VNIVERSIDAD NACIONAL AVFNOMA DE MEXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

PROGRAMA DE MAESTRIA Y DOCTORADO EN INGENIERIA

FACULTAD DE INGENIERIA

TEORIA DE DECISIONES Y APLICACIONES

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERIA

ING. DE SISTEMAS – INVESTIGACION DE OPERACIONES

P R E S E N T A :

EDUARDO GUTIERREZ GONZALEZ

TUTOR:
JOSE DE JESUS ACOSTA FLORES

INGENIERIA

2007

JURADO ASIGNADO:

Presidente: **Dr. Guillen Burguete Servio Tulio**

Secretario: **Dra. Mayra Elizondo Cortes**

Vocal: **Dr. Acosta Flores José De Jesús**

1er. Suplente: **Dra. Flores De La Mota Idalia**

2do. Suplente: **M.I. Téllez Sánchez Rubén**

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: **México D.F.**

TUTOR DE TESIS:

JOSE DE JESUS ACOSTA FLORES

Agradecimientos

A la UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO y a la FACULTAD DE INGENIERÍA por el apoyo económico brindado para la realización de mis estudios de Maestría en Ingeniería.

Al Consejo particular integrado por **Dr. Acosta Flores José De Jesús, Dr. Guillen Burguete Servio Tulio**, **Dra. Mayra Elizondo Cortes, Dra. Flores De La Mota Idalia** y **M.I. Téllez Sánchez Rubén**, además de los profesores que me impartieron cátedra durante mis estudios de maestría, por el trabajo y el tiempo dedicado a mi formación y el desarrollo de esta tesis.

Contenido

Introducción

El presente trabajo corresponde a un interés profesional sobre la Teoría de decisiones y su aplicación docente en Ingeniería de Sistemas en el campo disciplinario de Investigación de Operaciones.

Durante el desarrollo el desarrollo de la Maestría hemos comprobado que la literatura existente en el idioma español sobre el tema de Teoría de Decisiones es muy escasa, por tal razón el trabajo que presentamos pretende ayudar a los interesados en el desarrollo y aplicaciones de la teoría de decisiones.

Para tal efecto en el trabajo se muestra con detalle el uso de los Árboles de decisión y una metodología que nos sirve para resolver problemas de decisiones bajo incertidumbre en los que se puede utilizar un árbol de decisión. Además, se muestran con detalle las demostraciones de los resultados teóricos básicos para la existencia y unicidad de las funciones de valor y utilidad. A parte de lo anterior se desarrolla en forma detallada las funciones de utilidad para las diferentes situaciones de la prima de riesgo, obteniendo de esta forma, un repertorio de funciones de utilidad, lista a utilizarse en un problema particular.

OBJETIVOS

- Proponer una secuencia de pasos para resolver problemas con incertidumbre en los que se cuente con información cronológica, la solución que se busca está basada en los árboles de decisión.
- Construir paralelamente un desarrollo teórico sobre las preferencias en las funciones de valor y utilidad con algunas de sus aplicaciones. Con respecto a las aplicaciones en la mayoría de ellas tratamos de enfocarlas a situaciones de decisión de tipo administrativo y económico, pero como se apreciará fácilmente se pueden generalizar a otras situaciones.
- Elaborar un listado de funciones de utilidad para cada una de las situaciones que se pueden presentar al calcular la prima de riesgo. También proponemos una secuencia de pasos para poder determinar la función de utilidad en un problema de decisiones.
- Proponer una secuencia de pasos para resolver problemas con uno y varios objetivos.

Prefacio

La importancia de este trabajo radica en que damos la construcción teórica de las funciones de valor y las de utilidad, probando en cada caso su existencia y unicidad. Mostrando un ejemplo de cada uno de los diferentes tipos de funciones de utilidad que pueden presentarse ante situaciones de riesgo, y según se trate del tipo de decisor, con aversión, propensión o neutralidad al riesgo. Con base en ejemplos mostramos una metodología para determinar, en un problema particular, una función de utilidad que corresponda a las preferencias del decisor según la lotería construida para el problema y la prima de riesgo correspondiente.

Otro punto que es relevante en el trabajo consiste en que la mayoría o casi todas las demostraciones de los resultados que se realizan en el trabajo no son copias de ningún otro trabajo o texto, ya que fueron realizadas de forma independiente e incluso algunas de ellas no estaban hechas o eran ejercicios en la bibliografía revisada. De tal manera que el material queda disponible a los compañeros de la maestría para que puedan consultar sus demostraciones.

ESTRUCTURA DEL TRABAJO

Esta Tesis se divide en 5 capítulos, en los cuales se dan bases teóricas para justificar la validez de las aplicaciones que revisamos paralelamente a la Teoría.

En el capítulo 1 se hace un estudio sobre los árboles de decisiones, una herramienta sencilla pero poderosa para resolver problemas de decisión bajo incertidumbre en los que se tenga una secuencia cronológica de resultados.

El capítulo 2 es de carácter teórico, y damos inicio a la construcción axiomática de las relaciones de preferencia de orden débil y se revisan los resultados más importantes para poder ampliar el estudio a relaciones estrictas y de indiferencia. Esto con el objetivo que en las aplicaciones el decisor tenga contemplados los axiomas que deben cumplir sus reglas de preferencia establecidas, para aplicarse al conjunto de alternativas que él mismo establezca. Posteriormente se revisa la parte teórica de la existencia y unicidad de las funciones de valor, que serán fundamentales para la justificación de las funciones de utilidad, funciones que revisaremos en los capítulos posteriores.

El capítulo 3 es prácticamente una prolongación teórica del dos, pero a las loterías y funciones de utilidad para un atributo. Se revisan las bases axiomáticas para la justificación del uso de loterías en Teoría de decisiones, aplicadas a un conjunto de premios. Se verá que el uso de las loterías es de fundamental importancia en algunas aplicaciones, cuando se construya la función de utilidad. Pero antes de iniciar con el estudio de las funciones de utilidad, se revisan algunos conceptos básicos en las aplicaciones de las funciones de utilidad, como son precio de venta, precio de compra, valor esperado de la información perfecta, etc. Similarmente al Capítulo 2, el tres continúa con la justificación teórica de la existencia, unicidad y construcción de funciones de utilidad para un objetivo.

El capítulo cuatro es una continuación del 3, pero para dos o más objetivos. Es decir, veremos la construcción de las funciones de utilidad en dos o más objetivos y las complicaciones que resultan en las aplicaciones de las funciones de utilidad en estos casos. Razón por la que se requiere agregar algunos supuestos sobre las funciones de utilidad, como son independencia en utilidad e independencia aditiva, para relajar el problema y sea factible su solución.

En el Capítulo cinco se revisan algunas aplicaciones sobre preferencias en el tiempo. Es decir, se investiga sobre el VPN (valor presente neto) la TIR y los factores que en ellas intervienen.

En las conclusiones veremos la importancia del uso adecuado de la teoría de decisiones, mostraremos por medio de algunas paradojas y problemas particulares las incongruencias a las que puede llegar un decisor, si en su decisión no contempla la racionalidad de un sistema axiomático, como los propuestos en el desarrollo del trabajo.

RESUMEN

En este trabajo se estudia la construcción teórica que justifica el accionar de las relaciones de preferencias de un decisor. Proponemos una metodología en cada parte fundamental del estudio de la teoría de decisiones que nos facilite, de forma más clara y simple, la solución de un problema en esta área.

El trabajo está dividido en tres líneas, la primera de ellas se refiere a los árboles de decisión. En donde, se muestran las etapas de solución de los diagramas de árbol de decisiones. Para esto planteamos 3 ejemplos que ilustran el uso de las etapas de solución.

La segunda y más extensa de las líneas se refiere a las funciones de valor a las que agregamos incertidumbre, obteniendo las loterías y funciones de utilidad. Esta parte lleva el mayor peso del trabajo porque se habla y demuestran los principales resultados teóricos relacionados con dichas funciones. Para esto se plantea un sistema axiomático basada en las relaciones, inicialmente son las binarias y se extienden a más dimensiones, y que sustente la construcción de las funciones de valor que serán la base para las funciones de utilidad. Funciones que tienen una importancia relevante en las aplicaciones de la Teoría de decisiones, ya que nos sirven para modelar las preferencias de un decisor, si tiene aversión, propensión o neutralidad al riesgo. Para esto último hablamos de los conceptos de equivalencia bajo certeza, precio de compra, prima de riesgo y valor de la información perfecta, mismos que utilizamos con algunos ejemplos para su comprensión del tipo de decisor. Además, de lo anterior se desarrolla en forma detallada las funciones de utilidad para las diferentes situaciones de la prima de riesgo, obteniendo de esta forma, un repertorio de funciones de utilidad, lista a utilizarse en un problema particular.

Finalmente, pasamos a la tercera y última línea del trabajo en donde hablamos sobre otro tipo de problemas de Teoría de decisiones en donde se tienen preferencias en el tiempo y que resultan con frecuencia en los problemas económicos.

ABSTRACT

In this work the theoretical construction is studied which justifies working of the relationships of preferences of a decisor. We propose a methodology in each fundamental part of the study of the theory of decisions that facilitates us, in a clearer and simpler way, the solution of a problem in this area.

This work is divided in three lines; the first of them refers to the trees of decision. Where, the stages of solution of the diagrams of tree of decisions are shown. For this we outline 3 examples that illustrate the use of the solution stages.

The second and more extensive of the lines refers to the functions of value to those that add uncertainty, obtaining the lotteries and functions of utility. This part takes the biggest weight in the work because one speaks and they demonstrate the main theoretical results related with this functions. For this I think an axiomatic system based on the relationships, initially they are the binary ones and they extend to more dimensions, and that it sustains the construction of the functions of value that and they will be the base for the functions of utility. They have an excellent importance in the applications of the Theory of decisions, since they are good us to model the preferences of who takes a decision, if he has aversion, propensity or neutrality to the risk. For this last we speak of the equivalence concepts I lower certainty, purchase price, risk premium and value of the perfect, same information that we use with some examples for their understanding of the decisor type. Also, of the above-mentioned it is developed in detailed form the functions of utility for the risk premium different situations, obtaining this way, a repertoire of functions of utility, lists to be used in a particular problem.

Finally, we pass to the third and last line of the work where we talk about another type of problems of Theory of decisions where preferences are had in the time and that they are frequently in the economic problems.

Capítulo 1

ESTRUCTURA DE UN PROBLEMA DE DECISIONES CON USO DE LOS ÁRBOLES DE DECISIÓN

En el capítulo inicial del trabajo veremos una herramienta sencilla, pero muy poderosa de la Teoría de decisiones, nos referimos a los árboles de decisión, con los cuales mostraremos la forma de resolver un problema de decisiones bajo incertidumbre cuando el decisor cuenta con información cronológica.

El Capítulo comienza con una introducción a los árboles de decisión, su construcción, componentes y estructura. Posteriormente, se plantean los pasos a seguir por el decisor para llevar a cabo una solución completa de los problemas de decisión bajo incertidumbre basados en los árboles de decisión.

El Capítulo continúa con tres ejemplos que ilustren la secuencia de solución de los problemas con árboles de decisión. Se plantean situaciones en donde el decisor puede o no llevar a cabo un estudio preliminar sobre el problema.

Finalmente para la solución de los árboles de decisión utilizamos el software **Precision tree for Excel**, el cual se puede bajar gratuitamente de la página http://www.palisade.com.

Para la redacción del capítulo se consultó la bibliografía [1], [3], [4], [5] y [9].

1.1 ÁRBOLES DE DECISIÓN

Como se sabe del estudio de las probabilidades un diagrama de árbol es una herramienta útil para ilustrar cómo resolver problemas de probabilidades en varias etapas, sobre todo hace fácil la aplicación del Teorema de bayes, mismo que sin los diagramas de árbol de probabilidades puede resultar un poco complejo.

El árbol de decisión es simplemente un diagrama del problema real que tiene el decisor. El análisis del árbol de decisiones le permite al decisor identificar la mejor acción inicial, así como las mejores acciones subsecuentes.

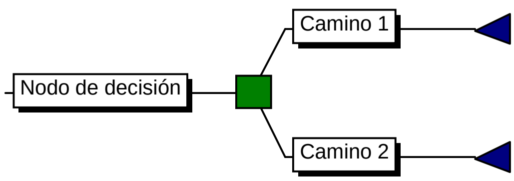
El árbol de decisión se construye de izquierda a derecha y su lectura es de derecha a izquierda, identificando los puntos de decisión y los eventos, anotando en el diagrama los valores de la incertidumbre de los eventos y sus pagos o costos correspondientes. Una parte importante de los diagramas de árboles de decisiones consiste en la presentación de una manera fácil de la trayectoria histórica para cada una de las alternativas que tiene el decisor.

Los rasgos principales del árbol de decisiones son los puntos de ramificación y cada punto designa la selección de acciones, una de las cuales debe ser elegida por el decisor, o un grupo de resultados con incertidumbre, uno de los cuales ocurrirá.

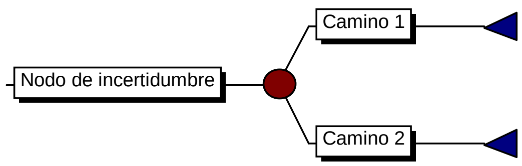
Finalmente, podemos decir que las reglas establecidas en teoría de decisiones para los nodos es la siguiente. Los nodos de decisión se representan por cuadrados mientras que los nodos de incertidumbre, son representados por círculos. Cabe aclarar que en general no existen reglas estrictas para la construcción de un árbol de decisiones. El único requisito es que el árbol describa el problema perfectamente, con **todas sus actividades ordenadas cronológicamente**.

1.1.1 COMPONENTES DE UN ÁRBOL DE DECISIONES

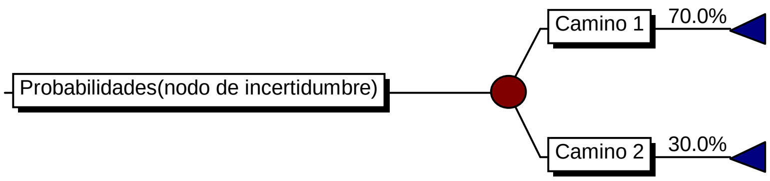
- **Alternativas de decisión o acciones en cada punto de decisión**. A estos nodos también se les conoce como nodos de decisión y se representan en el árbol mediante un cuadrado.



- **Eventos que pueden presentarse ante una acción o alternativa de decisión**. A estos nodos también se les conoce como nodos de incertidumbre y se representan en el árbol mediante un círculo. Cada nodo de incertidumbre, tiene la característica de que todos sus eventos deben ser exhaustivos.

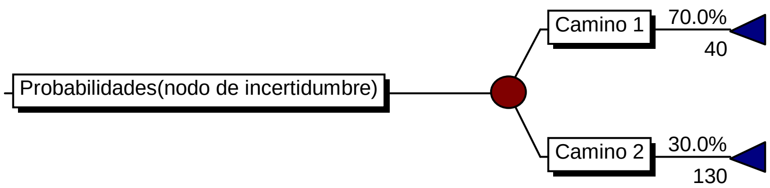


- **Probabilidades de los eventos que resulten de las decisiones**. Aparecen sólo en los nodos de incertidumbre y cabe recordar que su suma siempre debe ser igual a 1.

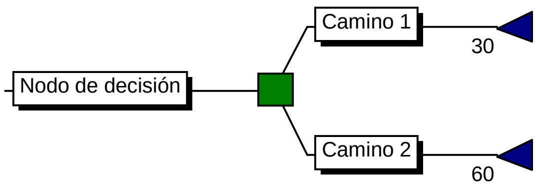


- **Los resultados de las combinaciones alternativas de decisión-evento**. A éstos también se les suele llamar consecuencias. Pueden aparecer tanto, en los nodos de incertidumbre, como en los de decisión.

Consecuencias en un nodo de incertidumbre:



Consecuencias en un nodo de decisión:



1.2 SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA CON AYUDA DE ÁRBOLES DE DECISIÓN

En teoría de decisiones al utilizar los árboles de decisión se puede estructurar la solución mediante las siguientes etapas.

Etapa 1.

Construcción de un árbol de decisiones.

- Se determinan las acciones de los nodos de decisión, en donde se hacen Hipótesis simplificatorias y se determina un horizonte de planeación.
- Se determinan los eventos y sus nodos de incertidumbre.

Etapa 2.

Evaluación de los impactos (cálculo de consecuencias) **y las probabilidades**.

Etapa 3.

Establecer un **criterio de decisión** (generalmente se usa el criterio de valor esperado, máximo para pagos y mínimo para costos).

Etapa 4.

Identificación de las estrategias de solución. Se obtienen al resolver el árbol de decisiones y analizar las diferentes alternativas que se pueden tener en el árbol final.

Ahora vamos a ejemplificar la metodología con tres ejemplos.

Ejemplo 1

Una empresa que produce cierto artículo tuvo ganancias este año de 150 millones, el administrador de la empresa quiere aumentar las ganancias con la introducción de un nuevo artículo similar al anterior. Para esto él puede contratar una consultora que hace estudios de mercado, la cual le cobra 20 millones, los resultados posibles de la demanda son: alta (*a*), regular (*r*) y baja (*b*). Con base en el historial de la consultora se tiene la siguiente tabla de errores en los pronósticos.

Pronóstico / Real	Porciento de desaciertos de la consultora		
	a	*r*	*b*
A	5	5	0
R	2	10	8
B	0	15	15

La tabla se interpreta de la siguiente forma, si la demanda fue alta (*A*) y se pronosticó regular (*r*) la consultora falla en el 5% de los casos. Así, para las demás situaciones.

Si la demanda fue alta y se pronosticó alta, la consultora acierta en el 95% de los casos (falló en el 5%), Si la demanda es regular y se pronosticó regular la consultora acierta en el 90%

(falló en el 10%), de los casos y finalmente si la demanda es baja y se pronosticó baja la consultora acierta en el 85% (falló en el 15%), de los casos.

El administrado ha estimado lo siguiente para los tres tipos de demanda posibles en caso de que se introduzca el artículo nuevo:

Demanda alta (*A*), con $P(A) = 0.3$ y una ganancia de 300 millones.

Demanda regular (*R*), con $P(R) = 0.5$ y una ganancia de 100 millones.

Demanda baja (*B*), con $P(B) = 0.2$ y una ganancia de -100 millones.

¿Cuál será la mejor decisión que pueda tomar el administrador de la empresa?, utilizar el criterio de valor esperado.

Solución

Etapa 1.

Construcción de un árbol de decisiones.

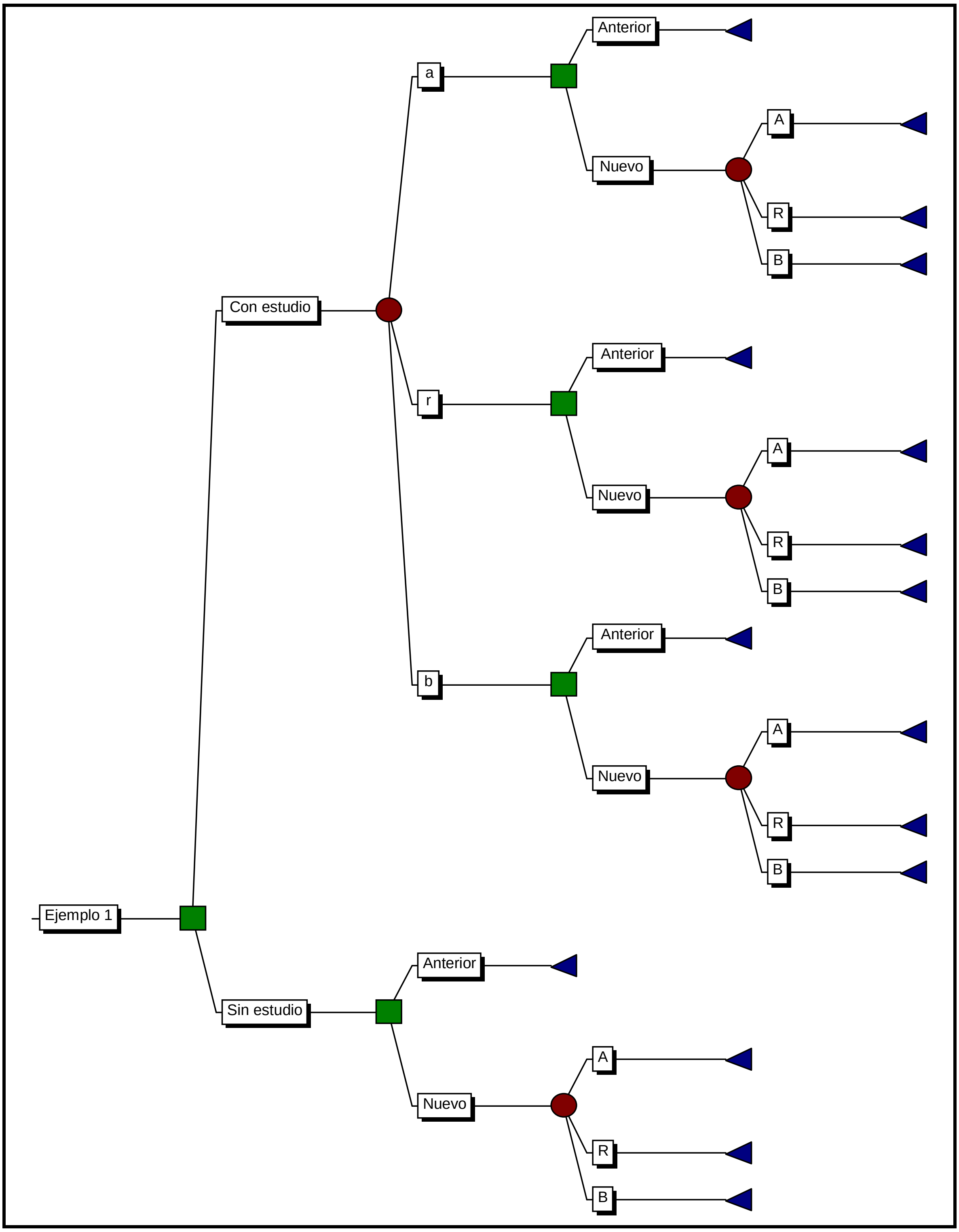
Se inicia con un nodo de decisión, del cual salen dos ramificaciones, para las acciones:

- *hacer un estudio* y
- *no llevar a cabo el estudio*.

Si se lleva a cabo el estudio se pueden pronosticar las demandas *a*, *r* y *b*. En cada caso se elige una acción; quedarse con el artículo anterior o cambiar al nuevo, si se cambia al nuevo pueden ocurrir, con cierta incertidumbre, cualquiera de las demandas *A*, *R* y *B*.

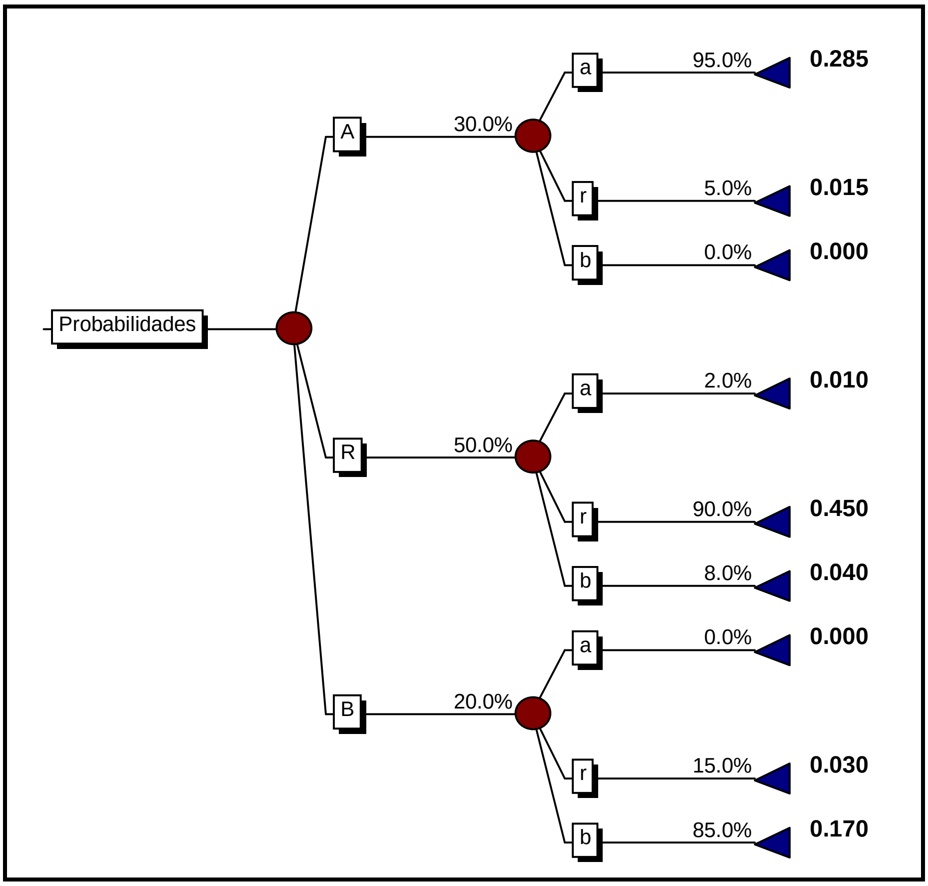
Si no se lleva a cabo el estudio se elige una acción; quedarse con el artículo anterior o cambiar al nuevo, si se cambia al nuevo pueden ocurrir, con cierta incertidumbre, cualquiera de las demandas *A*, *R* y *B*.

Gráficamente el árbol de decisiones se ha hecho en el software **Precision tree for Excel**, y se muestra a continuación.



Etapa 2.

Evaluación de los impactos (cálculo de consecuencias) y las probabilidades. Tenemos que calcular las probabilidades, $P(A \mid a), P(A \mid r), \ldots, P(B \mid b)$, para esto primeramente se requieren las probabilidades de *a*, *r* y *b*. Éstas se pueden calcular con el **árbol de probabilidades, el cual es diferente del árbol de decisiones y se forma sólo con los nodos de incertidumbre, y empleando el Teorema de Bayes**; colocamos los eventos según se conozca la secuencia de ocurrencia de los eventos (no necesariamente es la misma que en el árbol de decisiones), ver árbol siguiente:



Del árbol de probabilidades, se puede observar que

$$P(a) = 0.285 + 0.010 + 0 = 0.295\,.$$

$$P(r) = 0.015 + 0.450 + 0.030 = 0.495\,.$$

$$P(b) = 0 + 0.040 + 0.170 = 0.210\,.$$

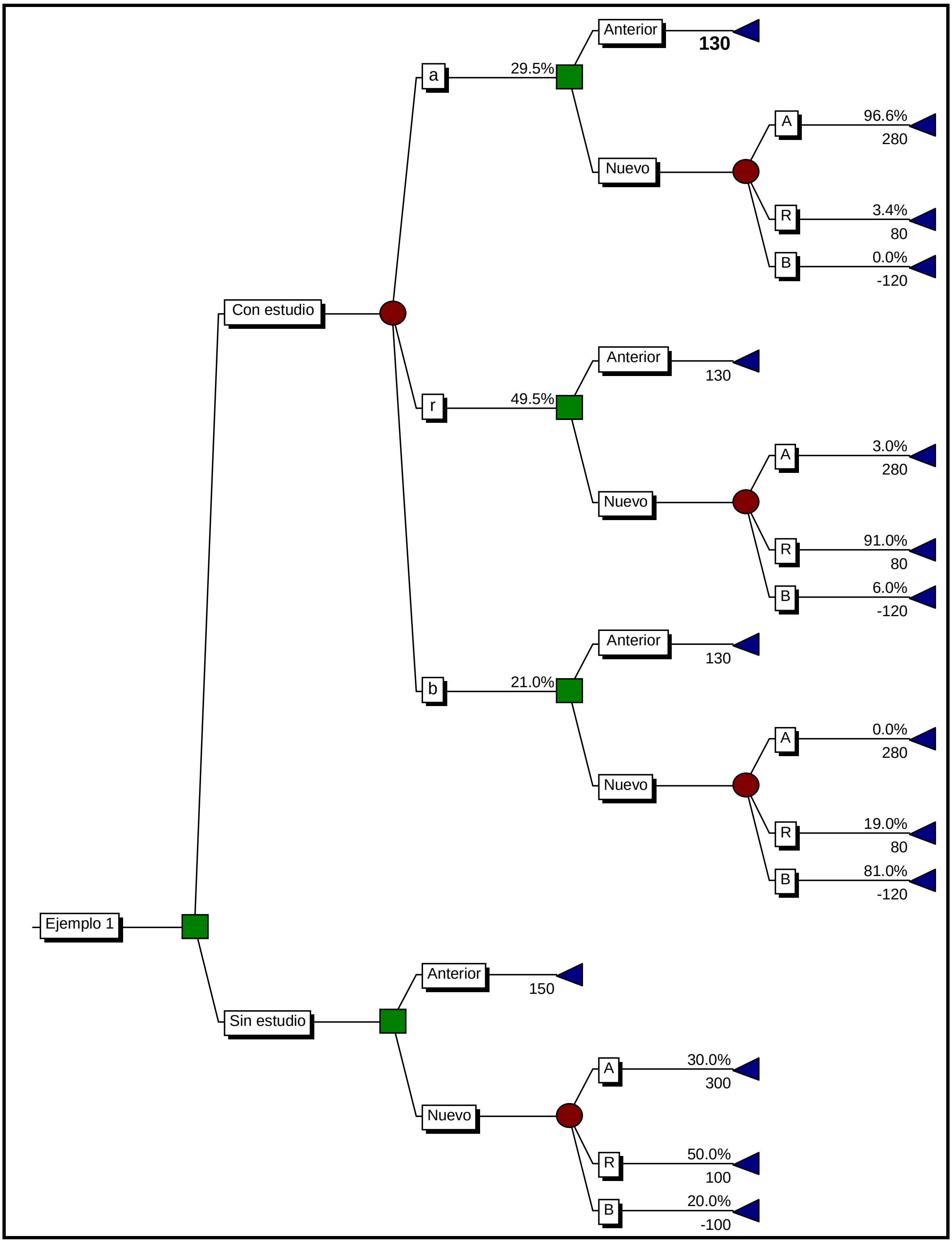
Ahora las probabilidades condicionales

$$P(A\,|\,a) = \frac{0.285}{0.295} = 0.966 \quad P(A\,|\,r) = \frac{0.015}{0.495} = 0.030 \quad P(A\,|\,b) = \frac{0}{0.210} = 0$$

$$P(R\,|\,a) = \frac{0.010}{0.295} = 0.034\,, \quad P(R\,|\,r) = \frac{0.450}{0.495} = 0.909 \text{ y } P(R\,|\,b) = \frac{0.040}{0.210} = 0.190$$

$$P(B\,|\,a) = \frac{0}{0.295} = 0 \quad P(B\,|\,r) = \frac{0.030}{0.495} = 0.061 \quad P(B\,|\,b) = \frac{0.170}{0.210} = 0.810$$

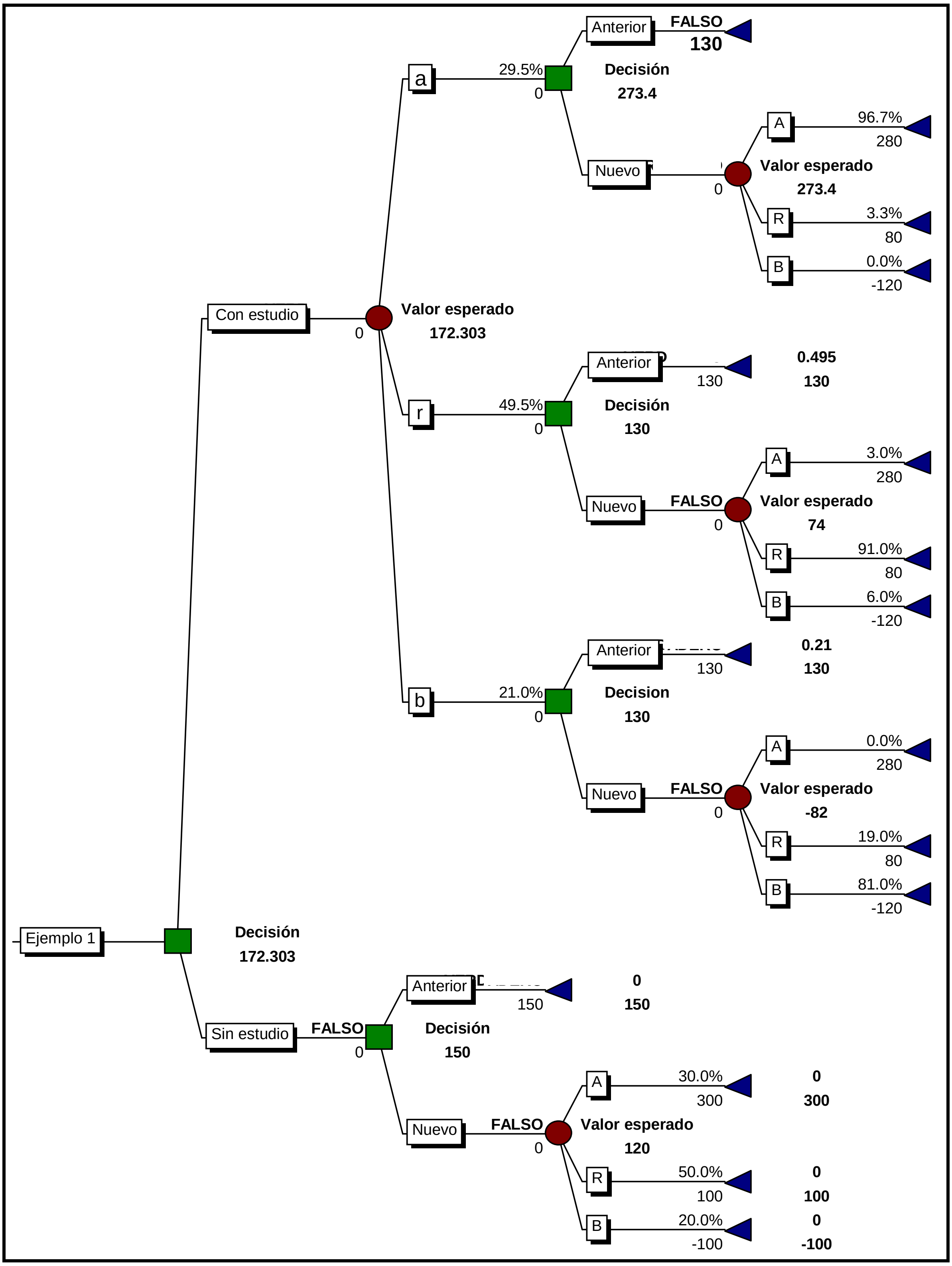
El diagrama de árbol con las probabilidades y sus impactos, se muestra a continuación.



Etapa 3.

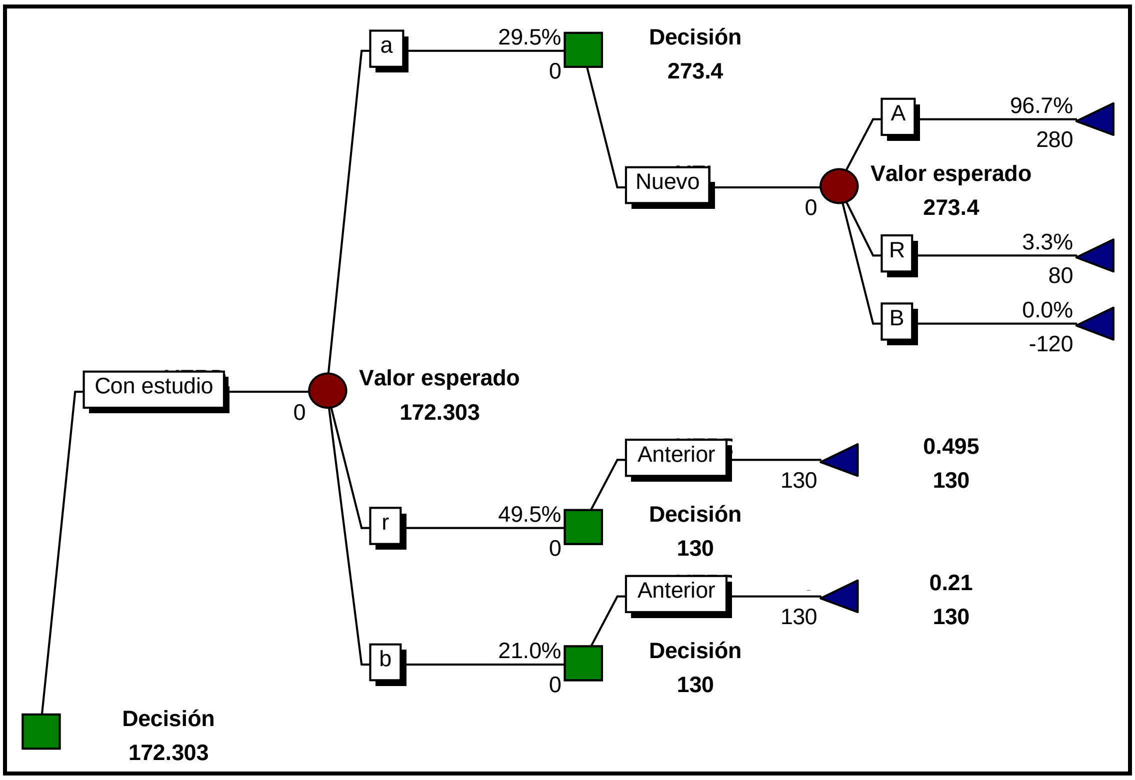
Establecemos un criterio de decisión. Emplearemos el criterio de valor esperado y se elegirá el máximo por tratarse de pagos.

Se calculan los valores esperados en los nodos de incertidumbre y se elige al mayor, similarmente en los nodos de decisión se elige la mayor opción. El árbol obtenido se muestra a continuación.



Etapa 4.

Identificación de las estrategias de solución. Se obtienen al resolver el árbol de decisiones y se analizan las diferentes alternativas que se pueden tener en el árbol final.



La estrategia a seguir sería la siguiente.

Se elige la acción de llevar a cabo un estudio de mercado, de donde puede ocurrir:

- Si el estudio arroja un resultado de demanda alta (*a*), entonces la mejor decisión sería fabricar el nuevo producto.
- Si el estudio arroja un resultado de demanda regular (*r*), entonces la mejor decisión sería quedarse con el producto anterior. Es decir, no fabricar el nuevo producto.
- Si el estudio arroja un resultado de demanda baja (*b*), entonces la mejor decisión sería quedarse con el producto anterior. Es decir, no fabricar el nuevo producto.

Ejemplo 2

Supóngase que Octavio tiene un problema de decisiones el cual consiste en elegir una de dos opciones:

- adquirir una cámara digital nueva con un costo de $5,000
- comprar una cámara digital usada a su amigo Héctor en $4,000.

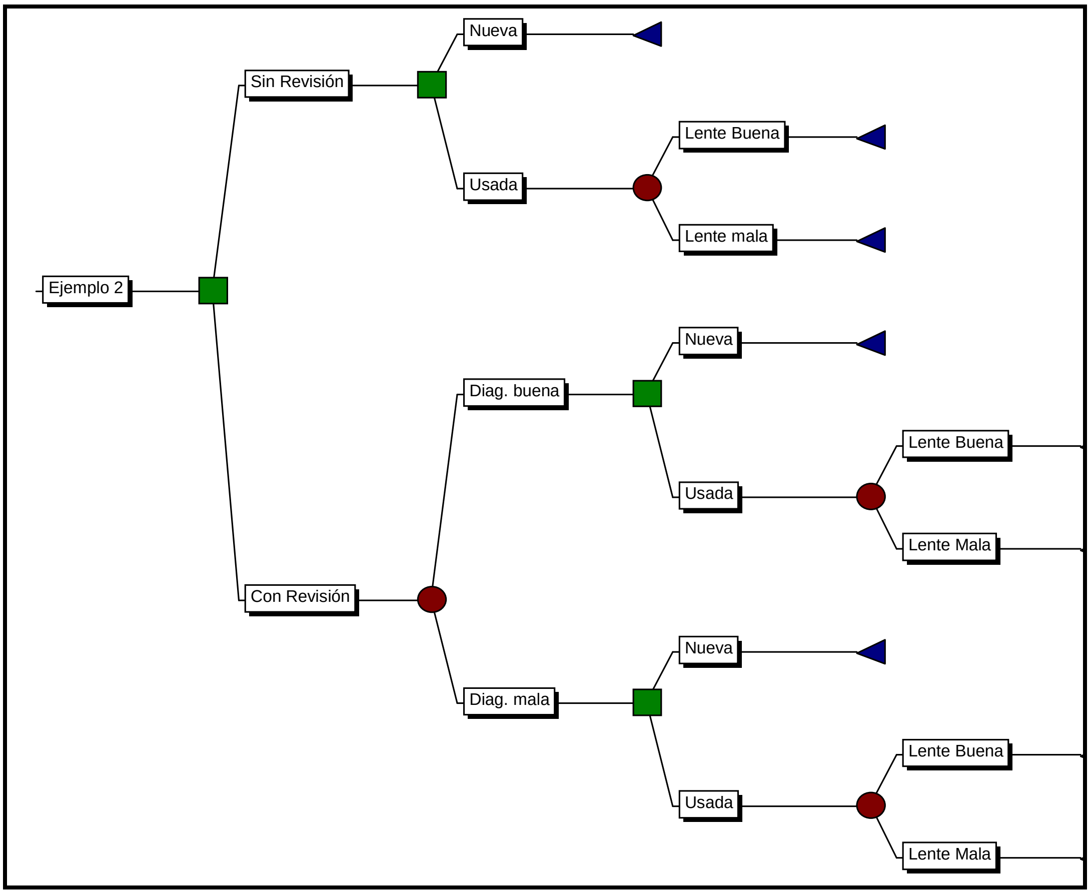
Héctor le permite a Octavio que previamente haga una revisión de la cámara para su evaluación. Octavio conoce a un técnico en cámaras que por la revisión le cobra $300, por experiencia Octavio sabe que el técnico se equivoca en su diagnostico el 10% de las veces, es decir,

- el técnico puede diagnosticar que la cámara está bien cuando en realidad está mal en el 10% de los casos
- el técnico puede diagnosticar que la cámara está mal cuando en realidad está bien en el 10% de los casos.

