}{r}$$

Matemáticamente, para que no se pierda la estabilidad se debe cumplir con,

---

<sup>1</sup> Citado por E. L. Koschmieder de Schultz-Grunow (1959) en *Bénard Cells and Taylor Vortices*.

$$\frac{d}{dr}(r^2\Omega)^2 > 0$$

Esta ecuación se conoce como el criterio de estabilidad de Rayleigh.

Si ahora se considera el flujo de Couette de un fluido viscoso, con la distribución de velocidades angular. Aplicando el criterio de estabilidad de Rayleigh a la distribución de velocidades, y si ambos cilindros giran en la misma dirección, el criterio de estabilidad se escribe de la siguiente forma,

$$\frac{\Omega_2}{\Omega_1} > \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \quad \text{o} \quad (rv)_2 > (rv)_1$$

Como se mencionó arriba el criterio de estabilidad de Rayleigh se dedujo para fluidos no viscosos, el trabajo de Taylor se enfoca en fluidos viscosos. En concreto, Taylor realizó un análisis de la inestabilidad del flujo entre cilindros concéntricos, y la forma de las inestabilidades; tanto como corroborar el criterio de estabilidad para fluidos viscosos. En las secciones anteriores se presentaron los estudios que sirvieron de base a Taylor para su estudio, en la siguiente sección se resume el trabajo publicado por él.

### 1.3 Trabajo de Taylor

El artículo de Taylor publicado en 1923, "Estabilidad de un líquido viscoso contenido entre dos cilindros girando" se enfocó en corroborar la aplicación del criterio de estabilidad de Rayleigh en el caso de fluidos viscosos, además de estudiar las inestabilidades que se generan en un fluido viscoso contenido entre cilindros. Taylor representó las inestabilidades matemáticamente, así como hizo observaciones experimentales con el fin de comparar resultados teóricos con resultados experimentales.

Taylor no creyó que fuera adecuado el trabajo de Couette para demostrar que la ecuación del criterio de estabilidad de Rayleigh se podía aplicar a fluidos viscosos. Con el aparato que construyó se pudo dar cuenta de que el criterio,  $\Omega_2 r_2^2 > \Omega_1 r_1^2$  casi se aproxima para un fluido viscoso, pero no se cumple para cilindros girando en direcciones opuestas. Además, las perturbaciones que se forman al aparecer la inestabilidad son simétricas.

Partiendo del análisis teórico realizado por Taylor, se tiene que la solución a las ecuaciones de cantidad de movimiento que representan el flujo entre dos cilindros concéntricos, donde el cilindro interior gira con una velocidad angular y el cilindro exterior se mantiene en reposo viene dada por ecuaciones trigonométricas, las ecuaciones trigonométricas propuestas fueron resueltas por Taylor por medio de un análisis matemático, ayudándose de las funciones de Bessel. Con el fin de reducir las dificultades numéricas de la suma de las funciones de Bessel supuso que el espacio

$d = r_e - r_i$  entre los cilindros es muy pequeño en comparación con  $r_i$ , esto se conoce como la aproximación del espacio reducido (imagen 1.1).

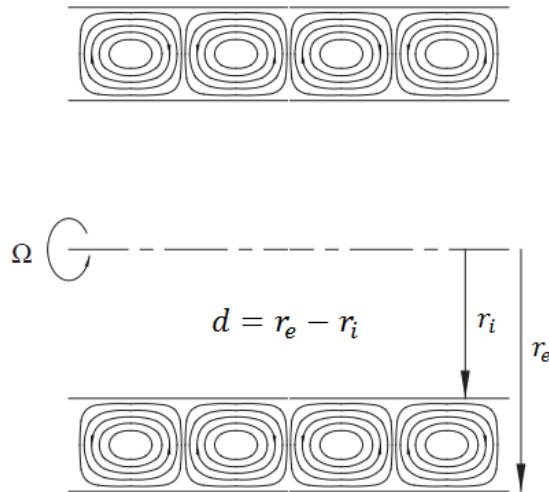


Imagen 1. 1. Aproximación del espacio reducido.

Una característica que Taylor determinó por la teoría lineal de la inestabilidad de los vórtices de Taylor es la forma del flujo después de comenzar la inestabilidad. Las líneas de trayectoria del movimiento en el plano axial-radial fueron calculadas por Taylor y se muestran en la imagen 1.2.

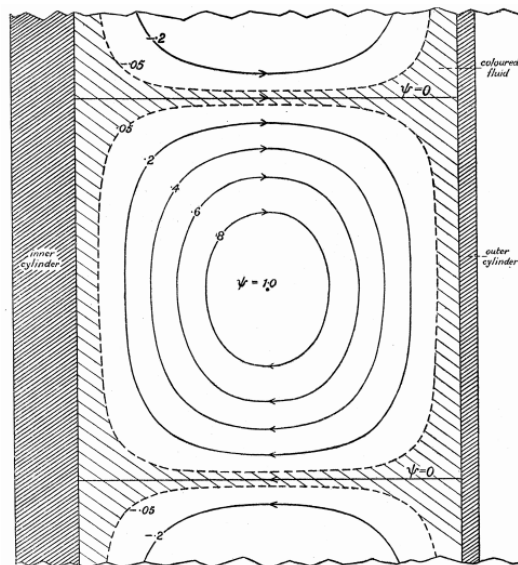


Imagen 1. 2. Líneas de trayectoria del movimiento después de aparecer la inestabilidad.<sup>2</sup>

Así, las partículas del fluido en realidad se mueven en trayectorias espirales en la dirección angular dentro del toroide que describen los vórtices individuales.

Una primera modificación a la solución realizada por Taylor fue introducida por Jeffreys en 1928. Redujo estas ecuaciones a una sola ecuación diferencial de sexto

<sup>2</sup> E. L. Koschmieder, *Bénard Cells and Taylor Vortices*, 1993. De los resultados de Taylor (1923).



orden para la componente de la velocidad angular  $v$ . Jeffreys demostró (bajos ciertas suposiciones), que la componente de la velocidad angular  $v$  de las perturbaciones axisimétricas entre dos cilindros girando concéntricos se describe por la ecuación,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - a^2\right)^3 v = \frac{4Aa^2d^4}{\nu^2} \left(A + \frac{B}{r^2}\right) v$$

donde  $a$  es el número de onda adimensional  $a = kd$  (figura 1.3),  $d$  es el espacio entre los cilindros (imagen 1.1),  $A$  y  $B$  son constantes. Con la condición de aproximación del espacio reducido, la ecuación que describe el flujo de vórtices de Taylor es,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - a^2\right)^3 v = \frac{4\Omega_i^2 d^4}{\nu^2} a^2 v$$

De la ecuación anterior se puede observar el número adimensional,

$$Ta = \frac{4\Omega^2 d^4}{\nu^2}$$

Este número se conoce como el número de Taylor. El número de Taylor en esta forma es una medida adimensional de la rotación de una capa de fluido que gira con velocidad angular  $\Omega$ .

Hay un número de Taylor crítico  $Ta_c$ , a una velocidad angular mínima en que la inestabilidad en forma de vórtices axisimétricos toroidales aparecen de manera espontánea en toda la columna de fluido si la velocidad angular se incrementa casi constantemente al valor crítico.

Por otro lado, en el número de Taylor crítico los vórtices se caracterizan por el número de onda crítico  $a_c$ , que es un tamaño crítico de los vórtices. La longitud de onda de los vórtices se define,  $\lambda = 2\pi/a$ . La longitud de onda es una medición adimensional de la extensión vertical  $\Delta z$  de un par de vórtices de Taylor ( $\lambda = \Delta z/d$ ). El tamaño crítico del vórtice, o el número de onda crítico, es único (imagen 1.3).

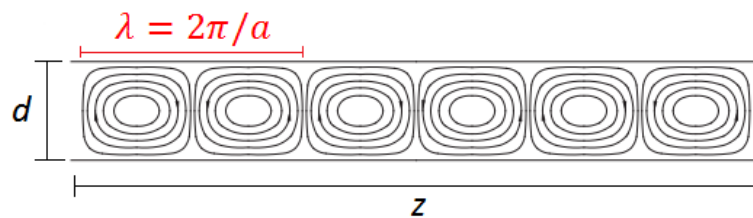


Imagen 1. 3. Esquema del flujo de vórtices de Taylor con número de onda axial  $a$ .

El análisis experimental del trabajo de Taylor, se basó en el aparato construido por Taylor para verificar los resultados de su teoría, los cilindros fueron de 90 cm de largo, el radio del cilindro exterior fue 4.035 cm y los radios del cilindro interior variaron en el rango entre 3.80 a 3.00 cm. El espesor de la capa de fluido fue de menos de 1 cm, esto

para asegurar que se cumpla la aproximación del espacio reducido. La razón de aspecto  $\Gamma = L_{cilindro} / d$ , fue del orden de 100 ó más. La razón de los radios  $\eta = r_i / r_e$  estuvo en el rango  $0.74 \leq \eta \leq 0.94$ . Del cilindro exterior de 90 cm, 20 cm en la sección central fueron hechos con vidrio; con el fin de visualizar el patrón de flujo. El cilindro interior fue hecho de secciones con orificios sobre un eje de acero. Ambos cilindros fueron girados por un motor eléctrico.

El fluido que utilizó en los experimentos fue agua. Para la visualización utilizó un tinte. El tinte se introdujo en la capa de fluido a través de seis orificios ubicados en la pared del cilindro interior. Si la capa de fluido permanecía estable el tinte iba a permanecer justo cerca de la pared del cilindro interior. Si la capa de fluido era inestable, el líquido teñido formaría una serie de planos equidistantes perpendiculares al eje de rotación. Lo que marca la aparición de los vórtices de Taylor toroidales y significa el comienzo de la inestabilidad.

En el sistema formado por dos cilindros concéntricos con un espacio entre los cilindros lleno con un fluido viscoso, se hace girar el cilindro interior mientras el cilindro exterior se mantiene en reposo. El primer patrón de flujo que se forma es conocido como flujo de Couette, un flujo ordenado que se genera con números de Reynolds pequeños (bajas velocidades). Conforme aumenta la velocidad angular sin exceder el límite de flujo laminar, se generan inestabilidades con una forma peculiar, estas inestabilidades toman la forma de vórtices toroidales. Si se coloca el sistema de cilindros concéntricos en coordenadas cilíndricas, la coordenada en  $z$  es el eje paralelo al eje de los cilindros, la coordenada  $x$  se refiere a la dirección angular alrededor de los cilindros, la coordenada  $y$  es la dirección perpendicular al eje  $z$ , la distancia radial de los cilindros. Dicho esto, las inestabilidades que se forman en el flujo siguen la tendencia de girar en pequeños vórtices como se aprecia en la imagen 1.4, donde se hace un corte de un plano radial-axial,

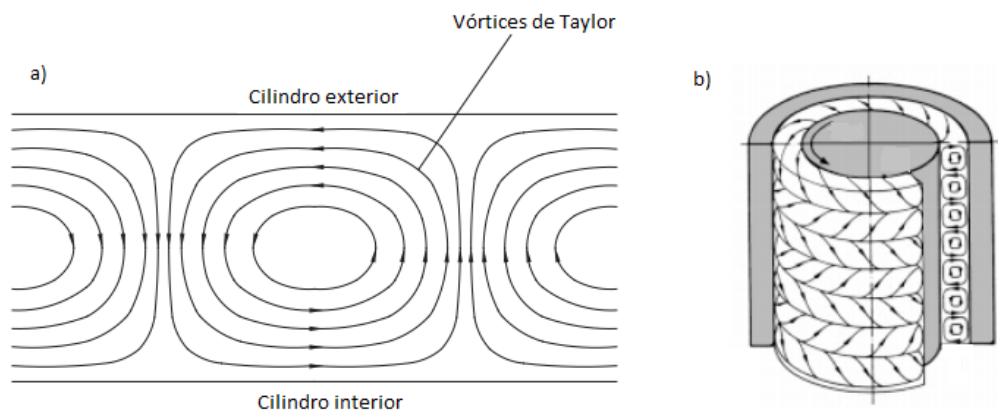
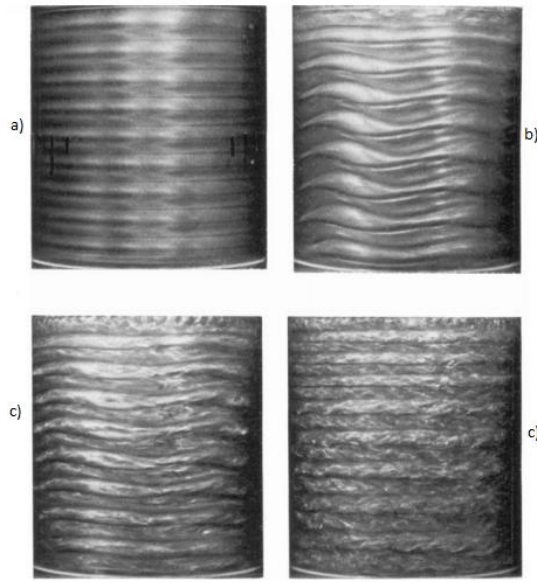


Imagen 1. 4. a) Vórtices de Taylor, plano radial-axial, b) trayectoria de los vórtices alrededor del cilindro interior.

