DINÁMICA DE SISTEMAS

FRANCISCO J. RODRÍGUEZ RAMÍREZ

INGENIERIA

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, España,
Colombia, Puerto Rico, Venezuela

Catalogación en la fuente

Rodríguez Ramírez, Francisco J.
Dinámica de sistemas. -- México : Trillas :
UNAM, Facultad de Ingeniería, 1989.
ix, 665 p. ; 21 cm.
Bibliografía: p. 655-657
Incluye índices
ISBN 968-24-3512-9

1. Control, Teoría del. 2. Ingeniería - Estudio y enseñanza. I. t.

LC- TJ213'R6.3 *D- 629.8312'R635d*

La presentación y disposición en conjunto de
DINÁMICA DE SISTEMAS
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado, la grabación o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento de información), sin consentimiento por escrito del editor.

Derechos reservados
© 1989, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, junio 1989
ISBN 968-24-3512-9

Impreso en México

Printed in Mexico

Esta obra se terminó de imprimir
el día 15 de junio de 1989,
en los talleres de Impresiones Editoriales, S. A. de C. V.,
Lago Chalco núm. 230, Col. Anáhuac,
C.P. 11320, México, D. F.,
se encuadernó en Encuadernadora Técnica Mexicana, S. A. de C. V.,
Lago Chalco núm. 230, Col. Anáhuac,
C.P. 11320, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

UT, AL 50

PROLOGO

Una de las áreas de estudio de mayor importancia es, sin lugar a dudas, la referente al comportamiento dinámico de los sistemas físicos, esto se debe principalmente a que representa la base teórica requerida para estudiar los sistemas de control, teoría de circuitos, electrónica, máquinas eléctricas y otras áreas de interés en ingeniería. Por otro lado, es el primer contacto que tiene el estudiante con las matemáticas aplicadas.

Es necesario señalar que el campo de aplicación del comportamiento dinámico de sistemas no está restringido solamente a áreas de tipo técnico sino que se extiende a áreas de tipo social, humanístico, económico, científico, etcétera.

La presente obra tiene como finalidad apoyar al curso de Dinámica de sistemas físicos que actualmente se imparte dentro de las carreras de ingeniería mecánica y eléctrica y de computación en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México.

El contenido temático de esta obra comprende seis capítulos, en el primero se presentan los conceptos básicos y definiciones fundamentales que se requieren para estudiar el comportamiento dinámico de los sistemas físicos; en el segundo capítulo se plantean los lineamientos generales para el modelado de sistemas físicos y en los capítulos tres y cuatro se tratan las principales técnicas de análisis para sistemas de primer y segundo orden respectivamente.

El capítulo cinco es el de mayor importancia debido a que se presentan tanto las técnicas de modelado como las principales de análisis de los sistemas dinámicos en el espacio de estados. En el último capítulo se da una introducción a la teoría de control.

Finalmente, se incluyen apéndices para reforzar los antecedentes requeridos, así como algunos conceptos que complementan toda la obra.

Cabe mencionar que la presente obra no pretende cubrir exhaustivamente los temas tratados, por lo que es necesario complementar su estudio, consultando la bibliografía que se proporciona al final.

Por último deseo hacer patente mi agradecimiento al ingeniero Antonio Salvá Calleja, Jefe del departamento de Ingeniería de Control de la División de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la Facultad de Ingeniería, por las facilidades brindadas para la elaboración de la obra. Y de manera muy especial a las licenciadas Irma Hinojosa Félix y María Cuairán Ruidíaz y al pasante Salvador Zamora Alarcón por la invaluable participación en el análisis del contenido temático, estructuración didáctica y revisión técnica, además de los valiosos comentarios y sugerencias durante la elaboración de la obra.

A t e n t a m e n t e .

Francisco Rodríguez R.

C O N T E N I D O

CAPITULO III SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

CAPITULO IV SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

CAPITULO V VARIABLES DE ESTADO

CAPITULO VI INTRODUCCION A LA TEORIA DE CONTROL

INTRODUCCION

El estudio del comportamiento dinámico de los sistemas físicos ha ocupado un lugar importante dentro de la ingeniería, ya que trata una cantidad considerable de situaciones que se presentan de manera frecuente en el ejercicio profesional de los ingenieros. En esta área de estudio se combinan las bases teóricas adquiridas en los cursos de física y matemáticas en general, especialmente en mecánica, termodinámica, ecuaciones diferenciales, cálculo diferencial e integral y álgebra.

El contenido de la obra se puede dividir en tres partes. En la primera (capítulos I Y II) se incluyen los conceptos de sistema y modelo, una clasificación general de sistemas, los conceptos de linealidad e invariancia con el tiempo y las funciones generalizadas, en estas últimas se enfatiza su representación, propiedades y algunas aplicaciones. También se definen los elementos básicos que integran a los sistemas que son objeto de estudio, los principios físicos y leyes fundamentales que rigen su comportamiento, y se propone una metodología para la obtención de modelos matemáticos.

En la segunda parte (capítulos III a V) se describen las principales técnicas de análisis para sistemas de primer y segundo orden, y los de orden **n**; incluyendo las características generales, los tipos de respuesta, la constante de tiempo y los parámetros de diseño para sistemas de primer y segundo orden, y para los sistemas de orden **n** se proporcionan los elementos necesarios para su análisis en el espacio de estados.

Finalmente en la tercera parte (capítulo VI) se da una introducción a la teoría de control que incluye los conceptos de impedancia y admitancia; las propiedades y aplicaciones de la integral de convolución, función de transferencia y el patrón de polos y ceros, además los conceptos de estabilidad, controlabilidad y observabilidad.

CAPITULO I CONCEPTOS GENERALES

I.1 CONCEPTO DE SISTEMA

Establecer una definición precisa del término sistema, es una tarea un tanto difícil, esto se debe principalmente a que existen diversas connotaciones e interpretaciones que dependen del campo de aplicación en el cual vaya a ser empleado el término. Por otra parte, es necesario aclarar que los campos de aplicación en los que el término sistema se puede emplear no se limitan únicamente al área técnica, sino también abarcan el área de las ciencias sociales, de humanidades y las disciplinas de tipo económico. No obstante todo lo anterior, a continuación se presentan algunas definiciones del término sistema, a fin de que se adopte la más adecuada a los requerimientos que demanda el estudio de los sistemas dinámicos.

I.1.1 DEFINICIONES DE SISTEMA

a) Un sistema es un conjunto de entes interrelacionados que llevan a cabo una actividad o tarea determinada.

b) Un sistema también puede ser definido como la combinación de elementos o componentes que actúan de manera conjunta para realizar una función perfectamente definida, que no podría ser llevada a cabo por alguno de los elementos que forman parte de él.

c) De acuerdo con la enciclopedia Americana, un sistema es una colección de objetos que forman un todo y se combinan, ya sea en forma natural o mediante la acción del hombre.

d) Otra definición no tan general como las anteriores es: *Un sistema es un ente formado por un conjunto de entradas, un conjunto de salidas y una relación bien definida entre ambos conjuntos.* Se puede representar en forma esquemática como:

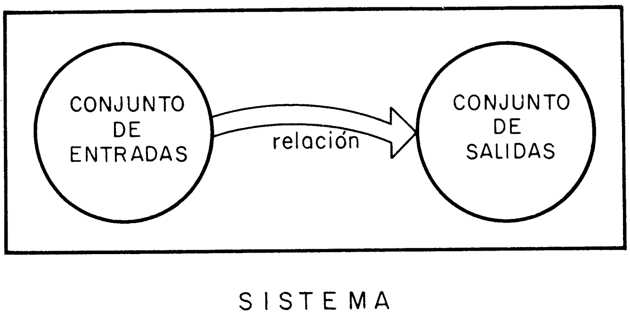


Figura I.1

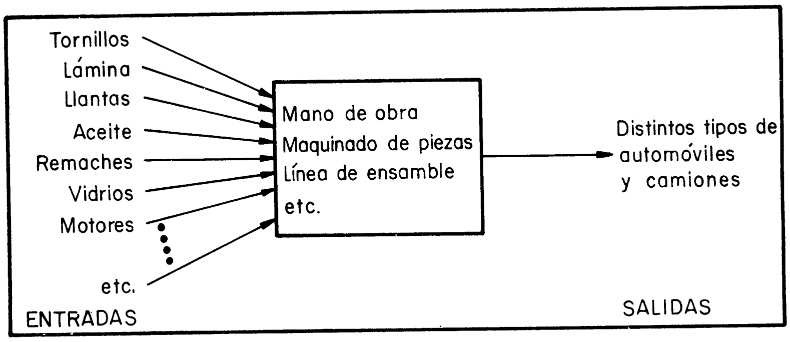
Analizando las definiciones anteriores, se puede afirmar que la definición que más se adecúa a las necesidades requeridas en el estudio de los sistemas dinámicos es esta última. Sin embargo, es necesario hacer notar que todas estas definiciones no son de carácter universal y, por lo tanto, se puede establecer otra u otras que satisfagan de manera más completa las necesidades actuales.

Con base en la definición adoptada se pueden enunciar los siguientes ejemplos:

Ejemplo I.1

Fábrica de vehículos automotores

En este caso una fábrica de vehículos automotores puede representar un sistema, en el cual se consideran como entradas la materia prima en general, como salidas automóviles y camiones y la relación entre estos dos conjuntos (entradas y salidas) se establece mediante el maquinado y formación de piezas y partes. Esto puede representarse como:



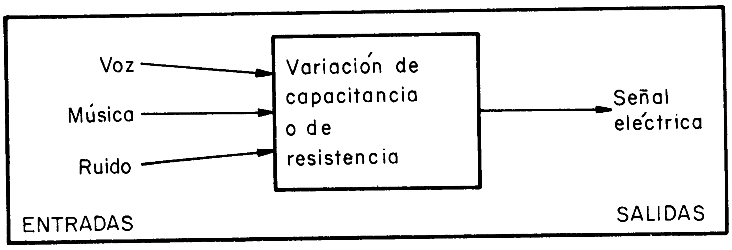
SISTEMA

Figura I.2

Ejemplo I.2

Micrófono eléctrico

Para este caso, se consideran como entradas al sistema voz, música, ruido, etc., y como salida una señal eléctrica; la relación entre ambos se da a través del mecanismo interno del micrófono, el cual puede ser de capacitancia variable o de gránulos de carbón. En forma esquemática, esto es:



SISTEMA

Figura I.3

I.2 Concepto de Modelo

La presente sección tiene como finalidad establecer, de una manera clara, el concepto de modelo tal y como se emplea o interpreta en el estudio de los sistemas dinámicos. Con esto no se pretende de manera alguna establecer una definición que tenga carácter universal, puesto que no sería funcional, debido a que este concepto tiene una base filosófica compleja. Sin embargo, a continuación se citan algunas concepciones que dan una idea clara y aproximada de su interpretación.

De acuerdo con Polak y Wong:

> Un modelo es una abstracción de un conjunto particular de las propiedades de un sistema físico, o bien es el conocimiento de aquellas propiedades que son suficientes para predecir el comportamiento del sistema bajo ciertas condiciones de operación.

Por otra parte, M.F. Rubinstein establece:

> Modelo es una descripción abstracta del mundo real; es una representación simple de formas, procesos y funciones más complejas de fenómenos físicos o ideas que se construye para facilitar la comprensión de estos últimos y para hacer predicciones del mismo.

Según J. N. Shuman:

> Los modelos son representaciones de procesos, que describen en forma simplificada algunos aspectos del mundo real.

G. Gordon dice:

> Un modelo es el volumen de información que se ha colectado acerca de un sistema con el propósito de estudiarlo.

La definición de R. D. Smallwood es un poco más clara que las anteriores y dice:

> Para el ingeniero, modelo es un mecanismo mediante el cual se pueden aplicar técnicas analíticas en la solución de un problema práctico.

Como puede verse, establecer en forma precisa el significado del término modelo no es una tarea fácil, ya que éste se interpreta de muy diversas formas. No obstante, de las interpretaciones citadas anteriormente se puede inferir que un modelo es una representación de las principales características y de las propiedades de un sistema físico que se emplea para describir y, en algunos casos, predecir su comportamiento, todo ello con la finalidad de estudiarlo.

Por otra parte, el tipo de representación que es de interés en el estudio de los sistemas dinámicos, es la representación matemática (modelo matemático) del sistema o fenómeno físico. Por lo tanto, de aquí en adelante se hará referencia únicamente a modelos matemáticos o representaciones desde el punto de vista matemático. Cabe mencionar que en la práctica, ni el modelo, ni su representación matemática son únicos, y la selección final usualmente se hace con base en la conveniencia. Es decir, la selección del modelo o representación matemática a emplearse dependerá del tipo de sistema que se pretenda estudiar, además, del tipo de análisis que se desee practicar sobre éste.

Como se verá más adelante, los modelos empleados aquí serán aquéllos que resulten más simples, útiles y operativos a fin de facilitar su estudio, sin olvidar por supuesto que deben ser un reflejo, lo más fiel posible del comportamiento físico del sistema.

I.3 Clasificación de Sistemas

Para clasificar los sistemas en forma general, primero se debe seleccionar un criterio que permita distinguir de una manera precisa las propiedades y/o las características que debe poseer el sistema, a fin de poderlo ubicar dentro de la clasificación. En este caso, el criterio que se propone es tomar en cuenta las características que poseen los modelos matemáticos empleados para describir el comportamiento del sistema.

Una clasificación que resulta útil se obtiene al establecer niveles de distinta jerarquía, en los cuales se vayan incluyendo más restricciones, con el objeto de señalar el tipo de sistemas que son de interés en dinámica de sistemas físicos.

Considérese que existe un universo de sistemas en el que se incluyen todos los tipos de sistemas posibles, es decir, los que están representados por modelos matemáticos que no tienen restricción alguna.

Una primera división se puede hacer con base en el *principio de causalidad*, el cual establece que todo efecto es siempre el resultado de una causa. En otras palabras, para que la salida producida por un sistema cambie de un estado a otro se requiere que la entrada aplicada a éste cambie con anterioridad.

Los sistemas representados mediante ecuaciones que se rigen bajo este principio son aquéllos que se conocen como *sistemas causales* o *sistemas no anticipativos*.

Por lo anterior se puede afirmar que *todo sistema físico es un sistema causal*. Sin embargo, en algunos casos es necesario hacer uso de modelos no causales en otras áreas de estudio

En dinámica de sistemas físicos se estudiarán solamente los sistemas causales.

La siguiente división se hace tomando en cuenta las características dinámicas de los modelos matemáticos, donde se pueden tener básicamente dos tipos:

a) Dinámicos

b) Estáticos

Los sistemas representados por modelos dinámicos, son aquellos en los que la salida en un tiempo t, depende de la entrada aplicada en ese mismo tiempo y tiempos anteriores. Estos sistemas se conocen como *sistemas dinámicos* o *sistemas con memoria*, y se representan por ecuaciones diferenciales o en diferencias, por ejemplo:

a) $$\frac{\delta^2 f}{\delta x\ \delta y} + 3t^2 \frac{\delta f}{\delta y} + \left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)^3 \frac{\delta f}{\delta y} = xy^3$$

b) $$\frac{d^3x}{dt^3} + 2x^5 \frac{d^2x}{dt^2} + 6 \left(\frac{dx}{dt}\right)^3 + x^3 = f(t)$$

c) $$\frac{d^2x}{dt^2} + \cos t \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + xe^{-t} = x^3 \frac{\cos t}{t}$$

Un sistema representado por un modelo estático es aquél en el que la salida producida en un tiempo determinado depende en forma única de la entrada aplicada en ese mismo tiempo.

Este tipo de sistemas se conoce como *sistemas algebraicos* o *sistemas sin memoria*, y se representan mediante ecuaciones algebraicas, por ejemplo:

a) $y = 3x^2 + 2$

b) $$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 20 & -1 \\ 16 & 2 & 11 \\ -3 & 5 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

c) $y = 3x$

Los sistemas de mayor importancia en el área de estudio de la dinámica de sistemas físicos serán los dinámicos; por lo tanto, para realizar una división de ellos es necesario considerar las características de correspondencia entre las entradas y las salidas del sistema, de lo cual resultan básicamente dos tipos:

a) Determinísticos

b) No determinísticos

Los sistemas determinísticos son aquéllos en los que la salida producida por el sistema depende de una y sólo una entrada; es decir, para dos entradas diferentes el sistema producirá dos salidas distintas. Este tipo de sistemas se representa por medio de ecuaciones diferenciales, por ejemplo:

a)

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\,\underline{x}(t) + \underline{B}\,\underline{u}(t) + F\,\tilde{\underline{v}}(t)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C}\,\underline{x}(t)$$

donde:

$\tilde{\underline{v}}(t)$ es una variable perfectamente definida en un intervalo de tiempo.

b) $$\frac{d^2x}{dt^2} + \text{sen}\,\omega t\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 8x = u_{-1}(t)$$

c) $$\ddot{x} + (u - x)\dot{x} + kx = 0$$

Los sistemas no determinísticos, también conocidos como sistemas estocásticos o sistemas aleatorios, son aquéllos en los que la salida producida depende de una o más entradas, esto es, al aplicar a este tipo de sistemas dos o más entradas distintas, la salida será la misma. Los sistemas no determinísticos también se representan mediante ecuaciones diferenciales; sin embargo, estas ecuaciones incluyen funciones aleatorias y/o probabilísticas, por ejemplo:

Figura I.4

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\xi\omega_n\frac{dx}{dt} + \omega_n^2\,x = (u(t))^2$$

$$y(t) = K\,x(t)$$

b)

$$\underline{\dot{x}}(t) = \underline{A}\underline{x}(t) + \underline{B}\,\underline{u}(t) + \underline{F}\,\underline{\tilde{v}}(t)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C}\,\underline{x}(t)$$

donde:

$\underline{\tilde{v}}(t)$ es ruido (variable aleatoria)

c)

$$y(t) = e^{-t^2} + K \cos |t|$$

Debido a que los sistemas no determinísticos son objeto de áreas de estudio avanzado, sólo se estudiarán los sistemas determinísticos. De esta manera, la división que se puede hacer de los últimos es con base en las características especiales de los modelos matemáticos empleados para describir el comportamiento del sistema, en este caso se tienen los sistemas de:

a) **Parámetros concentrados**

b) **Parámetros distribuidos**

Los sistemas de parámetros concentrados son aquéllos en los que el número de variables que intervienen en el modelo matemático es finito, y se representan mediante ecuaciones diferenciales ordinarias o ecuaciones en diferencias, por ejemplo:

a)

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A}(k)\underline{x}(k) + \underline{B}(k)\underline{u}(k)$$

$$\underline{y}(k) = \underline{C}(k)\underline{x}(k)$$

b)

$$\frac{d^3x}{dt^3} + x^2 \cos \omega t \, \frac{d^2x}{dt^2} + K\left(\frac{dx}{dt}\right)^3 + 16x = g(t) + 12\dot{g}(t)$$

c)

$$\underline{\dot{x}}(t) = \underline{A}\underline{x}(t) + \underline{B}\,\underline{u}(t)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C}\underline{x}(t) + \underline{D}\,\underline{u}(t)$$

Por otra parte, en los sistemas de parámetros distribuidos intervienen un número infinito de variables en los modelos matemáticos empleados para describir su comportamiento. Este tipo de sistemas se representa mediante ecuaciones diferenciales parciales,* por ejemplo:

Ecuaciones de Maxwell

a) en forma integral:

$$\oint D \cdot dA = \int \rho \, dv$$
$$\oint B \cdot dA = 0$$
$$\oint H \cdot d\ell = J + \int \frac{\delta D}{\delta t} \cdot dA$$
$$\oint E \cdot d\ell = - \int \frac{\delta B}{\delta t} \cdot dA$$

b) en forma diferencial:

$$\nabla \cdot D = \rho$$
$$\nabla \cdot B = 0$$
$$\nabla \times H = J + \frac{\delta D}{\delta t}$$
$$\nabla \times E = - \frac{\delta B}{\delta t}$$

$$\frac{\delta \theta}{\delta t} + v \frac{\delta \theta}{\delta z} = 0$$

Los sistemas que son de mayor interés en dinámica de sistemas físicos son los de parámetros concentrados; por ello la división que se puede hacer de éstos es con base en el principio dê superposición, el cual establece que la salida producida por un sistema que ha sido excitado por varias entradas simultáneamente es igual a la suma de las salidas que produce el sistema cuando se aplican las entradas en forma individual, por lo anterior se tienen los siguientes tipos de sistemas:

a) Lineales

b) No lineales

* **Cabe hacer la aclaración que el término ecuación diferencial parcial no es del todo correcto semánticamente, sino que es más que nada un convencionalismo que proviene de la traducción literal del término anglo-sajón partial differential equation; el término correcto según la escuela francesa de matemáticas es: ecuación en derivadas parciales.**

Los sistemas lineales son los que se representan mediante modelos matemáticos que se rigen bajo este principio y, en este caso, su comportamiento se describe empleando ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, por ejemplo:

a)

$$y^{iv}(t) + \text{sen}\, t\, y^{iii}(t) + K_1 y^{ii}(t) + K_2 y^{i}(t) + y(t) = g(t)$$

b)

$$\frac{d^4 Z}{dt^4} + 16 \frac{d^3 Z}{dt^3} + \frac{d^2 Z}{dt^2} + 12 \frac{dZ}{dt} + Z = g(t) + f(t)$$

c)

$$\frac{d^4 \alpha}{dt^4} + K \cos \omega t \frac{d\alpha}{dt} + a\alpha = r(t)$$

Los sistemas no lineales son todos aquéllos en los que sus modelos matemáticos no cumplen de manera satisfactoria con el principio de superposición. Este tipo de sistemas se representa por medio de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, por ejemplo:

a)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \varepsilon \frac{d\theta}{dt} + k \,\text{sen}\, \theta = 0$$

Ecuación del péndulo con amortiguamiento

b)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + K \,\text{sen}\, \theta = 0$$

Ecuación del péndulo simple

c)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} (x^2 - 1) + x = 0$$

Ecuación de Van der Pol (oscilaciones forzadas)

Los sistemas lineales se pueden dividir considerando las características que poseen las variables que intervienen en los modelos matemáticos empleados para describir su comportamiento, de esta manera se tienen los siguientes tipos de sistemas:

a) Continuos

b) Discretos

En los sistemas continuos las variables que intervienen en sus modelos matemáticos son funciones del tiempo continuo, es decir, la variable tiempo puede tomar todos los valores del conjunto de los números reales, y se representan mediante ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, por ejemplo:

a)
$$\frac{dy}{dt} + 3y = K\, g(t)$$

b)
$$f_1(t)\, \frac{d^2y}{dt^2} + f_2(t)\, \frac{dy}{dt} + Ky = g(t)$$

c)
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{J}\, \theta = \cos \omega t$$

En los sistemas discretos las variables que intervienen en sus modelos matemáticos son funciones del tiempo discreto, es decir, la variable tiempo puede tomar todos los valores del conjunto de los números naturales, y se representan mediante ecuaciones en diferencias lineales, por ejemplo:

a)
$$\Delta^2 y(k) + 3\Delta y(k) + 6y(k) = u_{-1}(k)$$

b)
$$y(k-3) + \mathrm{sen}\, k\theta\, y(k-2) + 16y(k-1) + ky(k) = K\, g(k)$$

c)
$$y(k) = K_p \left[e(k) + TK_d(e(k) - e(k-1)) + \frac{K_i}{MT} \sum_{-\infty}^{k} e(k) \right]$$

Los sistemas continuos son objeto de estudio en dinámica de sistemas físicos, y se puede hacer una distinción entre ellos tomando en cuenta las características de tiempo de los parámetros que intervienen en los modelos matemáticos empleados para representar el comportamiento del sistema; los tipos de sistemas son:

a) Invariantes con el tiempo

b) Variantes con el tiempo

En los sistemas invariantes con el tiempo los parámetros que intervienen en sus modelos matemáticos presentan características estáticas o fijas; es decir, no dependen del tiempo, y se representan por medio de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes constantes, por ejemplo:

a)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\xi\omega_n \frac{dx}{dt} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 f(t)$$

b)

$$\frac{dx}{dt} + K x = K f(t)$$

c)

$$\frac{d^3x}{dt^3} + a \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + c x = d f(t)$$

En los sistemas variantes con el tiempo los parámetros que intervienen en sus modelos matemáticos presentan características dinámicas; es decir, son funciones del tiempo, y se representan mediante ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes variables, por ejemplo:

a)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \cos \omega t \frac{dx}{dt} + K x = f(t)$$

b)

$$\frac{dx}{dt} + t x = g(t)$$

c)

$$\underline{\dot{x}}(t) = \underline{A}(t)\, \underline{x}(t) + \underline{B}(t)\, \underline{u}(t)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C}(t)\, \underline{x}(t) + \underline{D}\, \underline{u}(t)$$

A manera de conclusión en la figura I.5 se presenta la clasificación general de sistemas en forma esquemática. Por otra parte, el tipo de sistemas que serán de interés en dinámica de sistemas físicos son aquéllos que tienen las siguientes características:

a) Causales
b) Dinámicos
c) Determinísticos
d) Parámetros concentrados
e) Lineales
f) Continuos
g) Invariantes con el tiempo

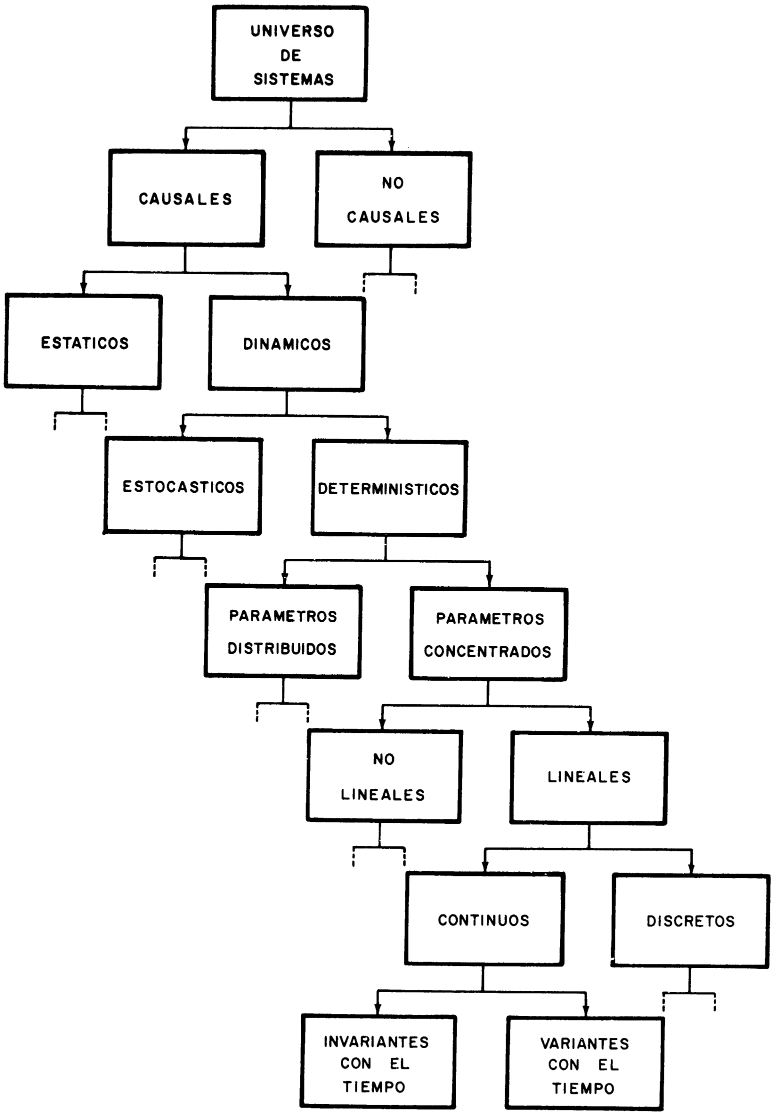


Figura I.5

I.4 LINEALIDAD

Una propiedad de interés de los sistemas dinámicos es la referente a la linealidad, ya sea de los elementos que forman el sistema o del mismo sistema. No todos los sistemas dinámicos poseen esta propiedad, sin embargo, hay que enfatizar que los sistemas dinámicos lineales son los de mayor importancia en este trabajo.

La propiedad de linealidad está íntimamente relacionada con el principio de superposición.

PRINCIPIO DE SUPERPOSICION

Considérese un sistema hidráulico formado por un tanque y dos válvulas como se muestra en la siguiente figura:

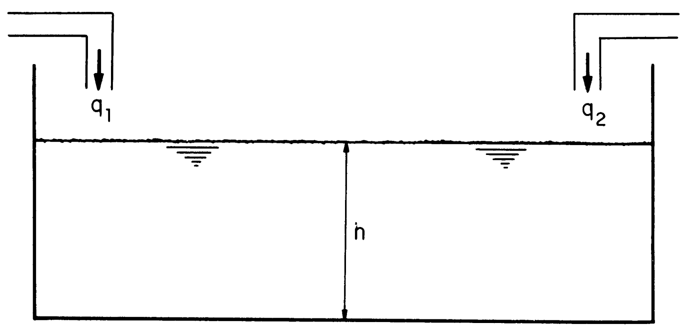


Figura I.6

Si se consideran como entradas aplicadas al sistema, los gastos de fluido q_1 y q_2 alimentados al tanque, entonces la salida producida por el sistema es la altura h de la columna de fluido acumulado en el tanque.

Por otra parte, si únicamente se aplica al sistema la entrada q_1, la salida producida por el sistema en este caso es h_1 como se muestra en la siguiente figura:

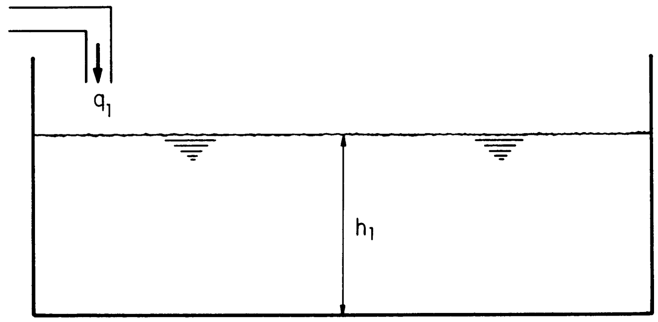


Figura I.7

de manera similar, si únicamente se aplica q_2 la salida en este caso será h_2 como se muestra a continuación:

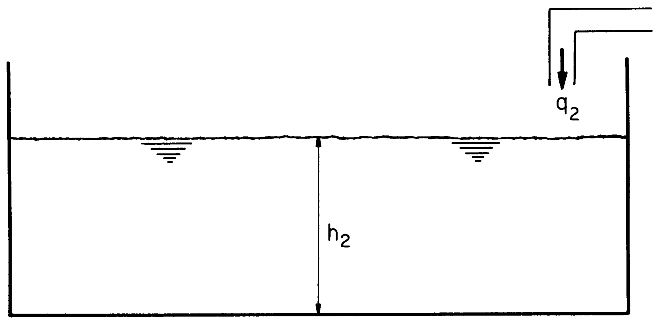


Figura I.8

al sumar las salidas h_1 y h_2, las cuales se obtuvieron en forma independiente, se tiene:

$$h = h_1 + h_2$$

El principio de superposición se puede enunciar de la siguiente forma:

> La salida producida por un sistema que ha sido excitado o alimentado por varias entradas en forma simultánea es equivalente a la suma de las salidas producidas por el sistema cuando las entradas se aplican en forma individual.

Los sistemas cuyo comportamiento está regido bajo este principio son los lineales. Para verificar si el modelo matemático de un sistema es o no lineal, éste debe satisfacer las siguientes dos condiciones:

HOMOGENEIDAD

Sea $f(x)$ una función real que se emplea para representar el sistema; la función es homogénea si y sólo si:

$$f(K\,x) = K\,f(x)$$

ADITIVIDAD

Considérese la función $f(x)$ y además las entradas x_1 y x_2; esta función es aditiva si y sólo si:

$$f(x)\Big|_{x = x_1} = f(x_1)$$

$$f(x)\Big|_{x = x_2} = f(x_2)$$

entonces:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

Las dos propiedades anteriores se pueden conjuntar en una sola, es decir, si se desea verificar o investigar si el modelo matemático de un sistema es o no lineal, se debe satisfacer completamente la siguiente ecuación:

$$\boxed{f(ax_1 + bx_2) = af(x_1) + bf(x_2)}$$

donde a y b son constantes arbitrarias.

Ejemplo I.3

Considérese un sistema como el mostrado en la figura:

Figura I.9

La relación entrada - salida del sistema está dada por:

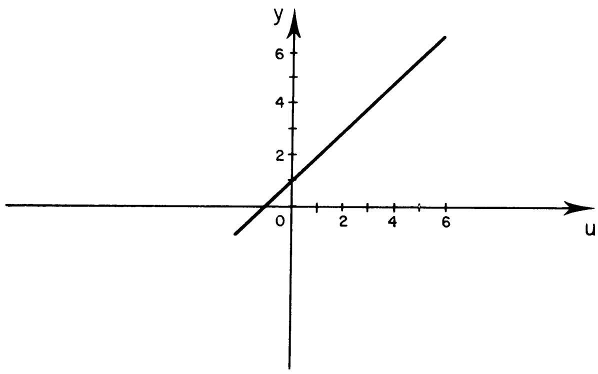


Figura I.10

Determinar si el sistema es lineal.

Solución:

De la relación entrada - salida del sistema se obtiene:

$$y = u + 1 \qquad \ldots (1)$$

para que el sistema descrito por medio de la ecuación (1) sea lineal, ésta debe satisfacer las condiciones de homogeneidad y aditividad, esto es:

$$f(ax_1 + bx_2) = af(x_1) + bf(x_2) \qquad \ldots (2)$$

supóngase que al sistema se aplica una entrada:

$$u = a\,u_1 \qquad \ldots (3)$$

la salida producida es en este caso:

$$y_1 = a\,u_1 + 1 \qquad \ldots (4)$$

al aplicar al sistema otra entrada:

$$u = b\,u_2 \qquad \ldots (5)$$

la salida será:

$$y_2 = b\,u_2 + 1 \qquad \ldots (6)$$

si al sistema se aplica una entrada:

$$u = a\,u_1 + b\,u_2 \qquad \ldots (7)$$

la salida es:

$$y = au_1 + bu_2 + 1 \qquad \ldots (8)$$

de las ecuaciones (4), (6) y (8) se tiene:

$$y \neq y_1 + y_2$$

por lo tanto, no se satisface la ecuación (2) y el sistema *no es lineal*.

Ejemplo I.4

Considérense los sistemas mostrados en las figuras:

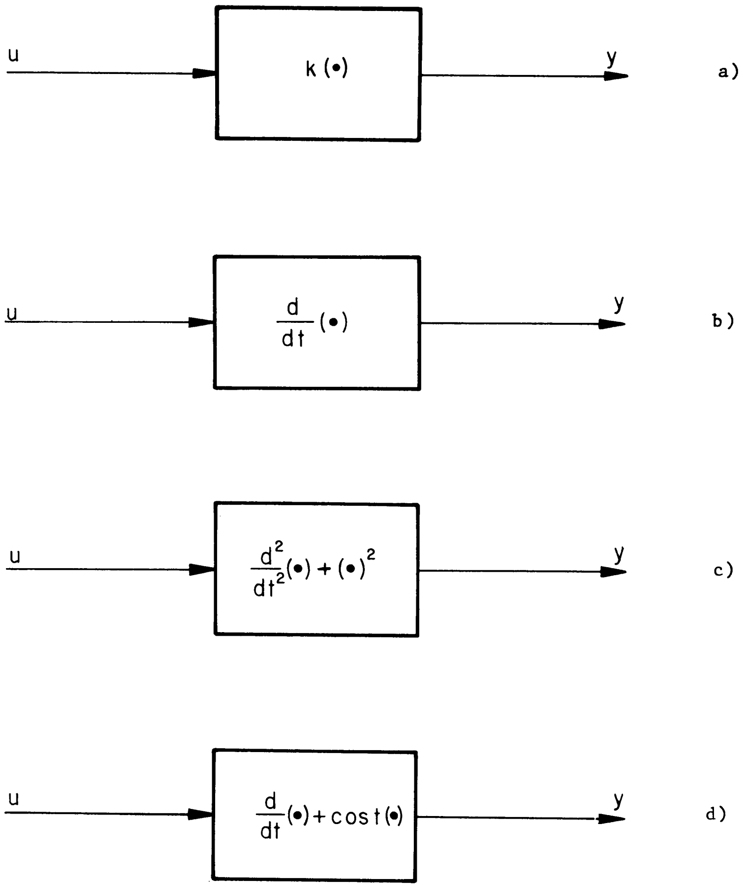


Figura I.11

Determinar en cada caso si la relación salida - entrada es lineal.

Solución:

1) De la figura (a) se tiene:

$$y = Ku \qquad \dots (1)$$

suponiendo las siguientes entradas:

$$u = a\,u_1 \qquad \dots (2)$$

$$u = b\,u_2 \qquad \dots (3)$$

$$u = a\,u_1 + b\,u_2 \qquad \dots (4)$$

las salidas producidas por el sistema son:

$$y_1 = K\,a\,u_1 \qquad \dots (5)$$

$$y_2 = K\,b\,u_2 \qquad \dots (6)$$

$$y = K\,a\,u_1 + K\,b\,u_2 \qquad \dots (7)$$

por lo tanto, para que el sistema sea lineal se requiere que:

$$y = y_1 + y_2$$

De esta manera, a partir de las ecuaciones (5), (6) y (7) se obtiene:

$$K\,a\,u_1 + K\,b\,u_2 = K\,a\,u_1 + K\,b\,u_2$$

así:

$$y = y_1 + y_2$$

por lo tanto el sistema *es lineal.*

2) En este caso, se tiene que la relación entrada-salida del sistema es:

$$y = \frac{du}{dt}$$

si al sistema se aplican entradas:

$$u = a\,u_1$$

$$u = b\,u_2$$

$$u = a\,u_1 + b\,u_2$$

las correspondientes salidas son:

$$y_1 = a\frac{du_1}{dt} = a\,f(x_1)$$

$$y_2 = b\frac{du_2}{dt} = b\,f(x_2)$$

$$y = a\frac{du_1}{dt} + b\frac{du_2}{dt} = a\,f(x_1) + b\,f(x_2)$$

de las expresiones anteriores se obtiene:

$$a\frac{du_1}{dt} + b\frac{du_2}{dt} = a\frac{du_1}{dt} + b\frac{du_2}{dt}$$

o bien:

$$y = y_1 + y_2$$

por lo tanto el sistema *es lineal.*

Para este sistema, se sabe que el operador derivativo $\left(\frac{d}{dt}\right)$ es un operador lineal, y debido a que la relación entre la entrada y la salida de sistema es a través de este operador lineal, el sistema será lineal.

3) De la figura (c) se obtiene:

$$y = \frac{d^2u}{dt^2} + u^2$$

suponiendo las siguientes entradas:

$$u = a\,u_1$$

$$u = b\,u_2$$

$$u = a\,u_1 + b\,u_2$$

las correspondientes salidas son:

$$y_1 = a\frac{d^2u_1}{dt^2} + a^2\,u_1^2$$

$$y_2 = b\frac{d^2u_2}{dt^2} + b^2\,u_2^2$$

$$y = a\frac{d^2u_1}{dt^2} + b\frac{d^2u_2}{dt^2} + a^2\,u_1^2 + 2ab\,u_1\,u_2 + b^2\,u_2^2$$

de donde se tiene:

$$a\frac{d^2u_1}{dt^2} + a^2u_1^2 + b\frac{d^2u_2}{dt^2} + b^2u_2^2 \neq a\frac{d^2u_1}{dt^2} + b\frac{d^2u_2}{dt^2} + a^2u_1^2 + 2ab\,u_1u_2 + b^2u_2$$

por lo tanto el sistema *no es lineal.*

4) A partir de la figura (d) se obtiene que la relación entrada - salida del sistema está dada por:

$$y = \frac{du}{dt} + u\cos t$$

aplicando las entradas:

$$u = a\,u_1$$

$$u = b\,u_2$$

$$u = a\,u_1 + b\,u_2$$

se obtienen las salidas:

$$y_1 = a\frac{du_1}{dt} + a\,u_1\cos t$$

$$y_2 = b\frac{du_2}{dt} + b\,u_2\cos t$$

$$y = a\frac{du_1}{dt} + b\frac{du_2}{dt} + a\,u_1\operatorname{cost} t + b\,u_2\cos t$$

se obtiene:

$$a\frac{du_1}{dt} + a\,u_1\cos t + b\frac{du_2}{dt} + b\,u_2\cos t = a\frac{du_1}{dt} + b\frac{du_2}{dt} +$$

$$+ a\,u_1\cos t + b\,u_2\cos t$$

o bien:

$$y = y_1 + y_2$$

por lo tanto el sistema *es lineal*

I:5 INVARIANCIA CON EL TIEMPO

Otra propiedad importante de los sistemas dinámicos es la referente a la invariante con el tiempo del sistema; es decir, los modelos empleados para representar a los sistemas dinámicos son funciones del tiempo, por lo tanto, la respuesta producida por éstos será también función del tiempo, de aquí la importancia en un momento dado de analizar sus características temporales.

Considérese un sistema dinámico como el mostrado en la siguiente figura:

Figura I.12

Al aplicar la entrada o excitación externa u(t) el sistema producirá una salida y(t) como se muestra a continuación:

Figura I.13

El sistema posee la propiedad de invariancia con el tiempo o simplemente es invariante con el tiempo si y sólo si al aplicar la entrada desfasada en el tiempo $u(t - t_0)$ la salida producida por el sistema es $y(t - t_0)$; es decir, debido a que no han cambiado las características de la entrada sino únicamente fue desfasada en el tiempo, las características de la salida no se alteran, únicamente estarán desfasadas en el tiempo exactamente la misma cantidad de tiempo que la entrada, esto es:

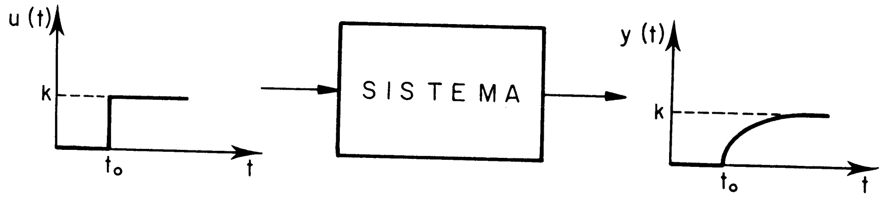


Figura I.14

De esta manera se tiene que los sistemas que poseen la propiedad de invariancia con el tiempo pueden estar sujetos a la repetición de experimentos, es decir, los experimentos que se realicen con entradas iguales producirán salidas o resultados iguales independientemente del tiempo en el que éstos se realizaron.

I.6 Funciones Generalizadas

Las funciones generalizadas también conocidas como funciones singulares ocupan un lugar importante dentro del estudio de los sistemas dinámicos, esto se debe principalmente al uso frecuente que se les da en el análisis de este tipo de sistemas, además, de la simplicidad matemática con que estas funciones se describen.

Las funciones generalizadas que serán tratadas aquí por ser las de mayor interés, son:

La función escalón

La función rampa

La función impulso

I.6.1 FUNCION ESCALON

La función escalón unitario $u_{-1}(t)$, se define analíticamente como:

$$\boxed{u_{-1}(t) = \begin{cases} 0 \ , & t < 0 \\ 1 \ , & t \geq 0 \end{cases}}$$

su representación gráfica es:

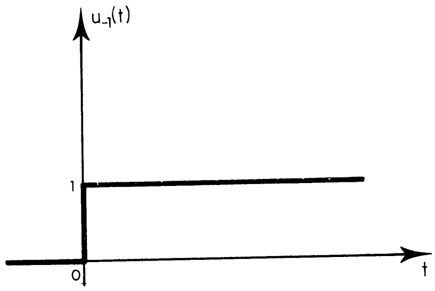


Figura I.15

La función escalón unitario puede ser sujeta a las siguientes operaciones:

- Multiplicación por una constante arbitraria
- Desfasamiento en el tiempo
- Adición y multiplicación con otras funciones del tiempo

También se le pueden aplicar las siguientes operaciones:

- Derivación
- Integración
- Transformación (Laplace)

MULTIPLICACION POR UNA CONSTANTE

La función escalón unitario se puede multiplicar por una constante arbitraria (K), esta constante pertenece al conjunto de los números reales.