Por otro lado, por intuición propia Héctor estima que la probabilidad de que la lente salga mala es de 0.30 y que salga buena de 0.70. Finalmente la lente cuesta $1,500. ¿Cuál será la mejor decisión que pueda tomar Octavio?, utilizar el criterio de valor esperado, considerando el precio de la cámara nueva como el costo base en los impactos económicos.

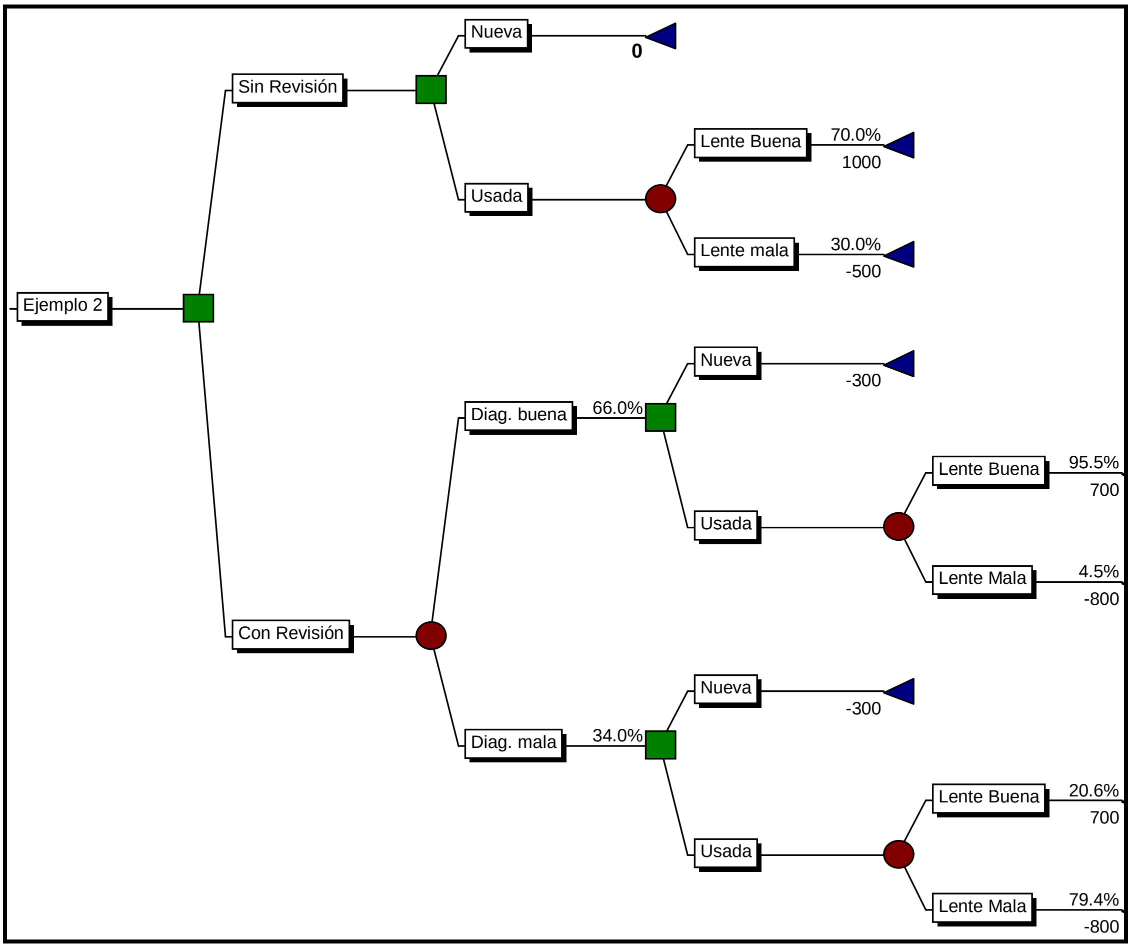
Solución

Etapa 1. Construcción de un árbol de decisiones

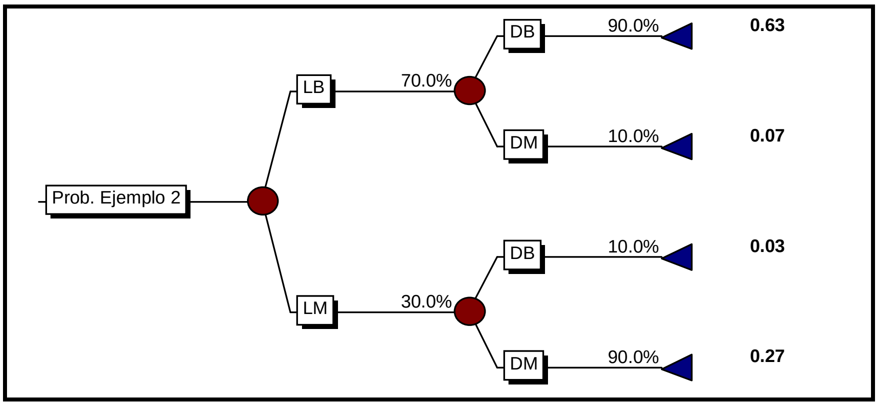


Etapa 2.

Evaluación de los impactos (cálculo de consecuencias) y las probabilidades.



El árbol de probabilidades se forma sólo con los nodos de incertidumbre obteniendo:



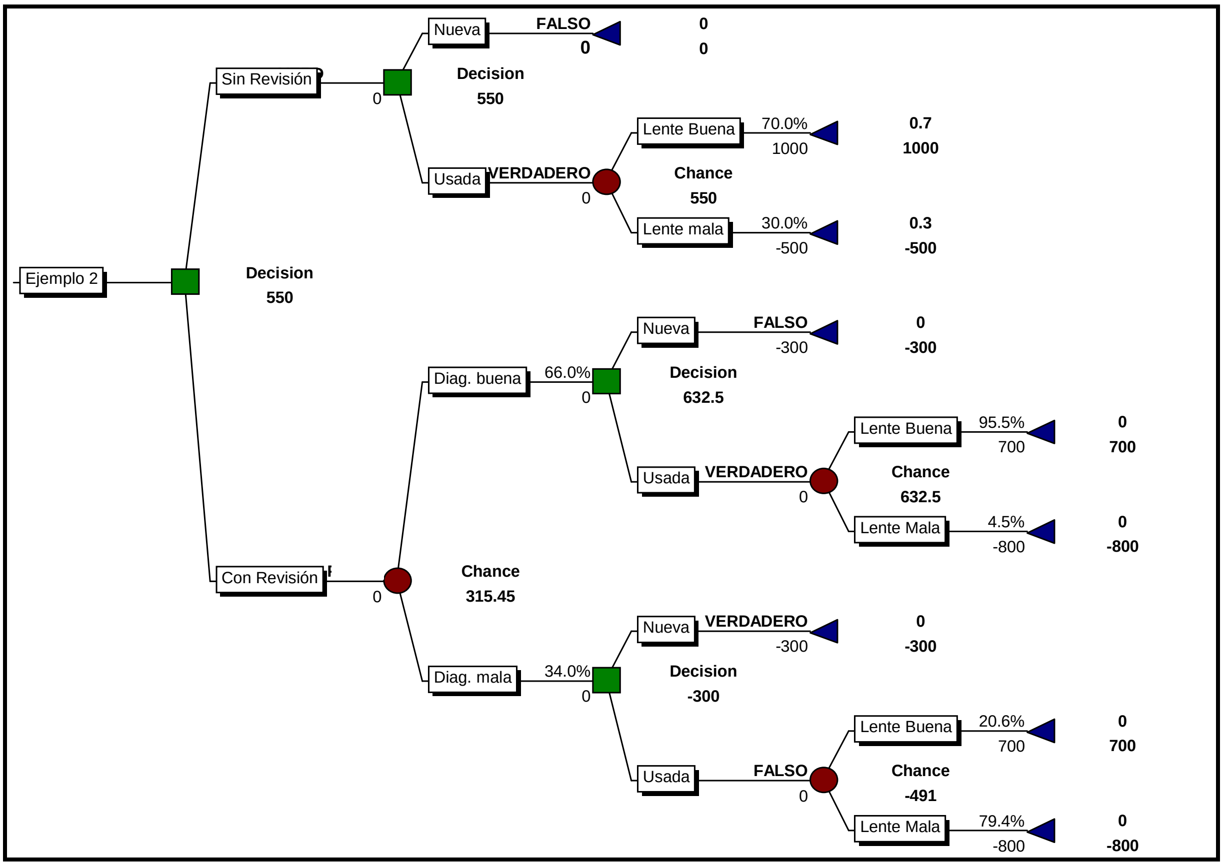
$$P(LB \mid DB) = \frac{0.63}{0.63+0.03} = 0.955, \quad P(LM \mid DB) = 1 - 0.955 = 0.045.$$

$$P(LB \mid DM) = \frac{0.07}{0.07+0.27} = 0.206, \quad P(LM \mid DM) = 1 - 0.206 = 0.794.$$

Etapa 3.

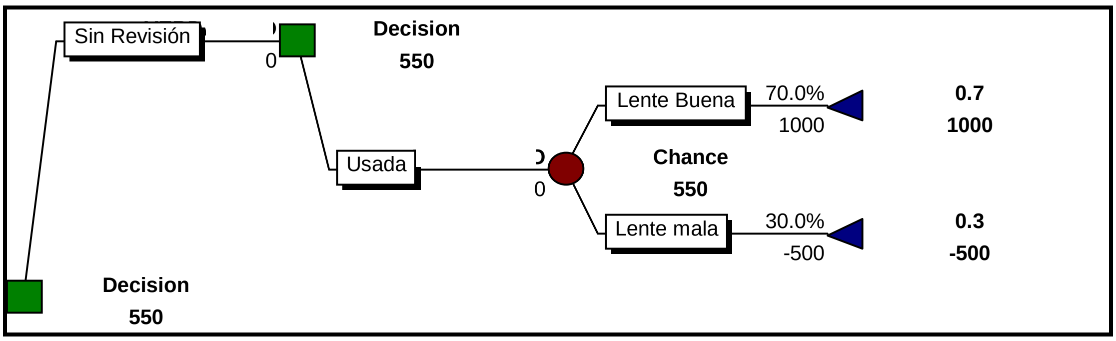
Establecer un criterio de decisión. Emplearemos el criterio de valor esperado y se elegirá el máximo por tratarse de pagos.

Se calculan los valores esperados en los nodos de incertidumbre y se elige al mayor, similarmente en los nodos de decisión se elige la mayor opción. El árbol obtenido se muestra a continuación.



Etapa 4.

Identificación de las estrategias de solución. Se obtienen al resolver el árbol de decisiones y se analizan las diferentes alternativas que se pueden tener en el árbol final.



La estrategia a seguir consiste en comprar la cámara usada sin revisión.

Ejemplo 3

Supóngase que el contador Federico lleva la contabilidad de dos grandes empresas *A* y *B*, y que no recuerda en cuál de ellas ha cometido un error de contabilidad. Federico estima que las probabilidades de haber cometido el error en las empresas A, B son $P(A) = 0.60$ y $P(B) = 0.40$, respectivamente. Además le quedan 2 días para entregar la contabilidad y sólo puede buscar durante el día. Si encuentra el error durante el primer día lo puede corregir y entregar a tiempo, por otro lado, si lo encuentra en el segundo día puede suceder que lo encuentre y lo alcance a corregir o que lo encuentre y no lo alcance a corregir. Si agregamos que las empresas están muy retiradas, de tal forma que en un día sólo puede buscar en una sola empresa. Por otro lado, el contador estima que puede tener los siguientes beneficios:

- Encontrarlo en el primer día y corregirlo con un beneficio de $5,000.
- Encontrarlo en el segundo día y lo alcance a corregir con un beneficio de $5,000.
- Encontrarlo en el segundo día y no lo alcance a corregir con un beneficio de $3,000.
- No encontrarlo en los dos días con un beneficio de -$4,000 (pérdida)

Finalmente el contador estima las probabilidades

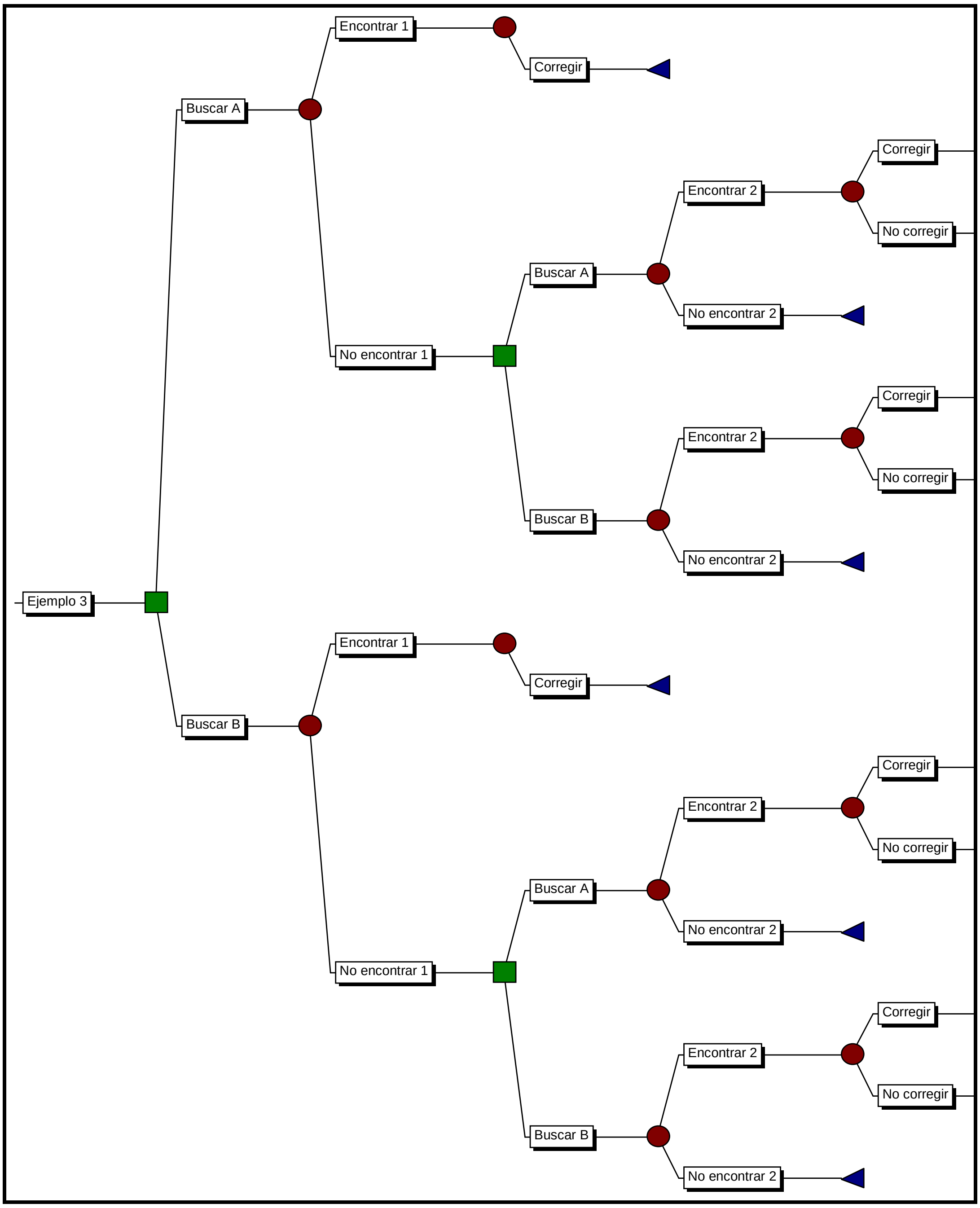
- Probabilidad de encontrar el error en la empresa *A*, cuando buscamos en *A* es 0.30.
- Probabilidad de encontrar el error en la empresa *B*, cuando buscamos en *B* es 0.80.
- La probabilidad de que lo encuentre en el segundo día y lo alcance a corregir es de 0.90.

Encuentra las estrategias de solución.

Solución

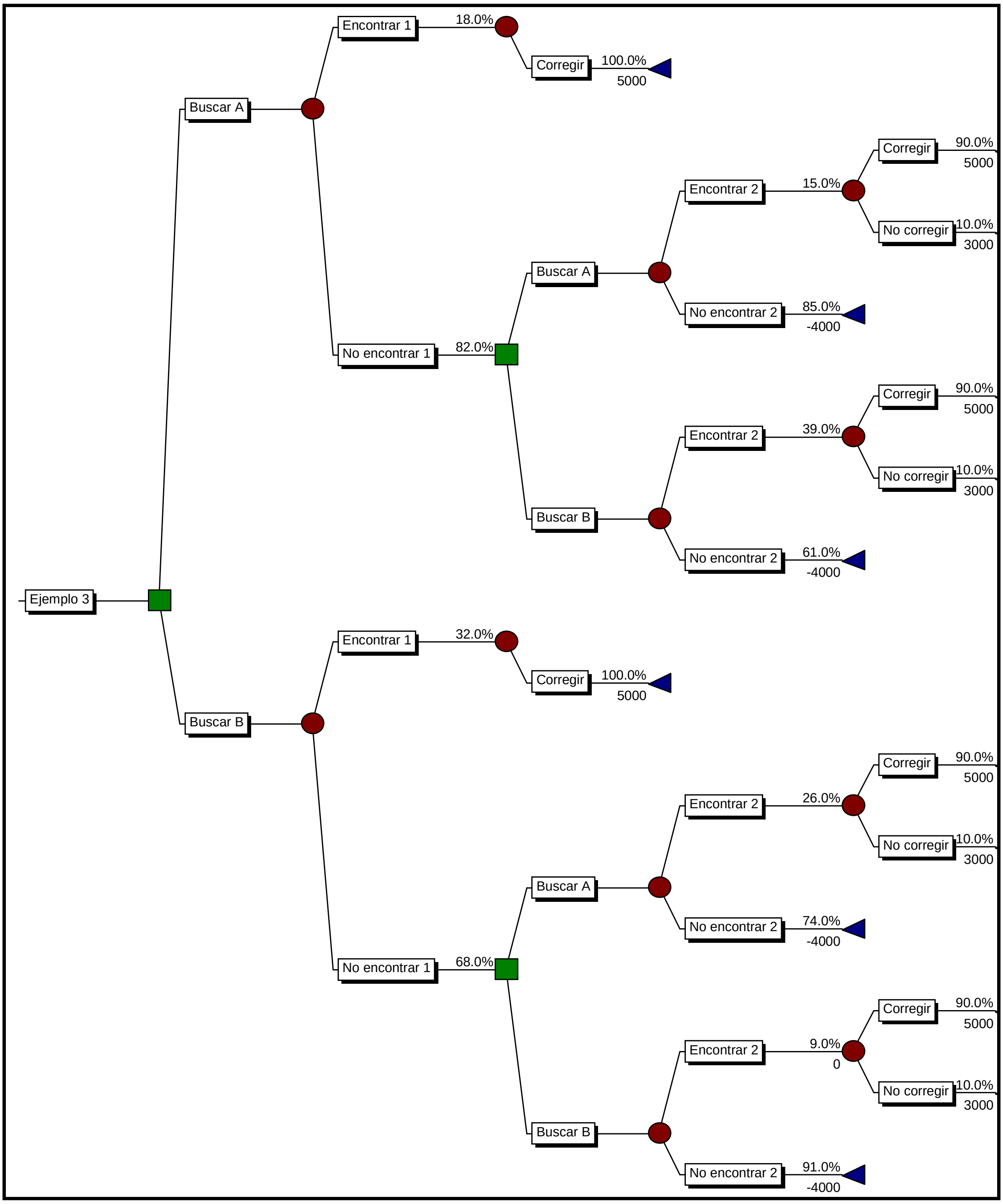
Etapa 1.

Se construirá el árbol de decisiones, iniciando con la búsqueda en la empresa *A* o en la *B*.



Etapa 2.

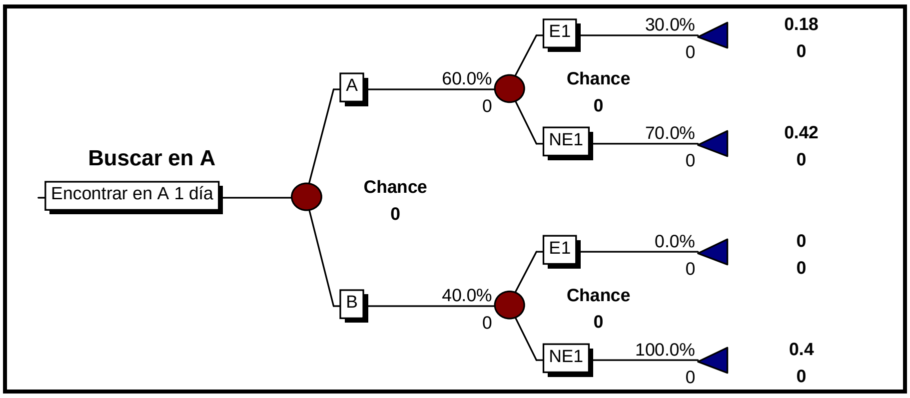
Obtención de las consecuencias y probabilidades



Para el cálculo de probabilidades se tiene que analizar en las diferentes situaciones.

Situación 1A.

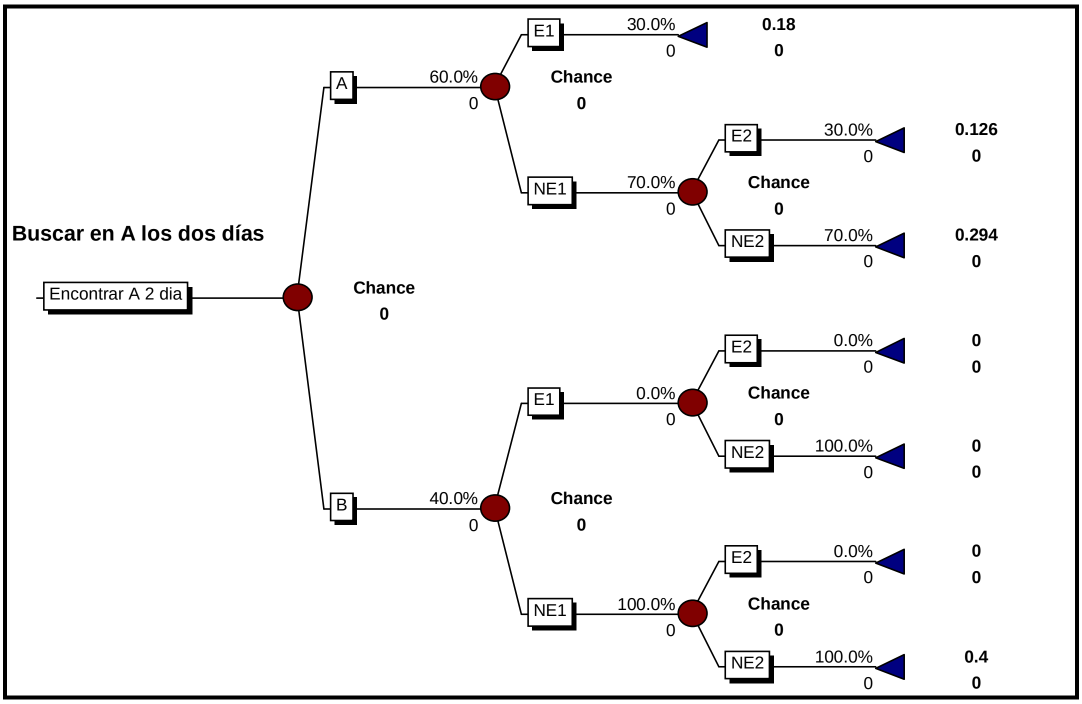
El árbol de probabilidades cuando buscamos en *A* el primer día estará formado de la siguiente manera:



$$P(E_1) = P(A)P(E_1 \mid A) + P(B)P(E_1 \mid B) = 0.60 \times 0.30 + 0.40 \times 0 = 0.18 .$$

Situación 2A.

El árbol de probabilidades cuando buscamos en *A* los dos primeros días será:

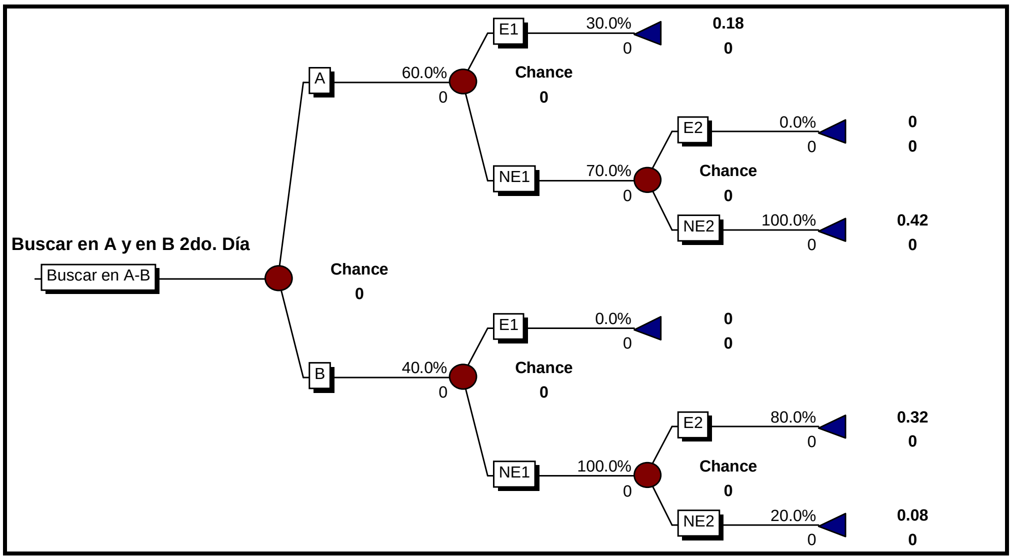


De donde las probabilidades estarán dadas por:

$$P(E_2 \mid NE_1) = \frac{P(E_2 \cap NE_1)}{P(NE_1)} = \frac{0.126}{0.82} = 0.15 .$$

Situación 3A.

El árbol de probabilidades cuando buscamos en *A* el primer día y el segundo día buscamos en *B*

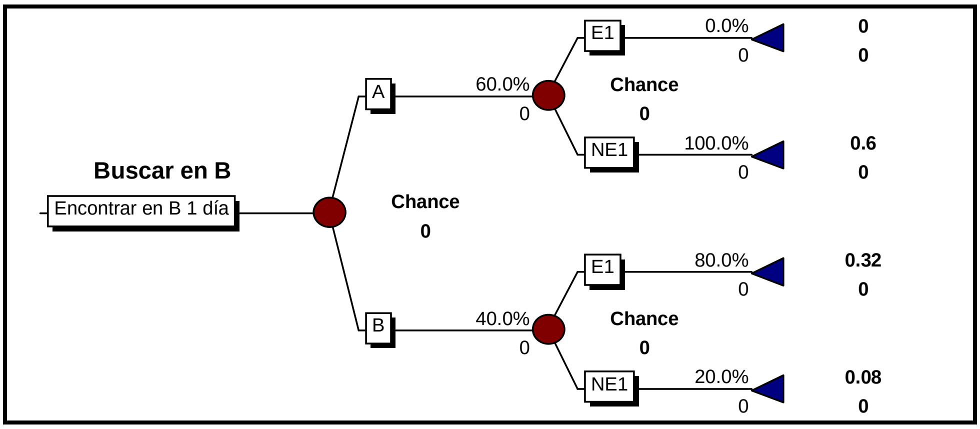


$$P(E_2 \mid NE_1) = \frac{P(E_2 \cap NE_1)}{P(NE_1)} = \frac{0.32}{0.82} = 0.39 .$$

Similarmente para *B*.

Situación 1B.

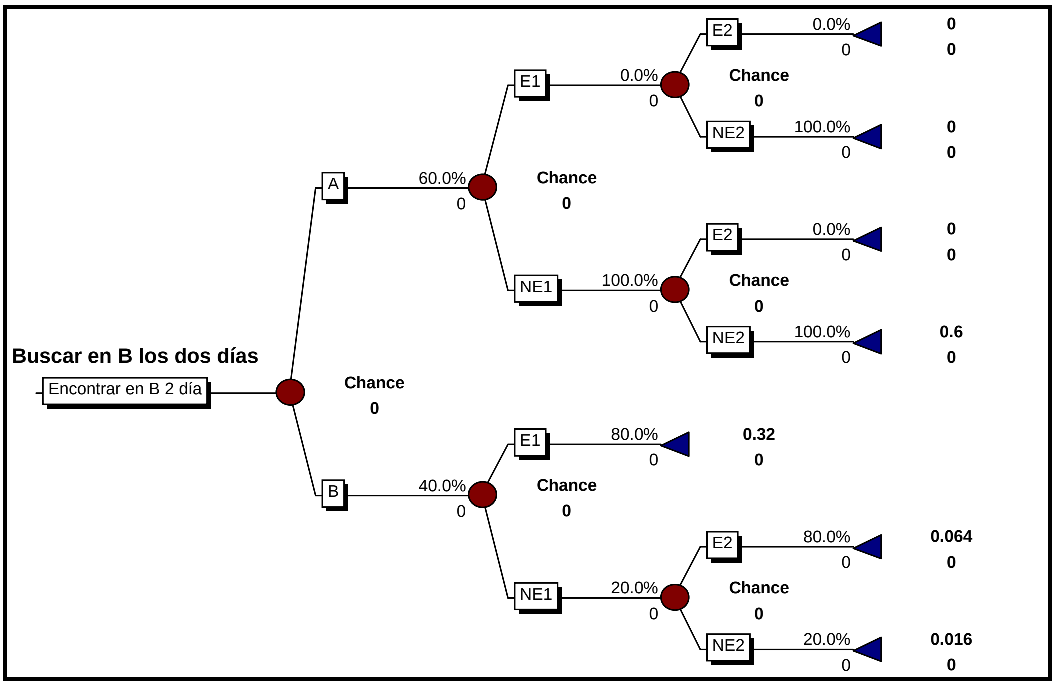
El árbol de probabilidades cuando buscamos en *B* el primer día.



$$P(E_1) = P(A)P(E_1 \mid A) + P(B)P(E_1 \mid B) = 0.60 \times 0 + 0.40 \times 0.8 = 0.32 .$$

Situación 2B.

El árbol de probabilidades cuando buscamos en *B* los dos primeros días estará dado por:

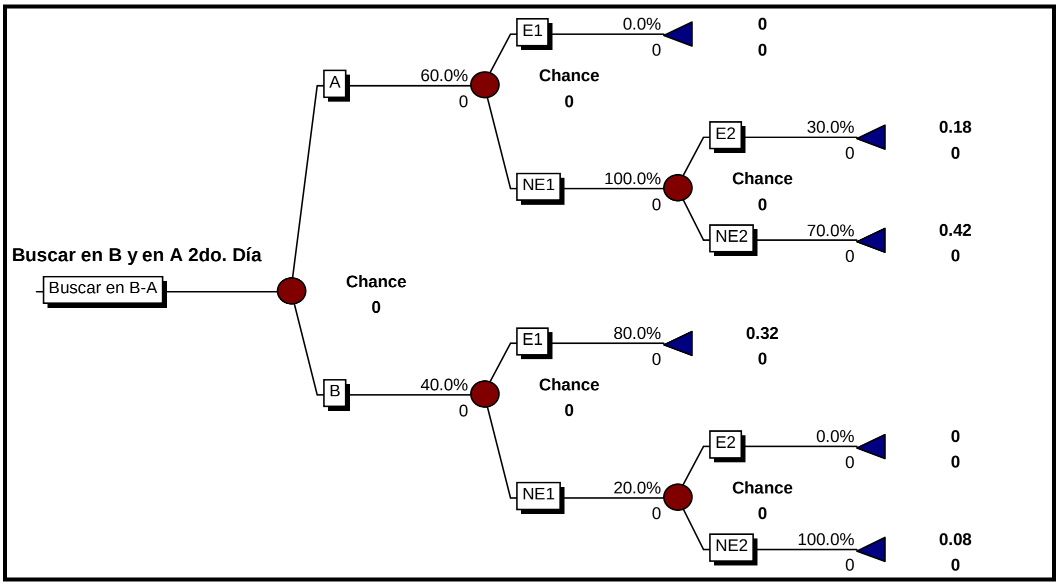


De donde las probabilidades estarán dadas por:

$$P(E_2 \mid NE_1) = \frac{P(E_2 \cap NE_1)}{P(NE_1)} = \frac{0.064}{0.68} = 0.0941.$$

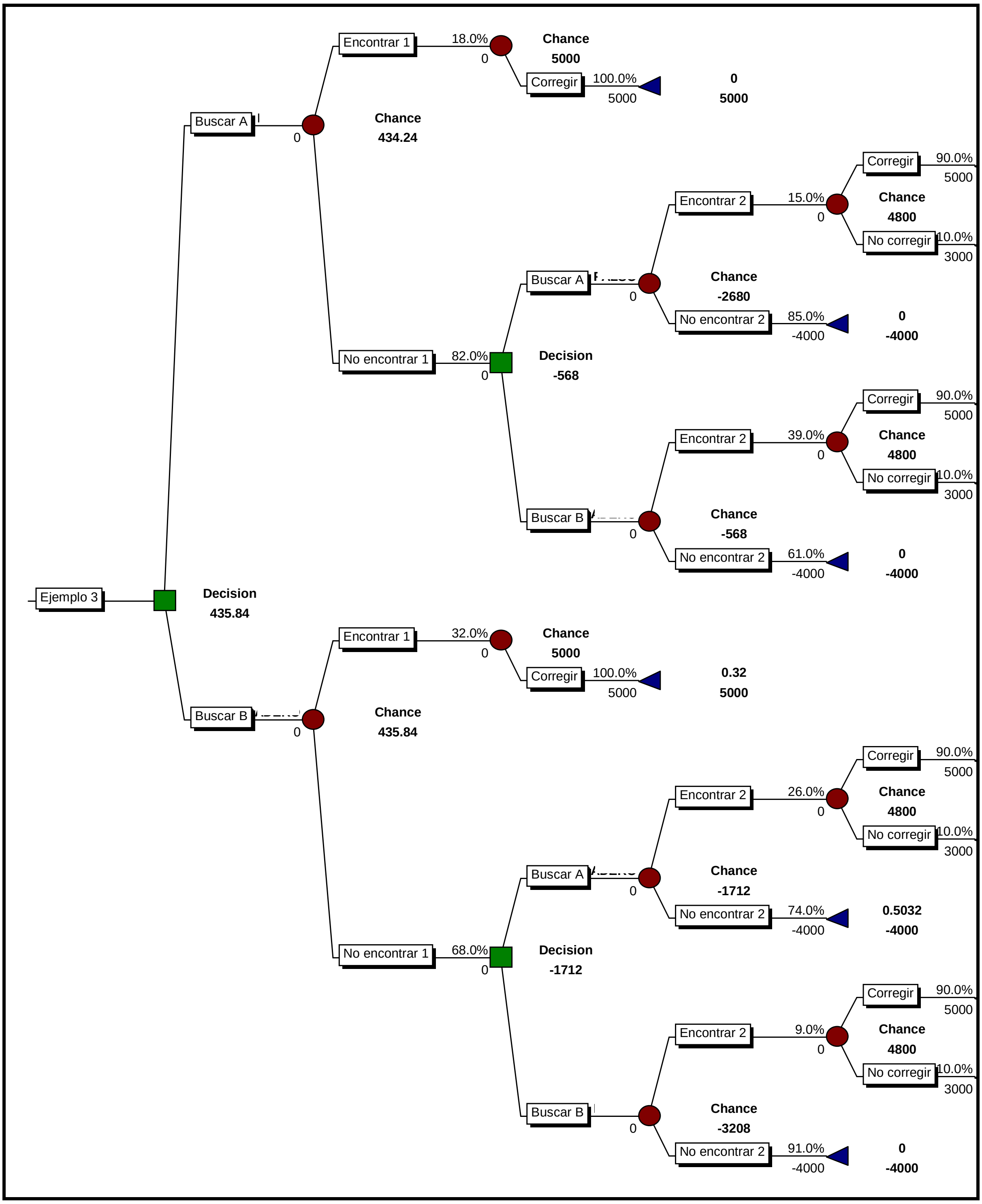
Situación 3B.

El árbol de probabilidades cuando buscamos en *B* el primer día y el segundo día buscamos en *A*.



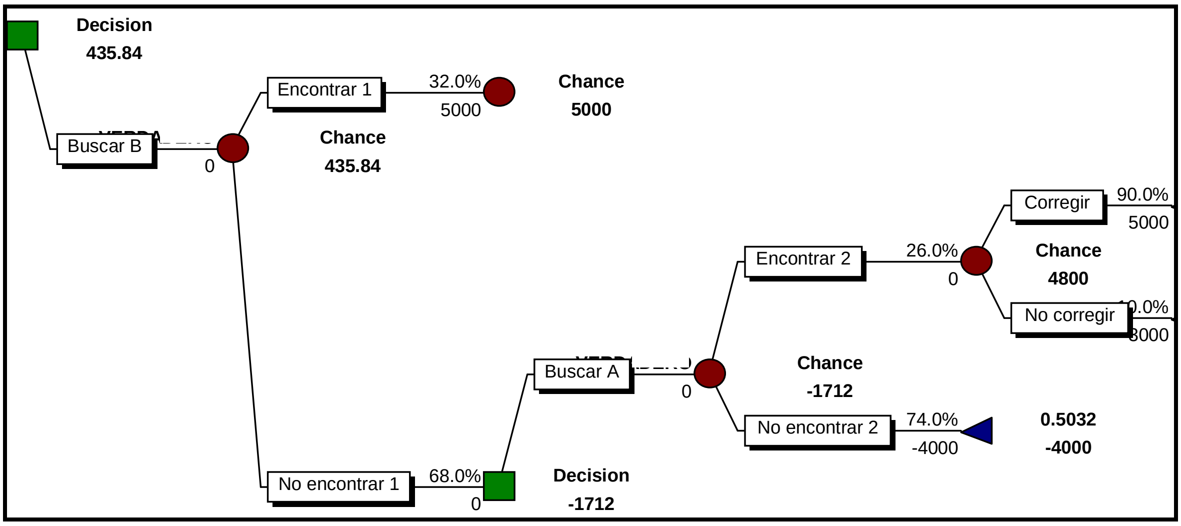
De donde las probabilidades estarán dadas por: $P(E_2 \mid NE_1) = \dfrac{P(E_2 \cap NE_1)}{P(NE_1)} = \dfrac{0.18}{0.68} = 0.2647$.

Etapa 3.
Establecer un criterio de decisión. Emplearemos el criterio de valor esperado y se elegirá el máximo por tratarse de pagos. Se calculan los valores esperados en los nodos de incertidumbre y se elige al mayor, similarmente en los nodos de decisión se elige la mayor opción. El árbol obtenido se muestra a continuación.



Etapa 4.

Identificación de las estrategias de solución. Se obtienen al resolver el árbol de decisiones y se analizan las diferentes alternativas que se pueden tener en el árbol final.



La estrategia a seguir sería la siguiente.

Se elige la acción de buscar en *B*, el primer día:

- Si el error estaba en *B* y se encuentra se termina.
- Si el error no se encuentra en *B* al primer día el segundo día se busca en *A*.

La estrategia encontrado lo que nos dice es que es preferible buscar de inicio en *B* y en caso de no encontrarlo buscar el segundo día en *A*. Al realizar la búsqueda varias veces tendríamos que en promedio tendríamos un beneficio de 435.84 con esta estrategia.

Capítulo 2

PREFERENCIAS DE ORDEN Y FUNCIONES DE VALOR

En el presente Capítulo, iniciaremos la investigación, dando un análisis detallado de la construcción Teórica de las preferencias de orden, basándonos en la relación de orden débil $\succsim$. Para tal efecto, iniciamos con un brevísimo repaso de las relaciones binarias y su clasificación, en relaciones: reflexivas, simétricas, transitivas, equivalencias, antisimétricas y asimétricas. Recordamos las clases de equivalencia, su problema de representatividad y su correspondencia con la partición de un conjunto.

Visto el repaso de relaciones, damos inicio a una relación particular, a la que se le ha dado el nombre de preferencias de orden, para las cuales damos su sistema axiomático en el que se construyen los teoremas que justifican la validez de los resultados a emplearse en las aplicaciones de la Teoría de decisiones a la economía y finanzas.