Los vórtices giran alternadamente, uno junto al otro (imagen 1.4.a). Además, los vórtices presentan otro tipo de movimiento alrededor del cilindro interior formando estructuras anulares definidas alrededor del cilindro interior (imagen 1.4.b). Este flujo secundario se presenta en régimen de flujo laminar. Con el aumento de la velocidad angular del cilindro interior, el patrón de las inestabilidades va distorsionando la forma de los vórtices dando pie a que se formen nuevos patrones de flujo (imagen 1.5).



**Imagen 1. 5. a) Flujo de vórtices de Taylor, b) y c) vórtices de Taylor ondulados, d) flujo turbulento.<sup>3</sup>**

Los experimentos de Taylor confirmaron las líneas de trayectoria predichas teóricamente. El tamaño de los vórtices que calculo Taylor como función de la razón  $\mu = \Omega_2/\Omega_1$  de las velocidades angulares de los cilindros y el tamaño de los vórtices observado, están en estrecho acuerdo.

De los experimentos de Taylor todas las características de la teoría lineal de la inestabilidad de los vórtices de Taylor fueron verificadas por él mismo.

A la fecha se han publicado una gran cantidad de artículos alrededor de este fenómeno, además se han encontrado aplicaciones prácticas para este patrón de flujo, siendo las más relevantes en algunos tipos de mezcladores y filtros en distintos campos científicos e industriales. En la siguiente sección se reseñan algunos artículos de investigación en la aplicación del flujo de vórtices de Taylor.

---

<sup>3</sup> P.R.Fenstermacher, H.L.Swinney & J.P. Gollub, *Dynamical instabilities and the transition to chaotic Taylor vortex flow.*

#### *4.1 Aplicaciones del fenómeno*

Hay una gran cantidad de investigaciones referentes a la aplicación de los vórtices de Taylor, en esta sección se describen algunos trabajos relevantes elegidos por su aporte científico.

Una trabajo donde se encuentra una aplicación práctica de este fenómeno es, el estudio que realizaron Lee & Lueptow (2001) estudiando un sistema de osmosis reversible rotativo como un método novedoso en la reducción de la polarización e incrustaciones de suciedad del agua purificada. Una filtración rotativa toma ventaja de las inestabilidades del flujo centrífugo para reducir la concentración polarizada y la suciedad en la membrana. En otras palabras el flujo de vórtices de Taylor funciona como un filtro para aguas residuales.

Otro ejemplo de aplicación, se encuentra en el estudio realizado por Ogihara & Nomura (2002) quienes investigaron una mezcla de una solución hidrolizada con el fin de mantener un flujo ideal dentro de un tubo de gran longitud por un largo tiempo. Esto se realiza con el fin de facilitar la aparición de una nucleación que ayuda al crecimiento continuo de partículas monodispersas de alúmina. Un material de mucha importancia en la industria cerámica, pasando por la metalografía e incluso la encontramos en prótesis dentales. Cada uno de los vórtices tiene la función de simular un recipiente de reacción por grupos para la producción de una mezcla homogénea.

En la industria, ya sea en aplicaciones donde el alto rendimiento, como en la industria del petróleo; la seguridad, como en el procesamiento de combustible nuclear; o la facilidad de solución; como en separaciones biológicas; se requiere de dispositivos para extracción o mezcla de solventes. Un ejemplo de estos dispositivos es el extractor centrífugo anular (ACE, por sus siglas en ingles), donde se hace patente la aplicación de los vórtices de Taylor. El análisis de un fluido anular en un ACE, de manera experimental y numérica lo realizan Deshmukh, Joshi & Koganti (2008).

Además se han encontrado aplicaciones en dispositivos clínicos como, en el trabajo realizado por Ameer *et al.* (1999). Trabajaron en el diseño de un bioreactor basado en el flujo de vórtices de Taylor, donde los vórtices ayudan a la plasmaféresis y la fluidización de la agarosa (es un polisacárido formado por galactosas alfa y beta) que tienen la función de inmovilizar la heparinasa I con esto la neutralización del heparin. El heparin es un anticoagulante usado durante procedimientos extracorpóreos, también se asocia con una gran incidencia de complicaciones hemorrágicas.

## Capítulo 2: Ecuaciones de transporte

### 2.1 Introducción

En este capítulo abordaremos lo referente a las ecuaciones que gobiernan el movimiento de los fluidos, es decir, la conservación de la masa (*ecuación de continuidad*) y la segunda Ley de Newton (*ecuación de Navier-Stokes*). Dichas ecuaciones se aplican a cada punto en el campo de flujo y por lo tanto permiten resolver los detalles del flujo en todas partes en el dominio de flujo.

### 2.2 Continuidad

A través de la aplicación del teorema de transporte de Reynolds, se tiene la siguiente expresión general para la conservación de masa que se aplica a un volumen de control:

*Conservación de masa para VC:*

$$0 = \int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad (2.1)$$

Cuando existen entradas y salidas definidas adecuadamente, la ecuación 2.1 puede reescribirse como:

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \sum_{ent} \dot{m} - \sum_{sal} \dot{m} \quad (2.2)$$

En palabras, la razón neta de cambio de masa dentro del volumen de control es igual a la razón a la que fluye la masa hacia el volumen de control menos la razón a la que fluye la masa afuera del volumen de control.

Para deducir la forma diferencial de la conservación de la masa de manera rápida y directa, aplicamos el teorema de la divergencia también llamado teorema de Gauss. Este teorema permite transformar una integral de volumen de la divergencia de un vector en una integral de volumen de la divergencia de un vector en una integral de área sobre la superficie que define el volumen. Para cualquier vector  $\vec{G}$ , la divergencia de  $\vec{G}$  se define como  $\vec{\nabla} \cdot \vec{G}$  y el teorema de divergencia se puede escribir como:

*Teorema de divergencia:*

$$\int_{Vol} \vec{\nabla} \cdot \vec{G} dV = \oint_A \vec{G} \cdot \vec{n} dA \quad (2.3)$$

La ecuación 2.3 se aplica a cualquier volumen de control, vamos a elegir el volumen de control de la ecuación 2.1. Hacemos que  $\vec{G} = \rho \vec{V}$ , al sustituir la ecuación 2.3 en la ecuación 2.1 se convierte la integral de superficie en una integral de volumen:

$$0 = \int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{VC} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) dV \quad (2.4)$$

Combinamos las dos integrales de volumen:

$$\int_{VC} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) \right] dV = 0 \quad (2.5)$$

Afirmamos que la ecuación 2.5 se mantiene para cualquier volumen de control sin importar su tamaño o forma. Esto es posible si el integrando es cero. De esta manera se obtiene una ecuación diferencial general para la conservación de la masa, también conocida como ecuación de continuidad:

*Ecuación de la continuidad:*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (2.6)$$

Donde  $\rho$  es la densidad instantánea del fluido y  $\vec{V}$  es la velocidad instantánea del fluido.

### 2.3 Conservación de la cantidad de movimiento

Con la aplicación del teorema de transporte de Reynolds, se tiene la expresión general para conservar la cantidad de movimiento lineal como se aplica a un volumen de control:

$$\sum \vec{F} = \int_{VC} \rho \vec{g} dV + \int_{SC} \sigma_{ij} \cdot \vec{n} dA = \int_{VC} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}) dV + \int_{VC} (\rho \vec{V}) \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad (2.7)$$

Donde  $\sigma_{ij}$  es el tensor de esfuerzo. La ecuación 2.7 se aplica a volúmenes de control fijos y en movimiento, siempre que  $\vec{V}$  sea la velocidad absoluta (vista desde un observador fijo).

Para generar una ecuación diferencial para la conservación de cantidad de movimiento lineal, imaginamos que el volumen de control se encoge a tamaño infinitesimal. En el límite, todo el volumen de control se encoge a un punto en el flujo.

Se va a proceder de la misma manera como se dedujo la forma diferencial de la ecuación de continuidad, aplicando el teorema de divergencia de la ecuación 2.3. Una forma más general del teorema de divergencia se aplica no sólo a vectores, sino también a otras cantidades, como los tensores:

*Teorema de divergencia extendido:*

$$\int_{Vol} \vec{\nabla} \cdot G_{ij} dV = \oint_A G_{ij} \cdot \vec{n} dA \quad (2.8)$$

Específicamente, si en el teorema de divergencia extendido en la ecuación 2.8  $G_{ij}$  se sustituye con la cantidad  $(\rho\vec{V})\vec{V}$ , un tensor de segundo orden, el último término en la ecuación 2.7 se convierte en:

$$\int_{SC} (\rho\vec{V})\vec{V} \cdot \vec{n} dA = \int_{VC} \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V}\vec{V}) dV \quad (2.9)$$

Donde  $\vec{V}\vec{V}$  es un producto vectorial llamado producto exterior del vector de velocidad consigo mismo. De manera similar, si en la ecuación 2.8 se sustituye con el tensor de esfuerzo  $\sigma_{ij}$ , el segundo término en el lado izquierdo de la ecuación 2.7 se convierte en:

$$\int_{SC} \sigma_{ij} \cdot \vec{n} dA = \int_{VC} \vec{\nabla} \cdot \sigma_{ij} dV \quad (2.10)$$

Por lo tanto las dos integrales de superficie de la ecuación 2.7 se convierten en integrales de volumen, cuando se aplican las ecuaciones 2.9 y 2.10. Se combinan y reordenan términos y la ecuación 2.7 se reescribe como:

$$\int_{VC} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho\vec{V}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V}\vec{V}) - \rho\vec{g} - \vec{\nabla} \cdot \sigma_{ij} \right] dV = 0 \quad (2.11)$$

Para finalizar, afirmamos que la ecuación 2.11 es válida para cualquier volumen de control sin importar su tamaño o forma. Esto es posible sólo si el integrando es idénticamente cero. En consecuencia, se tiene una ecuación diferencial general para la conservación de cantidad de movimiento lineal, conocida como ecuación de Cauchy:

*Ecuación de Cauchy:*

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\vec{V}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V}\vec{V}) = \rho\vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \sigma_{ij} \quad (2.12)$$

Cuando se aplica la regla de la derivada del producto al primer término del lado izquierdo de la ecuación 2.12 se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\vec{V}) = \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.13)$$

El segundo término de la ecuación 2.12 se puede escribir como:

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V}\vec{V}) = \vec{V}\vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V}) + \rho(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} \quad (2.14)$$

Por lo tanto, se eliminó el tensor de segundo orden representado por  $\vec{V}\vec{V}$ . Después de cierto reordenamiento, la sustitución de las ecuaciones 2.13 y 2.14 en la ecuación 2.12 produce:

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) \right] + \rho (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = \rho \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \sigma_{ij} \quad (2.15)$$

Pero la expresión en corchetes en esta ecuación es idénticamente cero por la ecuación de continuidad, ecuación 2.6. Cuando se combinan los dos términos restantes en el lado izquierdo, se escribe:

Forma alternativa de la ecuación de Cauchy:

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \right] = \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \sigma_{ij} \quad (2.16)$$

En coordenadas cartesianas, las tres componentes de la ecuación de Cauchy son:

$$\text{Componente } x: \rho \frac{Du}{Dt} = \rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \quad (2.16a)$$

$$\text{Componente } y: \rho \frac{Dv}{Dt} = \rho g_y + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} \quad (2.16b)$$

$$\text{Componente } z: \rho \frac{Dw}{Dt} = \rho g_z + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \quad (2.16c)$$

Para obtener las ecuaciones de Navier-Stokes, debemos expresar el tensor de esfuerzos  $\sigma_{ij}$  en términos de las incógnitas primarias, es decir, densidad, presión y velocidad.

Esto se puede realizar mediante las ecuaciones constitutivas que nos permiten escribir las componentes del tensor de esfuerzo en términos del campo de velocidad y del campo de presión.

La primera acción que se hace es separar los esfuerzos de presión y los esfuerzos viscosos. Cuando un fluido se mueve, la presión actúa hacia dentro normal, pero también pueden existir esfuerzos viscosos. La ecuación 2.17 se generaliza para fluidos en movimiento como:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Donde se introduce un nuevo tensor,  $\tau_{ij}$ , llamado tensor de esfuerzo viscoso.