Considérese una función del tiempo f(t) definida como:

$$f(t) = Ku_{-1}(t)$$

si K es positiva, entonces:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ K & , \quad t \geq 0 \end{cases}$$

gráficamente esto es:

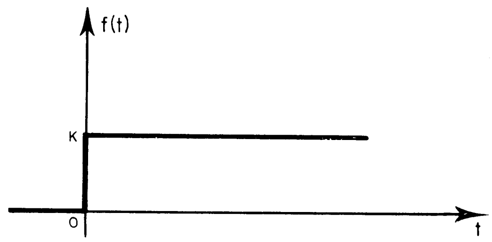


Figura I.16

si K es negativa, se tiene:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ -K & , \quad t \geq 0 \end{cases}$$

y en forma gráfica:

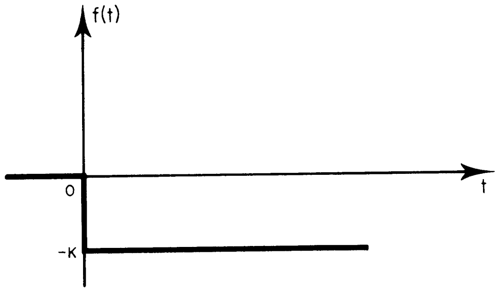


Figura I.17

DESFASAMIENTO EN EL TIEMPO

La función escalón unitario se puede desfasar en el tiempo. El desfasamiento puede ser tanto en sentido positivo como en sentido negativo, considerando como punto de referencia el origen del plano coordenado.

Considérese una función definida como:

$$f(t) = u_{-1}(t - t_0)$$

si el desfasamiento es en sentido positivo, se tiene que t_0 es mayor que cero y se dice que la función está atrasada y se representa analíticamente de la forma:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < t_0 \\ 1 & , \quad t \geq t_0 \end{cases}$$

gráficamente esto es:

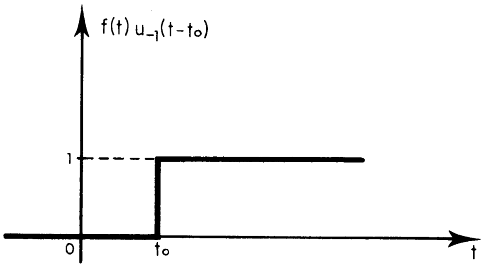


Figura I.18

si el desfasamiento es en sentido negativo, se tiene que t_0 es menor que cero y se dice que la función está adelantada y en forma analítica se representa como:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < -t_0 \\ 1 & , \quad t_0 \geq -t_0 \end{cases}$$

y en forma gráfica:

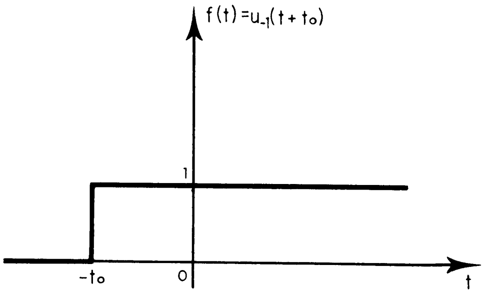


Figura I.19

DERIVACION

La función escalón unitario como toda función del tiempo es derivable.

Sea f(t) una función del tiempo definida como:

$$f(t) = \frac{d}{dt}\left[u_{-1}(t)\right]$$

el segundo miembro de la ecuación anterior es la función $u_0(t)$, esto es:

$$\frac{d}{dt}\left[u_{-1}(t)\right] = u_0(t)$$

donde $u_0(t)$ es la función impulso, la cual se puede representar simbólicamente como $\delta(t)$ y en forma gráfica:

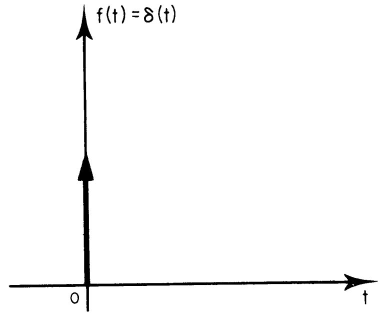


Figura I.20

INTEGRACION

Considérese una función $f(t)$ definida como la integral de la función escalón unitario en el intervalo de tiempo $[0, t]$, esto es:

$$f(t) = \int_0^t u_{-1}(t')dt'$$

el segundo miembro de la ecuación anterior es la función $u_{-2}(t)$, es decir:

$$\int_0^t u_{-1}(t')dt' = u_{-2}(t)$$

$u_{-2}(t)$ es la función rampa unitaria, la cual se representa en forma gráfica como:

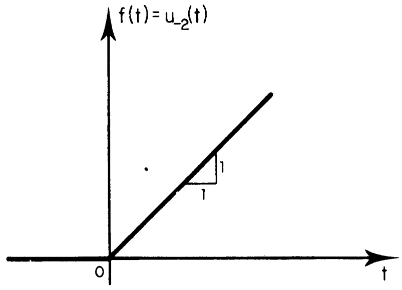


Figura I.21

TRANSFORMACION (LAPLACE)

La transformada de Laplace también puede ser aplicada a la función escalón.

Sean las funciones:

$$f_1(t) = u_{-1}(t)$$
$$f_2(t) = Ku_{-1}(t)$$
$$f_3(t) = u_{-1}(t \pm t_0)$$

al aplicar la transformada de Laplace a las funciones anteriores, se obtiene:

$$L\left\{u_{-1}(t)\right\} = \frac{1}{S}$$
$$L\left\{Ku_{-1}(t)\right\} = \frac{K}{S}$$
$$L\left\{u_{-1}(t \pm t_0)\right\} = \frac{1}{S}\, e^{\pm St_0}$$

ADICION Y MULTIPLICACION CON OTRAS FUNCIONES DEL TIEMPO

a) Suma algebraica de funciones escalón.

Para formar funciones del tiempo de mayor complejidad se puede realizar la suma algebraica de funciones escalón.

Considérese una función del tiempo f(t) definida de la siguiente manera:

$$f(t) = u_{-1}(t) + u_{-1}(t-1) + u_{-1}(t-2) + u_{-1}(t-3) - 4u_{-1}(t-4)$$

para graficar la función $f(t)$, se pueden seguir dos procedimientos.

ANALITICO

Este consiste en hacer una tabla en la que estén contenidos los valores que adquieren cada una de las funciones que forman a $f(t)$ de la siguiente manera:

t	$u_{-1}(t)$	$u_{-1}(t-1)$	$u_{-1}(t-2)$	$u_{-1}(t-3)$	$-4u_{-1}(t-4)$	$f(t)$
0	1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0	2
2	1	1	1	0	0	3
3	1	1	1	1	0	4
4	1	1	1	1	-4	0
5	1	1	1	1	-4	0
6	1	1	1	1	-4	0
7	1	1	1	1	-4	0
8	1	1	1	1	-4	0
9	1	1	1	1	-4	0
10	1	1	1	1	-4	0

Tabla I.1

Posteriormente, tomar los valores de la columna donde se tiene la variable tiempo y los de la columna que contiene los valores de $f(t)$ y graficarlos, esto es:

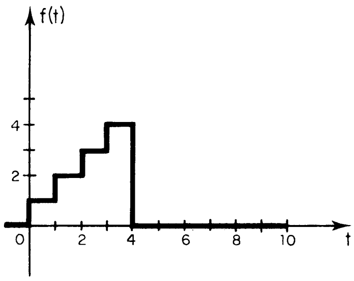


Figura I.22

GRAFICO

Este procedimiento consiste en graficar todas las funciones que forman a f(t) en planos coordenados alineados y posteriormente se realiza la suma algebraica de las funciones, esto es:

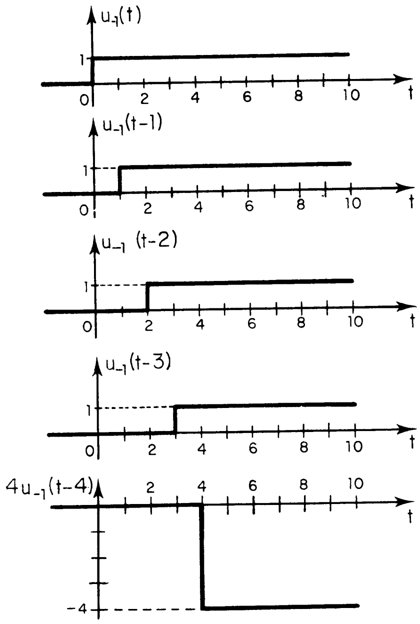


Figura I.23

Al realizar la suma se obtiene:

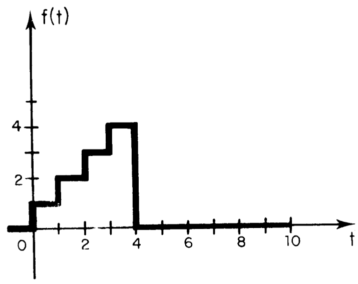


Figura I.24

b) Multiplicación de funciones del tiempo por funciones escalón.

Para definir una función del tiempo arbitraria $f(t)$ en un intervalo de tiempo determinado, esta última se puede multiplicar por una función escalón.

Considérese una función definida de la siguiente manera:

$$f(t) = \left[\text{sen } 2t \right] u_{-1}(t)$$

en este caso la función $\text{sen } 2t$ está definida en el intervalo $(-\infty, +\infty)$, en forma gráfica:

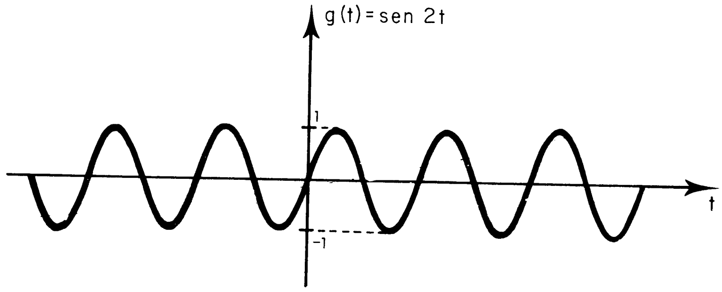


Figura I.25

Al multiplicar $\text{sen } 2t$ por la función escalón, el resultado es la misma función definida en el intervalo $[0, +\infty)$, esto es:

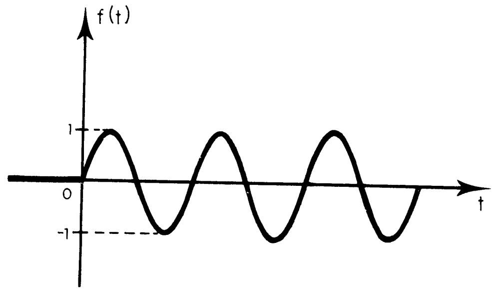


Figura I.26

de esta manera, se tiene que $f(t)$ se puede escribir como:

$$f(t) = [\text{sen } 2t]\, u_{-1}(t)$$

o bien:

$$f(t) = \text{sen } 2t \quad \text{para} \quad t \geq 0$$

I.6.2 FUNCION RAMPA

La función rampa unitaria $u_{-2}(t)$ se define desde el punto de vista analítico de la forma:

$$\boxed{u_{-2}(t) = \begin{cases} 0 \quad , & t < 0 \\ t \quad , & t \geq 0 \end{cases}}$$

su representación gráfica es:

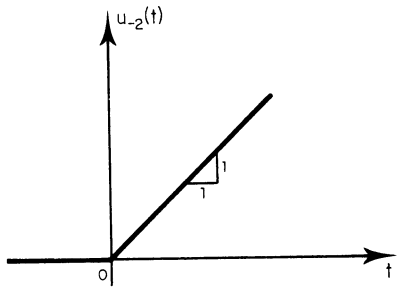


Figura I.27

La función rampa puede ser sujeta a las siguientes operaciones:

- Multiplicación por una constante arbitraria
- Desfasamiento en el tiempo
- Suma algebraica de funciones rampa *

* En este caso no se considera la multiplicación con otras funciones del tiempo, debido a que no tiene aplicación práctica.

también se le pueden aplicar los siguientes operadores:

- Derivación
- Integración
- Transformación (Laplace)

MULTIPLICACION POR UNA CONSTANTE ARBITRARIA

Sea f(t) una función del tiempo definida mediante:

$$f(t) = Ku_{-2}(t)$$

donde:

K: es una constante que pertenece al conjunto de los números reales

si K es positiva, se tiene:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ Kt & , \quad t \geq 0 \end{cases}$$

y en forma gráfica:

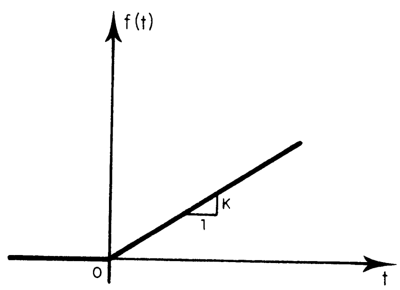


Figura I.28

si K es negativa, entonces:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ -Kt & , \quad t \geq 0 \end{cases}$$

gráficamente se representa como:

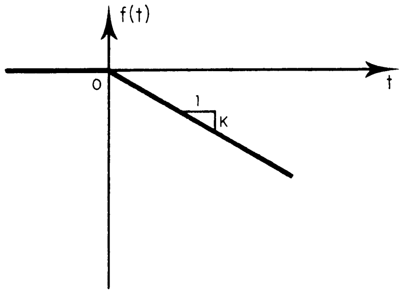


Figura I.29

DESFASAMIENTO EN EL TIEMPO

La función rampa puede ser también desfasada en el tiempo, esto es, se puede localizar ya sea a la izquierda o a la derecha del origen del plano coordenado.

Sea la función:

$$f(t) = u_{-2}(t - t_0)$$

en este caso t_0 representa el desfasamiento de la función en el tiempo. Si t_0 es mayor que cero el desfasamiento es en sentido positivo y se dice que la función está atrasada, por lo tanto:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < t_0 \\ t - t_0 & , \quad t \geq t_0 \end{cases}$$

en forma gráfica, se tiene:

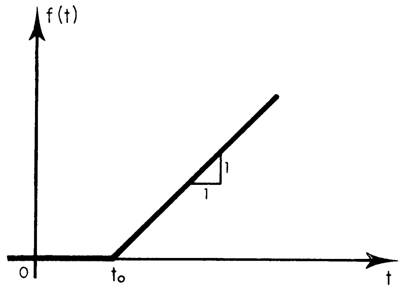


Figura I.30

Por otra parte si t_0 es menor que cero, el desfasamiento es en sentido negativo y la función está adelantada, esto es:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < -t_0 \\ t + t_0 & , \quad t \geq -t_0 \end{cases}$$

gráficamente se representa como:

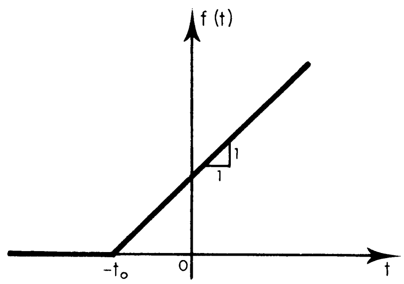


Figura I.31

DERIVACION

Considérese una función del tiempo f(t), la que se define de la siguiente manera:

$$f(t) \quad \frac{d}{dt}\left[u_{-2}(t) \right]$$

en este caso se tiene que el segundo miembro de la ecuación anterior es $u_{-1}(t)$, por lo tanto:

$$\frac{d}{dt}\left[u_{-2}(t)\right] = u_{-1}(t)$$

donde $u_{-1}(t)$ es la función escalón y se representa en forma gráfica de la siguiente manera:

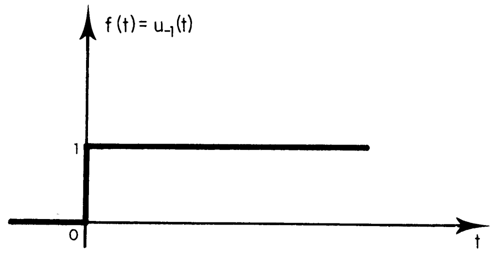


Figura I.32

INTEGRACION

La función rampa puede también ser integrada en el intervalo de tiempo $[0, t]$, de esta manera se puede definir f(t) como:

$$f(t) = \int_0^t u_{-2}(t')dt'$$

de la ecuación anterior se tiene que el segundo miembro es la función $u_{-3}(t)$, por lo tanto:

$$\int_0^t u_{-2}(t')dt' = u_{-3}(t)$$

donde $u_{-3}(t)$ es la función parábola y se representa analíticamente como:

$$u_{-3}(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ \frac{1}{2}t^2 & , \quad t \geq 0 \end{cases}$$

y gráficamente se representa de la forma:

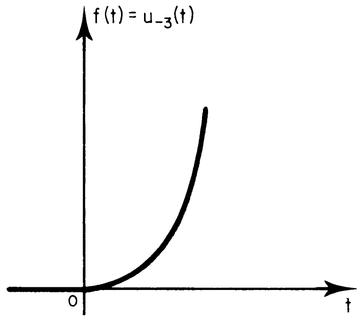


Figura I.33

TRANSFORMACION (LAPLACE)

La transformada de Laplace también puede ser aplicada a la función rampa.

Sean las funciones:

$$f_1(t) = u_{-2}(t)$$

$$f_2(t) = Ku_{-2}(t)$$

$$f_3(t) = u_{-2}(t \pm t_0)$$

al aplicar la transformada de Laplace a estas funciones se obtiene:

$$L\left\{u_{-2}(t)\right\} = \frac{1}{S^2}$$

$$L\left\{Ku_{-2}(t)\right\} = \frac{K}{S^2}$$

$$L\left\{u_{-2}(t \pm t_0)\right\} = \frac{1}{S^2}\, e^{\pm St_0}$$

SUMA ALGEBRAICA DE FUNCIONES RAMPA

Sea f(t) una función del tiempo compuesta por funciones rampa, esto es:

$$f(t) = u_{-2}(t) - u_{-2}(t - 2) + 2u_{-2}(t - 3) - 3u_{-2}(t - 4) + u_{-2}(t - 6)$$

para graficar la función $f(t)$ se siguen los procedimientos analítico y gráfico descritos en la sección anterior.

ANALITICO

En este caso se procede a formar una tabla en la que se incluyen todas las funciones que están contenidas en $f(t)$ de la siguiente manera:

t	$u_{-2}(t)$	$-u_{-2}(t-2)$	$2u_{-2}(t-3)$	$-3u_{-2}(t-4)$	$u_{-2}(t-6)$	$f(t)$
0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	1
2	2	0	0	0	0	2
3	3	-1	0	0	0	2
4	4	-2	2	0	0	4
5	5	-3	4	-3	0	3
6	6	-4	6	-6	0	2
7	7	-5	8	-9	1	2
8	8	-6	10	-12	2	2
9	9	-7	12	-15	3	2
10	10	-8	14	-18	4	2

Tabla I.2

De los valores de la primera y última columna de la tabla anterior se puede trazar la gráfica, siendo ésta:

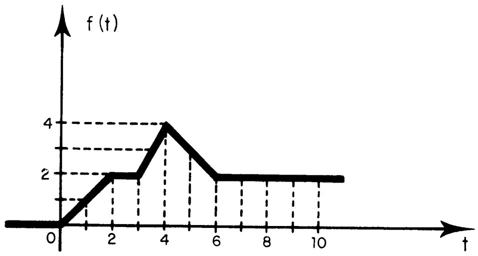


Figura I.34

GRAFICO

En este procedimiento es necesario graficar todas las funciones que forman a $f(t)$ y realizar posteriormente la suma algebraica, esto es:

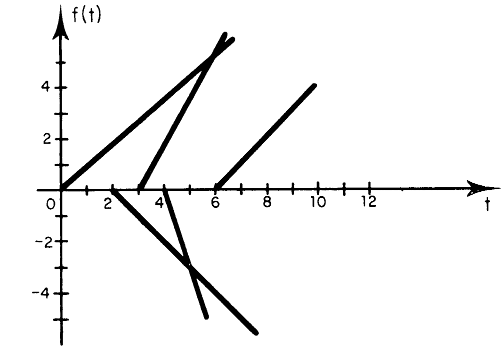


Figura I.35

realizando la suma algebraica se obtiene:

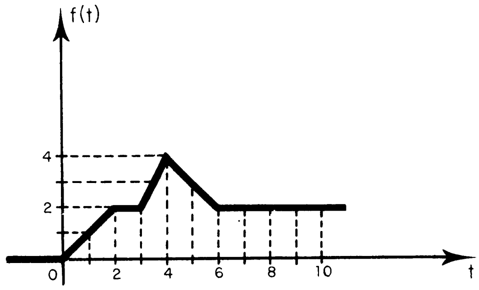


Figura I.36

I.6.3 FUNCION IMPULSO

La función impulso $\delta(t)$ es la de mayor importancia y uso frecuente en el estudio de los sistemas dinámicos, ya que a partir de ésta se deriva el concepto de función de transferencia, como se verá posteriormente.

La función impulso también se conoce como *la función delta de Dirac* y es una idealización matemática que se puede obtener a partir de otras funciones del tiempo, en especial de las funciones rampa y escalón.

Considérese la siguiente función:

$$f(t) = \frac{1}{a}\, u_{-2}(t) - \frac{1}{a}\, u_{-2}(t - a)$$

La representación gráfica de la función anterior se muestra a continuación:

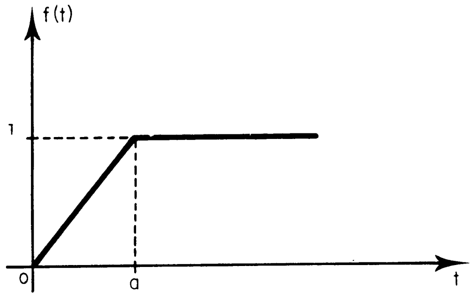


Figura I.37

derivando la función f(t) con respecto al tiempo, se obtiene:

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{1}{a}\, u_{-1}(t) - \frac{1}{a}\, u_{-1}(t - a)$$

y su representación gráfica es:

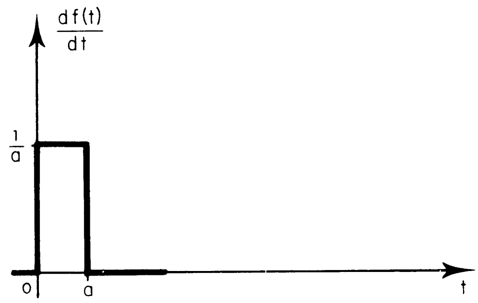


Figura I.38

De la figura I.37 se observa que a medida que el valor de **a** decrece, la función f(t) se aproxima a la función escalón, si **a** es igual a cero, f(t) es idéntica a la función escalón, por lo tanto se tiene:

$$u_{-1}(t) = \lim_{a \to 0} f(t)$$

Por otra parte, la función impulso se interpreta como un pulso de duración muy pequeña (infinitesimal) con la condición de que el área de este pulso sea unitaria. Esta condición la satisface la función que se muestra en la figura I.38, ya que el área de ésta es independiente del valor de **a**.

De esta manera, la función impulso $\delta(t)$ se puede obtener como:

$$\delta(t) = \lim_{a \to 0} \frac{df(t)}{dt}$$

de las dos últimas expresiones se tiene:

$$\delta(t) = \frac{du_{-1}(t)}{dt} \; *$$

y su representación gráfica es:

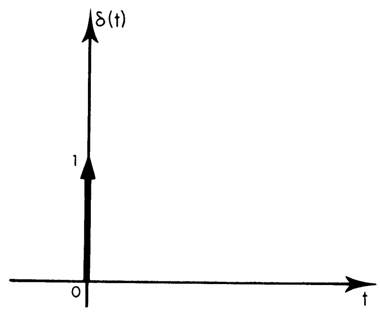


Figura I.39

*Véase la sección de función escalón.

En la siguiente tabla se listan algunas otras formas de aproximar a la función impulso $\delta(t)$:

$\delta(t) = \lim_{a \to 0} \left[\frac{1}{a} u_{-1}(t) - \frac{1}{a} u_{-1}(t-a) \right]$,	$a \geq 0$
$\delta(t) = \lim_{a \to 0} \left[\frac{1}{a} u_{-1}(t+a) - \frac{1}{a} u_{-1}(t) \right]$,	$a \geq 0$
$\delta(t) = \lim_{a \to \infty} a e^{-at} u_{-1}(t)$,	$a > 0$
$\delta(t) = \lim_{a \to \infty} a e^{at} u_{-1}(t)$,	$a > 0$
$\delta(t) = \lim_{a \to \infty} \frac{a}{2} e^{-a\|t\|}$,	$a > 0$
$\delta(t) = \lim_{a \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, a} e^{-\frac{t^2}{2a^2}}$,	$a > 0$
$\delta(t) = \lim_{a \to \infty} \frac{\text{sen } mat}{\pi t}$,	$a > 0$, $m > 0$
$\delta(t) = \lim_{a \to \infty} \frac{1}{2a} \left[\frac{\text{sen } 2\pi at}{\pi t} \right]^2$,	$a > 0$
$\delta(t) = \lim_{a \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} e^{jtu} du$,	$a > 0$

Tabla I.3

La función impulso, al igual que las funciones escalón y rampa, puede ser sujeta a las siguientes operaciones:

- Multiplicación por una constante arbitraria
- Desfasamiento en el tiempo

también se le pueden aplicar los siguientes operadores:

- Derivación
- Integración
- Transformación (Laplace)

MULTIPLICACION POR UNA CONSTANTE

Al multiplicar la función impulso por una constante arbitraria se modifica sólo el área del pulso empleado para representar a la función.

Considérese la siguiente función:

$$f(t) = K\delta(t)$$

su representación gráfica es:

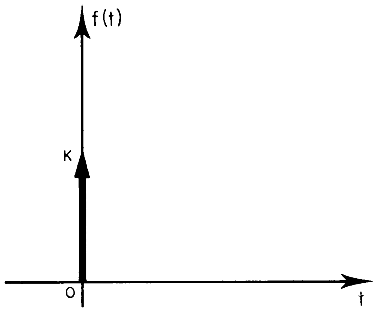


Figura I.40

en el caso de que la constante K sea negativa, la gráfica se invierte simplemente.

DESFASAMIENTO EN EL TIEMPO

La función impulso también se puede desfasar en el tiempo, el desfasamiento puede ser tanto en sentido positivo como negativo, considerando como referencia el origen del plano coordenado.

Considérese una función del tiempo f(t), definida como:

$$f(t) = \delta(t - t_0)$$

si el desfasamiento es su sentido positivo, se tiene que t_0 es mayor que cero y se dice que la función está atrasada y se representa de la siguiente manera:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t \neq t_0 \\ \delta(t) & , \quad t = t_0 \end{cases}$$

y gráficamente como:

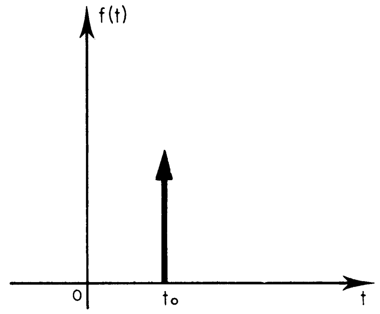


Figura I.41

si el desfasamiento es en sentido negativo, se tiene que t_0 es menor que cero y se dice que la función está adelantada y se representa en forma analítica como:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t \neq t_0 \\ \delta(t) & , \quad t = -t_0 \end{cases}$$

en forma gráfica, esto es:

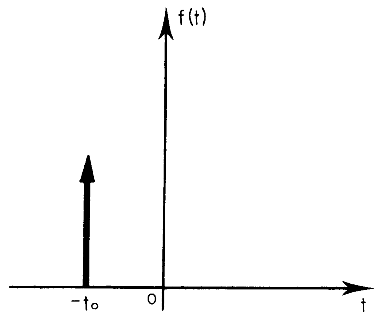


Figura I.42

DERIVACION

Al derivar una función impulso con respecto al tiempo, se obtiene otra función generalizada o singular que se denomina como *función doblete*, esto es:

$$\frac{d}{dt}\left[\delta(t)\right] = \hat{\delta}(t)$$

se representa gráficamente como:

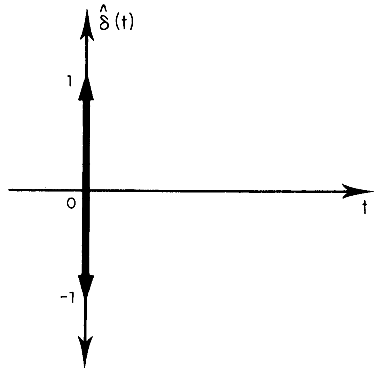


Figura I.43

INTEGRACION

La integración de una función impulso en un determinado intervalo de tiempo, equivale a obtener el área del pulso empleado para representar a la función.

Considérese la siguiente función del tiempo definida como:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t')dt'$$

en este caso el segundo miembro de la ecuación es:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t')dt' = 1$$

también puede expresarse como:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t')dt' = u_{-1}(t)$$

*Véase la sección de función escalón.

TRANSFORMACION (LAPLACE)

También en este caso se puede aplicar la transformada de Laplace a la función impulso,

Sean las funciones:

$$f_1(t) = \delta(t)$$

$$f_2(t) = K\delta(t)$$

$$f_3(t) = \delta(t \pm t_0)$$

al aplicar la transformada de Laplace se tiene:

$$L\left\{\delta(t)\right\} = 1$$

$$L\left\{K\delta(t)\right\} = K$$

$$L\left\{\delta(t \pm t_0)\right\} = e^{\pm St_0}$$

PROPIEDADES DE LA FUNCION IMPULSO

Las propiedades más importantes de la función impulso son:

1. $\delta(t - t_0) = 0$ para $t_1 < t_0 < t_2$

2. $\int_{t_1}^{t_2} \delta(t - t_0)dt = 1$ para $t_1 < t < t_2$

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0)$ si $f(t)$ es continua en t_0

4. $\delta(bt - t_0) = \frac{1}{|b|}\ \delta(t - \frac{t_0}{b})$

5. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$ si $f(t)$ es continua en $t = 0$

CAPITULO II MODELADO

II.1 ELEMENTOS BÁSICOS DE MODELADO

Antes de proceder a la formulación del modelo matemático para los sistemas eléctricos, mecánicos, térmicos e hidráulicos, es necesario conocer los elementos básicos que forman parte de éstos.

Por otra parte se presenta una descripción de cada uno de ellos empleando los conceptos de resistencia, capacitancia e inductancia, además se proporcionan las relaciones matemáticas y se definen las unidades mediante las cuales estos elementos pueden ser expresados en el Sistema Internacional de Unidades.

II.1.1 RESISTENCIA

Los elementos resistivos se caracterizan principalmente por su propiedad o capacidad para disipar energía, esto es, la energía suministrada al sistema se disipa o se transforma a través de ellos.

RESISTENCIA ELECTRICA

Es la oposición que presentan los conductores o elementos al paso de la corriente eléctrica, se puede representar por medio de los siguientes símbolos:

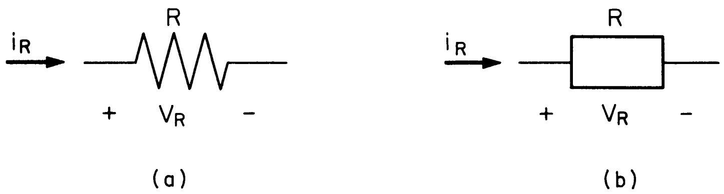


Figura II.1

Las variables asociadas con este elemento son voltaje y corriente. Su comportamiento está definido por la ley de Ohm; esto es:

$$\boxed{v_R = Ri_R}$$

donde:

v_R: es el voltaje a través de la resistencia. [V]

i_R: es la corriente que fluye a través de la resistencia. [A]

R: es el valor de la resistencia eléctrica. [Ω]

La resistencia eléctrica tiene una característica voltaje - corriente como la que se muestra en la siguiente figura:

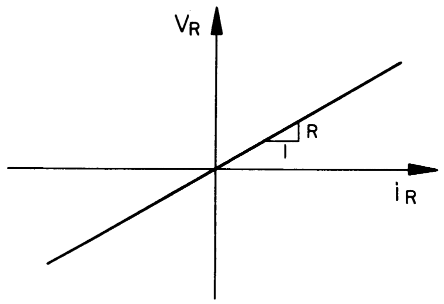


Figura II.2

RESISTENCIA MECANICA

Existen dos tipos:

a) Amortiguador traslacional o fricción viscosa.

b) Amortiguador rotacional o torsional.

a) Amortiguador traslacional o fricción viscosa. Se representa mediante los siguientes símbolos:

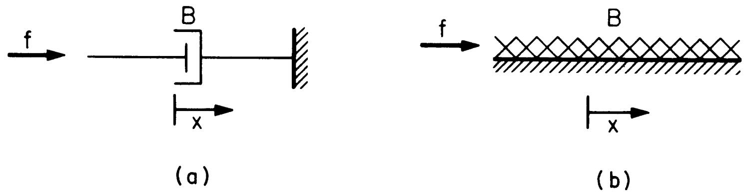


Figura II.3

Las variables asociadas con este elemento son fuerza y velocidad. Su comportamiento físico está definido por:

$$\boxed{f_B = B\,\frac{dx}{dt}}$$

donde:

f_B: es la fuerza que producida por el amortiguador, se opone al movimiento de éste y es igual a la fuerza externa aplicada (f) con base en la tercera ley de Newton. $[N]$

$\frac{dx}{dt}$: es la velocidad a la cual se mueve el amortiguador traslacional y se representa por la letra v. $[m/s]$

B: es el valor o la constante del amortiguador. $\left[\frac{N\cdot s}{m}\right]$

El amortiguador traslacional o fricción viscosa tiene una característica fuerza - velocidad como se muestra en la siguiente figura:

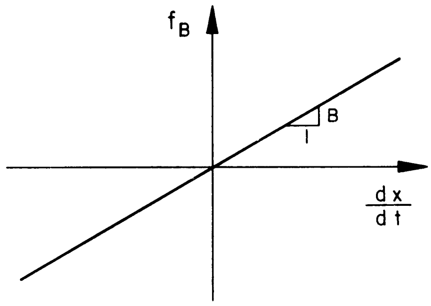


Figura II.4

b) Amortiguador rotacional o torsional. Se representa por medio de los siguientes símbolos:

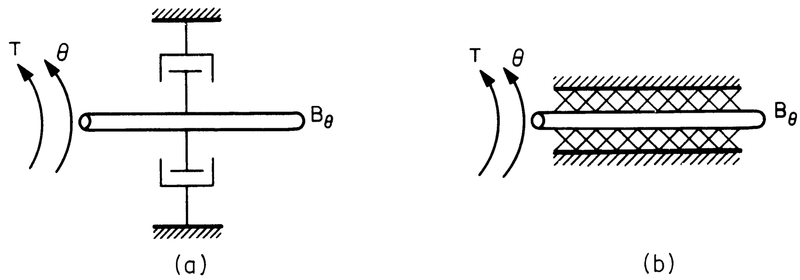


Figura II.5

Las variables asociadas al amortiguador rotacional son par y velocidad angular; su comportamiento físico está definido por:

$$\boxed{T_{B\theta} = B_\theta \frac{d\theta}{dt}}$$

donde:

$T_{B\theta}$: es el par que producido por el amortiguador rotacional, se opone al giro de éste y es igual al par externo aplicado (T) con base en la tercera ley de Newton. [N · m]

$\frac{d\theta}{dt}$: es la velocidad angular a la cual gira el amortiguador rotacional y se representa generalmente por la letra ω. $\left[rad/s\right]$

B_θ: es el valor o la constante del amortiguador rotacional. $\left[\frac{N \cdot m}{rad/s}\right]$

El amortiguador rotacional o torsional tiene una caracterfstica par - velocidad angular como se muestra en la siguiente figura:

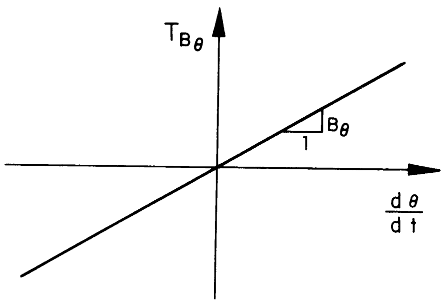


Figura II.6

RESISTENCIA HIDRAULICA

Es la oposición que presentan las tuberías al paso del fluido, se representa por medio de los siguientes símbolos:

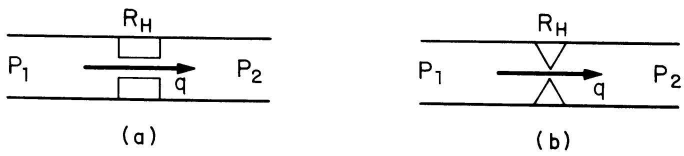


Figura II.7

Las variables asociadas con este elemento son presión y gasto. Su comportamiento físico está definido por:

$$\boxed{\Delta P = P_1 - P_2 = R_H\, q}$$

donde:

ΔP: es el incremento de presión a través de la resistencia hidráulica. $[Pa]$

q: es el gasto que fluye a través de la resistencia hidráulica. $[m^3/s]$

R_H: es el valor de la resistencia hidráulica que presentan las paredes de la tubería. $\left[\frac{Pa \cdot s}{m^3}\right]$

La resistencia hidráulica tiene una característica presión - gasto como se muestra en la siguiente figura:

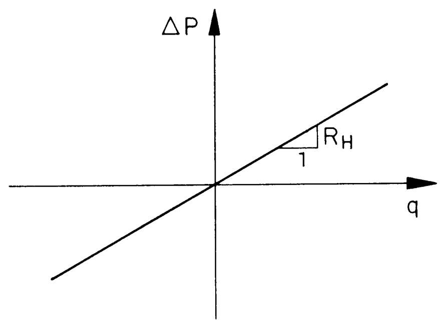


Figura II.8

RESISTENCIA TERMICA

Es la oposición que presentan los materiales al paso del flujo de calor a través de ellos y se representa como:

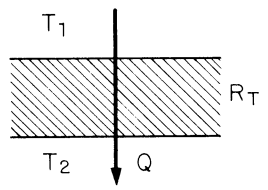


Figura II.9

Las variables asociadas con este elemento son temperatura y flujo de calor y su comportamiento físico está definido por:

$$\boxed{\Delta T = T_1 - T_2 = R_T Q}$$

donde:

ΔT: es el incremento de temperatura a través de la resistencia térmica. [K]

Q: es el flujo de calor que pasa a través de la resistencia térmica. [W]

R_T: es el valor de la resistencia térmica o la oposición que presenta el material al paso del flujo de calor. [K/W]

La resistencia térmica tiene una característica temperatura - flujo de calor como se muestra en la siguiente figura:

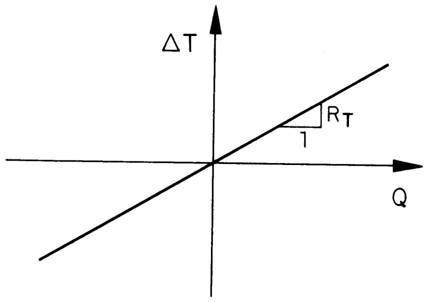


Figura II.10

A continuación se presenta un resumen de los elementos resistivos para cada uno de los sistemas.

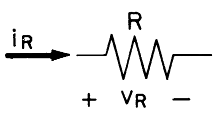
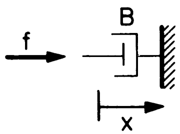
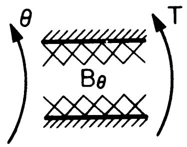
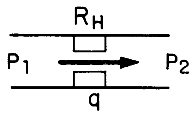
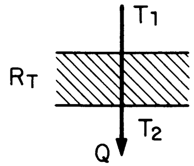
	TIPO DE SISTEMA				
	ELECTRICO	MECANICO TRASLACIONAL	MECANICO ROTACIONAL	HIDRAULICO	TERMICO
SIMBOLO					
ECUACION	$V_R = Ri_R$	$f_B = B \frac{dx}{dt}$	$T_{B\theta} = B_\theta \frac{d\theta}{dt}$	$\Delta P = R_H q$	$\Delta T = R_T Q$
UNIDAD	$\left[\Omega\right]$	$\left[\frac{N \cdot s}{m}\right]$	$\left[\frac{N \cdot m}{rad/s}\right]$	$\left[\frac{Pa \cdot s}{m^3}\right]$	$\left[\frac{K}{W}\right]$

Tabla II.i Resumen de Elementos Resistivos

II.1.2 CAPACITANCIA

Los elementos capacitivos se caracterizan por la propiedad de almacenar energía que a su vez la suministran a otros elementos del sistema. La rapidez con que ceden la energía depende directamente del valor de la capacitancia y del elemento resistivo al cual dicha energía es transferida.

CAPACITANCIA ELECTRICA

La capacitancia eléctrica o comúnmente denominada capacitor se representa mediante los siguientes símbolos:

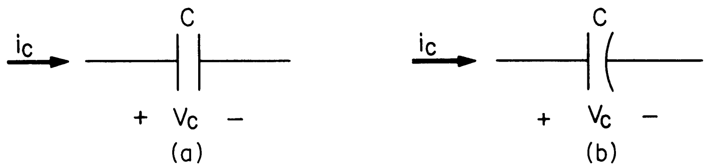


Figura II.11

Las variables asociadas a este elemento son voltaje y corriente y su comportamiento físico está definido por:

$$\boxed{i_C = C\,\frac{dV_C}{dt}}$$

o bien:

$$\boxed{V_C = \frac{1}{C}\int_0^t i_C(t')\,dt'}$$

donde:

V_C: es el voltaje a través del capacitor o capacitancia eléctrica. [V]

i_C: es la corriente que fluye a través del capacitor o capacitancia eléctrica. [A]

C: es el valor del capacitor o capacitancia eléctrica. [F]

La capacitancia eléctrica tiene una característica voltaje - corriente como se muestra en la siguiente figura:

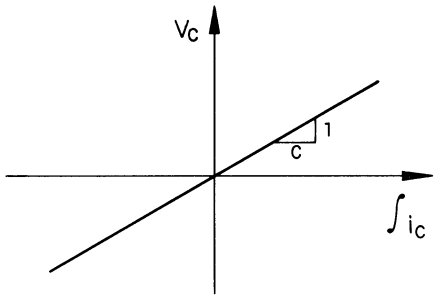


Figura II.12

CAPACITANCIA MECANICA

Existen dos tipos:

a) La traslacional o masa.

b) La rotacional o inercia.

a) Capacitancia mecánica traslacional o masa. Se representa por medio del siguiente símbolo:

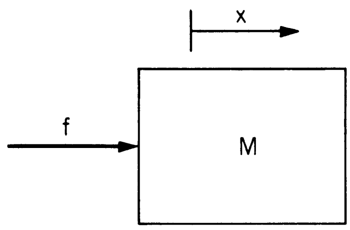


Figura II.13

Las variables asociadas con este elemento son fuerza y aceleración y su comportamiento físico está definido por:

$$\boxed{f_M = M\,\frac{d^2x}{dt^2}}$$

donde:

f_M: es la fuerza que producida por la masa, se opone al movimiento de ésta y es igual a la fuerza externa aplicada (f) con base en la tercera ley de Newton. $[N]$

$\frac{d^2x}{dt^2}$: es la aceleración a la cual se mueve la masa y se representa por la letra a. $[m/s^2]$

M: es el valor que tiene la masa o capacitancia mecánica traslacional. $[kg]$

La masa o capacitancia mecánica traslacional tiene una característica fuerza - aceleración como se muestra en la siguiente figura:

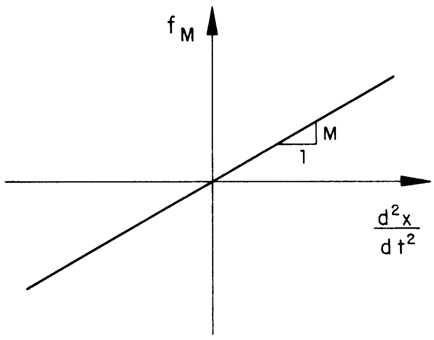


Figura II.14

b) Capacitancia mecánica rotacional o inercia. Se representa por medio del siguiente símbolo:

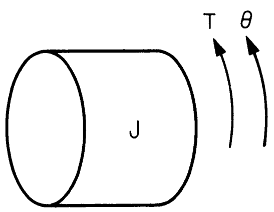


Figura II.15

Las variablaes asociadas con este elemento son par y aceleración angular y su comportamiento físico está definido por:

$$\boxed{T_J = J\,\frac{d^2\theta}{dt^2}}$$

donde:

T_J: es el par, que producido por la inercia, se opone al movimiento de ésta y es igual al par externo aplicado (T) con base en la tercera ley de Newton. $[N \cdot m]$

$\frac{d^2\theta}{dt^2}$: es la aceleración angular a la cual gira la inercia y se representa por la letra α. $[rad/s^2]$

J: es el valor de la inercia o capacitancia mecánica rotacional. $\left[\frac{kg \cdot m^2}{rad}\right]$

La inercia o capacitancia mecánica rotacional tiene una característica par - aceleración angular como se muestra en la siguiente figura:

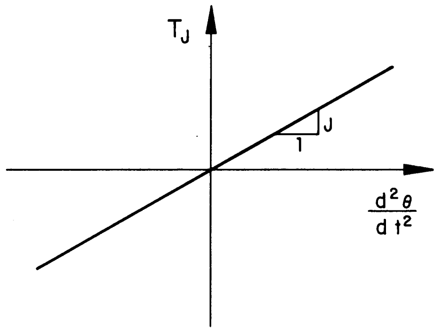


Figura II.16

CAPACITANCIA HIDRAULICA

Esta se representa por medio del siguiente símbolo:

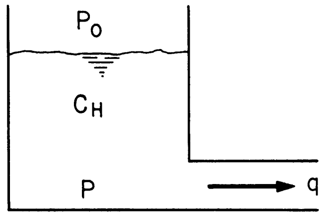


Figura II.17

Las variables asociadas con este elemento son presión y gasto y su comportamiento físico está definido por:

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = \frac{1}{C_H} q}$$

donde:

P: es la presión en el fondo del tanque. [Pa]

q: es el gasto que fluye a través del tanque. [m^3/s]

C_H: es el valor que tiene la capacitancia hidráulica. [m^3/Pa]

La capacitancia hidráulica tiene una característica presión - gasto como la que se muestra en la siguiente figura:

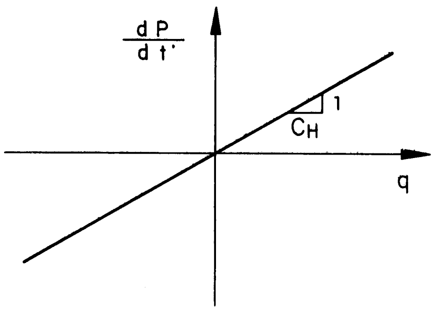


Figura II.18

CAPACITANCIA TERMICA

Es la capacidad que tiene un cuerpo para almacenar calor y se representa por medio del siguiente símbolo:

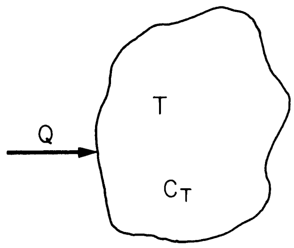


Figura II.19

Las variables asociadas con este elemento son temperatura y flujo de calor y su comportamiento físico está definido por:

$$\boxed{\frac{dT}{dt} = \frac{1}{C_T} Q}$$

donde:

T: es la temperatura a la cual está la capacitancia térmica. [K]

Q: es el flujo de calor que se transfiere a la capacitancia térmica. [W]

C_T: es el valor de la capacitancia térmica. $\left[\frac{W \cdot s}{K}\right]$

La capacitancia térmica tiene una característica temperatura - flujo de calor como se muestra en la siguiente figura:

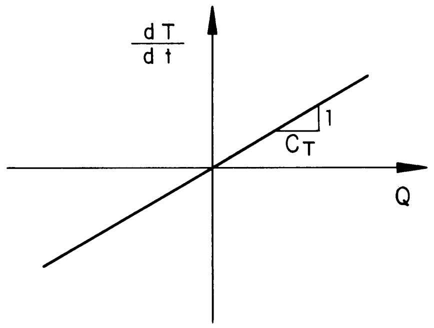


Figura II.20

A continuación se presenta un resumen de los elementos capacitivos para cada uno de los sistemas.