Posteriormente, revisamos una explicación Teórica que justifica la existencia y unicidad de las funciones de valor que se pueden aplicar al conjunto de alternativas del decisor y con base en ellas las relaciones de orden, entre alternativas, las podremos comparar como relaciones numéricas.

Las funciones de valor, las veremos en su primera etapa para un atributo, posteriormente revisaremos las funciones de valor para el caso de independencia de 2 y más atributos, así como las funciones aditivas.

Para la redacción del capítulo se consultó la bibliografía [1], [4], [6], [8], [11] y [13].

2.1 RELACIONES BINARIAS

En esta sección veremos brevemente las relaciones binarias y una clasificación elemental de éstas, iniciamos con la definición de relación. Sean los conjuntos *A* y *B*, sobre los cuales nos interesa establecer de alguna manera una correspondencia entre sus elementos, hecho que da origen al siguiente concepto matemático.

Definición 1

> Sean los conjuntos *A* y *B,* y $P(x,y)$ un enunciado lógico definido en $A\times B$, se dice que existe una **relación binaria** entre los elementos de los conjuntos *A* y *B*, y ella está determinada por $P(x,y)$.

La relación entre los conjuntos *A* y *B*, la simbolizaremos por $\mathcal{R}$, la cual representará la correspondencia que existe entre estos conjuntos, por medio de su enunciado lógico, y suele denotarse de la siguiente manera:

$$\mathcal{R} = \left(A, B, P(x,y)\right).$$

Cuando los elementos $a\in A$ y $b\in B$ están relacionados, se representan por

$$a\mathcal{R}\, b.$$

2.1.1 CLASIFICACIÓN DE RELACIONES

Existen relaciones entre los elementos de un mismo conjunto que cumplen ciertas propiedades y que son de interés en la Teoría de Decisiones, a continuación se enlistan las más usuales en Teoría de Decisiones.

1 RELACIONES REFLEXIVAS

Sea *A* un conjunto y $P(x,y)$ un enunciado lógico en $A\times A$, entonces $\mathcal{R} = \left(A, A, P(x,y)\right)$, es una relación **reflexiva** si ***para todo*** elemento $a\in A$, *a* está relacionada con ella misma, $a\mathcal{R}\, a$.

2 RELACIONES SIMÉTRICAS

Sea *A* un conjunto y $P(x,y)$ un enunciado lógico en $A\times A$, tendremos que $\mathcal{R} = \left(A, A, P(x,y)\right)$, es una relación **simétrica**, si para los elementos $a,b\in A$, se cumple que

$$\text{cuando } a\mathcal{R}\, b, \text{ entonces } b\mathcal{R}\, a.$$

3 RELACIONES TRANSITIVAS

Sea *A* un conjunto y $P(x,y)$ un enunciado lógico en $A\times A$, tendremos que $\mathcal{R} = \left(A, A, P(x,y)\right)$, es una relación **transitiva**, si para los elementos $a,b,c\in A$, se cumple que

$$\text{si } a\mathcal{R}\, b \ \text{ y } \ b\mathcal{R}\, c, \text{ entonces } \ a\mathcal{R}\, c.$$

Observación

Para algunos ejemplos es más conveniente definir una relación transitiva por medio de su opuesta, esto es cuando una relación ***no es transitiva***.

4 RELACIONES NO TRANSITIVAS

Sea A un conjunto y $P(x,y)$ un enunciado lógico en $A\times A$, tendremos que $\mathcal{R} = \left(A, A, P(x,y)\right)$, es una relación **transitiva**, si para los elementos $a,b,c\in A$, se cumple que

$$a\mathcal{R}\, b \ \text{ y } \ b\mathcal{R}\, c, \text{ pero } \ a \not\mathcal{R}\, c.$$

Nota

De la definición anterior, se deduce que una relación **es transitiva** cuando **no** existen elementos $a,b,c\in A$, para los cuales se cumple que $a\mathcal{R}\, b$ y $b\mathcal{R}\, c$.

5 RELACIONES DE EQUIVALENCIA

Sea A un conjunto y $P(x,y)$ un enunciado lógico en $A\times A$, tendremos que $\mathcal{R} = \left(A, A, P(x,y)\right)$, es una relación de **equivalencia**, si $\mathcal{R}$ es:

a).- ***reflexiva***,

b).- ***simétrica*** y

c).- ***transitiva***.

6 RELACIONES ANTISIMÉTRICAS

Sea A un conjunto y $P(x,y)$ un enunciado lógico en $A\times A$, tendremos que $\mathcal{R} = \left(A, A, P(x,y)\right)$, es una relación **antisimétrica**, si para los elementos $a,b\in A$, se cumple que

$$\text{cuando } a\mathcal{R}\, b \text{ y } b\mathcal{R}\, a, \text{ entonces } \ a = b.$$

Observación

Para algunos ejemplos es más conveniente definir una relación antisimétrica por medio de su opuesta, esto es cuando una relación ***no es antisimétrica***.

7 RELACIONES NO ANTISIMÉTRICAS

Sea A un conjunto y $P(x,y)$ un enunciado lógico en $A\times A$, tendremos que $\mathcal{R} = \left(A, A, P(x,y)\right)$, es una relación **no antisimétrica**, si existen elementos $a,b\in A$, para los cuales se cumple

$$a\mathcal{R}\, b \text{ y } b\mathcal{R}\, a, \text{ pero } \ a \neq b.$$

8 RELACIONES ASIMÉTRICAS

Sea A un conjunto y $P(x,y)$ un enunciado lógico en $A\times A$, tendremos que $\mathcal{R} = (A, A, P(x,y))$, es una relación asimétrica, si existen elementos $a,b\in A$, tales que se cumple

$$a\mathcal{R}\, b \text{ pero } b \not\mathcal{R}\, a.$$

Notas

1.- Es obvio que una relación ***no puede ser*** simétrica y asimétrica al mismo tiempo, aunque **si puede ser** no simétrica y no asimétrica a la vez.

2.- Igualmente debe de estar claro que una relación ***no puede ser*** reflexiva y asimétrica a la vez.

3.- ***Puede ocurrir*** que una relación sea simétrica y antisimétrica a la vez, por ejemplo la relación en $A\times A$, $\mathcal{R} = \{(1,1),(2,2),\ldots,(9,9)\}$, es simétrica y antisimétrica a la vez.

2.1.2 CLASES DE EQUIVALENCIA

Sea A un conjunto y $P(x,y)$ un enunciado lógico en $A\times A$, tal que $\mathcal{R} = (A,A, P(x, y))$, es una relación de equivalencia, llamaremos clase de equivalencia del elemento $a\in A$, al conjunto de todos los elementos de A, que están relacionados con a. Las clases de equivalencia del elemento a, se simbolizan por $[a]$, o por medio de los conjuntos indizados B_a

$$B_a = [a] = \{x\in A \mid a\mathcal{R}\, b\}.$$

A) PROPIEDAD DE LA REPRESENTATIVIDAD DE UNA CLASE DE EQUIVALENCIA

De la definición de clase de equivalencia está claro que surge la interrogante sobre el elemento que represente a la clase, dicha pregunta se puede establecer en el siguiente Lema.

LEMA 1

Una clase de equivalencia, se puede representar por medio de cualquier elemento que pertenezca a dicha clase.

Demostración

▼ Sea A un conjunto y $P(x,y)$ un enunciado lógico en $A\times A$, tales que $\mathcal{R} = (A,A, P(x, y))$, es una relación de equivalencia, representemos por $[a]$ una clase de equivalencia en $\mathcal{R}$. Por otro lado, escogemos un elemento x de dicha clase, esto es $x\in[a]$, entonces por definición de clase de equivalencia $a\mathcal{R}x$, como la relación es simétrica, tenemos que $x\mathcal{R}a$, de donde se obtiene $a\in[x]$, con lo que se demuestra la afirmación. ▲

TEOREMA 1

Dos o más clases de equivalencia diferentes, no pueden tener elementos en común.

Demostración

▼ Sea A un conjunto y $P(x,y)$ un enunciado lógico en $A \times A$, tales que $\mathcal{R}$ = (A,A, P(x, y)), es una relación de equivalencia, veamos los elementos $a, b \in A$, tales que a no está relacionado con b, esto es representan a dos clases diferentes en $\mathcal{R}$ $[a] \neq [b]$, ahora supóngase que existe un elemento $x \in A$, tal que $x \in [a]$ y $x \in [b]$, esto es $a\mathcal{R}x$ y $b\mathcal{R}x$, como $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia, tenemos que $\mathcal{R}$ es simétrica y por lo tanto $x\mathcal{R}b$, además $\mathcal{R}$ es transitiva y de las relaciones $a\mathcal{R}x$ y $x\mathcal{R}b$, se deduce que $a\mathcal{R}b$, lo cual no puede ser, ya que $[a] \neq [b]$, y el teorema queda demostrado, ya que se contradice la suposición de la existencia de un elemento $x \in A$ tal que $x \in [a] \cap [b]$. ▲

B) RELACIONES DE EQUIVALENCIA Y PARTICIONES

En el estudio de las relaciones se tiene una conexión bastante estrecha, entre **las relaciones de equivalencia y las particiones,** por medio de los siguientes dos teoremas.

TEOREMA 2

Sea el conjunto A, y enunciado lógico $P(x,y)$ en $A \times A$, con $\mathcal{R}$ = (A, A, P(x, y)) una relación de equivalencia A, entonces $\mathcal{R}$ efectúa en A una ***partición*** *$\mathscr{A} = \{[a], [b], \ldots\}$, en donde los conjuntos $[a]$, $[b]$, etc. son clases de equivalencia en A dadas por $\mathcal{R}$.*

TEOREMA 3

Sea A un conjunto y A_1, A_2, …, A_n, subconjuntos de A, tales que la familia $\mathscr{A}$ $= \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ forman una partición del conjunto A, entonces $\mathscr{A}$ define sobre el conjunto A una relación de equivalencia.

Nota

De los teoremas anteriores, se puede concluir que existe una correspondencia uno a uno entre todas las clases de equivalencia y todas las particiones de un conjunto.

2.2 PREFERENCIAS DE ORDEN

En las preferencias de orden al igual que en las relaciones, se tiene un conjunto A (finito) de alternativas, sobre el cual se define una relación binaria y algunas de las relaciones revisadas como son: transitiva, asimétrica, simétrica, reflexiva y antisimétrica.

En la teoría de números son de fundamental importancia las relaciones de $>, \geq$ y la de $=$, en Teoría de Decisiones el conjunto *A*, no necesariamente es un conjunto numérico, es mucho más general, sus elementos representan las alternativas del decisor ante una situación de incertidumbre. Por lo tanto, surge la necesidad de introducir relaciones equivalentes a las anteriores, para poder llevar a cabo una mejor toma de decisiones.

Debido a la generalidad de los elementos en que puede estar constituido el conjunto de alternativas *A*, en teoría de decisiones se acostumbra usar las siguientes relaciones binarias de preferencia de orden

$a \succ b$, *a* preferente sobre *b* (preferencia estricta).

$a \succsim b$, *a* al menos tan preferente como *b* (preferencia débil).

$a \sim b$, *a* es indiferente a *b* (no existe preferencia, indiferencia).

En el estudio de las preferencias, al igual que en las áreas de matemáticas, las teorías son creadas con definiciones, se formulan axiomas y se demuestran Teoremas, Lemas y Postulados. De esta forma hemos iniciado el estudio, definiendo las preferencias de orden $a \succ b$, $a \succsim b$, $a \sim b$. Ahora falta establecer el sistema axiomático correspondiente, que nos permita desarrollar una teoría sobre las preferencias de orden de un decisor.

2.2.1 PREFERENCIAS DÉBILES

En teoría de decisiones entenderemos por preferencias débiles a las relaciones $a \succsim b$, y pediremos que cumplan los siguientes axiomas sobre el conjunto de alternativas *A*.

AXIOMA 1. Comparabilidad o completez.

$\forall a, b \in A$ se cumple alguna de las siguientes relaciones: $a \succsim b, b \succsim a$ o ambas. Otra forma equivalente, no existen $a, b \in A$ tales que $a \not\succsim b$ y $b \not\succsim a$.

AXIOMA 2. Transitividad.

$\forall a, b, c \in A$, si $a \succsim b$ y $b \succsim c \Rightarrow a \succsim c$.

AXIOMA 3. Consistencia entre indiferencias y preferencias débiles.

$\forall a, b \in A$, si $a \sim b \Leftrightarrow (a \succsim b$ y $b \succsim a)$. Otra forma equivalente, $\forall a, b \in A$, si $a \nsim b \Leftrightarrow (a \not\succsim b$ o $b \not\succsim a)$.

AXIOMA 4. Consistencia entre preferencias estrictas y preferencias débiles.

$\forall a, b \in A$, si $a \succ b \Leftrightarrow b \not\succsim a$. Otra forma equivalente, $\forall a, b \in A$, si $b \succsim a \Leftrightarrow a \not\succ b$.

Nota

El axioma 3 se puede considerar como la definición de la indiferencia y por eso algunos autores prefieren utilizar la preferencia estricta en lugar de la débil.

Con base en los 4 axiomas anteriores, llamados de **orden débil**, se formula y demuestra el siguiente teorema, que resulta ser la base en el desarrollo de las preferencias de orden, puesto que nos muestra la consistencia que existe entre los tres tipos de relaciones de orden.

TEOREMA 4

Sea la relación de orden débil $\succsim$ *y supóngase que se cumplen los 4 axiomas de preferencias débiles, entonces*

i. $\succ$ *es transitiva.*

ii. $\succ$ *es asimétrica.*

iii. $\sim$ *es reflexiva.*

iv. $\sim$ *es simétrica.*

v. $\sim$ *es transitiva.*

vi. $\forall a,b,c \in A, \quad (a \sim b \text{ y } b \succ c) \Rightarrow a \succ c$.

vii. $\forall a,b,c \in A, \quad (a \succ b \text{ y } b \sim c) \Rightarrow a \succ c$.

viii. $\forall a,b \in A$ se cumple exactamente una de las relaciones $a \sim b,\ a \succ b, b \succ a$.

Demostración

▼

i. Se prueba por reducción al absurdo, es decir, supóngase $a,b,c \in A$ y son tales que

$$a \succ b \text{ y } b \succ c \Rightarrow c \succsim a. \qquad \textbf{(1)}$$

De $b \succ c$ y el axioma 4, se concluye que $c \not\succsim b$. Luego, del axioma 1 resulta que $b \succsim c$. Con la relación anterior $b \succsim c$ y $c \succsim a$ se concluye del axioma 2 que $b \succsim a$, pero esto no puede ser porque de las condiciones del teorema $a \succ b$, y del Axioma 4 esto último es equivalente a $b \not\succsim a$.

Así, se obtuvo un absurdo, $b \succsim a$ y $b \not\succsim a$ no se pueden cumplir al mismo tiempo. Por lo tanto, de (1) $a \succ b$ y $b \succ c \Rightarrow c \not\succsim a$. Finalmente, del axioma 4 se concluye que $a \succ c$.

ii. Supóngase $a,b \in A$ y que *a* está relacionado con *b* por medio de $\succ$, esto es $a \succ b$. Luego, por el axioma 4, $b \not\succsim a$. Así, del axioma 1 $a \succsim b$ y otra vez por el axioma 4 $b \not\succ a$ (en su forma equivalente). Es decir, *b* no está relacionado con *a*.

iii. Se prueba directamente por contrapuesta. Supóngase $a \in A$ y que *a* no es indiferente a *a*, $a \nsim a$, esto implica que $a \succ a$, luego del axioma 4 $a \not\succsim a$. Se concluye del axioma 3.

iv. Supóngase $a,b \in A$ y que a es indiferente a b, $a \sim b$, luego del axioma 3,

$$a \sim b \Leftrightarrow (a \succsim b \text{ y } b \succsim a) \Leftrightarrow (b \succsim a \text{ y } a \succsim b) \Leftrightarrow b \sim a.$$

v. Supóngase que $a,b,c \in A$ y $a \sim b$ y $b \sim c$ luego del axioma 3,

$$a \sim b \Leftrightarrow (a \succsim b \text{ y } b \succsim a) \text{ y } b \sim c \Leftrightarrow (b \succsim c \text{ y } c \succsim b)$$

Por transitividad de la relación de orden débil axioma 2, $a \succsim b$ y $b \succsim c$ implica $a \succsim c$, similarmente, $c \succsim b$ y $b \succsim a$ implica $c \succsim a$. Finalmente, del axioma 3 se concluye que $a \sim c$

vi. Supóngase que $\forall a,b,c \in A$, $a \sim b$ y $b \succ c$, luego del axioma 3,

$$a \succsim b \text{ y } b \succsim a \text{ y } b \succ c \Rightarrow a \succsim b \text{ y } c \not\succsim b.$$

De las dos últimas relaciones se concluye que $c \not\succsim a$. Esto se verifica fácilmente por reducción al absurdo, puesto que si ocurriese que $a \succsim c$, entonces de $b \succsim a$ y el Axioma 2 (transitividad de $\succsim$), se concluye que $b \succsim c$, pero esto no puede ser ya que por suposición $b \succ c$. Así, se cumple que $c \not\succsim a$, finalmente del Axioma 4, $a \succ c$.

vii. Se demuestra de forma similar que el inciso vi**.** Supóngase que $\forall a,b,c \in A$, $a \succ b$ y $b \sim c$ luego del axioma 3,

$$a \succ b \text{ y } b \succsim c \text{ y } c \succsim b \Rightarrow b \not\succsim a \text{ y } c \succsim b \Rightarrow c \not\succsim a \overset{\text{Axioma 4}}{\Rightarrow} a \succ c.$$

viii. Supóngase que $\forall a,b \in A$, la demostración se puede hacer los 4 casos que pudiesen ocurrir.

- $a \succsim b$ y $b \succsim a$, luego del Axioma 3 $a \sim b$.
- $a \succsim b$ y $b \not\succsim a$, luego del Axioma 4 $a \succ b$.
- $a \not\succsim b$ y $b \succsim a$, luego del Axioma 4 $b \succ a$.
- $a \not\succsim b$ y $b \not\succsim a$, no puede ocurrir este caso porque se obtendría del axioma 4, $b \succ a$ y $a \succ b$, lo cual no puede ser.▲

Nota

De lo expuesto arriba, se puede concluir que las relaciones de orden débil, $\succsim$, deben cumplir la completez y transitividad, mientras que las relaciones de orden estricto, $\succ$, deben cumplir con la asimetría y la transitividad; finalmente las relaciones de indiferencia deben ser de equivalencia.

2.2.2 CLASES DE INDIFERENCIA

De forma similar que en las relaciones de equivalencia, tenemos que la relaciones de indiferencia forman una clase, llamada **clase de indiferencias**. Así, si $a \in A$, denotamos su clase de indiferencias por $I(a)$, y se define como:

$$I(a) = \{b | a, b \in A, \text{ y } b \sim a\}.$$

LEMA 2

Si se cumplen los axiomas del 1 al 4, entonces

1) *Si* $a \sim b \Rightarrow I(a) = I(b)$.

2) *Si* $I(a)$ *y* $I(b)$ *tienen un elemento en común, entonces* $I(a) = I(b)$.

3) *Si* $a \succ b$ *entonces* $\forall c \in I(a)$ *y* $d \in I(b)$ *se cumple* $c \succ d$.

Demostración

▼ **1)** Sea $c \in I(a)$, luego por definición de clase de indiferencia $c \sim a$ y por otro lado de las condiciones del lema $a \sim b$, así por transitividad de indeferencia $c \sim b$, finalmente por definición de clase de indiferencia $c \in I(b)$ y se concluye que $I(a) \subset I(b)$.

Similarmente, se concluye que $I(b) \subset I(a)$, de donde $I(a) = I(b)$.

2) Suponga que $c \in A$ es el elemento común de $I(a)$ e $I(b)$, luego, $c \sim a$ y $c \sim b$. Por simetría en el primer termino $a \sim c$ y $c \sim b$. Por la transitividad $a \sim b$, finalmente del inciso anterior del lema se concluye que $I(a) = I(b)$.

3) Supóngase que $c \in I(a)$, entonces por definición de clase de indiferencia resulta que $c \sim a$ y del hecho de que $a \succ b$ aplicamos el punto vi del Teorema 4, se concluye $c \succ b$. Similarmente, sea $d \in I(b)$ por definición de clase de equivalencia $d \sim b$ por simetría de la indiferencia $b \sim d$. Finalmente de $c \succ b$ y $b \sim d$ aplicamos el punto vii del Teorema 4, se concluye $c \succ d$.▲

Las clases de indiferencia son similares a las clases de equivalencia en las relaciones, luego se cumplen los mismos resultados de la sección anterior, pero ahora para las clases de indiferencia. Sus demostraciones se omiten por ser similares al caso de equivalencia.

A) PROPIEDAD DE LA REPRESENTATIVIDAD DE UNA CLASE DE INDIFERENCIA

LEMA 3

Una clase de indiferencia, se puede representar por medio de cualquier elemento que pertenezca a dicha clase.

TEOREMA 5

Dos o más clases de indiferencia diferentes, no pueden tener elementos en común.

B) RELACIONES DE EQUIVALENCIA Y PARTICIONES

TEOREMA 6

Sea el conjunto A de alternativas y I una relación de indiferencia, entonces I efectúa en A una partición $\mathscr{A}=\{I(a_1), I(a_2),\ldots\}$, *en donde los conjuntos* $I(a_1), I(a_2)$, *etc. son clases de indiferencia en A.*

TEOREMA 7

Sea A un conjunto de alternativas *y* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *subconjuntos de A, tales que la familia* $\mathscr{A}=\{A_1,\ A_2,\ldots,A_n\}$ *forman una partición del conjunto A, entonces* $\mathscr{A}$ *define sobre el conjunto A una relación de indiferencias.*

Nota

De los teoremas anteriores, se puede concluir que existe una correspondencia uno a uno entre todas las clases de indiferencia y todas las particiones de un conjunto.

2.3 CONSTRUCCIÓN DE LAS FUNCIONES DE VALOR DE UN ATRIBUTO

En la sección 2 revisamos los conjuntos de alternativas, *A*, y la parte axiomática que debe respetar un decisor al emplear sus preferencias sobre los objetos de *A*, para que la toma de decisiones que se haya hecha con el apoyo de los axiomas tenga un sustento racional.

Al trabajar con conjuntos de alternativas, entramos en un mundo de comparaciones entre objetos que no necesariamente son números, lo que dificulta su estudio y razón por la cual en las relaciones se usan en su notación símbolos más general, y sobre los cuales se construyen las relaciones de comparación, vistas en la sección anterior. Lógicamente surge la pregunta sobre la factibilidad de poder llevar a cabo comparaciones cuando tenemos alternativas de decisiones en contextos mucho muy variados.

¿Existirá algún método que permita llevar a cabo comparaciones entre las alternativas y reglas de relación que cumplan el sistema axiomático de la sección 2?

La respuesta a la pregunta se dará en esta sección con la construcción de funciones sobre *A*, a las que se les da el nombre de **funciones de valor**. Con estas funciones se podrán asignar valores a las alternativas para poder transportar la Teoría de preferencias a la Teoría de números, en donde están bien establecidas las relaciones que cumplen el sistema axiomático revisado en la sección anterior. Es decir, las relaciones de preferencias $\succ, \succsim$ y $\sim$, utilizadas en las alternativas del decisor, serán transformadas, con la función de valor, a las comparaciones numéricas, por medio de las relaciones conocidas en Teoría de números, >, $\geq$ e =, respectivamente; las equivalencias entre las relaciones $\succ$ con >, $\succsim$ con $\geq$ y $\sim$ con = es sólo por conveniencia de notación.

La idea intuitiva de asignación de valores, consiste en encontrar una función

$$v(\cdot) : A \to \mathbb{R}, \qquad \textbf{(2)}$$

tal que si tenemos $a, b \in A$, y la relación de orden débil $\succsim$, entre a y b, se pueda establecer la relación de orden débil $\geq$ entre $v(a), v(b) \in \mathbb{R}$. A la función que de esta forma se construye le llamaremos **función de valor**. Los siguientes 2 teoremas justifican la existencia de la función v. El primero para el caso particular en el que A es un conjunto finito y el segundo para un conjunto infinito.

TEOREMA 8 Existencia de la función v caso finito.

> *Sea el conjunto de alternativas A finito, existe una función de valor* $v(\cdot) : A \to \mathbb{R}$, tal que
>
> $$a \succsim b \Leftrightarrow v(a) \geq v(b), \quad \forall a, b \in A \qquad (*)$$
>
> *si y sólo si* $\succsim$ es de orden débil (cumple las condiciones de los axiomas 1 a 4).

Demostración

▼ Primero demostraremos que si existe $v(\cdot) : A \to \mathbb{R}$, tal que $a \succsim b \Leftrightarrow v(a) \geq v(b), \quad \forall a, b \in A$, entonces la relación $\succsim$ es de orden débil.

Completitud.

Para la completez analizamos la propiedad de tricotomía de los números, la cual consiste en que dados dos números $x, y \in \mathbb{R}$, se cumple una y sólo una de las relaciones:

$$(x > y \text{ o } y > x) \text{ o } x = y .$$

La cual es equivalente a

$$(x \not> y \text{ o } y \not> x) \text{ o } (x \not> y \text{ y } y \not> x)$$

i) Si $v(a) \not> v(b) \overset{\text{son números}}{\Leftrightarrow} v(b) \geq v(a) \overset{\text{de }(*)}{\Leftrightarrow} b \succsim a$.

ii) Si $v(b) \not> v(a) \overset{\text{son números}}{\Leftrightarrow} v(a) \geq v(b) \overset{\text{de }(*)}{\Leftrightarrow} a \succsim b$.

iii) Cuando $v(a) \not> v(b)$ y $v(b) \not> v(a)$, entonces se cumplen ambos $b \succsim a$ y $a \succsim b$.

Nota

Si $a \not\succsim b$, por (*) se cumple que $v(a) \not\geq v(b)$, luego como éstos últimos son números resulta que $v(b) > v(a)$. Por lo tanto, hemos probado que

$$b \succ a \Leftrightarrow v(b) > v(a) \ . \qquad (**)$$

Transitividad. Si $a \succsim b$ y $b \succsim c$ por (*) tenemos que $v(a) \geq v(b)$ y $v(b) \geq v(c)$, luego por la transitividad de la relación $\geq$ entre números, resulta $v(a) \geq v(c)$ y por (*) $a \succsim c$.

Consistencia entre indiferencias y preferencias débiles. $\forall a, b \in A$, si $v(a) \geq v(b)$ y $v(b) \geq v(a)$, entonces de la relación entre números esto se cumple si y sólo si $v(a) = v(b)$. De (*) esto significa que $(a \succsim b$ y $b \succsim a) \Leftrightarrow a \sim b$.

Consistencia entre preferencias estrictas y preferencias débiles. $\forall a, b \in A$, si $v(b) \geq v(a)$, entonces de la relación entre números esto implica que $v(a) \not> v(b)$, de (*) esto significa que si $b \succsim a$, de (**) esto es equivalente a $a \not\succ b$.

En segundo lugar, demostraremos que si existe la relación $\succsim$ y es de orden débil, entonces existe una función de valor $v(\cdot) : A \to \mathbb{R}$, tal que $a \succsim b \Leftrightarrow v(a) \geq v(b), \quad \forall a, b \in A$.

Supondremos que la relación $\succsim$ es de orden débil y denotaremos al conjunto

$$V(a) = \{ b \mid a, b \in A \text{ y } a \succsim b \}.$$

Se define la cardinalidad de $V(a)$ por $v(a)$. Es decir, $\#(V(a)) = v(a)$, tenemos que probar que ésta es una función de valor que representa la relación $\succsim$. Es decir, cumple con (*), y tenemos que demostrar $a \succsim b \Leftrightarrow v(a) \geq v(b), \quad \forall a, b \in A$.

Necesidad. Suponemos que $a \succsim b$, entonces $b \in V(a)$ y por transitividad para cualquier *c* que cumpla $b \succsim c$ resulta $a \succsim c$. Luego, $c \in V(a)$, de tal forma que $V(b) \subset V(a)$, de donde $\#(V(b)) \leq \#(V(a))$, es decir, $v(a) \geq v(b)$.

Suficiencia. Suponemos que $v(a) \geq v(b)$ y demostraremos que $a \succsim b$. La demostración se hará por contrapuesta. De está forma suponemos que $a \not\succsim b$ por el axioma 4 resulta $b \succ a$. Por definición de $V(a)$ tenemos que $b \notin V(a)$, pero $a \in V(b)$. Es decir, $V(a) \subset V(b)$, esto es $v(b) > v(a)$, equivalentemente a $v(a) \not\geq v(b)$. Luego, se concluye que si $v(a) \geq v(b)$, entonces $a \succsim b$.▲

TEOREMA 9 Existencia de la función *v* caso infinito.

Sea el conjunto de alternativas A, existe una función de valor $v(\cdot): A \to \mathbb{R}$, *tal que*

$$a \succsim b \Leftrightarrow v(a) \geq v(b), \quad \forall a, b \in A \qquad (*)$$

si y sólo si $\succsim$ *es de orden débil, es decir, cumple las condiciones de los axiomas 1a 4 de orden denso de A con respecto de la relación* $\succsim$.

Definición 2

Sea *B* un subconjunto de *A*, *B* es llamado un **subconjunto denso** de *A*, con respecto a $\succsim$ si $\forall a_1, a_2 \in A$ con $a_1 \succ a_2$ existe $b \in B$, tal que $a_1 \succsim b \succsim a_2$.

Ahora veremos un teorema que muestra la unicidad de la función de valor

TEOREMA 10 Unicidad de la función *v*.

Sea el conjunto de alternativas A y $\succsim$ *una relación de orden débil, es decir cumple los axiomas 1 a 4, entonces* $v(\cdot)$ *y* $w(\cdot)$ *son ambas funciones ordinarias de valor con* $\succsim$ *si y solo si existe una función* φ *estrictamente creciente tal que*

$$w(a) = \varphi(v(a)), \quad \forall a \in A$$

Demostración

▼

Necesidad. Suponemos que $v(\cdot)$ es una función ordinaria de valor con $\succsim$ y que φ es una función estrictamente creciente. Luego, de los Teoremas 8 y 9, $a \succsim b \Leftrightarrow v(a) \geq v(b), \forall a, b \in A$ ahora por ser φ una función estrictamente creciente $w(a) \geq w(b), \forall a, b \in A$ y por los Teoremas 8 y 9 *w* es una función ordinaria de valor.

Suficiencia. Suponemos que *v* y *w* son funciones ordinarias de valor con las mismas preferencias. Es decir,

$$a \succsim b \Leftrightarrow v(a) \geq v(b) \text{ y } w(a) \geq w(b), \forall a, b \in A.$$

Luego, definimos una función φ, tal que $w(\cdot) = \varphi(v(\cdot))$ y por las relaciones anteriores φ tiene que ser estrictamente creciente.

▲

2.4 SISTEMA AXIOMÁTICO DE LOS MODELOS DE DIFERENCIA DE VALOR

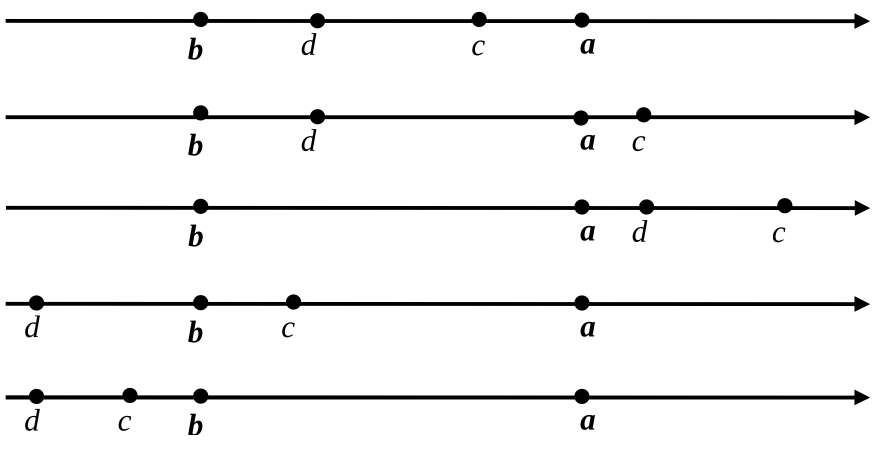
En la sección anterior revisamos la existencia y unicidad de la función de valor, función que se utilizará en los conjuntos de alternativas, *A*, para que a través de ella se lleve a efecto la asignación de valores a los elementos de *A* y de esta forma podamos llevar a cabo un ranqueo de alternativas. Posteriormente, con base en la función que veremos a continuación se asignarán mayores distancias a mayores preferencias y de esta manera podremos ranquear todas las preferencias intermedias del conjunto *A*.

Sea $a \leftarrow b$ la representación del **intercambio** de la alternativa *b* por la alternativa *a*. Con dicho intercambio y la función ordinaria de valor $v(\cdot)$, definida en las relaciones de orden débil, $\succsim$, entre los objetos del conjunto de alternativas *A*, tal que si $a, b \in A$ entonces $a \succsim b \Leftrightarrow v(a) \geq v(b)$. Podemos introducir una relación de orden débil entre intercambios de la siguiente forma.

Sean *A* un conjunto de alternativas y para $a, b, c, d \in A$, definimos los intercambios $a \leftarrow b$ y $c \leftarrow d$, entonces diremos que el intercambio $a \leftarrow b$ es al menos tan preferente que $c \leftarrow d$, y denotaremos dicha preferencia por $\succsim_e$, de tal manera que $(a \leftarrow b) \succsim_e (c \leftarrow d)$. Luego,

$$(a \leftarrow b) \succsim_e (c \leftarrow d) \Leftrightarrow v(a) - v(b) \geq v(c) - v(d) . \qquad \textbf{(3)}$$

Representando gráficamente las situaciones que pueden ocurrir a mayores preferencias hacia la derecha tendremos:



Con lo anterior se concluye la definición de una función ordinaria de valor *V*, dada en las relaciones de intercambiabilidad, tal que $V(a \leftarrow b) = v(a) - v(b)$. Así, tendremos que *V* representa una función ordinaria de valor para las relaciones de intercambiabilidad, puesto que

$$(a \leftarrow b) \succsim_e (c \leftarrow d) \Leftrightarrow V(a \leftarrow b) \geq V(c \leftarrow d).$$

De esta forma podemos estableceremos los axiomas correspondientes a la relación de preferencia $\succsim_e$ sobre los intercambios.

AXIOMA 1. Orden débil.

> Los 4 axiomas de la sección 1.2.1 sobre las preferencias de orden débiles $\succsim$ sobre el conjunto de objetos *A*, se cumplen para el conjunto de intercambios y la relación de orden $\succsim_e$.

AXIOMA 2. Consistencia de $\succsim$ y $\succsim_e$.

> $\forall a, b \in A$, si $a \succsim b \Leftrightarrow (a \leftarrow b) \succsim_e (c \leftarrow c)$ para $\forall c \in A$.

Nótese que el axioma en realidad representa la definición de la función ordinaria de valor, ya que

$$a \succsim b \Leftrightarrow (a \leftarrow b) \succsim_e (c \leftarrow c) \Leftrightarrow v(a) - v(b) \geq v(c) - v(c) = 0 \Leftrightarrow v(a) \geq v(b).$$

AXIOMA 3.

> $\forall a, b, c, d \in A$, $(a \leftarrow b) \succsim_e (c \leftarrow d) \Leftrightarrow (d \leftarrow c) \succsim_e (b \leftarrow a)$.

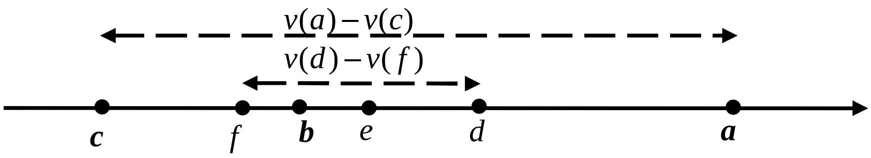
El axioma se deriva al multiplicar por menos 1 a la desigualdad (3)

$$\begin{aligned}(a \leftarrow b) \succsim_e (c \leftarrow d) &\Leftrightarrow v(a) - v(b) \geq v(c) - v(d) \\ &\Leftrightarrow v(d) - v(c) \geq v(b) - v(a) \\ &\Leftrightarrow (d \leftarrow c) \succsim_e (b \leftarrow a)\end{aligned}$$

AXIOMA 4.

> $\forall a, b, c, d, e, f \in A$,
>
> $$\left.\begin{matrix}(a \leftarrow b) \succsim_e (d \leftarrow e) \\ (b \leftarrow c) \succsim_e (e \leftarrow f)\end{matrix}\right\} \Rightarrow (a \leftarrow c) \succsim_e (d \leftarrow f).$$

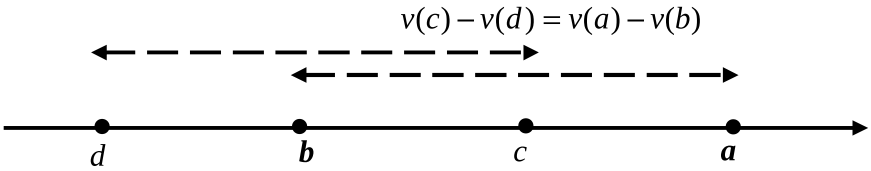
El axioma lo podemos ilustrar por medio de la siguiente gráfica. Supóngase que las preferencias crecen a la derecha, entonces según las situaciones anteriores que se pueden presentar, una de ellas sería la mostrada en la gráfica siguiente.



AXIOMA 5. Solubilidad.

(i)	$\forall b,c,d \in A, \quad \exists a \in A$, tal que $(a \leftarrow b) \sim_e (c \leftarrow d)$.
(ii)	$\forall b,c \in A, \quad \exists a \in A$, tal que $(b \leftarrow a) \sim_e (a \leftarrow c)$.

Gráficamente el axioma representa lo siguiente



Con la ayuda de este axioma y la función ordinaria de diferencia de valor aplicada, de acuerdo a las preferencias del decisor, sobre el conjunto de alternativas *A*, en donde el decisor ranquea a sus elementos de tal forma que

$$\cdots \succsim a_n \succsim a_{n-1} \succsim \cdots \succsim a_2 \succsim a_1 \succsim a_0 \,.$$

Podemos graficar los elementos del conjunto *A* contra los valores que se les asignen en la función ordinaria de valor, los cuales se recomienda hacerlos de la siguiente manera.

Asignar el valor cero al elemento menos deseable del conjunto de alternativas

$$v(a_0) = 0 \,.$$

Posteriormente, al siguiente elemento de *A* que sea más preferente que a_0, denotado por a_1 asignarle el valor 1

$$v(a_1) = 1 \,.$$

De esta forma al siguiente elemento de *A* que sea más preferente que a_1, denotado por a_2, podemos relacionarlo con a_0 y a_1 mediante una relación de indiferencia de intercambios

$$(a_2 \leftarrow a_1) \sim_e (a_1 \leftarrow a_0) \,.$$

Luego, resulta

$$v(a_2)-v(a_1)=v(a_1)-v(a_0)$$
$$v(a_2)-1=1-0$$
$$v(a_2)=2$$

Continuando con el proceso $(a_3 \leftarrow a_2) \sim_e (a_2 \leftarrow a_1) \sim_e (a_1 \leftarrow a_0)$

$$v(a_3)-v(a_2)=v(a_2)-v(a_1)$$
$$v(a_3)-2=2-1$$
$$v(a_3)=3$$

En general, obtenemos para las indiferencias de intercambiabilidad

$$(a_1 \leftarrow a_0) \sim_e (a_2 \leftarrow a_1) \sim_e (a_3 \leftarrow a_2) \sim_e \cdots \sim_e (a_n \leftarrow a_{n-1}).$$

Mientras que al evaluar la función de valor

$$v(a_0)=0,\ v(a_1)=1,\ldots,v(a_n)=n,\ldots$$

Graficando el procedimiento anterior, lo podemos apreciar en la figura 1.