Este estudio se concentra para fluidos newtonianos, que se definen como *los fluidos para los que el esfuerzo de corte es linealmente proporcional a la razón de deformación por corte*. Donde por definición el tensor de esfuerzo es linealmente proporcional al tensor de razón de deformación. Se supone un flujo incompresible ( $\rho = \text{constante}$ ). Además, también se supone flujo isotérmico: los cambios locales de temperatura son



pequeños o inexistentes. Una consecuencia ulterior de la última suposición es que las propiedades de fluido (viscosidad dinámica  $\mu$  y la viscosidad cinemática  $\nu$ ) también son constantes. Con dichas suposiciones se puede demostrar que el tensor de esfuerzo viscoso se reduce a:

*Tensor de esfuerzo viscoso para un fluido newtoniano incompresible con propiedades constantes:*

$$\tau_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (2.18)$$

Donde  $\varepsilon_{ij}$  es el tensor de razón de deformación. La ecuación 2.19 muestra que el esfuerzo es linealmente proporcional a la deformación. En coordenadas cartesianas, se mencionan las nueve componentes del tensor de esfuerzo viscoso, seis de las cuales son independientes debido a simetría:

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} & \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} & \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

En coordenadas cartesianas, el tensor de esfuerzo de la ecuación 2.17 se convierte por lo tanto en:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} & \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} & \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Ahora se sustituye la ecuación 2.20 en las tres componentes cartesianas de la ecuación de Cauchy. Consideramos primero la componente x. La ecuación 2.16a se convierte en:

$$\rho \frac{Du}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (2.21)$$

Podemos observar que, en tanto que las componentes de velocidad sean funciones suaves de  $x$ ,  $y$  y  $z$ , el orden de diferenciación es irrelevante. Después de cierto reordenamiento de los términos viscosos en la ecuación 2.21:

$$\rho \frac{Du}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right]$$

$$\rho \frac{Du}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right]$$

El término entre paréntesis es cero debido a la ecuación de continuidad para flujo incompresible. También se reconocen los últimos tres términos como el laplaciano de la componente de velocidad  $u$  en coordenadas cartesianas. Por lo tanto, la componente  $x$  de la ecuación de cantidad de movimiento se escribe como:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu \nabla^2 u \quad (2.22a)$$

De manera similar se escriben las componentes  $y$  y  $z$  de la ecuación de cantidad de movimiento como:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y + \mu \nabla^2 v \quad (2.22b)$$

Y

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu \nabla^2 w \quad (2.22c)$$

Respectivamente. Para finalizar, combinamos las tres componentes en una ecuación vectorial; el resultado es la ecuación de Navier-Stokes para flujo incompresible con viscosidad constante.

*Ecuación de Navier-Stokes:*

$$\rho \frac{D\vec{V}}{dt} = -\vec{\nabla}P + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (2.23)$$

Aunque las componentes de la ecuación 2.23 se dedujeron en coordenadas cartesianas, la forma vectorial de la ecuación 2.23 es válida en cualquier sistema coordenado ortogonal.

#### 2.4 Número adimensional de Taylor

El primer trabajo donde se hace referencia al número adimensional de Taylor fue en el realizado por Chandrasekhar en 1953, en el cual aparece de la siguiente manera,

$$Ta = \frac{4\Omega^2 d^4}{\nu^2} \quad (2.24)$$

Donde  $d$  es el espacio entre los cilindros,  $\Omega$  es la velocidad angular del cilindro exterior,  $\nu$  es la viscosidad cinemática.

El número de Taylor es un parámetro adimensional que relaciona el espacio entre los cilindros, la velocidad angular con la viscosidad cinemática del fluido. A un cierto valor del número de Taylor, también llamado número de Taylor crítico  $Ta_c$ , comienza la inestabilidad presentándose los vórtices de Taylor.

Para el caso de un espacio entre cilindros pequeño y con el cilindro externo estacionario,  $\eta = r_i/r_e \rightarrow 0$ ,  $\Omega_e/\Omega_i = 0$ , el número de Taylor basado en el radio medio está definido por<sup>1</sup>:

$$Ta_m = \frac{\Omega r_m^{0.5} (r_e - r_i)^{1.5}}{\nu} \quad (2.25)$$

Esta será la expresión que se utilizara en este trabajo para calcular el número de Taylor crítico de nuestros casos de estudio.

---

<sup>1</sup> Peter R. N. Childs, *Rotating Flow*, Elsevier, 2011, 415 pp.

## Capítulo 3: Método de solución

### 3.1 Introducción

En este capítulo se presenta el método de volúmenes finitos, el cual permite dar solución a las ecuaciones presentadas en el capítulo anterior. Iniciaremos con el establecimiento de una forma general para la ecuación de transporte, que nos va a permitir un tratamiento generalizado de un gran número de problemas distintos. La particularización de la ecuación de transporte para cada variable generará diversas ecuaciones de la mecánica de fluidos.

### 3.2 Método de volúmenes finitos

El fluido está gobernado por ecuaciones del tipo:

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \nabla(\rho\varphi\vec{v}) - \nabla(\Gamma_\varphi\nabla\varphi) = S_\varphi \quad (3.1)$$

Donde las variables independientes son:  $t, x, y, z$ ;  $\varphi$  es la variable dependiente de la ecuación diferencial y representa  $u, v, w, h, k, \varepsilon$ , etc;  $\rho$  es la densidad del fluido, y  $\Gamma_\varphi$  el coeficiente de difusividad de  $\varphi$ ; las cuales son propiedades del fluido.

Las ecuaciones de la mecánica de fluidos pueden todas ponerse en la forma indicada arriba, que llamaremos ecuación de transporte. El símbolo  $\varphi$  representa la variable dependiente de la ecuación, que dará lugar, al tomar distintos papeles, a las diversas ecuaciones que gobiernan un problema dado.

Los símbolos  $\rho$  y  $\Gamma$  son, sin embargo propiedades, que opcionalmente, pueden calcularse a partir de las variables dependientes mediante relaciones algebraicas, pero que no responden por sí mismas a una ecuación de transporte.

Mostramos el significado de cada uno de los términos de la ecuación de conservación:

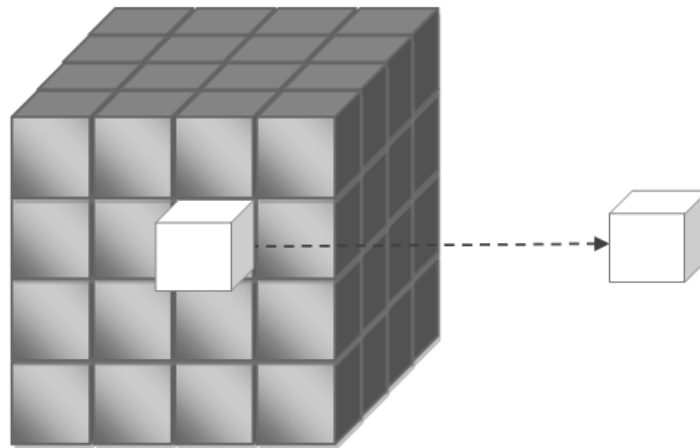
El primero es el término temporal  $\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t}$  que recoge las variaciones locales (con el tiempo) de  $\rho\varphi$ . Representa por tanto la acumulación o disminución local de esa magnitud.

El segundo término es el término convectivo  $\nabla(\rho\varphi\vec{v})$ , y es el responsable del transporte de la propiedad  $\varphi$  entre dos puntos próximos del dominio por medio de la velocidad del fluido.

El tercer término es el término difusivo  $-\nabla(\Gamma_\varphi \nabla\varphi)$ , y expresa la tendencia del fluido al equilibrio, mediante la destrucción de los gradientes de la propiedad  $\varphi$ . Para la cantidad de movimiento, este término no es sino la consecuencia de la ley de Newton.

El último término que se enumera es el término fuente  $S_\varphi$  que representa cualesquiera otros términos de una ecuación determinada que no están incluidos en los anteriores tres.

La ecuación general 3.1, se puede discretizar con el método de volúmenes finitos. Con este método, el dominio se divide en pequeños volúmenes de control (imagen 3.1), asociando a cada uno de ellos un punto nodal. De manera similar, se discretiza el tiempo en intervalos temporales. La ecuación diferencial resultante, se integra en cada volumen de control y en cada intervalo temporal, el resultado es una ecuación discretizada que relaciona los valores de  $\varphi$  para un determinado grupo de puntos nodales. Esta ecuación algebraica expresa el principio de conservación de  $\varphi$  en el volumen finito, de la misma manera que la ecuación diferencial lo expresa para un volumen infinitesimal. El dominio computacional es subdividido en un número finito de volúmenes de control vecinos, donde el estado resultante expresa la conservación exacta de las propiedades relevantes para cada uno de los volúmenes de control.



**Imagen 3. 1. Representación del sistema discretizado en volúmenes finitos.**

El dominio se discretiza en mallas que son topológicamente cartesianas, cada celda paralelepédica tiene seis celdas vecinas. La notación de una celda y sus vecinas se muestra en la imagen 3.2.

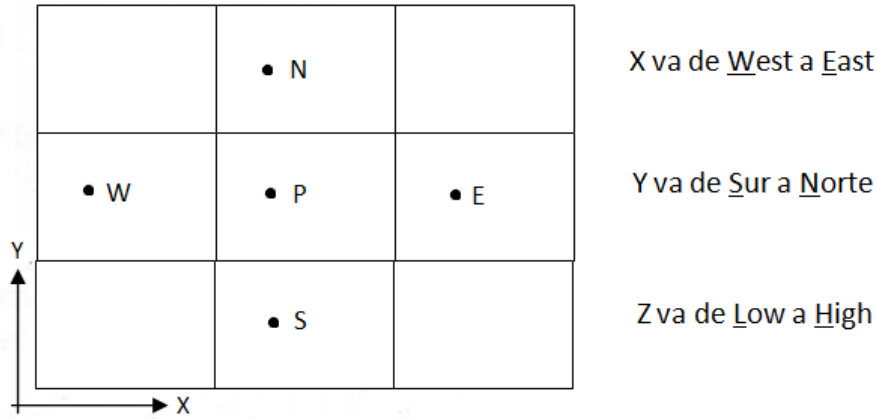


Imagen 3. 2. Nomenclatura de la malla para la celda P.

Las caras de la celda se notan con la misma nomenclatura, pero con letras minúsculas.

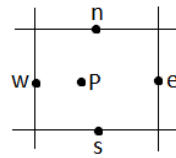


Imagen 3. 3. Nomenclatura en las caras.

El tiempo también se discretiza. Las celdas en la dirección temporal se llaman intervalos temporales. La celda P en el paso temporal anterior se nota como T.

La discretización de la ecuación se basa en la integración de la misma, término a término, en cada celda P y en cada paso temporal  $\Delta t$ . En la integración, el valor de  $\varphi$  se supondrá constante en toda la celda y en todo el paso temporal.

$$\int_{\Delta t} \int_{V_p} \left( \frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \nabla(\rho\varphi\vec{v}) - \nabla(\Gamma_\varphi \nabla\varphi) \right) dV dt = \int_{\Delta t} \int_{V_p} S_\varphi dV dt \quad (3.2)$$

Por simplicidad, supondremos la ecuación anterior dividida por  $\Delta t$ . Además en las siguientes secciones se van a discretizar cada uno de los términos de la ecuación de transporte, uno por uno.

### 3.2.1. Término temporal

Con lo mencionado anteriormente, la integración del término temporal es muy sencilla: la derivada se sustituye por la diferencia del derivando al final y al principio del paso temporal, dividida por el tamaño del mismo.

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_P &= \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} \int_{V_p} \frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} dV dt = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} \int_{V_p} \frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} dt dV \\ &= \frac{1}{\Delta t} \int_{V_p} \left[ \frac{P_P\varphi_P - P_T\varphi_T}{\Delta t} \Delta t \right] dV = \frac{V_P}{\Delta t} (\rho_P\varphi_P - \rho_T\varphi_T) \quad (3.3) \end{aligned}$$

### 3.2.2. Término fuente

El término fuente se supondrá lineal, con la formulación coeficiente-valor:  $S_\varphi = C(V - \varphi)$ . Esta formulación lineal ayuda a la convergencia del método iterativo.  $C$  y  $V$  pueden ser variables.  $\varphi$  se supone constante en la celda y en el paso temporal, e igual a su valor al final de éste.

$$\mathfrak{F}_P = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} \int_{V_P} S_\varphi dV dt = V_P \cdot C \cdot (V - \varphi_P) \quad (3.4)$$

$C$ ="coeficiente";  $V$ ="valor".

### 3.2.3. Término difusivo

El tratamiento del término difusivo aconseja, primero, la transformación de la integral de volumen en una integral de superficie sobre las caras de la misma. Esta transformación se hace mediante la aplicación del teorema de Gauss.

En esta parte omitimos la integración en el tiempo ( $\int_{\Delta t} dt$ ).

$$\mathfrak{D}_P = - \int_{V_P} \nabla(\Gamma \nabla \varphi) = - \int_{S_P} \Gamma \nabla \varphi dS = - \sum_{\text{las caras}}^{\text{todas}} [\Gamma \nabla \varphi \vec{n} A]_{\text{cara}} \quad (3.5)$$

$\vec{n}$  es la normal externa.