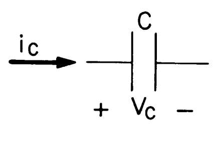
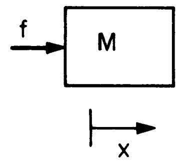
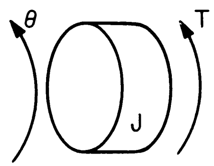
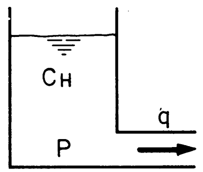
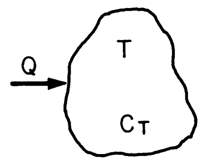
	TIPO DE SISTEMA				
	ELECTRICO	MECANICO TRASLACIONAL	MECANICO ROTACIONAL	HIDRAULICO	TERMICO
SIMBOLO					
ECUACION	$i_C = C \frac{dV_C}{dt}$ $V_C = \frac{1}{C}\int_0^t i_C(t')dt'$	$f_M = M \frac{d^2x}{dt^2}$	$T_J = J \frac{d^2\theta}{dt^2}$	$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{C_H} q$	$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{C_H} Q$
UNIDAD	$[F]$	$[kg]$	$\left[\frac{kg \cdot m^2}{rad}\right]$	$\left[\frac{m^3}{Pa}\right]$	$\left[\frac{W \cdot s}{K}\right]$

Tabla II.2 Resumen de Elementos Capacitivos

II.1.3 INDUCTANCIA

Los elementos inductivos al igual que los capacitivos se caracterizan por su propiedad de almacenar energía; sin embargo, en este caso, la forma de almacenarla es distinta y la rapidez para transferirla a otros elementos del sistema es instantánea.

INDUCTANCIA ELECTRICA

La inductancia eléctrica o comúnmente denominada inductor, se representa por medio del siguiente símbolo:

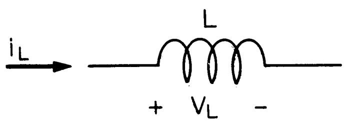


Figura II.21

Las variables asociadas con este elemento son voltaje y corriente y su comportamiento físico está definido por:

$$\boxed{V_L = L\,\frac{di_L}{dt}}$$

o bien:

$$\boxed{i_L = \frac{1}{L}\int_0^t V_L(t')\,dt'}$$

donde:

- V_L: es el voltaje a través de la inductancia eléctrica. [V]
- i_L: es la corriente que fluye a través de la inductancia eléctrica. [A]
- L: es el valor de la inductancia eléctrica y está expresado en: [H]

La inductancia eléctrica tiene una característica voltaje - corriente como se muestra en la siguiente figura:

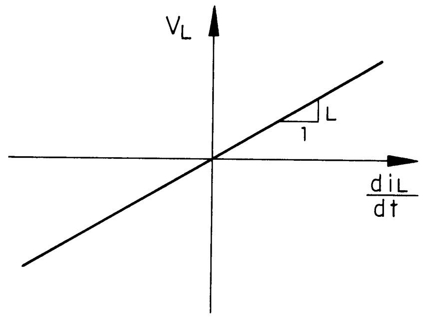


Figura II.22

INDUCTANCIA MECANICA

Existen dos tipos:

a) Inductancia mecánica o resorte traslacional.

b) Inductancia mecánica o resorte rotacional o torsional.

a) El resorte o inductancia mecánica traslacional se representa por medio de los siguientes símbolos:

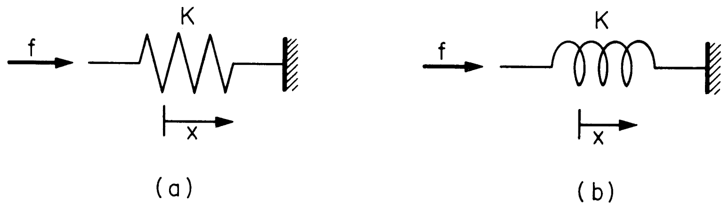


Figura II.23

Las variables asociadas con este elemento son fuerza y desplazamiento lineal y su comportamiento físico está definido por:

$$\boxed{f_K = K\,x}$$

donde:

f_K: es la fuerza que producida por el resorte o inductancia mecánica traslacional, se opone al movimiento de éste y es igual a la fuerza externa aplicada (f) con base en la tercera ley de Newton. [N]

x: es el desplazamiento del resorte o inductancia mecánica traslacional. [m]

K: es el valor o la constante que tiene el resorte. [N/m]

El resorte o inductancia mecánica traslacional tiene una característica fuerza - desplazamiento lineal como se muestra en la siguiente figura:

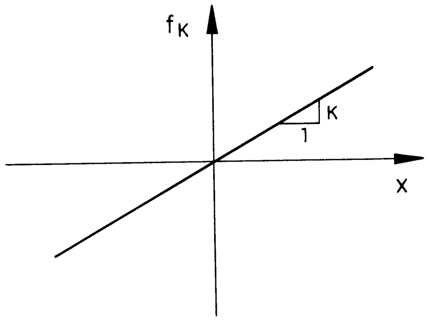


Figura II.24

b) El resorte o inductancia mecánica rotacional se representa por medio de los siguientes símbolos:

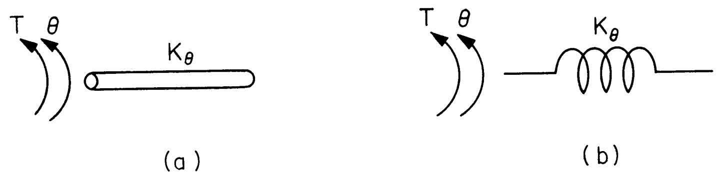


Figura II.25

Las variables asociadas a este elemento son par y desplazamiento angular y su comportamiento físico está definido por:

$$\boxed{T_{K\theta} = K_\theta\, \theta}$$

donde:

T_{K_θ}: es el par que producido por el resorte, se opone al giro de éste y es igual al par externo aplicado (T) con base en la tercera ley de Newton. $[N \cdot m]$

θ: es el desplazamiento angular del resorte. $[rad]$

K_θ: es el valor o constante que tiene el resorte. $\left[\frac{N \cdot m}{rad}\right]$

El resorte o inductancia mecánica rotacional tiene una característica par - desplazamiento angular como la que se muestra en la siguiente figura:

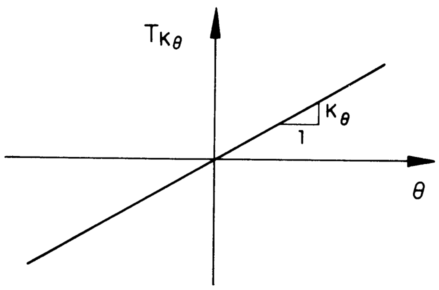


Figura II.26

INDUCTANCIA HIDRAULICA O INERCIA FLUIDICA

Esta no puede ser representada en forma simbólica, físicamente representa el efecto conocido como golpe de ariete. Las variables asociadas con este elemento son presión y gasto y su comportamiento físico está definido por:

$$\boxed{P = I \frac{dq}{dt}}$$

donde:

P: es la presión a través de la inductancia hidráulica. $[Pa]$

q: es el gasto a través de la inductancia hidráulica. $[m^3/s]$

I: es la inductancia hidráulica o inercia fluídica. $\left[\frac{Pa \cdot s^2}{m^3}\right]$

La inductancia hidráulica o inercia fluídica tiene una característica presión - gasto como se muestra en la siguiente figura:

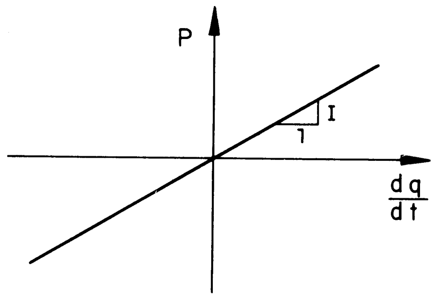


Figura II.27

INDUCTANCIA TERMICA

La inductancia térmica no tiene interpretación física, por esta razón, no se considerará en ninguno de los análisis que se presenten.

A continuación se presenta un resumen de los elementos inductivos para cada uno de los sistemas.

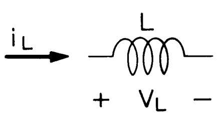
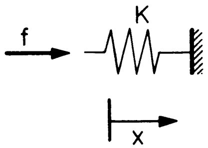
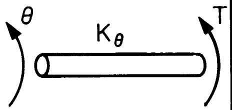
	TIPO DE SISTEMA				
	ELECTRICO	MECANICO TRASLACIONAL	MECANICO ROTACIONAL	HIDRAULICO	TERMICO
SIMBOLO				NO HAY RE-PRESENTACION SIMBOLICA	—
ECUACION	$V_L = L\,\frac{di_L}{dt}$ $i_L = \frac{1}{L}\int_0^t V_L(t')dt'$	$f_K = K\,x$	$T_{K_\theta} = K_\theta\,\theta$	$P = I\,\frac{dq}{dt}$	—
UNIDAD	$[H]$	$\left[\frac{N}{m}\right]$	$\left[\frac{N \cdot m}{rad}\right]$	$\left[\frac{Pa \cdot s^2}{m^3}\right]$	—

Tabla II.3 Resumen de Elementos Inductivo

II.2 Ecuaciones de Equilibrio

La presente sección está dedicada a presentar las leyes y principios físicos que permiten establecer las expresiones matemáticas que relacionan los elementos de un sistema.

II.2.1 ECUACIONES DE EQUILIBRIO PARA SISTEMAS ELECTRICOS

Estas ecuaciones se plantean con base en las leyes de Kirchhoff. Estas leyes relacionan las variables de interés, en este caso, corriente y voltaje entre los diversos elementos que integran el sistema.

LEY DE CORRIENTES DE KIRCHHOFF (LCK)

Esta ley establece que para cualquier circuito eléctrico con n número de nodos y m número de ramas, la suma algebraica de corrientes en cualquiera de sus nodos es igual a cero, así la ley de corrientes de Kirchhoff puede ser expresada como:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{m} a_{kj}\, i_j = 0 \quad ; \quad k = 1, 2, \ldots, n}$$

donde:

a_{kj} = + 1, si la rama j está conectada al nodo k y la corriente i_j sale del nodo k.

a_{kj} = - 1, si la rama j está conectada al nodo k y la corriente i_j entra al nodo k.

a_{kj} = 0, si la rama j no está conectada al nodo k.

LEY DE VOLTAJES DE KIRCHHOFF (LVK)

Esta ley establece que para cualquier circuito eléctrico con m número de ramas y ℓ número de mallas, la suma algebraica de voltajes en cualquiera de sus mallas es igual a cero, así la ley de voltajes de Kirchhoff puede ser expresada como:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{m} b_{kj} V_j = 0 \; ; \; k = 1, 2, \ldots, \ell}$$

donde:

b_{kj} = + 1, si la rama j forma parte de la malla k y en el trazo a través de la rama j se encuentra al principio el signo positivo.

b_{kj} = - 1, si la rama j forma parte de la malla k y en el trazo a través de la rama j se encuentra al principio el signo negativo.

b_{kj} = 0, si la rama j no forma parte de la malla k.

Es necesario señalar que el sentido de las corrientes y la polaridad de los voltajes se establece en forma arbitraria.

Ejemplo II.1

Obtener las ecuaciones de equilibrio para el sistema eléctrico formado por seis elementos, los cuales están interconectados como se muestra en la siguiente figura:

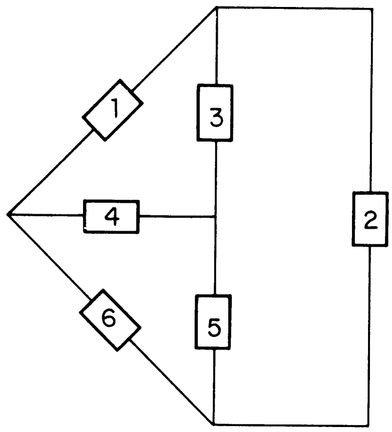


Figura II.28

Solución:

a) Primeramente se procede a establecer los sentidos de las corrientes para cada rama y numerar e identificar los nodos:

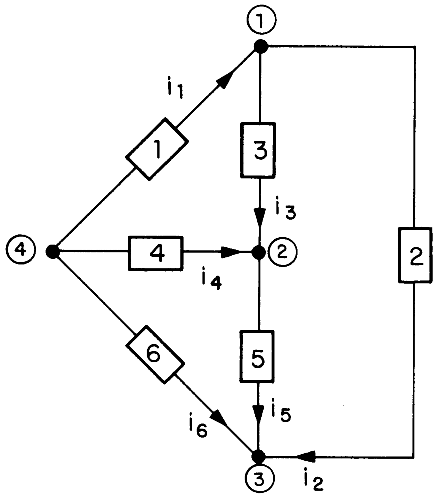


Figura II.29

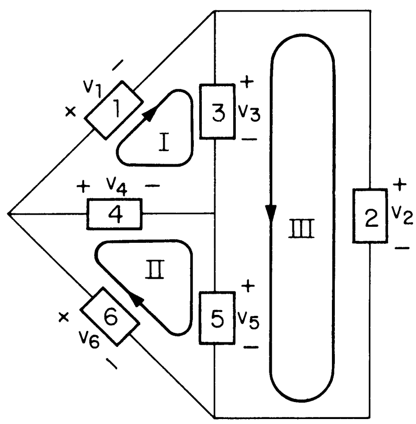
El circuito tiene cuatro nodos independientes, los cuales están formados de la siguiente manera:

NODO	R A M A S
1	1, 2, 3
2	3, 4, 5
3	2, 5, 6
4	1, 4, 6

Aplicando la ley de corrientes de Kirchhoff se tiene que las ecuaciones de equilibrio de corriente son:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{NODO} & 1 & -i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\ \text{NODO} & 2 & -i_3 - i_4 + i_5 = 0 \\ \text{NODO} & 3 & -i_2 - i_5 - i_6 = 0 \\ \text{NODO} & 4 & i_1 + i_4 + i_6 = 0 \end{array}\right| \quad \ldots (1)$$

b) En este caso es necesario establecer las polaridades de los voltajes para cada rama, numerar e identificar las mallas y establecer el sentido de recorrido en cada malla:



(a)

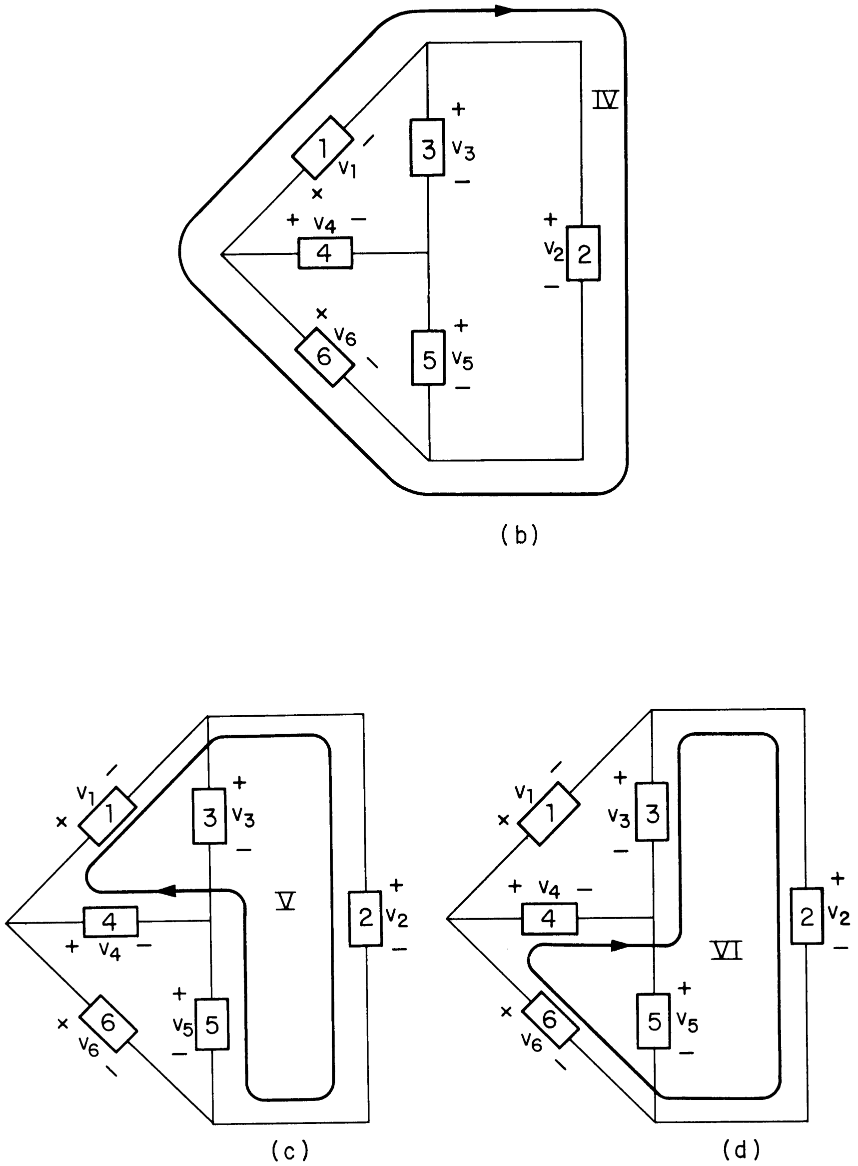


Figura II.30

De las figuras (a), (b), (c) y (d), se puede observar que el circuito tiene seis mallas, las cuales están formadas de la siguiente manera:

MALLA	R A M A S
I	1, 3, 4
II	4, 5, 6
III	2, 3, 5
IV	1, 2, 6
V	1, 2, 4, 5
VI	2, 3, 4, 6

Aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff se tiene que las ecuaciones de equilibrio de voltaje son:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{MALLA I} & V_1 + V_3 - V_4 = 0 \\ \text{MALLA II} & V_4 + V_5 - V_6 = 0 \\ \text{MALLA III} & -V_2 + V_3 + V_5 = 0 \\ \text{MALLA IV} & V_1 + V_2 - V_6 = 0 \\ \text{MALLA V} & V_1 + V_2 - V_4 - V_5 = 0 \\ \text{MALLA VI} & V_2 - V_3 + V_4 - V_6 = 0 \end{array}\right| \quad \ldots (2)$$

Los sistemas de ecuaciones (1) y (2) representan las ecuaciones de equilibrio del sistema.

En la tabla II.4 se resumen las variables de interés y las leyes fundamentales para los sistemas eléctricos.

VARIABLE DE INTERES	SIMBOLO Y UNIDAD	PRINCIPIOS Y LEYES FISICAS FUNDAMENTALES PARA PLANTEAR LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO
VOLTAJE	v [V]	LEY DE CORRIENTES DE KIRCHHOFF
CORRIENTE	i [A]	LEY DE VOLTAJES DE KIRCHHOFF

Tabla II.4 Sistemas Eléctricos

II.2.2 ECUACIONES DE EQUILIBRIO PARA SISTEMAS MECANICOS

Estas ecuaciones se plantean con base en la tercera ley de movimiento de Newton y en el principio de D'Alembert.

La tercera ley de Newton establece que:

> A toda acción siempre existe una reacción igual y de sentido contrario.

El principio de D'Alembert establece que:

> Las fuerzas aplicadas a un elemento, junto con las fuerzas de inercia forman un sistema en equilibrio.

Basándose en esta ley y en este principio se pueden plantear las ecuaciones de equilibrio para sistemas mecánicos traslacionales y rotacionales.

a) SISTEMAS MECANICOS TRASLACIONALES

La tercera ley de Newton aplicada a este tipo de sistemas puede escribirse como:

Sí un elemento A ejerce una fuerza sobre otro elemento B, éste ejercerá una fuerza de igual magnitud pero en sentido contrario al elemento A

y el principio de D'Alembert se puede expresar simplemente como:

$$\boxed{\Sigma f_i = 0}$$

Ejemplo II.2

Obtener las ecuaciones de equilibrio del sistema mecánico traslacional, formado por un resorte, un amortiguador y una masa, como se muestra en la figura:

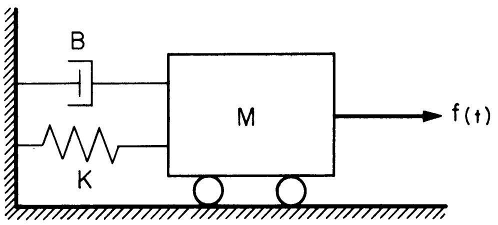


Figura II.31

Solución:

De acuerdo con la tercera ley de Newton el amortiguador (B) y el resorte (K) ejercen una fuerza sobre la masa (M) y ésta a su vez ejerce una fuerza sobre ambos elementos, a partir de este razonamiento se puede dibujar el siguiente diagrama de cuerpo libre:

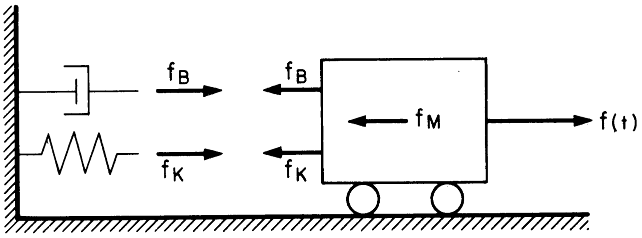


Figura II.32

Por otra parte, aplicando el principio de D'Alembert se tiene:

$$\Sigma f_i = 0$$

esto es:

$$-f_M - f_B - f_K + f(t) = 0 \qquad \ldots (1)$$

La ecuación (1) es la ecuación de equilibrio del sistema.

b) SISTEMAS MECANICOS ROTACIONALES

La tercera ley de Newton aplicada a sistemas mecánicos rotacionales puede escribirse de la forma:

Si un elemento A ejerce un par sobre otro elemento B, éste ejercerá un par de igual magnitud pero en sentido contrario al elemento A.

y el principio de D'Alembert se puede expresar en la forma siguiente:

$$\boxed{\Sigma T_i = 0}$$

Ejemplo II.3

Obtener las ecuaciones de equilibrio del sistema mecánico rotacional formado por un resorte rotacional, un amortiguador rotacional o torsional y una inercia, como se muestra en la figura:

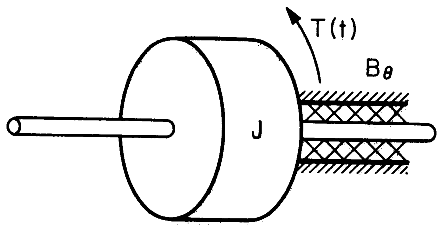


Figura II.33

Solución:

De acuerdo con la tercera ley de Newton el resorte y el amortiguador ejercen un par cada uno sobre la inercia y ésta a su vez ejerce un par sobre estos dos elementos, a partir de este razonamiento se puede dibujar el siguiente diagrama de cuerpo libre:

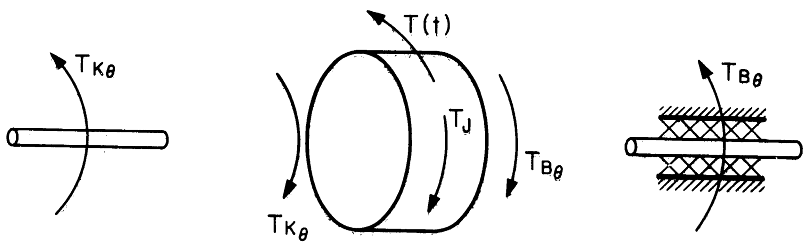


Figura II.34

aplicando el principio de D'Alembert se tiene:

$$\Sigma T_i = 0$$

esto es:

$$-T_J - T_{B\theta} - T_{K\theta} + T(t) = 0 \qquad \dots (1)$$

La ecuación (1) es la ecuación de equilibrio del sistema.

En las tablas II.5 y II.6 se resumen las variables de interés y las leyes fundamentales para los sistemas mecánicos.

VARIABLE DE INTERES	SIMBOLO Y UNIDAD	PRINCIPIOS Y LEYES FISICAS FUNDAMENTALES PARA PLANTEAR LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO
FUERZA	f [N]	TERCERA LEY DE NEWTON APLICADA A SISTEMAS MECANICOS TRASLACIONALES PRINCIPIO DE D'ALEMBERT APLICADO A SISTEMAS MECANICOS TRASLACIONALES
DESPLAZAMIENTO	x [m]	
VELOCIDAD	v [m/s]	
ACELERACION	a [m/s^2]	

Tabla II.5 Sistemas Mecánicos Traslacionales

VARIABLE DE INTERES	SIMBOLO Y UNIDAD	PRINCIPIOS Y LEYES FISICAS FUNDAMENTALES PARA PLANTEAR LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO
PAR	T [N · m]	TERCERA LEY DE NEWTON
DESPLAZAMIENTO ANGULAR	θ [rad]	APLICADA A SISTEMAS MECANICOS ROTACIONALES
VELOCIDAD ANGULAR	ω [rad/s]	PRINCIPIO DE D'ALEMBERT APLICADO A SISTEMAS MECANICOS ROTACIONALES
ACELERACION ANGULAR	α [rad/s^2]	

Tabla II.6 Sistemas Mecánicos Rotacionales

II.2.3 ECUACIONES DE EQUILIBRIO PARA SISTEMAS HIDRAULICOS

Se plantean con base en las leyes de balance de presiones y conservación de la masa.

En estas leyes, las variables de interés son presión (P) y gasto (q).

La ley de balance de presiones establece que:

> La suma de las caídas de presión alrededor de una malla es igual a cero.

La ley de conservación de la masa establece que:

> La suma algebraica de gastos en un nodo es igual a cero, o las variaciones de volumen con

respecto al tiempo es igual a la suma de los gastos de entrada menos la suma de los gastos de salida.

Estas leyes pueden espresarse como:

$$\Sigma P_i = 0 \quad ; \qquad \Sigma q_e - \Sigma q_s = \frac{dv}{dt}$$

Ejemplo II.4

Obtener las ecuaciones de equilibrio para el sistema hidráulico mostrado en la figura:

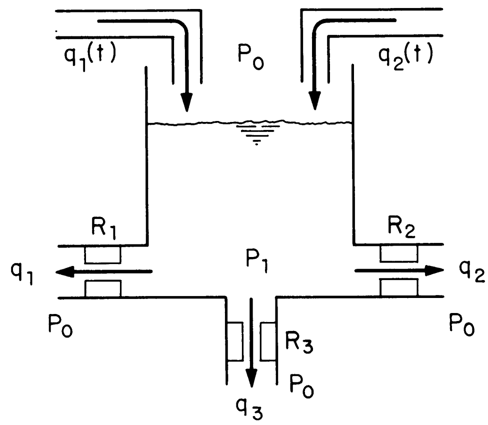


Figura II.35

Solución:

De la ley de balance de presiones se obtiene:

$$\Sigma Pi = 0$$

$$P_1 - P_0 - P_h = 0 \qquad \ldots (1)$$

donde:

P_h es la presión hidrostática de la columna de fluido.

por otra parte de la ley de conservación de la masa se obtiene:

$$\frac{dv}{dt} = \Sigma q_e - \Sigma q_s \qquad \ldots (2)$$

la suma de gastos de entrada al sistema es:

$$\Sigma q_e = q_1(t) + q_2(t) \qquad \ldots (3)$$

la suma de gastos de salida del sistema está dada por:

$$\Sigma q_s = q_1 + q_2 + q_3 \qquad \ldots (4)$$

sustituyendo las ecuaciones (3) y (4) en la (2) se obtiene:

$$\frac{dv}{dt} = q_1(t) + q_2(t) - q_1 - q_2 - q_3 \qquad \ldots (5)$$

Las ecuaciones (1) y (5) representan las ecuaciones de equilibrio del sistema

En la tabla II.7 se resumen las variables de interés y las leyes fundamentales para los sistemas hidráulicos.

VARIABLE DE INTERES	SIMBOLO Y UNIDAD	PRINCIPIOS Y LEYES FUNDAMENTALES PARA PLANTEAR LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO
ALTURA DE LA COLUMNA DEL FLUIDO	h [m]	LEY DE BALANCE DE PRESIONES
PRESION	P [Pa]	LEY DE CONSERVACION DE LA MASA
GASTO	q [m^3/s]	

Tabla II.7 Sistemas Hidráulicos

II.2.4 ECUACIONES DE EQUILIBRIO PARA SISTEMAS TERMICOS

Estas ecuaciones se derivan a partir de un caso particular de la primera ley de la termodinámica*, la cual relaciona temperatura y flujo de calor, que son las variables de interés en los sistemas térmicos.

Por otra parte, establecer un postulado preciso de la primera ley de la termodinámica en forma breve es una tarea un tanto difícil por lo que no se tratará de hacer, sin embargo para un sistema, esta ley puede ser expresada como:

$$dU = dQ - dW \qquad \ldots (1)$$

donde:

U: es la energía interna del sistema
Q: es la cantidad de calor transferida al sistema
W: es el trabajo realizado por el sistema

la ecuación (1) también puede ser escrita como:

$$(\rho v)du = Q_{net}\, dt - dW \qquad \ldots (2)$$

donde:

ρ: es la densidad
v: es el volumen del sistema
u: es la energía interna del sistema por unidad de masa
Q_{net}: es la tasa neta de flujo de calor dentro del sistema
t: es el tiempo

*Conservación de la energía

En sistemas puramente de transmisión de calor, no se realiza trabajo, por lo que la primera ley de la termodinámica puede ser escrita como:

$$(\rho v)du = Q_{net}\,dt \qquad \ldots (3)$$

o bien:

$$(\rho v)\frac{du}{dt} = Q_{net} \qquad \ldots (4)$$

por otra parte los cambios de temperatura son proporcionales a los de energía interna por unidad de masa, es decir:

$$dT = \frac{1}{c}\,du \qquad \ldots (5)$$

donde:

c: es el calor específico

sustituyendo la ecuación (5) en la (4), se obtiene:

$$(\rho vc)\frac{dT}{dt} = Q_{net} \qquad \ldots (6)$$

el término ρvc de la ecuación (6) se define como la capacitancia térmica (C_T), así se obtiene:

$$C_T\frac{dT}{dt} = Q_{net} \qquad \ldots (7)$$

Finalmente, si Q_{net} se define como la diferencia entre el flujo de calor suministrado al sistema y el cedido por éste, la ecuación de equilibrio para sistemas térmicos se puede escribir como:

$$\boxed{C_T\frac{dT}{dt} = \Sigma\, Q_e - \Sigma\, Q_s}$$

esta última ecuación se interpreta como sigue: el calor absorbido por el sistema es la diferencia del calor que recibe menos el que emana.

Ejemplo II.5

Obtener las ecuaciones de equilibrio del sistema térmico mostrado en la figura:

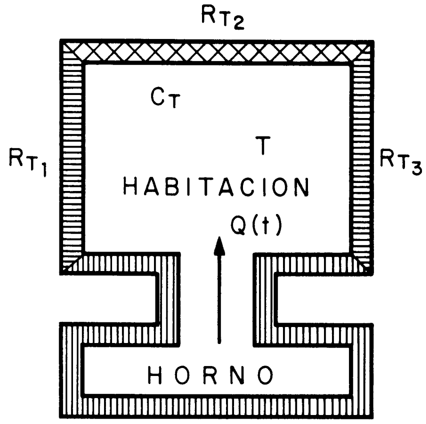


Figura II.36

Solución:

El sistema recibe calor del horno a una tasa Q(t) y éste a su vez transfiere calor a través de las paredes y el techo como se muestra en la siguiente figura:

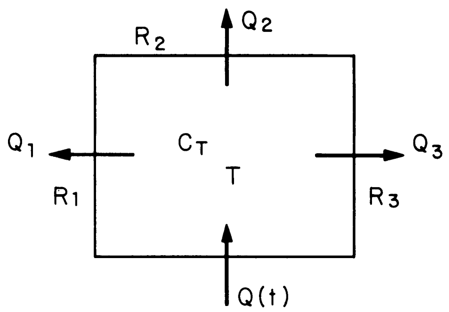


Figura II.37

La ecuación de equilibrio es:

$$C_T \frac{dT}{dt} = \Sigma Qe - \Sigma Qs \qquad \ldots (1)$$

la suma de flujos de calor de entrada al siste ma, está dada por:

$$\Sigma Qe = Q(t) \qquad \ldots (2)$$

la suma de flujos de calor de salida del sistema es:

$$\Sigma Qs = Q_1 + Q_2 + Q_3 \qquad \ldots (3)$$

por lo tanto, sustituyendo las ecuaciones (2) y (3) en la (1) se obtiene:

$$C_T \frac{dT}{dt} = Q(t) - Q_1 - Q_2 - Q_3 \qquad \ldots (4)$$

La ecuación (4) es la ecuación de equilibrio del sistema.

En la tabla II.8 se resumen las variables de interés y las leyes fundamentales para los sistemas térmicos.

VARIABLE DE INTERES	SIMBOLO Y UNIDAD	PRINCIPIOS Y LEYES FISICAS FUNDAMENTALES PARA PLANTEAR LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO
TEMPERATURA	T [K]	PRIMERA LEY DE LA TERMODINAMICA
FLUJO DE CALOR	Q [W]	

Tabla II.8 Sistemas Térmicos

II.2.5 ECUACIONES DE EQUILIBRIO PARA SISTEMAS HIBRIDOS

Estas ecuaciones se deben plantear dependiendo del tipo de sistema, esto es, combinando los principios y leyes presentados en esta sección. Por ejemplo, para un sistema electromecánico se deben de considerar las leyes de Kirchhoff, la tercera ley de Newton y el principio de D'Alembert.

II.3 Metodología para la obtención de modelos matemáticos de Sistemas Físicos

La metodología que se propone para la formulación y obtención de modelos matemáticos de sistemas físicos, es un procedimiento sistemático, y consta de cuatro etapas:

SELECCION DE LAS VARIABLES QUE INTERVENDRAN EN EL MODELO MATEMATICO

Se realiza con base en el tipo de análisis que se desea practicar al sistema. Por ejemplo:

- **En un sistema eléctrico, las variables pueden ser el voltaje en el capacitor (V_C) o la corriente en la inductancia (i_L) y en algunos casos pueden ser ambas como se verá en capítulos subsecuentes.**
- En un sistema hidráulico, las variables pueden ser la altura que tiene la columan del fluido (h) o la presión en el fondo de alguno de los recipientes que forman el sistema, también pueden ser ambas variables en algunos casos.
- **En un sistema mecánico traslacional, las variables pueden ser desplazamiento, velocidad, aceleración o la fuerza en alguno de los resortes que forman el sistema, sin embargo, se puede seleccionar la combinación de algunas de las variables mencionadas.**

LEYES O ECUACIONES DE LOS ELEMENTOS

En esta etapa se deben plantear las ecuaciones que definen el comportamiento físico para cada uno de los elementos que forman el sistema. Cabe mencionar que se deben plantear tantas ecuaciones como cantidad de elementos tenga el sistema, por ejemplo:

- En un sistema mecánico rotacional formado por tres inercias, dos resortes rotacionales y tres amortiguadores rotacionales, se deben plantear ocho ecuaciones de elementos y una ecuación para cada elemento.
- En un sistema hidráulico formado por dos recipientes y cinco resistencias hidráulicas, es necesario plantear siete ecuaciones de elementos.
- En un sistema térmico con dos capacitancias térmicas y seis resistencias térmicas, se deben plantear ocho ecuaciones de elementos.

LEYES DE CONJUNTO O ECUACIONES DE EQUILIBRIO

Se debe dividir el sistema que se desea modelar en subsistemas y plantear las ecuaciones de equilibrio para cada uno de ellos, considerando los principios físicos descritos en la sección II.2. Se deben plantear tantas ecuaciones de equilibrio como número de subsistemas tenga el sistema original, por ejemplo:

- Un sistema térmico formado por dos capacitancias y cinco resistencias, puede ser dividido en dos subsistemas formados por una capacitancia y tres resistencias cada uno, en este caso se deben plantear dos ecuaciones de equilibrio, una para cada uno de los subsistemas.
- Un sistema mecánico formado por dos masas, un resorte y un amortiguador, puede ser dividido en dos subsistemas, el primero está formado por una masa y un resorte y el segundo por una masa, un resorte y un amortiguador, en este caso se deben plantear dos ecuaciones de equilibrio.

En esta última etapa, se debe hacer la combinación y simplificación necesarias de las ecuaciones planteadas en las etapas dos y tres, a fin de obtener una o varias ecuaciones que representarán el modelo matemático final que servirá para definir el comportamiento físico del sistema considerado. Esta o estas ecuaciones deben estar en función de las variables seleccionadas en la primera etapa.

II.4 Sistemas Eléctricos

Son los sistemas en los que las variables de interés son voltaje, corriente, carga, flujo, etc. Por otra parte, existe una gran diversidad de elementos eléctricos (transistores, diodos, varactores, amplificadores y otros). Sin embargo éstos pueden ser representados por resistencias, capacitancias e inductancias, por lo que únicamente se presentarán sistemas formados por estos tres elementos.

A continuación se presentan algunos ejemplos de sistemas eléctricos con el fin de ilustrar el procedimiento para obtener modelos matemáticos de sistemas de este tipo.

Ejemplo II.6

Obtener un modelo matemático del sistema eléctrico formado por una resistencia y una capacitancia alimentados por una fuente de voltaje V(t) como se muestra en la figura:

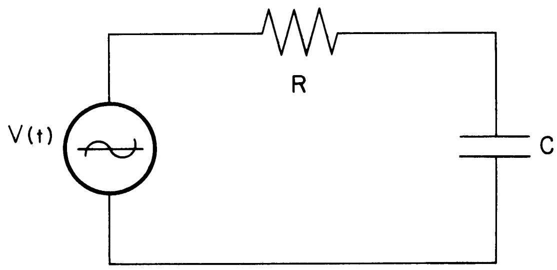


Figura II.38

Solución:

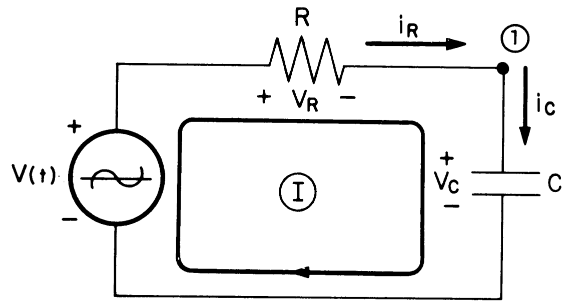


Figura II.39

Aplicando el procedimiento descrito:

1. Selección de variables. En este caso la variable que se empleará para plantear el modelo es el voltaje en el capacitor.

2. Leyes de Elementos (L.E). El sistema está formado por dos elementos (resistencia y capacitancia), y una fuente de alimentación, por lo tanto únicamente hay dos ecuaciones, una para cada elemento y éstas son:

$$V_R = Ri_R \qquad \ldots (1)$$

$$i_C = C \frac{dV_C}{dt} \qquad \ldots (2)$$

3. Leyes de Conjunto (L.C.). Para el sistema considerado hay únicamente un nodo (1) y una sola malla (I). Aplicando las leyes de voltaje y de corriente de Kirchhoff, las ecuaciones de equilibrio son:

$$V_R + V_C - V(t) = 0 \qquad \ldots (3)$$

$$i_R - i_C = 0 \qquad \ldots (4)$$

4. Obtención del modelo matemático. De las ecuaciones (1) y (4) se tiene:

$$V_R = Ri_C \qquad \ldots (5)$$

sustituyendo la ecuación (2) en la (5):

$$V_R = RC \frac{dV_C}{dt} \qquad \ldots (6)$$

sustituyendo la ecuación (6) en la (3):

$$RC \frac{dV_C}{dt} + V_C = V(t) \qquad \ldots (7)$$

La ecuación (7) representa el modelo matemático que define el comportamiento de una de las variables del sistema considerado. Presentándolo en forma normalizada, esto es, la derivada de mayor orden, tendrá coeficiente unitario, por lo que:

$$\boxed{\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{RC} V_C = \frac{1}{RC} V(t)}$$

Ejemplo II.7

Obtener un modelo matemático del sistema eléctrico formado por una resistencia, una inductancia y una capacitancia alimentados por una fuente de voltaje como se muestra en la siguiente figura:

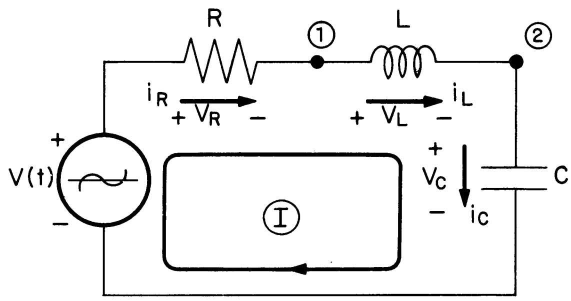


Figura II.40

Solución:

1. **Selección de variables. Para este sistema se puede emplear como variable la corriente en la inductancia o el voltaje en el capacitor. En este caso se obtendrá primeramente un mo-**

delo en función del voltaje en el capacitor y posteriormente en función de la corriente en la inductancia.

2. Leyes de Elementos:

$$V_R = Ri_R \qquad \ldots (1)$$

$$V_L = L\,\frac{di_L}{dt} \qquad \ldots (2)$$

$$i_C = C\,\frac{dV_C}{dt} \qquad \ldots (3)$$

3. Leyes de Conjunto. Aplicando LCK se tiene que la ecuación de equilibrio de corriente es:

$$i_R = i_C = i_L \qquad \ldots (4)$$

aplicando LVK se tiene:

$$V_R + V_L + V_C = V(t) \qquad \ldots (5)$$

4. Obtención del modelo.

a) En función de V_C. De las ecuaciones (1), (3) y (4) se tiene:

$$V_R = RC\,\frac{dV_C}{dt} \qquad \ldots (6)$$

de las ecuaciones (2), (3) y (4):

$$V_L = LC\,\frac{d^2V_C}{dt^2} \qquad \ldots (7)$$

sustituyendo en (5), las ecuaciones (6) y (7):

$$LC\,\frac{d^2V_C}{dt^2} + RC\,\frac{dV_C}{dt} + V_C = V(t) \qquad \ldots (8)$$

esta última ecuación es el modelo matemático final en función de V_C. Presentándolo en forma normalizada se tiene:

$$\boxed{\frac{d^2V_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\,\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{LC}\,V_C = \frac{1}{LC}\,V(t)} \qquad \ldots (I)$$

b) En función de i_L. De las ecuaciones (1) y (4), se tiene:

$$V_R = Ri_L \qquad \ldots (9)$$

de las ecuaciones (3) y (4):

$$V_C = \frac{1}{C}\int_0^t i_L(t')\, dt' \qquad \ldots (10)$$

sustituyendo las ecuaciones (2), (9) y (10) en (5):

$$Ri_L + L\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i_L(t')\, dt' = V(t) \qquad (11)$$

La ecuación (11) representa el modelo matematico en función de i_L, sin embargo es una ecuación integrodiferencial y puede ser representada en forma diferencial. Este problema se resuelve dericando la ecuación (11) con respecto al tiempo, de donde se obtiene:

$$R\frac{di_L}{dt} + L\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{C}i_L = \dot{V}(t) \qquad \ldots (12)$$

donde:

$$\dot{V}(t) = \frac{dV(t)}{dt} \qquad \ldots (13)$$

normalizando la ecuación (12) se tiene que el modelo en función de i_L es:

$$\boxed{\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC}i_L = \frac{1}{L}\dot{V}(t)} \qquad \ldots (II)$$

Comparando los coeficientes del primer miembro de las ecuaciones (I) y (II), se puede observar que son idénticos. Por lo que se puede deducir una característica muy importante que se cumple en general para cualquier tipo de sistema, esto es, los coeficientes de las ecuaciones diferenciales que sirven para representar el comportamiento de un sistema son siempre idénticos, sin importar la variable que se seleccione para modelarlo.