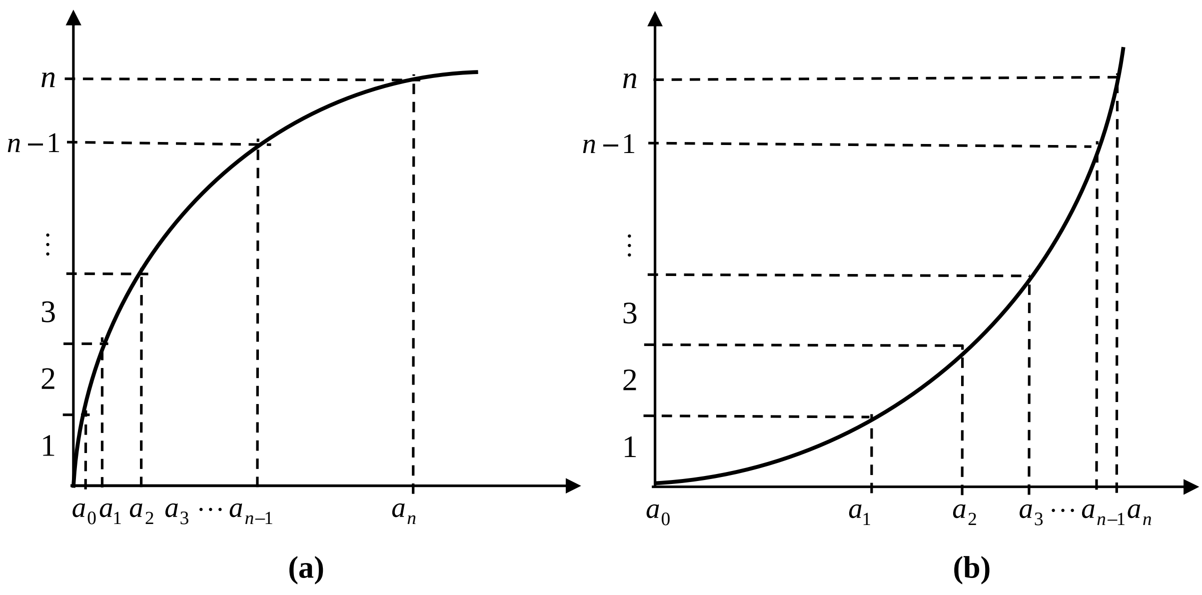


Fig. 1 Curvas de dos comportamientos de la función de valor

En la figura 1a se muestra una función de valor en donde se asigna menor valor a las alternativas que estén más alejadas, esto se puede observar ya que a mayor alejamiento de las alternativas igual incremento en el valor de la función. Similarmente en la figura 1b se tiene mayor valor a las alternativas que se encuentren más alejadas. Una interpretación adecuada la tendremos al revisar las funciones de utilidad y el tipo de decisor en el Capítulo 2. Para valores intermedios de las alternativas se lleva acabo una interpolación.

AXIOMA 6. Arquimedeano.

Cualquier secuencia estándar estrictamente acotada es finita.

Una **secuencia estándar** está definida por:

$$\{a_n \mid (a_n \leftarrow a_{n-1}) \sim_e (a_1 \leftarrow a_0) \text{ para } n = 2, 3, \ldots\}\ .$$

Se dice que una **secuencia estándar** es **estrictamente acotada** si se expresa de la siguiente forma

$$\{a_n \mid b \succ a_n;\quad (a_n \leftarrow a_{n-1}) \sim_e (a_1 \leftarrow a_0)\}.$$

TEOREMA 11 Existencia de la función de diferencia de valor.

Si se satisfacen los axiomas 1-6 de esta sección, entonces existe una función de diferencia de valor con la cual se representan $\succsim$ *y* $\succsim_e$ *tal que*

$$v(\cdot): A \to \mathbb{R},\ a \succsim b \Leftrightarrow v(a) \geq v(b)\ \ y\ \ (a \leftarrow b) \succsim_e (c \leftarrow d) \Leftrightarrow v(a) - v(b) \geq v(c) - v(d)\,.$$

Además los axiomas 1-4 y el 6 son necesarios para tal representación.

Ahora veremos un teorema que muestra la unicidad de la función de diferencia de valor

TEOREMA 12 Unicidad de la función de diferencia de valor.

Bajo las condiciones suaves de solubilidad en el conjunto de alternativas A, $v(\cdot)$ *y* $w(\cdot)$ *son dos funciones de diferencia de valor con las mismas preferencias* $\succsim$ y $\succsim_e$ *si y solo si existen números reales* α *y* β *con* $\alpha > 0$ *tales que*

$$w(a) = \alpha v(a) + \beta, \quad \forall a \in A\,.$$

2.5 FUNCIONES DE VALOR MULTIATRIBUTOS

En la sección anterior revisamos, entre otras cosas, la función de valor con un atributo, pero como es esperarse en la vida real los problemas de decisiones generalmente están constituidos de 2 o más atributos. De tal forma que iniciamos introduciendo la notación correspondiente.

2.5.1 CONCEPTOS BÁSICOS DE FUNCIONES DE VALOR MULTIATRIBUTOS

En general, en el caso de problemas de decisión con q atributos, denotaremos al vector de alternativas

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_q) .$$

En donde,

$$\mathbf{a} \in A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_q \text{, es decir, la alternativa } a_i \in A_i \text{ para } i = 1, \ldots, q .$$

De esta forma el problema general de las preferencias en el caso multiatributo se complica, porque se tiene que explicar cómo se entienden éstas. Por ejemplo, que representa $\mathbf{a} \succsim \mathbf{b}$, y cómo sería la función ordinaria de valor para este caso.

Así, en la investigación entenderemos por las preferencias $\mathbf{a} \succsim \mathbf{b}$, cuando se cumplen todas término a término. Es decir,

$$\mathbf{a} \succsim \mathbf{b} \Leftrightarrow a_1 \succsim b_1, a_2 \succsim b_2, \ldots, a_q \succsim b_q \ .$$

Con respecto a la función ordinaria de valor multiatributo, tenemos que tendrá que ser una función

$$v : A \to \mathbb{R}, \text{ es decir, } v : A_1 \times \cdots \times A_q \to \mathbb{R} .$$

De tal forma que cumpla

$$\mathbf{a} \succsim \mathbf{b} \Leftrightarrow v(\mathbf{a}) \geq v(\mathbf{b})$$
$$(a_1, a_2, \ldots, a_q) \succsim (b_1, b_2, \ldots, b_q) \Leftrightarrow v(a_1, a_2, \ldots, a_q) \geq v(b_1, b_2, \ldots, b_q)$$

La dificultad para trabajar con multiatributos se puede apreciar en este momento ya que en la sección anterior la introducción de las funciones ordinarias de valor para un atributo simplificaba el trabajo con las preferencias. Pero en la expresión anterior podemos apreciar que la introducción de la función ordinaria de valor multiatributos dá como resultado un problema de mayor complejidad, ya que la función es multivariable y por consiguiente su comparación no es tan sencilla, aun en el caso de valores numéricos. Luego, un primer paso en el caso multiatributos consistirá en revisar las situaciones más simples de funciones ordinarias de valor, bajo diferentes hipótesis, como son:

- Preferencias independientes,
- funciones aditivas sobre los atributos y
- las funciones lineales de valor.

Antes de revisar cada una de las hipótesis que se tendrían que hacer para simplificar el estudio de las funciones ordinarias de valor, formulemos un teorema que muestra la existencia de una función ordinaria de valor en el caso en que las alternativas son valores numéricos.

TEOREMA 13 Existencia de la función ordinaria de valor.

Supóngase que $A = \mathbb{R}^q$ *y que se cumple lo siguiente.*
***i) Orden débil**. Para* $\succsim$ *se cumplen los axiomas de orden débil.*
***ii) Dominancia estricta**. Si* $a_k > b_k$ *, para* $k = 1, 2, \ldots, q$ *entonces* $\mathbf{a} \succ \mathbf{b}$.
***iii) Continuidad**. Si* $\mathbf{a} \succ \mathbf{b} \succ \mathbf{c}$ *, entonces existe* λ *,* $0 < \lambda < 1$ *, y* $\lambda\mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{c} \sim \mathbf{b}$.
Entonces existe una función ordinaria de valor.

Gráficamente el teorema representa lo siguiente.

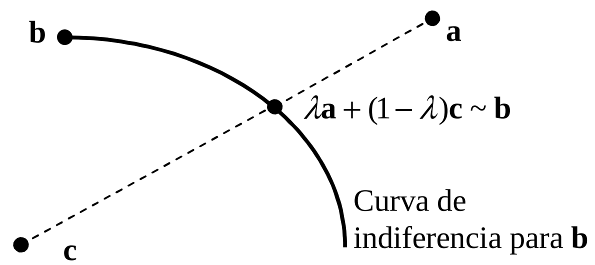


Fig. 2 Representación gráfica de la existencia de la función ordinaria de valor

Además debido a que se trata de un caso numérico de alternativas, se puede establecer el valor de λ, de la siguiente forma

$$\lambda = \frac{b_i - c_i}{a_i - c_i}, \text{ para toda } i = 1, 2, \ldots, q .$$

2.5.2 PREFERENCIAS INDEPENDIENTES DE DOS ATRIBUTOS

En esta subsección tomamos en cuenta que cada alternativa puede ser representada sólo por dos atributos, es decir, $A = X_1 \times X_2$ y damos las siguientes definiciones.

Definición 3

Se dice que el **atributo** X_1 **es preferencialmente independiente del atributo** X_2 si para toda $x_1, x_1' \in X_1$

$(x_1, \alpha) \succsim (x_1', \alpha)$ para algún $\alpha \in X_2$, implica que $(x_1, \beta) \succsim (x_1', \beta)$ para todo $\beta \in X_2$.

Similarmente, se dice que el **atributo** X_2 **es preferencialmente independiente del atributo** X_1 si para toda $x_2, x_2' \in X_2$

$(\alpha, x) \succsim (\alpha, x_2')$ para algún $\alpha \in X_1$, implica que $(\beta, x_2) \succsim (\beta, x_2')$ para todo $\beta \in X_1$.

Si ambas se cumplen se dice que X_1 y X_2 son **mutuamente preferencialmente independientes**.

De forma similar que en el estudio de las probabilidades se pueden definir las preferencias de orden marginalmente independientes.

Definición 4

Si X_1 es preferencialmente independiente de X_2, se denota la **preferencia marginal de orden** $\succsim_{X_1}$ sobre el conjunto X_1, si

$$x_1 \succsim_{X_1} x_1' \Leftrightarrow (x_1, \alpha) \succsim (x_1', \alpha) \text{ para algún } \alpha \in X_2 .$$

Similarmente, si X_2 es preferencialmente independiente de X_1, se denota la **preferencia marginal de orden** $\succsim_{X_2}$ sobre el conjunto X_2, si

$$x_2 \succsim_{X_2} x_2' \Leftrightarrow (\alpha, x_2) \succsim (\alpha, x_2') \text{ para algún } \alpha \in X_1 .$$

De las definiciones 3 y 4 se puede deducir el siguiente Lema.

LEMA 4

Si X_1 y X_2 son mutuamente preferencialmente independientes y si $\succsim$ es de orden débil en $A = X_1 \times X_2$, entonces las preferencias marginales $\succsim_{X_1}$ y $\succsim_{X_2}$ son ambas de orden débil.

Demostración

▼ **Completitud de** $\succsim_{X_1}$. Sean $x_1, x_1' \in X_1$ y por ser X_1 preferencialmente independiente de X_2, tenemos que para cualquier $\alpha \in X_2$ y la comparabilidad de $\succsim$

$$(x_1, \alpha) \succsim (x_1', \alpha) \text{ o } (x_1', \alpha) \succsim (x_1, \alpha) \text{ o ambos.}$$

Similarmente para la completitud de $\succsim_{X_2}$.

Transitividad de $\succsim_{X_1}$. Sean $x_1, x_1', x_1'' \in X_1$, tales que $x_1 \succsim_{X_1} x_1'$ y $x_1' \succsim_{X_1} x_1''$. Luego,

$$x_1 \succsim_{X_1} x_1' \Rightarrow (x_1, \alpha) \succsim (x_1', \alpha) \text{ por definición de } \succsim_{X_1}$$
$$x_1' \succsim_{X_1} x_1'' \Rightarrow (x_1', \alpha') \succsim (x_1'', \alpha') \text{ por definición de } \succsim_{X_1}$$

Pero X_1 es preferencialmente independiente de X_2, luego, tenemos que para cualquier $\alpha \in X_2$ eligiendo $\alpha' = \alpha$, resulta $(x_1', \alpha) \succsim (x_1'', \alpha)$. De la transitividad de $\succsim$ resulta

$$(x_1, \alpha) \succsim (x_1', \alpha) \succsim (x_1'', \alpha) \Rightarrow (x_1, \alpha) \succsim (x_1'', \alpha) \Rightarrow x_1 \succsim_{X_1} x_1'' .$$

Similarmente para la transitividad de $\succsim_{X_2}$.▲

2.5.3 MODELO ADITIVO DE VALOR PARA DOS ATRIBUTOS

La función ordinaria de valor más simple que podemos estudiar, en el caso de dos atributos, se obtiene bajo la hipótesis de aditividad, ya que el problema se puede reducir al caso univariado.

Definición 5

> Una **función de valor** $v(x_1, x_2)$ **es aditiva** si $v(x_1, x_2) = v_1(x_1) + v_2(x_2)$ para $x_1^0 \le x_1 \le x_1^*$ y $x_2^0 \le x_2 \le x_2^*$.

CONSTRUCCIÓN DE UNA FUNCIÓN DE VALOR ADITIVA

Para construir una función de valor aditiva se pueden seguir los siguientes pasos.

Paso 1.
Sea $v(x, y)$ una función de valor aditiva, y (x_0, y_0) un punto del dominio de la función, tal que el decisor asigna un valor cero a la función

$$0 = v(x_0, y_0) = v_x(x_0) + v_y(y_0) \text{ luego } 0 = v_x(x_0) = v_y(y_0).$$

Paso 2.
Se elige un valor x_1 al cual el decisor arbitrariamente asigna un valor, generalmente se utiliza el valor 1, $v_x(x_1) = 1$.

Paso 3.
Se le pregunta al decisor a que punto sobre el eje de las ordenadas el punto (x_1, y_0) es indiferente. Es decir, $(x_1, y_0) \sim (x_0, \cdot)$, denótese este valor por y_1, entonces

$$(x_1, y_0) \sim (x_0, y_1)$$

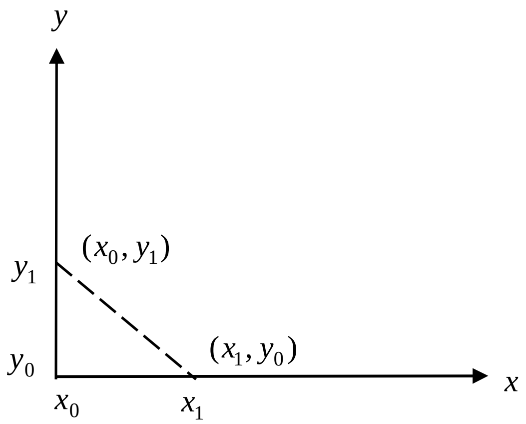


Fig. 3 Representación gráfica de la curva de indiferencia para $(x_1, y_0) \sim (x_0, y_1)$.

Luego, $v(x_1, y_0) = v(x_0,\ y_1)$, en el caso que estamos analizando

$$v(x_1, y_0) = v_x(x_1) + v_y(y_0) = 1 + 0 = 1 \Rightarrow v_x(x_1) = 1$$
$$v(x_0, y_1) = v_x(x_0) + v_y(y_1) = 0 + v_y(y_1) = 1 \Rightarrow v_y(y_1) = 1$$

Paso 4.

Con los resultados del paso 3, se evalúa la función de valor en (x_1, y_1), obteniendo

$$v(x_1, y_1) = v_x(x_1) + v_y(y_1) = 1 + 1 = 2 .$$

Ahora se le pregunta al decisor que puntos sobre los ejes son equivalentes a (x_1, y_1), y denotémoslos por (x_2, y_0) y (x_0, y_2), obteniendo

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_0) \text{ y } (x_1, y_1) \sim (x_0, y_2) .$$

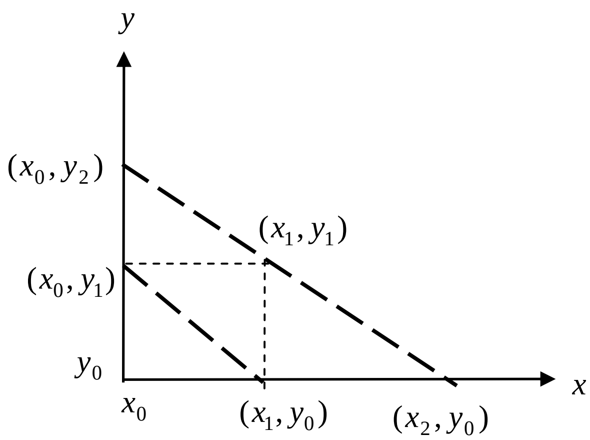


Fig. 4 Representación gráfica de las curvas de indiferencia para $(x_1, y_0) \sim (x_0,\ y_1), (x_1, y_1) \sim (x_2, y_0)$ y $(x_1, y_1) \sim (x_0, y_2)$.

Nota

Una forma de determinar si la función de valor es aditiva consiste en preguntarle al decisor sobre la relación entre (x_2, y_0) y (x_0, y_2). Si él contesta que no hay indiferencia entre ellos, entonces la función no es aditiva, ya que una relación de indiferencia debe ser transitiva, luego de $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_0)$ y $(x_1, y_1) \sim (x_0, y_2)$ se tendrá que deducir que $(x_2, y_0) \sim (x_0, y_2)$.

En caso de que la función de valor pase la prueba de aditividad, se puede continuar y entonces, $2 = v(x_1, y_1) = (x_2, y_0)$ y $2 = v(x_1, y_1) = v(x_0, y_2)$. Por la aditividad de la función *v*, resulta

$$v(x_0, y_2) = v_x(x_0) + v_y(y_2) = 0 + v_y(y_2) = 2 \Rightarrow v_y(y_2) = 2$$
$$v(x_2, y_0) = v_x(x_2) + v_y(y_0) = v_x(x_2) + 0 = 2 \Rightarrow v_x(x_2) = 2$$

Así, el proceso se continúa, preguntándole al decisor que punto sobre el eje *x* es indiferente con (x_2, y_1), denotémoslo con (x_3, y_0). Posteriormente que punto sobre el eje de las *y* es indiferente con (x_1, y_2), denotémoslo con (x_0, y_3).

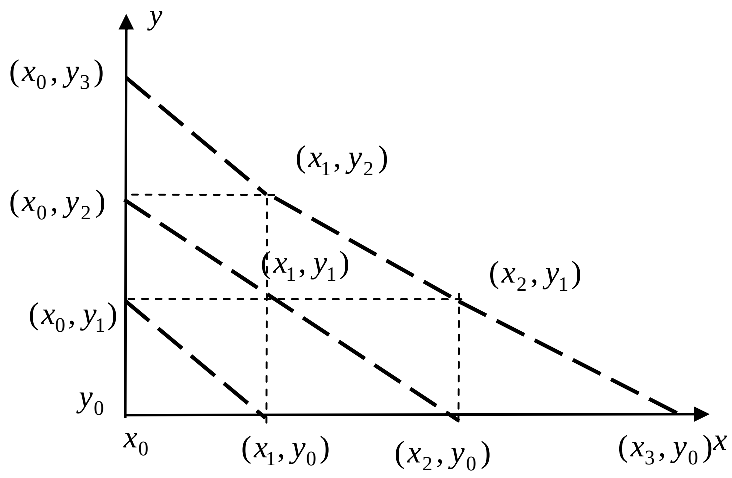


Fig. 5 Representación gráfica de las curvas de indiferencia para $(x_1, y_0) \sim (x_0, y_1)$; $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_0)$ y $(x_1, y_1) \sim (x_0, y_2)$; $(x_3, y_0) \sim (x_2, y_1) \sim (x_1, y_2) \sim (x_0, y_3)$.

Con la ayuda de la aditividad de la función de valor, vamos a calcular el valor de $v(x_2, y_1)$ y $v(x_1, y_2)$.

$$v(x_2, y_1) = v_x(x_2) + v_y(y_1) = 2 + 1 = 3$$
$$v(x_1, y_2) = v_x(x_1) + v_y(y_2) = 1 + 2 = 3$$

Luego, por las indiferencias y la función de valor

$$v(x_3, y_0) = v(x_2, y_1) = 3$$
$$v(x_0, y_3) = v(x_1, y_2) = 3$$

De esta forma hemos obtenido la **propiedad de Thomson**.

Para toda $x_0, x_1, x_2 \in X$ y $y_0, y_1, y_2 \in Y$, $\left.\begin{array}{l}(x_0, y_1) \sim (x_1, y_0)\\(x_2, y_0) \sim (x_0, y_2)\end{array}\right\} \Rightarrow (x_2, y_1) \sim (x_1, y_2)$

Así, sucesivamente con la indiferencia y la aditividad de la función de valor, podemos calcular los diferentes valores para la función *v* y las funciones v_x y v_y, cuyas gráficas se muestran en la figura 6.

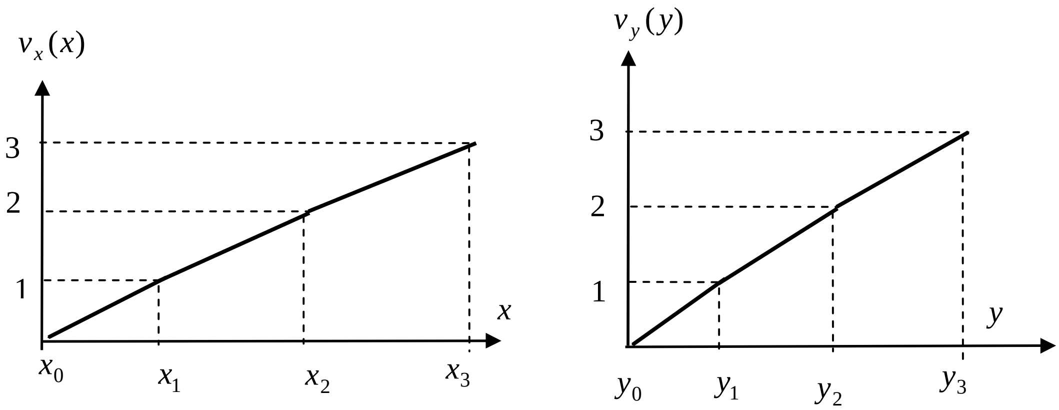


Fig. 6 Representación gráfica de las funciones de valor v_x y v_y.

En un problema práctico ***¿cómo se puede construir una función de valor aditiva?***

La construcción de la función de valor aditiva con 2 atributos, se puede llevar a cabo siguiendo los siguientes pasos.

1. Rankear cada uno de los atributos, denotémoslos por *a* y *b*, iniciando con el menos preferente $a_0 \prec a_1 \prec \cdots \prec a_n; b_0 \prec b_1 \prec \cdots \prec b_n$ (nótese que dependiendo del atributo, no necesariamente es el que tenga menor valor).
2. Colocar los puntos rankeados en el paso anterior, el menos preferente del atributo 1 con el menos preferente del atributo 2, (a_0, b_0), así sucesivamente hasta terminar con el mejor rankeado en cada atributo, (a_1, b_1), $(a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)$.
3. Asignar un valor a la función de valor para el caso de atributos con menos preferencia, se recomienda **iniciar con cero**, $v(a_0, b_0) = 0$.
4. Con el valor asignado en el punto anterior y la propiedad que la función de valor es aditiva, se puede asignar el valor a la función de valor con un atributo, $0 = v(a_0, b_0) = v_a(a_0) + v_b(b_0)$, por ejemplo $0 = v_a(a_0) = v_b(b_0)$.
5. Se elige el siguiente valor de uno de los atributos, por ejemplo a_1 , y se asigna un valor mayor al anterior (paso 4) a su función de valor de un atributo. Si en el paso 4 se asignó cero, entonces se recomienda ahora asignar el valor 1,
$$1 = v_a(a_1) = v_a(a_1) + 0 = v_a(a_1) + v_b(b_0) = v(a_1, b_0).$$
6. Se pregunta al decisor que punto sobre el eje del otro atributo es indiferente con (a_1, b_0). Sea este valor b_1^*, el valor que menciona el decisor puede o no coincidir con (a_0, b_1).
   - En caso de que $b_1^* = b_1$, y utilizando la aditividad de la función de valor

$$1 = v(a_1, b_0) = v(a_0, b_1^*) = v(a_0, b_1) = v_a(a_0) + v_b(b_1) = 0 + v_b(b_1) = v_b(b_1).$$

- En caso de que $b_1^* \neq b_1$, y utilizando la aditividad de la función de valor

$$1 = v(a_1, b_0) = v(a_0, b_1^*) = v_a(a_0) + v_b(b_1^*) = 0 + v_b(b_1^*) = v_b(b_1^*).$$

Ahora para encontrar el valor de $v_b(b_1)$, se puede utilizar una proporción con b_0, b_1 y b_1^* y $v_b(b_0)$, $v_b(b_1)$ y $v_b(b_1^*)$.

$$\frac{v_b(b_1^*) - v_b(b_1)}{v_b(b_1) - v_b(b_0)} = \frac{b_1^* - b_1}{b_1 - b_0} \text{ o } \frac{v_b(b_1^*) - v_b(b_1)}{v_b(b_1^*) - v_b(b_0)} = \frac{b_1^* - b_1}{b_1^* - b_0} \text{ o alguna otra.}$$

De donde se despeja y encuentra el valor de $v_b(b_1)$.

7. Repetir los pasos 4, 5 y 6 para (a_1, b_1), $(a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)$, obteniendo de esta forma los valores para $v(a_i, b_j)$, $v_a(a_i)$ y $v_b(b_j)$, para toda *i, j* de cero a *n*.

Finalmente veremos los teoremas que justifican la existencia y unicidad de la función ordinaria de valor para el caso bidimensional

TEOREMA 14 Existencia de la función ordinaria de valor aditiva bidimensional.

Si los siguientes 6 axiomas son satisfechos, entonces existe una función aditiva de valor con la cual se representa $\succsim$ en el conjunto de alternativas $A = X \times Y$ tal que

$$(x, y) \succsim (x', y') \Leftrightarrow v_X(x) + v_Y(y) \geq v_X(x') + v_Y(y').$$

Además los axiomas 1-3 y el 5 son necesarios para tal representación.

Axioma 1.Orden débil de $\succsim$ en $A = X \times Y$.

***Axioma 2. Independencia** X y Y son mutuamente preferencialmente independientes.*

***Axioma 3. Condición de Thomson**.*

***Axioma 4. Restricción de solubilidad**.*

***Axioma 5. Arquimediano**.*

***Axioma 6. Condición de esensiabilidad de atributos**.*

El **atributo** *X* es **esencial** si existen $x_0, x_1 \in X$ tales que $(x_1, y) \succ (x_0, y)\ \forall y \in Y$ o equivalentemente $x_1 \succsim_X x_0$.

Ahora veremos un teorema que muestra la unicidad de la función de diferencia de valor.

TEOREMA 15 Unicidad de la función ordinaria de valor aditiva bidimensional.

Bajo las condiciones de solubilidad dos funciones aditivas de valor

$$v(x,y)=v_X(x)+v_Y(y) \text{ y } w(x,y)=w_X(x)+w_Y(y),$$

concuerdan con las mismas preferencias si y solamente si existen $\alpha>0$ *y* β_X,β_Y *tales que*

$$w_X(x)=\alpha v_X(x)+\beta_X \quad y \quad w_Y(y)=\alpha v_Y(y)+\beta_Y.$$

2.5.4 MODELO ADITIVO DE VALOR PARA TRES O MÁS ATRIBUTOS

Los conceptos y resultados de la sección anterior pueden ser generalizados a 3 o más atributos, la única diferencia es que no podremos graficar la construcción de la función de utilidad para el caso de más de tres dimensiones.

En esta subsección tomamos en cuenta que cada alternativa puede ser representada por tres o más atributos. Por ejemplo, para $A=X_1\times X_2\times X_3$ el **atributo preferencialmente independiente** puede tener 6 situaciones, C_1^3 casos de un atributo preferencialmente independiente de los otros dos, y C_2^3 casos de dos atributos preferencialmente independientes del otro. Es decir, cuando tenemos tres atributos podemos hablar de $C_1^3+C_2^3=2^3-2=6$ variantes de preferencias independientes.

Utilizando la notación anterior las preferencias marginales serán:

$$\succsim_{X_1},\quad \succsim_{X_2},\quad \succsim_{X_3}\quad \succsim_{X_1,X_2},\quad \succsim_{X_1,X_3},\quad \succsim_{X_2,X_3}$$

Es decir, el atributo X_1 es preferencialmente independiente de los atributos X_2 y X_3, si $(x_1,\gamma_2,\gamma_3)\succsim(x_1',\gamma_2,\gamma_3)$ para algún $\gamma_2\in X_2$ y $\gamma_3\in X_3\Rightarrow(x_1,\delta_2,\delta_3)\succsim(x_1',\delta_2,\delta_3)\ \forall\delta_2\in X_2,\delta_3\in X_3$. Podemos denotar la preferencia independiente por $(x_1,\gamma_2,\gamma_3)\succsim_{X_1}(x_1',\gamma_2,\gamma_3)$.

Similarmente, el atributo X_2 es preferencialmente independiente de los atributos X_1 y X_3, si $(\gamma_1,x_2,\gamma_3)\succsim(\gamma_1,x_2',\gamma_3)$ para algún $\gamma_1\in X_1,\gamma_3\in X_3\Rightarrow(\delta_1,x_2,\delta_3)\succsim(\delta_1,x_2',\delta_3)\ \forall\delta_1\in X_1,\delta_3\in X_3$. Podemos denotar la preferencia independiente por $(\gamma_1,x_2,\gamma_3)\succsim_{X_2}(\gamma_1,x_2',\gamma_3)$.

También el atributo X_3 es preferencialmente independiente de los atributos X_1 y X_2, si $(\gamma_1,\gamma_2,x_3)\succsim(\gamma_1,\gamma_2,x_3)$ para algún $\gamma_1\in X_1$ y $\gamma_2\in X_2\Rightarrow(\delta_1,\delta_2,x_3)\succsim(\delta_1,\delta_2,\dot{x}_3)\ \forall\delta_1\in X_1,\delta_2\in X_2$. Podemos denotar la preferencia independiente por $(\gamma_1,\gamma_2,x_3)\succsim_{X_3}(\gamma_1,\gamma_2,x_3)$.

Así, la pareja de atributos $X_1 \times X_2$ es preferencialmente independiente del atributo X_3, si $(x_1, x_2, \gamma_3) \succsim (x_1', x_2', \gamma_3)$ para algún $\gamma_3 \in X_3 \Rightarrow (x_1, x_2, \delta_3) \succsim (x_1', x_2', \delta_3)\ \forall \delta_3 \in X_3$. Podemos denotar la preferencia independiente por $(x_1, x_2, \gamma_3) \succsim_{X_1, X_2} (x_1', x_2', \gamma_3)$.

La pareja de atributos $X_1 \times X_3$ es preferencialmente independiente del atributo X_2, si $(x_1, \gamma_2, x_3) \succsim (x_1', \gamma_2, x_3')$ para algún $\gamma_2 \in X_2 \Rightarrow (x_1, \delta_2, x_3) \succsim (x_1', \delta_2, x_3')\ \forall \delta_2 \in X_2$. Podemos denotar la preferencia independiente por $(x_1, \gamma_2, x_3) \succsim_{X_1, X_3} (x_1', \gamma_2, x_3')$.

Finalmente, la pareja de atributos $X_2 \times X_3$ es preferencialmente independiente del atributo X_1, si $(\gamma_1, x_2, x_3) \succsim (\gamma_1, x_2', x_3')$ para algún $\gamma_1 \in X_1 \Rightarrow (\delta_1, x_2, \delta_3) \succsim (\delta_1, x_2', x_3')\ \forall \delta_1 \in X_1$. Podemos denotar la preferencia independiente por $(\gamma_1, x_2, x_3) \succsim_{X_2, X_3} (\gamma_1, x_2', x_3')$.

Cuando todas las combinaciones posibles de preferencias independientes se cumplen, entonces se dice que los atributos X_1, X_2, X_3 son **mutuamente preferencialmente independientes**.

En general para n atributos $A = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ el **atributo preferencialmente independiente** puede tener $C_1^n + C_2^n + \cdots + C_{n-1}^n = 2^n - 2$ situaciones, C_i^n casos de i atributos preferencialmente independiente de los otros $n - i$, para $1 \leq i \leq n-1$. Cuando todas las combinaciones posibles de preferencias independientes se cumplen, entonces se dice que los atributos $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son mutuamente preferencialmente independientes.

En el caso general, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \succsim (x_1', x_2', \ldots, x_n') \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} v_{X_i}(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} v_{X_i}(x_i')$. Mientras que en las relaciones de indiferencia

$$(x_{11}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) \sim (x_{10}, x_{21}, \ldots, x_{n0}) \sim \cdots \sim (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n1})$$
$$(x_{12}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) \sim \cdots \sim (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n2}) \sim (x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n0}) \sim \cdots \sim (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n-1,1} x_{n1})$$

Etc.

En donde, $x_{ik} \in X_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, tales que $x_{ik} \succsim x_{ij}$ para $k \geq j$.

Para entender la generalización, introducimos la siguiente notación al particionar el conjunto de índices $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ en $I_q = \{k \mid k \in I_n\}$ y su complemento, tal que la cardinalidad de $I_q = q$, con $q = 1, 2, \ldots, n-1$. De esta forma denotamos $X = \bigtimes_{i \in I_q} X_i$ y $Y = \bigtimes_{i \in I_q'} X_i$. Así, los elementos de *A*, los podemos representar por $\mathbf{a}\in A \Rightarrow \mathbf{a}=(\mathbf{x},\mathbf{y})$ en donde $\mathbf{x}\in X$ y $\mathbf{y}\in Y$ con (X,Y) una descomposición conocida de *A*.

La motivación de utilizar la notación anterior, consiste en que de esta forma el caso general lo podremos trabajar como en el caso bidimensional.

Definición 5

Se dice que el **atributo** X **es preferencialmente independiente del atributo** Y si para toda $\mathbf{x},\mathbf{x}'\in X$

$$(\mathbf{x},\boldsymbol{\alpha})\succsim(\mathbf{x}',\boldsymbol{\alpha}) \text{ para algún } \boldsymbol{\alpha}\in Y \text{, implica que } (\mathbf{x},\boldsymbol{\beta})\succsim(\mathbf{x}',\boldsymbol{\beta}) \text{ para todo } \boldsymbol{\beta}\in Y .$$

Similarmente, se dice que el **atributo** *Y* **es preferencialmente independiente del atributo** *X* si para toda $\mathbf{y},\mathbf{y}'\in Y$

$$(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{y})\succsim(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{y}') \text{ para algún } \boldsymbol{\alpha}\in X \text{, implica que } (\boldsymbol{\beta},\mathbf{y})\succsim(\boldsymbol{\beta},\mathbf{y}') \text{ para todo } \boldsymbol{\beta}\in X .$$

Si ambas se cumplen para cualquier posible descomposición (X,Y) de *A* se dice que *X* y *Y* son **mutuamente preferencialmente independientes**.

De forma similar que en el estudio de las probabilidades se puede definir las preferencias de orden marginalmente independientes.

Definición 6

Si *X* es preferencialmente independiente de *Y*, se denota la **preferencia marginal de orden** $\succsim_X$ sobre el conjunto *Y*, si

$$\mathbf{x}\succsim_X \mathbf{x}' \Leftrightarrow (\mathbf{x},\boldsymbol{\alpha})\succsim(\mathbf{x}',\boldsymbol{\alpha}) \text{ para algún } \boldsymbol{\alpha}\in Y .$$

Similarmente, se obtiene que *Y* es preferencialmente independiente de *X*.

Finalmente veremos los teoremas que justifican la existencia y unicidad de la función ordinaria de valor para el caso *n*-dimensional

TEOREMA 16 Existencia de la función ordinaria de valor bidimensional.

Si los siguientes 5 axiomas son satisfechos, entonces existe una función aditiva de valor con la cual se representa $\succsim$ *en el conjunto de alternativas* $A=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$

$n\geq 3$*, tal que* $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\succsim(x_1',x_2',\ldots,x_n') \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} v_{X_i}(x_i)\geq\sum_{i=1}^{n} v_{X_i}(x_i')$.

Además los axiomas 1,2 y 4 son necesarios para tal representación.

> ***Axioma 1.Orden débil de*** $\succsim$ ***en*** $A = X \times Y$**.**
>
> ***Axioma 2.*** *X* y *Y son mutuamente preferencialmente independientes.*
>
> ***Axioma 3. Restricción de solubilidad para cada atributo***.
>
> ***Axioma 4. Arquimediano***.
>
> ***Axioma 5. Condición de esensiabilidad de cada atributo***.

Ahora veremos un teorema que muestra la unicidad de la función de diferencia de valor

TEOREMA 17 Unicidad de la función ordinaria de valor *n*-dimensional.

> *Bajo las condiciones de solubilidad dos funciones aditivas de valor*
>
> $$v(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n} v_{X_i}(a_i) \ \ y \ \ w(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n} w_{X_i}(a_i),$$
>
> *concuerdan con las mismas preferencias si y solamente si existen* $\alpha > 0$ *y* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ *tales que*
>
> $$w_{X_i}(a_i) = \alpha v_{X_i}(a_i) + \beta_i \quad para \ \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

2.5.5 MODELO DE FUNCIONES LINEALES DE VALOR

Supóngase que estamos en un problema multiatributo, es decir, el conjunto de alternativas $A = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ y tenemos una función de valor *v*, tal que

$$v(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i x_i \ .$$

En donde, los coeficientes ρ_i se conocen como **pesos de la función**. A este tipo de funciones se les da el nombre de **funciones lineales de valor**. Son las funciones lineales de valor son otro tipo particular de funciones de valor que simplifican el estudio y aplicaciones a la economía y la investigación de operaciones.

Una de las primeras aplicaciones de las funciones lineales de valor que se han revisado está en la programación lineal. Puesto que hemos de recordar que en esta área de la Investigación de Operaciones, tanto la función objetivo como sus restricciones son lineales.

Ahora veremos los teoremas de existencia y unicidad de la función lineal de valor.

TEOREMA 18 Existencia de la función lineal de valor.

Si los siguientes 3 axiomas son satisfechos, entonces existe una función lineal de valor para $A = \mathbb{R}^n$ *con la cual se representa* $\succsim$ *en* A

Axioma 1.Orden débil de $\succsim$ ***en*** A.

Axioma 2. *Existe una constante* $\rho_{ij}:1$ *entre* a_i *y* a_j *si y solamente si para cualquier* $\mathbf{a} \in A$: $(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_n) \sim (a_1, \ldots, a_i + \rho_{ij} k, \ldots, a_j - k, \ldots, a_n)$, *para cualquier* k *positivo o negativo y par de atributos.*

Axioma 3. Monotonía. *Sea* $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ *entonces existe un* $\mathbf{a} \in A$ *tal que* $\mathbf{a} \succ \mathbf{0}$. *Además, para cualquier* $\mathbf{b} \in A$ *y cualquier* $\lambda > 0$ *se cumple* $\mathbf{b} + \lambda \mathbf{a} \succ \mathbf{b}$.

TEOREMA 19 Unicidad de la función lineal de valor *n*-dimensional.

Sea $A = \mathbb{R}^n$ *y dos funciones lineales de valor*

$$v(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i x_i \ \text{ y } \ w(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i x_i$$

concuerdan con las mismas preferencias si y solamente si existen $\alpha > 0$ *tal que*

$$w(\mathbf{a}) = \alpha v(\mathbf{a}) \ \textit{ es decir, } \ \pi_i = \alpha \rho_i \ \textit{ para } \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Capítulo 3

LOTERÍAS Y FUNCIONES DE UTILIDAD DE UN OBJETIVO

En el Capítulo anterior se discutieron las relaciones de preferencia de orden y se construyó la función de valor, la cual como veremos en el presente capítulo sirve de base para construir las funciones de utilidad, tema central del capítulo.

Antes de iniciar con las funciones de utilidad, veremos qué sucede cuando en un problema real se lleva a cabo la introducción de incertidumbre. La introducción de incertidumbre se debe a que en la realidad las decisiones raramente son estáticas.

La incertidumbre el decisor la puede introducir sutilmente con ayuda de, un juego al azar, las Loterías. Él tiene una medida de valor v_{ij}, a la cual le puede aplicar el criterio de valor esperado y tomar la mejor decisión. Por ejemplo, en el caso de pagos o beneficios, en donde se tienen los eventos $\{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n\}$ y función de valor v_{kj} la elección de la mejor acción a_k de $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ estará dada por:

$$\sum_{j=1}^{n} P(\theta_j) v_{kj} = \max_{i}^{m} \left\{ \sum_{j=1}^{n} P(\theta_j) v_{ij} \right\}. \qquad \textbf{(1)}$$

En donde, $P(\theta_j)$ es la probabilidad de que ocurra el estado de la naturaleza θ_j, de tal forma que $\sum_{j=1}^{n} P(\theta_j) = 1$. Por otro lado, v_{kj} es la función de valor para la acción *k* y evento *j*. Mientras que a $\sum_{j=1}^{n} P(\theta_j) v_{kj}$ le daremos el nombre de **utilidad esperada de la acción** a_k. Por lo tanto, la regla de decisión la llamaremos "**Regla de la utilidad esperada**".

Primeramente debemos notar que la utilidad v_{kj} es más que una función ordinaria de valor. Las funciones ordinarias de valor son solamente transformaciones crecientes y con respecto a su valor esperado o promedio no tienen sentido. Por ejemplo, se lanza una moneda no cargada y tenemos que el decisor acepta una de las siguientes opciones.

Opción *A*: Ganar10 pesos con probabilidad 0.5 y perder 6 pesos con probabilidad 0.5.

Opción *B*: Ganar1000 pesos con probabilidad 0.5 y perder 500 pesos con probabilidad 0.5.

En términos de valor esperado resulta:

Opción *A*: $0.5(10)+0.5(-6)=2$.

Opción *B*: $0.5(1000)+0.5(-500)=250$.