Para el cálculo del término difusivo es necesario obtener el coeficiente de difusión  $\Gamma$  en la cara de la celda. Cuando  $\Gamma$  no es constante, es probablemente función de valores de variables que se conocen en los nodos. Es por tanto necesario interpolarlo a la cara. Esta interpolación puede ser aritmética o armónica. La segunda es apropiada para asegurar la continuidad del flujo difusivo a través de la cara cuando  $\Gamma$  varía rápida o abruptamente.

### 3.2.4. Término convectivo

En el término convectivo, como en el caso del término difusivo, la integral de volumen se transforma en una integral de superficie extendida a todas las caras de la celda mediante aplicación del teorema de Gauss. El cálculo del término convectivo requiere por tanto el conocimiento de  $\rho$ ,  $\varphi$  y  $\vec{v}$  en la cara.

$$\mathfrak{C}_P = \int_{V_P} \nabla(\rho \vec{v} \varphi) dV = \int_{S_P} (\rho \vec{v} \varphi) dS = \sum_{\text{las caras}}^{\text{todas}} [\rho \vec{v} \varphi A \vec{n}]_{\text{caras}} \quad (3.6)$$

Al sustituir el resultado de la discretización de cada uno de los términos, es posible mediante un proceso algebraico, obtener una ecuación algebraica, pseudo-lineal, que liga los valores  $\varphi$  en la celda  $P$  con los valores de  $P$  en celdas vecinas y en la misma celda pero en el paso temporal anterior.

$$(a_p + V_p C)\varphi_p = a_w\varphi_w + a_e\varphi_e + a_t\varphi_t + V_p C V \quad (3.7)$$

Donde cada uno de los coeficientes  $a$  se usa para denotar a los multiplicadores de las  $\varphi$ .

Al discretizar la ecuación de continuidad, y una mínima manipulación matemática de los coeficientes  $a$  permite concluir que el coeficiente  $a_p$  es igual a la suma de los coeficientes de todas las celdas vecinas  $a_p = a_e + a_w + a_t$ .

Por tanto, en el caso general tridimensional, el valor de  $\varphi$  en la celda P puede ponerse como la combinación lineal de los valores de  $\varphi$  en las celdas vecinas y en el paso temporal anterior.

$$\varphi_p = \frac{\sum_{vecinas} a_i \varphi_i + a_t \varphi_t + V_p C \cdot V}{a_p + V_p \cdot C} \quad (3.8)$$

Ésta es la ecuación lineal que ha de resolverse. Por supuesto, la variable  $\varphi_p$  en una celda aparece en el término de la derecha de la misma ecuación para cada una de las celdas vecinas, y por tanto hay que hablar, propiamente, no de una ecuación sino de un sistema de ecuaciones.

En este trabajo se usa un código numérico comercial de dinámica de fluidos computacional para resolver las ecuaciones que describen el comportamiento del flujo.



## Capítulo 4: Simulación numérica de vórtices de Taylor

### 4.1 Introducción

En este capítulo se presentan los resultados del estudio numérico del flujo de vórtices de Taylor entre cilindros concéntricos, donde el cilindro interior gira a distintas velocidades y se analiza el efecto de introducir aletas anulares en el cilindro interior. Para ello se proponen tres configuraciones geométricas con aletas anulares (dos, cinco y ocho aletas), las cuales son comparadas con el caso general donde el cilindro interior es liso.

### 4.2 Configuración geométrica y detalles numéricos

El sistema está compuesto de dos cilindros concéntricos, donde el cilindro interior gira a distintas velocidades angulares para mover un fluido contenido entre ellos. De esta manera se analiza el comportamiento del flujo al variar las geometrías del cilindro interior y su velocidad de rotación.

La variación de la velocidad angular define diferentes valores del número de Taylor (ecuación 2.25).

$$Ta_m = \frac{\Omega r_m^{0.5} (b - a)^{1.5}}{\nu}$$

Donde:

$r_m = (a + b)/2$  es el radio medio

$a$  es el radio del cilindro interior

$b$  es el radio del cilindro exterior

$\nu$  es la viscosidad cinemática del fluido

$\Omega$  es la velocidad angular

Con los siguientes valores,

$$a = 0.008 \text{ m}$$

$$b = 0.0127 \text{ m}$$

$$\Omega = 3700 \text{ rpm} = 387 \text{ rads/s}$$

$$\nu = 1.9 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$$

se obtiene el número de Taylor,

$$r_m = \frac{a + b}{2} = \frac{0.0127 + 0.008}{2} = 0.01035 \text{ m}$$

$$Ta_m = \frac{387 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot (0.01035 \text{ m})^{0.5} \cdot (0.0127 \text{ m} - 0.008 \text{ m})^{1.5}}{1.90 \times 10^{-4} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}} = 66.76 \approx 67$$

En base a la expresión anterior, se varia la velocidad angular para obtener los siguientes números de Taylor  $Ta=67, 80, 100, 120$ .

Además se analizan cuatro diferentes configuraciones geométricas empleando el cilindro liso como parámetro de comparación y se proponen tres geometrías con diferentes números de aletas anulares para estudiar el efecto que provocan en el comportamiento del flujo.

#### 4.2.1 Geometrías del cilindro interior

El sistema del caso general está formado por el cilindro interior liso con radio de  $a = 8 \text{ mm}$  y el cilindro exterior, utilizado en todos los casos de estudio, tiene un radio de  $b = 12.7 \text{ mm}$ . Las dimensiones de los distintos cilindros interiores se muestran en las siguientes imágenes (4.1 - 4.4).

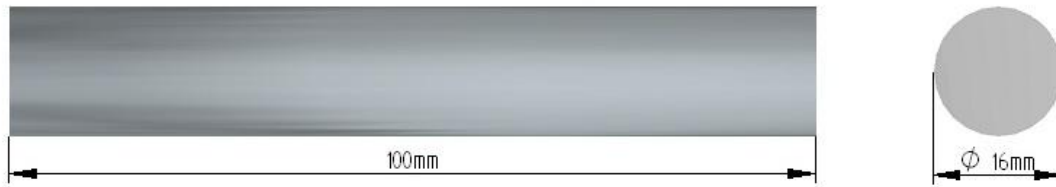


Imagen 4. 1. Cilindro interior liso.

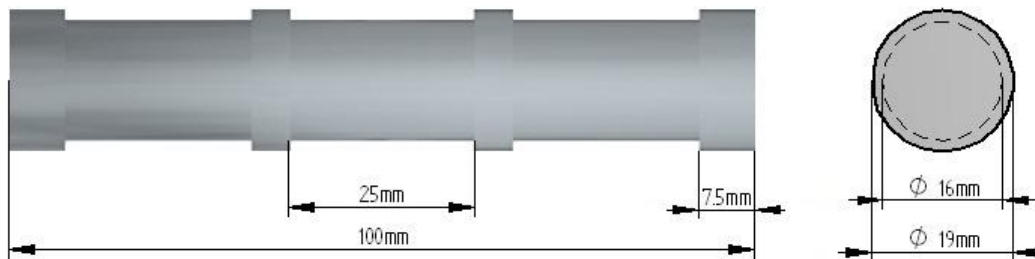


Imagen 4. 2. Cilindro interior con dos aletas anulares.

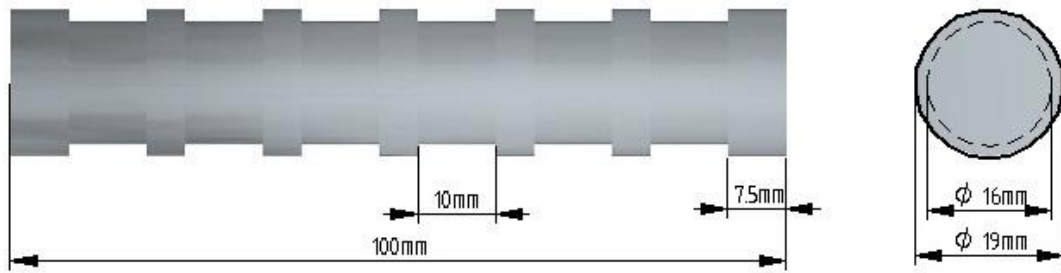


Imagen 4. 3. Cilindro interior con cinco aletas anulares.

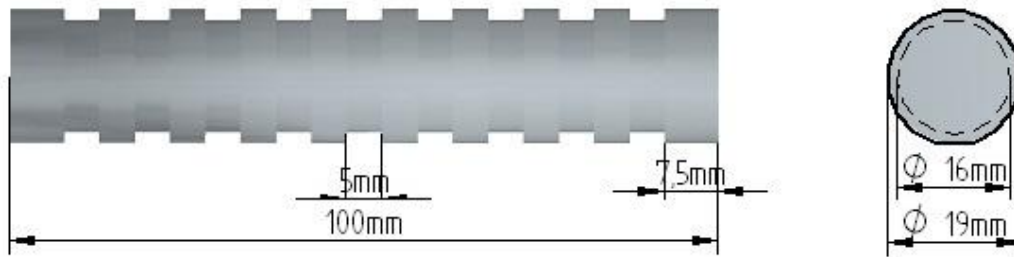


Imagen 4. 4. Cilindro interior con ocho aletas anulares.

En las configuraciones geométricas propuestas se varió la distancia entre aletas para diferentes valores, los cuales son:

- dos aletas 25 mm
- cinco aletas 10 mm
- ocho aletas 5 mm

#### 4.2.2 Discretización del volumen de control

En este trabajo se utilizó un volumen control definido por las líneas del contorno mostradas en la imagen 4.5.

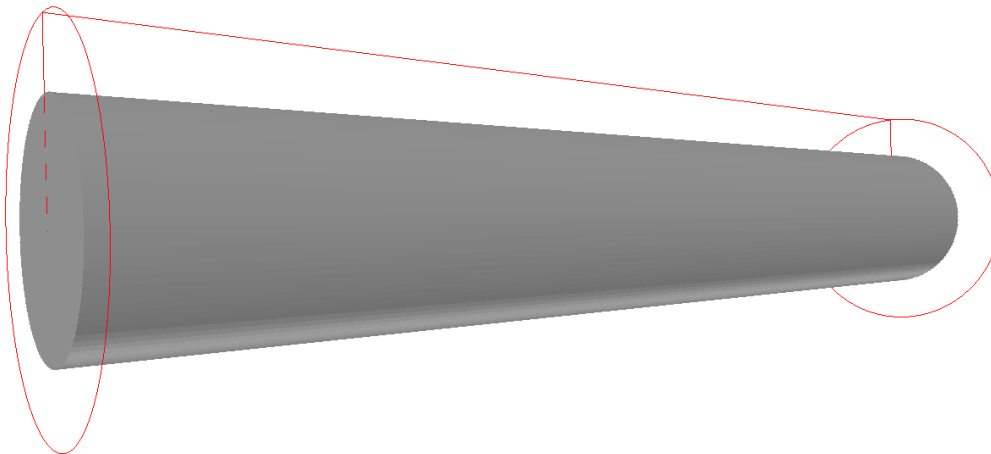


Imagen 4. 5. Configuración geométrica.

Debido a la geometría del sistema se emplearon coordenadas cilíndricas, permitiendo así la concetricidad de los cilindros.

Las dimensiones del dominio computacional son:

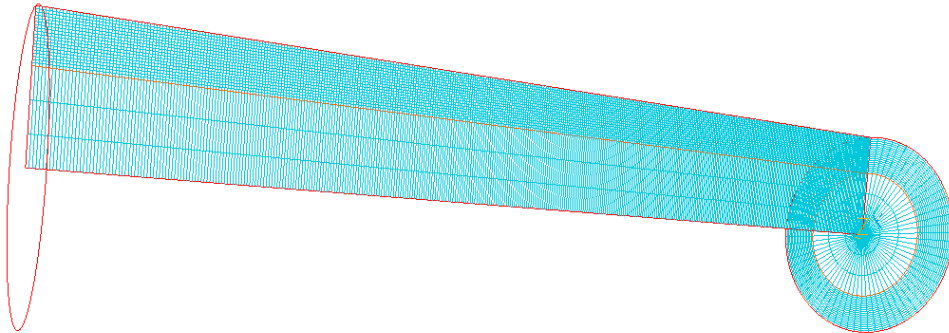
$$\text{Coordenada angular: } x = 2\pi \text{ [rads]}$$

$$\text{Coordenada radial: } y = 0.0127 \text{ [m]}$$

$$\text{Coordenada axial: } z = 0.10 \text{ [m]}$$

Para este trabajo se utilizó el método de volúmenes finitos en donde el volumen de control es discretizado en pequeños volúmenes finitos, resolviéndose las ecuaciones de Navier-Stokes promediadas en el tiempo en cada uno de ellos para describir el comportamiento del flujo.