En la tabla II.9 se presentan algunos ejemplos de sistemas eléctricos y sus modelos matemáticos.

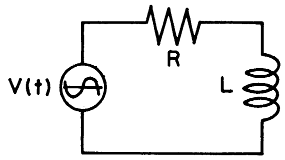
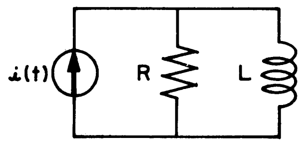
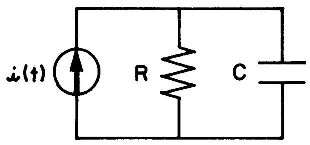
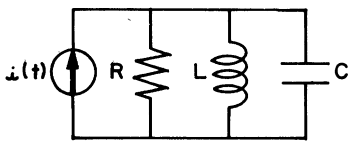
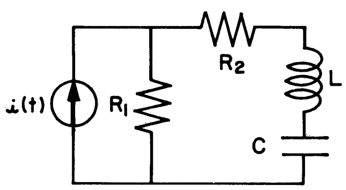
S I S T E M A	M O D E L O
	$\frac{di_L}{dt} + \frac{R}{L} i_L = \frac{1}{L} V(t)$
	$\frac{di_L}{dt} + \frac{R}{L} i_L = \frac{R}{L} i(t)$
	$\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{RC} V_C = \frac{1}{C} i(t)$
	$\frac{d^2V_C}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{LC} V_C = \frac{1}{C} i'(t)$ $\frac{d^2i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L = \frac{1}{CL} i(t)$
	$\frac{d^2V_C}{dt^2} + \frac{R_1 + R_2}{L}\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{LC} V_C = \frac{R_1}{LC} i(t)$ $\frac{d^2i_L}{dt^2} + \frac{R_1 + R_2}{L}\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L = \frac{R_1}{\text{[illegible]}} i'(t)$

Tabla II.9

II.5 Sistemas Mecánicos

Como se mencionó con anterioridad los hay de dos tipos: los traslacionales y los rotacionales. Al igual que en los sistemas eléctricos, en este caso se estudiarán los sistemas mecánicos más simples.

SISTEMAS MECANICOS TRASLACIONALES

En este tipo de sistemas las variables de interés son desplazamiento, velocidad, aceleración y fuerza.

A fin de ilustrar el procedimiento para obtener modelos matemáticos de este tipo de sistemas se presentan algunos ejemplos.

Ejemplo II.8

Obtener un modelo matemático del sistema mecánico formado por un resorte, dos amortiguadores, una masa y una fuerza externa como se muestra en la figura:

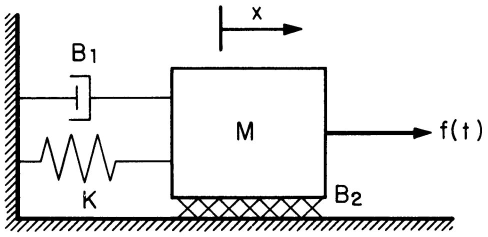


Figura II.41

Solución:

1. Selección de variables. Para el sistema considerado se empleará como variable el desplazamiento de la masa (x), ya que a partir de éste, se pueden conocer la velocidad, la aceleración y todas las fuerzas que intervienen en el sistema.

2. **Leyes de Elementos.** El sistema mecánico considerado.está constituido por cuatro elementos (un resorte, dos amortiguadores y una masa), por lo que habrá cuatro ecuaciones de elementos, éstas son:

$$f_K = K\,x \qquad \ldots (1)$$

$$f_{B1} = B_1 \frac{dx}{dt} \qquad \ldots (2)$$

$$f_{B2} = B_2 \frac{dx}{dt} \qquad \ldots (3)$$

$$f_M = M \frac{d^2x}{dt^2} \qquad \ldots (4)$$

3. **Leyes de Conjunto.** Para plantear las ecuaciones de equilibrio de este sistema es necesario dibujar un diagrama de cuerpo libre con base en la tercera ley de Newton, siendo éste:

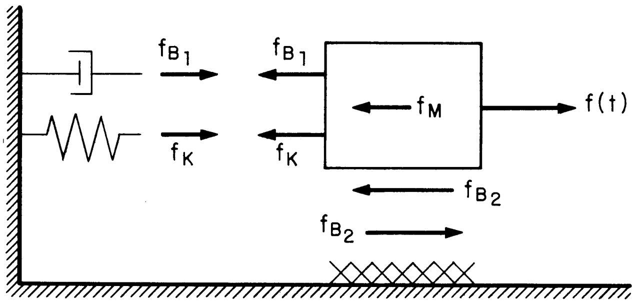


Figura II.42

Aplicando el principio de D'Alembert, la ecuación de equilibrio para el sistema es:

$$-f_K - f_{B1} - f_{B2} - f_M + f(t) = 0 \qquad \ldots (5)$$

4. Obtención del modelo matemático. Sustituyendo las ecuaciones (1), (2), (3) y (4) en la (5):

$$-Kx - B_1\frac{dx}{dt} - B_2\frac{dx}{dt} - M\,\frac{d^2x}{dt^2} + f(t) = 0 \quad \ldots (6)$$

o bien:

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + (B_1 + B_2) \frac{dx}{dt} + Kx = f(t) \qquad \ldots (7)$$

Esta ecuación es el modelo matemático que define el comportamiento del sistema, representándolo en forma normalizada se tiene:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{B_1 + B_2}{M} \frac{dx}{dt} + \frac{K}{M} x = \frac{1}{M} f(t)}$$

Ejemplo II.9

Obtener un modelo matemático que represente el comportamiento del sistema mecánico de la figura, formado por dos resortes, un amortiguador, dos masas y una fuerza externa (f(t)).

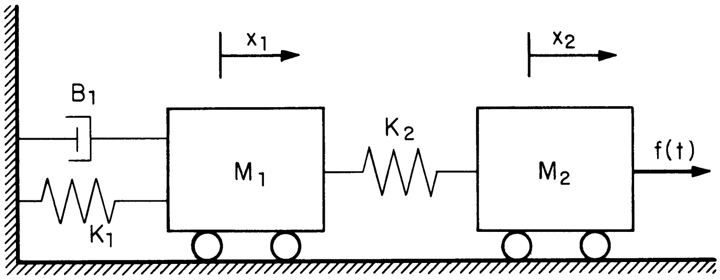


Figura II.43

Solución:

1. Selección de variables. Del sistema considerado se pueden emplear como variables el desplazamiento de la masa M_1 (x_1) o el desplazamiento de la masa M_2 (x_2). Puesto que para la obtención del modelo matemático se puede emplear alguna de las dos variables, se plantearán dos modelos: uno en función del desplazamiento x_1 y otro en función del desplazamiento x_2.

2. **Leyes de Elementos:**

$$f_{K_1} = K_1 x_1 \qquad \ldots (1)$$

$$f_{B_1} = B_1 \frac{dx_1}{dt} \qquad \ldots (2)$$

$f_{K_2} = K_2 x_{K_2}$: el desplazamiento al que está sometido el resorte K_2 es una diferencia de desplazamientos, esto es, el resorte K_2 está conectado a la masa M_1 y a la masa M_2 y debido a que las masas tienen diferente desplazamiento, la fuerza del resorte K_2 depende de K_2, x_2 y x_1. Considerando que x_2 es mayor que x_1, la fuerza del resorte dos está dada por la ecuación:

$$f_{K_2} = K_2(x_2 - x_1) \qquad \ldots (3)$$

$$f_{M_1} = M_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} \qquad \ldots (4)$$

$$f_{M_2} = M_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} \qquad \ldots (5)$$

3. Leyes de Conjunto. Dibujando los diagramas de cuerpo libre respectivos se tiene:

D.C.L. Para M_1:

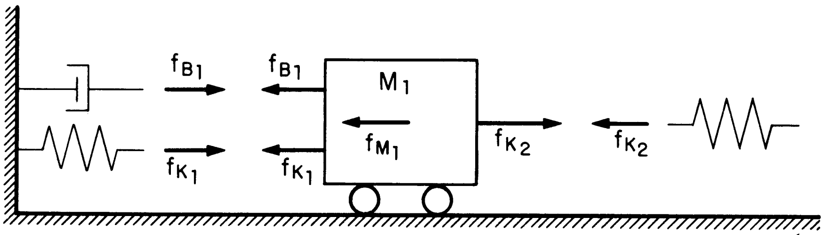


Figura II.44

Así la primera ecuación de equilibrio es:

$$-f_{K_1} - f_{B_1} - f_{M_1} + f_{K_2} = 0 \qquad \ldots (6)$$

D.C.L. Para M_2:

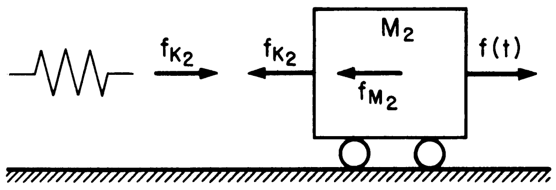


Figura II.45

La segunda ecuación de equilibrio es:

$$-f_{K_2} - f_{M_2} + f(t) = 0 \qquad \dots (7)$$

4. Obtención del modelo matemático.

Sustituyendo las ecuaciónes (1), (2), (3) y (4) en la (6):

$$-K_1x_1 - B_1 \frac{dx_1}{dt} - M_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} + K_2(x_2 - x_1) = 0 \qquad \dots (8)$$

o bien:

$$M_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} + B_1 \frac{dx_1}{dt} + (K_1 + K_2)x_1 = K_2\ x_2 \qquad \dots (9)$$

sustituyendo las ecuaciones (3) y (5) en la (7):

$$-K_2(x_2 - x_1) - M_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} + f(t) = 0 \qquad \dots (10)$$

o bien:

$$M_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} + K_2\ x_2 - K_2\ x_1 = f(t) \qquad \dots (11)$$

a) En función del desplazamiento x_1. De la ecuación (9):

$$x_2 = \frac{M_1}{K_2} \frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{B_1}{K_2} \frac{dx_1}{dt} + \frac{K_1 + K_2}{K_2}\ x_1 \qquad \dots (12)$$

sustituyendo la ecuación (12) en la (11) y agrupando los términos se tiene:

$$\frac{M_1M_2}{K_2} \frac{d^4x_1}{dt^4} + \frac{M_2B_1}{K_2} \frac{d^3x_1}{dt^3} + \left[\frac{M_1K_2 + M_2(K_1 + K_2)}{K_2}\right] \frac{d^2x_1}{dt^2} + B_1 \frac{dx_1}{dt} + K_1x_1 = f(t)$$

$$\dots (13)$$

esta ecuación es el modelo matemático en función de x_1. Normalizando:

$$\boxed{\frac{d^4x_1}{dt^4} + \frac{B_1}{M_1}\frac{d^3x_1}{dt^3} + \left[\frac{K_2}{M_2} + \frac{K_1 + K_2}{M_1}\right]\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{B_1K_2}{M_1M_2}\frac{dx_1}{dt} + \frac{K_1K_2}{M_1M_2}x_1 = \frac{K_2}{M_1M_2}f(t)}$$

... (I)

b) En función del desplazamiento x_2. De la ecuación (11):

$$x_1 = \frac{M_2}{K_2}\frac{d^2x_2}{dt^2} + x_2 - \frac{1}{K_2}f(t) \qquad \text{... (14)}$$

sustituyendo la ecuación (14) en la (9) y agrupando los términos se tiene:

$$\frac{M_1M_2}{K_2}\frac{d^4x_2}{dt^4} + \frac{M_2B_1}{K_2}\frac{d^3x_2}{dt^3} + \left[\frac{M_1K_2 + M_2(K_1 + K_2)}{K_2}\right]\frac{d^2x_2}{dt^2} + B_1\frac{dx_2}{dt} + K_1x_2 =$$

$$= \frac{M_1}{K_2}\ddot{f}(t) + \frac{B_1}{K_2}\dot{f}(t) + \frac{K_1 + K_2}{K_2}f(t) \qquad \text{... (15)}$$

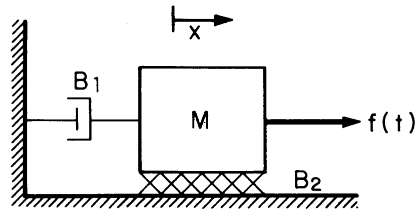
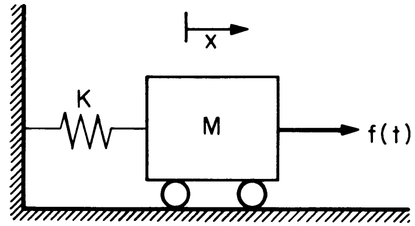
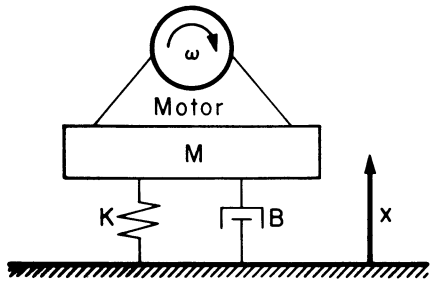
esta ecuación es el modelo matemático en función de x_2. Normalizando

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{d^4x_2}{dt^4} + \frac{B_1}{M_1}\frac{d^3x_2}{dt^3} + \left[\frac{K_2}{M_2} + \frac{K_1 + K_2}{M_1}\right]\frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{B_1K_2}{M_1M_2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{K_1K_2}{M_1M_2}x_2 = \frac{1}{M_2}\ddot{f}(t) + \\ + \frac{B_1}{M_1M_2}\dot{f}(t) + \frac{K_1 + K_2}{M_1M_2}f(t)\end{gathered}}$$

... (II)

Para este caso se puede verificar que los coeficientes del primer miembro de las ecuaciones (I) y (II) son idénticos.

En la tabla II.10 se presentan algunos ejemplos de sistemas mecánicos traslacionales y sus modelos matemáticos.

SISTEMA	MODELO
	$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{B_1 + B_2}{M} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{M} f(t)$ $\frac{dv}{dt} + \frac{B_1 + B_2}{M} v = \frac{1}{M} f(t)$
	$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{M} x = \frac{1}{M} f(t)$
	$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{B}{M} \frac{dx}{dt} + \frac{K}{M} x = \frac{1}{M} \text{sen } \omega t$

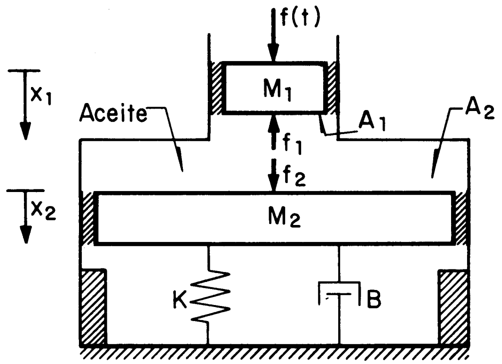
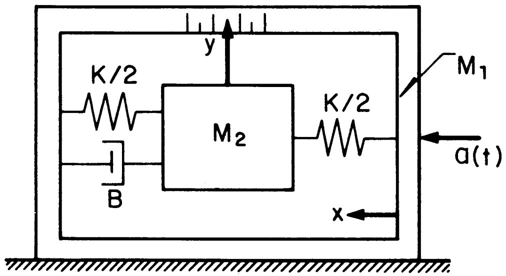
 $A_1x_1 = A_2x_2$ $\qquad \frac{f_1}{A_1} = P = \frac{f_2}{A_2}$ Prensa hidráulica	$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{A_1^2\,B}{A_1^2M_2 + A_2^2M_2}\frac{dx_1}{dt} + \frac{A_1^2\,K}{A_1^2M_2 + A_2^2M_1}x_1 = \frac{A_2^2}{A_1^2M_2 + A_2^2M_1}f(t)$ $\frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{A_1^2\,B}{A_1^2M_2 + A_2^2M_1}\frac{dx_2}{dt} + \frac{A_1^2\,K}{A_1^2M_2 + A_2^2M_1}x_2 = \frac{A_1\,A_2}{A_1^2M_2 + A_2^2M_1}f(t)$
 Acelerómetro	$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{B}{M_2}\frac{dy}{dt} + \frac{K}{M_2}y = \frac{M_1 + M_2}{M_2}a(t)$

Tabla II.10

En este tipo de sistemas las variables de interés son desplazamiento, velocidad y aceleración angular, además de par.

Con el fin de ilustrar el procedimiento para obtener modelos matemáticos de este tipo de sistemas a continuación se presentan algunos ejemplos.

Ejemplo II.10

Obtener un modelo matemático del sistema mecánico rotacional formado por un resorte rotacional, un amortiguador rotacional, una inercia y un par externo T(t) como se muestra en la figura:

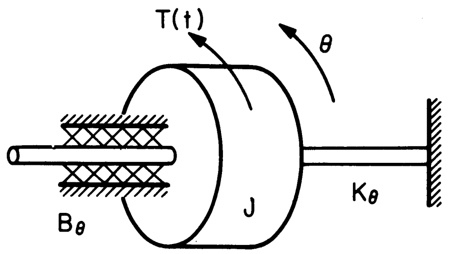


Figura II.46

Solución:

1. Selección de variables. Para el sistema mecánico que se ha considerado, el modelo matemático puede ser planteado en función del desplazamiento angular de la inercia J (θ) o en función del par en el resorte. Para este caso se selecciona el desplazamiento angular.

2. Leyes de Elementos. Puesto que el sistema en cuestión está formado por tres elementos se plantearán tres ecuaciones independientes, una para cada elemento, éstas son:

$$T_{K_\theta} = K_\theta \, \theta \qquad \dots (1)$$

$$T_{B_\theta} = B_\theta \frac{d\theta}{dt} \qquad \ldots (2)$$

$$T_J = J \frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad \ldots (3)$$

3. **Leyes de Conjunto.** Para poder plantear las ecuaciones de equilibrio del sistema, es nece sario dibujar un diagrama de cuerpo libre con base en la tercera ley de Newton. El diagrama de cuerpo libre es:

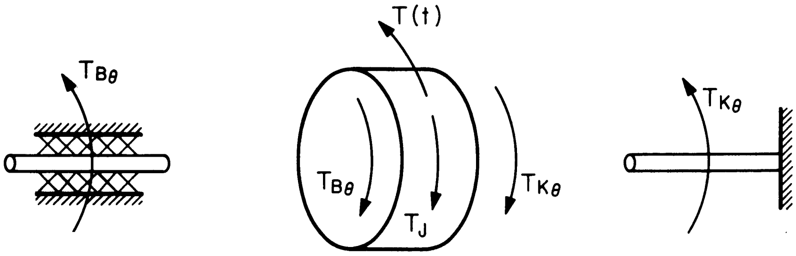


Figura II.47

Aplicando el principio de D'Alembert, se tiene que la ecuación de equilibrio es:

$$T(t) - T_{K_\theta} - T_J - T_{B_\theta} = 0 \qquad \ldots (4)$$

4. **Obtención del modelo matemático.** Para obtener el modelo matemático final se deben sustituir las ecuaciones (1), (2) y (3) en la (4):

$$T(t) - K_\theta\,\theta - J\frac{d^2\theta}{dt^2} - B_\theta \frac{d\theta}{dt} = 0 \qquad \ldots (5)$$

Esta ecuación es el modelo matemático que sirve para representar al sistema mecánico. En forma normalizada se tiene:

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{B_\theta}{J}\frac{d\theta}{dt} + \frac{K_\theta}{J}\,\theta = \frac{1}{J}\,T(t)}$$

Ejemplo II.11

Obtener un modelo matemático del sistema mecánico que se muestra en la figura, formado por tres resortes rotacionales, dos amortiguadores rotacionales y dos inercias. Como entrada se aplica un desplazamiento angular θ_i:

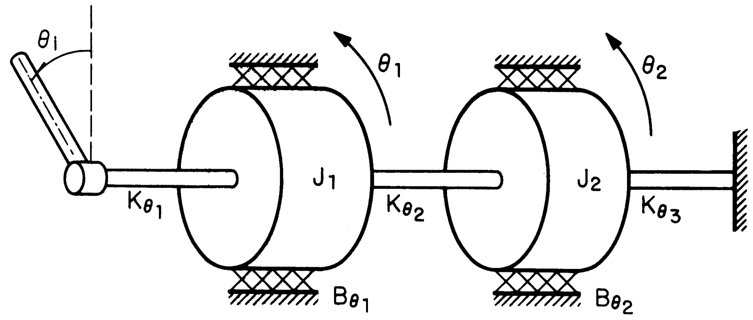


Figura II.48

Solución:

1. **Selección de variables. Debido a que intervienen dos desplazamientos angulares θ_1 y θ_2, cualquiera de éstos puede ser seleccionado como variable. Se obtendrán dos modelos, uno en función de θ_1 y otro en función de θ_2.**

2. **Leyes de Elementos.** $T_{K_{\theta 1}} = K_{\theta 1}\,\theta_{K_{\theta 1}}$: en este caso el resorte $K_{\theta 1}$ está sometido a dos desplazamientos angulares, por lo que el par debido al resorte será la constante $K_{\theta 1}$, por el desplazamiento diferencial $\theta_{K_{\theta 1}} = \theta_i - \theta_1$. A fin de evitar confusiones, este par se puede descomponer como:

$$T_i = K_{\theta 1}\,\theta_i \qquad \ldots (1)$$

$$T_{K_{\theta 1}} = K_{\theta 1}\,\theta_1 \qquad \ldots (2)$$

$$T_{B_{\theta 1}} = B_{\theta 1}\,\frac{d\theta_1}{dt} \qquad \ldots (3)$$

$$T_{J_1} = J_1\,\frac{d^2\theta_1}{dt^2} \qquad \ldots (4)$$

$T_{K\theta 2} = K_{\theta 2}\,\theta_{K\theta 2}$: aquí el resorte $K_{\theta 2}$ está sometido a dos desplazamientos angulares, así $\theta_{K\theta 2} = \theta_1 - \theta_2$:

$$T_{K\theta_2} = K_{\theta 2}\,(\theta_1 - \theta_2) \qquad \ldots (5)$$

$$T_{B\theta_2} = B_{\theta 2}\,\frac{d\theta_2}{dt} \qquad \ldots (6)$$

$$T_{J_2} = J_2\,\frac{d^2\theta_2}{dt^2} \qquad \ldots (7)$$

$$T_{K\theta_3} = K_{\theta_3}\,\theta_2 \qquad \ldots (8)$$

3. Leyes de Conjunto. Dibujando los diagramas de cuerpo libre se tiene:

Para J_1:

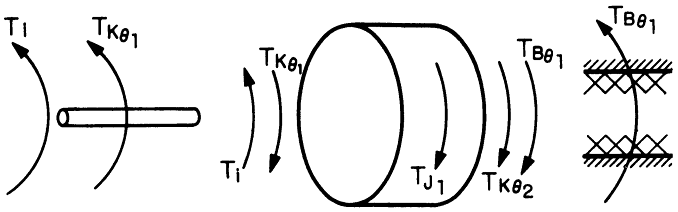


Figura II.49

La ecuación de equilibrio es:

$$T_i - T_{K_{\theta 1}} - T_{J1} - T_{K_{\theta 2}} - T_{B_{\theta 1}} = 0 \ldots (9)$$

Para J_2:

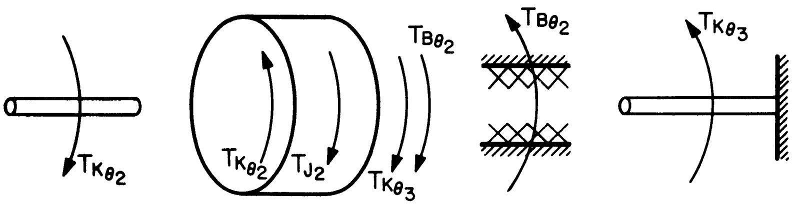


Figura II.50

La ecuación de equilibrio es:

$$T_{K\theta 2} - T_{J2} - T_{K\theta 3} - T_{B\theta 2} = 0 \qquad \ldots (10)$$

4. **Obtención del modelo matemático.**

Sustituyendo las ecuaciones (1), (2), (3), (4) y (5) en la (9):

$$J_1 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + B_{\theta 1} \frac{d\theta_1}{dt} + (K_{\theta 1} + K_{\theta 2})\theta_1 - K_{\theta 2}\, \theta_2 = K_{\theta 1}\, \theta_i \qquad \ldots (11)$$

Por otra parte, sustituyendo las ecuaciones (5), (6), (7) y (8) en la (10), se tiene:

$$J_2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} + B_{\theta 2} \frac{d\theta_2}{dt} + (K_{\theta 2} + K_{\theta 3})\theta_2 = K_{\theta 2}\, \theta_1 \qquad \ldots (12)$$

a) En función del desplazamiento angular θ_1, de la ecuación (11):

$$\theta_2 = \frac{J_1}{K_{\theta 2}} \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + \frac{B_{\theta 1}}{K_{\theta 2}} \frac{d\theta_1}{dt} + \frac{K_{\theta 1} + K_{\theta 2}}{K_{\theta 2}}\, \theta_1 - \frac{K_{\theta 1}}{K_{\theta 2}}\, \theta_i \ldots (13)$$

sustituyendo la ecuación (13) en la (12) se tiene:

$$\frac{J_1 J_2}{K_{\theta 2}} \frac{d^4\theta_1}{dt^4} \quad \frac{J_1 B_{\theta_2} + J_2 B_{\theta_1}}{K_{\theta 2}} \frac{d^3\theta_1}{dt^3} + \frac{J_1(K_{\theta 2} + K_{\theta 3})}{K_{\theta 2}} +$$

$$+ \frac{B_{\theta_1} B_{\theta_2} + J_2(K_{\theta_1} + K_{\theta_2})}{K_{\theta 2}} \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + \frac{(K_{\theta_2} + K_{\theta_3})B_{\theta_1} + (K_{\theta_1} + K_{\theta_2})B_{\theta_2}}{K_{\theta 2}} \frac{d\theta_1}{dt}$$

$$+ \frac{(K_{\theta_1} + K_{\theta_2})(K_{\theta_2} + K_{\theta_3})}{K_{\theta 2}}\, \theta_1 = K_{\theta 2}\, \theta_1 + J_2 \frac{K_{\theta 1}}{K_{\theta 2}}\, \ddot{\theta}_i +$$

$$+ B_{\theta 2} \frac{K_{\theta 1}}{K_{\theta 2}}\, \dot{\theta}_i + \frac{K_{\theta 1}}{K_{\theta 2}} (K_{\theta 2} + K_{\theta 3})\theta_i \qquad \ldots (14)$$

Reordenando y normalizando esta ecuación se tiene que el modelo matemático final en función del desplazamiento angular θ_1 es:

$$\frac{d^4\theta_1}{dt^4} + \left[\frac{J_1B_{\theta 2} + J_2B_{\theta 1}}{J_1J_2}\right]\frac{d^3\theta_1}{dt^3} +$$

$$+ \left[\frac{J_1(K_{\theta 2} + K_{\theta 3}) + B_{\theta 1}B_{\theta 2} + J_2(K_{\theta 1} + K_{\theta 2})}{J_1\,J_2}\right]\frac{d^2\theta_1}{dt^2} +$$

$$+ \left[\frac{(K_{\theta 2} + K_{\theta 3})B_{\theta 1} + (K_{\theta 1} + K_{\theta 2})B_{\theta 2}}{J_1\,J_2}\right]\frac{d\theta_1}{dt} +$$

$$+ \left[\frac{(K_{\theta 1} + K_{\theta 2})(K_{\theta 2} + K_{\theta 3}) - K_{\theta 2}^2}{J_1\,J_2}\right]\theta_1 =$$

$$= \frac{K_{\theta 1}}{J_1}\ddot{\theta}_i + \frac{K_{\theta 1}B_{\theta 2}}{J_1J_2}\dot{\theta}_i + \frac{K_{\theta 1}(K_{\theta 2} + K_{\theta 3})}{J_1\,J_2}\theta_i$$

... (I)

b) En función del desplazamiento angular θ_2.

De la ecuación (12):

$$\theta_1 = \frac{J_2}{K_{\theta 2}}\frac{d^2\theta_2}{dt^2} + \frac{B_{\theta 2}}{K_{\theta 2}}\frac{d\theta_2}{dt} + \frac{K_{\theta 2} + K_{\theta 3}}{K_{\theta 2}}\theta_2 \qquad \text{... (15)}$$

sustituyendo la ecuación (15) en la (11), reordenando y normalizando se tiene que el modelo matemático en función del desplazamiento angular θ_2 es:

$$\frac{d^4\theta_2}{dt^4} + \left[\frac{J_1B_{\theta 2} + J_2B_{\theta 1}}{J_1\,J_2}\right]\frac{d^3\theta_2}{dt^3} +$$

$$+ \left[\frac{J_1(K_{\theta 2} + K_{\theta 3}) + B_{\theta 1}B_{\theta 2} + J_2(K_{\theta 1} + K_{\theta 2})}{J_1\,J_2}\right]\frac{d^2\theta_2}{dt^2}$$

$$+ \left[\frac{(K_{\theta 2} + K_{\theta 3})B_{\theta 1} + (K_{\theta 1} + K_{\theta 2})B_{\theta 2}}{J_1\,J_2}\right]\frac{d\theta_2}{dt}$$

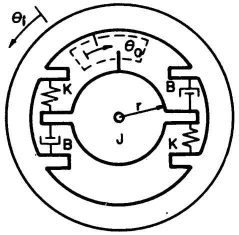
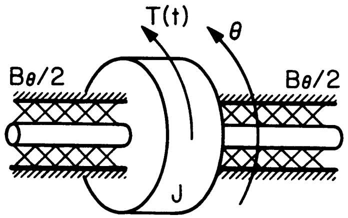
$$+ \left[\frac{(K_{\theta 1} + K_{\theta 2})(K_{\theta 2} + K_{\theta 3}) - K_{\theta 2}^2}{J_1\,J_2}\right]\theta_2 =$$

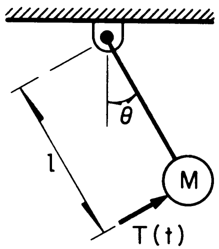
$$= \frac{K_{\theta 1}K_{\theta 2}}{J_1J_2}\theta_i$$

... (II)

Comparando los coeficientes del primer miembro de las ecuaciones (I) y (II) se observa que éstos son idénticos.

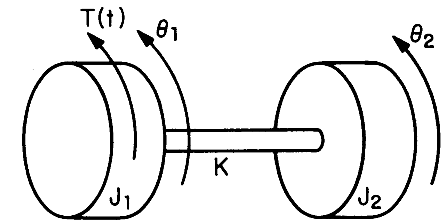
En la tabla II.11 se presentan algunos ejemplos de sistemas mecánicos rotacionales y sus modelos matemáticos.

<table>
<tr><th>S I S T E M A</th><th>M O D E L O</th></tr>
<tr><td>
</td><td>$$\frac{d^2\theta_0}{dt^2} + \frac{2Br^2}{J}\frac{d\theta_0}{dt} + \frac{2Kr^2}{J}\theta_0 = \ddot{\theta}_i$$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{B_\theta}{J}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{J}\,T(t)$$

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{B_\theta}{J}\,\omega = \frac{1}{J}\,T(t)$$</td></tr>
<tr><td>

$J = M l^2$

Péndulo</td><td>$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\,\text{sen}\,\theta = \frac{T(t)}{M\ell^2}$$</td></tr>
</table>



$$\frac{d^4\theta_1}{dt^4} + \frac{K(J_1 + J_2)}{J_1 J_2}\frac{d^2\theta_1}{dt^2} = \frac{1}{J_1}\ddot{T}(t) + \frac{K}{J_1 J_2}T(t)$$

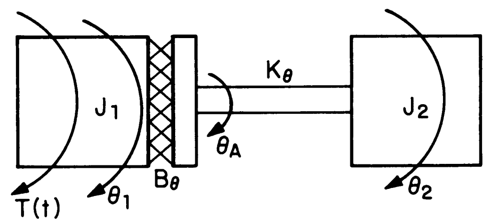
o bien:

$$\frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + \frac{K(J_1 + J_2)}{J_1 J_2}\alpha_1 = \frac{1}{J_1}\ddot{T}(t) + \frac{K}{J_1 J_2}T(t)$$

$$\frac{d^4\theta_2}{dt^4} + \frac{K(J_1 + J_2)}{J_1 J_2}\frac{d^2\theta_2}{dt^2} = \frac{K}{J_1 J_2}T(t)$$

o bien:

$$\frac{d^2\alpha_2}{dt^2} + \frac{K(J_1 + J_2)}{J_1 J_2}\alpha_2 = \frac{K}{J_1 J_2}T(t)$$



Embrague

$$\frac{d^4\theta_1}{dt^4} + \frac{K_\theta}{B_\theta}\frac{d^3\theta_1}{dt^3} + K_\theta\frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2}\frac{d^2\theta_1}{dt^2} =$$

$$= \frac{1}{J_1}\ddot{T}(t) + \frac{K_\theta}{J_1 B_\theta}\dot{T}(t) + \frac{K_\theta}{J_1 J_2}T(t)$$

$$\frac{d^4\theta_2}{dt^4} + \frac{K_\theta}{B_\theta}\frac{d^3\theta_2}{dt^3} + K_\theta\frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2}\frac{d^2\theta_2}{dt^2} = \frac{K_\theta}{J_1 J_2}T(t)$$

Tabla II.11

II.6 SISTEMAS HIDRÁULICOS

En estos sistemas las variables de interés son presión y gasto, sin embargo se debe tener en cuenta que los modelos matemáticos para estos casos suelen plantearse en función de la altura de la columna del fluido de sistema, ya que a partir de ésta se pueden obtener dichas variables.

A continuación se presentan algunos ejemplos de sistemas hidráulicos, a fin de ilustrar cómo se obtienen sus modelos matemáticos.

Ejemplo II.12

Obtener un modelo matemático para el sistema hidráulico que se muestra en la figura:

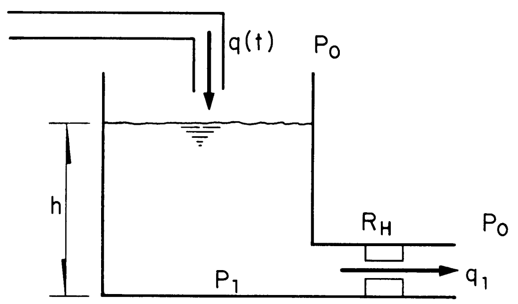


Figura II.51

A: es el área de la sección transversal del tanque.

Solución:

1. Selección de variables. En este sistema hidráulico son dos las variables que se pueden emplear para modelarlo; una es la altura del fluido y la otra es la presión en el fondo del tanque. Para este ejemplo se obtendrá primero un modelo en función de la altura del fluido y otro en función de la presión en el fondo del tanque.

2. Leyes de Elementos. Las ecuaciones de los elementos para el sistema considerado son:

$$q_1 R_H = P_1 - P_0 \qquad \ldots (1)$$

$$\frac{dP_1}{dt} = \frac{1}{C_H} q_{NET} \qquad \ldots (2)$$

3. Leyes de Conjunto. Las ecuaciones de equilibrio son:

$$\frac{dv}{dt} = \Sigma q_e - \Sigma q_s \qquad \ldots (3)$$

$$\Sigma q_e = q(t) \qquad \ldots (4)$$

$$\Sigma q_s = q_1 \qquad \ldots (5)$$

$$q_{NET} = \Sigma q_e - \Sigma q_s \qquad \ldots (6)$$

por otra parte haciendo la suma de presiones se tiene:

$$P_1 - P_0 - P_h = 0 \qquad \ldots (7)$$

$$P_h = \rho g h \qquad \ldots (8)$$

donde:

ρ: es la densidad del fluido

g: es la aceleración de la gravedad

4. Obtención del modelo matemático.

a) En función de la altura del fluido. De la ecuación (1):

$$q_1 = \frac{1}{R_H} (P_1 - P_0) \qquad \ldots (9)$$

de las ecuaciones (7) y (8), se tiene:

$$P_1 - P_0 = \rho g h \qquad \ldots (10)$$

sustituyendo la ecuación (10) en la (9):

$$q_1 = \frac{1}{R_H} \rho g h \qquad \ldots (11)$$

o bien:

$$q_1 = \frac{\gamma}{R_H} h \qquad \ldots (12)$$

donde:

γ: es el peso específico del fluido

sustituyendo la ecuación (12) en la (5):

$$\Sigma q_s = \frac{\gamma}{R_H} h \qquad \ldots (13)$$

y recordando que $v = Ah$ se obtiene:

$$\frac{dv}{dt} = A \frac{dh}{dt} \qquad \ldots (14)$$

sustituyendo las ecuaciones (4), (13), y (14) en la (3):

$$A \frac{dh}{dt} + \frac{\gamma}{R_H} h = q(t) \qquad \ldots (15)$$

normalizando:

$$\boxed{\frac{dh}{dt} + \frac{\gamma}{AR_H} h = \frac{1}{A} q(t)} \qquad \ldots (I)$$

La ecuación (I) representa el modelo matemático del sistema en función de la altura de la columna del fluido (h)

b) En función de las variaciones de presión en el fondo del tanque. De las ecuaciones (2) y (6) se tiene:

$$C_H \frac{dP_1}{dt} = q(t) - q_1 \qquad \text{... (16)}$$

y sustituyendo la ecuación (9) en la (16):

$$C_H \frac{dP_1}{dt} = q(t) - \frac{1}{R_H}(P_1 - P_0) \qquad \text{... (17)}$$

Reordenando y normalizando esta ecuación se tiene que el modelo matemático en función de P_1 para el sistema hidráulico es:

$$\boxed{\frac{dP_1}{dt} + \frac{1}{R_H C_H} P_1 = \frac{1}{C_H} q(t) + \frac{1}{C_H R_H} P_0} \qquad \text{... (II)}$$

de las ecuaciones (I) y (II) se puede deducir que la capacitancia hidráulica es:

$$C_H = \frac{A}{\gamma}$$

Como se estableció con anterioridad, los coeficientes del primer miembro de ambas ecuaciones (I) y (II) deben ser idénticas.

Ejemplo II.13

Obtener el modelo matemático del sistema hidráulico mostrado en la siguiente figura:

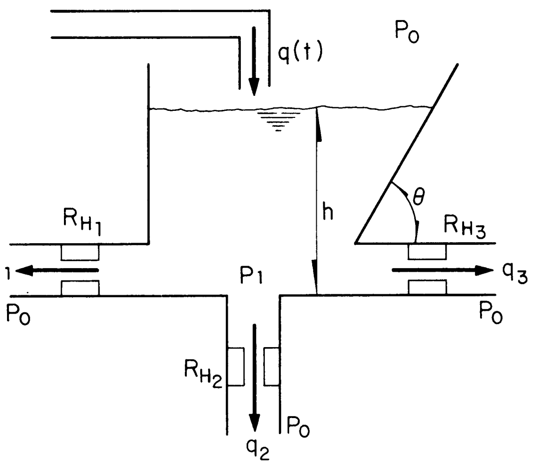


Figura II.52

Para obtener la expresión del volumen del tanque considere la siguiente figura:

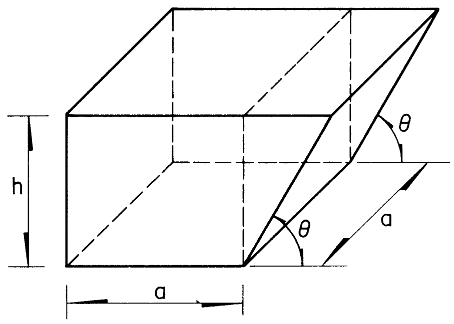


Figura II.53

Considérese como variable para la obtención del modelo matemático, la altura de la columna del fluido (h).

Solución:

1. **Selección de variables. Del enunciado del problema la variable para modelar al sistema es: "h".**

2. Leyes de Elementos:

$$R_{H_1}\, q_1 = P_1 - P_0 \qquad \ldots (1)$$

$$R_{H_2}\, q_2 = P_1 - P_0 \qquad \ldots (2)$$

$$R_{H_3}\, q_3 = P_1 - P_0 \qquad \ldots (3)$$

3. Leyes de Conjunto:

$$\frac{dv}{dt} = \Sigma\, q_e - \Sigma\, q_s \qquad \ldots (4)$$

$$\Sigma\, q_e = q(t) \qquad \ldots (5)$$

$$\Sigma\, q_s = q_1 + q_2 + q_3 \qquad \ldots (6)$$

$$P_1 - P_0 - P_h = 0 \qquad \ldots (7)$$

$$P_h = \rho\, g\, h \qquad \ldots (8)$$

4. Obtención del modelo matemático. De las ecuaciones (7) y (8) se tiene:

$$P_1 - P_0 = \rho . g\, h \qquad \ldots (9)$$

o bien:

$$P_1 - P_0 = \gamma\, h \qquad \ldots (10)$$

sustituyendo la ecuación (10) en (1), (2), y (3), se tiene:

$$q_1 = \frac{\gamma}{R_{H_1}}\, h \qquad \ldots (11)$$

$$q_2 = \frac{\gamma}{R_{H_2}}\, h \qquad \ldots (12)$$

$$q_3 = \frac{\gamma}{R_{H_3}}\, h \qquad \ldots (13)$$

sustituyendo las ecuaciones (11), (12) y (13) en la (6):

$$\Sigma\, q_s = \gamma\, h \left[\frac{1}{R_{H_1}} + \frac{1}{R_{H_2}} + \frac{1}{R_{H_3}} \right] \qquad \ldots (14)$$

sustituyendo las ecuaciones (5) y (14) en la (4):

$$\frac{dv}{dt} = q(t) - \gamma h \left[\frac{1}{R_{H1}} + \frac{1}{R_{H2}} + \frac{1}{R_{H3}}\right] \quad \ldots (15)$$

por otra parte el volumen del tanque es:

$$v = a^2 h + \frac{a h^2}{2 \tan \theta} \quad \ldots (16)$$

derivando la ecuación (16) con respecto al tiempo se tiene:

$$\frac{dv}{dt} = a^2 \frac{dh}{dt} + \frac{a h}{\tan \theta} \frac{dh}{dt} \quad \ldots (17)$$

$$\frac{dv}{dt} = \left[a^2 + \frac{a h}{\tan \theta}\right] \frac{dh}{dt} \quad \ldots (18)$$

sustituyendo la ecuación (18) en la (15), se obtiene el modelo matemático final para el sistema hidráulico considerado:

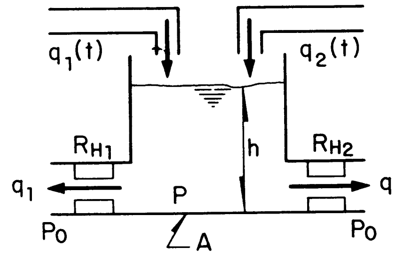
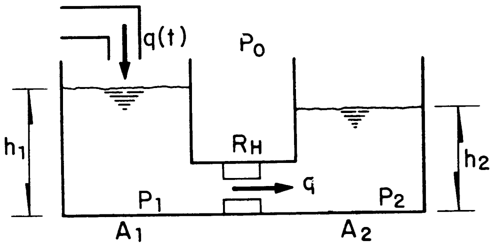
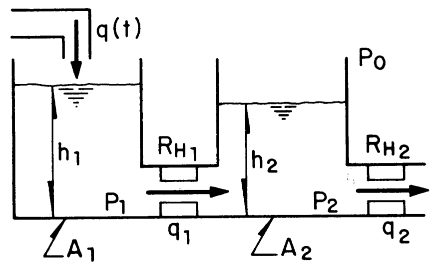
$$\left[a^2 + \frac{a h}{\tan \theta}\right] \frac{dh}{dt} + \gamma \left[\frac{1}{R_{H1}} + \frac{1}{R_{H2}} + \frac{1}{R_{H3}}\right] h = q(t) \quad \ldots (19)$$

normalizando:

$$\boxed{\frac{dh}{dt} + \gamma \left[\frac{1}{R_{H1}} + \frac{1}{R_{H2}} + \frac{1}{R_{H3}}\right] \frac{\tan \theta}{a^2 \tan \theta + a h} h = \frac{\tan \theta}{a^2 \tan \theta + a h} q(t)}$$

En este caso se trata de un modelo matemático no lineal.