Podemos apreciar que en la opción *B* resulta el valor esperado en dinero más grande. Pero sin embargo, se puede predecir que mucha gente elegiría la opción *A*, porque el precio de perder es pequeño, 6 pesos, comparado con el precio de perder en la opción *B*, 500 pesos. Es decir, el riesgo monetario en la opción *A* es pequeño. Por otro lado, no se quiere decir que sea irracional elegir la opción *B*, ya que si el jugador es rico, perder 500 pesos no es significante para él. Pero decidir que la opción *B* no es racional por ser cara no tiene base matemática, sin embargo, si adoptamos el criterio de valor esperado ésa sería la decisión.

Puesto que más dinero invariablemente es preferente sobre menos dinero, la función ordinaria de valor es absolutamente valida para representar a todas las opciones en sus preferencias en los juegos de dinero. Sin embargo, sigue latente la elección de la opción *A* para el caso de jugadores que no tengan demasiado dinero. Por lo tanto, es necesario tener una mejor función que nos ayude a tomar decisiones racionales, esto se puede lograr si bajo un sistema de preferencias, bien establecido, el decisor define una función en la que él puede implantar sus preferencias, desde la peor a la mejor situación. Por ejemplo, el decisor puede introducir la función *u*, tal que en la peor y mejor situación toma los valores $u(-500)=-1$ y $u(1000)=1$, respectivamente, mientras que a las opciones restantes el decisor les asigna valores en este rango con respecto a sus preferencias, $u(-6)=-0.1$ y $u(10)=0.2$. Entonces, tenemos que bajo el criterio de valor esperado

Opción *A*: $0.5u(10)+0.5u(-6)=0.5(0.2)+0.5(-0.1)=0.05$.

Opción *B*: $0.5u(1000)+0.5u(-500)=0.5(1)+0.5(-1)=0$.

De tal forma que el decisor preferiría la opción *A* sobre la *B*.

Sin embargo, el exigir que cualquiera de estas dos funciones $u(\bullet)$ o $v(\bullet)$ sea tomada como una representación universal de todos los decisores es un error. Durante el Capítulo veremos que para cada decisor existe una función $u(\bullet)$, la cual representará sus preferencias bajo cierto sistema axiomático de racionalidad y veremos 2 métodos de construcción de dichas funciones:

- Con base en las preferencias del decisor, apoyándose en la *aversión, propensión* o *neutralidad* al riesgo del decisor.
- Con base en funciones analíticas que cumplan las características de una función de utilidad.

Primeramente, veremos algunos conceptos básicos que se utilizan en problemas económicos en los cuales existe incertidumbre y se pueden trabajar en las loterías, como son: Prima de riesgo, precio de compra, valor de la información perfecta y el equivalente bajo certeza. Posteriormente, estudiaremos las funciones de utilidad con un solo objetivo, con 2 objetivos o más las veremos en el Capítulo 3.

Para la redacción del capítulo se consultó la bibliografía [1], [2], [3], [4], [7], [8], [9], [10], [11], [12] y [13].

3.1 PREFERENCIAS REFERENTES A LOTERÍAS

En está sección se estudiarán las decisiones racionales tomadas en los juegos que están determinados por simples mecanismos como las loterías. Para tal efecto asumiremos sólo un número pequeño de premios. Sea $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ el conjunto de posibles premios. En particular se asumirá que uno de los premios es el premio de perder, es decir, ganar nada.

Una lotería la representaremos por

$$l=\langle p_1,x_1;\; p_2,x_2;\ldots;p_n,x_n\rangle. \tag{2}$$

Donde $p_i \geq 0$, denota la probabilidad de ganar x_i, para $i=1,2,\ldots,n$ y deben cumplir $\sum_{i=1}^{n} p_i=1$. El caso $p_i=0$, indica que los premios seguros no son posibles en la lotería. A estas loterías les llamaremos **loterías simples**. Por otro lado, el decisor debe ser capaz de considerar **loterías compuestas**, entendiendo por éstas a las loterías en donde todos o algunos de los premios son también loterías. Por ejemplo,

$$l=\langle q_1,l_1;q_2,l_2;\ldots;q_m,l_m\rangle. \tag{3}$$

Donde $q_i \geq 0$ denota la probabilidad de ganar y entrar a la lotería l_i para $i=1,2,\ldots,m$ y deben cumplir $\sum_{i=1}^{m} q_i=1$. Denotaremos al conjunto de todas las loterías, por *L*.

En las loterías simples se tiene en forma directa los premios $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$, mientras que en las loterías compuestas los premios finales de una lotería son aquellos elementos de *X* con los cuales se obtienen los últimos resultados de la lotería compuesta, las cuales consideraremos que son **loterías finitas compuestas**. Entendiendo por lotería compuesta finita a un subconjunto de premios del conjunto *X*, que se obtiene después de un número finito de aleatorizaciones.

Sea $\mathscr{A}$ el conjunto de todos los premios $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, que incluye al conjunto *L* de todas las loterías que intervienen en las loterías compuestas. Es decir,

$$\mathscr{A} = X \cup L\,.$$

Se verá más adelante que bajo suposiciones razonables del decisor, acerca de la **consistencia de sus preferencias**, existe una función de utilidad $u(\bullet)$ en *X* tal que el decisor lleve a cabo las relaciones

$$x_i \succsim x_j \Leftrightarrow u(x_i) \geq u(x_j) \quad \forall x_i, x_j \in X \tag{4}$$

$$\langle p_1, x_1; \ldots; p_n, x_n \rangle \succsim \langle p_1', x_1; \ldots; p_n', x_n \rangle \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} p_i' u(x_i) \quad \forall x_i, x_j \in X \tag{5}$$

Para cualquier par de loterías simples en $\mathscr{A}$..

Considerando (4) se muestra que $u(\bullet)$ es una función ordinaria de valor en un conjunto de premios *X*, considerando (5) se muestra que $u(\bullet)$ posee las propiedades de la utilidad esperada en un conjunto de loterías simples. Es decir, esto implica que es apropiado elegir entre loterías simples, de acuerdo a la regla de la utilidad esperada. Aunque cabe aclarar que las suposiciones también justifican elegir entre loterías compuestas de acuerdo a la regla de la utilidad esperada.

La primera suposición que haremos es que el decisor tiene sobre $\mathscr{A}$ una preferencia de orden débil (comparable y transitiva). En este momento cabe recordar que en general $\mathscr{A}$ contiene tanto, premios como loterías, de tal forma que la comparabilidad o completez se complica para cualquier premio x_i o lotería *l* simple o compuesta. Así, el decisor tiene que llevar a cabo

$$x_i \succsim l\,,\ l \succsim x_i \text{ o ambos.}$$

En otras palabras el decisor debe estar preparado para comparar y jerarquerizar premios y loterías. Tales comparaciones no son fáciles de hacer, por ejemplo,

¿Qué prefiere usted,

- \$25 con certeza o
- una lotería de \$1,000 con probabilidad 0.15 o
- una lotería de \$500 con probabilidad 0.30 o

- una lotería de \$200 con probabilidad 0.45 o
- una lotería de \$1,100 con probabilidad 0.10?

Por otro lado, si tales comparaciones son difíciles

¿Qué tan difícil será comparar 2 loterías?

Sin embargo, cuando se construyen loterías supondremos que el decisor está capacitado para asumir tales comparaciones y nos concretaremos sólo en ver los axiomas bajo los cuales está construida la teoría de las loterías y las funciones de utilidad.

3.1.1 AXIOMAS DE COMPORTAMIENTO RACIONAL

En el Capítulo anterior revisamos la parte axiomática sobre las preferencias de orden, vimos las relaciones estrictas, débiles y de indiferencia. Ahora en esta sección prolongaremos el estudio de las preferencias aplicado a las loterías.

AXIOMA 1 de orden débil

Sobre el conjunto $\mathscr{A}$ se cumplen los axiomas de orden débil para $\succsim$, $\succ$ y $\sim$

1).- *Completez:* $a \succsim b$, $b \succsim a$ *o ambos.*

2).- *Transitividad:* $\forall a, b, c \in \mathscr{A}$, *si* $a \succsim b$ y $b \succsim c$, *entonces* $a \succsim c$.

3).- *Consistencia de la indiferencia y preferencias débiles:* $\forall a, b \in \mathscr{A}$ *si* $a \sim b$ *sólo si* $a \succsim b$ y $b \succsim a$.

4).- *Consistencia de preferencias estrictas y preferencias débiles:* $\forall a, b \in \mathscr{A}$ *si* $a \succ b$ *sólo si* $a \not\succsim b$.

De esta manera el decisor podrá y deberá etiquetar los premios, de tal forma que

$$x_1 \succsim x_2 \succsim \cdots \succsim x_n .$$

En ocasiones para no asumir trivialidades se pide la preferencia estricta en la jerarquía de los premios.

AXIOMA 2 No trivialidad

El decisor debe llevar a cabo $x_1 \succ x_n$.

Aunque existen loterías que no tienen preferencias estrictas. Por ejemplo,

Lotería A: Ganar \$100 pesos si se lanza la moneda y resulta águila.

Ganar \$0 pesos si se lanza la moneda y resulta sol.

Lotería B: Ganar \$100 pesos si se lanza un dado y resulta un número par.

Ganar \$0 pesos si se lanza un dado y resulta un número impar.

De esta forma se puede apreciar que en ambas loterías se tiene el 50% de probabilidades de ganar \$100 y 50% de probabilidades de no ganar nada.

AXIOMA 3 Reducción de loterías compuestas

> *Sea una lotería compuesta* $l = \langle q_1, l_1; q_2, l_2; \cdots; q_m, l_m \rangle$, *la cual tiene como premios a las loterías* $l_1, l_2, \ldots, l_m$, *con* $l_j = \langle p_{j1}, x_1; p_{j2}, x_2; \cdots; p_{jn}, x_n \rangle$ *para* $j = 1, 2, \ldots, m$, *entonces* $l \sim l^*$, *en donde* $l^* = \langle p_1, x_1; p_2, x_2; \cdots; p_n, x_n \rangle$ *con* $p_i = q_1 p_{1i} + \cdots + q_m p_{mi}$

En este axioma podemos notar que una de las importancias en la suposición reside en que la probabilidad p_i de ganar el premio x_i, resulta de la lotería compuesta *l*. Así, de esta manera, la suposición es una simple demanda de que la preferencia del decisor depende solamente de los últimos premios y las probabilidades correspondientes con las cuales ellos se obtienen. Aquí el número de cambios en los mecanismos envueltos en la generación de dichas probabilidades es irrelevante.

Este axioma tiene la siguiente implicación, considérese la lotería

$$l = \langle 0, x_1; 0, x_2; \cdots; 1, x_i; \ldots; 0, x_n \rangle .$$

Es decir, una lotería que con el 100% de probabilidades recibe el premio x_i y no recibe nada más. De tal forma que para el decisor es indiferente entre recibir el premio x_i y la lotería *l*. Por consiguiente,

$$x_i \sim \langle 0, x_1; 0, x_2; \cdots; 1, x_i; \ldots; 0, x_n \rangle \quad \forall x_i \in X .$$

AXIOMA 4 Sustitubilidad

> *Sean* $b, c \in \mathscr{A}$ *tales que* $b \sim c$ *y* $l \in \mathscr{A}$ *cualquier lotería simple o compuesta tal que* $l = \langle \ldots; q, b; \ldots \rangle$, *entonces si los demás resultados no se cambian*
>
> $$l = \langle \ldots; q, b; \ldots \rangle \sim \langle \ldots; q, c; \ldots \rangle = l^* .$$

Notaremos los siguientes puntos del axioma.

- $b, c \in \mathscr{A}$, cada uno de ellos puede ser premio o lotería.
- En *l*, *q* es la probabilidad de que *b* resulte directo. Similarmente en l^*, *q* es la probabilidad de que *c* resulte directo. La única diferencia es que *c* sustituye a *b*.
- Si $b \sim c$, surge la pregunta ¿cómo puede el decisor entender si él recibe a *b* o *c*, como un resultado de una lotería?. Por ejemplo, suponga que *b* es un premio y *c* una lotería, entonces al sustituir *c* por *b* se incrementa la incertidumbre, porque minimamente se agrega un mecanismo más de probabilidad. Es decir, antes del último premio de la lotería en *b*, se tiene que llevar a cabo otro mecanismo aleatorio para la lotería en *c*.
- Debido a que el conjunto $\mathscr{A}$ contiene a los conjuntos de premios *X* y loterías *L* el decisor debe saber elegir entre ellos.

Por otro lado, con frecuencia en la toma de decisiones se tienen situaciones en donde la lotería sólo tiene dos resultados con probabilidades diferentes de cero. Es decir, loterías hipotéticas que denotaremos por $x_1 p x_r$ y representan una situación en donde el decisor recibe el premio preferente x_1 con probabilidad *p* sobre el premio menos preferente con probabilidad $1-p$. Así,

$$x_1 p x_r = \left\langle p, x_1; 0, x_2; \cdots; 0, x_{r-1}; 1-p, x_r \right\rangle,$$

es una lotería simple que asigna a x_1 el premio preferente de *X* con probabilidad *p* y a x_r el premio menos preferente en *X* con probabilidad $1-p$. Cualquier otro premio en esta lotería es imposible. Por lo tanto, dicho tipo de loterías se pueden representar como loterías binarias de la forma:

$$x_1 p x_r = \langle p, x_1; 1-p, x_r \rangle \ \forall p \in [0,1].$$

Esto implica que se cumple

$$x_1 p x_r = \left\langle p, x_1; 1-p, x_r \right\rangle \in \mathscr{A}, \ \forall p \in [0,1].$$

Nosotros asumiremos que el decisor está preparado en considerar sus preferencias para cada lotería de cualquier valor de *p*, $0 \leq p \leq 1$. Así, de esta forma hemos introducido un problema sobre la escala de referencias o regla que el decisor debe tener para medir sus preferencias.

Al conjunto de loterías $\{x_1 p x_r \mid 0 \le p \le 1\}$ se le da el nombre de “Experimento de referencia”, o “Experimento auxiliar”, mientras que a las loterías de la forma $x_1 p x_r$ se les conoce como “loterías de referencia”.

AXIOMA 5 Experimento de referencia

$x_1 p x_r \in \mathscr{A}$ *para toda p, tal que* $0 \le p \le 1$.

Con este axioma se tiene una situación en cuanto a la estructura de $\mathscr{A}$. Puesto que dicho conjunto contiene a todos los premios en *X*, todas las loterías en *L* todas las loterías de referencia posibles, juntas con todas las loterías finitas compuestas que pueden ser construidas por sustitución para una salida de lotería cualquier premio o lotería de referencia en $\mathscr{A}$ que sea indiferente a la salida.

La razón de introducir las loterías referenciales consiste en que de esta forma el decisor puede tener más claras sus preferencias en *L* y así tomar una mejor decisión. Pero queremos que la introducción de las loterías referenciales, sean consideradas por el decisor para sus preferencias en todo $\mathscr{A}$ y no sólo en *L*.

AXIOMA 6 Monotonía

$x_1 p x_r \succsim x_1 p^* x_r$ *si y sólo si* $p \ge p^*$.

El axioma indica que el decisor prefiere la lotería referencial en donde él tiene mayor probabilidad de ganar x_1.

AXIOMA 7 Continuidad

Para toda $x_i \in X$ *existe un* u_i, $0 \le u_i \le 1$, *tal que* $x_i \sim x_1 u_i x_r$.

El axioma nos indica lo siguiente, supóngase $x_1 = \$100$ y $x_r = \$0$ y que algunos otros premios son \$40 con certeza. Considerando loterías binarias $x_1 p x_r$, para diferentes valores de *p*. Por ejemplo, $p = 0.9999$, entonces el decisor prefiere

$$\$100(0.9999)\$0 \succ \$40.$$

Pero si $p = 0.01$, entonces el decisor prefiere

$$\$40 \succ \$100(0.01)\$0.$$

Si ahora se considera una secuencia de loterías binarias cuando p se incrementa desde 0 hasta 1. Resulta que inicialmente el premio \$40 es preferido que la lotería $x_1 p x_r$, pero cuando el valor de p aumenta esto se invierte. De tal manera que existe un valor intermedio de p tal que tomar una decisión entre la lotería $x_1 p x_r$ y la certeza \$40 es indiferente.

Nota

- El axioma 7 puede no cumplirse en situaciones criticas, es decir puede haber premios x_i tales que no exista un valor u_i, tal que $x_i \sim x_1 u_i x_r$. Por ejemplo, supóngase que $x_1 = \$1$, $x_i = \$0$ y $x_r =$ la muerte del decisor. Así, para cualquier $u_i < 1$ el decisor tiene que elegir entre recibir \$0 con certeza contra una lotería en donde él corre el riesgo de morir. Obviamente la mejor lotería para él consiste en ganar \$1, pero si $u_i = 1$, entonces $\$1(1)\$0 \sim \$1$, sin embargo $\$1 \succ \$0$ porque incrementa el valor monetario. Pero en esta situación no existe valor de u_i tal que $\$1 u_i \text{muerte} \sim \$0$.
- En muchas situaciones si existe un valor u_i tal que $x_i \sim x_1 u_i x_r$, pero en la práctica el decisor no puede discriminar a un valor preciso dado. Por ejemplo, en la situación de $\$100(u_i)\$0 \sim \$40$ supóngase que el decisor estableció que $u_i = 0.7$ es el valor frontera entre decidir \$40 o $\$100(u_i)\$0$, pero qué se puede decir con respecto a los valores próximos a 0.7, $u_i = 0.69999$ o $u_i = 0.70001$. Como veremos el análisis de decisión basado en la Teoría de utilidad esperada no demanda una precisión.

En el axioma 7 se ha preferido usar u_i en lugar de p_i que denota a la probabilidad en la lotería binaria, la cual da una indiferencia con x_i. Posteriormente, se probará que dicho valor de u_i dará la existencia de la función de utilidad *u*, tal que $u(x_i) = u_i$.

PROPOSICIÓN 1 Unicidad de u_i

En el axioma 7 el valor u_i es único.

Demostración

▼

Supóngase que existen 2 valores u_i y u_i^*, tales que

$$x_1 u_i x_r \sim x_i \sim x_1 u_i^* x_r ,$$

y que $u_i > u_i^*$, esto implica por el axioma de monotonía que $x_1 u_i x_r \succ x_1 u_i^* x_r$, pero esto contradice la suposición de $x_1 u_i x_r \sim x_i \sim x_1 u_i^* x_r$, ya que por transitividad $x_1 u_i x_r \sim x_1 u_i^* x_r$. Por lo tanto, $u_i \leq u_i^*$.

Similarmente para $u_i < u_i^*$ se concluye que $u_i \geq u_i^*$, de donde $u_i = u_i^*$.

▲

PROPOSICIÓN 2 Existencia de u_i

Sea la lotería $\langle 0, x_1; 0, x_2; \cdots; 1, x_i; \cdots; 0, x_r \rangle$, *entonces existe un valor* u_i, $0 \leq u_i \leq 1$, *tal que* $x_i \sim x_1 u_i x_r$.

Demostración

▼ De la observación del Axioma 3 tenemos que

$$x_i \sim \langle 0, x_1; 0, x_2; \cdots; 1, x_i; \cdots; 0, x_r \rangle .$$

Por el axioma 4 de sustitución y la condición $x_i \sim x_1 u_i x_r$

$$x_i \sim \langle 0, x_1; 0, x_2; \cdots; 1, x_1 u_i x_r; \cdots; 0, x_r \rangle .$$

Por el axioma 3 podemos expresar la lotería compuesta en otra equivalente pero simple

$$x_i \sim \langle u_i, x_1; 0, x_2; \cdots; 0, x_i; \cdots; (1-u_i), x_r \rangle .$$

Por definición de loterías binarias

$$x_i \sim x_1 u_i x_r .$$

▲

3.1.2 EXISTENCIA DE LA FUNCIÓN DE UTILIDAD

Con base en este resultado podemos pasar a la demostración de la existencia de una función de utilidad.

TEOREMA 1 Existencia de la función de utilidad

Si tenemos un método para llevar acabo preferencias sobre $\mathscr{A}$ *que cumplan los axiomas* 1-7, *entonces existe una función de utilidad* $u(\bullet)$ *en X, la cual representa* $\succsim$ *en el sentido*
a) $x_i \succsim x_j \Leftrightarrow u(x_i) \geq u(x_j), \quad \forall x_i, x_j \in X$.

b) $\langle p_1, x_1; p_2, x_2; \cdots; p_r, x_r \rangle \succsim \langle p'_1, x_1; p'_2, x_2; \cdots; p'_r, x_r \rangle \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{r} p_i u(x_i) \geq \sum_{i=1}^{r} p'_i u(x_i)$.

Demostración

▼ Considerando la lotería simple

$$l = \langle p_1, x_1; p_2, x_2; \cdots; p_r, x_r \rangle .$$

Por el axioma 7 de continuidad, tenemos que cada premio x_i es indiferente de la lotería referencial $x_i \sim x_1 u_i x_r$, para $i = 1, 2, \ldots, r$. Luego llevando a cabo una por una de las r sustituciones, según el axioma 4, resulta

$$l \sim \langle p_1, x_1 u_1 x_r; p_2, x_1 u_2 x_r; \cdots; p_r, x_1 u_r x_r \rangle .$$

Pero por definición de lotería binaria $x_1 u_i x_r = \langle u_i, x_1; 0, x_2; \cdots; 0, x_i; \cdots; (1-u_i), x_r \rangle$ y por el axioma 3, reducción de loterías compuestas

$$l \sim \langle p_1 u_1 + p_2 u_2 + \cdots + p_r u_r, x_1; 0, x_2; \cdots; 0, x_{r-1}; p_1(1-u_1) + p_2(1-u_2) + \cdots + p_r(1-u), x_r \rangle .$$

Pero

$$p_1(1-u_1) + p_2(1-u_2) + \cdots + p_r(1-u) = \sum_{i=1}^{r} p_i - \sum_{i=1}^{r} p_i u_i = 1 - \sum_{i=1}^{r} p_i u_i .$$

Luego,

$$l \sim \left\langle \sum_{i=1}^{r} p_i u_i, x_1; 0, x_2; \cdots; 0, x_{r-1}; 1 - \sum_{i=1}^{r} p_i u_i, x_r \right\rangle = x_1 \left(\sum_{i=1}^{r} p_i u_i \right) x_r .$$

Por transitividad de la indiferencia

$$l \sim x_1 \left(\sum_{i=1}^{r} p_i u_i \right) x_r .$$

Similarmente para $l^* = \langle p_1^*, x_1; p_2^*, x_2; \cdots; p_r^*, x_r \rangle$, resulta

$$l^* \sim x_1 \left(\sum_{i=1}^{r} p_i^* u_i \right) x_r .$$

Del axioma 1 referente al orden débil y el axioma 6 sobre la monotonía, tenemos que $l \succsim l^*$, luego

$$l \succsim l^* \Leftrightarrow x_1 \left(\sum_{i=1}^{r} p_i u_i \right) x_r \succsim x_1 \left(\sum_{i=1}^{r} p_i^* u_i \right) x_r \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{r} p_i u_i \geq \sum_{i=1}^{r} p_i^* u_i .$$

De esta forma para $u(x_i) = u_i$ se demuestra el inciso (b).

Para el inciso (a), tenemos $x_i \succsim x_j$, luego por el axioma 1 sobre el orden débil y la continuidad existe un valor $u_i \in [0,1]$, tal que $(x_i \sim x_1 u_i x_r$ y $x_j \sim x_1 u_j x_r)$. Así,

$$x_i \succsim x_j \Leftrightarrow x_1 u_i x_r \succsim x_1 u_j x_r \overset{\text{Ax. 6}}{\Leftrightarrow} u_i \geq u_j . \blacktriangle$$

3.1.3 UNICIDAD DE LA FUNCIÓN DE UTILIDAD

En la Proposición 1, vimos que si $x_i \in X$ existe un u_i, $0 \leq u_i \leq 1$, tal que $x_i \sim x_1 u_i x_r$ y dicho valor u_i es único. De tal forma que surge la pregunta si la función de utilidad, dada por $u(x_i) = u_i$ está definida de manera única, la respuesta es sí. Todo esto requiere que la función de utilidad que representa las preferencias del decisor en cualquiera de los sentidos vistos

- $x_i \succsim x_j \Leftrightarrow u(x_i) \geq u(x_j)\ \ \forall x_i, x_j \in X$.
- $\langle p_1, x_1; \ldots; p_n, x_n \rangle \succsim \langle p_1', x_1; \ldots; p_n', x_n \rangle \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} p_i' u(x_i)\ \ \forall x_i, x_j \in X$.
- $p \succsim p^* \Leftrightarrow \int_X p(x) u(x) dx \geq \int_X p^*(x) u(x) dx \Leftrightarrow E(u \mid p) \geq E(u \mid p^*)$.

sea apropiada.

De lo anterior se puede concluir que una función de utilidad debe ser una función ordinaria de valor sobre X y el orden de las loterías estará dado por sus utilidades esperadas, las cuales deben ser igualadas por las preferencias del decisor.

TEOREMA 2 Unicidad de la función de utilidad

Si $u(\cdot)$ es una función de utilidad en X (conjunto de premios), entonces

$$w(\cdot) = \alpha u(\cdot) + \beta \text{, con } \alpha > 0 ,$$

también es una función de utilidad representando las mismas preferencias.

Recíprocamente, si $u(\cdot)$ y $w(\cdot)$ son 2 funciones de utilidad en X representado las mismas preferencias, entonces existe un $\alpha > 0$ y $\beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$w(\cdot) = \alpha u(\cdot) + \beta .$$

Demostración

▼ **Primera parte**:

Sea $u(\cdot)$ una función de utilidad en *X*, por el axioma de orden débil y el Teorema de existencia del valor u_i, tenemos:

$$\begin{aligned} x_i \succsim x_j &\Leftrightarrow u(x_i) \geq u(x_j) \\ &\Leftrightarrow \alpha u(x_i) + \beta \geq \alpha u(x_j) + \beta \text{ para } \alpha > 0 \\ &\Leftrightarrow w(x_i) \geq w(x_j) \end{aligned}$$

Por otro lado, para las loterías obtenemos del mismo teorema de existencia

$$\begin{aligned} \langle p_1, x_1; p_2, x_2; \cdots; p_r, x_r \rangle \succsim \langle p_1', x_1; p_2', x_2; \cdots; p_r', x_r \rangle &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{r} p_i u(x_i) \geq \sum_{i=1}^{r} p_i' u(x_i) \\ &\Leftrightarrow \alpha \sum_{i=1}^{r} p_i u(x_i) + \beta \geq \alpha \sum_{i=1}^{r} p_i' u(x_i) + \beta \\ &\Leftrightarrow E(\alpha u + \beta \mid p) \geq E(\alpha u + \beta \mid p') \\ &\Leftrightarrow E(w \mid p) \geq E(w \mid p') \end{aligned}$$

Por lo tanto, se concluye que $w(\cdot) = \alpha u(\cdot) + \beta$, si es una función de utilidad que representa las mismas preferencias que *u*.

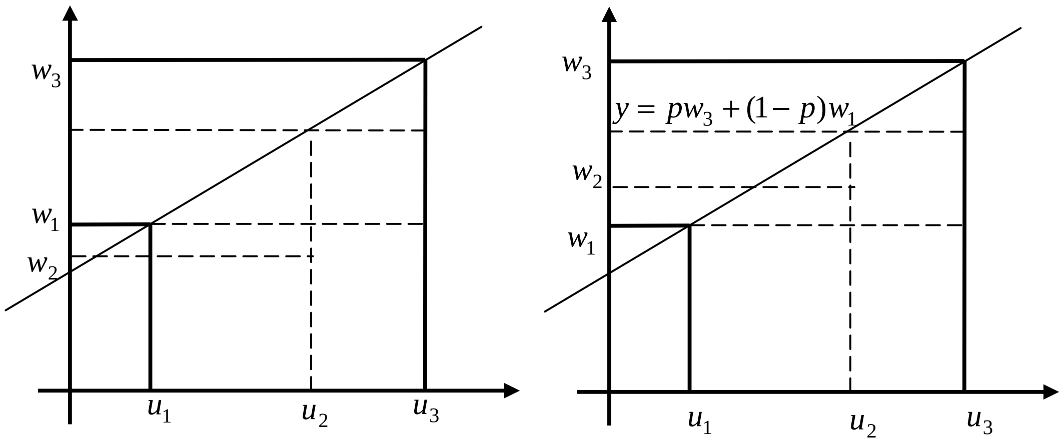
Segunda parte:

La demostración se hará por reducción al absurdo.

Sea $u(\cdot)$ y $w(\cdot)$ funciones de utilidad en *X* que representan las mismas preferencias vamos a suponer que

$$w(\cdot) \neq \alpha u(\cdot) + \beta, \text{ para } \alpha > 0 \qquad (*)$$

Por otro lado, representemos en el plano cartesiano los puntos (u_i, w_i), en donde $u_i = u(x_i)$ y $w_i = w(x_i)$. Estamos suponiendo que ellos cumplen con (*), y por consiguiente podemos elegir tres puntos que no sean colineales, $(u_1, w_1), (u_2, w_2)$ y (u_3, w_3), ver figuras siguientes.



(a) **(b)**

Sin perdida de generalidad suponemos que $u_1 < u_2 < u_3$. Sea $p \overset{\text{def}}{=} \dfrac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1}$ y consideremos la lotería $x_3 p x_1$. En términos de la función $u(\cdot)$, la lotería $x_3 p x_1$ tiene utilidad esperada

$$\begin{aligned} pu(x_3) + (1-p)u(x_1) &= \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1} u_3 + \left(1 - \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1}\right) u_1 \\ &= \frac{(u_2 - u_1)u_3 + (u_3 - u_2)u_1}{u_3 - u_1} \\ &= u_2 = u(x_2) \end{aligned}$$

Así, $x_2 \sim x_3 p x_1$.

De donde tenemos que

$$\begin{aligned} pu(x_3) + (1-p)u(x_1) &= u(x_2) \\ p\alpha u(x_3) + (1-p)\alpha u(x_1) &= \alpha u(x_2) \\ p\alpha u(x_3) + p\beta + (1-p)\alpha u(x_1) + (1-p)\beta &= \alpha u(x_2) + \beta \\ p[\alpha u(x_3) + \beta] + (1-p)[\alpha u(x_1) + \beta] &= \alpha u(x_2) + \beta \\ pw(x_3) + (1-p)w(x_1) &= w(x_2) \end{aligned}$$

Es decir,

$$w_2 = pw_3 + (1-p)w_1, \text{ para un valor } p \in [0,1]. \qquad (**)$$

Por otro lado, de la condición de no colinealidad resultan dos situaciones:

- Cuando w_2 está entre w_1 y w_3, ver figura anterior (b). Por la condición de no colinealidad, existe un valor, $y \neq w_2$, tal que por triángulos semejantes se cumple la relación

$$\frac{u_2 - u_1}{y - w_1} = \frac{u_3 - u_1}{w_3 - w_1}.$$

De donde resulta

$$\frac{y - w_1}{w_3 - w_1} = \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1} = p.$$

Por lo tanto, $y = w_1 + p(w_3 - w_1) = pw_3 + (1-p)w_1$, como $y \neq w_2$, se deriva:

$$w_2 \neq pw_3 + (1-p)w_1, \text{ para toda } p \in [0,1]. \qquad (***)$$

- En el caso en que w_2 no esté entre w_1 y w_3, ver figura anterior (a), resulta obvio (***), porque no existe una representación convexa de w_2 a través de w_1 y w_3. Finalmente, esto no puede ser ya que se contradice con (**), de tal forma que por reducción al absurdo se concluye que existe un $\alpha > 0$ tal que

$$w(\cdot) = \alpha u(\cdot) + \beta.$$

▲

3.2 CONCEPTOS BÁSICOS

En teoría de decisiones se trabaja constantemente en situaciones bajo incertidumbre, ejemplo clásico las loterías. Por ejemplo, supóngase que el administrador de una empresa se encuentra ante una situación de inversión en la modificación de un producto (que ha ido en decadencia) en su negocio, pero no conoce la probabilidad de que el nuevo producto tenga mayor o menor éxito que la del producto existente. El administrador puede estimar que sus ganancias con el nuevo producto serían de 15 millones con una probabilidad *p*, mientras que si continúa con el mismo producto tendría pérdidas por 3 millones con una probabilidad $1-p$, de tal forma que su situación la puede representar mediante una lotería $l = \langle p, 15; 1-p, -3 \rangle$, con premios en millones.

Podemos decir que bajo estas condiciones si alguien le ofreciera al menos 15 millones con certeza a cambio de la situación de inversión en la que él se encuentra, el administrador aceptaría. Por otro lado, viendo que con el producto anterior, el negocio va en quiebra, los trabajadores le pidieran al menos 3 millones con certeza, para que no tuviera que continuar con tal situación económica, él administrador se negaría rotundamente y continuaría con la lotería (situación de negocios).

3.2.1 EQUIVALENTE BAJO CERTEZA

De lo anterior, podemos deducir que se desprende una situación en la que al administrador le de lo mismo obtener la cantidad que se le ofrezca bajo certeza, que continuar con la lotería, a dicho valor se le conoce como su equivalente bajo certeza y se define de la siguiente forma.

Definición 1

Dada una situación incierta de decisión, se llama **Equivalente bajo certeza**, ***EBC***, a la mínima cantidad por la cual el decisor está dispuesto a cambiar esa situación que posee, lotería por la cantidad bajo certeza.

¿Cómo obtener el equivalente bajo certeza?

En una situación dada el equivalente bajo certeza se puede obtener de diferentes formas.

1. Si no se conoce la función de utilidad analítica

2. Cuando se conoce la función de utilidad analítica.

En esta situación se puede utilizar el hecho que se obtiene de la definición del *EBC*, que indica $EBC \sim l$. Posteriormente, se usa la función de utilidad obteniendo

$$u(EBC) = u(l).$$

Resultando una ecuación con respecto al *EBC*, cuya solución será el valor del *EBC*.

Ejemplo 1

Considerando una empresa que produce cierto artículo y tuvo ganancias este año de 150 millones, el administrador de la empresa quiere aumentar las ganancias con la introducción de un nuevo artículo similar al anterior. Para esto él puede contratar una consultora que hace estudios de mercado, la cual le cobra 20 millones, los resultados posibles de la demanda son: alta (a), regular (r) y baja (b). Con base en el historial de la consultora se tiene la siguiente tabla de errores en los pronósticos.

Pronóstico / Real	Porciento de desaciertos de la consultora		
	a	***r***	***b***
A	5	5	0
R	2	10	8
B	0	15	15

La tabla se interpreta de la siguiente forma, si la demanda fue alta (*A*) y se pronosticó regular (*r*) la consultora falla en el 5% de los casos. Así, para los demás casos.

Si la demanda fue alta y se pronosticó alta la consultora acierta en el 95% de los casos (fallo en el 5%), Si la demanda es regular y se pronosticó regular la consultora acierta en el 90% (fallo en el 10%), de los casos y finalmente si la demanda es baja y se pronosticó baja la consultora acierta en el 85% (fallo en el 15%), de los casos.

El administrador ha estimado lo siguiente para los tres tipos de demanda posibles si introduce el artículo nuevo:

Demanda alta (*A*), con $P(A) = 0.3$ y una ganancia de 300 millones.

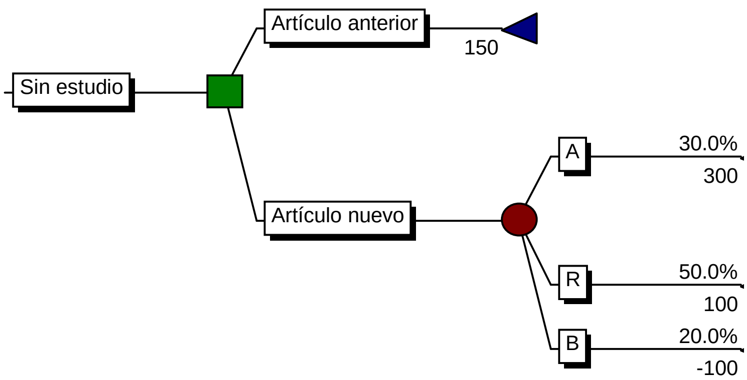
Demanda regular (*R*), con $P(R) = 0.5$ y una ganancia de 100 millones.

Demanda baja (*B*), con $P(B) = 0.2$ y una ganancia de -100 millones.

Calcula el *EBC*, en el caso que no se lleva a cabo un estudio de mercado, si se sabe que la función de utilidad en esta situación es $u(x) = (x+100)^2$.

Solución

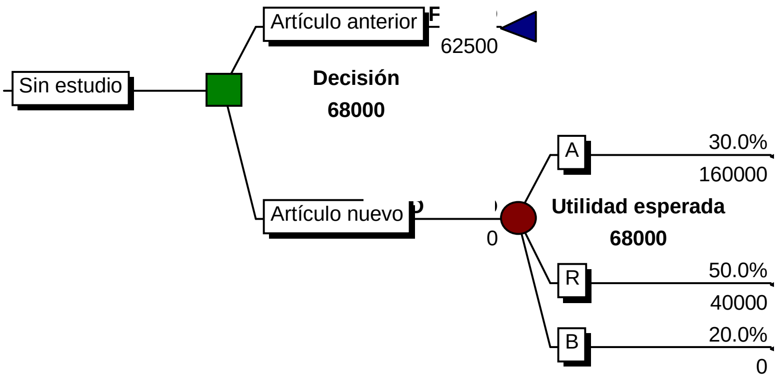
Primeramente trazamos el árbol cuando no se hace el estudio



Notamos que la rama del artículo nuevo se puede ver como una lotería

$$l = \langle 0.3,300;\ 0.5,100;\ 0.2,-100 \rangle .$$

Aplicando la función de utilidad $u(x) = (x+100)^2$, obtenemos



Lo cual implica que

$$u(l) = 0.30(300+100)^2 + 0.50(100+100)^2 + 0.2(-100+100)^2 = 68{,}000\,.$$

Finalmente aplicando $EBC \sim l$ y la función de utilidad se obtiene $u(EBC) = u(l)$. Así,

$$\begin{aligned} u(EBC) &= u(l) \\ (EBC+100)^2 &= 68000 \\ EBC+100 &= \pm\sqrt{68000} \\ EBC &= -100 \pm \sqrt{68000} \end{aligned}$$

De donde $EBC = 160.77$, esto implica que el administrador está dispuesto, sin llevar a cabo un estudio de mercado, a recibir mínimo 160.77 millones con certeza, para vender el negocio del nuevo producto.

Una caracterización del *EBC*, está relacionada con la condición de que en estas circunstancias el decisor es dueño de la lotería, a diferencia de la situación en la que él quiere comprar la lotería.

3.2.2 PRECIO DE COMPRA

Cuando un decisor quiere conocer el mayor precio que está dispuesto a pagar por adquirir una lotería (negocio que se encuentra bajo incertidumbre), él se enfrenta a una situación de **precio de compra**.

Definición 2

Dada una situación incierta de decisión, se llama **Precio de compra**, ***PC***, a la máxima cantidad que el decisor está dispuesto a pagar por adquirir la lotería.

¿Cómo obtener el precio de compra?

El precio de compra se entiende como la cantidad con la cual existe indiferencia entre tener la lotería habiendo pagado PC y no tenerla, sin haber pagado algo. Es decir, $l - PC \sim 0$. De tal forma que si conocemos la función de utilidad el PC se puede obtener de forma similar al EBC por medio de la ecuación

$$u(l - PC) = u(0).$$

Ejemplo 2

Calcula el precio de compra para el ejemplo 1, suponiendo que el administrador es el comprador y tiene una función de utilidad $u(x) = (x + 200)^2$.

Solución

Notamos del ejemplo anterior que la lotería $l = \langle 0.3,300;\ 0.5,100;\ 0.2,-100 \rangle$, mientras que la función de utilidad está dada por $u(x) = (x + 200)^2$. Luego, para obtener el PC se tiene

$$\begin{aligned} u(l - PC) &= 0.30(300 - PC + 200)^2 + 0.50(100 - PC + 200)^2 + 0.2(-100 - PC + 200)^2 \\ &= 0.30(500 - PC)^2 + 0.50(300 - PC)^2 + 0.2(100 - PC)^2 \\ &= 0.30(250000 - 1000PC + PC^2) + 0.50(90000 - 600PC + PC^2) + 0.2(10000 - 200PC + PC^2) \\ &= PC^2 - 640PC + 122000 \end{aligned}$$

Mientras que

$$u(0) = (0 + 200)^2 = 40000.$$

Así,

$$\begin{aligned} u(l - PC) &= u(0) \\ PC^2 - 640PC + 122000 &= 40000 \\ PC^2 - 640PC + 82000 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación

$$PC = \frac{640 \pm \sqrt{640^2 - 4(82000)}}{2} = \begin{cases} 177.17 \\ 462.83 \end{cases}$$

Se elige el valor más pequeño de compra, el cual será el máximo que el decisor estaría dispuesto a pagar para comprar la lotería. De donde $PC = 177.17$, esto implica que el administrador está dispuesto, sin llevar a cabo un estudio de mercado, a pagar como máximo 177.17 millones con certeza, para comprar el negocio del nuevo producto.

Una caracterización del *PC*, está relacionada con la condición de que en estas circunstancias el decisor no es dueño de la lotería, ahora él quiere comprar la lotería.