El volumen de control fue discretizado en una malla de 72x22x400 en la dirección angular, radial y axial respectivamente formando un total de 633, 600 celdas. Para obtener el mallado apropiado se hizo un análisis de sensibilidad de resultados en donde al observar que los resultados no variaban al incrementar el número de celdas se eligió la malla que es mostrada en la imagen 4.6.



**Imagen 4. 6. Mallado del dominio.**

El fluido de trabajo utilizado en este análisis es glicerina con las siguientes propiedades:  $\rho = 1259 \text{ kg/m}^3$  y  $\nu = 1.9 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ , siendo la densidad y la viscosidad cinemática, respectivamente.

En las secciones siguientes se presentan los resultados numéricos del comportamiento del flujo para las distintas configuraciones geométricas.

### *4.3 Resultados numéricos*

#### *4.3.1 Cilindro liso*

A continuación se presentan los resultados para el caso general con la condición de  $Ta=67$ . En la imagen 4.7 se presenta el perfil de presiones.

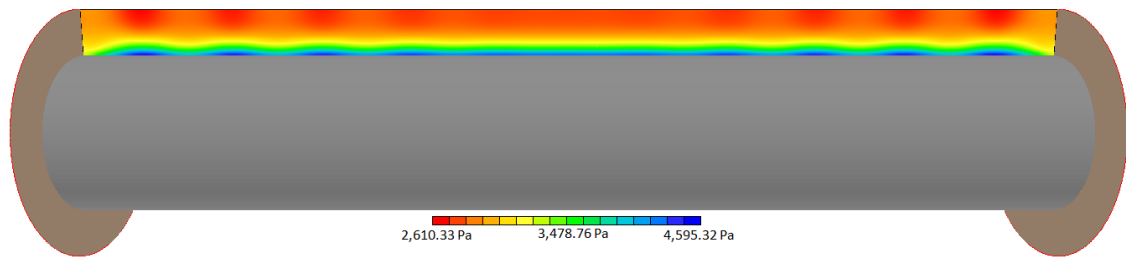


Imagen 4. 7. Perfil de presiones (Ta=67).

En la figura 4.7 se observan zonas de baja presión localizadas en la región próxima a la pared del cilindro interior, y en la región próxima al cilindro estático exterior se observan las zonas de alta presión debido a la fuerza centrífuga que ocasiona que el fluido siga la dirección radial positiva.

El perfil de velocidades se muestra en la imagen 4.8.

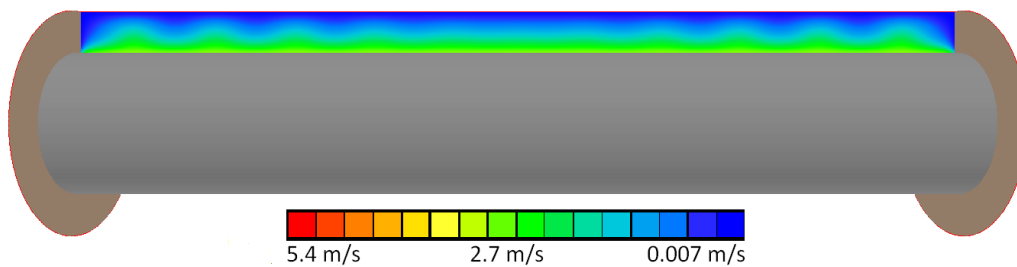
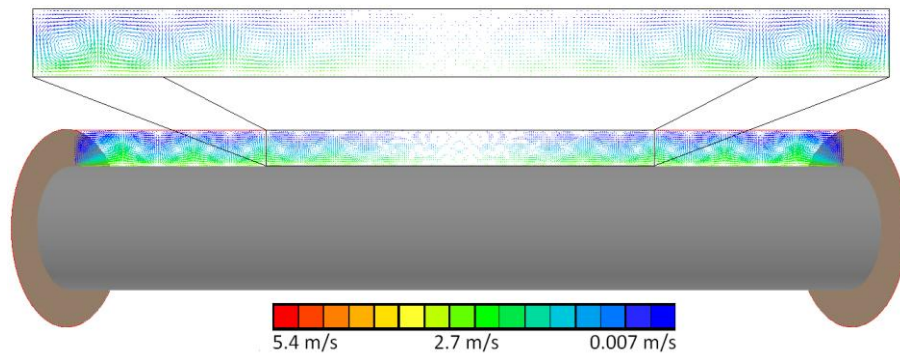


Imagen 4. 8. Perfil de velocidades (Ta=67).

En la imagen anterior se aprecian la zona de alta velocidad justo en la pared del cilindro interior, que es la zona en donde el fluido recibe la energía que provoca su movimiento. Las zonas de baja velocidad se observan en la pared interna del cilindro exterior, esto se explica debido a la condición de *no deslizamiento* que se presenta debido a que el cilindro exterior permanece estático.

El perfil que se aprecia en la figura 4.9 presenta un comportamiento característico, donde se presentan ondulaciones en la dirección axial, donde se observa que el fenómeno se atenúa en la sección central.

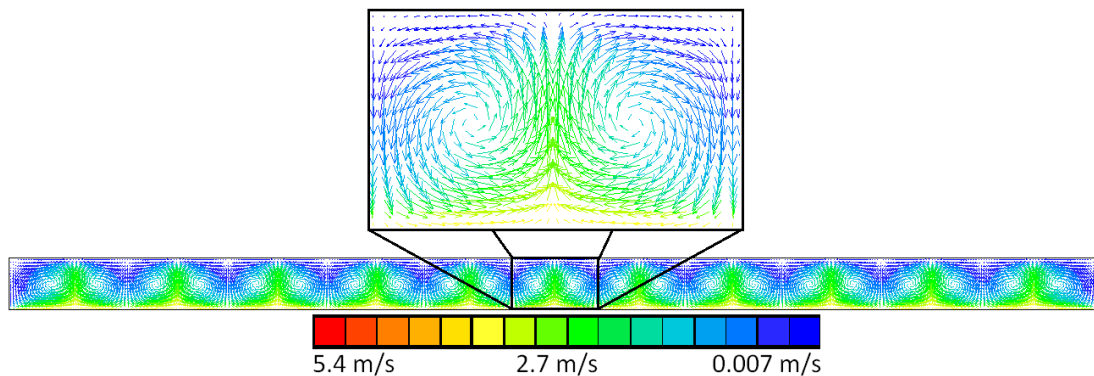
En la imagen 4.10 se presenta el perfil anterior con vectores, lo que permite visualizar las recirculaciones o vórtices formados a lo largo de la dirección axial.



**Imagen 4. 9. Comienzo de la formación de los vórtices ( $Ta=67$ ).**

En los siguientes resultados el número de Taylor es incrementado observándose un perfil uniforme a lo largo del eje axial.

A continuación se presenta el perfil de velocidades para la condición de  $Ta=80$  en la imagen 4.10, donde se observa que el perfil es uniforme a lo largo del eje axial.



**Imagen 4. 10. Movimiento radial de los vórtices ( $Ta=80$ ).**

En la imagen 4.10 se observa un par de vórtices, donde se aprecia que giran alternadamente.

La imagen 4.11 muestra la estructura toroidal que describe el vórtice, en la cual se observa la rotación simultánea con respecto al eje axial.

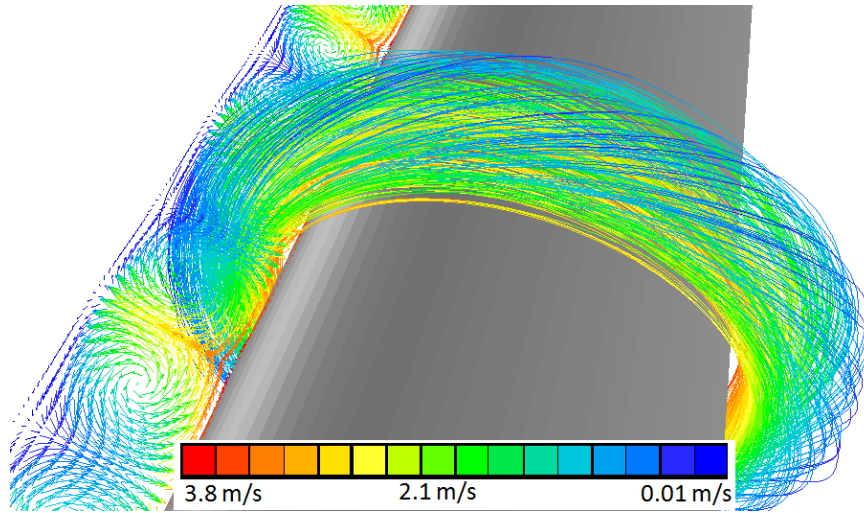


Imagen 4.11. Movimiento angular de los vórtices ( $Ta=80$ ).

En la imagen 4.12 se muestra el perfil para la condición de  $Ta=100$ , donde se aprecia mayor definición y separación de los vórtices.

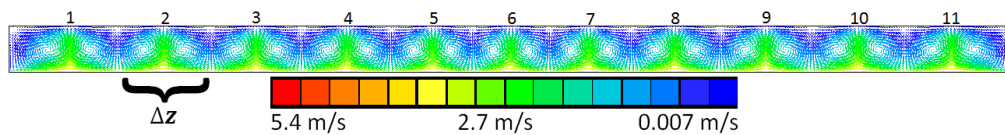


Imagen 4.12. Se forman once pares de vórtices.

Un parámetro que caracteriza el tamaño de los vórtices es la longitud de onda, para el cilindro liso se calcula en base a las expresiones presentadas en el capítulo 1.

En la imagen 4.12 se aprecian once pares de vórtices con un tamaño  $\Delta z$ . La longitud axial es  $z = 100 \text{ mm}$ ,

$$\Delta z = \frac{z}{11} = \frac{100 \text{ mm}}{11} = 9.09091 \text{ mm}$$

Con la finalidad de apreciar la evolución del perfil de velocidades se presenta la gráfica 4.1 en donde se muestran los resultados de la velocidad a lo largo del eje axial.

Para la presentación de dichos resultados se realiza una adimensionalización de parámetros de la siguiente manera. Los valores utilizados para adimensionalizar las variables son la velocidad característica que es la velocidad máxima en la pared del cilindro interior,  $V_{característica} = V_{pared}$ ,

$$V_{dim} = V_{local} / V_{pared}$$

y la longitud característica que es el espacio entre los cilindros,  $d = b - a$ ,

$$z_{dim} = z_{local} / d$$

En la gráfica 4.1 se observa el comportamiento de la velocidad a lo largo de la longitud axial para distintos valores del número de Taylor. Las gráficas tienen un comportamiento sinusoidal y su amplitud tiende a ser uniforme conforme se incrementa el número de Taylor.

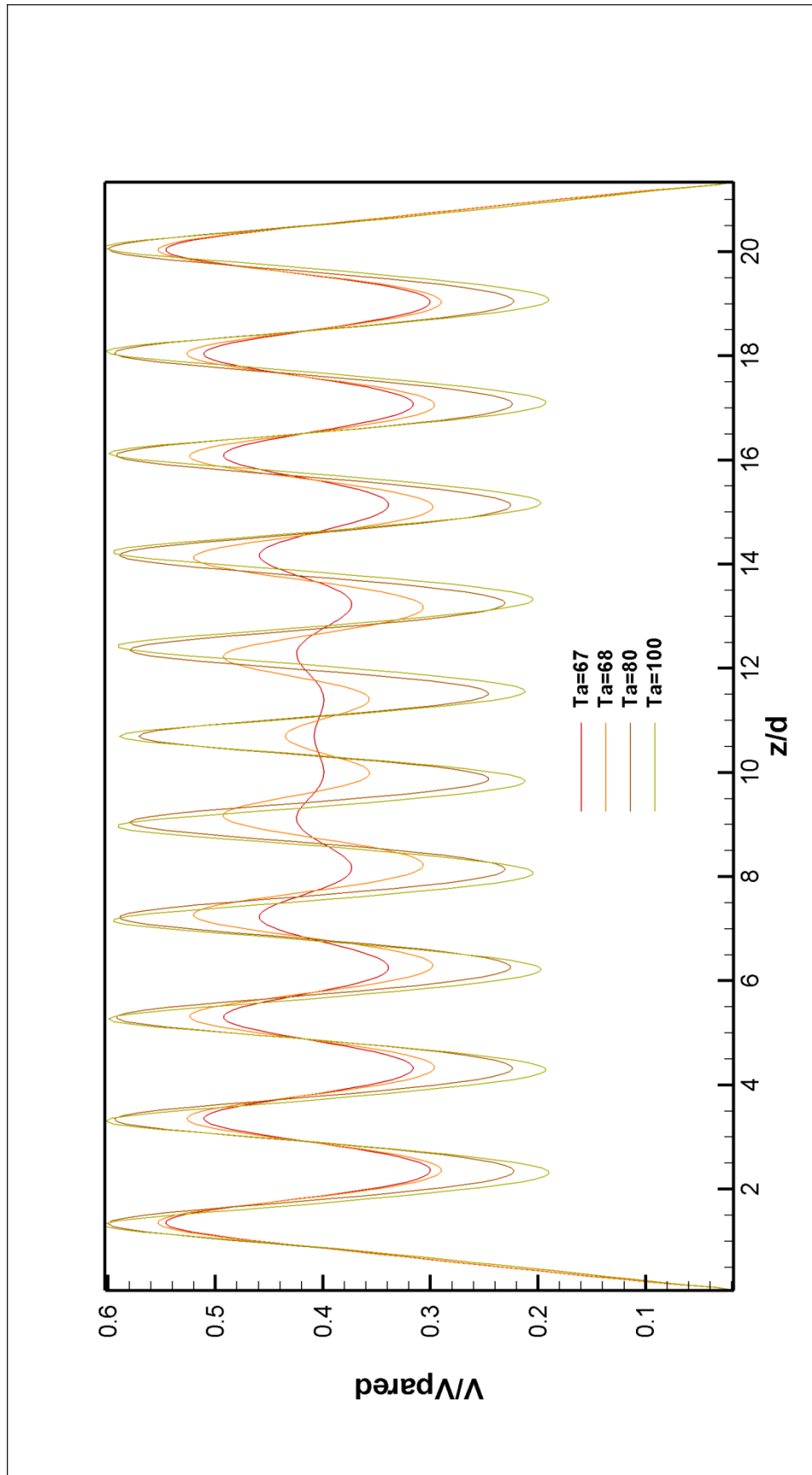
Comparando la imagen 4.9 con la gráfica 4.1 ( $Ta=67$ ), la sección de la gráfica que presenta una menor amplitud coincide con la zona central del perfil de velocidades donde no se observan los vórtices de Taylor. Los vórtices se forman de los extremos hacia la zona central del sistema, este comportamiento ya ha sido reportado en trabajos numéricos como lo hizo J. Rigopoulos<sup>1</sup>.