En la tabla II.12 se presentan algunos ejemplos de sistemas hidráulicos y sus modelos matemáticos.

SISTEMA	MODELO
	$\frac{dh}{dt} + \frac{\gamma}{A}\left[\frac{1}{R_{H_1}} + \frac{1}{R_{H_2}}\right]h = \frac{1}{A}\,(q_1(t) + q_2(t))$
	$\frac{d^2h_1}{dt^2} + \frac{\gamma(A_1 + A_2)}{A_1A_2\ \ R_H}\ \frac{dh_1}{dt} = \frac{1}{A}\ \dot{q}(t) +$ $+ \frac{\gamma}{A_1A_2R_H}\ q(t)$ $\frac{d^2h_2}{dt^2} + \frac{\gamma(A_1 + A_2)}{A_1A_2\ \ R_H}\ \frac{dh_2}{dt} = \frac{\gamma}{A_1A_2\ \ R_H}\ q(t)$
	$\frac{d^2h_1}{dt^2} + \left[\frac{[(R_{H_1} + R_{H_2})A_1 + R_{H_2}A_2]\gamma}{A_1A_2\ R_{H_1}\ R_{H_2}}\right]\frac{dh_1}{dt} +$ $+ \frac{\gamma^2}{A_1A_2\ R_{H_1}\ R_{H_2}}\ h_1 = \frac{1}{A}\ \dot{q}(t) + \frac{(R_{H_1} + R_{H_2})\gamma}{A_1A_2\ \ R_{H_1}\ \ R_{H_2}}\ \ q(t)$ $\frac{d^2h_2}{dt^2} + \left[\frac{[(R_{H_1} + R_{H_2})A_1 + R_{H_2}A_2]\gamma}{A_1A_2\ R_{H_1}\ R_{H_2}}\right]\frac{dh_2}{dt} +$ $+ \frac{\gamma^2}{A_1A_2\ R_{H_1}\ R_{H_2}}\ h_2 = \frac{\gamma}{A_1A_1\ \ R_{H_2}}\ q(t)$

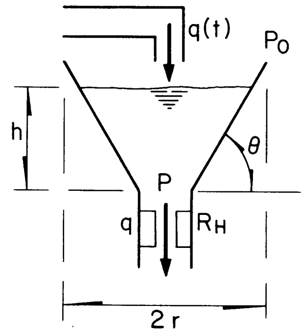
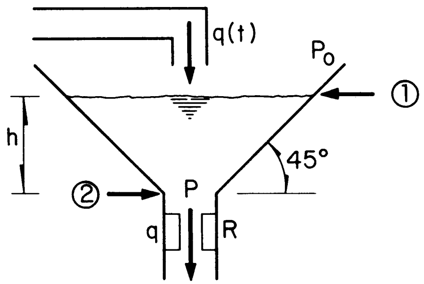
 	$$\frac{dh}{dt} + \frac{\gamma}{R_H \, \pi \operatorname{Cot}^2 \theta \, h} = \frac{q(t)}{\pi \operatorname{Cot}^2 \theta \, h^2}$$ (No lineal)
 El tanque es de sección cuadrada; la parte superior (1) mide a y la parte inferior (2) b.	$$(4h^2 + 4hb)\frac{dh}{dt} + \frac{\gamma}{R} h = q(t)$$ o bien: $$\frac{dh}{dt} + \frac{\gamma}{4R} \frac{1}{h+b} = \frac{1}{4(h^2+hb)} q(t)$$

Tabla II.12

II.7 Sistemas Térmicos

En estos sistemas las variables de interés son temperatura y flujo de calor, sin embargo se debe mencionar que en la mayoría de los casos, los modelos matemáticos se obtienen en función de la temperatura, ya que a partir de esta variable se obtiene el flujo de calor.

Con el fin de ilustrar el procedimiento para obtener modelos matemáticos de este tipo de sistemas se presentan algunos ejemplos.

Ejemplo II.14

Se desea modelar el flujo de calor en el túnel del metro de la Ciudad de México. Para tal fin, considere el diagrama esquemático de la figura:

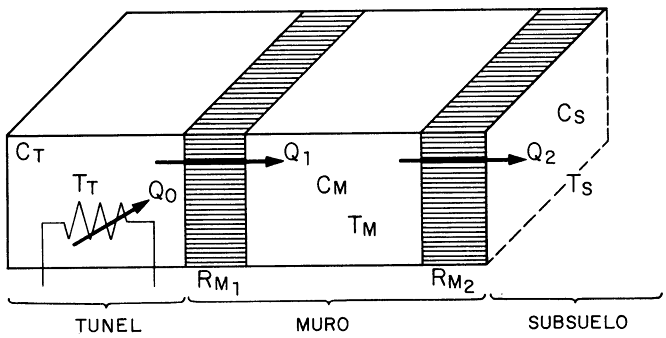


Figura II.54

Dentro del túnel se genera calor a una tasa Q_0; la pared de concreto se puede representar mediante dos resistencias térmicas (R_{M1} y R_{M2}) y una capacitancia térmica C_M (capacidad calorífica del muro). El subsuelo se supone de capacidad calorífica infinita (C_S) y tiene una temperatura T_S. C_T y T_T son la capacidad calorífica y temperatura del túnel respectivamente. Obtener un modelo matemático para el sistema.

Solución:

1. Selección de variables. Las variables que pueden ser empleadas para obtener el modelo matemático son la temperatura en el interior del túnel o la temperatura en el interior del muro. También sería posible obtener el modelo en función de la temperatura del subsuelo, pero en este caso, y debido a que la capacidad calorífica de éste es infinita, la temperatura del subsuelo es constante. Para este sistema se plantearán dos modelos matemáticos; uno en función de la temperatura del tunel T_T y en función de la temperatura del muro T_M.

2. Leyes de Elementos. Las ecuaciones de elemento para este sistema son:

$$R_{M1}\, Q_1 = T_T - T_M \qquad \ldots (1)$$

$$R_{M2}\, Q_2 = T_M - T_s \qquad \ldots (2)$$

3. Leyes de Conjunto. Las ecuaciones de equilibrio pueden ser planteadas con base en el caso particular de la primera ley de la termodinámica enunciada en la sección II.2. Esta ley establece en forma general:

$$C_T \frac{dT}{dt} = \Sigma\, Q_e - \Sigma\, Q_s \qquad \ldots (3)$$

y para este caso las ecuaciones de equilibrio son:

$$C_T \frac{dT_T}{dt} = Q_0 - Q_1 \qquad \ldots (4)$$

$$C_M \frac{dT_M}{dt} = Q_1 - Q_2 \qquad \ldots (5)$$

4. Obtención del modelo matemático.

De la ecuación (1);

$$Q_1 = \frac{1}{R_{M1}} (T_T - T_M) \qquad \ldots (6)$$

de la ecuación (2);

$$Q_2 = \frac{1}{R_{M2}} (T_M - T_s) \qquad \ldots (7)$$

sustituyendo la ecuación (6) en la (4):

$$C_T \frac{dT_T}{dt} = Q_0 - \frac{1}{R_{M1}} (T_T - T_M) \qquad \ldots (8)$$

sustituyendo las ecuaciones (6) y (7) en la (5) se tiene:

$$C_M \frac{dT_M}{dt} = \frac{1}{R_{M1}} (T_T - T_M) - \frac{1}{R_{M2}} (T_M - T_s) \qquad \ldots (9)$$

a) En función de la temperatura del túnel (T_T).

De la ecuación (8):

$$T_M = R_{M1}\, C_T \frac{dT_T}{dt} + T_T - R_{M1}\, Q_0 \qquad \ldots (10)$$

sustituyendo la ecuación (10) en la (9) se tiene:

$$R_{M1}\, C_M\, C_T \frac{d^2T_T}{dt^2} + \left[\frac{(R_{M1} + R_{M2})C_T + R_{M2}\, C_M}{R_{M2}} \right] \frac{dT_T}{dt} +$$

$$+ \frac{1}{R_{M2}} T_T = R_{M1}\, C_M\, \dot{Q}_0 + 1 + \frac{R_{M1}}{R_{M2}} Q_0 + \frac{1}{R} T_s \qquad \ldots (11)$$

Normalizando se tiene que el modelo matemático final en función de la temperatura en el interior del túnel es:

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{d^2T_T}{dt^2} + \left[\frac{(R_{M1} + R_{M2})C_T + R_{M2}C_M}{R_{M1}R_{M2}\ C_MC_T}\right]\frac{dT_T}{dt} + \frac{1}{R_{M1}R_{M2}\ C_MC_T}T_T = \frac{1}{C_T}\dot{Q}_0 \\ &+ \frac{R_{M1} + R_{M2}}{R_{M1}R_{M2}\ C_MC_T}Q_0 + \frac{1}{R_{M1}R_{M2}\ C_MC_T}T_s\end{aligned}} \quad \ldots \text{(I)}$$

b) En función de la temperatura del muro (T_M).

De la ecuación (9):

$$T_T = R_{M1}C_M\frac{dT_M}{dt} + \frac{R_{M1} + R_{M2}}{R_{M2}}T_M - \frac{R_{M1}}{R_{M2}}T_s \quad \ldots \text{(12)}$$

sustituyendo la ecuación (12) en la (8), se tiene:

$$R_{M1}C_TC_M\frac{d^2T_M}{dt^2} + \left[\frac{(R_{M1} + R_{M2})C_T + R_{M2}C_M}{R_{M2}}\right]\frac{dT_M}{dt} + \frac{1}{R_{M2}}T_M = \frac{1}{R_{M2}}T_s + Q_0 \quad \ldots \text{(13)}$$

Normalizando se obtiene el modelo matemático final en función de la temperatura en el interior del muro:

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{d^2T_M}{dt^2} + \left[\frac{(R_{M1} + R_{M2})C_T + R_{M2}C_M}{R_{M1}R_{M2}\ C_MC_T}\right]\frac{dT_M}{dt} + \frac{1}{R_{M1}R_{M2}\ C_MC_T}T_M = \\ &= \frac{1}{R_{M1}R_{M2}\ C_TC_M}T_s + \frac{1}{R_{M1}\ C_TC_M}Q_0\end{aligned}} \quad \ldots \text{(II)}$$

Comparando los coeficientes del primer miembro de las ecuaciones (I) y (II) se observa que éstos son idénticos.

Ejemplo II.15

Obtener un modelo matemático del sistema térmico formado por cinco resistencias y una capacitancia térmica, como se muestra en la siguiente figura:

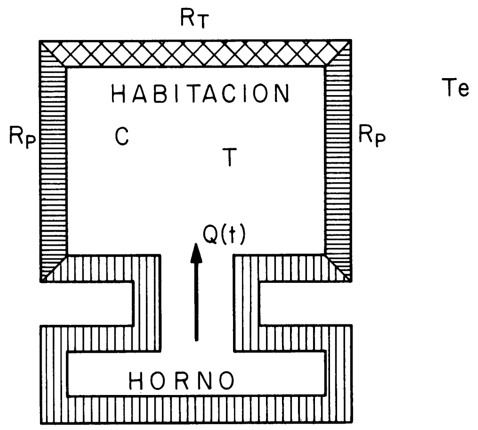


Figura II.55

Solución:

1. Selección de variables. Para este sistema se empleará como variable la temperatura en el interior del cuarto (T), además se considera que la temperatura en el exterior es T_e.
2. Leyes de Elementos.

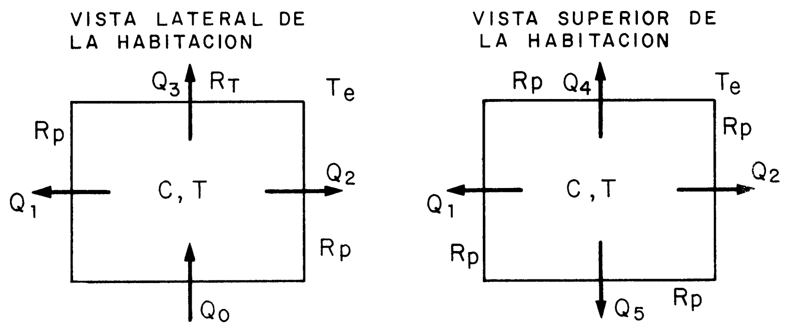


Figura II.56

$$Q_1R_p = T - T_e \quad \ldots (1)$$

$$Q_2R_p = T - T_e \quad \ldots (2)$$

$$Q_3R_T = T - T_e \quad \ldots (3)$$

$$Q_4R_p = T - T_e \quad \ldots (4)$$

$$Q_5R_p = T - T_e \quad \ldots (5)$$

3. Leyes de Conjunto. A partir de las vistas lateral y superior de la habitación, se puede establecer la ecuación de equilibrio para el sistema, esto a partir de la primera ley de la termodinámica.

$$C \frac{dT}{dt} = Q_0 - Q_1 - Q_2 - Q_3 - Q_4 - Q_5 \qquad \ldots (6)$$

4. Obtención del modelo matemático.
De las ecuaciones (1) a (5) se obtiene:

$$Q_1 = \frac{1}{R_p} (T - T_e) \qquad \ldots (7)$$

$$Q_2 = \frac{1}{R_p} (T - T_e) \qquad \ldots (8)$$

$$Q_3 = \frac{1}{R_T} (T - T_e) \qquad \ldots (9)$$

$$Q_4 = \frac{1}{R_p} (T - T_e) \qquad \ldots (10)$$

$$Q_5 = \frac{1}{R_p} (T - T_e) \qquad \ldots (11)$$

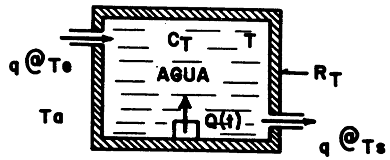
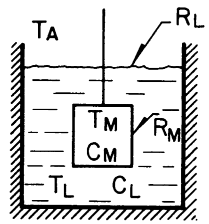
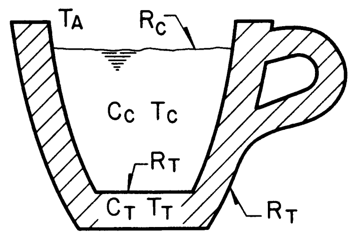
Sustituyendo las ecuaciones (7), (8), (9), (10) y (11) en la (6):

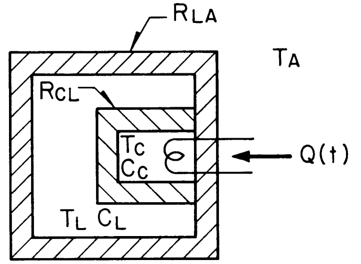
$$C \frac{dT}{dt} = Q_0 - \frac{4}{R_p} (T - T_e) - \frac{1}{R_T} (T - T_e) \qquad \ldots (12)$$

Reordenando y normalizando se obtiene el modelo matemático que describe la variación de la temperatura en el interior de una habitación:

$$\boxed{\frac{dT}{dt} + \frac{1}{C} \left[\frac{4}{R_p} + \frac{1}{R_T} \right] T = \frac{1}{C} Q_0 + \frac{1}{C} \left[\frac{4}{R_p} + \frac{1}{R_T} \right] T_e} \qquad \ldots (I)$$

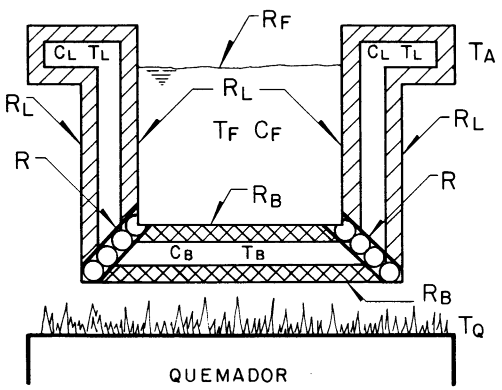
En la tabla II.13 se presentan algunos ejemplos de sistemas térmicos y sus modelos matemáticos.

S I S T E M A	M O D E L O
	$\frac{dT}{dt} + \frac{1}{C_T}\left[K + \frac{1}{R_T}\right]T = \frac{1}{C_T}\,Q(t)$ $K = qs\rho$; s: calor específico del agua $Te = Ta = 0$; $Ts = T$
	$\frac{d^2T_M}{dt^2} + \left[\frac{C_M(R_M + R_L) + C_LR_L}{C_MC_L\ R_MR_L}\right]\frac{dT_M}{dt} + \left[\frac{1}{C_MC_L\ R_MR_L}\right]T_M = \left[\frac{1}{C_MC_L\ R_MR_L}\right]T_A$ $\frac{d^2T_L}{dt^2} + \left[\frac{C_M(R_M + R_L) + C_LR_L}{C_MC_L\ R_MR_L}\right]\frac{dT_L}{dt} + \left[\frac{1}{C_MC_L\ R_MR_L}\right]T_L = \left[\frac{1}{C_MC_L\ R_MR_L}\right]T_A$
	$\frac{d^2T_T}{dt^2} + \left[\frac{R_C(2C_C + C_T) + R_TC_T}{R_CR_T\ C_CC_T}\right]\frac{dT_T}{dt} + \left[\frac{R_C + 2R_T}{R_CR_T^2\ C_CC_T}\right]T_T = \left[\frac{R_C + 2R_T}{R_CR_T^2\ C_CC_T}\right]T_A$ $\frac{d^2T_C}{dt^2} + \left[\frac{R_C(2C_C + C_T) + R_TC_T}{R_CR_T\ C_CC_T}\right]\frac{dT_C}{dt} + \left[\frac{R_C + 2R_T}{R_CR_T^2\ C_CC_T}\right]T_C = \left[\frac{R_C + 2R_T}{R_CR_T^2\ C_TC_C}\right]T_A$



$$\frac{d^2T_C}{dt^2} + \left[\frac{C_C(R_{LA} + R_{CL}) + C_L R_{LA}}{C_C C_L R_{CL} R_{LA}}\right]\frac{dT_C}{dt} + \left[\frac{1}{C_C C_L R_{CL} R_{LA}}\right]T_C =$$
$$= \left[\frac{1}{C_C C_L R_{CL} R_{LA}}\right]T_A + \left[\frac{R_{CL} + R_{LA}}{C_C C_L R_{CL} R_{LA}}\right]Q(t) + \frac{1}{C_C}\dot{Q}(t)$$

$$\frac{d^2T_L}{dt^2} + \left[\frac{C_C(R_{LA} + R_{CL}) + C_L R_{LA}}{C_C C_L R_{CL} R_{LA}}\right]\frac{dT_L}{dt} + \left[\frac{1}{C_C C_L R_{CL} R_{LA}}\right]T_L =$$
$$= \left[\frac{1}{C_C C_L R_{CL} R_{LA}}\right]T_A + \left[\frac{1}{C_C C_L R_{CL}}\right]Q(t)$$



$$\frac{dT_B}{dt} + \frac{2}{C_B}\left[\frac{1}{R_B} + \frac{1}{R}\right] T_B = \frac{1}{C_B R_B} T_Q + \frac{1}{C_B R_B} T_F + \frac{2}{C_B R} T_L$$

$$\frac{dT_L}{dt} + \frac{1}{C_L}\left[\frac{1}{R} + \frac{2}{R_L}\right] T_L = \frac{1}{C_L R} T_B + \frac{1}{C_L R_L} T_F + \frac{1}{C_L R_L} T_A$$

$$\frac{dT_F}{dt} + \frac{1}{C_F}\left[\frac{1}{R_B} + \frac{2}{R_L} + \frac{1}{R_F}\right] T_F = \frac{1}{C_F R_B} T_B + \frac{2}{C_F R_L} T_L + \frac{1}{C_F R_F} T_A$$

Tabla II.13

II.8 SISTEMAS HÍBRIDOS

Debido a que es difícil encontrar en la realidad sistemas puramente eléctricos, mecánicos, hidráulicos o térmicos, desde un punto de vista estricto, es necesario realizar un estudio detallado de los sistemas híbridos, que son aquellos sistemas formados por la combinación de subsistemas de distinto tipo, por ejemplo electromecánicos, termoeléctricos y otros.

Para enfatizar la importancia que tienen los sistemas híbridos se pueden citar ejemplos sencillos y analizar de manera breve sus diferentes partes o subsistemas.

Considérese el caso de un automóvil, el cual puede ser tratado como una serie de subsistemas interconectados que interactúan de manera conjunta. En términos generales todo automóvil considerado como un sistema físico tiene un subsistema o parte eléctrica formada por las luces, sistema de encendido, tablero de control el cual incluye alarmas e indicadores, etc. Otro subsistema o parte quizá el de mayor importancia, es el mecánico, ya que sin éste el automóvil no existiría. Este incluye la tracción de las ruedas, caja de velocidades, parte mecánica de la dirección, mecanismos y cerraduras de las puertas, etc. Otro subsistema es el térmico, el cual está formado por el sistema de enfriamiento de toda la parte mecánica, sistema de calefacción y/o clima artificial en el interior del automóvil, etc. Se puede citar además, una parte hidráulica de gran importancia, ya que de ésta depende la seguridad y operación adecuada del automóvil que está formada por los actuadores hidráulicos de frenado, dirección hidráulica (en algunos casos), sistema de lubricación de las partes mecánicas, etc.

A continuación se presenta la descripción de algunos elementos híbridos y además ejemplos de sistemas que incluyen elementos de este tipo.

II.8.1 ELEMENTOS HIBRIDOS

Existe una gran variedad de elementos en los cuales las variables asociadas a éstos no son del mismo tipo esto es, el mismo elemento puede asociar variables eléctricas y mecánicas o variables eléctricas y térmicas. En el estudio de los sistemas dinámicos, este tipo de elementos se ha denominado como elementos híbridos.

Entre los elementos híbridos se pueden citar como los más comunes por su simplicidad y uso frecuente los siguientes:

POTENCIOMETRO

Este elemento híbrido relaciona dos variables, una eléctrica con una mecánica. Existen dos tipos de potenciómetros:

a) Traslacionales

b) Rotacionales

a) El potenciómetro traslacional se representa por medio del siguiente símbolo:

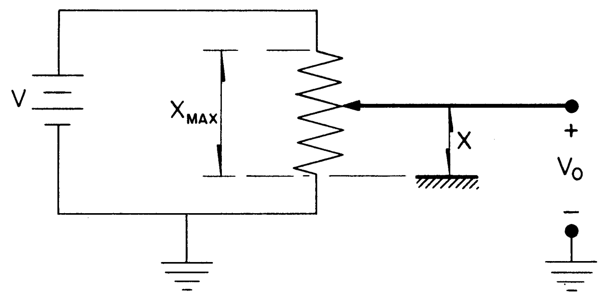


Figura II.57

Su comportamiento físico está definido por la ecuación:

$$\boxed{V_0 = \frac{X}{X_{MAX}} V}$$

donde:

V_0: es el voltaje medido entre la posición del cursor y la referencia, la posición del cursor está determinada por el valor del desplazamiento (X), este voltaje está dado en [V].

X: es el desplazamiento del cursor del potenciómetro en [m].

X_{MAX}: es el valor máximo que desplaza el cursor en [m].

V: es el voltaje de alimentación al potenciómetro en [V].

b) El potenciómetro rotacional se representa por medio del siguiente símbolo:

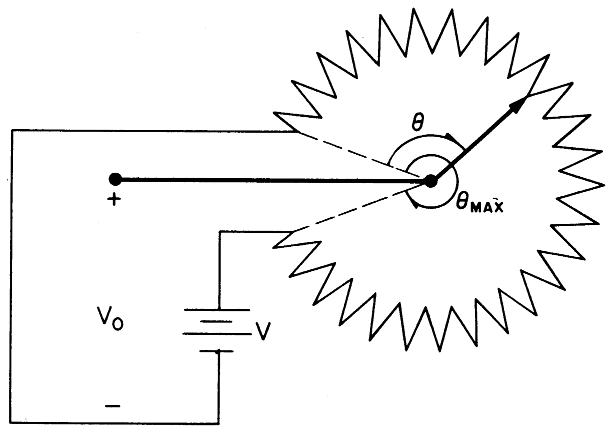


Figura II.58

Su comportamiento físico está definido por la siguiente ecuación:

$$\boxed{V_0 = \frac{\theta}{\theta_{MAX}} V}$$

donde:

V_0: es el voltaje medido entre la posición del cursor y la referencia, la posición del cursor está determinada por el valor del desplazamiento angular (θ), este voltaje está dado en [V].

θ: es el desplazamiento angular del cursor del potenciómetro en [rad].

θ_{MAX}: es el valor máximo que se desplaza angularmente al cursor en [rad].

V: es el voltaje de alimentación aplicado entre las terminales del potenciómetro en [V].

MOTOR ELECTRICO IDEAL DE CORRIENTE DIRECTA

En este elemento son cuatro las variables asociadas: dos eléctricas y dos mecánicas. Las eléctricas son el voltaje y corriente de armadura y las mecánicas son el par producido en la flecha del motor y la velocidad angular de éste.

El motor eléctrico ideal de corriente directa se representa mediante el siguiente símbolo:

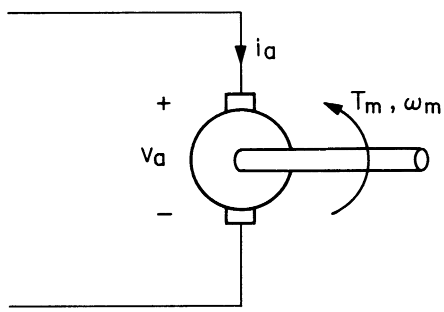


Figura II.59

La relación entre las variables se define por medio de las ecuaciones:

$$\boxed{T_m = K_f \; i_a}$$

y

$$\boxed{V_a = K_a \; \omega_m}$$

donde:

T_m y ω_m: son el par producido por el motor y su velocidad angular, expresados en $[N \cdot m]$ y $[rad/s]$ respectivamente.

V_a e i_a: son el voltaje y corriente de armadura del motor expresados en $[V]$ y $[A]$ respectivamente.

K_a y K_f: son parámetros propios del motor expresados en $\left[\frac{N \cdot m}{A}\right]$ y $\left[\frac{V}{rad/s}\right]$ respectivamente.

TURBINA HIDRAULICA IDEAL

Las variables asociadas a este elemento son dos hidráulicas y dos mecánicas. Las hidráulicas son la presión que tiene el fluído a la entrada de la turbina y el gasto a través de ésta; las mecánicas son el par producido en la flecha de la turbina y la velocidad angular de ésta.

La turbina hidráulica ideal se representa mediante el siguiente símbolo:

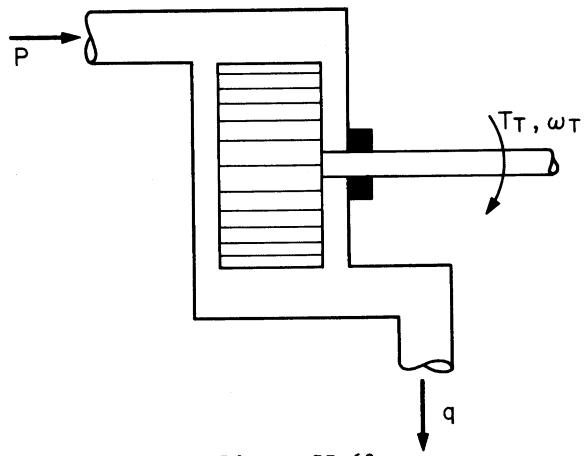


Figura II.60

La relación entre variables está definida por las ecuaciones:

$$\boxed{P = K_1 T_T}$$

y

$$\boxed{\omega_T = K_2 q}$$

donde:

P y q: son la presión que tiene el fluido a la entrada de la turbina y el gasto a través de ésta expresados en $[Pa]$ y $[m^3/s]$ respectivamente.

T_T y ω_T: son el par producido en la flecha de la turbina y su velocidad angular expresados en $[N \cdot m]$ y $[rad/s]$ respectivamente.

K_1 y K_2: son parámetros propios de la turbina expresados en $\left[\frac{Pa}{N \cdot m}\right]$ ó $\left[\frac{1}{m^3}\right]$ y $\left[\frac{rad}{m^3}\right]$ respectivamente.

SERVOMECANISMO HIDRAULICO DE POSICION

Por medio de este dispositivo o elemento se pretende mover una carga representada por la masa (M) esto es, la carga debe seguir fielmente los desplazamientos horizontales aplicados a través de la palanca. En el dispositivo se pueden identificar cuatro elementos principales:

a) una servoválvula hidráulica

b) un actuador hidráulico

c) una carga (M)

d) un mecanismo (palanca)

como se muestra en la figura:

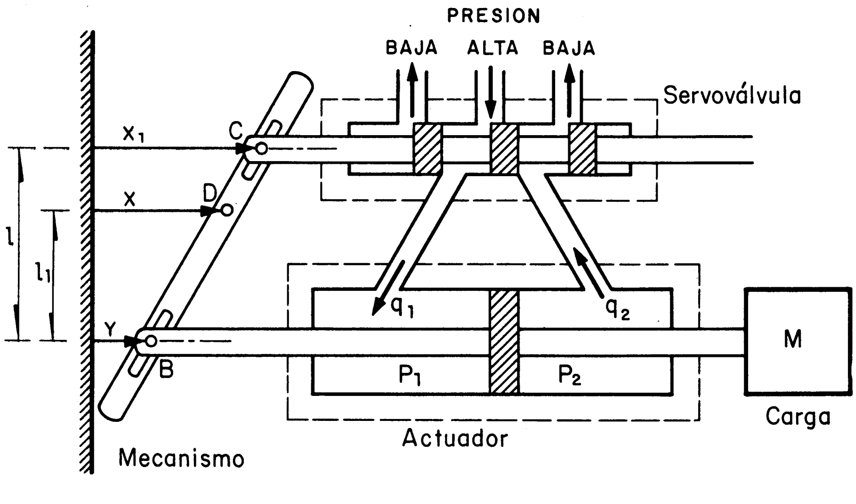


Figura II.61

El principio de operación del servomecanismo hidráulico es:

Si el punto D se desplaza horizontalmente en sentido positivo, la palanca gira con respecto al punto B, produciendo un desplazamiento horizontal del punto C, lo que hace que los carretes de la servoválvula se muevan a la derecha, permitiendo que el líquido fluya hacia la cámara izquierda del actuador; al haber una diferencia de presiones entre las dos cámaras de éste, el émbolo se mueve a la derecha, produciendo un desplazamiento de la carga (M). Simultáneamente a este movimiento, el punto B se desplaza horizontalmente en sentido positivo y la palanca gira con respecto al punto D, y el punto C se desplaza a la izquierda, lo que produce que los carretes de la servoválvula regresen a su posición original.

Si se define q_ℓ como el gasto medio de líquido que fluye por la servoválvula, éste será proporcional al desplazamiento x_1 e inversamente proporcional a la diferencia de presiones entre las cámaras, esto es:

$$q_\ell = k_1 x_1 - k_2 \Delta P \qquad \dots (1)$$

donde:

$$q_\ell = \frac{q_1 + q_2}{2} \qquad \dots (2)$$

$$\Delta P = P_1 - P_2 \qquad \dots (3)$$

Por otra parte, si v representa la velocidad con la que se mueve el émbolo del actuador, se tiene:

$$\frac{d\Delta P}{dt} = k_3 q_\ell - k_4 v \qquad \dots (4)$$

La fuerza aplicada al émbolo debido a la diferencia de presiones entre las cámaras es:

$$F = A\ \Delta P \qquad \dots (5)$$

donde:

A: es el área del émbolo

Debido a la posición de la carga (M), la velocidad se puede expresar por:

$$v = \frac{dy}{dt} \qquad \dots (6)$$

además, la relación entre la fuerza aplicada al pistón y la velocidad de la carga es:

$$F = M \frac{dv}{dt} \qquad \dots (7)$$

Por otra parte, considérese el mecanismo (palanca), si la distancia vertical entre los puntos B y C es ℓ y la distancia vertical entre los puntos B y D es ℓ_1, como se muestra en la figura:

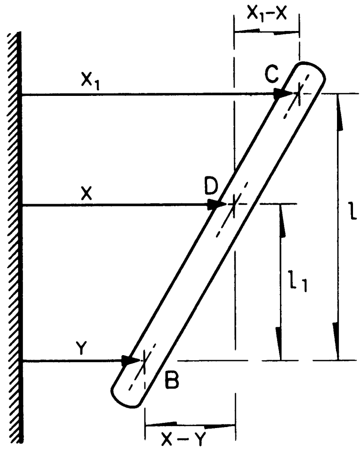


Figura II.62

entonces, por triángulos semejantes se puede deducir que:

$$\frac{x - y}{\ell_1} = \frac{x_1 - x}{\ell - \ell_1} \qquad \ldots (8)$$

por lo tanto:

$$x_1 = \frac{\ell - \ell_1}{\ell_1}(x - y) + x = \left[1 - \frac{\ell}{\ell_1}\right] y + \frac{\ell}{\ell_1} x \qquad \ldots (9)$$

Combinando y simplificando las ecuaciones (1) a (9), se establece que la relación que existe entre los desplazamientos x y y está dada por:

$$\boxed{\frac{d^3y}{dt^3} + k_2k_3\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k_4A}{M}\frac{dy}{dt} + \left[\frac{\ell}{\ell_1} - 1\right]\left[\frac{k_1k_3A}{M}\right] y = \frac{\ell}{\ell_1}\frac{k_1k_3A}{M} x}$$

En este caso las constantes K_1, K_2, K_3 y K_4 son los parámetros propios del servomecanismo hidráulico y se expresan en $[m^2/s]$, $\left[\frac{m^5/s}{N}\right]$, $[N/m^5]$ y $[N/m^3]$ respectivamente.

Debido a la gran diversidad que existe de elementos híbridos, se sugiere consultar las referencias bibliográficas.

A continuación se presentan algunos ejemplos de sistemas híbridos, a fin de ilustrar la manera en que este tipo de sistemas se pueden modelar matemáticamente.

Ejemplo II.16

El sistema electromecánico que se muestra en la figura, se puede considerar como la representación más simple de un ventilador doméstico. La parte eléctrica representa el sistema de arranque del motor y la parte mecánica representa la inercia de éste, las aspas del ventilador se representan en este caso como un amortiguador rotacional.

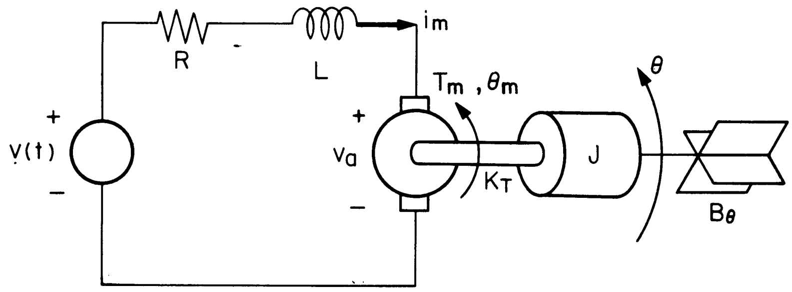


Figura II.63

Obtener un modelo matemático que sirva para representar el comportamiento del sistema, empleando como variable para el modelo la velocidad angular de las aspas del ventilador.

Solución:

Para sistemas híbridos se puede aplicar la metodología propuesta en la sección II.3 en forma similar que para los sistemas descritos en las secciones anteriores. En este caso es necesario en primer término identificar y delimitar cada una de las partes que forman el sistema, esto se hace con la finalidad de plantear las ecuaciones de elementos y las de equilibrio por separado para cada una de las partes.

De esta manera para el sistema considerado, se pueden identificar una parte eléctrica formada por la fuente de alimentación, una resistencia y una inductancia; otra parte del sistema es la mecánica que está formada por un resorte rotacional (K_T), una inercia (J) y un amortiguador rotacional (B_θ). Ambas partes están interconectadas a través de un elemento híbrido (motor eléctrico ideal de corriente directa).

1. Selección de variables. En este caso se empleará como variable la velocidad angular a la que giran las aspas del ventilador.

2. Leyes de Elementos. Debido a que el sistema está formado por una parte eléctrica y una mecánica se deben plantear las ecuaciones de elementos para cada una de las partes por separado.

- Leyes de elemento para la parte eléctrica:

$$V_R = R\, i_R \qquad \ldots (1)$$

$$V_L = L \frac{di_L}{dt} \qquad \ldots (2)$$

$$V_a = K_a\, \omega_m \qquad \ldots (3)$$

- Leyes de elemento para la parte mecánica:

$$T_{K_T} = K_T(\theta_m - \theta) \qquad \ldots (4)$$

$$T_J = J \frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad \ldots (5)$$

$$T_{B_\theta} = B_\theta \frac{d\theta}{dt} \qquad \ldots (6)$$

$$T_m = K_f\, i_m \qquad \ldots (7)$$

3. Leyes de Conjunto. Las ecuaciones de equilibrio deben también ser planteadas por separado tanto para la parte eléctrica como para la mecánica.

Leyes de Conjunto para la parte eléctrica. Las ecuaciones de equilibrio para la parte eléctrica se plantean con base en las leyes de voltaje y de corriente de Kirchhoff.

LVK:

$$V(t) = V_R + V_L + V_a \qquad \dots (8)$$

LCK:

$$i_R = i_L = i_m \qquad \dots (9)$$

Leyes de Conjunto para la parte mecánica. Las ecuaciones de equilibrio para la parte mecánica se plantean con base en la tercera ley de Newton y en el principio de D'Alembert aplicadas a sistemas mecánicos rotacionales, esto es:

$$T_m = T_{K_T} \qquad \dots (10)$$

$$T_{K_T} = T_J + T_{B_\theta} \qquad \dots (11)$$

4. **Obtención del modelo matemático del sistema.**

Para la parte eléctrica, de las ecuaciones (1) y (9) se tiene:

$$V_R = R\, i_m \qquad \dots (12)$$

y de las ecuaciones (2) y (9):

$$V_L = L \frac{di_m}{dt} \qquad \dots (13)$$

sustituyendo las ecuaciones (3), (12) y (13) en la (8), se tiene:

$$V(t) = R\, i_m + L \frac{di_m}{dt} + K_a\, \omega_m \qquad \dots (14)$$

Para la parte mecáncia, de las ecuaciones (4), (7) y (10):

$$K_f\, i_m = K_T(\theta_m - \theta) \qquad \ldots (15)$$

y de las ecuaciones (4), (5), (6) y (11), se tiene:

$$K_T(\theta_m - \theta) = J\,\frac{d^2\theta}{dt^2} + B_\theta\,\frac{d\theta}{dt} \qquad \ldots (16)$$

de las ecuaciones (15) y (16) se tiene que la corriente del motor está dada por:

$$i_m = \frac{J}{K_f}\,\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{B\theta}{K_f}\,\frac{d\theta}{dt}. \qquad \ldots (17)$$

de la ecuación (15), el desplazamiento angular del motor es:

$$\theta_m = \frac{K_f}{K_T}\, i_m + \theta \qquad \ldots (18)$$

sustituyendo la ecuación (17) en la (18), se tiene:

$$\theta_m = \frac{J}{K_T}\,\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{B_\theta}{K_T}\,\frac{d\theta}{dt} + \theta \qquad \ldots (19)$$

sustituyendo las ecuaciones (17) y (19) en la (15), el modelo matemático del sistema es:

$$\left[\frac{LJ}{K_f} + \frac{K_aJ}{K_T}\right]\frac{d^3\theta}{dt^3} + \left[\frac{RJ}{K_f} + \frac{LB_\theta}{K_T} + \frac{K_aB_\theta}{K_T}\right]\frac{d^2\theta}{dt^2} +$$

$$+ \left[\frac{RB_\theta}{K_f} + K_a\right]\frac{d\theta}{dt} = V(t) \qquad \ldots (20)$$

Normalizando esta ecuación con respecto a la derivada de mayor orden, se tiene:

$$\frac{d^3\theta}{dt^3} + \left[\frac{K_T(RJ + LB_\theta) + K_fK_aB_\theta}{LJK_T + K_fK_a\ J}\right]\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left[\frac{K_T(RB_\theta + K_aK_f)}{LJK_T + K_aK_f\ J}\right]\frac{d\theta}{dt} =$$

$$= \frac{K_fK_T}{LJK_T + K_aK_f\ J}\ v(t) \qquad \ldots (21)$$

Finalmente, haciendo $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ se tiene que el modelo matemático del sistema en función de la velocidad angular a la que giran las aspas del ventilador es:

$$\boxed{\frac{d^2\omega}{dt^2} + \left[\frac{K_T(RJ + LB_\theta) + K_aK_fB_\theta}{LJK_T + K_aK_f\ J}\right]\frac{d\omega}{dt} + \left[\frac{K_T(RB_\theta + K_aK_f)}{LJK_T + K_aK_f\ J}\right]\omega = \frac{K_f\ K_T}{LJK_T + K_aK_f\ J}\ v(t)}$$

Ejemplo II.17

El sistema electro-mecánico que se muestra en la figura II.64 representa un micrófono de capacitancia variable en forma esquemática. El sistema está integrado por una parte eléctrica y una mecánica, formados por una batería, una resistencia, una inductancia, una masa, un amortiguador y un resorte. Ambas partes están interconectadas mediante un capacitor variable de placas paralelas, el comportamiento del capacitor está definido por la ecuación:

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon A}{x_0 - x}}$$

donde:

- C: es el valor del capacitor
- ε: es la constante del dieléctrico entre las placas del capacitor
- A: es el área de las placas del capacitor

x_0: es la separación entre las placas del capacitor cuando la excitación externa $(f(t))$ es cero.

x: es la distancia que se desplaza la placa 2(M), cuando se aplica la excitación externa.

NOTAS:

1) Cuando la separación entre las placas del capacitor es $(x_0 - x)$, la carga eléctrica entre éstas es $(q_0 + q)$.

2) Cuando la excitación externa es nula, esto es, $f(t) = 0$ el resorte está estirado una distancia x_1.

3) La excitación externa, representa la fuerza aplicada sobre la placa 2(M) del capacitor, ésta es producida por las ondas sonoras (voz, música, ruido, etc.).

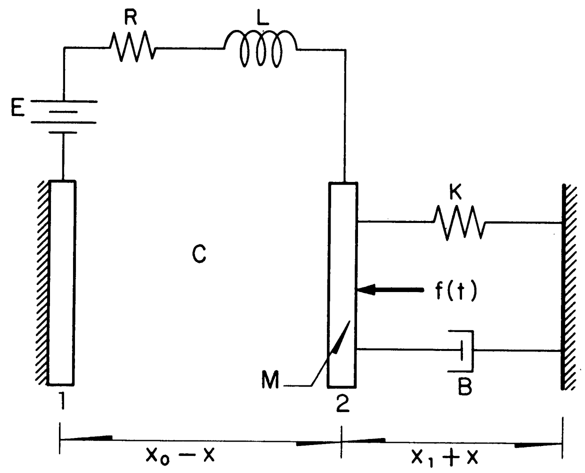


Figura II.64

Obtener un modelo matemático que defina el comportamiento físico del sistema.

Solución:

1. Selección de variables. Las variables que pueden ser empleadas para modelar el sistema en este caso son: la carga eléctrica del capacitor y/o el desplazamiento al que está sometida la placa dos del capacitor. Cabe mencionar que la carga no es una variable de uso común, sin embargo, en la sección II.4 se mencionó que ésta puede ser empleada en la formulación de modelos matemáticos para sistemas eléctricos. Por otra parte la carga eléctrica se puede expresar mediante la ecuación:

$$\boxed{q(t) = \int_0^t i(t')dt'}$$

2. Leyes de Elementos.

- Leyes de elementos para la parte eléctrica:

$$V_R = R\, i_R \qquad \ldots (1)$$

$$V_L = L\,\frac{di_L}{dt} \qquad \ldots (2)$$

$$V_C = \frac{1}{C}\,(q + q_0) \qquad \ldots (3)$$

$$C = \frac{\varepsilon A}{x_0 - x} \qquad \ldots (4)$$

- Leyes de elementos para la parte mecánica:

$$f_M = M\,\frac{d^2}{dt^2}\,(x_1 + x) = M\,\frac{d^2x}{dt^2} \qquad \ldots (5)$$

$$f_B = B\,\frac{d}{dt}\,(x_1 + x) = B\,\frac{dx}{dt} \qquad \ldots (6)$$

$$f_K = K(x_1 + x) \qquad \ldots (7)$$

$$* \; f_e = -\,\frac{(q + q_0)^2}{2\varepsilon A} \qquad \ldots (8)$$

*Fuerza electrostática entre las placas del capacitor. JOHNK, C.,T.,A., *Engineering Electromagnetic Fields & Waves*, John Wiley & Sons, Inc. New York, 1975, p. 259.

3. Leyes de Conjunto.

Las ecuaciones de equilibrio para la parte eléctrica son:

LVK:

$$E = V_R + V_L + V_C \qquad \ldots (9)$$

LCK:

$$i_R = i_L = i_C \qquad \ldots (10)$$

e

$$i_C = \frac{dq}{dt} \qquad \ldots (11)$$

Las ecuaciones de equilibrio para la parte mecánica son:

Diagrama de cuerpo libre para la placa dos del capacitor.