3.2.3 PRIMA DE RIESGO

Cuando un decisor (administrador, gerente o persona de negocios) se encuentra ante la problemática de vender o comprar un negocio que tiene ganancias bajo incertidumbre, el primer problema que debe resolver consiste en determinar si tiene **aversión** (repudio, odio, prevención o miedo) o **propensión** (preferencia, afición, apego o devoción) **al riesgo**, resultante de la posible inversión. De esta forma se origina el siguiente concepto.

Definición 3

Dada una situación incierta de inversión (representada por una lotería), se llama **Prima de riesgo de una lotería**, ***PR***, a la diferencia del valor esperado de la lotería y el equivalente bajo certeza, según la función de utilidad

$$PR = \begin{cases} VE - EBC, & \text{si } u(x) \text{ es creciente } u'(x) > 0 \\ EBC - VE, & \text{si } u(x) \text{ es decreciente } u'(x) < 0 \end{cases}$$

¿Cómo interpretar los valores de la prima de riesgo?

De la definición de prima de riesgo se tiene que pueden suceder tres situaciones

1. **Prima de riesgo positiva.** En este caso se dice que el decisor tiene **aversión al riesgo** y *PR* representa la cantidad que el decisor está dispuesto a dejar de ganar por esa aversión.
2. **Prima de riesgo negativa.** En este caso se dice que el decisor tiene **propensión al riesgo** y *PR* representa la cantidad que valúa la preferencia del decisor.
3. **Prima de riesgo cero.** En este caso se dice que el decisor tiene **neutralidad al riesgo**. La neutralidad al riesgo se presenta cuando el *VE* es igual al *EBC* de la lotería.

Notas

Para determinar si una función es creciente o decreciente, se tienen las reglas:

- Una función $u(x)$ es creciente si al aumentar el valor de *x* aumente el valor de $u(x)$ y una forma de comprobarlo es con la derivada. La función $u(x)$ es creciente en el intervalo en donde $u'(x) > 0$.
- Una función $u(x)$ es decreciente si al aumentar el valor de *x* diminuye el valor de $u(x)$ y una forma de comprobarlo es con la derivada. La función $u(x)$ es decreciente en el intervalo en donde $u'(x) < 0$.

Ejemplo 3

Calcula la prima de riesgo para el caso del ejemplo 1, suponiendo que el administrador establece la función de utilidad $u(x)=(x+100)^2$.

Solución

Del ejemplo 1 se obtuvo el $EBC=160.77$. Además la lotería a la que se refiere el problema para el artículo nuevo estaba dada por $l=\langle 0.3,300;\ 0.5,100;\ 0.2,-100\rangle$. Luego, su valor esperado será

$$VE=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 0.3(300)+0.5(100)+0.2(-100)=120\,.$$

Por otro lado, tenemos que determinar si la función de utilidad es creciente o decreciente en los valores de la lotería, es decir de -100 a 300. Para esto calculamos la derivada de la función de utilidad $u(x)=(x+100)^2$

$$u'(x)=2(x+100)\,.$$

Así, la función de utilidad es creciente para valores de *x*, tales que $u'(x)=2(x+100)>0$. Es decir, para $x\geq -100$. Luego, $PR=VE-EBC$, de esta forma se tiene la prima de riesgo

$$PR=VE-EBC=120-160.77=-40.77\,.$$

Es decir, el administrador tiene propensión al riesgo valuada por 40.77 millones.

Posteriormente regresaremos al estudio de la prima de riesgo y su relación con la función de utilidad, en donde daremos una descripción detallada de los tres casos mencionados arriba y sus posibles funciones analíticas de la función de utilidad.

3.2.4 VALOR DE LA INFORMACIÓN PERFECTA

Debido a que el decisor (persona de negocios, administrador, gerente, etc.) ante un negocio se encuentra con la disyuntiva de invertir, sin conocer con certeza el resultado, él está interesado en conocer la información que le indique que ocurrirá.

Definición 4

Dada una situación incierta de inversión (representada por una lotería), se llama **Valor de la información perfecta**, ***VIP***, a la máxima cantidad que el decisor está dispuesto a pagar por la información.

¿Cómo obtener el Valor de la información perfecta?

El valor de la información perfecta se entiende, como la cantidad con la cual existe indiferencia entre el *EBC* y las mejores consecuencias de las decisiones y la lotería habiendo pagado *VIP* por la información. Es decir, $l^* - VIP \sim EBC$, en donde l^* representa la lotería que contiene las mejores consecuencias. De tal forma que si conocemos la función de utilidad, el *VIP* se puede obtener de forma similar al *PC* por medio de la ecuación

$$u(l^* - VIP) = u(EBC).$$

Ejemplo 4

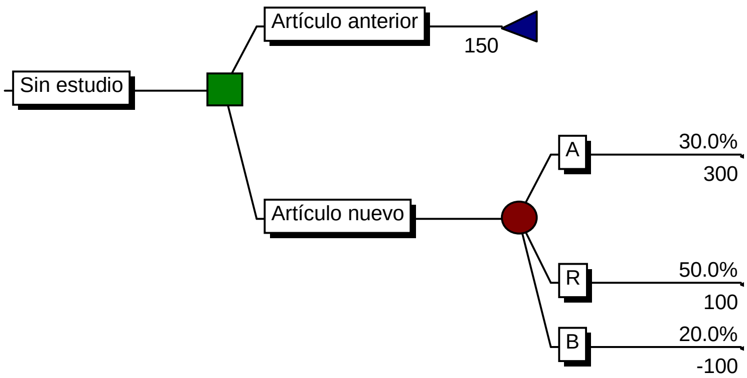
Calcula el Valor de la información perfecta para el ejemplo 1, con función de utilidad $u(x) = (x+100)^2$.

Solución

Del ejemplo 1 la lotería es $l = \langle 0.3,300;\ 0.5,100;\ 0.2,-100 \rangle$, mientras que la función de utilidad estaba dada por $u(x) = (x+100)^2$, y su *EBC* fue 160.77. Luego, para obtener el *VIP* se tiene

$$u(EBC) = (160.77 + 100)^2 = 68{,}001.$$

Por otro lado, para calcular $u(l^* - VIP)$, se necesita la lotería l^*, la cual obtenemos del árbol de decisiones del ejemplo 1



Para elegir las mejores consecuencias de las decisiones, tenemos en el primer caso $300 \succ 150$, $150 \succ 100$ y $150 \succ -100$, de esta forma $l^* = \langle 0.3,300;\ 0.5,150;\ 0.2,150 \rangle$. Luego,

$$\begin{aligned} u(l^* - VIP) &= 0.30(300 - VIP + 100)^2 + 0.50(150 - VIP + 100)^2 + 0.2(150 - VIP + 100)^2 \\ &= 0.30(400 - VIP)^2 + 0.50(250 - VIP)^2 + 0.2(250 - VIP)^2 \\ &= 0.30(160000 - 800VIP + VIP^2) + 0.70(62500 - 500VIP + VIP^2) \\ &= VIP^2 - 590VIP + 91750 \end{aligned}.$$

Finalmente, obtenemos la ecuación para el *VIP*

$$u(l^* - VIP) = u(EBC)$$
$$VIP^2 - 590VIP + 91750 = 68001$$
$$VIP^2 - 590VIP + 23749 = 0$$

Resolviendo la ecuación

$$VIP = \frac{590 \pm \sqrt{590^2 - 4(23749)}}{2} = \begin{cases} 546.55 \\ 43.45 \end{cases}$$

Se elige el valor más pequeño el cual será el máximo que el decisor estaría dispuesto a pagar por la información. De donde se puede concluir que si se llega hacer un estudio de mercado el decisor estaría dispuesto a pagar máximo 43.45 millones por el estudio.

Nota

El *VIP* tiene similitud con el *VEIP* dado por la fórmula

$$VEIP = \min_{i=1}^{m}\{VE(\text{mejores acciones por evento}) - VE(\text{acción } i)\}$$

3.3 CONSTRUCCIÓN DE LA FUNCIÓN DE UTILIDAD CON UN SÓLO OBJETIVO

Se comentó en la parte introductoria de Teoría de preferencias que la función de utilidad es una de las bases motoras de la Teoría de decisiones, ya que da la opción de pasar las preferencias a valores numéricos y poder comparar diferentes situaciones, por ejemplo las loterías o problemas de negocios bajo incertidumbre.

Debido a lo anterior tiene una gran importancia el poder construir las funciones de utilidad. Hasta el momento las funciones de utilidad sólo se han utilizado, sin ver cómo se construyen. Pero en esta sección veremos dos métodos para la construcción de una función de utilidad.

- Método gráfico
- Método analítico.

La construcción de una función de utilidad se puede basar en la prima de riesgo, para lo cual analizaremos los tres casos suscitados al definir la prima de riesgo, para funciones de utilidad ascendente y descendente.

3.3.1 AVERSIÓN AL RIESGO VARIANDO CAPITAL

Cuando se definió la aversión al riesgo se mencionó que esto ocurre cuando la prima de riesgo es positiva, lo cual nos lleva a funciones de utilidad que tienen que ser

- cóncavas a la izquierda (fig. a) para el caso de funciones de utilidad crecientes.
- cóncavas a la derecha (fig. b) para el caso de funciones de utilidad decrecientes.

Ver figuras siguientes.

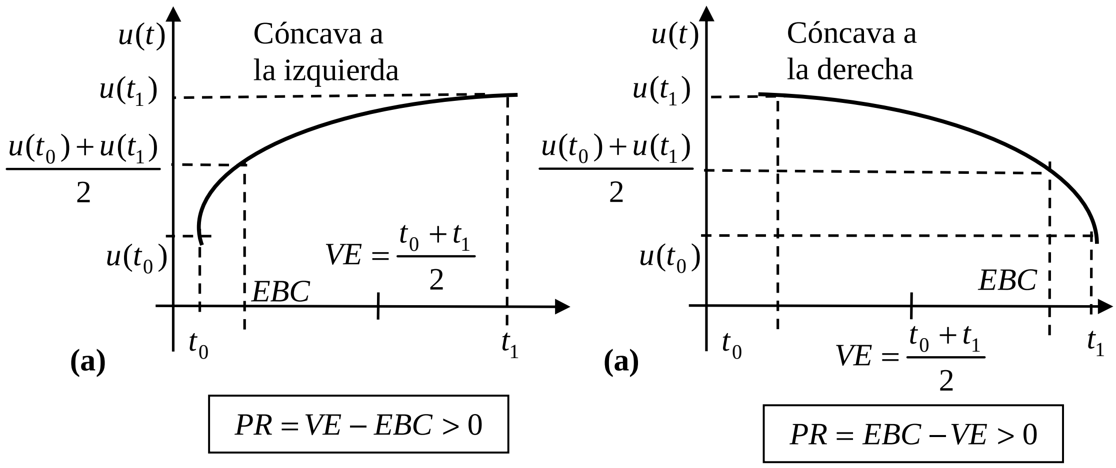


Fig. 1 Muestra las funciones de utilidad con aversión al riesgo, en (a) la función de utilidad es creciente $u'(x) > 0$, y en (b) es decreciente $u'(x) < 0$.

- Si al **crecer** el capital la prima de riesgo **no varía** se tiene **aversión constante** al riesgo.
- Si al **crecer** el capital la prima de riesgo **aumenta** se tiene **aversión creciente** al riesgo.
- Si al **crecer** el capital la prima de riesgo **disminuye** se tiene **aversión decreciente** al riesgo.

3.3.2 PROPENSIÓN AL RIESGO VARIANDO CAPITAL

Cuando se definió la propensión al riesgo se mencionó que esto ocurre cuando la prima de riesgo es negativa, lo cual nos lleva a funciones de utilidad que tienen que ser

- convexas la izquierda (fig. a) para el caso de funciones de utilidad decreciente.
- convexas a la derecha (fig. b) para el caso de funciones de utilidad crecientes.

Ver figuras siguientes.

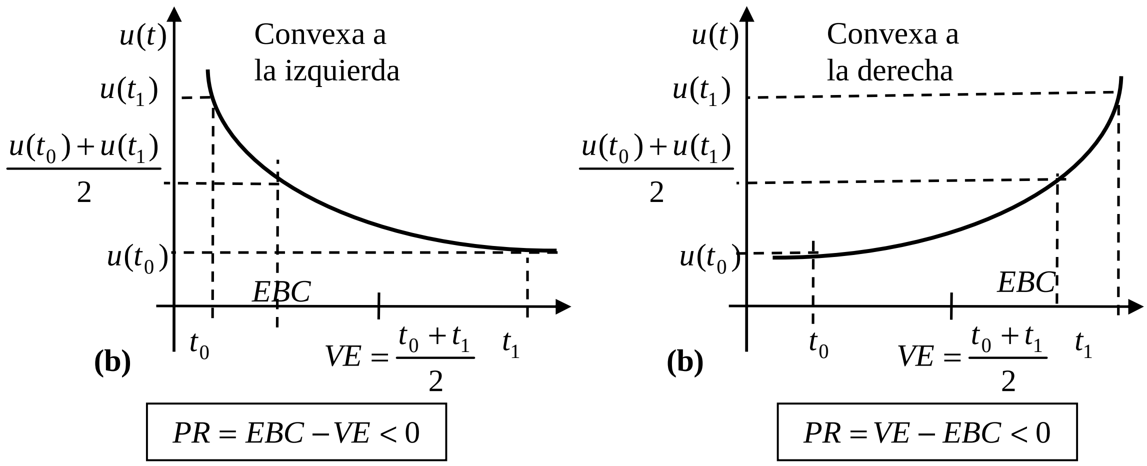


Fig. 2 Muestra las funciones de utilidad con propensión al riesgo, en (a) la función de utilidad es decreciente $u'(x) < 0$, y en (b) es creciente $u'(x) > 0$.

- Si al **crecer** el capital la prima de riesgo **no varía** se tiene **propensión constante al riesgo**.
- Si al **crecer** el capital la prima de riesgo **disminuye** se tiene **propensión creciente al riesgo**.
- Si al **crecer** el capital la prima de riesgo **aumenta** se tiene **propensión decreciente al riesgo**.

3.3.3 NEUTRALIDAD AL RIESGO VARIANDO CAPITAL

En el caso de neutralidad al riesgo no existen cambios y la función de utilidad es una línea recta.

Notas

- Obsérvese que el crecimiento de la aversión y la propensión son inversos.
- El capital y la aversión al riesgo son proporcionales, si uno aumenta o disminuye la aversión también aumenta o disminuye.
- El capital y la propensión al riesgo son inversas, si uno aumenta el otro disminuye y viceversa.

3.3.4 MÉTODO GRÁFICO PARA CONSTRUIR UNA FUNCIÓN DE UTILIDAD

Supóngase que deseamos conocer la función de utilidad $u(x)$ entre x' y x'', y se conoce que para cualquier *x*, tal que $x' \prec x \prec x''$

- a mayor preferencia de x mayor utilidad (equivalentemente a una función de utilidad creciente, $u'(x) > 0$).

- A mayor preferencia de x menor utilidad (equivalentemente a una función de utilidad decreciente, $u'(x) < 0$).

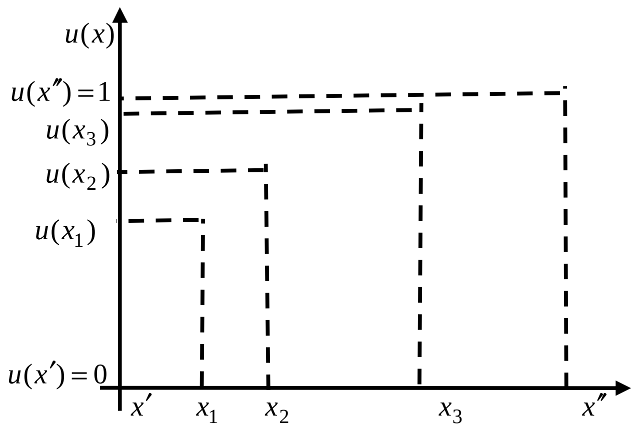
En caso de una función de utilidad creciente podemos seguir los siguientes pasos para su construcción. Si la función de utilidad es decreciente se hace de forma similar.

Paso 1. Asignación arbitraria de valores de utilidad para x' y x'' (recuérdese que se supuso $x' \prec x \prec x''$, luego x' menos preferente que x''). Generalmente, se asigna cero para el menos preferente y 1 para el más preferente. Así, $u(x') = 0$ y $u(x'') = 1$.

Paso 2. Se eligen 3 puntos cualesquiera entre x' y x'', tales que $x' \prec x_1 \prec x_2 \prec x_3 \prec x''$ y se determinan sus utilidades.

Para la asignación de valores a $x' \prec x_1 \prec x_2 \prec x_3 \prec x''$, se utiliza la información del tipo de decisor, es decir, si el decisor tiene, **aversión, propensión o neutralidad al riesgo.** Se supone que la función de utilidad entre x' y x'', sólo puede ser de aversión (función cóncava entre x' y x''), propensión (función convexa entre x' y x'') o neutralidad (línea recta entre x' y x'').

En el ejemplo suponemos que se trata de un decisor con aversión al riesgo. Luego, los valores asignados a $x' \prec x_1 \prec x_2 \prec x_3 \prec x''$, dan como resultados los siguientes puntos

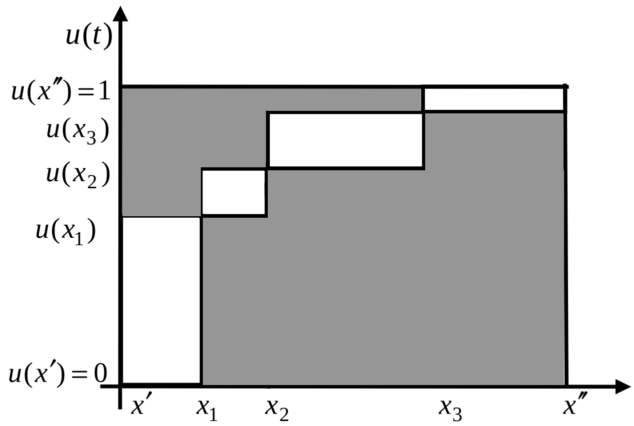


Paso 3. Con los 5 puntos construidos de la curva y utilizando la característica de monotonía de la función de utilidad se suaviza la curva.

Monotonía. Se supone que la función de utilidad entre x' y x'', es monótona es decir, creciente o decreciente entre dichos valores.

Con las consideraciones anteriores podemos eliminar ciertas regiones en donde no puede pasar la función de utilidad, para que pueda cumplir las características dadas por el decisor.

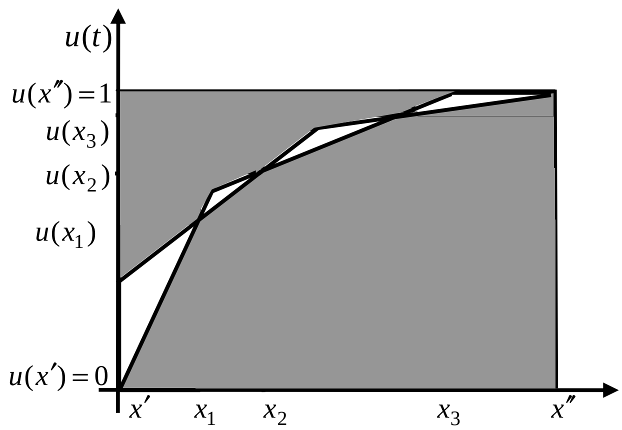
Las regiones que se pueden eliminar se obtienen fuera de los rectángulos que se forman al encerrar cinco parejas de puntos $(x, u(x))$, formadas por $x' \prec x_1 \prec x_2 \prec x_3 \prec x''$ y sus valores en la función de utilidad. Como se muestra en la siguiente figura.



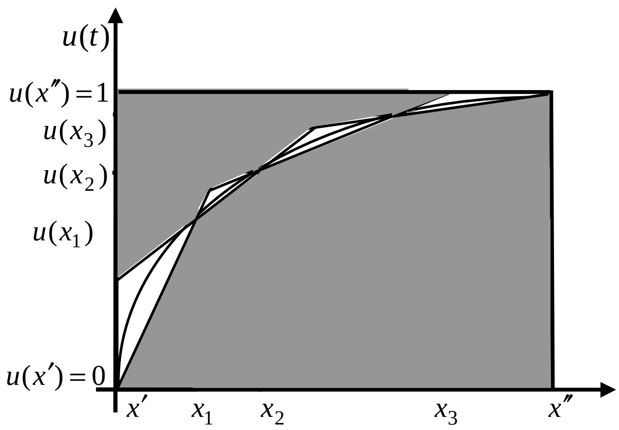
De tal forma que la función de utilidad sólo puede tomar valores dentro de los rectángulos que quedan sin sombrear.

Podemos reducir aún más la región en donde puede estar la función de utilidad al trazar líneas rectas entre pares de puntos $(x', u(x'))$ y $(x_1, u(x_1))$; $(x_1, u(x_1))$ y $(x_2, u(x_2))$; $(x_2, u(x_2))$ y $(x_3, u(x_3))$; $(x_3, u(x_3))$ y $(x'', u(x''))$ y eliminando:

- las regiones por debajo de la recta en su propio rectángulo, para esto nos basamos en el hecho de que estamos suponiendo un decisor con aversión al riesgo, lo que significa que la función de utilidad en este caso es cóncava y debe estar en la mitad de arriba de cada rectángulo
- en los rectángulos contiguos se elimina la región por arriba de la recta trazada en el punto anterior, esto se hace porque la función de utilidad perdería la suavidad si pasa por estas regiones. Finalmente queda el área sin sombrear por donde puede pasar la función de utilidad, ver figura siguiente.

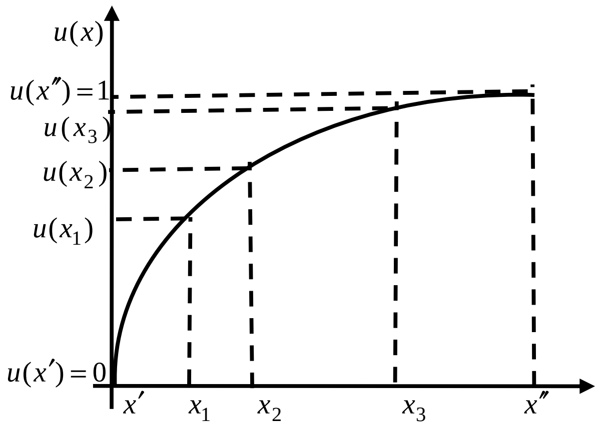


Finalmente en el área factible para la función de utilidad se hace un bosquejo de ésta, quedando la figura siguiente.



Para terminar dejamos libre a la función de utilidad trazada, que cumple con las restricciones que fueron establecidas por el decisor

1. La función es creciente.
2. El decisor tiene aversión al riesgo.
3. la función pasa por las coordenadas $(x',u(x'))$, $(x_1,u(x_1))$, $(x_2,u(x_2))$, $(x_3,u(x_3))$ y $(x'',u(x''))$.



En la siguiente sección veremos la parte analítica de las funciones de utilidad de un objetivo y la forma de llevar a cabo la comprobación para identificar de qué tipo de función se trata. Se da un ejemplo de cada tipo de función de utilidad que puede ocurrir según el tipo de decisor.

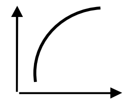
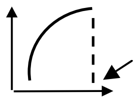
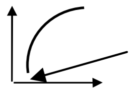
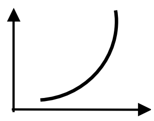
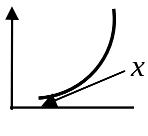
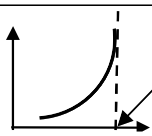
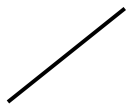
3.4 FUNCIONES ANALÍTICAS DE UTILIDAD DE UN OBJETIVO

En esta parte utilizamos el resultado demostrado por Howard Raiffa, quien prueba que en el caso de funciones de utilidad crecientes, la prima de riesgo de una lotería ($PR = VE - EBC$), está relacionada con la función de aversión local al riesgo,

$$PR \sim \frac{1}{2}\left(\frac{x - x'}{2}\right)^2 r(x),$$

en donde $r(x) = -\dfrac{u''(x)}{u'(x)}$ y $\langle 0.5, x; 0.5, x' \rangle$ cuando $x' - x$ pequeña.

Función de utilidad creciente

$u(x)$ creciente $u'(x) > 0$		x crece, y $r(x)$	Ejemplo de $u(x)$	Forma de la gráfica de $u(x)$
Aversión $PR > 0$ $u(x)$ cóncava izquierda $u''(x) < 0$	**(1)** Constante	No varía	$a - be^{-cx}$; $b > 0, c > 0$	
	(2) Creciente	aumenta	$a + bx - cx^2$; $c > 0$, $x < \dfrac{b}{2c}$	 $x = \dfrac{b}{2c}$
	(3) Decreciente	disminuye	$a + c\ln(x + b)$; $c > 0$, $x > -b$	 $x = -b$
Propensión $PR < 0$ $u(x)$ convexa derecha $u''(x) > 0$	**(4)** Constante	No varía	$a + be^{cx}$; $b > 0, c > 0$	
	(5) Creciente	aumenta	$a + bx + cx^2$; $c > 0$, $x > -\dfrac{b}{2c}$	 $x = -\dfrac{b}{2c}$
	(6) Decreciente	disminuye	$a - c\ln(b - x)$; $c > 0$, $x < b$	 $x = b$
Neutralidad $PR = 0$ $u''(x) = 0$	**(7)**		$a + bx$; $b > 0$	

Comprobaciones

Aversión	Propensión
(1) $u(x)=a-be^{-cx}$ $u'(x)=bce^{-cx}>0$ si $b>0, c>0 \Rightarrow u(x)$ crece $u''(x)=-bc^2e^{-cx}<0$ si $b>0 \Rightarrow u(x)$ concáva $r(x)=-\dfrac{-bc^2e^{-cx}}{bce^{-cx}}=c>0 \Rightarrow r(x)$ no varia	**(4)** $u(x)=a+be^{cx}$ $u'(x)=bce^{cx}>0$ si $b>0, c>0 \Rightarrow u(x)$ crece $u''(x)=bc^2e^{cx}>0$ si $b>0 \Rightarrow u(x)$ convexa $r(x)=-\dfrac{bc^2e^{cx}}{bce^{cx}}=-c<0 \Rightarrow r(x)$ no varia
(2) $u(x)=a+bx-cx^2$ $u'(x)=b-2cx>0$ si $x<\dfrac{b}{2c} \Rightarrow u(x)$ crece $u''(x)=-2c<0$ si $c>0 \Rightarrow u(x)$ concáva $r(x)=-\dfrac{-2c}{b-2cx}=\dfrac{2c}{b-2cx}>0,$ si $x<\dfrac{b}{2c}$ $r'(x)=\dfrac{(2c)^2}{(b-2cx)^2}>0 \Rightarrow r(x)$ crece	**(5)** $u(x)=a+bx+cx^2$ $u'(x)=b+2cx>0$ si $x>-\dfrac{b}{2c} \Rightarrow u(x)$ crece $u''(x)=2c>0$ si $c>0 \Rightarrow u(x)$ convexa $r(x)=-\dfrac{2c}{b+2cx}=-\dfrac{2c}{b+2cx}<0,$ si $x>-\dfrac{b}{2c}$ $r'(x)=\dfrac{(2c)^2}{(b-2cx)^2}>0 \Rightarrow r(x)$ crece
(3) $u(x)=a+c\ln(x+b)$ $u'(x)=\dfrac{c}{x+b}>0$ si $x>-b \Rightarrow u(x)$ crece $u''(x)=-\dfrac{c}{(x+b)^2}<0$ si $c>0 \Rightarrow u(x)$ concáva $r(x)=-\dfrac{-\dfrac{c}{(x+b)^2}}{\dfrac{c}{x+b}}=\dfrac{1}{x+b}>0,$ si $x>-b$ $r'(x)=-\dfrac{1}{(x+b)^2}<0 \Rightarrow r(x)$ decrece	**(6)** $u(x)=a-c\ln(b-x)$ $u'(x)=\dfrac{c}{b-x}>0$ si $x<b \Rightarrow u(x)$ crece $u''(x)=\dfrac{c}{(b-x)^2}>0$ si $c>0 \Rightarrow u(x)$ convexa $r(x)=-\dfrac{\dfrac{c}{(b-x)^2}}{\dfrac{c}{b-x}}=-\dfrac{1}{b-x}<0,$ si $x<b$ $r'(x)=-\dfrac{1}{(b-x)^2}<0 \Rightarrow r(x)$ decrece

(7) Neutralidad

$u(x)=a+bx$

$u'(x)=b>0$ si $b>0 \Rightarrow u(x)$ crece

$u''(x)=0$

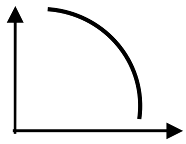
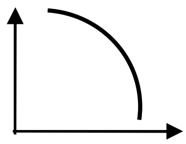
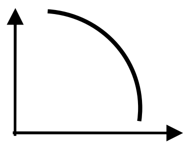
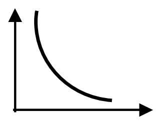
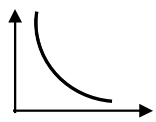
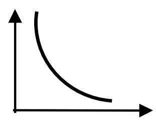
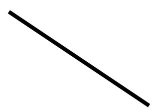
$r(x)=0$

Cuando la función de utilidad es decreciente, se tiene que la prima de riesgo se calcula como $PR = EBC - VE$, y es indiferente con $q(x) = u''(x)/u'(x)$ de una lotería que está relacionada con la función de aversión local al riesgo, para funciones de utilidad decrecientes

$$PR \sim \frac{1}{2}\left(\frac{x - x'}{2}\right)^2 q(x),$$

en donde $q(x) = \dfrac{u''(x)}{u'(x)}$.

Función de utilidad decreciente

$u(x)$ decreciente $u'(x) < 0$		x crece, y $q(x)$	Ejemplo de $u(x)$	Forma de la gráfica de $u(x)$
Aversión $PR > 0$ $u(x)$ cóncava derecha $u''(x) < 0$	**(8)** Constante	No varía	$a - be^{cx}$; $b > 0, c > 0$	
	(9) Creciente	aumenta	$a + c\ln(b - x)$; $c > 0$, $x < b$	
	(10) Decreciente	disminuye	$a + bx - cx^2$; $c > 0$, $x > \dfrac{b}{2c}$	
Propensión $PR < 0$ $u(x)$ convexa izquierda $u''(x) > 0$	**(11)** Constante	No varía	$a + be^{-cx}$; $b > 0, c > 0$	
	(12) Creciente	aumenta	$a - c\ln(x + b)$; $c > 0$, $x > -b$	
	(13) Decreciente	disminuye	$a + bx + cx^2$; $c > 0$, $x < -\dfrac{b}{2c}$	
Neutralidad $PR = 0$ $u''(x) = 0$	**(14)**		$a - bx$; $b > 0$	

Comprobaciones

Aversión	**Propensión**
(8) $u(x)=a-be^{cx}$; $u'(x)=-bce^{cx}<0$ si $b>0, c>0 \Rightarrow u(x)$ decrece; $u''(x)=-bc^2e^{cx}<0$ si $b>0 \Rightarrow u(x)$ concáva; $q(x)=\dfrac{-bc^2e^{cx}}{-bce^{cx}}=c>0 \Rightarrow q(x)$ no varia	**(11)** $u(x)=a+be^{-cx}$; $u'(x)=-bce^{-cx}<0$ si $b>0, c>0 \Rightarrow u(x)$ decrece; $u''(x)=bc^2e^{-cx}>0$ si $b>0 \Rightarrow u(x)$ convexa; $q(x)=\dfrac{bc^2e^{-cx}}{-bce^{-cx}}=-c<0 \Rightarrow q(x)$ no varia
(9) $u(x)=a+c\ln(b-x)$; $u'(x)=-\dfrac{c}{b-x}<0$ si $x<b, c>0 \Rightarrow u(x)$ decrece; $u''(x)=-\dfrac{c}{(b-x)^2}<0$ si $c>0 \Rightarrow u(x)$ concáva; $q(x)=\dfrac{-\frac{c}{(x+b)^2}}{\frac{c}{x+b}}=\dfrac{1}{b-x}>0,$ si $x<b$; $q'(x)=\dfrac{1}{(x+b)^2}>0 \Rightarrow q(x)$ crece	**(12)** $u(x)=a-c\ln(x+b)$; $u'(x)=-\dfrac{c}{x+b}<0$ si $x>-b, c>0 \Rightarrow u(x)$ decrece; $u''(x)=\dfrac{c}{(x+b)^2}>0$ si $c>0 \Rightarrow u(x)$ convexa; $q(x)=\dfrac{\frac{c}{(x+b)^2}}{-\frac{c}{x+b}}=-\dfrac{1}{x+b}<0,$ si $x>-b, c>0$; $q'(x)=\dfrac{1}{(x+b)^2}<0 \Rightarrow q(x)$ crece
(10) $u(x)=a+bx-cx^2$; $u'(x)=b-2cx<0$ si $x>\dfrac{b}{2c} \Rightarrow u(x)$ decrece; $u''(x)=-2c$ si $c>0 \Rightarrow u(x)$ concáva; $q(x)=\dfrac{-2c}{b-2cx}>0,$ si $x>\dfrac{b}{2c}$; $q'(x)=-\dfrac{(2c)^2}{(b-2cx)^2}<0 \Rightarrow q(x)$ decrece	**(13)** $u(x)=a+bx+cx^2$; $u'(x)=b+2cx<0$ si $x<-\dfrac{b}{2c} \Rightarrow u(x)$ decrece; $u''(x)=2c>0$ si $c>0 \Rightarrow u(x)$ convexa; $q(x)=\dfrac{2c}{b+2cx}<0,$ si $x<-\dfrac{b}{2c}, c>0$; $q'(x)=-\dfrac{(2c)^2}{(b+2cx)^2}<0 \Rightarrow q(x)$ decrece

(14) Neutralidad

$$u(x)=a-bx$$
$$u'(x)=-b<0 \text{ si } b>0 \Rightarrow u(x) \text{ decrece}$$
$$u''(x)=0$$
$$q(x)=0$$

Notas

- En general, ocurre que la función de utilidad puede ser en algunos segmentos cóncava y en otros convexa, la combinación de estos comportamientos depende del decisor, si tiene aversión o propensión al riesgo, respectivamente. Cuando se trata de dinero, el comportamiento del decisor se puede ver influenciado por las cantidades de dinero que estén en juego. Por ejemplo, el decisor podría tener neutralidad al riesgo en cantidades pequeñas, donde no le importe mucho, después tener aversión al riesgo y posiblemente cuando la cantidad sea elevada él podría estar dispuesto a correr grandes riesgo con un comportamiento de propensión.
- Cuando se utiliza la función de utilidad en problemas de decisión se deben involucrar decisiones basadas en valores referentes a la variable.

Para encontrar la función de utilidad adecuada se recomienda seguir la siguiente secuencia de pasos:

a) Determine el tipo de función de utilidad, creciente o decreciente.

b) Calcule la prima de riesgo, definición 3

$$PR = \begin{cases} VE - EBC, & \text{si } u(x) \text{ es creciente } u'(x) > 0 \\ EBC - VE, & \text{si } u(x) \text{ es decreciente } u'(x) < 0 \end{cases}$$

c) De las 14 funciones propuestas elija la adecuada, o usted proponga alguna otra.

d) Para encontrar la o las constantes que intervienen en la función elegida, utilice el hecho de que $EBC \sim l$ y la función de utilidad.

Sug. Se usan todas las loterías posibles, pero inicialmente se usa la lotería que abarque el mayor rango posible.

Ejemplo 5

Construya la función analítica de utilidad para el caso en que el decisor prefiere cantidades mayores de premios y conoce las siguientes indiferencias de 3 loterías con su *EBC*

$$\$2600 \sim \langle 0.5, \$5000; 0.5, -\$100 \rangle,$$

$$\$12600 \sim \langle 0.5, \$15000; 0.5, \$9900 \rangle \text{ y}$$

$$\$22600 \sim \langle 0.5, \$25000; 0.5, \$19900 \rangle$$

Solución

a). Se tiene una función de utilidad creciente, puesto que el decisor prefiere cantidades mayores de premios. Con este hecho, los 14 casos posibles de funciones se reducen a 7.

b). Calculamos la prima de riesgo, para esto de (a) notamos que la función de utilidad es creciente, luego $PR = VE - EBC$.

Lotería 1: $VE = 0.5(5000) + 0.5(-100) = 2450$, luego $PR = VE - EBC = 2450 - 2600 = -150$.

Lotería 2: $VE = 0.5(15000) + 0.5(9900) = 12450$, luego $PR = VE - EBC = 12450 - 12600 = -150$.

Lotería 3: $VE = 0.5(25000) + 0.5(19900) = 22450$, luego $PR = VE - EBC = 22450 - 22600 = -150$.

c). De la prima de riesgo calculada en (b) notamos que es constante y negativa. Luego, el decisor tiene propensión constante al riesgo y la función de utilidad puede ser $a + be^{cx}$.

d). Búsqueda de los valores de las constantes, para esto se utiliza la $u(x)$ y $EBC \sim l$. Es decir,

$$2600 \sim \langle 0.5, 5000; 0.5, -100 \rangle .$$

Así,

$$\begin{aligned} u(2600) &= u(l) \\ a + be^{2600c} &= 0.5u(5000) + 0.5u(-100) \\ a + be^{2600c} &= 0.5\left(a + be^{5000c}\right) + 0.5\left(a + be^{-100c}\right) \\ be^{2600c} &= 0.5be^{5000c} + 0.5be^{-100c} \end{aligned}$$

Dividiendo entre $0.5b$, y pasando todos los términos a un mismo lado, resulta la ecuación

$$f(c) = 2e^{2600c} - e^{5000c} - e^{-100c} = 0.$$

Cuya solución aproximada, $c = 4.62428734 \times 10^{-5} = 0.0000462428734$, y se muestra en la tabla 1, que resulta de realizar los cálculos con un paquete matemático.

```
#1:   NSOLVE(2·EXP(2600·c) - EXP(5000·c) - EXP(- 100·c), c, 0.000002, 1)
                                                                    -5
#2:                                            c = 4.624287340·10
#3:   NSOLVE(2·EXP(0.26·c) - EXP(0.5·c) - EXP(- 0.01·c), c, 0.0021, 1)
#4:                                              c = 0.4624287338
#5:   NSOLVE(2·EXP(0.026·c) - EXP(0.05·c) - EXP(- 0.001·c), c, 0.002, 10)
#6:                                                c = 4.624287340
```

Tabla 1. Muestra la raíz de la ecuación $f(c) = 2e^{2600c} - e^{5000c} - e^{-100c} = 0$.

Una manera de simplificar la búsqueda en estos casos consiste en encontrar la raíz de $f(kc^*) = 0$, en lugar de $f(c) = 0$ $(c = kc^*)$. Por ejemplo, en esta ecuación $k = 10^{-4} = 0.0001$ y así la ecuación a resolver será:

$$f(10^{-4}c^{*}) = 2e^{0.26c^{*}} - e^{0.5c^{*}} - e^{-0.01c^{*}} = 0\,.$$

Cuya raíz diferente de cero se muestra en las expresiones #3 y #4 de la tabla 1, luego la raíz original aproximada será $c = 10^{-4}c^{*} = 10^{-4}(0.4624287338) = 4.624287338\times 10^{-5}$ y coincide con la anterior.

Similarmente, para $k = 10^{-5} = 0.00001$, la ecuación a resolver será:

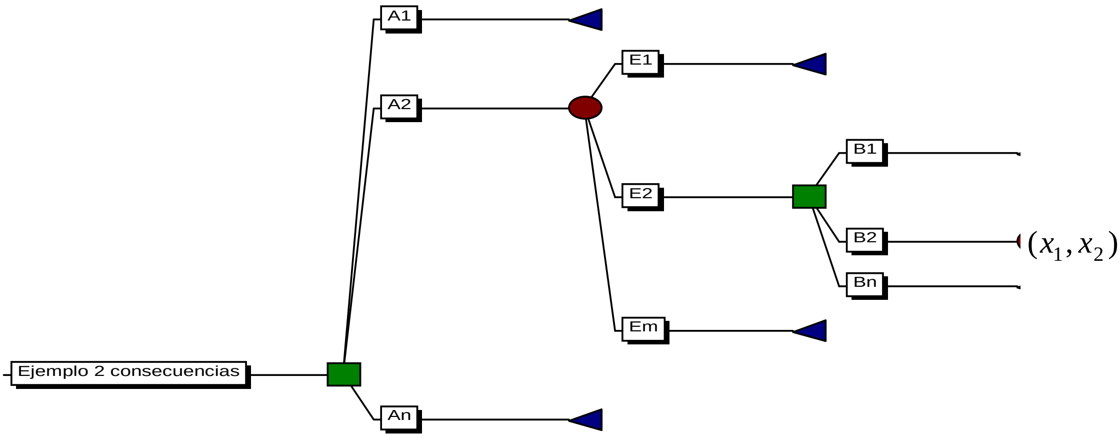
$$f(10^{-5}c^{*}) = 2e^{0.026c^{*}} - e^{0.05c^{*}} - e^{-0.001c^{*}} = 0\,.$$

Cuya raíz aproximada diferente de cero se muestra en las expresiones #5 y #6 de la tabla 1, $c = 10^{-5}c^{*} = 10^{-5}(4.624287338) = 4.624287338\times 10^{-5}$ y coincide con la anterior.