Con la imagen 4.13 se observa una comparación entre la formación de los vórtices a diferentes condiciones del número de Taylor. Con el aumento progresivo del número de Taylor se distingue un aumento en el tamaño y definición de los vórtices.

---

<sup>1</sup> J. Rigopoulos, J. Sheridan & M. C. Thompson, *State selection in Taylor-vortex flow reached when an accelerated inner cylinder*, *J. Fluid Mech.* Vol. 489 (2003), pp. 79-99.





Gráfica 4. 1. Gráficas del comportamiento de la velocidad a lo largo de la longitud axial.

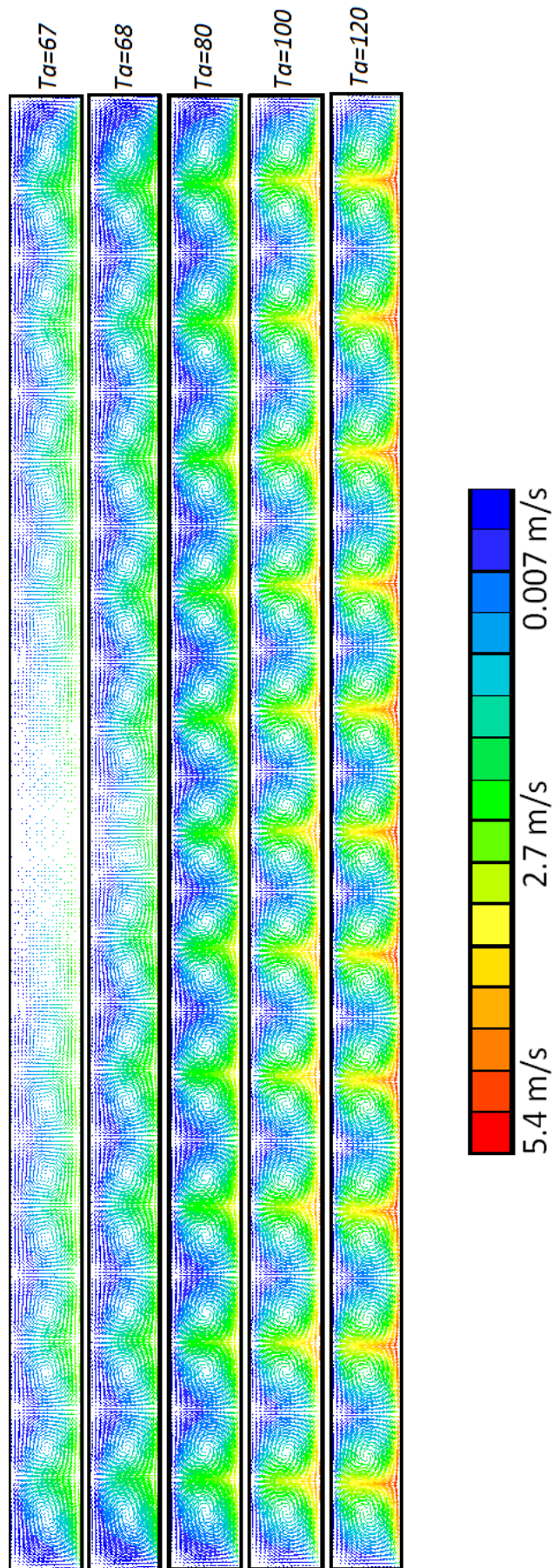


Imagen 4. 13. Formación de vórtices a diferentes números de Taylor.

#### 4.3.2 Cilindro con dos aletas anulares

En esta sección se presentan los resultados para la configuración geométrica propuesta. En la imagen 4.14 se presenta el perfil de velocidades para el cilindro interior con dos aletas anulares.

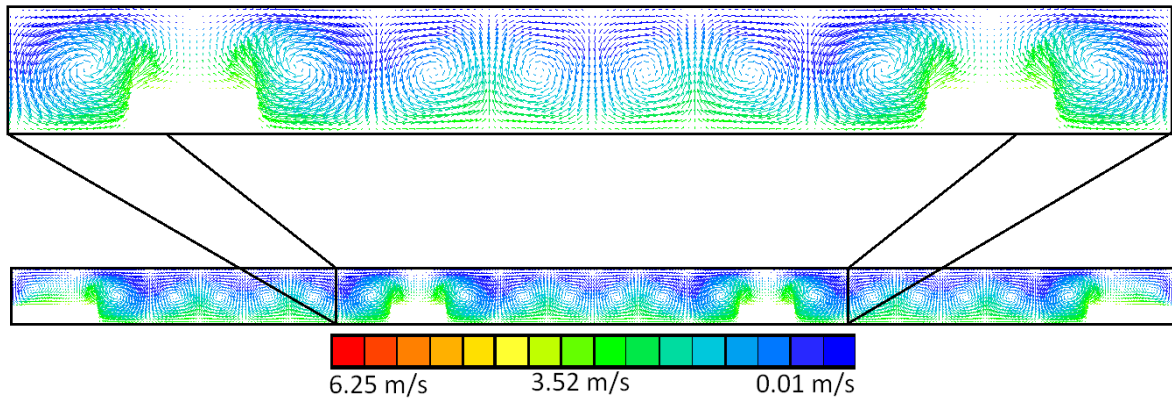


Imagen 4. 14. Perfil de velocidades del cilindro con dos aletas anulares ( $Ta=67$ ).

La inclusión de la aleta perturba el flujo, lo que ocasiona la aparición y deformación de los vórtices para la condición de  $Ta=67$ . Comparando el caso liso y el caso con dos aletas para la misma condición, se observa la formación de vórtices a lo largo de toda la dirección axial para el cilindro con dos aletas.

En la imagen 4.15 se observan los vectores que ilustran el movimiento del flujo en la zona entre aletas anulares, encontrando seis vórtices de diferente tamaño para la condición de menor velocidad, y obteniendo un tamaño más uniforme con el aumento de la velocidad.

Así mismo al aumentar el número de Taylor se distingue que el vórtice tiende a extender su tamaño a la zona superior de la aleta.

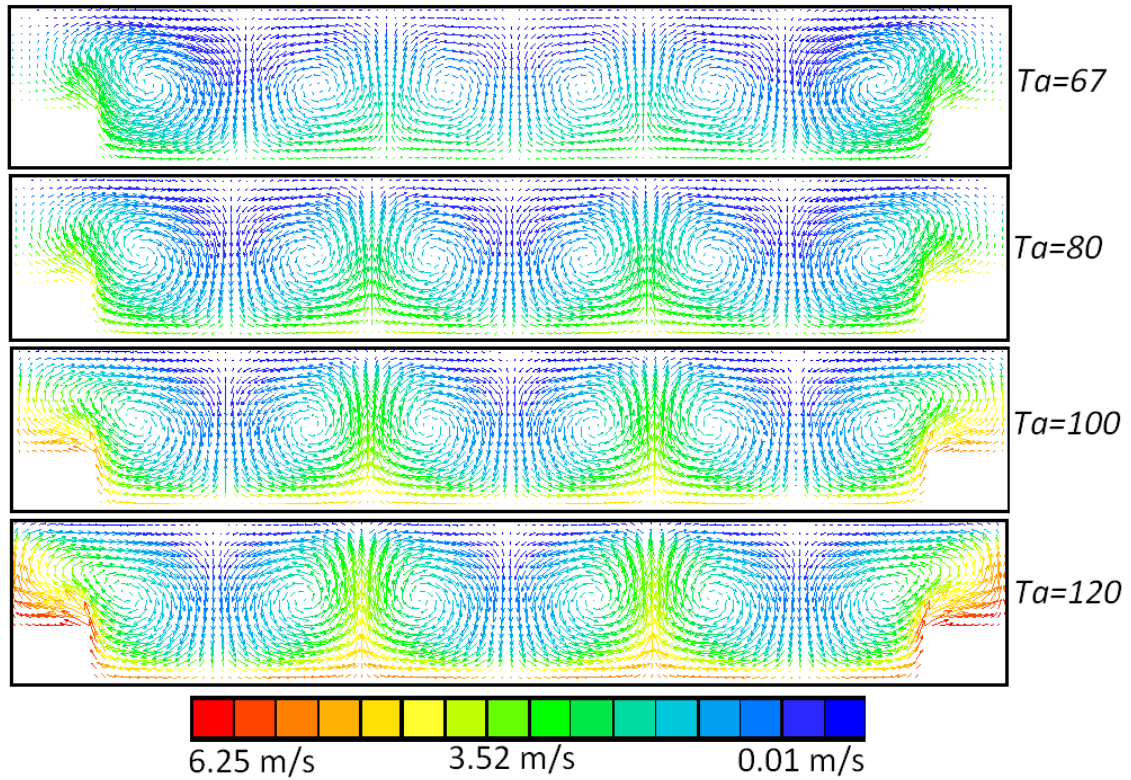


Imagen 4. 15. Evolución de los vórtices de Taylor entre aletas.

#### 4.3.3 Cilindro con cinco aletas anulares

En esta sección se presentan los resultados para la configuración geométrica del cilindro interior con cinco aletas anulares. En la imagen 4.16 se presenta el perfil de velocidades.

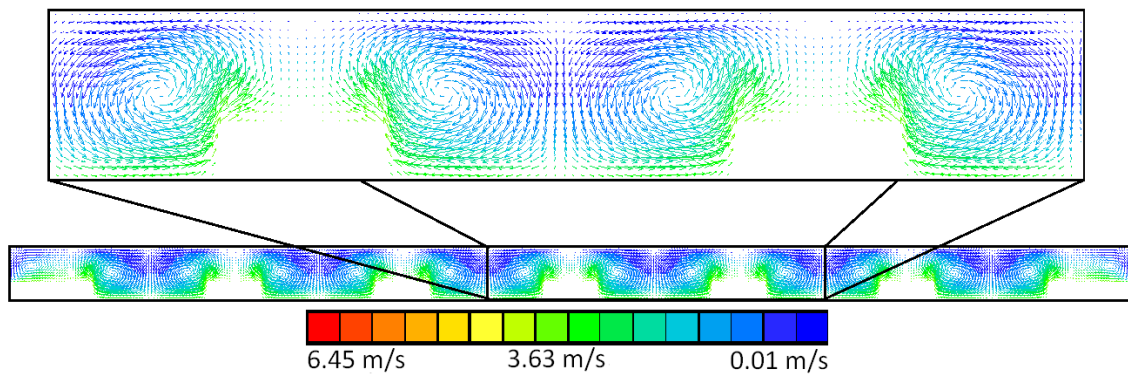


Imagen 4. 16. Formación de vórtices en cilindro con cinco aletas anulares (Ta=67).

En la imagen 4.16 se observa que al reducir la distancia entre aletas se reduce la cantidad de vórtices a sólo un par, cuyo tamaño del par de vórtices tiende a ser uniforme a menor número de Taylor. Aunque conserva el mismo comportamiento de extender su tamaño hacia la zona superior de la aleta conforme se incrementa el número de Taylor, lo que se puede observar en la imagen 4.17.