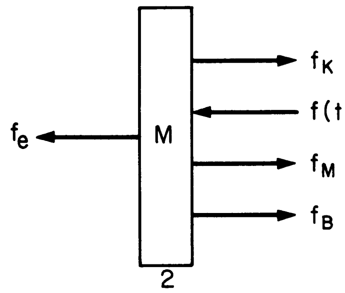


Figura II.65

por lo tanto la ecuación de equilibrio es:

$$f(t) = f_M + f_B + f_K - f_e \qquad \ldots (12)$$

4. Obtención del modelo matemático.

De las ecuaciones (1), (10) y (11):

$$V_R = R\,\frac{dq}{dt} \qquad \ldots (13)$$

de las ecuaciones (2), (10) y (11):

$$V_L = L\,\frac{d^2q}{dt^2} \qquad \ldots (14)$$

de las ecuaciones (3) y (4):

$$V_C = \frac{(q + q_0)(x_0 - x)}{A\varepsilon} \qquad \ldots (15)$$

sustituyendo las ecuaciones (13), (14) y (15) en la (9), se tiene:

$$E = L\,\frac{d^2q}{dt^2} + R\,\frac{dq}{dt} + \frac{(x_0 - x)}{\varepsilon A}\,(q + q_0) \quad .. (16)$$

sustituyendo las ecuaciones (5), (6), (7) y (8) en la (12), se tiene:

$$M\,\frac{d^2x}{dt^2} + B\,\frac{dx}{dt} + K(x_1 + x) + \frac{1}{2\varepsilon A}(q + q_0)^2 = f(t) \qquad \ldots (17)$$

Las ecuaciones (16) y (17) representan el modelo matemático que sirve para representar el sistema considerado. Debido a que en este caso las ecuaciones son no lineales, el modelo estará representado por un par de ecuaciones, ya que para obtener la representación del modelo en forma compacta se requiere un desarrollo algebraico muy complejo. Cabe mencionar que este sistema es posible representarlo por medio de ecuaciones diferenciales lineales empleando técnicas adecuadas para linealizar el modelo no lineal.*

Modelo matemático no lineal:

$$L\,\frac{d^2q}{dt^2} + R\,\frac{dq}{dt} + \frac{(x_0 - x)}{\varepsilon A}\,(q + q_0) = E \qquad \ldots (18)$$

$$M\,\frac{d^2x}{dt^2} + B\,\frac{dx}{dt} + K(x + x_1) + \frac{1}{2\varepsilon A}\,(q + q_0)^2 = f(t) \ldots (19)$$

*D'AZZO, J.J., HOUPIS, C.H., *Linear Control Systems Analysis and Design: Conventional and Modern*, McGraw - Hill, New York, 1975.

Modelo matemático linealizado:

$$L\,\frac{d^2q}{dt^2} + R\,\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C_0}\,q - \frac{q_0}{\varepsilon A}\,x = 0 \qquad \ldots\ (20)$$

$$M\,\frac{d^2x}{dt^2} + B\,\frac{dx}{dt} + Kx - \frac{q_0}{\varepsilon A}\,q = f(t) \qquad \ldots\ (21)$$

A partir de las ecuaciones (20) y (21), se puede obtener un modelo matemático para representar el comportamiento del sistema en forma compacta, esto es:

$$\boxed{\frac{d^4q}{dt^4} + \left[\frac{R}{L} + \frac{B}{M}\right]\frac{d^3q}{dt^3} + \left[\frac{1}{C_0L} + \frac{BR}{ML} + \frac{K}{M}\right]\frac{d^2q}{dt^2} + \left[\frac{B}{C_0ML} + \frac{KR}{ML}\right]\frac{dq}{dt} + \left[\frac{K}{C_0ML} - \frac{q_0^2}{ML\varepsilon^2A^2}\right]q = \frac{q_0}{ML\varepsilon A}\,f(t)}$$

Ejemplo II.18

En la siguiente figura se presenta un servomecanismo utilizado para posicionar una mesa de corte de materiales:

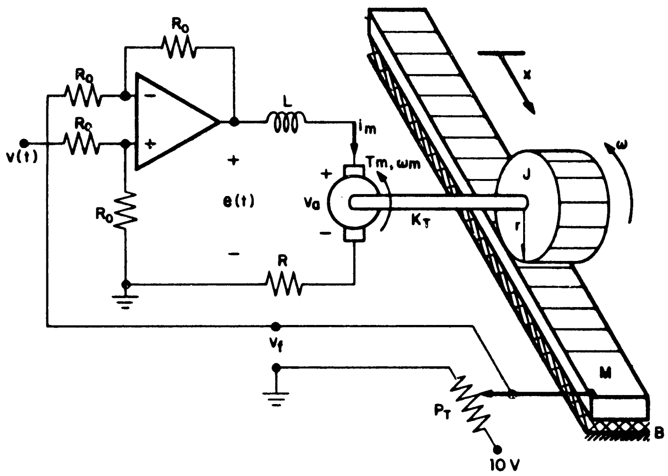


Figura II.66

La señal de referencia o señal de entrada V(t) es aplicada al sumador de la siguiente figura:

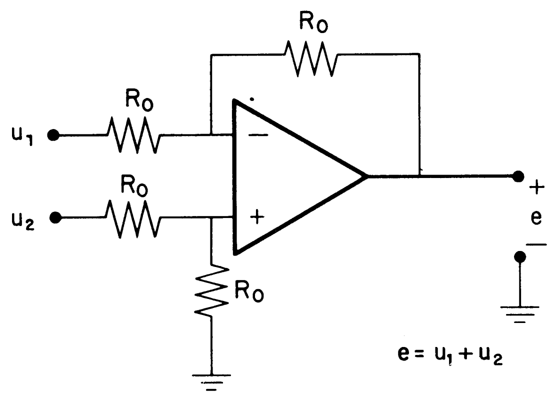


Figura II.67

El voltaje del sumador operacional se utiliza para excitar la armadura de un motor eléctrico ideal de corriente directa, el par y la velocidad angular producidas por éste, se transmiten a un engrane representado por la inercia (J). La mesa está representada por la masa (M) y la posición de ésta x(t), es la variable que se desea controlar. La flecha que une el motor con el engrane tiene una constante torsional K_T y existe un fluido viscoso con coeficiente de amortiguamiento B, sobre el cual se desplaza la mesa. La variable que se desea controlar es detectada mediante un potenciómetro (PT) y se compara con la señal de referencia V(t).

Obtener un modelo matemático que sirva para representar el comportamiento del sistema, empleando como variable el desplazamiento (x) de la masa.

Solución:

1. Selección de variables. En este caso, la variable que se empleará en el modelo del sistema es el desplazamiento de la masa (x).

2. Leyes de Elemento.
   Parte eléctrica:

$$V_R = R\ i_R \qquad \ldots (1)$$

$$V_L = L\ \frac{di_L}{dt} \qquad \ldots (2)$$

$$V_f = 10\ x \qquad \ldots (3)$$

$$V_a = K_a\ \omega_m \qquad \ldots (4)$$

$$e(t) = V(t) - V_f \qquad \ldots (5)$$

   Parte mecánica rotacional:

$$T_m = K_f\ i_m \qquad \ldots (6)$$

$$T_{K_T} = K_T\ (\theta_m - \theta) \qquad \ldots (7)$$

$$T_J = J\ \frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad \ldots (8)$$

   Parte mecánica traslacional:

$$f_M = M\ \frac{d^2x}{dt^2} \qquad \ldots (9)$$

$$f_B = B\ \frac{dx}{dt} \qquad \ldots (10)$$

   Relaciones auxiliares:

$$x = r\ \theta \qquad \ldots (11)$$

3. Leyes de Conjunto.
   Parte eléctrica:

   LVK:

$$e(t) = V_R + V_L + V_a \qquad \ldots (12)$$

LCK:

$$i_R = i_L = i_m \qquad \ldots (13)$$

Parte mecánica rotacional:

$$T_m = T_{K_T} \qquad \ldots (14)$$

$$T_{K_T} = T_J + r\ fe \qquad \ldots (15)$$

Parte mecánica traslacional:

$$f_e = f_M + f_B \qquad \ldots (16)$$

4. Obtención del modelo matemático.
De las ecuaciones (1) y (13):

$$V_R = R\ i_m \qquad \ldots (17)$$

de las ecuaciones (2) y (13):

$$V_L = L \frac{di_m}{dt} \qquad \ldots (18)$$

de las ecuaciones (3) y (5):

$$e(t) = V(t) - 10\ x \qquad \ldots (19)$$

sustituyendo las ecuaciones (4), (17), (18), y (19) en la (12):

$$V(t) = L \frac{di_m}{dt} + R\ i_m + 10\ x + K_a\ \omega_m \qquad \ldots (20)$$

de las ecuaciones (6), (7) y (14):

$$K_f\ i_m = K_T\ (\theta_m - \theta) \qquad \ldots (21)$$

de las ecuaciones (7), (8) y (15):

$$K_T\ (\theta_m - \theta) = J \frac{d^2\theta}{dt^2} + r\ fe \qquad \ldots (22)$$

de las ecuaciones (9), (10) y (16):

$$fe = M \frac{d^2x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} \qquad \ldots (23)$$

de la ecuación (11) se tiene:

$$\theta = \frac{x}{r} \qquad \ldots (24)$$

sustituyendo la ecuación (24) en la (22):

$$\theta_m = \frac{J}{rK_T} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{x}{r} + \frac{r}{K_T} fe \qquad \ldots (25)$$

sustituyendo la ecuación (23) en la (25) se obtiene:

$$\theta_m = \left[\frac{J}{rK_T} + \frac{rM}{K_T} \right] \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{rB}{K_T} \frac{dx}{dt} + \frac{x}{r} \qquad \ldots (26)$$

de las ecuaciones (21) y (24):

$$i_m = \frac{K_T}{K_f} \left[\theta_m - \frac{x}{r} \right] \qquad \ldots (27)$$

sustituyendo la ecuación (26) en la (27):

$$i_m = \left[\frac{J}{rK_f} + \frac{rM}{K_f} \right] \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{rB}{K_f} \frac{dx}{dt} \qquad \ldots (28)$$

sustituyendo las ecuaciones (26) y (28) en la (20), se tiene que el modelo matemático del sistema en forma normalizada es:

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{d^3x}{dt^3} + \left[\frac{Br^2}{J + Mr^2} + \frac{RK_T}{LK_T + K_aK_f} \right] \frac{d^2x}{dt^2} + \\ &+ \left[\frac{K_T(RBr^2 + K_aK_f)}{(J + Mr^2)(LK_T + K_aK_f)} \right] \frac{dx}{dt} + \\ &+ \left[\frac{10K_f\, K_T\, r}{(J + Mr^2)(LK_T + K_aK_f)} \right] x = \frac{K_f\, K_T\, r}{(J + Mr^2)(LK_T + K_aK_f)}\, V(t) \end{aligned}}$$

Ejemplo II.19

Considérese el sistema híbrido mostrado en la figura como una representación muy simple de una planta generadora de energía eléctrica (del tipo hidroeléctrica). El vaso de la presa se representa por el tanque, éste se comunica directamente a una turbina hidráulica ideal. La turbina y el generador de energía eléctrica están conectados a través de una flecha con una constante torsional K_T. El voltaje generado por este último alimenta a una carga, la cual es representada por una resistencia R_C.

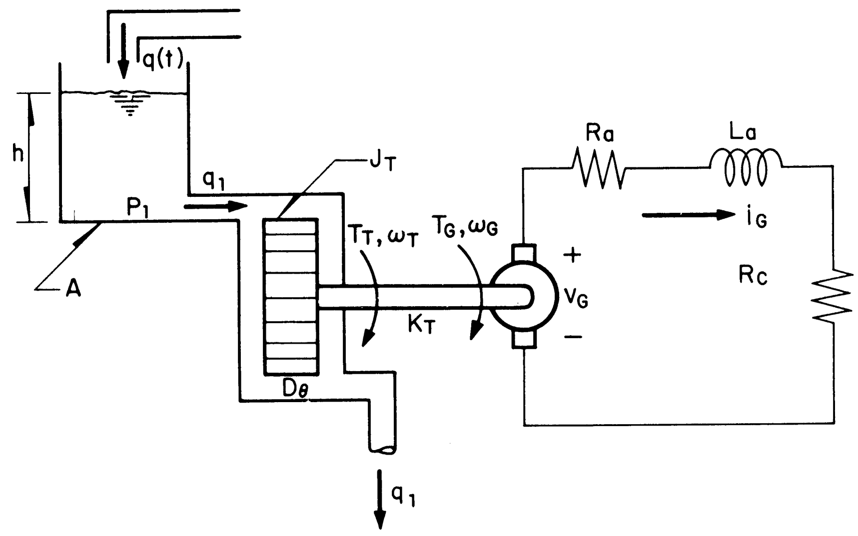


Figura II.68

Obtener un modelo matemático para representar el comportamiento del sistema, empleando como variable la corriente que fluye a través de la resistencia R_C.

Solución:

Leyes de Elementos:

$$P_1 = P_0 + \rho\, gh \qquad \ldots (1)$$

$$T_{J_T} = J_T \frac{d^2\theta_T}{dt^2} \qquad \ldots (2)$$

$$T_{D_\theta} = D_\theta \frac{d\theta_T}{dt} \qquad \ldots (3)$$

$$T_{K_T} = K_T\,(\theta_T - \theta_G) \qquad \ldots (4)$$

$$V_{R_a} = R_a\, i_{R_a} \qquad \ldots (5)$$

$$V_{L_a} = L_a \frac{di_{L_a}}{dt} \qquad \ldots (6)$$

$$V_{R_c} = R_c\, i_{R_c} \qquad \ldots (7)$$

$$\omega_T = K_q\, q_1 \qquad \ldots (8)$$

$$P_1 = K_p\, T_T \qquad \ldots (9)$$

$$T_G = K_f\, i_G \qquad \ldots (10)$$

$$V_G = K_b\, \omega_G \qquad \ldots (11)$$

Leyes de Conjunto:

$$\frac{dv}{dt} = q(t) - q_1 \qquad \ldots (12)$$

$$T_T = T_{J_T} + T_{D_\theta} \qquad \ldots (13)$$

$$T_T = T_{K_T} \qquad \ldots (14)$$

$$T_{K_T} = T_G \qquad \ldots (15)$$

$$V_G = V_{R_a} + V_{L_a} + V_{R_c} \qquad \ldots (16)$$

$$i_{R_a} = i_{R_c} = i_{L_a} = i_G \qquad \ldots (17)$$

Obtención del modelo:

De las ecuaciones (8) y (12):

$$A \frac{dh}{dt} + \frac{1}{K_q} \frac{d\theta_T}{dt} = q(t) \qquad \ldots (18)$$

de las ecuaciones (1) y (9):

$$T_T = \frac{1}{K_p}\,(P_0 + \gamma h) \qquad \ldots (19)$$

de las ecuaciones (2), (3), (13) y (19):

$$J_T \frac{d^2\theta_T}{dt^2} + D_\theta \frac{d\theta_T}{dt} = \frac{1}{K_p}(P_0 + \gamma h) \qquad \ldots (20)$$

de la ecuación (20):

$$h = \frac{J_T K_p}{\gamma}\frac{d^2\theta_T}{dt^2} + \frac{D_\theta K_p}{\gamma}\frac{d\theta_T}{dt} - \frac{1}{\gamma}P_0 \qquad \ldots (21)$$

sustituyendo la ecuación (21) en la (18), se tiene:

$$\frac{AJ_T K_p}{\gamma}\frac{d^3\theta_T}{dt^3} + \frac{AD_\theta K_p}{\gamma}\frac{d^2\theta_T}{dt^2} + \frac{1}{K_q}\frac{d\theta_T}{dt} = q(t) \qquad \ldots (22)$$

de las ecuaciones (4), (10) y (15):

$$K_f\, i_G = K_T(\theta_T - \theta_G) \qquad \ldots (23)$$

de las ecuaciones (5), (6), (7), (11), (16) y (17):

$$L_a \frac{di_G}{dt} + (R_a + R_c)i_G = K_b \frac{d\theta_G}{dt} \qquad \ldots (24)$$

de la ecuación (23):

$$\theta_G = \theta_T - \frac{K_f}{K_T} i_G \qquad \ldots (25)$$

sustituyendo la ecuación (25) en la (24):

$$\left[L_a + \frac{K_b K_f}{K_T}\right]\frac{di_G}{dt} + (R_a + R_c)i_G = K_b \frac{d\theta_T}{dt} \qquad \ldots (26)$$

y por lo tanto:

$$\frac{d\theta_T}{dt} = \left[\frac{L_a}{K_b} + \frac{K_f}{K_T}\right]\frac{di_G}{dt} + \frac{R_a + R_c}{K_b}\, i_G \quad \ldots (27)$$

sustituyendo la ecuación (27) en la (22), se tiene:

$$\frac{AJ_TK_p}{\Upsilon}\left[\frac{L_a}{K_b} + \frac{K_f}{K_T}\right]\frac{d^3i_G}{dt^3} + \frac{AJ_TK_p}{\Upsilon}\left[\frac{R_a + R_c}{K_b}\right]\frac{d^2i_G}{dt^2} + \frac{AD_\theta K_p}{\Upsilon}\left[\frac{L_a}{K_b} + \frac{K_f}{K_T}\right]\frac{d^2i_G}{dt^2}$$

$$+ \frac{AD_\theta K_p}{\Upsilon}\left[\frac{R_a + R_c}{K_b}\right]\frac{di_G}{dt} + \frac{1}{K_q}\left[\frac{L_a}{K_b} + \frac{K_f}{K_T}\right]\frac{di_G}{dt} + \frac{R_a + R_c}{K_qK_b}\, i_G = q(t)$$

$$\ldots (28)$$

Reagrupando términos semejantes y normalizando se tiene que el modelo matemático del sistema en función de la corriente que fluye a través de la resistencia de carga (R_c), está dado por:

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{d^3i_G}{dt^3} + \frac{J_TK_T(R_a + R_c) + D_\theta(L_aK_T + K_bK_f)}{J_T(L_aK_T + K_bK_f)}\frac{d^2i_G}{dt^2} + \\ &+ \frac{AD_\theta\, K_pK_qK_T(R_a + R_c) + \Upsilon(L_aK_T + K_bK_f)}{AJ_T\, K_qK_p(L_aK_T + K_bK_f)}\frac{di_G}{dt} + \\ &+ \frac{\Upsilon\, K_T(R_a + R_c)}{AJ_T\, K_pK_q(L_aK_T + K_bK_f)}\, i_G = \frac{\Upsilon\, K_bK_T}{AJ_T\, K_p(L_aK_T + K_bK_f)}\, q(t) \end{aligned}}$$

CAPITULO III SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

III.1 CARACTERÍSTICAS GENERALES

Los sistemas de primer orden se caracterizan principalmente por tener un elemento capaz de almacenar energía. Este tipo de sistemas se representan desde el punto de vista matemático por ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Estos sistemas pueden ser de alguno de los siguientes tipos:

- Eléctricos
- Mecánicos
  - a) Traslacionales
  - b) Rotacionales
- Térmicos
- Hidráulicos
- Híbridos *

Por otra parte, un sistema de primer orden en general, se representa por un modelo matemático de la forma:

$$a_1\frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)$$

Normalizando con respecto a la derivada de mayor orden, se tiene:

$$\frac{dx}{dt} + \frac{a_0}{a_1} x = \frac{1}{a_1} f(t)$$

haciendo las siguientes asignaciones:

$$b_0 = \frac{a_0}{a_1} \quad \text{y} \quad b_1 = \frac{1}{a_1}$$

entonces el modelo matemático se expresa de la forma:

$$\frac{dx}{dt} + b_0 x = b_1 f(t)$$

*Algunos casos especiales.

donde:

b_0: es la frecuencia natural del sistema

b_1: es el factor que afecta la excitación externa o entrada aplicada al sistema

$f(t)$: es la excitación externa o entrada aplicada al sistema

$x(t)$: es la variable de estudio o interés del sistema considerado

Existe una gran cantidad de métodos para obtener la solución de ecuaciones diferenciales de este tipo. En este caso únicamente se emplearán el método de coeficientes indeterminados y el método directo por transformada de Laplace.

Ejemplo III.1

Considérese un sistema de primer orden, representado mediante la ecuación:

$$\frac{1}{2}\frac{dx}{dt} + 2x = \cos t$$

el estado inicial de la variable en el tiempo cero es:

$$x(0) = 1$$

Obtener la solución general:

a) Por el método de coeficientes indeterminados

b) Por el método de transformada de Laplace

Solución:

Normalizando con respecto a la derivada de mayor orden se tiene:

$$\frac{dx}{dt} + 4x = 2\cos t \qquad \ldots (1)$$

a) Método de coeficientes indeterminados.
Solución homogénea:
Para este caso la ecuación homogénea está dada por:

$$\frac{dx}{dt} + 4x = 0 \qquad \ldots (2)$$

la ecuación característica es:

$$m + 4 = 0 \qquad \ldots (3)$$

de donde:

$$m = -4 \qquad \ldots (4)$$

es la raíz que satisface la ecuación característica y se le denomina la frecuencia natural del sistema; por lo tanto, la solución homogénea tendrá la forma:

$$x_h(t) = K_1\, e^{mt} \qquad \ldots (5)$$

así:

$$x_h(t) = K_1\, e^{-4t} \qquad \ldots (6)$$

Solución particular:

Debido a que la excitación externa es una función senoidal, la solución particular es una combinación lineal de la entrada y es de la forma:

$$x_p(t) = K_2 \text{ sen } t + K_3 \cos t \qquad \ldots (7)$$

La solución particular propuesta debe satisfacer a la ecuación diferencial original, por lo tanto para determinar los valores de las constantes K_2 y K_3 es necesario derivar la solución particular y sustituir ambas ecuaciones en la ecuación diferencial original, esto es:

$$\frac{dx_p}{dt} = K_2 \cos t - K_3 \text{ sen } t \qquad \ldots (8)$$

sustituyendo las ecuaciones (7) y (8) en la (1), se tiene:

$$K_2 \cos t - K_3 \text{ sen } t + 4K_2 \text{ sen } t + 4K_3 \cos t = 2 \cos t \qquad \ldots (9)$$

Agrupando términos semejantes:

$$(K_2 + 4K_3)\cos t + (4K_2 - K_3)\text{sen } t = 2\cos t \quad \ldots (10)$$

De la ecuación (10) se puede generar un sistema de ecuaciones simultáneas para determinar los valores de K_2 y K_3, es decir, al igualar los términos semejantes de esta ecuación, se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} K_2 + 4K_3 &= 2 \\ 4K_2 - K_3 &= 0 \end{aligned}\right| \quad \ldots (11)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior en forma simultánea se tiene que los valores de K_2 y K_3 son:

$$K_2 = {}^2/17$$

$$K_3 = {}^8/17$$

sustituyendo los valores de K_2 y K_3 en la ecuación (7) la solución particular es:

$$x_p(t) = \frac{2}{17}\text{ sen } t + \frac{8}{17}\cos t \quad \ldots (12)$$

Para obtener la solución general del sistema, se deben sumar la solución homogénea y particular, esto es:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad \ldots (13)$$

sumando las ecuaciones (6) y (12) se tiene que la solución general es:

$$x(t) = K_1\, e^{-4t} + \frac{2}{17}\text{ sen } t + \frac{8}{17}\cos t \quad \ldots (14)$$

Para encontrar el valor de la constante K_1, es necesario emplear el dato de condiciones iniciales en la ecuación (14), por lo tanto:

$$x(0) = 1 = K_1 + \frac{8}{17} \quad \ldots (15)$$

de donde se obtiene:

$$K_1 = \frac{9}{17}$$

sustituyendo el valor de K_1 en la ecuación (14), la solución general está dada por:

$$\boxed{x(t) = \frac{9}{17} e^{-4t} + \frac{2}{17} \operatorname{sen} t + \frac{8}{17} \cos t} \qquad \ldots (I)$$

b) Método de transformada de Laplace.
El método de solución mediante la transformada de Laplace, resulta ser más simple y rápido que el de coeficientes indeterminados.
Aplicando la transformada de Laplace a cada uno de los términos de la ecuación (1), se tiene:

$$L\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = SX(S) - X(0) \qquad \ldots (16)$$

$$L\left\{ 4X \right\} = 4X(S) \qquad \ldots (17)$$

$$L\left\{ 2 \cos t \right\} = \frac{2S}{S^2 + 1} \qquad \ldots (18)$$

sustituyendo las ecuaciones (16), (17) y (18) en la (1), se tiene:

$$SX(S) - 1 + 4X(S) = \frac{2S}{S^2 + 1} \qquad \ldots (19)$$

Agrupando y factorizando los términos comunes en X(S) se obtiene:

$$X(S)(S + 4) - 1 = \frac{2S}{S^2 + 1} \qquad \ldots (20)$$

despejando X(S):

$$X(S) = \left[\frac{2S}{S^2 + 1} + 1 \right] \frac{1}{S + 4} \qquad \ldots (21)$$

o bien:

$$X(S) = \frac{S^2 + 2S + 1}{(S + 4)(S^2 + 1)} \qquad \ldots (22)$$

Para encontrar la solución general (x(t)) es necesario obtener la transformada inversa de Laplace de X(S), esto es:

$$x(t) = L^{-1}\left\{ X(S) \right\} \qquad \ldots (23)$$

No es posible obtener la transformada de Laplace de X(S) directamente, por lo que es necesario hacer una expansión en fracciones parciales,* para X(S), esto es:

$$X(S) = \frac{S^2 + 2S + 1}{(S + 4)(S^2 + 1)} = \frac{A}{S + 4} + \frac{BS + C}{S^2 + 1} \qquad \ldots (24)$$

Aplicando el método descrito en el apéndice de transformada de Laplace, se tiene que:

Los valores de A, B y C son:

$$A = \frac{9}{17}$$

$$B = \frac{8}{17}$$

$$C = \frac{2}{17}$$

sustituyendo los valores de A, B y C en la ecuación (24), se tiene:

$$X(S) = \frac{S^2 + 2S + 1}{(S + 4)(S^2 + 1)} = \frac{9/17}{S + 4} + \frac{(8/17)S + 2/17}{S^2 + 1} \quad . (25)$$

Reordenando la ecuación (25), es posible obtener la solución general del sistema, aplicando la transformada de inversa de Laplace, esto es:

$$x(t) = L^{-1}\left\{\frac{9/17}{S + 4}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{8/17\ S}{S^2 + 1}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{2/17}{S^2 + 1}\right\}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{9}{17} e^{-4t} + \frac{8}{17} \cos t + \frac{2}{17} \operatorname{sen} t} \qquad \ldots (II)$$

Comparando las ecuaciones (I) y (II) se puede apreciar que son idénticas.

A través de este ejemplo se mostró la aplicación de los dos métodos sugeridos para la solución de ecuaciones diferenciales de primer orden. La representación gráfica se muestra a continuación:

*Ver el apéndice de transformada de Laplace.

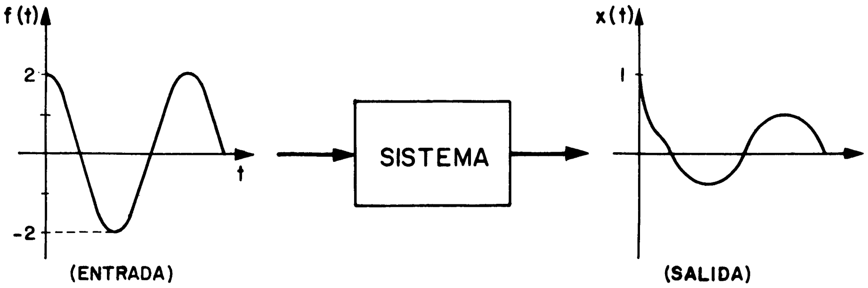
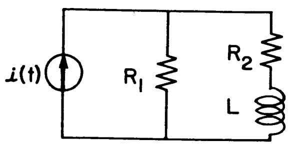
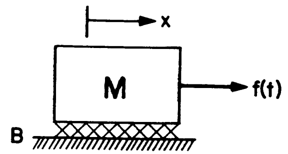
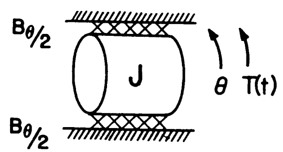


Figura III.1

Como se mencionó, los sistemas de primer orden pueden en general ser del tipo eléctrico, mecánico, hidráulico, térmico e incluso híbridos (casos especiales). A fin de reafirmar esta idea en la tabla III.1 se muestran algunos ejemplos de sistemas de este tipo y los modelos matemáticos de los mismos.

SISTEMA	MODELO
	$\frac{di_L}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{L} i_L = \frac{R_1}{L} i(t)$
	$\frac{dv}{dt} + \frac{B}{M} v = \frac{1}{M} f(t)$
	$\frac{d\omega}{dt} + \frac{B\theta}{J} \omega = \frac{1}{J} T(t)$

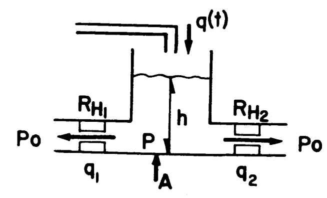
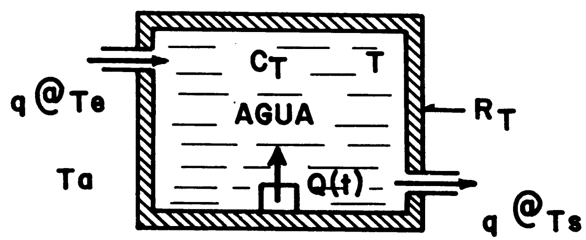
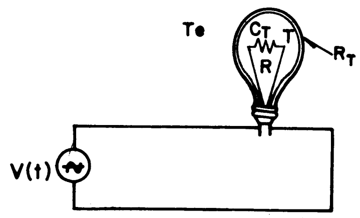
	$\frac{dh}{dt} + \frac{\gamma}{A}\left[\frac{1}{R_{H1}} + \frac{1}{R_{H2}}\right] h = \frac{1}{A}\, q(t)$
	$\frac{dT}{dt} + \frac{1}{C_T}\left[K + \frac{1}{R_T}\right] T = \frac{1}{C_T}\, Q(t)$ donde: $K = qs\rho$; s: calor específico del agua $Te = Ta = 0$
	$\frac{dT}{dt} + \frac{1}{C_T R_T} = \frac{1}{C_T\, R}\, v^2(t)$ considerando: $Te = 0$

Tabla III.1

III.2 Tipos de Respuestas de Sistemas de Primer Orden

Una forma para analizar y/o diseñar sistemas de primer orden es a través del estudio de los tipos de respuestas de éstos. En general la respuesta de un sistema depende de sus características propias, su estado inicial y la excitación externa o entrada aplicada a éste, en forma esquemática esto es:

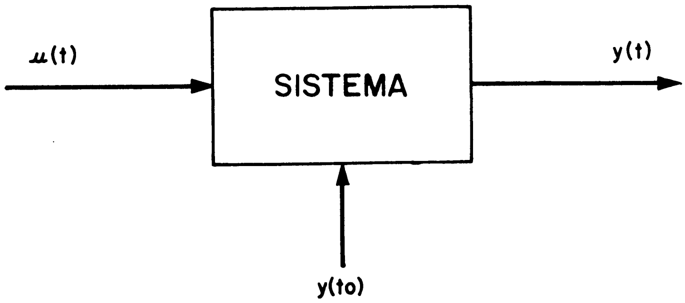


Figura III.2

donde:

- $u(t)$: es la excitación externa o entrada aplicada al sistema
- $y(t_0)$: es el estado inicial del sistema en el tiempo inicial t_0
- $y(t)$: es la salida producida por el sistema

Los tipos de respuesta con base en las condiciones mencionadas son:

- Libre
- Forzada
- Total
- Permanente
- Transitoria

Cada una de las respuestas están en función de los parámetros del sistema y de las condiciones a las que está sometido (estado inicial y entrada).

Es aquélla que produce el sistema cuando la entrada o excitación externa aplicada es cero y su estado inicial es diferente a cero, esto es:

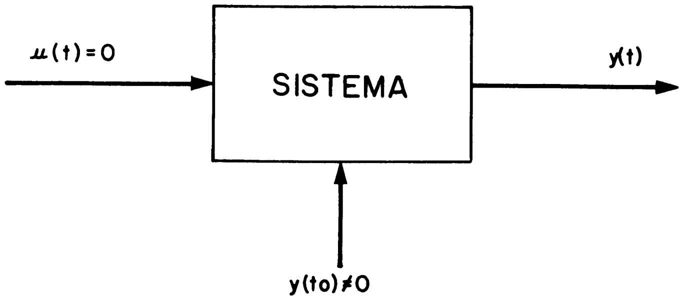


Figura III.3

por lo tanto, la respuesta libre del sistema depende únicamente de su estado inicial.

Ejemplo III.2

Obtener la respuesta libre para un sistema eléctrico formado por dos resistencias y un capacitor, conectados como se muestra en la figura:

$R_1 = R_2 = 12\,K\Omega$ y $C = 330\,\mu F$

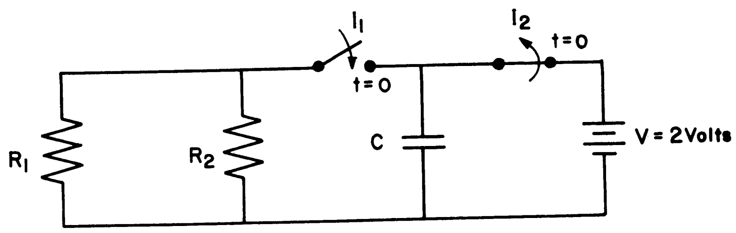


Figura III.4

Emplear como variable el voltaje en el capacitor.

Solución:

En el tiempo $t = 0$ el interruptor I_1 se cierra y el interruptor I_2 se abre, en este caso el circuito resultante para $t \geq 0$ es:

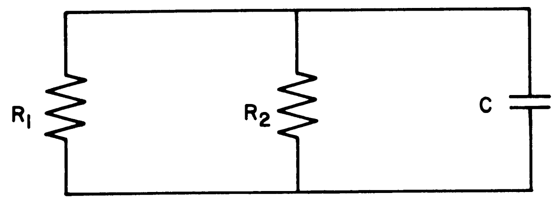


Figura III.5

para tiempos menores a $t = 0$ el capacitor C está conectado a la fuente de voltaje V, por lo tanto, el capacitor está cargado a un voltaje idéntico al de la fuente, de esta manera se considera que el estado inicial del sistema es:

$$V_C(0) = 2 \text{ Volts}$$

Obtención del modelo matemático del sistema.

Leyes de Elemento:

$$V_{R_1} = R_1 \, i_{R_1} \qquad \ldots (1)$$

$$V_{R_2} = R_2 \, i_{R_2} \qquad \ldots (2)$$

$$i_C = C \frac{dV_C}{dt} \qquad \ldots (3)$$

Leyes de Conjunto:

$$V_{R_1} = V_{R_2} = V_C \qquad \ldots (4)$$

$$i_{R_1} + i_{R_2} + i_C = 0 \qquad \ldots (5)$$

de las ecuaciones (1) y (4) se tiene:

$$i_{R_1} = \frac{V_C}{R_1}$$

de las ecuaciones (2) y (4) se tiene:

$$i_{R2} = \frac{V_C}{R_2} \qquad \dots (7)$$

sustituyendo las ecuaciones (3), (6) y (7) en la (5) se tiene que el modelo matemático del sistema es:

$$C\,\frac{dV_C}{dt} + \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right] V_C = 0 \qquad \dots (8)$$

el modelo matemático en forma normalizada es:

$$\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{C}\left[\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}\right] V_C = 0 \qquad \dots (9)$$

La respuesta libre del sistema se obtiene al resolver la ecuación (9).

Solución homogénea:

La ecuación característica está dada en este caso por:

$$m + \frac{1}{C}\left[\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}\right] = 0 \qquad \dots (10)$$

por lo tanto, la frecuencia natural del sistema es:

$$m = -\frac{1}{C}\left[\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}\right] \qquad \dots (11)$$

y la solución homogénea es:

$$V_C(t)_h = K_1\, e^{-\frac{1}{C}\left[\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}\right]t} \qquad \dots (12)$$

Solución particular:

Debido a que en este caso la excitación externa es cero, la solución particular es cero. La respuesta libre del sistema está dada por la ecuación (12):

$$V_C(t)_{LIB} = K_1\, e^{-\frac{1}{C}\left[\frac{R_1 + R_2}{R_1R_2}\right]t} \qquad \ldots (13)$$

para evaluar la constante K_1 es necesario emplear las condiciones iniciales en la ecuación (13), esto es:

$$V_C(0) = 2 = K_1 \qquad \ldots (14)$$

sustituyendo el valor de K_1 en la ecuación (13), se tiene que la respuesta libre es:

$$V_C(t)_{LIB} = 2\, e^{-\frac{1}{C}\left[\frac{R_1 + R_2}{R_1R_1}\right]t} \qquad \ldots (15)$$

sustituyendo los valores de R_1, R_2 y C en esta última ecuación, la respuesta libre es:

$$V_C(t)_{LIB} = 2e^{-0.505t} \qquad \ldots (I)$$

gráficamente:

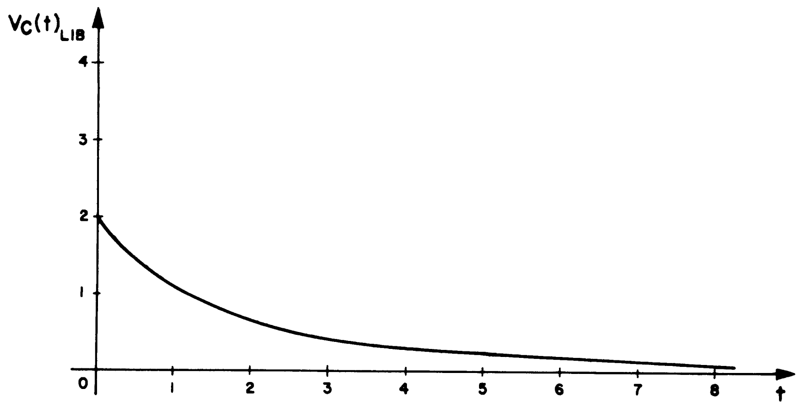


Figura III.6

RESPUESTA FORZADA

Es aquélla que produce el sistema cuando la entrada o excitación externa aplicada a éste es distinta de cero y su estado inicial es nulo, esto es:

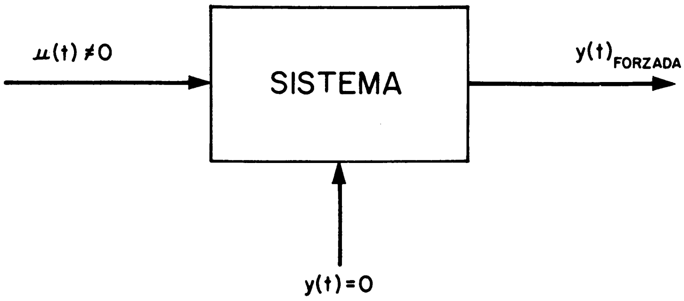
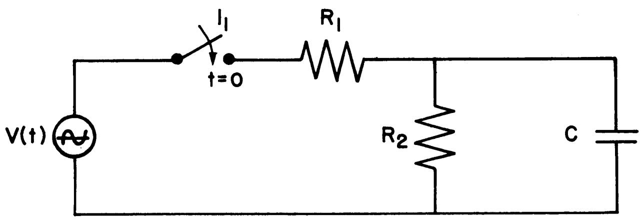


Figura III.7

por lo tanto, la respuesta forzada del sistema depende únicamente de la entrada o excitación externa aplicada.

Ejemplo III.3

Obtener la respuesta forzada para un sistema eléctrico formado por dos resistencias, un capacitor y una fuente de voltaje interconectados como se muestra en la figura. Emplear como variable el voltaje en el capacitor.



$V(t) = 10 + 0.5 \text{ Sen } t$; $R_1 = R_2 = 12K\Omega$; $C = 330\mu F$

Figura III. 8

Solución:

En el tiempo cero, el interruptor I_1 se cierra y el circuito resultante es:

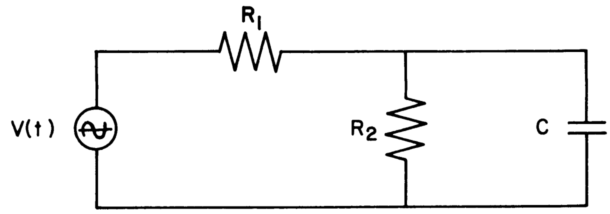


Figura III.9

El estado inicial del sistema es, entonces:

$$V_C(0) = 0$$

El modelo matemático del sistema está dado por:

$$\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{C}\left[\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}\right] V_C = \frac{1}{R_1 C} V(t) \qquad \ldots (1)$$

la respuesta forzada del sistema se obtiene al resolver la ecuación (1).

Solución homogénea:

Para este caso, la ecuación diferencial homogénea es:

$$\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{C}\left[\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}\right] V_C = 0 \qquad \ldots (2)$$

por lo tanto, la ecuación característica está dada por:

$$m + \frac{1}{C}\left[\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}\right] = 0 \qquad \ldots (3)$$

de esta última ecuación, se tiene que la frecuencia natural del sistema es:

$$m = -\frac{1}{C}\left[\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}\right] \qquad \ldots (4)$$

y la solución homogénea está dada por:

$$V_C(t)_h = K_1\, e^{-\frac{1}{C}\left[\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}\right]t} \qquad \ldots (5)$$

Solución particular:

Debido a que la excitación externa es la suma lineal de una constante y una función senoidal, la solución que se propone es de la forma:

$$V_C(t)_p = K_2 + K_3 \operatorname{sen} t + K_4 \cos t \qquad \ldots (6)$$

derivando con respecto al tiempo la solución propuesta se tiene:

$$\frac{dV_{Cp}}{dt} = K_3 \cos t - K_4 \operatorname{sen} t \qquad \ldots (7)$$

para evaluar las constantes K_2, K_3 y K_4, es necesario sustituir las ecuaciones (6), (7) y la excitación externa en la ecuación (1), se tiene:

$$\left[\frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2}K_3 - K_4\right]\operatorname{sen} t + \left[K_3 + \frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2}K_4\right]\cos t +$$

$$+ \frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2}K_2 = \frac{1}{CR_1}10 + \frac{0.5}{CR_1}\operatorname{sen} t \qquad \ldots (8)$$

Igualando términos semejantes de la ecuación (8), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones para evaluar las constantes K_2, K_3 y K_4:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2} K_2 &= \frac{1}{CR_1} 10 \\
\frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2} K_3 - K_4 &= \frac{0.5}{CR_1} \\
K_3 + \frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2} K_4 &= 0
\end{aligned}\right| \qquad \ldots (9)$$

Resolviendo las tres últimas ecuaciones en forma simultánea, se tiene que los valores de K_2, K_3 y K_4 son:

$$K_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} 10$$

$$K_3 = \frac{0.5 \quad (R_1 + R_2)\ R_2}{(R_1 + R_2)^2 + C^2R_1^2R_2^2}$$

$$K_4 = \frac{-\ 0.5\ C \quad R_1\ R_2^2}{(R_1 + R_2)^2 + C^2R_1^2R_2^2}$$

sustituyendo los valores de K_2, K_3 y K_4 en la ecuación (6), se tiene que la solución particular es:

$$V_C(t)_p = \frac{R_2}{R_1 + R_2} 10 + \frac{0.5\ (R_1 + R_2)R_2}{(R_1 + R_2)^2 + C^2R_1^2R_2^2} \operatorname{sen} t -$$

$$- \frac{0.5\ CR_1\ R_2^2}{(R_1 + R_2) \quad + C^2R_1^2R_2^2} \cos t \qquad \ldots (10)$$

la solución general de la ecuación diferencial original (ecuación (1)) se obtiene al realizar la suma lineal de las ecuaciones (5) y (10), siendo ésta:

$$V_C(t) = K_1\ e^{-\left[\frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2}\right]t} + \left[\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right]10 +$$

$$+\left[\frac{0.5\ (R_1 + R_2)R_2}{(R_1 + R_2)^2 + C^2R_1^2R_2^2}\right]\operatorname{sen} t - \left[\frac{0.5\ CR_1\ R_2^2}{(R_1 + R_2)^2 + C^2R_1^2R_2^2}\right] \cos t$$

$$\ldots (11)$$

Para obtener la respuesta forzada del sistema, es necesario evaluar la constante K_1 de la ecuación (11) empleando las condiciones iniciales, que en este caso son cero, esto es:

$$V_C(0) = 0 = K_1 + \frac{R_2}{R_1 + R_2} 10 - \frac{0.5\ CR_1R_2^2}{(R_1 + R_2)^2 + C^2R_1^2R_2^2} \quad \ldots (12)$$

por lo tanto K_1 es:

$$K_1 = \frac{0.5\ C\ R_1R_2^2}{(R_1 + R_2)^2 + C^2R_1^2R_2^2} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} 10$$

sustituyendo los valores de R_1, R_2 y C en las expresiones para K_1, K_2, K_3 y K_4, éstos son:

$$K_1 = -4.9$$

$$K_2 = 5$$

$$K_3 = 0.051$$

$$K_4 = -0.1$$

sustituyendo estos valores en la ecuación (11), la respuesta forzada es:

$$\boxed{V_C(t)_{FOR} = 5 - 4.9\ e^{-0.505t} + 0.051 \text{ sen } t - 0.1 \cos t} \quad \ldots (II)$$

gráficamente:

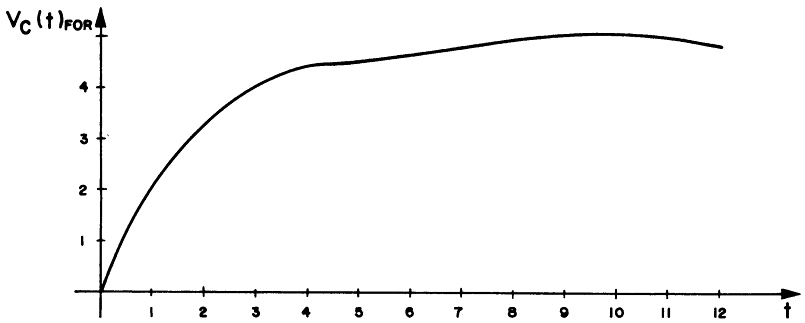


Figura III.10

Es aquélla producida por el sistema cuando la entrada o excitación externa aplicada y su estado inicial son distintos de cero, esto es:

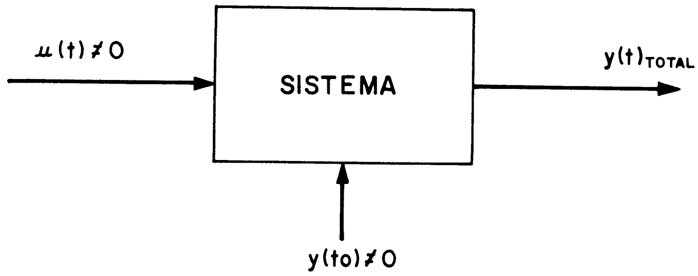


Figura III.11

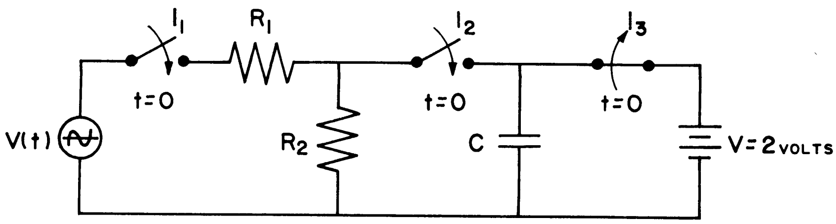
por lo tanto, la respuesta total del sistema depende de la entrada aplicada y de su estado inicial.