Capítulo 4

FUNCIONES DE UTILIDAD DE VARIOS OBJETIVOS

En el Capítulo anterior iniciamos el estudio de las funciones de utilidad con un sólo atributo. Entendiendo por **atributo la medida del logro del objetivo del decisor**. Por ejemplo, en el caso de dos consecuencias x_1 y x_2, el árbol de decisiones puede tener ramificaciones de la siguiente manera



En donde se muestra que las acciones disponibles a elegir pueden tener más de un atributo.

Así, de forma similar que en las funciones de valor, vistas en el Capítulo 2, para el caso de varios atributos, primeramente veremos las situaciones para dos consecuencias, y posteriormente lo generalizaremos para 3 o más.

Para la redacción del capítulo se consultó la bibliografía [1], [2], [3], [4], [7], [8], [9], [10], [11], [12] y [13].

4.1 FUNCIONES DE UTILIDAD CON DOS ATRIBUTOS

En situaciones en las que existe incertidumbre, en lugar de utilizar la función de valor, se emplea la función de utilidad. Pero resulta que en el caso de dos o más atributos la construcción de la función de utilidad es más compleja, requiere de intercambio constante de información con el decisor para su construcción y conocimientos del tipo de función de que se trate.

Ejemplo 1

Al inicio del 2000 se pensó en la construcción de un nuevo aeropuerto o la ampliación de uno existente, para satisfacer la demanda en vuelos internacionales y nacionales. Supóngase que existen dos alternativas que representaremos por las letras *A* y *B*. Cuyos resultados de los objetivos, tiempo de acceso al aeropuerto y cantidad de personas que resultarían afectadas en caso de un accidente, así como sus probabilidades, se muestran en la siguiente tabla.

Sitios	Probabilidad	Tiempo (min.) de acceso	Personas afectadas en caso de accidentes
A	$1/3$	90	1,000
	$1/3$	60	1,500
	$1/3$	20	3,000
B	1	120	500

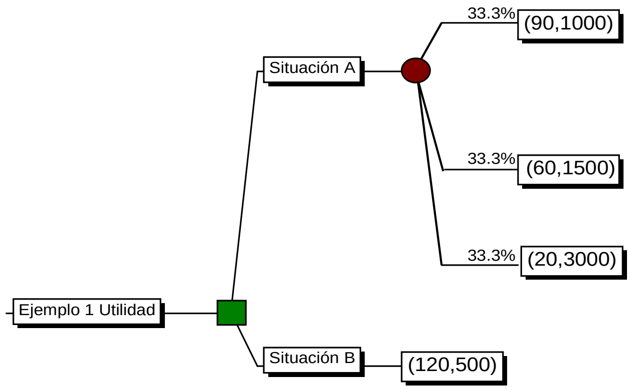
Emplear la función de utilidad con sus objetivos para la toma de decisiones de la mejor alternativa para la construcción del aeropuerto y comprobar las dificultades que representa encontrar dicha función junto con las funciones de utilidad unidimensionales de cada atributo.

Solución

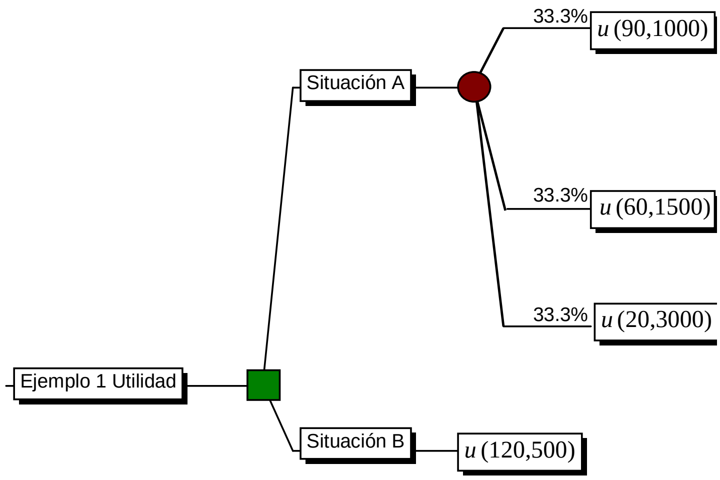
Tenemos los objetivos

- tiempo de acceso en minutos (x).
- personas afectadas en caso de accidente (y).

Las incertidumbres y los valores de los atributos se muestran en la siguiente figura.



Para analizar la situación, debido a la incertidumbre, se recurre a su función de utilidad



Siguiendo el procedimiento del Capítulo 2, en la construcción de funciones de valor, el siguiente paso consiste en asignar valores a la parejas de atributos de los objetivos en la función de utilidad, pero como veremos en está sección las asignaciones requieren de mayores suposiciones sobre la función de utilidad.

Por ejemplo, en el caso de funciones de valor en dos atributos, se dijo que la función ordinaria de valor $v(x,y)$ eran funciones de valor aditivas si cumplían $v(x,y) = v_X(x) + v_Y(y)$. Pero con las funciones de utilidad veremos que necesitamos aún más supuestos que las funciones de valor.

Sea el espacio (conjunto) de consecuencias $X \times Y$ sobre el cual las preferencias establecidas por el decisor cumplen los 6 axiomas de los Teorema 14 y 15 sobre la existencia de y unicidad de la función de valor bidimensional del Capítulo 2. Por otro lado, supóngase que dichas preferencias sobre loterías envuelven los premios en $X \times Y$ que pueden ser representados por una función de utilidad $u(x,y)$. Es decir, la función de utilidad es una función ordinaria de valor en $X \times Y$, de tal forma que por el Teorema 10 del Capítulo 2, sobre la unicidad de la función ordinaria de valor con las mismas preferencias en el mismo espacio de consecuencias resulta

$$u(x,y) = \phi(v(x,y)) = \phi(v_X(x) + v_Y(y)).$$

En donde, la transformación $\phi(\cdot)$ es estrictamente creciente, pero la aditividad no se cumple si $\phi(\cdot)$ es exponencial (aunque si es estrictamente creciente). De tal forma que para poder hablar de la aditividad en las funciones de utilidad es necesario considerar condiciones más fuertes, por ejemplo, en la sección veremos la **independencia en utilidad** y la **independencia aditiva**.

4.1.1 INDEPENDENCIA EN UTILIDAD

Para poder establecer la aditividad de la función de utilidad, una primera condición está dada en la hipótesis de independencia, condición que resulta ser más débil que la hipótesis de aditividad, pero en la práctica puede ocurrir con mayor frecuencia.

Definición 1

X es **independiente en utilidad** de *Y* si las preferencias entre loterías con valores de *X* y un valor común de *Y* son independientes del valor *Y*.

Similarmente, *Y* es **independiente en utilidad** de *X*, si las preferencias entre loterías con valores de *Y* y un valor común *X* son independientes del valor de *X*.

Cuando ambas se cumplen se llaman **mutuamente independientes en utilidad**.

Después del comentario veremos un Lema que nos proporciona una expresión para el hecho de que *X* es independiente en utilidad de *Y*.

Comentario

X es independiente en utilidad de *Y*, significa que la función de utilidad $u(x,y)$ no cambia la forma que tiene en y_1, valor fijo de *Y*. Es decir, $u(x,y)$ es el resultado de trasladar y cambiar la escala de $u(x,y_1)$, esto es $u(x,y) = a(y) + b(y)u(x,y_1)$. Ver figura siguiente.

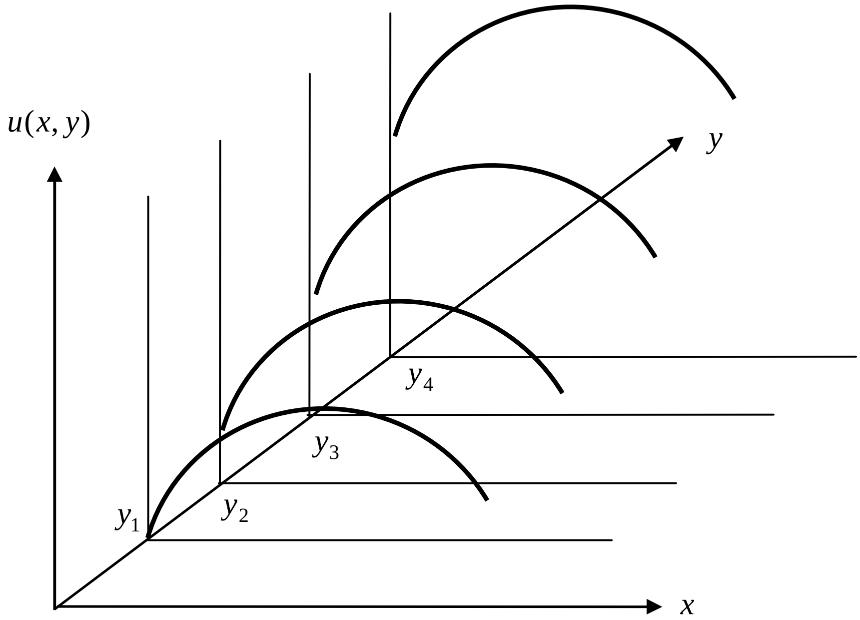


Fig. 4.1 Muestra que $u(x, y_1)$ no cambia, sólo se desplaza en $a(y)$ y su amplitud se altera en $b(y) > 0$.

Por otro lado, el hecho de que *X* sea independiente en utilidad de *Y*, y que *Y* no sea independiente en utilidad de *X*, significa que $u(x, y)$ cambia su forma con respecto de $u(x_1, y)$, cuando se cambia *x*, ver figura siguiente.

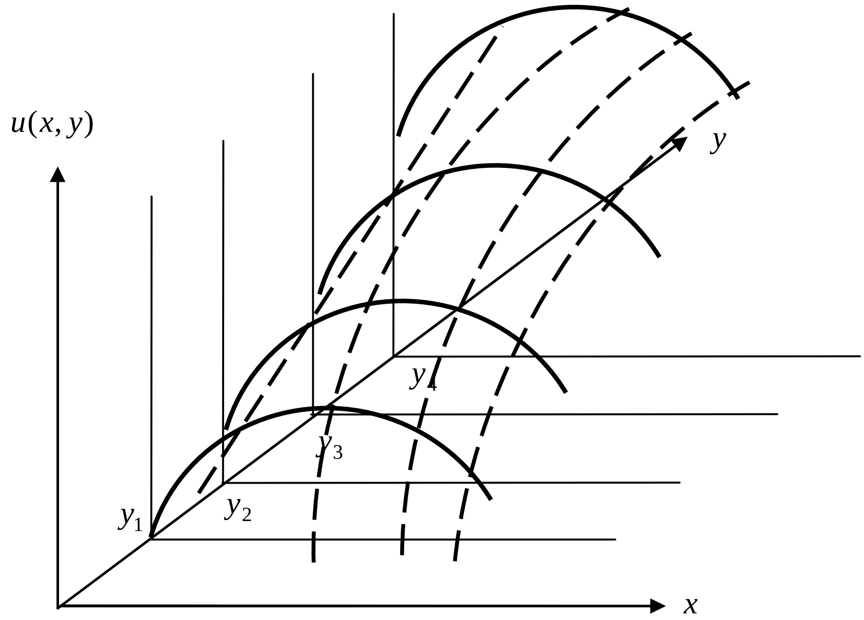


Fig.4.2 Muestra que $u(x_1, y)$ cambia al variar *x*.

PROPOSICIÓN 1

Si X es independiente en utilidad de Y, entonces X es preferencialmente independiente de Y.

Demostración

▼

Nótese que $(x, y) \sim \langle 1, (x, y)\rangle$, loterías binarias. Luego, para algún α

$$(x,\alpha) \succsim (x',\alpha) \Leftrightarrow \langle 1,(x,\alpha)\rangle \succsim \langle 1,(x',\alpha)\rangle .$$

Utilizando que *X* es independiente en utilidad de *Y*, tendremos

$$(x,\alpha) \succsim (x',\alpha) \Leftrightarrow \langle 1,(x,\beta)\rangle \succsim \langle 1,(x',\beta)\rangle \text{ para toda } \beta .$$

De las loterías binarias

$$(x,\beta) \succsim (x',\beta) \text{ para toda } \beta .$$

▲

LEMA 1 Representación de la independencia en utilidad con la función de utilidad

X es independiente en utilidad de Y si y sólo si para un y_0 fijo se cumple

$$u(x, y) = a(y) + b(y)u(x, y_0) \ \ \forall\ (x, y) \in X \times Y .$$

Donde $b(y) > 0$ y $a(y)$ son funciones que están definidas con relación a y_0.

Similarmente, Y es independiente en utilidad de X si y sólo si para un x_0 fijo se cumple

$$u(x, y) = c(x) + d(x)u(x_0, y) \ \ \forall\ (x, y) \in X \times Y .$$

Donde $d(x) > 0$ y $c(x)$ son funciones que están definidas con relación a x_0.

X y Y son mutuamente independiente en utilidad si y sólo si para un y_0 fijo se cumplen

$$u(x, y) = a(y) + b(y)u(x, y_0) \ \ \forall\ (x, y) \in X \times Y .$$

$$u(x, y) = c(x) + d(x)u(x_0, y) \ \ \forall\ (x, y) \in X \times Y .$$

La demostración resulta de la definición de independencia en utilidad.

Ejemplo 2

Supóngase que tenemos una estación de bomberos y deseamos analizar dos objetivos:

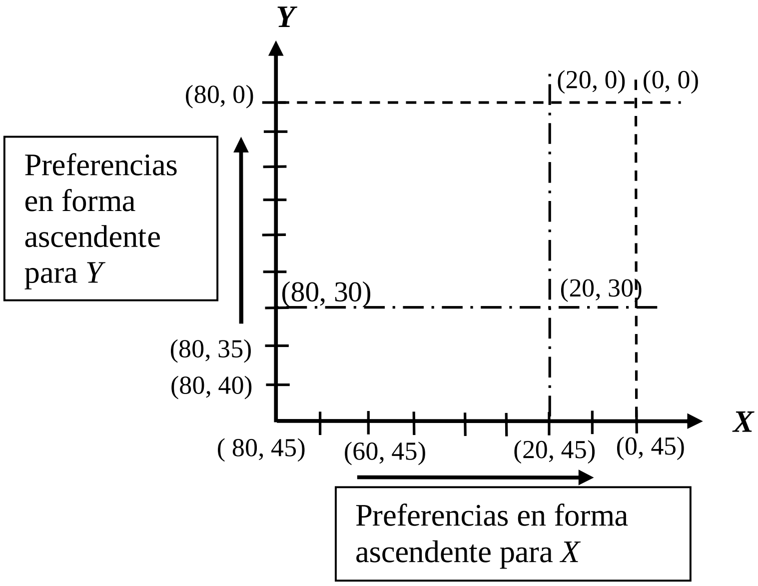
- *x*- Tiempo de respuesta de los bomberos a una llamada en auxilio por parte de la ciudadanía,
- *y*- Tiempo de respuesta del carro con agua.

Por otro lado, está claro que el atributo *Y* es independiente en utilidad del atributo *X*, pero *X* no es independiente en utilidad de *Y*. En el estudio se conocen los mejores y peores tiempos por atributo, para *X* son cero y 80 minutos, para *Y* cero y 45 minutos. Se conocen los valores de la función de utilidad al evaluarse en cada una de las parejas de combinaciones de estos valores.

$u(0,0)=1$, $u(80,45)=0$, $u(80,0)=0.5$ y $u(0,45)=0.5$. Se desea determinar el valor de la función de utilidad que se tendría cuando el atributo $x=20$ y $y=30$

Solución

Representamos en la gráfica siguiente las parejas de atributos, obsérvese que las preferencias aumentan para el atributo *X* a la derecha, luego los valores de *x* disminuyen desde el menos deseable, 80, hasta el más deseable, 0. Similarmente para el atributo *Y*, pero sobre el eje de las abscisas.



De la condición, *Y* independiente en utilidad de *X*, tenemos que para un x_0 fijo se cumple

$$u(x,y)=c(x)+d(x)u(x_0,y) \quad \forall\ (x,y)\in X\times Y\ .$$

Para emplear esta información debemos obtener la función de utilidad en $u(20,45)$ a partir de los valores conocidos $u(80,45)=0$ y $u(0,45)=0.5$, de forma similar se tiene que encontrar $u(20,0)$ de los valores conocidos $u(0,0)=1$ y $u(80,0)=0.5$.

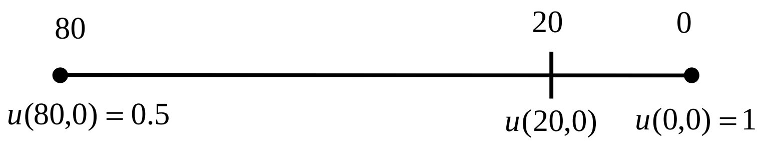
Otra vez podemos apreciar que requerimos de información adicional para poder determinar los valores requeridos para $u(20,45)$ y $u(20,0)$. Para esto existen varios caminos a explorar.

- Por el axioma de continuidad, tenemos que existe un valor $u_i \in (0,1)$, tal que $(20,45) \sim \langle u_i,(0,45);1-u_i,(80,45)\rangle$. Similarmente existe un valor $u_i' \in (0,1)$, tal que $(20,0) \sim \langle u_i',(0,0);1-u_i',(80,0)\rangle$.

- Empleando proporciones entre los atributos y los valores de la función de utilidad en dichos atributos.

- Conocimientos sobre el tipo de función de utilidad.

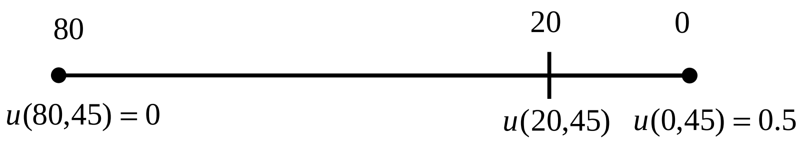
Vamos a utilizar el segundo método referente a las proporciones.



De donde,

$$\frac{u(0,0)-u(20,0)}{u(0,0)-u(80,0)} = \frac{20}{80}$$
$$\frac{1-u(20,0)}{1-0.5} = \frac{1}{4}$$
$$u(20,0) = \frac{7}{8}$$

Similarmente,



De donde,

$$\frac{u(0,45)-u(20,45)}{u(0,45)-u(80,45)}=\frac{20}{80}$$
$$\frac{0.5-u(20,45)}{0.5-0}=\frac{1}{4}$$
$$u(20,45)=\frac{3}{8}$$

Así, tendremos para $x_0 = 0$

$$\frac{7}{8}=u(20,0)=c(20)+d(20)u(0,0)=c(20)+d(20)(1)\Rightarrow c(20)+d(20)=\frac{7}{8}$$
$$\frac{3}{8}=u(20,45)=c(20)+d(20)u(0,45)=c(20)+d(20)(0.5)\Rightarrow 2c(20)+d(20)=\frac{6}{8}$$

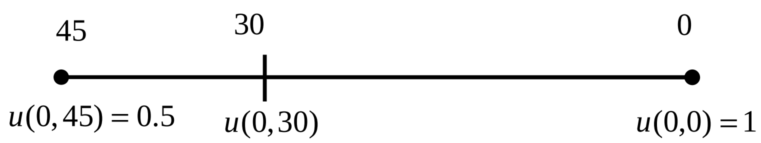
Finalmente, resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} c(20)+d(20)=\dfrac{7}{8} \\ 2c(20)+d(20)=\dfrac{6}{8} \end{cases} \Rightarrow c(20)=-\frac{1}{8},\ d(20)=1$$

Sustituyendo estos valores en $u(x,y)=c(x)+d(x)u(x_0,y)$, para $x_0 = 0$, resulta

$$u(20,30)=c(20)+d(20)u(0,30)=-\frac{1}{8}+u(0,30)\,.$$

Falta encontrar $u(0,30)$, utilizando proporciones en la vertical



$$\frac{u(0,0)-u(0,30)}{u(0,0)-u(0,45)}=\frac{30}{45}$$
$$\frac{1-u(0,30)}{1-0.5}=\frac{2}{3}$$
$$u(0,30)=\frac{2}{3}$$

Sustituyendo este valor obtenemos el valor de la utilidad para (20, 30)

$$u(20,30) = -\frac{1}{8} + u(0,30) = -\frac{1}{8} + \frac{2}{3} = \frac{13}{24} = 0.5417\,.$$

TEOREMA 1 Mutuamente independientes en utilidad

Si X y Y son mutuamente independientes en utilidad, además (x_0, y_0) *es tal que* $u(x_0, y_0) = 0$, *entonces*

a) $u(x, y) = u(x, y_0) + u(x_0, y) + ku(x, y_0)u(x_0, y) \;\; \forall\, (x, y) \in X \times Y$.

b) *Si* $k \neq 0$ $\big(1 + ku(x, y)\big) = \big(1 + ku(x, y_0)\big)\big(1 + ku(x_0, y)\big) \;\; \forall\, (x, y) \in X \times Y$.

Demostración

▼

Por definición de atributos mutuamente independientes en utilidad, se cumple

$$u(x, y) = a(y) + b(y)u(x, y_0) \;\; \forall\, (x, y) \in X \times Y\,.$$
$$u(x, y) = c(x) + d(x)u(x_0, y) \;\; \forall\, (x, y) \in X \times Y\,.$$

Luego, de la condición $u(x_0, y_0) = 0$ resulta, para x_0 y y_0

$$u(x_0, y) = a(y) + b(y)u(x_0, y_0) = a(y)\,.$$

$$u(x, y_0) = c(x) + d(x)u(x_0, y_0) = c(x)\,.$$

De esta forma

$$(*) \quad \begin{cases} u(x, y) = u(x_0, y) + b(y)u(x, y_0) & \forall\, (x, y) \in X \times Y \\ u(x, y) = u(x, y_0) + d(x)u(x_0, y) & \forall\, (x, y) \in X \times Y \end{cases}.$$

Igualando ambas expresiones

$$u(x_0, y) + b(y)u(x, y_0) = u(x, y_0) + d(x)u(x_0, y)\,.$$

De donde

$$u(x_0, y) - d(x)u(x_0, y) = u(x, y_0) - b(y)u(x, y_0)$$
$$u(x_0, y)\big(1 - d(x)\big) = u(x, y_0)\big(1 - b(y)\big), \text{ para } x \neq x_0, y \neq y_0$$
$$\frac{1 - d(x)}{u(x, y_0)} = \frac{1 - b(y)}{u(x_0, y)} \quad \forall\, (x, y) \in X \times Y$$

Pero la última igualdad se cumple solo cuando es un valor constante

$$\frac{1-d(x)}{u(x,y_0)}=\frac{1-b(y)}{u(x_0,y)}=k\ .$$

Finalmente, al despejar $d(x)$ o $b(y)$ y sustituir en su igualdad correspondiente de (*)

$$u(x,y)=u(x,y_0)+u(x_0,y)+ku(x,y_0)u(x_0,y)\quad \forall\ (x,y)\in X\times Y\ .$$

El inciso (b) se obtiene al multiplicar por k la expresión de (a)

$$\begin{gathered}ku(x,y)=ku(x,y_0)+ku(x_0,y)+k^2u(x,y_0)u(x_0,y)\\ 1+ku(x,y)=1+ku(x,y_0)+ku(x_0,y)+k^2u(x,y_0)u(x_0,y)\\ \left(1+ku(x,y)\right)=\left(1+ku(x,y_0)\right)+ku(x_0,y)\left(1+ku(x_0,y)\right)\\ \left(1+ku(x,y)\right)=\left(1+ku(x,y_0)\right)\left(1+ku(x_0,y)\right)\end{gathered}$$

▲

Del teorema se deriva el siguiente corolario, que será de utilidad en el siguiente tema sobre independencia aditiva entre atributos.

COROLARIO

La condición de aditividad del Teorema 1 para algún $x_1,x_2\in X$ *y* $y_1,y_2\in Y$

$$\left\langle 0.5,(x_1,y_1);\,0.5,(x_2,y_2)\right\rangle \sim \left\langle 0.5,(x_1,y_2);\,0.5,(x_2,y_1)\right\rangle \qquad (*)$$

además

$$(x_1,y_0)\not\sim(x_2,y_0)\ \ y\ \ (x_0,y_1)\not\sim(x_0,y_2)\,, \qquad (**)$$

entonces

$$u(x,y)=u(x,y_0)+u(x_0,y)\ . \qquad (***)$$

Demostración

▼

En la relación (*) aplicamos la función de utilidad

$$\begin{gathered}0.5u(x_1,y_1)+0.5u(x_2,y_2)=0.5u(x_1,y_2)+0.5u(x_2,y_1)\\ u(x_1,y_1)+u(x_2,y_2)=u(x_1,y_2)+u(x_2,y_1)\end{gathered}$$

Ahora hacemos uso de la relación del Teorema 1, $u(x,y)=u(x,y_0)+u(x_0,y)+ku(x,y_0)u(x_0,y)$, en la igualdad anterior

$$\left(u(x_1,y_0)+u(x_0,y_1)+ku(x_1,y_0)u(x_0,y_1)\right)+\left(u(x_2,y_0)+u(x_0,y_2)+ku(x_2,y_0)u(x_0,y_2)\right)=$$
$$\left(u(x_1,y_0)+u(x_0,y_2)+ku(x_1,y_0)u(x_0,y_2)\right)+\left(u(x_2,y_0)+u(x_0,y_1)+ku(x_2,y_0)u(x_0,y_1)\right)$$

Eliminando términos iguales en ambos lados

$$\left(ku(x_1,y_0)u(x_0,y_1)\right)+\left(ku(x_2,y_0)u(x_0,y_2)\right)=\left(ku(x_1,y_0)u(x_0,y_2)\right)+\left(ku(x_2,y_0)u(x_0,y_1)\right).$$

Abriendo paréntesis y simplificando

$$k\left(u(x_1,y_0)u(x_0,y_1)+u(x_2,y_0)u(x_0,y_2)-u(x_1,y_0)u(x_0,y_2)-u(x_2,y_0)u(x_0,y_1)\right)=0$$
$$k\left(u(x_1,y_0)\left(u(x_0,y_1)-u(x_0,y_2)\right)-u(x_2,y_0)\left(u(x_0,y_1)-u(x_0,y_2)\right)\right)=0$$
$$k\left(u(x_0,y_1)-u(x_0,y_2)\right)\left(u(x_1,y_0)-u(x_2,y_0)\right)=0$$

Pero de la condición (**) y la función de utilidad tendremos

$$u(x_1,y_0)-u(x_2,y_0)\neq 0$$
$$u(x_0,y_1)-u(x_0,y_2)\neq 0$$

De donde se concluye, que $k=0$ y por consiguiente

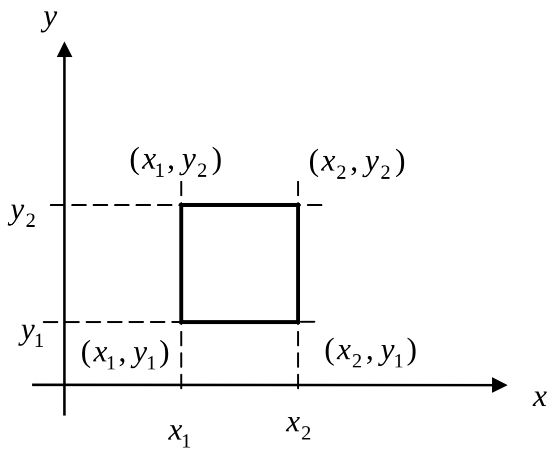
$$u(x,y)=u(x,y_0)+u(x_0,y)+ku(x,y_0)u(x_0,y)=u(x,y_0)+u(x_0,y).\ \blacktriangle$$

4.1.2 INDEPENDENCIA ADITIVA

Otro tipo de independencia entre atributos se obtiene al hacer una suposición más fuerte que la independencia en utilidad, por lo que Supóngase que se tienen las loterías

$$l_1=\langle 0.5,(x_1,y_1);\,0.5,(x_2,y_2)\rangle \text{ y } l_2=\langle 0.5,(x_1,y_2);\,0.5,(x_2,y_1)\rangle.$$

Cuyos valores se representan en la siguiente figura



Resulta que si existe independencia entre ellas, tendría que dar lo mismo entre l_1 y l_2. Luego,

$$l_1 \sim l_2 \text{ para todo } x_1, x_2, y_1, y_2 .$$

Cuando esto ocurre se dice que se tiene **independencia aditiva** y por lo tanto,

$$u(x, y) = \lambda_x u_x(x) + \lambda_y u_y(y),$$

Esta representación se puede justificar por medio del siguiente Teorema.

TEOREMA 2. Independencia aditiva

Supóngase que $u(x, y)$ es una función de utilidad en $X \times Y$, y X y Y cumplen la independencia aditiva, además si (x_0, y_0) es tal que $u(x_0, y_0) = 0$, entonces

$$u(x, y) = u(x, y_0) + u(x_0, y).$$

Es decir, la independencia aditiva es una condición necesaria para esta representación.

Demostración

▼ Del corolario del Teorema 1, se concluye que, $u(x, y) = u(x, y_0) + u(x_0, y)$, de donde $u(x_0, y_0) = 0$.▲

Es decir, del teorema 2 se concluye que si X y Y cumplen con la independencia aditiva, entonces al igual que en las funciones de valor podemos encontrar a $u_x(x)$ sin considerar a y y viceversa. Además, podemos observar que si X y Y cumplen con la **independencia aditiva**, entonces se tiene la representación de la función de utilidad

$$u(x, y) = \lambda_x u_x(x) + \lambda_y u_y(y),$$

con u, u_x y u_y en escala de 0 a 1,resulta que, $\lambda_x \geq 0, \lambda_y \geq 0$ constantes. Falta determinar las restricciones que deban cumplir, λ_x y λ_y, que nos permitan encontrar un valor particular.

De esta manera, si en el conjunto de consecuencias de $X \times Y$ representamos por (x_0, y_0) las peores y por (x^*, y^*) las mejores consecuencias por atributos, entonces por la independencia aditiva se cumplirá

$$u(x_0, y_0) = u_x(x_0) = u_y(y_0) = 0$$

$$u(x^*, y^*) = u_x(x^*) = u_y(y^*) = 1$$

Empleando estos valores podemos determinar condiciones para encontrar λ_x y λ_y. Evaluando la función de utilidad en (x^*, y_0) y (x_0, y^*), tendremos:

$$u(x^*, y_0) = \lambda_x u_x(x^*) + \lambda_y u_y(y_0) = \lambda_x \text{, optimista en } X \text{ y pesimista en } Y.$$

$$u(x_0, y^*) = \lambda_x u_x(x_0) + \lambda_y u_y(y^*) = \lambda_y \text{, pesimista en } X \text{ y optimista en } Y.$$

De tal forma que

$$u(x^*, y^*) = \lambda_x + \lambda_y = 1 \text{ y } \lambda_x \geq 0, \lambda_y \geq 0 .$$

Nota

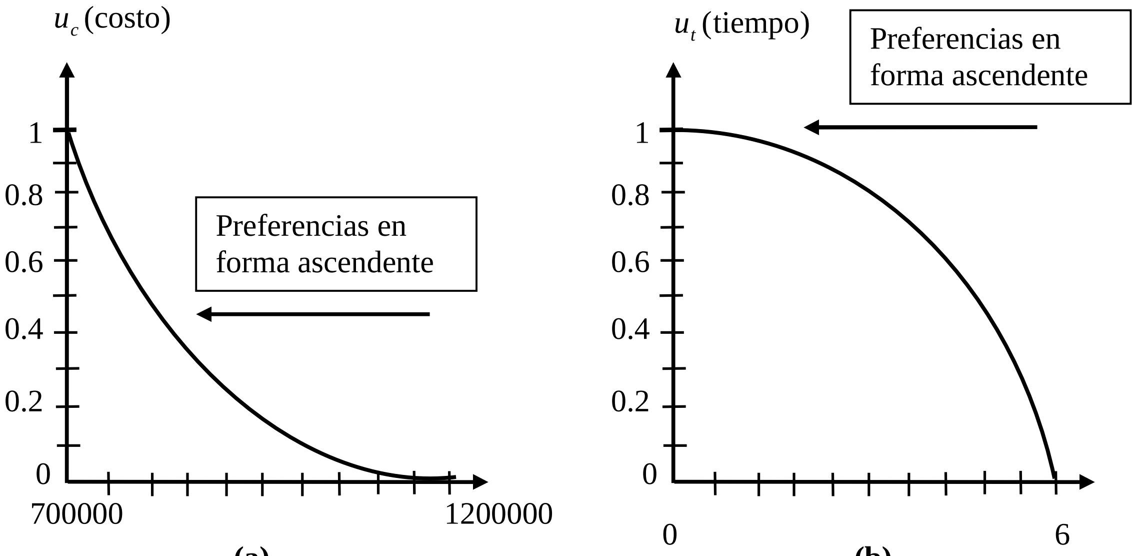
Cuando en los problemas de decisiones con dos o más atributos se establece la hipótesis de la independencia aditiva, la solución se simplifica grandemente y el problema no representa dificultades en su solución.

Finalmente, se usa el criterio de decisión, que asigna la mejor alternativa aquella que tenga el mayor valor de la utilidad esperada.

Ejemplo 3

Supóngase que se tienen las inmobiliarias ARA (*A*) y GEO (*G*), de las cuales nos interesan los objetivos: costo de la casa en pesos y tiempo de entrega de la casa en meses. Además conocemos que la inmobiliaria ARA entrega una casa con probabilidad 0.6, si el costo es de $700,000 pesos en un tiempo de 6 meses, y con una probabilidad de 0.4 para una entrega inmediatamente, pero a un costo de $1,200,000 pesos. Por su parte la inmobiliaria GEO siempre tarda en entregar la casa tres meses a un costo de $900,000 pesos. El problema consiste en llevar a cabo un análisis de la situación para determinar por medio de la función de utilidad que alternativa es mejor para invertir, la inmobiliaria *A* o la *B*. Para esto disponemos, adicionalmente a la información mencionada.

- Se cumple la hipótesis de independencia aditiva.
- Conocemos las funciones de utilidad unidimensionales para cada objetivo, dadas por las gráficas de abajo y en donde se muestra que el decisor en costo tiene propensión al riesgo, mientras que en el tiempo de entrega tiene aversión al riesgo.
- Se puede hacer preguntas adicionales al decisor.



(a) Función de utilidad para el costo

(b) Función de utilidad para el tiempo

Solución

Asignaremos una metodología para la solución del problema., cuando se cumple la independencia aditiva y se conocen las funciones de utilidad unidimensionales de los atributos.

Paso 1. Establecer las alternativas de decisión y los objetivos a estudiar. En este caso se trata de dos alternativas inmobiliaria ARA y GEO. Mientras que los objetivos ya están definidos, costo de la casa y tiempo de entrega.

Paso 2. Determinar la mejores y peores alternativas de cada objetivo. De los datos del problema podemos apreciar que en el caso de costos el peor es $1,200,000 pesos y la mejor $700,000 pesos, por otro lado, en el caso del tiempo, la peor son 6 meses y lo mejor es la entrega inmediata.

Paso 3. Asignación de valores a la función de utilidad. Se ha visto que lo mejor consiste en asignar valores entre 0 y 1 a las funciones de utilidad. Cero para las peores alternativas y uno para las mejores. La razón de esta asignación consiste en establecer relaciones entre λ_c y λ_t, para poder determinar sus valores. De lo expuesto después del Teorema 2, resulta.

Situación	c-costo	t-tiempo	$u(c,t)$
Pesimista en c y t	1,200,000	6	0
Optimista en c y t	700,000	0	$\lambda_c + \lambda_t = 1$
Optimista en c y pesimista en t	700,000	6	λ_c
Pesimista en c y optimista en t	1,200,000	0	λ_t

En caso de requerir más valores se recomienda buscarlos de la siguiente forma.

Primeramente se decide o pregunta al decisor qué relación de preferencia existe entre las dos últimas parejas de atributos de la tabla anterior. Es decir, cuál de las siguientes relaciones se cumple

$$(700000,\, 6) \succ (1200000,\, 0)\,;\;(1200000,\, 0) \succ (700000,\, 6)\,;\;(700000,\, 6) \sim (1200000,\, 0)\,.$$

Nótese que estas relaciones son equivalentes, al emplear la función de utilidad entre las parejas, a lo siguiente.

$$\lambda_c > \lambda_t\,;\;\lambda_c < \lambda_t\,;\;\lambda_c = \lambda_t\,.$$

a). Cuando el decisor dice que se cumple la igualdad, hemos obtenido otra relación entre λ_c y λ_t, de tal forma que

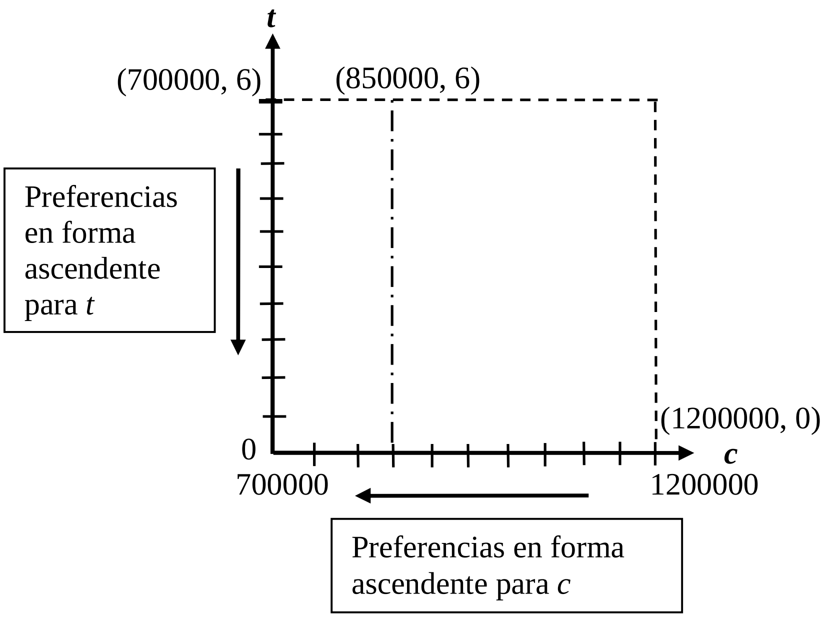
$$\begin{cases}\lambda_c + \lambda_t = 1\\ \lambda_c = \lambda_t\end{cases} \Rightarrow \lambda_c = \lambda_t = 0.5 \Rightarrow u(c,t) = 0.5u_c(c) + 0.5u_t(t)\,.$$

b). Cuando el decisor dice que se cumple cualquiera de las otras dos relaciones, por ejemplo, $\lambda_c > \lambda_t$ o equivalentemente $(700000,\, 6) \succ (1200000,\, 0)$, podremos obtener una relación entre λ_c y λ_t, de la siguiente manera.

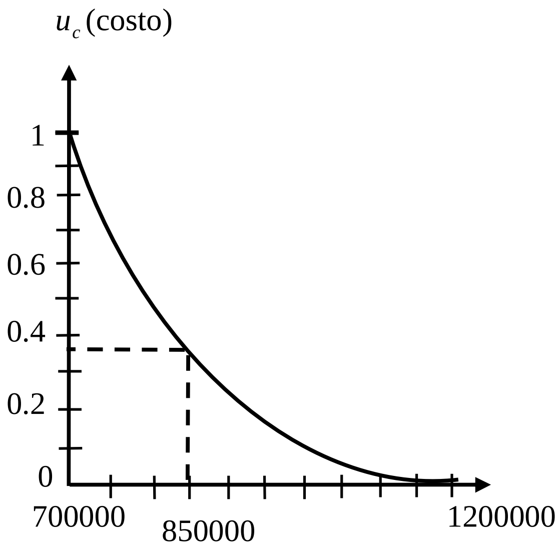
El decisor estableció que $(700000,\, 6) \succ (1200000,\, 0)$, ahora se busca una pareja de valores de *c* y *t*, sea ésta (c_1, t_1), tal que $(700000,\, 6) \succ (c_1, t_1) \sim (1200000,\, 0)$, dicha pareja existe por el axioma 7 sobre la continuidad, visto en el Capítulo 3, puesto que

$$(700000,\, 6) \succ (1200000,\, 0) \Leftrightarrow 1 \geq u(700000,\, 6) > u(1200000,\, 0) \geq 0\,.$$

Para simplificar la búsqueda de (c_1, t_1), utilizamos la pareja que se empleo en la comparación, $(700000,\, 6)$, fijamos un valor y variamos el otro hasta que el decisor indique que se alcanzo la indiferencia. Por ejemplo, fijamos los 6 meses y variamos el costo hasta encontrar uno con el cual el decisor indique que $(700000,\, 6) \succ (c_1,\, 6) \sim (1200000,\, 0)$, sea dicho valor $c_1 = \$850{,}000$, su representación grafica se muestra abajo, en donde se muestra la región admisible de Función de utilidad $u(c,\, t)$.



Con el valor encontrado $c_1 = \$850{,}000$ y la función de utilidad unidimensional para el costo encontramos un valor de $u_c(850000)$. Como se puede apreciar $u_c(850000) \approx 0.38$.