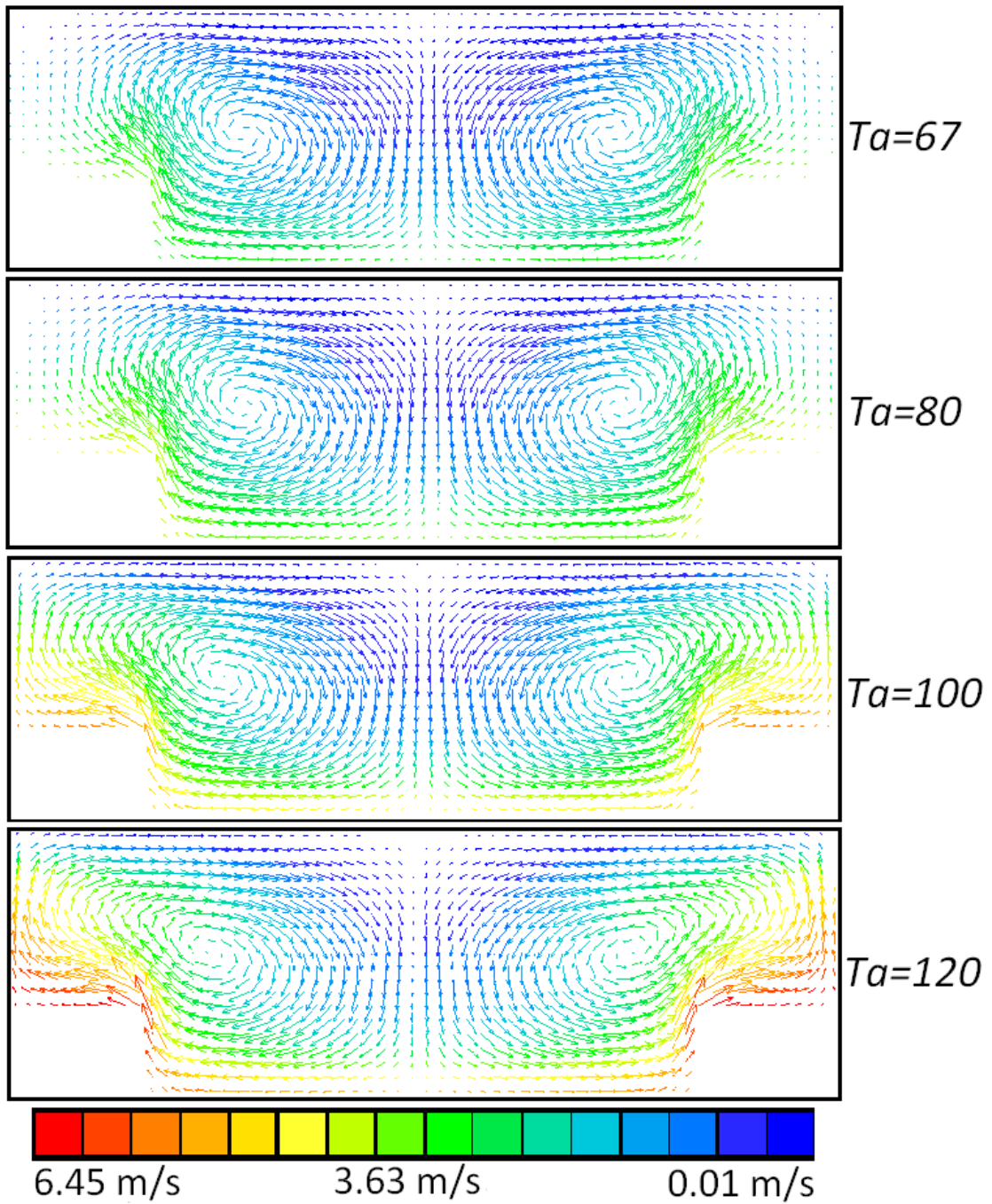


Imagen 4. 17. Evolución de los vórtices de Taylor entre aletas.

#### 4.3.4 Cilindro con ocho aletas anulares

A continuación se presentan los resultados para configuración geométrica de ocho aletas anulares. En la imagen 4.18 se presenta el perfil de velocidades.

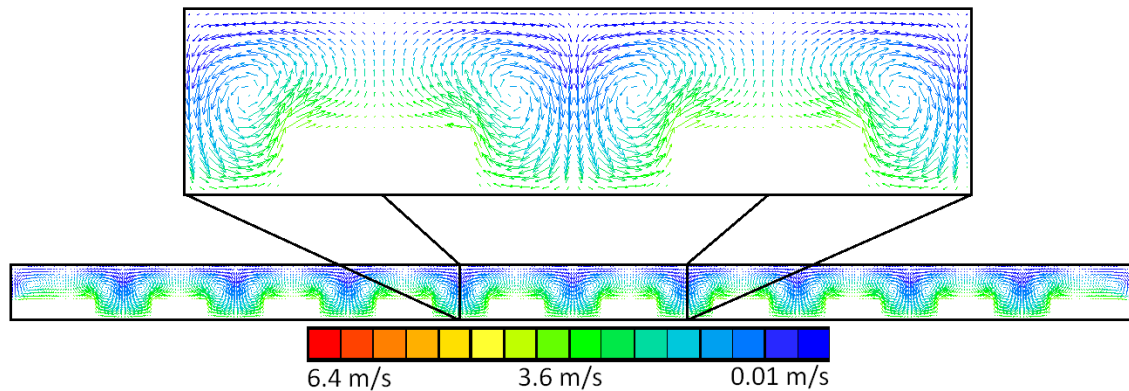


Imagen 4. 18. Perfil de velocidades del cilindro con ocho aletas anulares ( $Ta=67$ ).

En la imagen 4.18 se observa al igual que en el caso anterior la formación de un par de vórtices entre las aletas, notando que al reducir la distancia entre aletas se reduce el tamaño de los vórtices presentando una mayor deformación de ellos.

Se sigue presentando la misma tendencia del vórtice a extenderse por encima de la aleta al aumentar el número de Taylor, lo que se muestra en la imagen 4.19.

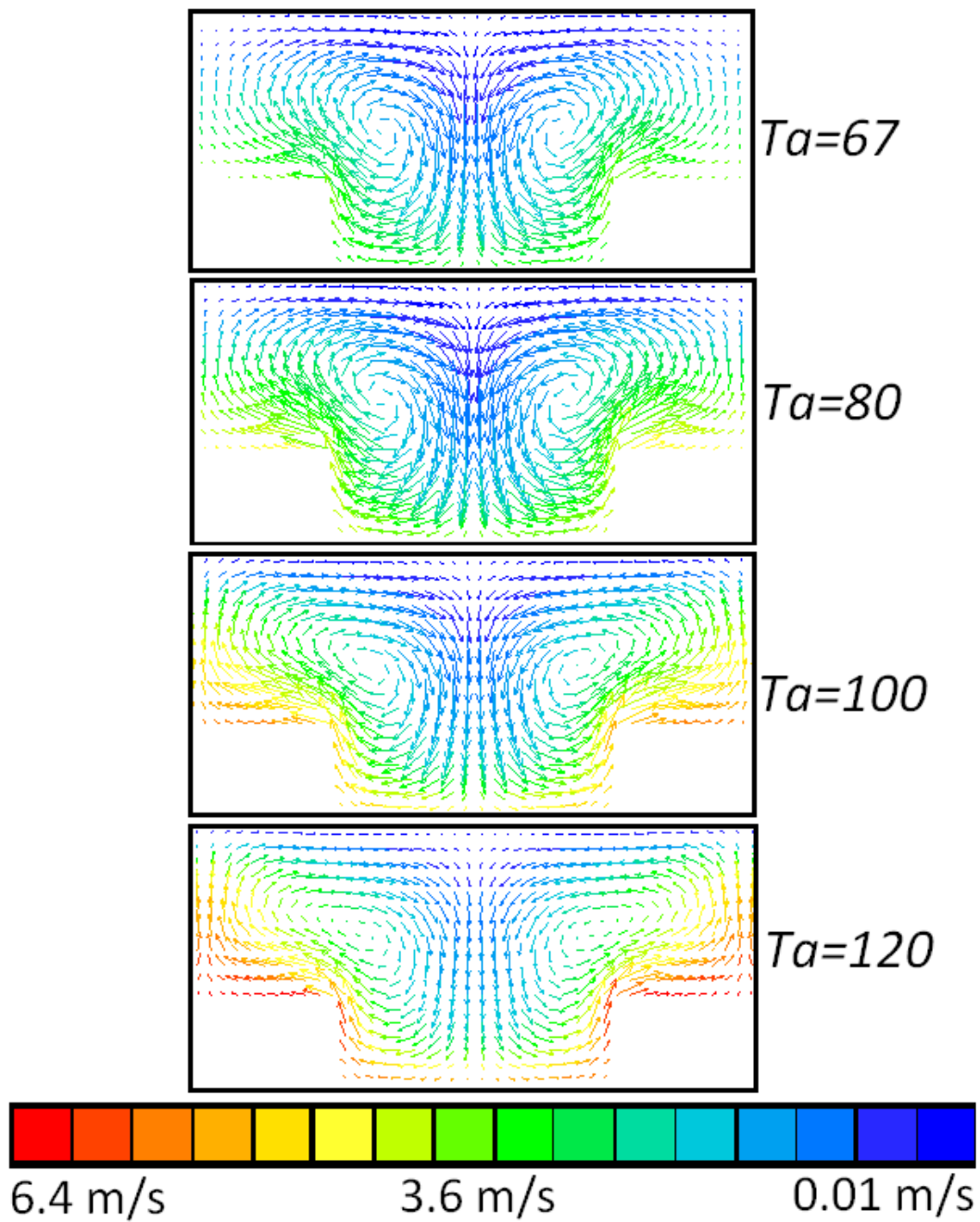


Imagen 4. 19. Vórtices adyacentes a la aleta anular a distintos números de Taylor.

#### *4.3.4 Comparación de los casos*

A continuación se presenta una comparación de los resultados de los diferentes casos analizados en este trabajo.

En la imagen 4.20 se observan los vórtices de Taylor para las distintas geometrías analizadas para  $Ta=80$ , que es la condición en la cual todos los casos presentan una uniformidad del flujo.

Una vez que se forman los vórtices a lo largo de la dirección axial se aprecian variaciones en la cantidad de vórtices formados debido a la presencia de las aletas anulares. También se observa que al reducir la distancia entre aletas el número y tamaño de los vórtices disminuye.