Por otra parte, si se conocen las respuestas libre y forzada del sistema, la respuesta total se puede obtener mediante la expresión:

$$y(t)_{TOTAL} = y(t)_{LIBRE} + y(t)_{FORZADA}$$

Ejemplo III.4

Obtener la respuesta total para un sistema eléctrico formado por dos resistencias, un capacitor y dos fuentes de voltaje como se muestra en la figura:



$V(t)=10+0.5$ Sen t ; $R_1=R_2=12K\Omega$; $C=330\mu F$

Figura III.12

Emplear como variable el voltaje en el capacitor.

Solución:

Cuando el tiempo es igual a cero se tiene que los interruptores I_1 e I_2 se cierran y el interruptor I_3 se abre, el sistema eléctrico puede ser dibujado de la forma siguiente:

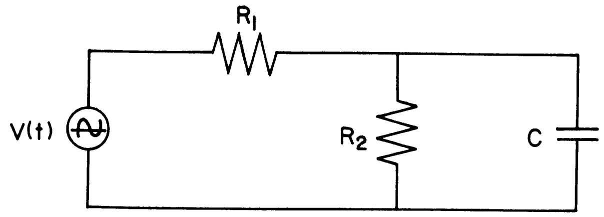


Figura III.13

El estado inicial del sistema es entonces:

$$V_C(0) = 2 \text{ Volts}$$

El modelo matemático del sistema está dado por la ecuación:

$$\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{C}\left[\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}\right] V_C = \frac{1}{R_1 C} V(t) \qquad \ldots (1)$$

La respuesta total del sistema, se obtiene resolviendo la ecuación (1).

Solución homogénea:

En este caso la ecuación diferencial homogénea es:

$$\frac{dV_C}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2} V_C = 0 \qquad \ldots (2)$$

la ecuación característica está dada por:

$$m + \frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2} = 0 \qquad \ldots (3)$$

y la frecuencia natural del sistema es:

$$m = -\frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2} \qquad \ldots (4)$$

por lo tanto, la solución homogénea está dada por:

$$V_C(t)_h = K_1\, e^{-\frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2}\, t} \qquad \ldots (5)$$

Solución particular:

Debido a que la excitación externa es la suma lineal de una constante y una función senoidal, la solución que se propone es de la forma:

$$V_C(t)_p = K_2 + K_3 \operatorname{sen} t + K_4 \cos t \qquad \ldots (6)$$

derivando con respecto al tiempo la ecuación (6) se tiene:

$$\frac{dV_{Cp}}{dt} = K_3 \cos t - K_4 \operatorname{sen} t \qquad \ldots (7)$$

Para evaluar las constantes K_2, K_3 y K_4 es necesario sustituir las ecuaciones (6), (7) y la excitación externa en la ecuación (1), esto es:

$$\left[\frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2} K_3 - K_4\right] \operatorname{sen} t + \left[K_3 + \frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2} K_4\right] \cos t + \frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2} K_2 =$$

$$= \frac{10}{CR_1} + \frac{0.5}{CR_1} \operatorname{sen} t \qquad \ldots (8)$$

igualando los términos semejantes de la ecuación (8), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2} K_2 = \frac{1}{CR_1}\, 10 \\ &\frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2} K_3 - K_4 = \frac{0.5}{CR_1} \\ &K_3 + \frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2} K_4 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots (9)$$

Resolviendo simultáneamente las tres últimas ecuaciones, se tiene que los valores de K_2, K_3 y K_4 son:

$$K_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} 10$$

$$K_3 = \frac{0.5\ (R_1 + R_2)R_2}{(R_1 + R_2)^2 + C^2R_1^2R_2^2}$$

$$K_4 = - \frac{0.5\ \ CR_1R_2^2}{(R_1 + R_2)^2 + C^2R_1^2R_2^2}$$

Sustituyendo estas constantes en la ecuación (6), se tiene que la solución particular es:

$$V_C(t)_p = \frac{R_2}{R_1 + R_2} 10 + \frac{0.5\ (R_1 + R_2)R_2}{(R_1 + R_2)^2 + C^2R_1^2R_2^2} \text{ sen } t -$$

$$- \frac{0.5\ CR_1R_2^2}{(R_1 + R_2)^2 + C^2R_1^2R_2^2} \cos t \qquad \ldots (10)$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial (1) es:

$$V_C(t) = K_1\, e^{-\frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2} t} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} 10 + \frac{0.5\ (R_1 + R_2)R_2}{(R_1 + R_2)^2 + C^2R_1^2R_2^2} \text{ sen } t -$$

$$- \frac{0.5\ CR_1R_2^2}{(R_1 + R_2)^2 + C^2R_1^2R_2^2} \cos t \qquad \ldots (11)$$

Para obtener la respuesta total es necesario evaluar la constante K_1 utilizando las condiciones iniciales del sistema y la ecuación (11), esto es:

$$V_C(0) = 2 = K_1 + \frac{R_2}{R_2 + R_1} 10 - \frac{0.5\ C\ R_1R_2^2}{(R_1 + R_2)^2 + C^2R_1^2R_2^2}$$

$$\ldots (12)$$

de donde:

$$K_1 = 2 + \frac{0.5\ C\ R_1R_2^2}{(R_1 + R_2)^2 + C^2R_1^2R_2^2} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} 10 \; .$$

Sustituyendo los valores de R_1, R_2 y C en las expresiones para K_1, K_2, K_3 y K_4 se tiene:

$$K_1 = -\ 2.9$$

$$K_2 = 5$$

$$K_3 = 0.051$$

$$K_4 = -\ 0.1$$

sustituyendo estos valores en la ecuación (11), se tiene que la respuesta total del sistema es:

$$\boxed{V_C(t)_{TOT} = 5 - 2.9\ e^{-0.505t} + 0.051 \text{ sen } t - 0.1 \cos t}$$

... (III)

Otra manera de obtener la respuesta total del sistema es sumando la respuesta libre y la respuesta forzada, de esta forma se puede además verificar si la respuesta total se ha obtenido correctamente. En este caso la respuesta libre está dada por la ecuación (I) y la respuesta forzada por la ecuación (II) como:

$$V_C(t)_{TOT} = V_C(t)_{LIB} + V_C(t)_{FOR}$$

la respuesta total del sistema es:

$$\boxed{V_C(t)_{TOT} = 5 - 2.9\ e^{-0.505t} + 0.051 \text{ sen } t - 0.1 \cos t}$$

... (IV)

Comparando las ecuaciones (III) y (IV) se aprecia que son idénticas, con esto se comprueba que la respuesta total para un sistema dado es posible obtenerlo mediante dos procedimientos distintos.

Gráficamente:

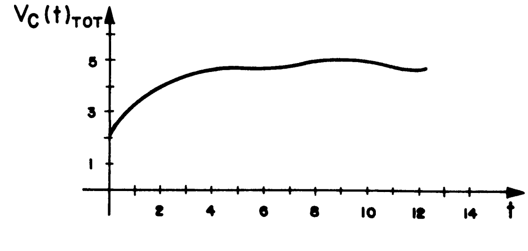


Figura III.14

RESPUESTA PERMANENTE

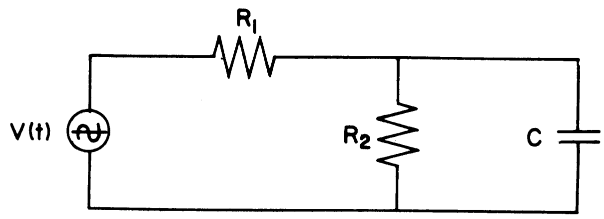
Este tipo de respuesta, denominada también respuesta en estado estable, es la que produce el sistema después de que ha transcurrido un cierto tiempo (generalmente grande). Se puede obtener mediante diversos métodos; sin embargo, en este caso se obtiene aplicando la expresión:

$$y(t)_{PERMANENTE} = \lim_{t \to \infty} y(t)_{TOTAL}$$

por lo tanto, se puede afirmar que la respuesta permanente depende de la entrada aplicada al sistema, de su estado inicial y de tiempos grandes.

Ejemplo III.5

Obtener la respuesta permanente para el sistema eléctrico descrito en el ejemplo III.4.



$V(t) = 10 + 0.5 \text{ Sen } t$; $R_1 = R_2 = 12 K\Omega$; $C = 330 \mu F$; $V_C(0) = 2$ volts

Figura III.15

Solución:

El modelo matemático es:

$$\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{C}\left[\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}\right] V_C = \frac{1}{R_1 C}\, V(t) \qquad \ldots (1)$$

por otra parte, la respuesta total del sistema, está dada por:

$$V_C(t)_{TOT} = 5 - 2.9\, e^{-0.505t} + 0.051 \,\text{sen}\, t - 0.1 \cos t \qquad \ldots (2)$$

La respuesta permanente del sistema se obtiene al tomar el límite de la ecuación (2) cuando el tiempo tiende a infinito, esto es:

$$V_C(t)_{PER} = \lim_{t \to \infty} V_C(t)_{TOT} \qquad \ldots (3)$$

la respuesta permanente es:

$$V_C(t)_{PER} = 5 + 0.051 \,\text{sen}\, t - 0.1 \cos t$$

Gráficamente:

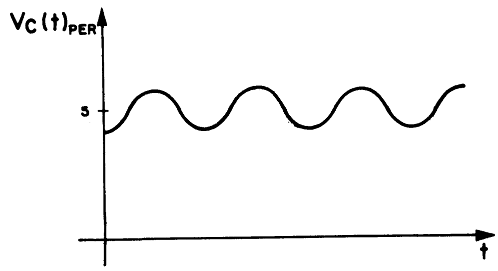


Figura III.16

RESPUESTA TRANSITORIA

Es aquélla que produce el sistema antes de alcanzar su estado estable; por otra parte se tiene que la respuesta total es la suma algebraica de la permanente y la transitoria, esto es:

$$y(t)_{TOTAL} = y(t)_{TRANSITORIA} + y(t)_{PERMANENTE}$$

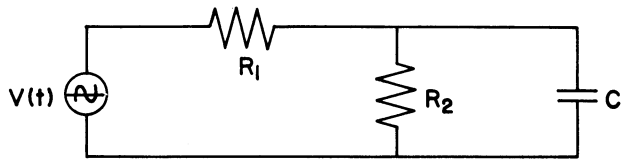
por lo tanto, de la expresión anterior se tiene que la respuesta transitoria está dada por:

$$y(t)_{TRANSITORIA} = y(t)_{TOTAL} - y(t)_{PERMANENTE}$$

en este caso también se tiene que la respuesta transitoria depende de la excitación externa aplicada y el estado inicial del sistema.

Ejemplo III.6

Obtener la respuesta transitoria para el sistema eléctrico descrito en el ejemplo III.4



V(t)=10+0.5 Sen t ; $R_1=R_2=12K\Omega$; $C=330\mu F$; $V_C(0)=2$ VOLTS

Figura III.17

Solución:

El modelo matemátio del sistema es:

$$\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{C}\left[\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}\right] V_C = \frac{1}{R_1 C}\, V(t) \qquad \ldots (1)$$

La respuesta total del sistema está dada por:

$$V_C(t)_{TOT} = 5 - 2.9\, e^{-0.505t} + 0.051 \text{ sen } t - 0.1 \cos t \qquad \ldots (2)$$

Por otra parte, la respuesta permanente es:

$$V_C(t)_{PER} = 5 + 0.051 \text{ sen } t - 0.1 \cos t \qquad \ldots (3)$$

La respuesta transitoria del sistema se obtiene a partir de las ecuaciones (2) y (3), esto es:

$$V_C(t)_{TRAN} = V_C(t)_{TOT} - V_C(t)_{PER} \qquad \ldots (4)$$

La respuesta transitoria es:

$$\boxed{V_C(t)_{TRAN} = -\ 2.9\ e^{-0.505t}}$$

Gráficamente:

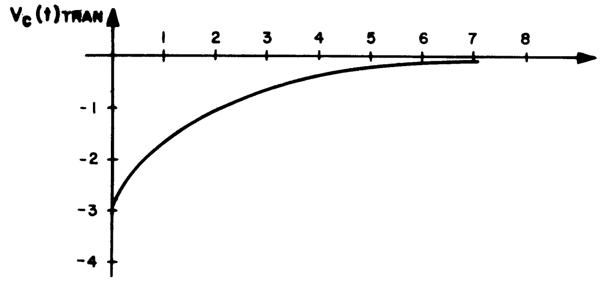
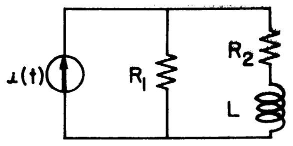


Figura III.18

A continuación se presentan algunos ejemplos para los sistemas de primer orden y sus diferentes tipos de respuestas.

SISTEMA Y MODELO MATEMATICO



$$\frac{di_L}{dt} + \left[\frac{R_1 + R_2}{L}\right] i_L = \frac{R_1}{L}\, i(t)$$

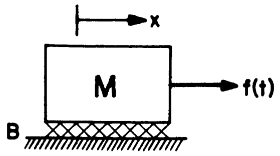
$R_1 = 0.5\,\Omega$; $R_2 = 10\,\Omega$; $L = 500\,\text{mH}$; $i(t) = 50 + 10$ sen t A :

$i_L(0) = 5$ A

$$\frac{di_L}{dt} + 21\, i_L = 50 + 10 \text{ sen } t$$

TIPO DE RESPUESTA	
LIBRE	$i_L(t) = 5\, e^{-21t}$
FORZADA	$i_L(t) = 2.38 - 2.36\, e^{-21t} - 0.02 \cos t + 0.475 \text{ sen } t$
TOTAL	$i_L(t) = 2.38 + 2.64\, e^{-21t} - 0.02 \cos t + 0.475 \text{ sen } t$
PERM	$i_L(t) = 2.38 - 0.02 \cos t + 0.475 \text{ sen } t$
TRANS	$i_L(t) = 2.64\, e^{-21t}$

SISTEMA Y MODELO MATEMATICO



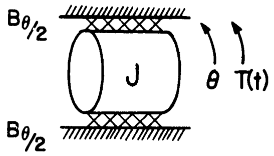
$$\frac{dv}{dt} + \frac{B}{M}\, v = \frac{1}{M}\, f(t)$$

$M = 600$ Kg ; $B = 3000 \frac{N \cdot s}{m}$; $f(t) = 600$ N ; $v(0) = 1 \frac{m}{s}$

$$\frac{dv}{dt} + 5v = 1$$

TIPO DE RESPUESTA		
	LIBRE	$v(t) = e^{-5t}$
	FORZADA	$v(t) = 0.2 - 0.2\, e^{-5t}$
	TOTAL	$v(t) = 0.2 + 0.8\, e^{-5t}$
	PERM	$v(t) = 0.2$
	TRANS	$v(t) = 0.8\, e^{-5t}$

S I S T E M A   Y   M O D E L O   M A T E M A T I C O



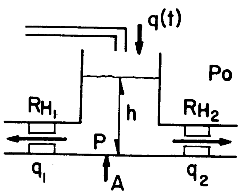
$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{B\theta}{J}\,\omega = \frac{1}{J}\,T(t)$$

$J = 8\ \frac{N \cdot m}{rad/s^2}$; $B_\theta = 1.5\ \frac{N \cdot m}{rad/s}$; $T(t) = 600$ sen t $N \cdot m$;

$\omega(0) = 10.5\ \frac{rad}{s}$ $\qquad$ $\frac{d\omega}{dt} + 0.1875\,\omega = 75$ sen t

TIPO DE RESPUESTA	
LIBRE	$\omega(t) = 10.5\ e^{-0.1875t}$
FORZADA	$\omega(t) = 72.45\ e^{-0.1875t} - 72.45 \cos t + 13.585$ sen t
TOTAL	$\omega(t) = 82.95\ e^{-0.1875t} - 72.45 \cos t + 13.585$ sen t
PERM	$\omega(t) = 13.485$ sen t $- 72.75 \cos t$
TRANS	$\omega(t) = 82.95\ e^{-0.1875t}$

SISTEMA Y MODELO MATEMATICO



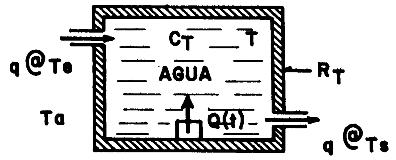
$$\frac{dh}{dt} + \frac{\gamma}{A}\left[\frac{1}{R_{H1}} + \frac{1}{R_{H2}}\right] h = \frac{1}{A}\,q(t)$$

$R_{H_1} = 4 \times 10^5 \ \frac{Pa \cdot s}{m}$; $R_{H_2} = 5 \times 10^5 \ \frac{Pa \cdot s}{m}$; $\gamma = 9.81 \times 10^3 \ \frac{Kg}{m^2 \cdot s^2}$; $A = 9 \ m^2$;

$q(t) = 0.2 + 0.155 \text{ sen } t \ \frac{m^3}{s}$; $h(0) = 0.5 \ m$

$$\frac{dh}{dt} + 4.9 \times 10^{-3}\, h = 22.22 \times 10^{-3} + 16.66 \times 10^{-3} \text{ sen } t$$

TIPO DE RESPUESTA		
	LIBRE	$h(t) = 0.5\, e^{-4.9 \times 10^{-3} t}$
	FORZADA	$h(t) = 4.53 - 4.52\, e^{-4.9 \times 10^{-3} t} + 8.16 \times 10^{-5} \text{ sen } t - 0.01 \cos t$
	TOTAL	$h(t) = 4.53 - 4.02\, e^{-4.9 \times 10^{-3} t} + 8.16 \times 10^{-5} \text{ sen } t - 0.01 \cos t$
	PERM	$h(t) = 4.53 + 8.16 \times 10^{-5} \text{ sen } t - 0.01 \cos t$
	TRANS	$h(t) = -\,4.02\, e^{-4.9 \times 10^{-3} t}$

SISTEMA Y MODELO MATEMATICO	
	$\frac{dT}{dt} + \frac{1}{C_T}\left[K + \frac{1}{R_T}\right] T = \frac{1}{C_T} Q(t)$ $T_a = T_e = 0$ $K = qs\rho$
$K = 14 \times 10^3 \frac{W}{K}$; $R_T = 1 \times 10^{-4} \frac{K}{W}$; $C_T = 42 \times 10^6 \frac{W \cdot S}{K}$; $Q(t) = 8 \times 10^6\, W$; $T(0) = 290\ K$ $\quad \frac{dT}{dt} + 5.71 \times 10^{-4}\, T = 0.19$	

TIPO DE RESPUESTA		
	LIBRE	$T(t) = 290\, e^{-5.71 \times 10^{-4}\, t}$
	FORZADA	$T(t) = 332.75 - 332.75\, e^{-5.71 \times 10^{-4} t}$
	TOTAL	$T(t) = 332.75 - 42.75\, e^{-5.71 \times 10^{-4}\, t}$
	PERM	$T(t) = 332.75$
	TRANS	$T(t) = -\,42.75\, e^{-5.71 \times 10^{-4}\, t}$

Tabla III.2

III.3 Respuesta Escalón

En general la respuesta escalón de un sistema se puede obtener si se satisfacen las siguientes condiciones:

- El estado inicial del sistema es nulo
- La entrada o excitación externa aplicada al sistema es una función escalón ($u_{-1}(t)$)

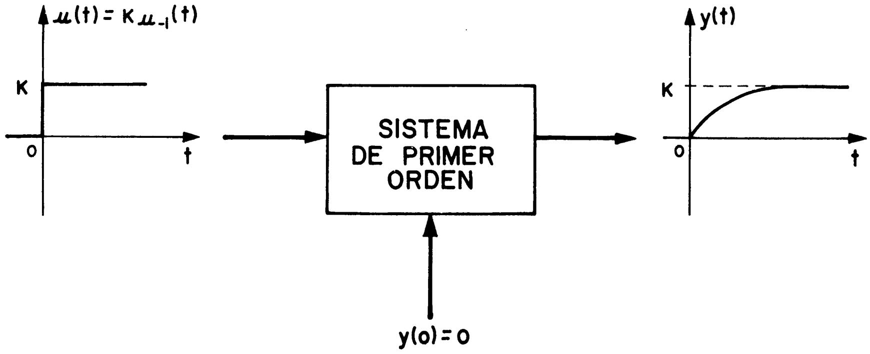


Figura III.19

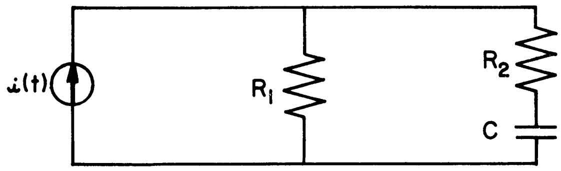
Por otra parte, la respuesta escalón tiene aplicaciones en el análisis y diseño de sistemas dinámicos.

La respuesta escalón puede obtenerse en el dominio del tiempo y en el de la frecuencia.

Para el primer caso es necesario resolver la ecuación diferencial que representa al sistema mediante el método de solución de coeficientes indeterminados; y para el segundo la ecuación diferencial se debe resolver por medio del método de transformada de Laplace.

Ejemplo III.7

Considérese un sistema eléctrico formado por dos resistencias, un capacitor y una fuente de corriente como se muestra en la figura:



$R_1 = 100\,\Omega$; $R_2 = 560\ K\Omega$; $C = 180\mu F$; $i(t) = u_{-1}(t)$

Figura III.20

Obtener la respuesta escalón:

a) En el dominio del tiempo

b) En el dominio de la frecuencia

Solución:

Obtención del modelo matemático del sistema.

Leyes de Elementos:

$$V_{R_1} = R_1\, i_{R_1} \qquad \ldots (1)$$

$$V_{R_2} = R_2\, i_{R_2} \qquad \ldots (2)$$

$$i_C = C\, \frac{dV_C}{dt} \qquad \ldots (3)$$

Leyes de Conjunto:

$$i(t) = i_{R_1} + i \qquad \ldots (4)$$

$$i = i_{R_2} = i_C \qquad \ldots (5)$$

$$V_{R_1} = V_{R_2} + V_C \qquad \ldots (6)$$

de las ecuaciones (1), (3), (4) y (5):

$$V_{R1} = R_1 \left[i(t) - C\, \frac{dV_C}{dt} \right] \qquad \ldots (7)$$

de las ecuaciones (2), (3) y (5):

$$V_{R_2} = R_2\, C\, \frac{dV_C}{dt} \qquad \ldots (8)$$

sustituyendo las ecuaciones (7) y (8) en la (6), se tiene:

$$C(R_1 + R_2) \frac{dV_C}{dt} + V_C = R_1\, i(t) \qquad \ldots (9)$$

La ecuación (9) representa el modelo matemático del sistema y en forma normalizada es:

$$\frac{dV_C}{dt} + \left[\frac{1}{C(R_1 + R_2)}\right] V_C = \frac{R_1}{C(R_1 + R_2)}\, i(t) \qquad \ldots (10)$$

a) Dominio del tiempo.
   Solución homogénea:
   La ecuación característica es en este caso:

$$m + \frac{1}{C(R_1 + R_2)} = 0 \qquad \ldots (11)$$

de dondé la frecuencia natural del sistema es:

$$m = -\frac{1}{C(R_1 + R_2)} \qquad \ldots (12)$$

La solución homogénea está dada por la ecuación (13):

$$V_C(t)_h = K_1\, e^{-\frac{1}{C(R_1 + R_2)} t} \qquad \ldots (13)$$

Solución particular:

Debido a que la entrada i(t) es una función escalón, la solución particular que se propone es de la forma:

$$V_C(t)_p = K_2 \qquad \ldots (14)$$

derivando la ecuación (14) con respecto al tiempo:

$$\frac{dV_{Cp}}{dt} = 0 \qquad \ldots (15)$$

sustituyendo i(t) y las ecuaciones (14) y (15) en la (10), se obtiene una ecuación para evaluar K_2, la cual es:

$$0 + \frac{K_2}{C(R_1 + R_2)} = \frac{R_1}{C(R_1 + R_2)} \qquad \ldots (16)$$

de donde:

$$K_2 = R_1$$

por lo tanto, la solución particular está dada por:

$$V_C(t)_{PAR} = R_1 \qquad \ldots (17)$$

La solución general de la ecuación (10) se obtiene sumando las ecuaciones (13) y (17), esto es:

$$V_C(t) = K_1\ e^{-\frac{1}{C(R_1 + R_2)}t} + R_1 \qquad \ldots (18)$$

Para obtener la respuesta escalón del sistema es necesario evaluar la constante K_1, a partir de de las condiciones iniciales, que en este caso son cero, por lo que:

$$V_C(0) = 0 = K_1 + R_1 \qquad \ldots (19)$$

de donde:

$$K_1 = -\ R_1$$

Sustituyendo el valor de K_1 en la ecuación (18) se obtiene:

$$V_C(t) = -\ R_1\ e^{-\frac{1}{C(R_1 + R_2)}t} + R_1 \quad .. (20)$$

Sustituyendo los valores de R_1, R_2 y C en la ecuación (20), se tiene:

$$V_C(t) = 100\ (1 - e^{-0.01t}) \qquad \ldots (21)$$

esta última es la respuesta escalón del sistema considerado y se puede representar por:

$$\boxed{\begin{array}{ll} V_C(t) = 100\ (1 - e^{-0.01t}) & t \geq 0 \\ \text{o bien:} & \\ V_C(t) = 100\ (1 - e^{-0.01t}) & u_{-1}(t) \end{array}} \quad \ldots \text{(I)}$$

b) Dominio de la frecuencia.

Aplicando la transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación (10), esto es:

$$L\left\{\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{C(R_1 + R_2)} V_C\right\} = L\left\{\frac{R}{C(R_1 + R_2)} u_{-1}(t)\right\} \quad \ldots (22)$$

se tiene:

$$L\left\{\frac{dV_C}{dt}\right\} = SV_C(S) - V_C(0) \quad \ldots (23)$$

$$L\left\{\frac{1}{C(R_1 + R_2)} V_C\right\} = \frac{1}{C(R_1 + R_2)} V_C(S) \quad \ldots (24)$$

$$L\left\{\frac{R_1}{C(R_1 + R_2)} u_{-1}(t)\right\} = \frac{R_1}{C(R_1 + R_2)} \cdot \frac{1}{S} \quad \ldots (25)$$

sustituyendo las ecuaciones (23), (24) y (25) en la (22):

$$SV_C(S) - V_C(0) + \frac{1}{C(R_1 + R_2)} V_C(S) = \frac{R}{C(R_1 + R_2)} \cdot \frac{1}{S} \quad \ldots (26)$$

tomando en cuenta que las condiciones iniciales del sistema son cero, la ecuación (26) puede escribirse como:

$$V_C(S)\left[S + \frac{1}{C(R_1 + R_2)}\right] = \frac{R_1}{C(R_1 + R_2)} \cdot \frac{1}{S} \quad \ldots (27)$$

despejando a $V_C(S)$ de la ecuación (27):

$$V_C(S) = \frac{\dfrac{R_1}{C(R_1 + R_2)}}{S\left[S + \dfrac{1}{C(R_1 + R_2)}\right]} \quad \ldots (28)$$

Para obtener la transformada inversa de Laplace de la ecuación (28), es necesario hacer una expansión en fracciones parciales de la forma siguiente:

$$\frac{\dfrac{R_1}{C(R_1 + R_1)}}{s\left[s + \dfrac{1}{C(R_1 + R_2)}\right]} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \dfrac{1}{C(R_1 + R_2)}} \qquad \ldots (29)$$

de donde:

$$A = R_1 \qquad y \qquad B = - R_1$$

por lo tanto, la ecuación (28) se puede expresar como:

$$V_C(s) = \frac{R_1}{s} - \frac{R_1}{s + \dfrac{1}{C(R_1 + R_1)}} \qquad \ldots (30)$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace a la ecuación (30) se obtiene la respuesta escalón, esto es:

$$V_C(t) = L^{-1}\left\{ V_C(s)\right\} = L^{-1}\left\{\frac{R_1}{s}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{R_1}{s + \dfrac{1}{C(R_1 + R_2)}}\right\} \qquad \ldots (31)$$

o bien:

$$V_C(t) = R_1 - R_1\, e^{-\frac{1}{C(R_1 + R_2)}t} \qquad \ldots (32)$$

Sustituyendo los valores de R_1, R_2 y C en la ecuación (32), se tiene:

$$V_C(t) = 100\ (1 - e^{-0.01t}) \qquad \ldots (33)$$

Esta última es la respuesta escalón del sistema y se puede representar como:

$$\boxed{\begin{array}{l} V_C(t) = 100\ (1 - e^{-0.01t}) \qquad t \geq 0 \\ \text{o bien} \\ V_C(t) = 100\ (1 - e^{-0.01t})\ u_{-1}(t) \end{array}} \qquad \ldots \text{(II)}$$

Comparando las ecuaciones (I) y (II) se aprecía que los resultados son idénticos.

Gráficamente:

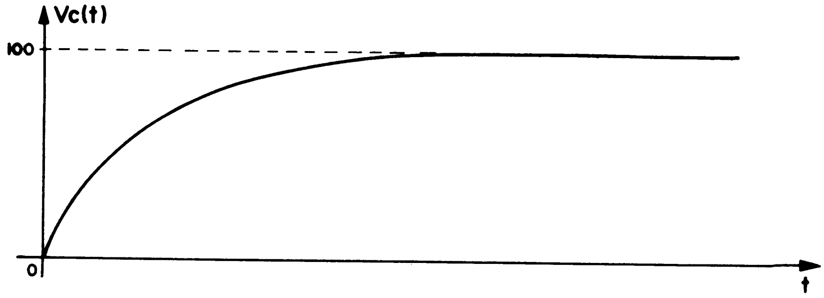


Figura III.21

III.3.1 CONSTANTE DE TIEMPO

Un concepto que se puede obtener a partir de la respuesta escalón, es el referente a la constante de tiempo del sistema. Esta se define como el tiempo necesario para que la respuesta escalón de un sistema de primer orden adquiera el 63.2 % de su valor final.

A continuación se presenta un análisis sencillo para obtener el valor de la constante de tiempo en forma general para sistemas de primer orden.

La respuesta escalón de un sistema de primer orden se puede expresar en forma general como:

$$\boxed{x(t) = K(1 - e^{-mt}) \qquad t \geq 0} \qquad \ldots \text{(I)}$$

donde:

- $x(t)$: **es la respuesta escalón**
- K : **es el valor final que alcanza la respuesta escalón**
- m : **es la frecuencia natural del sistema**

Por otra parte si K es el valor final que alcanza la respuesta escalón, entonces el 63.2 % del valor final está dado por 0.632 K. Por lo tanto, se debe sustituir este valor en la ecuación (I) y despejar el tiempo en el cual es alcanzado:

$$x(t_1) = 0.632\ K = K(1 - e^{-mt_1}) \qquad \ldots (1)$$

dividiendo la ecuación entre K se tiene:

$$0.632 = 1 - e^{-mt_1} \qquad \ldots (2)$$

de donde:

$$e^{-mt_1} = 0.368 \qquad \ldots (3)$$

Aplicando logaritmos naturales en ambos miembros de la ecuación (3):

$$\ell n(e^{-mt_1}) = \ell n(0.368) \qquad \ldots (4)$$

de donde se obtiene:

$$- mt_1 = - 1 \qquad \ldots (5)$$

por lo tanto, el tiempo requerido para que la respuesta escalón alcance el 63.2 % de su valor final es:

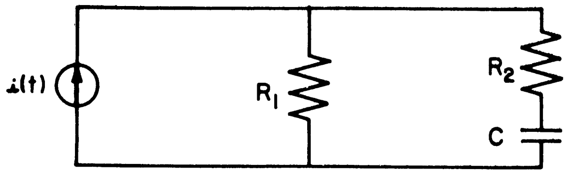
$$\boxed{t_1 = \frac{1}{m}}$$

Con base en este resultado se puede establecer que la constante de tiempo (τ) es el inverso de la frecuencia natural del sistema:

$$\boxed{\tau = \frac{1}{m}}$$

Ejemplo III.8

Considérese el sistema eléctrico de la figura:



$i(t) = u_{-1}(t)$

Figura III.22

Evaluar la constante de tiempo cuando:

a) $R_1 = 4.7\ K\Omega$; $R_2 = 980\ K\Omega$; $C = 5\,000\ \mu F$

b) $R_1 = 470\ \Omega$; $R_2 = 1\ M\Omega$; $C = 470\ \mu F$

c) $R_2 = 100\ K\Omega$; $R_1 = 22\ \Omega$; $C = 220\ \mu F$

Solución:

El modelo matemático del sistema está dado por:

$$\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{C(R_1 + R_2)} V_C = \frac{R_1}{C(R_1 + R_2)} i(t) \qquad \ldots (1)$$

la frecuencia natural del sistema (m) está dada por:

$$m = \frac{1}{C(R_1 + R_2)} \qquad \ldots (2)$$

y como la constante de tiempo es:

$$\tau = \frac{1}{m} \qquad \ldots (3)$$

entonces:

$$\tau = C(R_1 + R_2) \qquad \ldots (4)$$

a) Sustituyendo los valores de R_1, R_2 y C, en la ecuación (4):

$$\tau = 5\,000 \times 10^{-6} (4.7 \times 10^3 + 980 \times 10^3) \qquad \ldots (5)$$

por lo que:

$$\boxed{\tau = 4923.5 \text{ s}}$$

Este resultado se puede interpretar de la siguiente manera: el voltaje del capacitor alcanza el 63.2 % de su valor final en una hora con 22 minutos.

b) Sustituyendo los valores R_1, R_2 y C en la ecuación (4):

$$\tau = 470 \times 10^{-6}(470 + 1 \times 10^6) \qquad \text{... (6)}$$

por lo que:

$$\boxed{\tau = 470 \text{ s}}$$

c) Sustituyendo los valores R_1, R_2 y C en la ecuación (4):

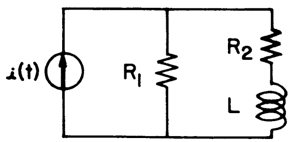
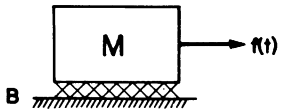
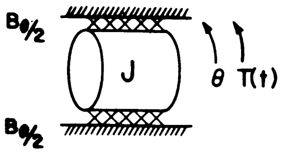
$$\tau = 220 \times 10^{-6}(22 + 100 \times 10^3) \qquad \text{... (7)}$$

por lo que:

$$\boxed{\tau = 22 \text{ s}}$$

A través de este ejemplo se puede observar que es posible modificar la rapidez con la cual un sistema responde dependiendo de los parámetros propios del sistema, es decir, el valor que tienen los elementos que lo integran.

A continuación se presentan algunos ejemplos para los diferentes tipos de sistemas de primer orden, en los que se muestran sus respectivas respuestas escalón y constantes de tiempo.

S I S T E M A	M O D E L O	RESPUESTA ESCALON Y CONSTANTE DE TIEMPO
 $i(t) = u_{-1}(t)$	$\frac{di_L}{dt} + \left[\frac{R_1 + R_2}{L}\right] i_L = \frac{R_1}{L}\, i(t)$	$i_L(t) = \frac{R_1}{R_1 + R_2}\left[1 - e^{-\left[\frac{R_1 + R_2}{L}\right]t}\right] u_{-1}(t)$ $\tau = \frac{L}{R_1 + R_2}$
 $f(t) = u_{-1}(t)$	$\frac{dv}{dt} + \frac{B}{M}\, v = \frac{1}{M}\, f(t)$	$v(t) = \frac{1}{B}\left[1 - e^{-\frac{B}{M}t}\right] u_{-1}(t)$ $\tau = \frac{M}{B}$
 $T(t) = u_{-1}(t)$	$\frac{d\omega}{dt} + \frac{B_\theta}{J}\, \omega = \frac{1}{J}\, T(t)$	$\omega(t) = \frac{1}{B_\theta}\left[1 - e^{-\frac{B_\theta}{J}t}\right] u_{-1}(t)$ $\tau = \frac{J}{B_\theta}$

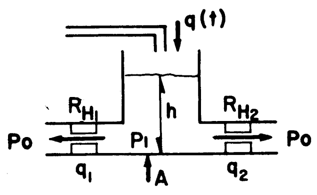
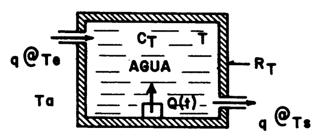
 $q(t) = u_{-1}(t)$	$\frac{dh}{dt} + \frac{\gamma}{A}\left[\frac{1}{R_{H1}} + \frac{1}{R_{H2}}\right] h = \frac{1}{A}\, q(t)$	$h(t) = \frac{R_{H1}\, R_{H2}}{\gamma(R_{H1} + R_{H2})}\left[1 - e^{-\frac{\gamma}{A}\left(\frac{R_{H1} + R_{H2}}{R_{H1}R_{H2}}\right) t}\right] u_{-1}(t)$ $\tau = \frac{A}{\gamma}\left[\frac{R_{H1}R_{H2}}{R_{H1} + R_{H2}}\right]$
 $Q(t) = u_{-1}(t)$	$T_s = T$ $T_e = T_a = 0$ $\frac{dT}{dt} + \frac{1}{C_T}\left[K + \frac{1}{R_T}\right] T = \frac{1}{C_T}\, Q(t)$ $K = qs\rho$	$T(t) = \frac{R_T}{KR_T + 1}\left[1 - e^{-\left[\frac{KR_T + 1}{C_T R_T}\right] t}\right] u_{-1}(t)$ $\tau = \frac{C_T R_T}{KR_T + 1}$

Tabla III.3

III.4 RESPUESTA IMPULSO

En general, la respuesta impulso (h(t)) de un sistema se puede obtener si se satisfacen las siguientes condiciones:

- El estado inicial del sistema es nulo
- La excitación externa o entrada aplicada al sistema es una función impulso ($\delta(t)$).

En forma esquemática esto es:

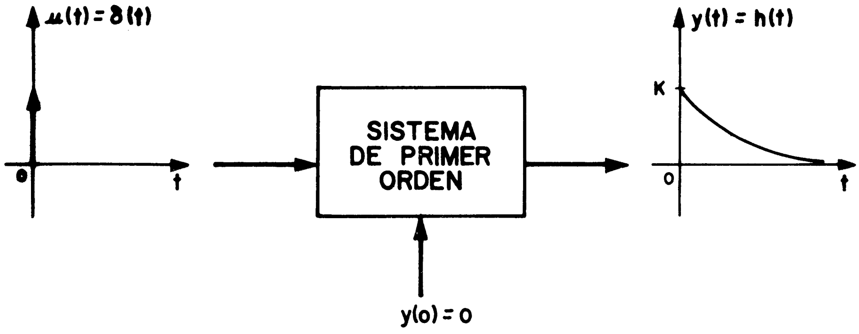


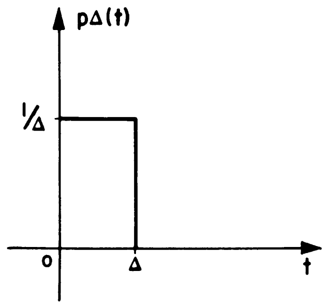
Figura III.23

La respuesta impulso es importante, ya que a partir de ésta se puede obtener la respuesta del sistema para cualquier entrada. Asimismo se puede establecer la relación salida - entrada del sistema (función de transferencia).

Debido a que la función impulso no está definida en forma precisa, existe cierta dificultad para obtener la respuesta del sistema cuando la excitación es $\delta(t)$ y para obtenerla se presentan cuatro procedimientos.

PRIMER PROCEDIMIENTO

Consiste en evaluar la respuesta del sistema a entrada pulso ($P_\Delta(t)$), definiendo la función $P_\Delta(t)$ como:



$$p_\Delta(t) = \begin{cases} 0 & , t<0 \\ 1/\Delta & , 0<t<\Delta \\ 0 & , t>\Delta \end{cases}$$

Figura III.24

Una vez que la respuesta a entrada pulso ha sido evaluada, es necesario obtener el límite cuando Δ tiende a cero, esto es:

$$\boxed{h(t) = \lim_{\Delta \to 0} h_{p_\Delta}(t)}$$

donde:

$h(t)$: es la respuesta impulso

$h_{p_\Delta}(t)$: es la respuesta pulso del sistema

SEGUNDO PROCEDIMIENTO

Consiste en evaluar los efectos producidos por la función impulso sobre el sistema, esto es, las condiciones iniciales y posteriormente se calcula la respuesta libre del sistema.

TERCER PROCEDIMIENTO

Consiste en obtener primero la respuesta del sistema a entrada escalón unitario o respuesta escalón del sistema y posteriormente ésta se deriva con respecto al tiempo y de esta forma se obtiene la respuesta impulso $h(t)$. Lo anterior puede ser expresado como:

$$\boxed{h(t) = \frac{d}{dt}\,(x(t)_{ESC})}$$

donde:

$h(t)$: es la respuesta impulso del sistema

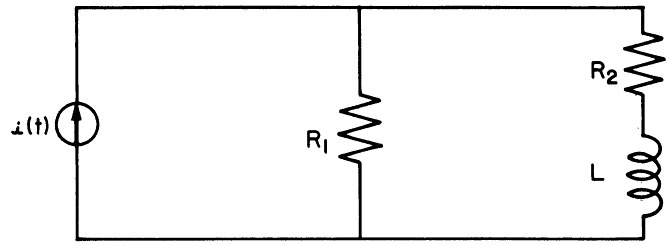
$x(t)_{ESC}$: es la respuesta escalón del sistema

CUARTO PROCEDIMIENTO

Consiste en resolver la ecuación diferencial que sirve para representar al sistema mediante el método directo de transformada de Laplace.

Ejemplo III.9

Obtener la respuesta impulso para un sistema eléctrico formado por dos resistencias, una inductancia y una fuente de corriente, interconectadas como se muestra en la figura:



$i(t) = \delta(t)$; $R_1 = 0.5\,\Omega$; $R_2 = 10\,\Omega$; $L = 500\,mH$

Figura III.25

Empleando como variable la corriente que fluye a través de la inductancia. Aplicar los cuatro procedimientos descritos.

Solución:

Primeramente, se procede a obtener el modelo matemático que sirva para representar al sistema.