Ahora con la indiferencia encontrada $(850000, 6) \sim (1200000, 0)$ y la función de utilidad podemos determinar la otra relación que requerimos para encontrar λ_c y λ_t

$$u(850000,\,6) = u(1200000,\,0)$$
$$\lambda_c u_c(850000) + \lambda_t u_t(6) = \lambda_c u_c(1200000) + \lambda_t u_t(0)$$
$$\lambda_c 0.38 + \lambda_t(0) = \lambda_c(0) + \lambda_t(1)$$
$$0.38\lambda_c - \lambda_t = 0$$

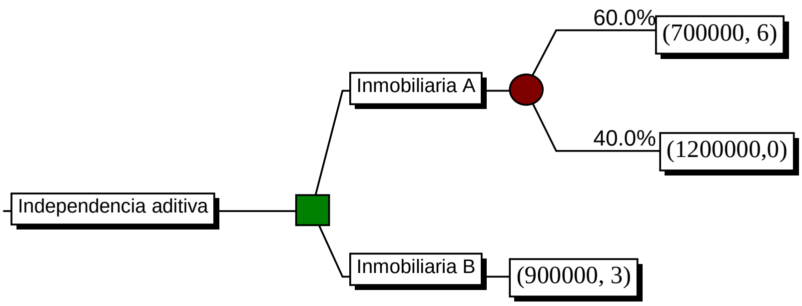
De esta forma hemos llegado al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \lambda_c + \lambda_t = 1 \\ 0.38\lambda_c - \lambda_t = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_c = \frac{1}{1.38};\lambda_t = \frac{0.38}{1.38} \Rightarrow u(c,t) = \frac{1}{1.38}u_c(c) + \frac{0.38}{1.38}u_t(t)\,.$$

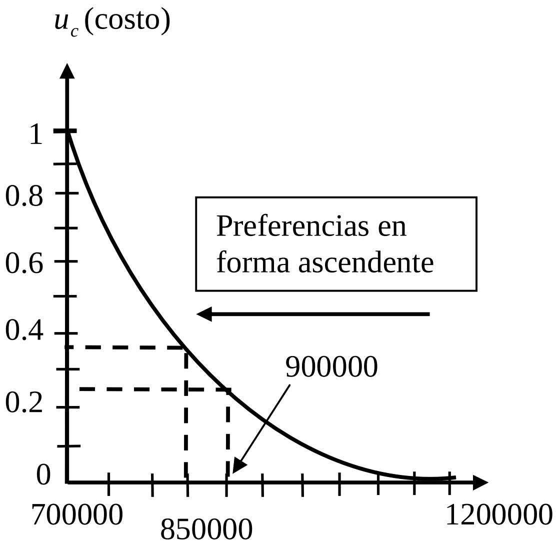
Paso 4. Evaluación de alternativas con la función de utilidad encontrada. Finalmente, con $u(c,t) = \frac{1}{1.38}u_c(c) + \frac{0.38}{1.38}u_t(t)$, evaluamos cada una de las alternativas, y empleamos el criterio de decisión:

“***Mayor utilidad esperada mejor alternativa***”.

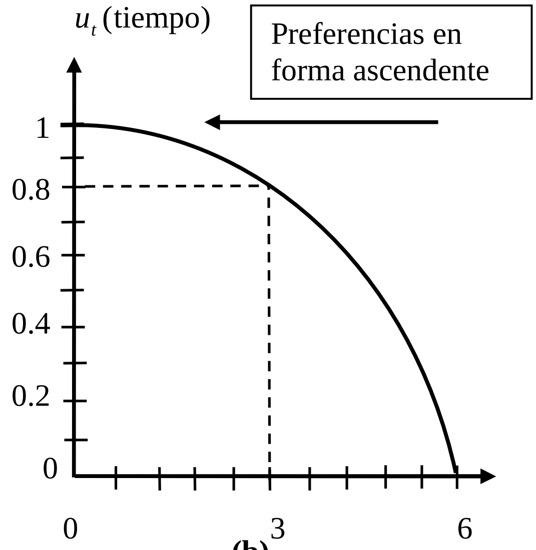
Recordemos la situación que estamos resolviendo



Es decir, requerimos conocer los valores $u_c(700000)$, $u_c(1200000)$, $u_c(900000)$, $u_t(3)$, $u_t(0)$ y $u_t(6)$, de los cuales no tenemos $u_c(900000)$ y $u_t(3)$, pero los podemos encontrar de la misma forma que se determino, $u_c(850000)$, ver gráficas siguientes.



(a)
Función de utilidad para el costo



(b)
Función de utilidad para el tiempo

Luego, $u_c(900000) \approx 0.25$ y $u_t(3) \approx 0.8$, con estos valores tendremos la utilidad esperada de cada alternativa.

$$
\begin{aligned}
E(A) &= E\big(u(c,t)\,|\,p\big) = 0.6u(700000,\,6) + 0.4u(1200000,\,0)\\
&= 0.6\left(\frac{1}{1.38}u_c(700000) + \frac{0.38}{1.38}u_t(6)\right) + 0.4\left(\frac{1}{1.38}u_c(1200000) + \frac{0.38}{1.38}u_t(0)\right)\\
&= 0.6\left(\frac{1}{1.38}(1) + \frac{0.38}{1.38}(0)\right) + 0.4\left(\frac{1}{1.38}(0) + \frac{0.38}{1.38}(1)\right)\\
&= 0.4406
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(B) &= E\big(u(c,t)\,|\,p\big) = 1u(900000,\,3) = \frac{1}{1.38}u_c(900000) + \frac{0.38}{1.38}u_t(3)\\
&= \frac{1}{1.38}(0.25) + \frac{0.38}{1.38}(0.8)\\
&= 0.4014
\end{aligned}
$$

Finalmente, del criterio de decisión $E(A) > E(B)$, se prefiere la alternativa A sobre la B.

4.2 FUNCIÓN DE UTILIDAD CON N ATRIBUTOS

De forma similar que en las funciones de utilidad la generalización de la función de utilidad para el caso de q atributos se lleva a cabo de una forma simple al generalizar los conceptos y resultados vistos para el caso de dos atributos.

Primeramente, supóngase que tenemos el espacio de consecuencias $A = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$, e introducimos la notación al particionar el conjunto de índices $I_n = \{1,2,\ldots,n\}$ en $I_q = \{k \mid k \in I_n\}$ y su complemento, tal que la cardinalidad de $I_q = q$, con $q = 1, 2, \ldots, n-1$. De esta forma denotamos $X = \bigtimes_{i \in I_q} X_i$ y $Y = \bigtimes_{i \in I'_q} X_i$. Así, los elementos de *A*, los podemos representar por $\mathbf{a} \in A \Rightarrow \mathbf{a} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ en donde $\mathbf{x} \in X$ y $\mathbf{y} \in Y$ con (X, Y) una descomposición conocida de *A*.

Así, en la descomposición (X, Y) los atributos *X* se llaman independientes en utilidad de los atributos *Y* si sus preferencias por loterías para (X, y) con una y fijada no depende del valor **y**. Similarmente, los atributos $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son mutuamente independientes en utilidad si para todas las combinaciones (X, Y) X es independiente en utilidad de *Y*. En caso de que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sean mutuamente independientes en utilidad, el Teorema 3 se puede generalizar con la forma multiplicativa de la función de utilidad

$$1 + ku(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 + ku_i(x_i)\right).$$

En donde, entenderemos por $u_i(x_i) = u(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_i, \ldots, x_n^0)$ y $u(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = 0$.

La función multi-lineal será de la forma:

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = {} & u_1(x_1) + \cdots + u_n(x_n) + \\ & + k_{12} u_1(x_1) u_2(x_2) + \cdots + k_{nn-1} u_n(x_n) u_{n-1}(x_{n-1}) \\ & \vdots \\ & + k_{12\ldots,n} u_1(x_1) u_2(x_2) \cdots u_n(x_n) \end{aligned}$$

Finalmente, la independencia aditiva. Los atributos $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son independientes aditivamente si para cualquier descomposición (X, Y) y para toda $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in X$ y $\mathbf{y}, \mathbf{y}' \in Y$

$$\left\langle 0.5, (\mathbf{x}, \mathbf{y}); 0.5, (\mathbf{x}', \mathbf{y}') \right\rangle \sim \left\langle 0.5, (\mathbf{x}, \mathbf{y}'); 0.5, (\mathbf{x}', \mathbf{y}) \right\rangle.$$

En el caso de independencia aditiva, la función de utilidad es aditiva

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = u_1(x_1) + u_2(x_2) + \cdots + u_n(x_n) .$$

en donde, $u_i(x_i) = u(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_i, \ldots, x_n^0)$ y $u(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = 0$.

Finalmente, podemos comentar que el concepto de distribución de probabilidad marginal puede ser encontrado con frecuencia en las alternativas de independencia aditiva y en utilidad. Ambas son usadas con frecuencia en la literatura de teoría de decisiones. Por ejemplo, en la descomposición (X, Y) de $A = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$, X es independiente en utilidad de *Y*, las preferencias entre loterías sobre $(X, \mathbf{y})$ para una **y** fija, depende solamente de la distribución marginal de probabilidades sobre *X* y no del nivel de **y** fijado. Mientras que en el caso de que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son independientes aditivamente si sus preferencias entre loterías dependen solamente en las *n*-ésimas distribuciones de probabilidad marginales sobre $X_1, X_2, \ldots, X_n$ y no de su distribución de probabilidad conjunta.

La solución del problema, en general, puede ser más complejo en algunos problemas prácticos en donde no se cumple la condición de independencia, porque es razonable considerar condiciones de dependencia. En estas circunstancias las preferencias de un decisor sobre algunos atributos pueden depender en el nivel de otros atributos. En las últimas tres décadas algunos investigadores han llevado a cabo estudios para los casos de dependencia de atributos en los cuales plantean las condiciones apropiadas para identificar las funciones de utilidad correspondientes, pero en el trabajo no las veremos.

Capítulo 5

PREFERENCIAS SOBRE EL TIEMPO

En los Capítulos previos revisamos la parte teórica referente a las preferencias, la construcción de funciones de valor y utilidad con uno o varios objetivos. Revisamos paralelamente algunas aplicaciones sobre inversiones como son: la mínima cantidad que el decisor estaría dispuesto aceptar para vender su negocio, la máxima cantidad que el decisor estaría dispuesto a pagar para adquirir un negocio, la máxima cantidad que un decisor estaría dispuesto a pagar por la obtención de la información perfecta, la prima de riesgo, etc. Ahora revisaremos algunas aplicaciones más sobre las preferencias sobre el tiempo.

Las preferencias sobre el tiempo, tienen cabida cuando las consecuencias de una decisión con frecuencia no se tienen todas simultáneamente. De tal forma que el decisor puede considerar sus preferencias sobre la consecuencia x en un tiempo t_1 y la sus preferencias sobre la consecuencia y en un tiempo t_2, esto implica que el decisor requiere conocer la forma de llevar a cabo sus preferencias en el tiempo. Este tema lo vamos a tratar en el capítulo, para tiempos discretos.

Los problemas que se estudian en Teoría de decisiones son mucho muy variados, y se aplican a la mayoría de las áreas de la ciencia. Podemos resaltar que en las últimas décadas han tomado gran auge las aplicaciones en *finanzas*, *economía* y *problemas administrativos del tipo organizacional*.

Por tales razones aquí veremos problemas de decisiones sobre algunos de los criterios financieros que se pueden utilizar en la toma de decisiones, como son: la tasa media de rendimiento, el valor presente neto y la tasa interna de rendimiento.

Para la redacción del capítulo se consultó la bibliografía [4] y [11].

5.1 PREFERENCIAS SOBRE EL TIEMPO EN EL TIEMPO

Ahora veremos otro tipo de problemas que se pueden analizar en la Teoría de decisiones, nos referimos a situaciones en donde hay inversión de capitales. Es decir, problemas que consideran cómo tomar una decisión para llevar a efecto una inversión de capital, cuando el decisor conoce el tiempo en el que se puede recuperar la inversión.

EJEMPLO 1

Supóngase que se tienen seis proyectos de los cuales conocemos su inversión original (en millones de pesos) y la recuperación de la inversión en años. Los datos se muestran en la tabla siguiente.

Años	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
0	**-8**	**-12**	**-12**	**-2**	**-18**	**-18**
1	4	6	8	1	16	5.4
2	4	6	4	1	5	19.2
3	0	5	5	1	0	0
4	0	5	5	2	0	0

La tabla anterior muestra lo siguiente, en el año 0 se tienen los capitales invertidos en cada proyecto. En los años 1, 2, 3 y 4 serían las recuperaciones del capital. Podemos apreciar que los proyectos *A*, *E* y *F* sólo están programados en dos años, mientras que los proyectos *B*, *C* y *D* se programan a cuatro años.

En general, conocemos que los problemas de tomar una decisión en cuanto a un proyecto se refiere, el decisor tienen sólo dos opciones *aceptar* o *rechazar* el proyecto. Por lo tanto, la cantidad de casos a ocurrir son: $2^6 = 64$ combinaciones de tomar decisiones para los proyectos.

Un decisor que sólo quiera utilizar sus ideas intuitivas, referentes al reembolso, puede tener ciertas dificultades al tomar una decisión. Por ejemplo, en el problema de la elección de los proyectos a seleccionar (en cuanto al criterio de reembolso), se pueden ranquear los proyectos de la siguiente forma.

Primeramente los proyectos *A*, *B*, *D* y *E* recuperan la inversión en dos años, *A*, *B* y *D* el 50% en el primero, mientas que *E* recupera el 89% en el primer año. El proyecto *F* recupera la inversión en dos años, en el primero 30% y en el segundo ya gano. El proyecto *C* recupera la inversión en dos años 67% en el primero y 33% en el segundo.

Así, el ranking tomando en cuenta el criterio de recuperación queda de la siguiente manera.

$$E, C, A, B, D \text{ y } F.$$

Con este criterio, quedan muchas incógnitas por resolver, ya que el criterio no diferencia en cuanto al monto de la inversión original, puesto que no es lo mismo invertir dos millones a invertir 18 millones. De está forma el decisor racional, requiere de mayor conocimiento de las inversiones, para tomar una mejor decisión.

En este tipo de problemas se tienen algunos criterios de decisión para la inversión de proyectos.

5.1.1 TASA MEDIA DE RENDIMIENTO, TMR (ARR –ACCOUNTING RATE OF RETURN)

Un método que utilizan los decisores financieros para la inversión en proyectos se basa en la **Tasa media de rendimiento TMR (ARR(.))**, la cual se define como:

“El Promedio contable de ganancia de un proyecto entre el capital desembolsado por 100%”.

De tal forma que los cálculos para los proyectos anteriores son los siguientes.

$$\mathrm{TMR}(A) = \frac{\dfrac{(-8)+4+4}{2}}{8} \times 100\% = 0\%$$

$$\mathrm{TMR}(B) = \frac{\dfrac{(-12)+6+6+5+5}{4}}{12} \times 100\% = 20.83\%$$

$$\mathrm{TMR}(C) = \frac{\dfrac{(-12)+8+4+5+5}{4}}{12} \times 100\% = 20.83\%$$

$$\mathrm{TMR}(D) = \frac{\dfrac{(-2)+1+1+1+2}{4}}{2} \times 100\% = 37.5\%$$

$$\mathrm{TMR}(E) = \frac{\dfrac{(-18)+16+5}{2}}{18} \times 100\% = 8.33\%$$

$$\mathrm{TMR}(F) = \frac{\dfrac{(-18)+5.4+19.2}{2}}{18} \times 100\% = 18.33\%$$

Posteriormente, el criterio indica que se elige el proyecto con la mayor tasa media de rendimiento. Por lo tanto, con el criterio de la TMR los mejores proyectos son:

D, *B*, *C*, *F*, *E* y finalmente el *A*.

Deficiencias del criterio

a. Este criterio no contempla las diferencias de inversión. Por ejemplo, obsérvese *B*, *C* y *D*.

Proyecto	Inversión
B	10
C	10
E	18
F	18
A	8
D	2

Como se puede ver no hay ningún tipo de ponderación para los capitales de las inversiones, luego, los riesgos de pérdida para las inversiones tendrán que ser muy diferentes.

b. No se toma en cuenta la distribución de ingresos y gastos, obsérvese *B* y *C*; *E* y *F*.

Proyecto	Inversión				
A	8	4	4	0	0
B	12	6	6	5	5
C	12	8	4	5	5
D	2	1	1	1	2
E	18	16	5	0	0
F	18	5.4	19.2	0	0

Con base en las diferencias anteriores, podemos considerar algún otro criterio, que si contemple las diferencias anuales.

5.1.2 VALOR PRESENTE NETO, VPN (NPV – NET PRESENT VALUE)

Otra forma de evaluar las inversiones de los proyectos para tomar una mejor decisión, se obtiene ponderando la recuperación por años de la inversión. En este criterio el decisor considera la razón, *r*, para calcular el Valor Presente Neto, VPN(.), el cual se calcula de la siguiente forma.

$$VPN(.) = \text{inversión}(.) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\text{recuperación en el año } i \text{ de la inversión}(.)}{(1+r)^i}.$$

Es decir,

$$VPN(.) = \text{Inversión} + \frac{\begin{array}{c}\text{Recuperación}\\ \text{en el 1er año.}\end{array}}{1+r} + \frac{\begin{array}{c}\text{Recuperación}\\ \text{en el 2do año.}\end{array}}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{\begin{array}{c}\text{Recuperación}\\ \text{en el año } n.\end{array}}{(1+r)^n}.$$

Para nuestro ejemplo consideremos un interés $r = 10\%$.

$$VPN(A) = -8 + \frac{4}{1+0.1} + \frac{4}{(1+0.1)^2} = -1.058.$$

$$VPN(B) = -12 + \frac{6}{1+0.1} + \frac{6}{(1+0.1)^2} + \frac{5}{(1+0.1)^3} + \frac{5}{(1+0.1)^4} = 5.585.$$

$$VPN(C) = -12 + \frac{8}{1+0.1} + \frac{4}{(1+0.1)^2} + \frac{5}{(1+0.1)^3} + \frac{5}{(1+0.1)^4} = 5.750.$$

$$VPN(D) = -2 + \frac{1}{1+0.1} + \frac{1}{(1+0.1)^2} + \frac{1}{(1+0.1)^3} + \frac{2}{(1+0.1)^4} = 1.853.$$

$$VPN(E) = -18 + \frac{16}{1+0.1} + \frac{5}{(1+0.1)^2} = 0.678.$$

$$VPN(F) = -18 + \frac{5.4}{1+0.1} + \frac{19.2}{(1+0.1)^2} = 2.777.$$

Posteriormente, el criterio de decisión indica que se elige el mayor valor presente neto. Por lo tanto, con el criterio del valor presente se lleva a cabo la elección de los proyectos, la cual quedará de la siguiente manera, *C*, *B*, *F*, *D*, *E* y *A*.

Un problema de este criterio es que se considera la misma tasa *r* para todos los proyectos, la cual en general puede variar de proyecto en proyecto. Para evitar este problema se utiliza el siguiente método.

5.1.3 TASA INTERNA DE RENDIMIENTO, TIR (IRR – INTERNAL RATE OF RETURN)

Para poder variar la razón *r* en el criterio anterior se utiliza una modificación, al criterio resultante y se le conoce con el nombre de **Tasa Interna de Rendimiento** TIR(.). La TIR se calcula de forma similar al VPN(.) pero determinando el valor de *r* para cada proyecto, el cual se expresa en porciento.

El cálculo del valor de la TIR(.), se lleva a cabo encontrando, primeramente, el valor de *r* para cada proyecto, éste se obtiene igualando a cero el VPN(.) y resolviendo la ecuación para *r*.

- TIR(*A*)

$$VPN(A) = -8 + \frac{4}{1+r} + \frac{4}{(1+r)^2} = 0 \Rightarrow \; r = 0$$
$$TIR(A) = 0\%$$

Para la solución la ecuación, se puede hacer definiendo la variable, $x = \frac{1}{1+r}$, con lo cual resulta la ecuación

$$4x^2 + 4x - 8 = 0 \;\; \text{o} \;\; x^2 + x - 2 = 0\,.$$

Resolviendo, obtenemos las raíces, $x_1 = 1$ y $x_2 = -2$. Despejando a r de la variable x tenemos:

$$r = \frac{1}{x} - 1\,.$$

Sustituyendo los valores de x en la igualdad para r, tendremos los valores de la tasa de interés que estamos buscando

$$r_1 = \frac{1}{x_1} - 1 = \frac{1}{1} - 1 = 1 - 1 = 0 \;\; \text{y} \;\; r_2 = \frac{1}{x_2} - 1 = \frac{1}{-2} - 1 = -0.5 - 1 = -1.5\,.$$

Pero el interés no puede ser negativo, luego la solución será $r_1 = 0$.

- TIR(B)

$$VPN(B) = -12 + \frac{6}{1+r} + \frac{6}{(1+r)^2} + \frac{5}{(1+r)^3} + \frac{5}{(1+r)^4} = 0 \;\; \Rightarrow \;\; r = 0.3099$$
$$TIR(B) = 30.99\%$$

La solución de la ecuación, se obtiene definiendo la variable, $x = \frac{1}{1+r}$, de donde resulta la ecuación

$$-12 + 6x + 6x^2 + 5x^3 + 5x^4 = 0\,.$$

Resolviendo, con ayuda de algún paquete matemático o por algún método de aproximación se obtienen las raíces, $x_1 = -1.479022674\ldots$ y $x_2 = 0.7634089321\ldots$. Luego, los valores de r son:

$$r_1 = \frac{1}{-1.4790} - 1 < 0 \;\; \text{y} \;\; r_2 = \frac{1}{0.7634089321} - 1 = 0.3099\ldots$$

Pero el interés no puede ser negativo, la solución será $r_2 = 0.3099\ldots$.

Similarmente para los otros casos.

- TIR(C)

$$VPN(C) = -12 + \frac{8}{1+r} + \frac{4}{(1+r)^2} + \frac{5}{(1+r)^3} + \frac{5}{(1+r)^4} = 0 \Rightarrow r = 0.3200$$
$$TIR(C) = 32.00\%$$

- TIR(D)

$$VPN(D) = -2 + \frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + \frac{1}{(1+r)^3} + \frac{2}{(1+r)^4} = 0 \Rightarrow r = 0.4327$$
$$TIR(D) = 43.27\%$$

- TIR(E)

$$VPN(E) = -18 + \frac{16}{1+r} + \frac{5}{(1+r)^2} = 0 \Rightarrow r = 0.1339$$
$$TIR(E) = 13.39\%$$

- TIR(F)

$$VPN(F) = -18 + \frac{5.4}{1+r} + \frac{19.2}{(1+r)^2} = 0 \Rightarrow r = 0.1936$$
$$TIR(F) = 19.36\%$$

Finalmente el criterio elige al mayor valor de la TIR(.), de tal forma que en este ejemplo la ordenación de la elección de los proyectos quedará de la siguiente manera:

$$D, C, B, F, E \text{ y } A.$$

Comentario

Los últimos tres tipos de problemas económicos muestran situaciones determinísticas de decisiones, ya que no existió incertidumbre en la elección del decisor, pero se pueden llevar a un problema de decisiones con incertidumbre, con o sin muestreo, al suponer que se tendrán diferentes tasas de interés, que pueden ocurrir con cierta probabilidad, o al llevar a cabo sus preferencias en el tiempo.

5.2 FUNCIONES DE VALOR Y VALOR PRESENTE NETO

Primeramente notamos que las situaciones bajo incertidumbre a que se enfrenta un economista o inversionista al tomar una decisión son muy complejas, porque influyen demasiados factores, tanto, internos como externos de una economía. Nosotros nos apegaremos a un caso simple y que se refiere al valor presente neto.

Primeramente, supóngase que el tiempo lo hemos dividido en *n* periodos discretos, que pueden ser semanas, meses, años, etc. y que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ indican el vector de consecuencias, en donde x_i representa la consecuencia en el *i*-ésimo periodo. Por ejemplo, x_i puede representar el flujo de dinero en el valor presente neto para el año *i*, ahora vamos a trabajar con las funciones de valor para determinar vectores de consecuencias indiferentes con el primero, pero que los podamos reducir hasta un solo valor. Es decir, llegar hasta un vector de consecuencias

$$(x_1^*, 0, \ldots, 0) \sim (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Para esto tenemos que los vectores de consecuencias

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Tienen que cumplir las propiedades del capítulo 2 para el caso n dimensional, de donde se concluyen las propiedades siguientes.

1).- Dominancia. $\mathbf{x} \succ \mathbf{y} \Leftrightarrow x_i \succ y_i, \forall i$.

2).- Atributos mutuamente preferencialmente independientes.

3).- Líneas en pares de indiferencia paralelas. Para cualquier *i*, las líneas de indiferencia de x_i y x_{i+1} son paralelas.

4).- Invarianza en pares. Si las líneas de indiferencia en los espacios i e $i+1$ son las mismas para toda $i < n$, entonces decimos que las preferencias son en pares invariantes.

TEOREMA

El único criterio de evaluación que cumple con las propiedades 1-4 es el valor presente neto usando una razón constante.

Por ejemplo, el valor presente neto para la inversión *C* a una razón constante 10%.

	Periodo				
vector	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
$\mathbf{x}$	-12	8	4	5	5
$\mathbf{x}'$	-12	8	4	9.545	0
$\mathbf{x}''$	-12	8	12.677	0	0
$\mathbf{x}'''$	-12	19.525	0	0	0
$\mathbf{x}''''$	5.70	0			

Luego, podemos concluir que el valor presente neto es una función de valor que cumple las propiedades dadas en multiatributos en el Capítulo 2.

Nótese que el valor obtenido por medio de las propiedades de la función de valor coincide con el valor obtenido en la sección anterior.

Fácilmente, podemos observar que al concluir que el valor presente neto es una función de valor, estamos diciendo que la TIR también lo es, ya que la TIR no es más que el valor presente neto cuando se hace cero.

Finalmente, podemos concluir el capítulo mencionado que el agregar incertidumbre a los problemas del valor presente neto no es una tarea tan sencilla, porqué para poderlo llevar a cabo requerimos de varios factores económicos como son: los Ingresos y los costos totales; entre los que tenemos la producción, administración, ventas, financieros, etc. Con los cuales obtendremos la utilidad antes de impuestos y tendremos que hablar sobre la utilidad después de los impuestos del 28% ISR más 10% del reparto de utilidades. Además de estudiar la depreciación, el pago del capital del préstamo, para que finalmente lleguemos al flujo neto de efectivo.

CONCLUSIONES

Durante los capítulos 1-5 revisamos un material bastante completo sobre: Árboles de decisión, el sistema axiomático de preferencias de orden, funciones de valor, el sistema axiomático de comportamiento racional, las funciones de utilidad y por último las preferencias en el tiempo.

En el trabajo vemos que el uso de árboles de decisión se puede explicar mediante 4 etapas, mismas que se explican con varios ejemplos que fueron diseñados para revisar diferentes situaciones que pueden presentarse al realizar la evaluación de los impactos económicos del problema, junto con sus probabilidades en donde es de gran uso el Teorema de Bayes.

El trabajo muestra la forma de construcción de un sistema axiomático, utilizando únicamente las relaciones de orden. Con el sistema se explica la creación de las funciones de valor con uno o varios atributos, se formulan y demuestran los Teoremas de existencia y unicidad de dichas funciones. La importancia en la creación de dichas funciones reside en que con ellas podemos evaluar cualquier problema de decisión con cualquier tipo de alternativas incluyendo las de preferencias de orden aplicadas a problemas cuyos atributos no tienen características numéricas.

Uno de los resultados del trabajo que puede tener gran aplicación se refiere a los ejemplos de funciones de utilidad que se construyen para cada uno de todos los diferentes casos que pueden ocurrir al aplicar las funciones de utilidad a un tipo cualquiera de decisor, con aversión, propensión o neutralidad al riesgo. De esta forma el decisor que se encuentre ante un problema de decisión y que requiera modelar su utilidad con una función, puede utilizar la función correspondiente y llevar a efecto una cuantificación de la utilidad que tendría. Para esto se muestran algunos ejemplos diseñados para mostrar el uso de las diferentes funciones de utilidad.

Finalmente, podemos mencionar que el trabajo presentado ilustra a un estudioso de la Teoría de las decisiones las bases teóricas necesarias, que le ayuden a comprender y aplicar en situaciones con certidumbre, las funciones de valor y en el caso de incertidumbre las funciones de utilidad.

En la literatura existente, no se encuentran metodologías como las que se muestran en el trabajo, que faciliten el uso de los árboles de decisión y las funciones de valor y utilidad, que nos permitan resolver problemas complejos con mayor facilidad.

Durante la revisión del material señalado en los puntos anteriores podemos observar que los problemas de teoría de decisiones tienen la característica principal que su toma de decisión debe estar basada en la **racionalidad de un sistema axiomático**, con el cual se garantiza la racionalidad de la decisión tomada por el decisor. Por tal razón, podemos concluir que los problemas de decisión en donde no se considera la racionalidad del sistema axiomático para la toma de decisiones (lo cual ocurre con frecuencia), nos puede llevar a situaciones cuya decisión resulta errónea.

Para reforzar lo dicho en el párrafo anterior, citaremos algunas paradojas que se conocen desde tiempos muy remotos, "La Paradoja de Allais" y la "Paradoja de Sant-Petersburgo". Dichas paradojas mostrarán que la solución tomada, ante un problema de decisión, sin recurrir al análisis de la racionalidad de la decisión, por parecer obvia, la elección nos puede llevar a incongruencias ya que no cumple con los requisitos de un sistema axiomático.

Posteriormente veremos otro problema que refuerza la importancia de tomar en cuenta la racionalidad de las decisiones. Estamos hablando sobre el problema del ranking en una toma de decisiones. Este problema se refiere a situaciones en donde se toma una decisión grupal (un grupo de decisores, que podrían ser inversionistas, jueces, etc.), por ejemplo, sobre un proyecto, un concurso, etc. Es decir, situaciones en donde cada decisor evalúa a los participantes y después eligen el que tenga un puntaje extremo (mínimo o máximo, según se requiera), y se pregunta qué pasará cuando debido a ciertas circunstancias se tiene que eliminar al concursante ganador, cuál será el concursante que ocupe su lugar. La solución pareciera obvia, elegir al concursante en segundo lugar del ranking, pero veremos que esto no necesariamente es así.

C.1 PARADOJAS

En la toma de decisiones con frecuencia pueden ocurrir situaciones cuya solución en primera apariencia sea errónea, para ejemplificar esta situación hemos elegido dos paradojas, que nos muestran la incongruencia del decisor al tomar una decisión sin considerar la consistencia en la las decisiones.

C.1.1 LA PARADOJA DE ALLAIS

Supóngase que tenemos dos situaciones diferentes, las cuales consisten en lo siguiente.

Situación 1

Se tiene que hacer una elección entre dos opciones *A* y *B*, tales que en la opción *A* el decisor ganaría un millón con certeza. Mientras que en la opción *B* se puede tomar alguna de las siguientes decisiones.

1. El decisor tendrá el 10% de probabilidades de ganar 15 millones.
2. El decisor tendrá el 89% de probabilidades de ganar 1 millón.
3. El decisor tendrá el 1% de probabilidades de ganar 0 millones.

Como se puede apreciar en las dos opciones, mientras que en la *A* hay una certeza del 100% de ganar el millón, en la *B* se puede ganar 15 millones, un millón o nada, de tal forma que el decisor en la opción *B* estaría incurriendo en un riesgo que dependerá de su decisión. En apariencia el decisor elegirá la opción *A* (es más atractiva).

Situación 2

Supóngase algo similar a la situación 1, pero ahora con opciones *C* y *D*. En la opción *C* el decisor toma parte en un juego en el cual

1. con el 11% de probabilidades puede ganar un millón,
2. con el 89% de probabilidades gana cero.

Por otro lado en la opción *D* el decisor tiene

1. el 10% de probabilidades de ganar 15 millones y
2. el 90% de probabilidades de ganar cero.

De forma similar a la situación 1, el decisor elegiría a la opción *D* ya que es mucho más atractiva que la *C*.

Sin embargo, este problema se estudió desde los años cincuentas y se ha notado que tiene una inconsistencia. Puesto que podemos notar que en general la gente elige *A* y *D* en las situaciones 1 y 2, respectivamente (ya que prefieren un millón con certeza, situación 1, o ganar 15 millones, situación 2). Pero en la Teoría de decisiones se tiene que reforzar la toma de decisión con un procedimiento matemático racional. Es decir, un método que sea consistente en cualquier situación.

Así, de esta manera para el problema calcularemos las probabilidades correspondientes.

Una forma de asignación de probabilidades podría ser la construcción de una lotería de 100 números con los premios correspondientes al problema (ver tabla de abajo), y posteriormente seleccionar de manera aleatoria un boleto de la lotería.

	Número de boletos de lotería		
	1	2-11	12-100
Opción *A*	$1,000,000	$1,000,000	$1,000,000
Opción *B*	$0	$15,000,000	$1,000,000
Opción *C*	$1,000,000	$1,000,000	$0
Opción *D*	$0	$15,000,000	$0

La consistencia en la racionalidad de la decisión nos llevará a la situación que si la decisión tomada en primera instancia fuese válida se tendría que cumplir con el mismo criterio para la tabla de premios anterior. Por lo tanto, de la tabla podemos observar que si se considera la opción *A* el decisor tendría que elegir la *C*, porque sus premios son iguales. Similarmente, si en la situación 1, se elige la *B*, en la situación 2, el decisor tiene que elegir la *D*. Lo cual demuestra que la primera decisión tomada intuitivamente es irracional (*A* con *D* y *B* con *C*).

C.1.2 LA PARADOJA DE SANT-PETERSBURGO

En Teoría de decisiones en la parte de juegos se tiene lo que se llama un **juego justo**, el cual se define como un juego en donde el decisor a la larga termina empatado. Es decir, no gana ni pierde. Ahora supóngase que se tiene un juego en el cual se lanza una moneda y en caso de acertar el decisor gana $2 pesos, esto ocurre con una probabilidad de $1/2$. En caso de perder el decisor dobla su apuesta, esto es puede ganar $\$2^2$ pesos con probabilidad $(1/2)^2$, y así sucesivamente, el decisor en el *n*-enésimo lanzamiento puede ganar $\$2^n$ pesos con probabilidad $(1/2)^n$. Se pregunta, ¿cuál es la ganancia esperada del jugador?

Lanzamiento	Ganancia	Probabilidad	Suma
1	2	½	1
2	2^2	$(½)^2$	1
3	2^3	$(½)^3$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	2^n	$(½)^n$	1

Solución

Para calcular la ganancia esperada del decisor, primeramente definimos la variable aleatoria *X* que representa la ganancia del decisor. Es decir,

X : cantidad a ganar en el lanzamiento *x*, para $x = 1, 2, 3, \ldots$ con probabilidades respectivas

$$P(X = x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \quad x = 1, 2, 3, \ldots$$

Ahora comprobaremos que *X* tiene una distribución de probabilidades. Es decir,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1 .$$

Esto se debe a que

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}=\frac{1}{2}\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}}_{\text{cambio } k=i-1}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\frac{1}{2}}=1.$$

Ahora calculamos el valor esperado de la variable aleatoria X,

$$E(X)=\sum_{x=1}^{\infty}xP(X=x)=2\left(\frac{1}{2}\right)+2^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\cdots+2^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+\ldots=\sum_{x=1}^{\infty}1\to\infty.$$

Como se puede ver la ganancia del jugador es infinita, por lo tanto, para que el juego sea justo el decisor debería apostar **una cantidad infinita**, lo cual no puede ser posible.

C.2 PROBLEMA DE ASIGNACIÓN DE PRIORIDADES NUMÉRICAS

En ocasiones cuando una decisión es tomada por un conjunto de empresarios, por ejemplo para la licitación de alguna construcción. Ellos asignan, según su criterio, calificaciones de prioridades a las constructoras. Supóngase que ocurre una situación en la que por ciertas circunstancias una de las constructoras tiene un problema y será eliminada de la licitación, las preguntas que surgen son:

¿cómo quedarán ordenadas las constructoras restantes?,

¿la solución consistirá simplemente en recorrer las posiciones?.

Veremos en el siguiente ejemplo, que la solución de hacer un recorrimiento no siempre será la respuesta correcta.

Por ejemplo, se tienen cuatro constructoras (A, B, C y D) y siete socios, cada socio debe calificar a cada una de las constructoras y posteriormente ganará aquella que tenga mejor puntaje.

Sean los puntajes obtenidos los siguientes:

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	**TOTAL**
A	4	1	2	4	1	2	4	18
B	3	4	1	3	4	1	3	19
C	2	3	4	2	3	4	2	**20**
D	1	2	3	1	2	3	1	13

Como se puede apreciar la constructora C es la ganadora.

Ahora supóngase que se descubrieron ciertas anomalías en la constructora ganadora y se tendrá que eliminar ¿en está situación quién sería el ganador?

En apariencia al quitar una constructora extrema no debería influir en la posición de los demás, sin embargo, puede ocurrir que al efectuar un nuevo ordenamiento todo cambie. Así, en este caso al recorrerlo, tendremos:

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	TOTAL
A	3	1	2	3	1	2	3	**15**
B	2	3	1	2	3	1	2	14
D	1	2	3	1	2	3	1	13

Ahora el ganador sería ¡la constructora *A*! y no la *B*, que era la que se esperaba que resultara ganadora al eliminar la constructora *C*, por estar en segundo lugar en el ordenamiento original.

Las secciones 6.1 y 6.2 nos dejan una muestra clara de la importancia que tienen las bases teóricas sobre las que se sustenta la Teoría de decisiones y que fueron revisadas en el desarrollo del trabajo.

Bibliografía

[1] Acosta Flores José Jesús, "Teoría de Decisiones en el Sector Público y en la Empresa Privada", Representaciones y Servicios de Ingeniería, S.A. 1975, **ISBN 968-6062-52-1**

[2] Arnold Kaufmann, "The Science of Decision-making an introduction to praxeology", Ed. McGraw-Hill, 1968.

[3] Bonini Charles E., Hausman Warren H., Bierman Harold, "Análisis Cuantitativo para los negocios", novena edición. Ed. McGraw-Hill, Columbia 2004. **ISBN 0-256-14021-9**

[4] French Simon, B.A., "Decision Theory: An Introduction to the Mathematics of Rationality", Ed. JOHN WILEY & SONS, New York-Toronto, 1988.

[5] Gutiérrez González Eduardo y Olga Panteleeva Vladimirovna, "Fundamentos de la Teoría de las Probabilidades para Ingeniería y Ciencias", Segunda Edición LIBUDI, 2001.

[6] Gutiérrez González Eduardo y Raúl Larios García, "Fundamentos de matemáticas y lógica", Ed. IPN, 1999.

[7] Hammond John, Keeney Ralph, Howard Raiffa, "Smart Choices", Ed. Broadway Books, 2002.

[8] Lindgren, B.W., "Elements of Decision Theory", Ed. The Mc Millan Company, 1971

[9] Marshall Kneale T., Robert M. Oliver. "Decision Making and Forecasting with Emphasis on Model Building and Policy Analysis", Ed. McGraw-Hill, Inc. 1995. **ISBN 0-07-113970-2**

[10] Morgan P. Jones. "Introducción a la Teoría de Decisiones", Alfaomega, 1995.

[11] Ralph L. Keeney, Howard Rafia. "Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs", Ed. JOHN WILEY & SONS, 1976. **ISBN 0-471-46510-0**

[12] Trzaskalik Tadeusz, Michnik Jerzy, "Multiple Objective and Goal Programming", Ed. Physica-Verlag, 2002. **ISBN 3-7908-1409-1**

[13] White Douglas John. "Fundamentals of Decision Theory", Ed. NORTH-HOLLAND, 1976. **ISBN 0-7204-8605-X**

Para las aplicaciones se pueden consultar las páginas en Internet en donde se localizan los trabajos más resientes.

[14] http://faculty.fuqua.duke.edu/daweb (Sociedad de Análisis de Decisiones)

[15] http://da.pubs.informs.org/ (revista de Análisis de Decisión, está dentro de la página anterior)

Artículos

[16] **The evolution of sales forecasting management: a 20-year longitudinal study of forecasting practices (p 303-324)** TERESA M. MCCARTHY, DONNA F. DAVIS, SUSAN L. GOLICIC, JOHN T. MENTZER Published Online: 25 May 2006

[17] **Assessing the forecasting accuracy of alternative nominal exchange rate models: the case of long memory (p 369-380)** David Karemera, Benjamin J. C. Kim Published Online: 10 Aug 2006DOI: 10.1002/for.994

[18] **The effect of salience on mental accounting: how integration versus segregation of payment influences purchase decisions (p 381-391)** Hyeong Min Kim Published Online: 7 Sep 2006

[19] **Mindsets, rationality and emotion in Multi-criteria Decision Analysis (p 161-172)** Fred Wenstøp Published Online: 21 Sep 2006

[20] **Comments on *Mindsets, rationality and emotion in Multi-criteria Decision Analysis* (p 177-178)** Hans G. Daellenbach Published Online: 21 Sep 2006

[21] **A comment on rationality, ethical values and emotion in MCDA (p 179-182)** Marc Le Menestrel Published Online: 21 Sep 2006

[22] **Some comments on the paper *Mindsets, rationality and emotion in Multi-criteria Decision Analysis* (p 183-185)** Alexis Tsoukiàs Published Online: 21 Sep 2006

[23] **Linking emotions to needs: a comment on *Mindsets, rationality and emotion in Multi-criteria Decision Analysis* (p 187-190)** Felix Rauschmayer Published Online: 21 Sep 2006

[24] **Some viewpoints on emotion, consequentialism and multicriteria decision making (p 191-198)** Fred Wenstøp Published Online: 21 Sep 2006