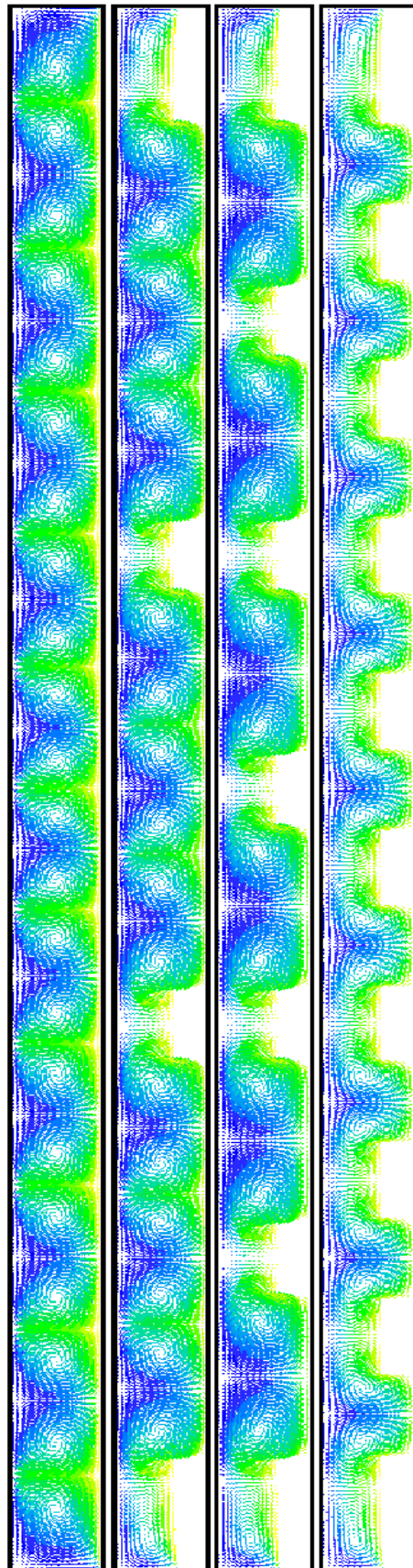
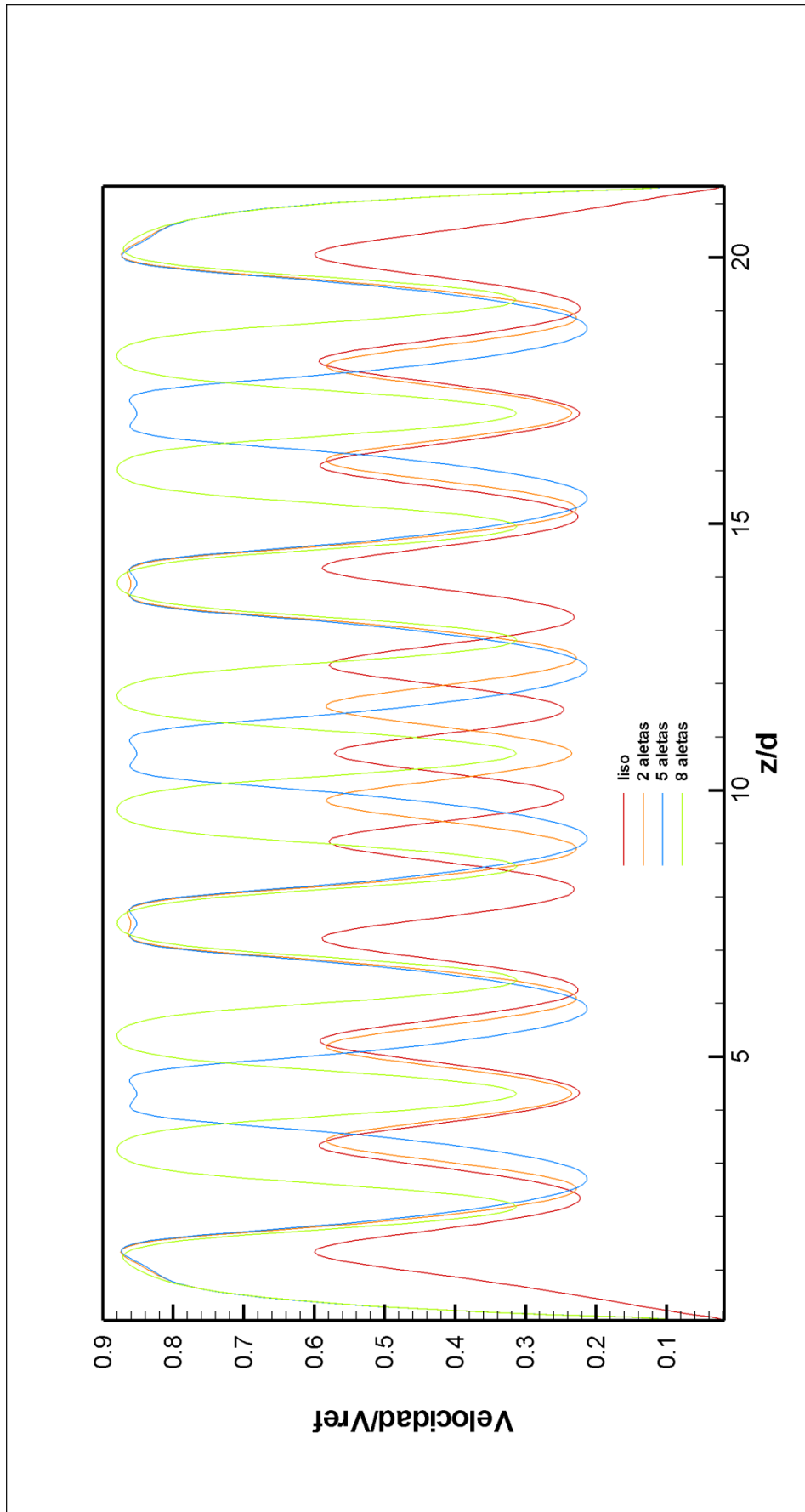


Imagen 4. 20. Formación de vórtices de Taylor en distintas geometrías del cilindro interior ( $Ta=80$ ).



Gráfica 4. 2. Gráficas comparativas ( $Ta=80$ ).

En la gráfica 4.2 se hace una comparación del comportamiento de la velocidad a lo largo de la longitud axial entre las distintas geometrías para la misma condición estable ( $Ta=80$ ).

Además, se aprecia en el caso del cilindro con dos aletas, que en la zona del cilindro no aletada su comportamiento tiende a ser similar a la del cilindro liso a excepción de la zona central del sistema donde se presenta un desfase.

Otro fenómeno importante que se observa en la gráfica 4.2 es la coincidencia de las tres geometrías propuestas en dos máximos de la función, donde se observa una variación de la velocidad, dicha zona corresponde con la ubicación de las aletas.

## **Capítulo 5: Conclusiones y recomendaciones para trabajos futuros**

### *5.1 Conclusiones*

El flujo entre dos cilindros concéntricos es simulado con un modelo de Dinámica de Fluidos Computacional. En este modelo numérico son resueltas las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento mediante un método de volúmenes finitos. El movimiento del fluido se simula mediante la aplicación de un esfuerzo cortante en la pared del cilindro interior. Un efecto que se analizó fue la introducción de aletas anulares en el cilindro interior.

El modelo de Dinámica de Fluidos Computacional predice el movimiento del flujo de vórtices de Taylor. De las simulaciones se observó que al aumentar el número de Taylor se generan los vórtices desde los extremos del sistema y hacia la zona central. El comportamiento que presenta la velocidad a lo largo de la longitud axial es sinusoidal y tiende a ser periódico.

El introducir aletas anulares en el cilindro interior modifica el umbral de estabilidad, disminuyendo de esta manera la cantidad de energía necesaria para que se formen los vórtices de Taylor.

Conforme se introducen más aletas se reduce la distancia entre ellas, esto ocasiona una reducción en el tamaño de los vórtices.

En términos del comportamiento sinusoidal, la geometría de dos aletas anulares presenta un comportamiento similar al que se muestra en el caso del cilindro liso.

Conforme se incrementa el número de Taylor, los vórtices se generan con mayor uniformidad y crece la intensidad del flujo por encima de la aleta.

### *5.2 Recomendaciones para trabajos futuros*

Se recomienda realizar un análisis experimental para validar los resultados numéricos.

Un punto importante a tomar en cuenta es la variación de los parámetros geométricos de las aletas anulares (ancho de aleta, altura de aleta, distancia entre aletas, etc) para estudiar más a detalle su efecto en la formación de vórtices de Taylor.

Otro punto que se considera debe estudiarse con mayor detalle es estudiar el efecto que presenta el flujo justo por encima de la aleta.

## Apéndice A: Flujo de Taylor-Couette

Considere un fluido con densidad y viscosidad dinámica constantes entre dos cilindros concéntricos, como el que se muestra en la imagen A.1. No hay movimiento axial, el efecto final es  $v_z = \frac{\partial}{\partial z} = 0$ . El cilindro interno gira a una velocidad angular  $\Omega_i$ . El cilindro externo está fijo. Hay simetría circular, por lo que la velocidad no varía con respecto a  $\theta$  y varía solo con  $r$ .

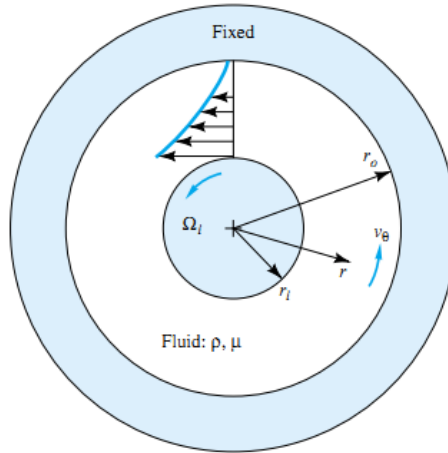


Imagen A. 1. Sistema de coordenadas para el flujo viscoso incompresible entre cilindros concéntricos.<sup>1</sup>

La ecuación de continuidad para este problema después de despreciar el cambio de la densidad con respecto del tiempo y sacar la densidad de las derivadas espaciales debido a nuestra consideración de flujo incompresible y estacionario, queda:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(v_\theta)}{\partial \theta} = 0 = \frac{1}{r} \frac{d(rv_r)}{dr} \quad (A.1)$$

Se deduce que no hay campo de velocidades en la dirección angular, por tanto  $v_\theta$  no cambia con respecto a la dirección  $\theta$ . Además  $rv_r = cte$ . Como  $v_r = 0$  en ambos cilindros, se deduce que  $v_r = 0$  en todas partes y el movimiento sólo puede ser puramente circunferencial  $v_\theta = v_\theta(r)$ . La ecuación de momentum en  $\theta$  quede como sigue:

$$\rho(V \cdot \nabla)v_\theta + \frac{\rho v_r v_\theta}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \mu \left( \nabla^2 v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} \right) \quad (A.2)$$

Para las condiciones de este problema, todos los términos se hacen cero a excepción del último. Realizando los pasos matemáticos correspondientes la ecuación básica diferencial para el flujo entre cilindros giratorios es:

<sup>1</sup> Frank M. White, *Fluid Mechanics*, 4ta edición.

$$\nabla^2 v_\theta = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv_\theta}{dr} \right) = \frac{v_\theta}{r^2} \quad (\text{A.3})$$

Esta es una ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden, resolviéndola mediante el método del factor integrante se obtiene la siguiente solución:

$$v_\theta = C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (\text{A.4})$$

Mediante las condiciones de no deslizamiento en el cilindro interno y en el externo podemos obtener las constantes:

Externo, en  $r = r_o$ :

$$v_\theta = 0 = C_1 r_o + \frac{C_2}{r_o} \quad (\text{A.5})$$

Interno, en  $r = r_i$ :

$$v_\theta = \Omega_i r_i = C_1 r_i + \frac{C_2}{r_i} \quad (\text{A.6})$$

Después de unas manipular algebraicamente las ecuaciones obtenemos la solución final de la distribución de velocidades:

$$v_\theta = \Omega_i r_i \frac{\frac{r_o}{r} - \frac{r}{r_o}}{\frac{r_o}{r_i} - \frac{r_i}{r_o}} \quad (\text{A.7})$$

El perfil de velocidades se asemeja mucho al mostrado en la imagen A.1.

## Bibliografía

### Libros:

E. L. Koschmieder, *Bénard Cells and Taylor Vortices*, Cambridge University Press, 1993, 337pp.

W. P. Graebel, *Advanced Fluid Mechanics*, Elsevier, 2007, 379 pp.

Peter R. N. Childs, *Rotating Flow*, Elsevier, 2011, 415 pp.

Frank M. White, *Fluid Mechanics*, 4ta edition, McGrawHill, 826pp.

Yunus A. Cengel, John M. Cimbala, *Mecánica de Fluidos: fundamentos y aplicaciones*, McGrawHill, 2006, 956pp.

Anil W. Date, *Introduction to Computational Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 2005, 377pp.

Jiyuan Tu, Guan Heng Yeoh, Chaoqun Liu, *Computational Fluid Dynamics: A practical approach*, Elsevier, 2008, 459pp.

### Artículos:

Hua-Shu Dou, Boo Cheong Khoo, Khoon Seng Yeo, *Instability of Taylor–Couette flow between concentric rotating cylinders*, *International Journal of Thermal Sciences* 47 (2008) 1422–1435.

Rensheng Deng, Davis Yohanes Arifin, Mak Ye Chyn, Chi-Hwa Wang, *Taylor vortex flow in presence of internal baffles*, *Chemical Engineering Science* 65 (2010) 4598-4605.

G. I. Taylor, *Stability of a Viscous Liquid Contained between Two Rotating Cylinder*, *Mathematica, Physical & Engineering Sciences*, 223 (1923) 289-343.

J. Kaye, E. C. Elgar, *Modes of adiabatic and diabatic fluid flow in an annulus with an inner rotating cylinder*, *Trans ASME*, vol. 80 (1958) 753-765.

P.R.Fenstermacher, H.L.Swinney & J.P. Gollub, *Dynamical instabilities and the transition to chaotic Taylor vortex flow*, *J. Fluid Mech.* Vol. 94 (1979), part 1, pp. 103-128.

J. Rigopoulos, J. Sheridan & M. C. Thompson, *State selection in Taylor-vortexflow reached with an accelerated inner cylinder*, *J. Fluid Mech.* Vol. 489 (2003), pp. 79-99.

Sangho Lee and Richard M. Lueptow, *Rotating Reverse Osmosis System Based on Taylor-Couette Flow*, *12th International Couette-Taylor Workshop*, september 6-8, 2001.

*Takashi Ogihara and Mamoru Nomura, Continuous Synthesis of Monodispersed Alumina Particles by the Hydrolysis of Metal Alkoxide Using a Taylor Vortex, KONA Editorial Committee, 2002.*

*Sandesh S. Deshmukh, Jyeshtharaj B. Joshi and Sudhir B. Koganti, Flow Visualization and Three-Dimensional CFD Simulation of the Annular Region of an Annular Centrifugal Extractor, Ind. Eng. Chem. Res. Vol. 47 (2008) 3677-3686.*

*Guillermo A. Ameer et al., Ex vivo evaluation of a Taylor-Couette flow, immobilized heparinase I device for clinical application, Proc. Natl. Acad. Sci. Vol. 96 (1999) pp. 2350-2355. Medical Sciences.*