Leyes de Elementos:

$$V_{R_1} = R_1\, i_{R_1} \qquad \ldots (1)$$

$$V_{R_2} = R_2\, i_{R_2} \qquad \ldots (2)$$

$$V_L = L\,\frac{di_L}{dt} \qquad \ldots (3)$$

Leyes de Conjunto:

$$i(t) = i_{R_1} + i \qquad \dots (4)$$

$$i = i_{R_2} = i_L \qquad \dots (5)$$

$$V_{R_1} = V_{R_2} + V_L \qquad \dots (6)$$

De las ecuaciones (2) y (5) se tiene:

$$V_{R2} = R_2\, i_L \qquad \dots (7)$$

sustituyendo las ecuaciones (3) y (7) en la (6):

$$V_{R1} = R_2\, i_L + L\,\frac{di_L}{dt} \qquad \dots (8)$$

de las ecuaciones (1) y (8) se tiene:

$$i_{R1} = \frac{R_2}{R_1}\, i_L + \frac{L}{R_1}\,\frac{di_L}{dt} \qquad \dots (9)$$

de las ecuaciones (4), (5) y (9) se tiene que el modelo matemático del sistema es:

$$\frac{L}{R_1}\,\frac{di_L}{dt} + \left[\frac{R_1 + R_2}{R_1}\right] i_L = i(t) \qquad \dots (10)$$

De la ecuación (10) el modelo matemático puede ser expresado en forma normalizada por:

$$\frac{di_L}{dt} + \left[\frac{R_1 + R_2}{L}\right] i_L = \frac{R_1}{L}\, i(t) \qquad \dots (11)$$

a) Primer procedimiento:

Considérese $i(t) = P\Delta(t)$:

$$i(t) = P_\Delta(t) = \begin{cases} 0 \;, & t < 0 \\ \dfrac{1}{\Delta} \;, & 0 < t < \Delta \\ 0 \;, & t > \Delta \end{cases} \qquad \dots (12)$$

Debido a que la función $P_\Delta(t)$ es una función discontinua, la ecuación diferencial se debe resolver en tres partes:

Para $t < 0$.

En este caso debido a que no existe interpretación física para tiempos negativos, no es necesario resolver la ecuación diferencial.

Para $0 < t < \Delta$.

En este caso se asume que $i_L(t) = i_\Delta(t)$ y la ecuación a resolver es:

$$\frac{di_\Delta}{dt} + \left[\frac{R_1 + R_2}{L}\right] i_\Delta = \frac{R_1}{L\Delta} \qquad \dots (13)$$

Solución homogénea:

La ecuación homogénea está dada por:

$$\frac{di_\Delta}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{L} i_\Delta = 0 \qquad \dots (14)$$

la ecuación característica es:

$$m + \frac{R_1 + R_2}{L} = 0 \qquad \dots (15)$$

de donde:

$$m = -\frac{R_1 + R_2}{L} \qquad \dots (16)$$

por lo tanto, la solución homogénea está dada por:

$$i_\Delta(t)_h = K_1\, e^{-\left[\frac{R_1 + R_2}{L}\right]t} \qquad \dots (17)$$

Solución particular:
Debido a que la función de entrada es constante, la solución particular que se propone es:

$$i_\Delta(t)_p = K_2 \qquad \dots (18)$$

la derivada con respecto al tiempo de la solución particular es:

$$\frac{di_{\Delta p}}{dt} = 0 \qquad \dots (19)$$

sustituyendo las ecuaciones (18) y (19) en la (13), se puede evaluar la constante K_2:

$$0 + \frac{R_1 + R_2}{L} K_2 = \frac{R_1}{L\Delta} \qquad \ldots (20)$$

de esta última se obtiene:

$$K_2 = \frac{R_1}{\Delta(R_1 + R_2)}$$

así la solución particular es:

$$i_\Delta(t)_p = \frac{R_1}{\Delta(R_1 + R_2)} \qquad \ldots (21)$$

de las ecuaciones (17) y (21) se tiene que la solución general, para $0 < t < \Delta$, es:

$$i_\Delta(t) = K_1 \, e^{-\left[\frac{R_1 + R_2}{L}\right]t} + \frac{R_1}{\Delta(R_1 + R_2)} \qquad \ldots (22)$$

para evaluar la constante R_1 se sabe que la corriente que fluye a través de la inductancia cuando el tiempo es igual a cero es cero, condición que se puede sustituir en la ecuación (22):

$$i_\Delta(0) = 0 = K_1 + \frac{R_1}{\Delta(R_1 + R_2)} \qquad \ldots (23)$$

de donde:

$$K_1 = -\frac{R_1}{\Delta(R_1 + R_2)}$$

sustituyendo el valor de K_1 en la ecuación (22), se tiene que la solución general para $0 < t < \Delta$ es:

$$i_\Delta(t) = -\frac{R_1}{\Delta(R_1 + R_2)} \, e^{-\left[\frac{R_1 + R_2}{L}\right]t} + \frac{R_1}{\Delta(R_1 + R_2)} \qquad \ldots (24)$$

Para $t \geq \Delta$.

Considerando nuevamente $i_L(t) = i_\Delta(t)$, la ecuación a resolver es:

$$\frac{di_{\Delta}}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{L} i_{\Delta} = 0 \qquad \ldots (25)$$

Solución homogénea:

La ecuación característica en este caso es:

$$m + \frac{R_1 + R_2}{L} = 0 \qquad \ldots (26)$$

de donde la frecuencia natural es:

$$m = - \frac{R_1 + R_2}{L} \qquad \ldots (27)$$

por lo tanto, la solución homogénea está dada por:

$$i_{\Delta}(t)_h = K_3 \, e^{-\left[\frac{R_1 + R_2}{L}\right] t} \qquad \ldots (28)$$

Solución particular:

En este caso la solución particular es cero, debido a que la entrada o excitación externa es cero para $t \geq \Delta$.

Por lo tanto, la solución general para $t \geq \Delta$ está dada por:

$$i_{\Delta}(t) = K_3 \cdot e^{-\left[\frac{R_1 + R_2}{L}\right] t} \qquad \ldots (29)$$

Para evaluar la constante K_3 es necesario conocer cuál es el estado del sistema cuando $t = \Delta$, este dato puede ser evaluado a partir de la ecuación (24), esto es:

$$i_{\Delta}(t) \Big|_{t=\Delta} = \frac{R_1}{\Delta(R_1 + R_2)} \left[1 - e^{-\left[\frac{R_1 + R_2}{L}\right] \Delta}\right] \qquad .. (30)$$

Con base en la ecuación (30) es posible obtener el valor que tendrá la constante K_3, de la ecuación (29):

$$i_{\Delta}(t) \Big|_{t=\Delta} = K_3 \, e^{-\left[\frac{R_1 + R_2}{L}\right] \Delta} \qquad \ldots (31)$$

igualando la ecuación (30) y (31) el valor de K_3 está dado por:

$$K_3 = \frac{R_1}{\Delta(R_1 + R_2)} \left[e^{\left[\frac{R_1 + R_2}{L}\right]\Delta} - 1 \right] \quad \ldots (32)$$

Debido a que la respuesta que se desea evaluar debe ser válida para tiempos mayores o iguales a cero, se descarta la solución dada por la ecuación (24), ya que cuando Δ tiende a cero, será válida únicamente para $t = 0$. Por esta razón la respuesta del sistema a entrada pulso estará dada por la ecuación (29), siendo ésta:

$$i_\Delta(t) = \frac{R_1}{\Delta(R_1 + R_2)} \left[e^{\left[\frac{R_1 + R_2}{L}\right]\Delta} - 1 \right] e^{-\left[\frac{R_1 + R_2}{L}\right] t}$$

$$\ldots (33)$$

Para obtener la respuesta impulso del sistema, es necesario evaluar la ecuación (33) cuando Δ tiende a cero, esto es:

$$h(t) = \lim_{\Delta \to 0} i_\Delta(t) \quad \ldots (34)$$

Al evaluar la expresión para $i_\Delta(t)$ cuando Δ tiende a cero, se obtiene una indeterminación. Este problema se puede resolver si el término $e^{\left[\frac{R_1 + R_2}{L}\right]\Delta}$ es expandido mediante series de Taylor.

Recordando que e^x se puede expandir en series de Taylor de la siguiente manera:

$$e^x = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \ldots \quad \ldots (35)$$

entonces:

$$e^{\left[\frac{R_1 + R_2}{L}\right]\Delta} = 1 + \frac{(R_1 + R_2)\Delta}{L} + \frac{(R_1 + R_2)^2\Delta^2}{2!\ L^2} + \frac{(R_1 + R_2)^3\Delta^3}{3!\ L^3} + \ldots$$

$$\ldots (36)$$

sustituyendo esta última expresión en la ecuación (33) se tiene:

$$i_\Delta(t) = \frac{R_1}{\Delta(R_1+R_2)}\left[1+\frac{(R_1+R_2)\Delta}{L}+\frac{(R_1+R_2)^2\Delta^2}{2L^2}+\frac{(R_1+R_2)^3\Delta^3}{6L^3}+\ldots-1\right]e^{-\left[\frac{R_1+R_2}{L}\right]t}$$

... (37)

haciendo las simplificaciones necesarias, se tiene que la expresión para $i_\Delta(t)$ es:

$$i_\Delta(t) = \left[\frac{R_1}{L}+\frac{R_1\Delta(R_1+R_2)}{2L^2}+\frac{R_1\Delta^2(R_1+R_2)^2}{6L^3}+\ldots\right]e^{-\left[\frac{R_1+R_2}{L}\right]t}$$

... (38)

Con esta última expresión es posible evaluar el límite de $i_\Delta(t)$ cuando Δ tiende a cero y así obtener la respuesta impulso del sistema:

$$h(t) = \lim_{\Delta\to 0}\left[\frac{R_1}{L}+\frac{R_1\Delta(R_1+R_2)}{2L^2}+\frac{R_1\Delta^2(R_1+R_2)^2}{6L^3}+\ldots\right]e^{-\left[\frac{R_1+R_2}{L}\right]t}$$

... (39)

La respuesta impulso del sistema está dada por:

$$h(t) = \frac{R_1}{L}e^{-\left[\frac{R_1+R_2}{L}\right]t} \qquad t \geq 0 \qquad \ldots (40)$$

sustituyendo los valores para R_1, R_2 y L en la ecuación (40), se tiene que la respuesta impulso del sistema es:

$$\boxed{h(t) = e^{-21t} \qquad t \geq 0}$$

b) Segundo procedimiento.

Para obtener la respuesta impulso del sistema es necesario primeramente evaluar los efectos producidos por la función impulso sobre el sistema, es decir, las condiciones iniciales.

Para el sistema original, se tiene que el modelo matemático que sirve para representarlo es:

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{L}\, i_L = \frac{R_1}{L}\, \delta(t) \qquad \ldots (41)$$

multiplicando ambos miembros de la ecuación (41) por dt se tiene:

$$di_L + \frac{R_1 + R_2}{L}\, i_L\, dt = \frac{R_1}{L}\, \delta(t)\, dt \qquad \ldots (42)$$

integrando la ecuación (42) en el intervalo de tiempo que dura la función impulso, esto es, en el intervalo $[0^-, 0^+]$, se tiene:

$$\int_{0^-}^{0^+} di_L + \frac{R_1 + R_2}{L} \int_{0^-}^{0^+} i_L\, dt = \frac{R_1}{L} \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\, dt \qquad \ldots (43)$$

debido a que las condiciones iniciales del sistema original son cero y haciendo $t_0 = 0$, la segunda integral en el primer miembro de la ecuación (43) es cero; por lo tanto, la ecuación (43) puede ser escrita de la forma:

$$\int_{0^-}^{0^+} di_L = \frac{R_1}{L} \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\, dt \qquad \ldots (44)$$

integrando la ecuación (44) se tiene:

$$i_L(0^+) - i_L\,(0^-) = \frac{R_1}{L} \times 1 \qquad \ldots (45)$$

En este caso, debido a que se trata de un sistema físico $i_L(0^-) = 0$, ya que para tiempos menores a cero la corriente que fluye a través de la inductancia es cero, así los efectos producidos por la función impulso sobre el sistema se expresan de la forma:

$$i_L(0^+) = \frac{R_1}{L} \qquad \ldots (46)$$

una vez que se conocen los efectos producidos por el impulso sobre el sistema, se procede a evaluar la respuesta libre del sistema, que en este caso representa la respuesta impulso:

$$\frac{di_L}{dt} + \left[\frac{R_1 + R_2}{L}\right] i_L = 0 \quad ; \quad i_L(0^+) = \frac{R_1}{L} \quad . \ (47)$$

Solución homogénea:

La ecuación característica está dada por:

$$m + \frac{R_1 + R_2}{L} = 0 \qquad \ldots (48)$$

por lo tanto, la frecuencia natural del sistema es:

$$m = -\frac{R_1 + R_2}{L} \qquad \ldots (49)$$

la solución homogénea, está dada por:

$$i_L(t)_h = K_1 \, e^{-\left[\frac{R_1 + R_2}{L}\right] t} \qquad \ldots (50)$$

Solución particular:

Debido a que se está obteniendo la respuesta libre del sistema, la excitación externa es igual a cero, por lo tanto la solución particular es:

$$i_L(t)_p = 0 \qquad \ldots (51)$$

la respuesta libre del sistema está dada por la expresión:

$$i_L(t)_{LIB} = K_1 \, e^{-\left[\frac{R_1 + R_2}{L}\right] t} \qquad \ldots (52)$$

para evaluar la constante K_1 de la ecuación (52) es necesario emplear las condiciones iniciales

$$i_L(0^+) = K_1 = \frac{R_1}{L} \qquad \ldots (53)$$

sustituyendo el valor de K_1 en la ecuación (52), se tiene que la respuesta libre es:

$$i_L(t)_{LIB} = \frac{R_1}{L} e^{-\left[\frac{R_1 + R_2}{L}\right]t} \qquad \ldots (54)$$

En este caso la respuesta libre representa la respuesta impulso del sistema, esto es:

$$h(t) = i_L(t)_{LIB} \qquad \ldots (55)$$

o bien:

$$h(t) = \frac{R_1}{L} e^{-\left[\frac{R_1 + R_2}{L}\right]t} \qquad t \geq 0 \quad \ldots (56)$$

sustituyendo los valores de R_1, R_2 y L en la ecuación (56) se tiene que la respuesta impulso del sistema es:

$$\boxed{h(t) = e^{-21t} \qquad t \geq 0}$$

c) Tercer procedimiento.

Consiste en obtener primero la respuesta a entrada escalón y posteriormente derivarla con respecto al tiempo. El modelo matemático que representa al sistema original, cuando se considera como entrada un escalón unitario es:

$$\frac{di_L}{dt} + \left[\frac{R_1 + R_2}{L}\right] i_L = \frac{R_1}{L} \quad u_{-1}(t) \qquad \ldots (57)$$

La ecuación diferencial homogénea está dada por:

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{L} i_L = 0 \qquad \ldots (58)$$

la ecuación característica, en este caso es:

$$m + \frac{R_1 + R_2}{L} = 0 \qquad \ldots (59)$$

por lo tanto, la frecuencia natural del sistema es:

$$m = - \frac{R_1 + R_2}{L} \qquad \ldots (60)$$

así, la solución homogénea es:

$$i_L(t)_h = K_1\, e^{-\left[\frac{R_1 + R_2}{L}\right] t} \qquad \ldots (61)$$

Solución particular:

Puesto que en este caso se está considerando como excitación externa la función escalón unitario, la solución particular que se propone es:

$$i_L(t)_p = K_2 \qquad \ldots (62)$$

derivando con respecto al tiempo la ecuación (62), se tiene:

$$\frac{di_{Lp}}{dt} = 0 \qquad \ldots (63)$$

sustituyendo las ecuaciones (62) y (63) en la (57), para evaluar la constante K_2, se tiene:

$$0 + \frac{R_1 + R_2}{L} K_2 = \frac{R_1}{L} \qquad \ldots (64)$$

entonces K_2 está dada por:

$$K_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

sustituyendo el valor de K_2 en la ecuación (62), se tiene que la solución particular es:

$$i_L(t)_p = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \qquad \ldots (65)$$

a partir de las ecuaciones (61) y (65) se tiene que la solución general es:

$$i_L(t) = K_1\, e^{-\frac{R_1 + R_2}{L} t} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \qquad \ldots (66)$$

para evaluar la constante K_1 es necesario sustituir el dato de condiciones iniciales en la ecuación (66), esto es:

$$i_L(0) = 0 = K_1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \qquad \ldots (67)$$

por lo tanto:

$$K_1 = - \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

sustituyendo el valor de K_1 en la ecuación (66), se tiene que la respuesta escalón está dada por:

$$i_L(t)_{ESC} = - \frac{R_1}{R_1 + R_2} e^{-\left[\frac{R_1 + R_2}{L}\right]t} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \; ; \quad t \geq 0 \quad \ldots (68)$$

para obtener la respuesta impulso del sistema, es necesario derivar con respecto al tiempo la respuesta escalón, esto es:

$$h(t) = \frac{d}{dt}\left[i_L(t)_{ESC}\right] \qquad \ldots (69)$$

la respuesta impulso es:

$$h(t) = \frac{R_1}{L} e^{-\left[\frac{R_1 + R_2}{L}\right]t} \qquad t \geq 0 \qquad \ldots (70)$$

sustituyendo los valores de R_1, R_2 y L en la ecuación (70), se tiene que la respuesta impulso del sistema es:

$$\boxed{h(t) = e^{-21t} \qquad t \geq 0}$$

d) Cuarto procedimiento

Consiste en resolver la ecuación diferencial original por el método directo de transformada de Laplace. El modelo matemático del sistema original es:

$$\frac{di_L}{dt} + \left[\frac{R_1 + R_2}{L}\right] i_L = \frac{R_1}{L}\,\delta(t) \qquad \ldots (71)$$

aplicando la transformada de Laplace a ambos miembros de la ecuación (71), se tiene:

$$L\left\{\frac{di_L}{dt}+\frac{R_1+R_2}{L}\,i_L\right\} = L\left\{\frac{R_1}{L}\,\delta(t)\right\} \qquad \ldots (72)$$

obteniendo la transformada de Laplace, término a término, se tiene:

$$L\left\{\frac{di_L}{dt}\right\} = SI_L(S) - I_L(0) \qquad \ldots (73)$$

$$L\left\{\frac{R_1+R_2}{L}\,i_L\right\} = \frac{R_1+R_2}{L}\,I_L(S) \qquad \ldots (74)$$

$$L\left\{\frac{R_1}{L}\,\delta(t)\right\} = \frac{R_1}{L} \qquad \ldots (75)$$

sustituyendo las expresiones (73), (74) y (75) en la (72):

$$SI_L(S) - I_L(0) + \frac{R_1+R_2}{L}I_L(S) = \frac{R_1}{L} \qquad \ldots (76)$$

recordando que $I_L(0) = 0$ y factorizando $I_L(S)$ en la ecuación (76):

$$I_L(S)\left[S + \frac{R_1+R_2}{L}\right] = \frac{R_1}{L} \qquad \ldots (77)$$

o bien:

$$I_L(S) = \frac{\frac{R_1}{L}}{S + \frac{R_1+R_2}{L}} \qquad \ldots (78)$$

La respuesta impulso del sistema se obtiene aplicando transformada inversa de Laplace a la ecuación (68), esto es:

$$h(t) = L^{-1}\left\{I_L(S)\right\} \qquad \ldots (79)$$

la respuesta impulso es:

$$h(t) = \frac{R_1}{L}\,e^{-\left[\frac{R_1+R_2}{L}\right]t} \qquad t \geq 0 \qquad \ldots (80)$$

sustituyendo los valores de R_1, R_2 y L en la ecuación (80), se tiene que la respuesta impulso del sistema es:

$$\boxed{h(t) = e^{-21t} \qquad t \geq 0}$$

gráficamente:

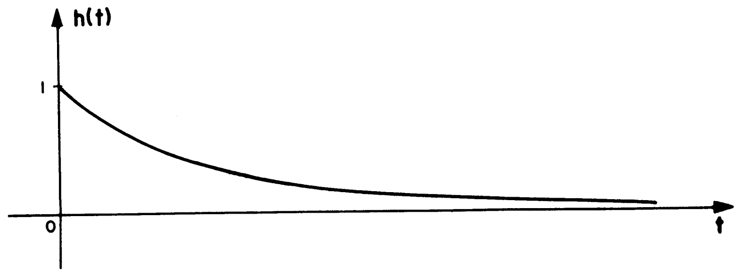
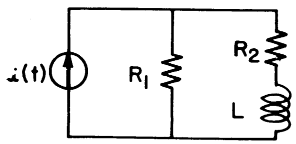
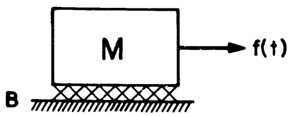
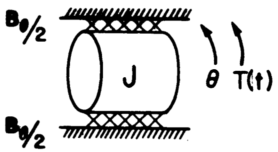


Figura III.26

A continuación se presentan en forma resumida los resultados obtenidos al evaluar la respuesta impulso para los diferentes tipos de sistemas de primer orden.

SISTEMA	MODELO	RESPUESTA IMPULSO
 $i(t) = \delta(t)$	$\frac{di_L}{dt} + \left[\frac{R_1 + R_2}{L}\right] i_L = \frac{R_1}{L}\, i(t)$	$h(t) = \frac{R_1}{L}\, e^{-\left[\frac{R_1 + R_2}{L}\right]t} \qquad t \geq 0$
 $f(t) = \delta(t)$	$\frac{dv}{dt} + \frac{B}{M}\, v = \frac{1}{M}\, f(t)$	$h(t) = \frac{1}{M}\, e^{-\frac{B}{M}t} \qquad t \geq 0$
 $T(t) = \delta(t)$	$\frac{d\omega}{dt} + \frac{B_\theta}{J}\, \omega = \frac{1}{J}\, T(t)$	$h(t) = \frac{1}{J}\, e^{-\frac{B_\theta}{J}t} \qquad t \geq 0$

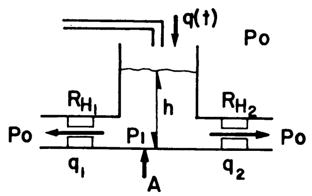
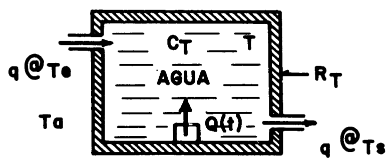
 $q(t) = \delta(t)$	$\frac{dh}{dt} + \frac{\gamma}{A}\left[\frac{R_{H1} + R_{H2}}{R_{H1}R_{H2}}\right] h = \frac{1}{A}\, q(t)$	$h(t) = \frac{1}{A}\, e^{-\frac{\gamma}{A}\left[\frac{R_{H1} + R_{H2}}{R_{H1}R_{H2}}\right]t} \qquad t \geq 0$
 $Q(t) = \delta(t)$	$K = qs\rho$ $\frac{dT}{dt} + \frac{1}{C_T}\left[K + \frac{1}{R_T}\right] T = \frac{1}{C_T}\quad Q(t)$ $Ts = T$ $Te = Ta = 0$	$h(t) = \frac{1}{C_T}\, e^{-\left[\frac{KR_T + 1}{C_T R_T}\right]t} \qquad t \geq 0$

Tabla III.4

CAPITULO IV SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

IV.1 CARACTERÍSTICAS GENERALES

Los sistemas de segundo orden pueden ser caracterizados en forma general por contener dos elementos capaces de almacenar energía. Estos sistemas pueden ser de alguno de los siguientes tipos:

- Eléctricos
- Mecánicos
  - a) Traslacionales
  - b) Rotacionales
- Térmicos
- Hidráulicos
- Híbridos

En general, un sistema de segundo orden se puede representar matemáticamente por ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden de la forma:

$$a_2 \frac{d^2x}{dt} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = g(t) \qquad \ldots (1)$$

Este modelo matemático puede ser expresado en forma normalizada con respecto al coeficiente de la derivada de mayor orden como:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{a_1}{a_2}\frac{dx}{dt} + \frac{a_0}{a_2} x = \frac{1}{a_2} g(t) \qquad \ldots (2)$$

Definiendo los coeficientes de la forma:

$$\left.\begin{aligned} \frac{a_1}{a_2} &= b_1 \\ \frac{a_0}{a_2} &= b_0 \\ \frac{1}{a_2} &= c_0 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots (3)$$

sustituyendo las relaciones anteriores en la ecuación (2), se tiene que el modelo matemático está dado por:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x = c_0 g(t) \qquad \ldots (4)$$

Debido a que la ecuación característica de una ecuación diferencial de segundo orden es una ecuación cuadrática de la forma:

$$m^2 + b_1 m + b_0 = 0 \qquad \ldots (5)$$

existen dos valores de m que la satisfacen, esto es, la ecuación tiene dos raíces y están dadas por:

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= \frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_0}}{2} \\ m_2 &= \frac{-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4b_0}}{2} \end{aligned}\right| \qquad \ldots (6)$$

Puesto que son dos los valores de m que satisfacen a la ecuación (5), existen cuatro posibles casos para las raíces, éstos son:

1. Raíces reales diferentes $(b_1^2 > 4b_0)$
2. Raíces reales iguales $(b_1^2 = 4b_0)$
3. Raíces complejas $(b_1^2 < 4b_0)$
4. Raíces imaginarias $(b_1 = 0)$

Por otra parte, para resolver ecuaciones diferenciales de este tipo existen diversos métodos de solución, sin embargo, al igual que para sistemas de primer orden, únicamente se emplearán dos métodos:

- El de coeficientes indeterminados.
- El de transformada de Laplace

Ejemplo IV.1

Obtener la solución general de un sistema de segundo orden, el cual es representado matemáticamente por la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x = g(t) \qquad \ldots (1)$$

Las condiciones iniciales del sistema son:

$$x(0) = 0$$
$$x'(0) = 1$$

y la excitación externa es:

$$g(t) = (b_0 - 1) \text{ sen } t$$

los valores de los coeficientes b_1 y b_0 son:

a) $b_1 = 5$; $b_0 = 6$

b) $b_1 = 4$; $b_0 = 4$

c) $b_1 = 4$; $b_0 = 8$

d) $b_1 = 0$; $b_0 = 4$

Para obtener la solución general emplear:

1. El método de coeficientes indeterminados.
2. El método de transformada de Laplace

Solución:

1. Método de coeficientes indeterminados.

   a) Sustituyendo los valores de los coeficientes y la excitación externa en la ecuación (1):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5 \frac{dx}{dt} + 6x = 5 \text{ sen } t \qquad \ldots (2)$$

Solución homogénea:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5\,\frac{dx}{dt} + 6x = 0 \qquad \ldots (3)$$

la ecuación característica está dada por:

$$m^2 + 5m + 6 = 0 \qquad \ldots (4)$$

las raíces que satisfacen a esta ecuación son:

$$m_1 = -2$$

y

$$m_2 = -3$$

por lo tanto, la solución homogénea está dada por:

$$x(t)_h = K_1\, e^{-2t} + K_2\, e^{-3t} \qquad \ldots (5)$$

Solución particular:
Debido a que la excitación es una función senoidal, la solución que se propone es:

$$x(t)_p = K_3 \text{ sen } t + K_4 \cos t \qquad \ldots (6)$$

derivando la ecuación (6) con respecto al tiempo (tantas veces como el orden de la ecuación diferencial original), se tiene:

$$\frac{dx_p}{dt} = K_3 \cos t - K_4 \text{ sen } t \qquad \ldots (7)$$

y

$$\frac{d^2x_p}{dt^2} = -\,K_3 \text{ sen } t - K_4 \cos t \qquad \ldots (8)$$

sustituyendo las ecuaciones (6), (7) y (8) en la (1) para evaluar K_3 y K_4, se obtiene:

$$(5\,K_3 - 5\,K_4)\text{sen } t + (5K_3 + 5K_4)\cos\, t = 5 \text{ sen } t \qquad \ldots (9)$$

de la ecuación (9) se obtiene un sistema de ecuaciones para evaluar K_3 y K_4:

$$\left.\begin{aligned} K_3 - K_4 &= 1 \\ K_3 + K_4 &= 0 \end{aligned}\right| \quad \ldots (10)$$

resolviendo el sistema de ecuaciones (10), se obtiene que los valores de K_3 y K_4 son:

$$K_3 = 0.5$$

$$K_4 = -\ 0.5$$

sustituyendo los valores de K_3 y K_4 en la ecuación (6), la solución particular está dada por:

$$x(t)_p = 0.5 \text{ sen } t - 0.5 \cos t \qquad \ldots (11)$$

la solución general para el sistema considerado, se obtiene sumando las ecuaciones (5) y (11), esto es:

$$x'(t) = K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-3t} + 0.5 \text{ sen } t - 0.5 \cos t \ . (12)$$

Para evaluar las constantes K_1 y K_2 es necesario derivar con respecto al tiempo la ecuación (12) y emplear las condiciones iniciales del sistema:

$$\dot{x}(t) = -2K_1 e^{-2t} - 3K_2 e^{-3t} + 0.5 \cos t + 0.5 \text{ sen } t \quad (13)$$

sustituyendo las condiciones iniciales en las ecuaciones (12) y (13), se obtiene un sistema de ecuaciones simultáneas para evaluar K_1 y K_2, esto es:

$$\left.\begin{aligned} K_1 + K_2 &= 0.5 \\ -2K_1 - 3K_2 &= 0.5 \end{aligned}\right| \quad \ldots (14)$$

resolviendo el sistema de ecuaciones (14), se obtiene que los valores de K_1 y K_2 son:

$$K_1 = 2$$

$$K_2 = -1.5$$

sustituyendo K_1 y K_2 en la ecuación (12), la solución general es:

$$\boxed{x(t) = 2e^{-2t} - 1.5e^{-3t} + 0.5 \text{ sen } t - 0.5 \cos t} \quad \text{. (I)}$$

b) Sustituyendo los valores de los coeficientes y la excitación externa en la ecuación (1):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = 3 \text{ sen } t \qquad \ldots (15)$$

Solución homogénea:
En este caso la ecuación característica es:

$$m^2 + 4m + 4 = 0 \qquad \ldots (16)$$

las raíces que satisfacen esta ecuación son:

$$m_1 = -2$$
y
$$m_2 = -2$$

por lo tanto, la solución homogénea es:

$$x(t)_h = K_1 e^{-2t} + K_2 t e^{-2t} \qquad \ldots (17)$$

Solución particular:
La solución que se propone en este caso está dada por:

$$x(t)_p = K_3 \text{ sen } t + K_4 \cos t \qquad \ldots (18)$$

derivando dos veces con respecto al tiempo la ecuación (18), se tiene:

$$\frac{dx_p}{dt} = K_3 \cos t - K_4 \operatorname{sen} t \qquad \ldots (19)$$

y

$$\frac{d^2x_p}{dt^2} = - K_3 \operatorname{sen} t - K_4 \cos t \qquad \ldots (20)$$

sustituyendo las ecuaciones (18), (19) y (20) en la (15), se obtiene el sistema para evaluar K_3 y K_4:

$$\left.\begin{aligned} 3K_3 - 4K_4 &= 3 \\ 4K_3 + 3K_4 &= 0 \end{aligned}\right| \qquad \ldots (21)$$

resolviendo el sistema de ecuaciones (21), se obtiene:

$$K_3 = 0.36$$

$$K_4 = - 0.48$$

sustituyendo K_3 y K_4 en la ecuación (18), se tiene que la solución particular en este caso es:

$$x(t)_p = 0.36 \operatorname{sen} t - 0.48 \cos t \qquad \ldots (22)$$

La solución general se obtiene al sumar las ecuaciones (17) y (22), esto es:

$$x(t) = K_1 e^{-2t} + K_2 t e^{-2t} + 0.36 \operatorname{sen} t - 0.48 \cos t \qquad \ldots (23)$$

Para evaluar K_1 y K_2 es necesario derivar con respecto al tiempo la ecuación (23) y emplear las condiciones iniciales del sistema:

$$x'(t) = (-2K_1 + K_2)e^{-2t} - 2K_2te^{-2t} + 0.36 \cos t + 0.48 \operatorname{sen} t \quad \ldots (24)$$

a partir de las ecuaciones (23) y (24) y las condiciones iniciales se obtiene que el sistema de ecuaciones para evaluar K_1 y K_2 es:

$$\left.\begin{aligned} K_1 - 0.48 &= 0 \\ 0.36 - 2K_1 + K_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (25)$$

resolviendo el sistema de ecuaciones (25), se obtiene:

$$K_1 = 0.48$$

$$K_2 = 1.6$$

sustituyendo K_1 y K_2 en la ecuación (23), la solución general es:

$$\boxed{x(t) = (0.48 + 1.6\,t)\,e^{-2t} + 0.36 \text{ sen } t - 0.48 \cos t} \quad \ldots (II)$$

c) Sustituyendo los valores de los coeficientes y la excitación externa en la ecuación (1):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 8x = 7 \text{ sen } t \quad \ldots\ldots (26)$$

Solución homogénea:
La ecuación característica en este caso es:

$$m^2 + 4m + 8 = 0 \quad \ldots (27)$$

las raíces que satisfacen esta ecuación son:

$$m_1 = -2 + j2$$

$$m_2 = -2 - j2$$

por lo tanto la solución homogénea es:

$$x(t)_h = e^{-2t}(K_1 \text{ sen } 2t + K_2 \cos 2t) \quad \ldots (28)$$

Solución particular:
La solución que se propone en este caso está dada por:

$$x(t)_p = K_3 \text{ sen } t + K_4 \cos t \quad \ldots (29)$$

derivando dos veces con respecto al tiempo la ecuación (29), se tiene:

$$\frac{dx_p}{dt} = K_3 \cos t - K_4 \operatorname{sen} t \qquad \ldots (30)$$

$$\frac{d^2x_p}{dt^2} = -K_3 \operatorname{sen} t - K_4 \cos t \qquad \ldots (31)$$

sustituyendo las ecuaciones (29), (30) y (31) en la (26), se obtiene el sistema de ecuaciones para evaluar K_3 y K_4:

$$\left.\begin{array}{l} 7K_3 - 4K_4 = 7 \\ \\ 4K_3 + 7K_4 = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots (32)$$

resolviendo el sistema de ecuaciones (32), se obtiene:

$$K_3 = 0.754$$

$$K_4 = -0.43$$

sustituyendo K_3 y K_4 en la ecuación (29), se tiene que la solución particular en este caso es:

$$x(t)_p = 0.754 \operatorname{sen} t - 0.43 \cos t \qquad \ldots (33)$$

La solución general se obtiene al sumar las ecuaciones (28) y (33), esto es:

$$x(t) = e^{-2t}(K_1 \operatorname{sen} 2t + K_2 \cos 2t) + 0.754 \operatorname{sen} t - 0.43 \cos t \qquad (34)$$

Para evaluar K_1 y K_2 es necesario derivar con respecto al tiempo la ecuación (34) y emplear las condiciones iniciales del sistema:

$$x'(t) = e^{-2t}\Big[(-2K_1 - 2K_2)\operatorname{sen} 2t + (-2K_2 + 2K_1)\cos 2t\Big] + $$
$$+ 0.754 \cos t + 0.43 \operatorname{sen} t \qquad \ldots (35)$$

a partir de las ecuaciones (34) y (35) y las condiciones iniciales se obtiene que el sistema de ecuaciones para evaluar K_1 y K_2 es:

$$\left.\begin{aligned} K_2 - 0.43 &= 0 \\ -2K_2 + 2K_1 + 0.754 &= 1 \end{aligned}\right| \quad \ldots (36)$$

resolviendo el sistema de ecuaciones (36), se obtiene:

$$K_1 = 0.554$$

$$K_2 = 0.43$$

sustituyendo K_1 y K_2 en la ecuación (34), la solución general es:

$$\boxed{x(t) = e^{-2t}(0.554 \text{ sen } 2t + 0.43 \cos 2t) + 0.754 \text{ sen } t - 0.43 \cos t} \quad \ldots (III)$$

d) Sustituyendo los valores de los coeficientes y la excitación externa en la ecuación (1):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 3 \text{ sen } t \qquad \ldots (37)$$

Solución homogénea:
La ecuación característica en este caso es:

$$m^2 + 4 = 0 \qquad \ldots (38)$$

las raíces que satisfacen esta ecuación son:

$$m_1 = j2$$

$$m_2 = -j2$$

por lo tanto la solución homogénea es:

$$x(t)_h = K_1 \text{ sen } 2t + K_2 \cos 2t \qquad \ldots (39)$$

Solución particular:

La solución que se propone en este caso está da da por:

$$x(t)_p = K_3 \operatorname{sen} t + K_4 \cos t \qquad \ldots (40)$$

derivando dos veces con respecto al tiempo la e- cuación (40), se tiene:

$$\frac{dx_p}{dt} = K_3 \cos t - K_4 \operatorname{sen} t \qquad \ldots (41)$$

$$\frac{d^2x_p}{dt^2} = - K_3 \operatorname{sen} t - K_4 \cos t \qquad \ldots (42)$$

sustituyendo las ecuaciones (40), (41) y (42) en la (37), se obtiene el sistema de ecuaciones pa- ra evaluar K_3 y K_4:

$$\left.\begin{aligned} 3K_3 &= 3 \\ 3K_4 &= 0 \end{aligned}\right| \qquad \ldots (43)$$

resolviendo el sistema de ecuaciones (43), se ob tiene:

$$K_3 = 1$$

$$K_4 = 0$$

sustituyendo K_3 y K_4 en la ecuación (40) se tie ne que la solución particular en este caso es:

$$x(t)_p = \operatorname{sen} t \qquad \ldots (44)$$

La solución general se obtiene al sumar las ecua ciones (39) y (44), esto es:

$$x(t) = K_1 \operatorname{sen} 2t + K_2 \cos 2t + \operatorname{sen} t \qquad \ldots (45)$$

para evaluar K_1 y K_2 es necesario derivar con res pecto al tiempo la ecuación (45) y emplear las condiciones iniciales del sistema:

$$x'(t) = 2K_1 \cos 2t - 2K_2 \operatorname{sen} t + \cos t \qquad \ldots (46)$$

a partir de las ecuaciones (45) y (46) y las condiciones iniciales, se obtiene que el sistema de ecuaciones para evaluar K_1 y K_2 es:

$$\left.\begin{array}{r} 2K_1 + 1 = 1 \\ K_2 = 0 \end{array}\right| \quad \ldots (47)$$

resolviendo el sistema de ecuaciones (47), se obtiene:

$$K_1 = 0$$
$$K_2 = 0$$

Debido a que K_1 y K_2 son cero la solución general está dada por:

$$\boxed{x(t) = \text{sen } t} \quad \ldots (IV)$$

2. Método de transformada de Laplace.

a) La ecuación diferencial a resolver en este caso es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 6x = 5 \text{ sen } t \quad \ldots (48)$$

Aplicando la transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación (48):

$$L\left\{\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 6x\right\} = L\left\{5 \text{ sen } t\right\} \quad \ldots (49)$$

y transformando término a término, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} L\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} = S^2X(S) - SX(0) - X'(0) \\ L\left\{5\frac{dx}{dt}\right\} = 5SX(S) - 5X(0) \\ L\left\{6x\right\} = 6X(S) \\ L\left\{5 \text{ sen } t\right\} = \frac{5}{S^2+1} \end{array}\right| \quad \ldots (50)$$

sustituyendo las expresiones (50) y las condiciones iniciales del sistema en la ecuación (49), se tiene:

$$S^2X(S) - 1 + 5SX(S) + 6X(S) = \frac{5}{S^2+1} \quad \ldots (51)$$

o bien:

$$X(S)(S^2 + 5S + 6) = \frac{S^2+6}{S^2+1} \quad \ldots (52)$$

despejando X(S) de la ecuación (52):

$$X(S) = \frac{S^2+6}{(S^2+5S+6)(S^2+1)} \quad \ldots (53)$$

La solución general se obtiene al aplicar la transformada inversa de Laplace a la ecuación (53), en este caso es necesario hacer una expansión en fracciones parciales de la forma:*

$$\frac{S^2+6}{(S+2)(S+3)(S^2+1)} = \frac{A}{(S+2)} + \frac{B}{S+3} + \frac{CS+D}{S^2+1} \quad \ldots (54)$$

y las constantes A, B, C y D son:

$$A = 2$$

$$B = -1.5$$

$$C = -0.5$$

$$D = 0.5$$

sustituyendo los valores de A, B, C y D en la ecuación (54), se tiene que X(S) es:

$$X(S) = \frac{2}{S+2} - \frac{1.5}{S+3} - \frac{0.5S}{S^2+1} + \frac{0.5}{S^2+1} \quad \ldots (55)$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace a la ecuación (55), se obtiene que la solución general es:

$$\boxed{x(t) = 2e^{-2t} - 1.5e^{-3t} - 0.5\cos t + 0.5\,\mathrm{sen}\, t} \quad \ldots (V)$$

*Ver el apéndice de transformada de Laplace

Comparando las ecuaciones (I) y (V) se aprecia que los resultados son idénticos.

Gráficamente:

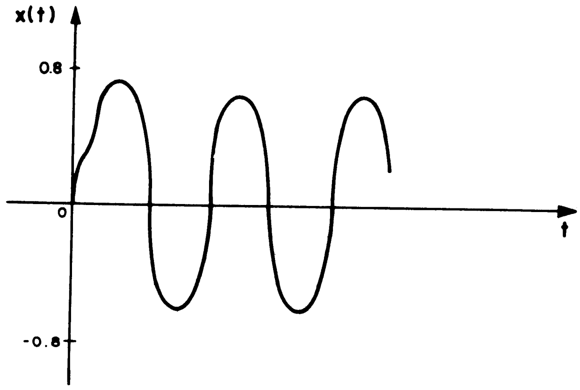


Figura IV.1

b) La ecuación diferencial a resolver en este caso es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = 3\,\text{sen}\,t \qquad \ldots (56)$$

aplicando la transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación (56):

$$L\left\{\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x\right\} = L\left\{3\,\text{sen}\,t\right\} \qquad \ldots (57)$$

transformando y empleando las condiciones iniciales del sistema, se tiene:

$$S^2X(S) - 1 + 4SX(S) + 4X(S) = \frac{3}{S^2 + 1} \qquad \ldots (58)$$

o bien:

$$X(S)(S^2 + 4S + 4) = \frac{S^2 + 4}{S^2 + 1} \qquad \ldots (59)$$

despejando X(S) de la ecuación (59), se obtiene:

$$X(S) = \frac{S^2 + 4}{(S + 2)^2\,(S^2 + 1)} \qquad \ldots (60)$$

la ecuación (60) se expande en fracciones parciales como:

$$\frac{S^2 + 4}{(S + 2)^2(S^2 + 1)} = \frac{A}{(S + 2)^2} + \frac{B}{(S + 2)} + \frac{CS + D}{S^2 + 1} \quad \ldots (61)$$

y las constantes A, B, C y D son:

$A = 1.6$

$B = 0.48$

$C = -0.48$

$D = 0.36$

sustituyendo los valores de A, B, C y D en la ecuación (61), se tiene que X(S) es:

$$X(S) = \frac{1.6}{(S + 2)^2} + \frac{0.48}{S + 2} - \frac{0.48S}{S^2 + 1} + \frac{0.36}{S^2 + 1} \quad \ldots (62)$$

y la solución general se obtiene aplicando transformada inversa de Laplace a la ecuación (62):

$$\boxed{x(t) = (0.48 + 1.6\,t)\,e^{-2t} - 0.48\cos t + 0.36\,\mathrm{sen}\,t} \quad \ldots (VI)$$

Comparando las ecuaciones (II) y (VI) se aprecia que los resultados son idénticos.

Gráficamente:

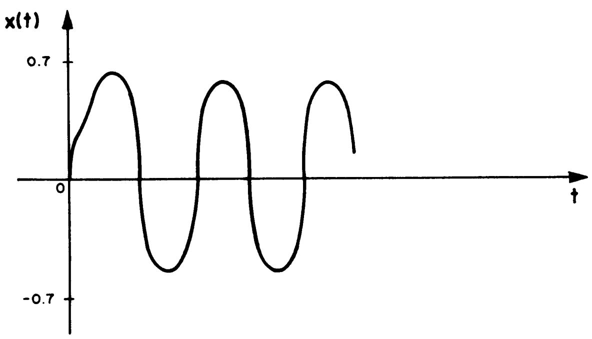


Figura IV.2

c) La ecuación diferencial a resolver en este caso es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\,\frac{dx}{dt} + 8x = 7 \text{ sen } t \qquad \ldots (63)$$

aplicando transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación (63):

$$L\left\{\frac{d^2x}{dt^2} + 4\,\frac{dx}{dt} + 8x\right\} = L\left\{7 \text{ sen } t\right\} \qquad \ldots (64)$$

transformando y empleando las condiciones iniciales del sistema se tiene:

$$S^2X(S) - 1 + 4SX(S) + 8X(S) = \frac{7}{S^2 + 1} \qquad \ldots (65)$$

o bien:

$$X(S)(S^2 + 4S + 8) = \frac{S^2 + 8}{S^2 + 1} \qquad \ldots (66)$$

despejando X(S) de la ecuación (66), se obtiene:

$$X(S) = \frac{S^2 + 8}{(S^2 + 4S + 8)(S^2 + 1)} \qquad \ldots (67)$$

la ecuación (67) se expande en fracciones parciales como:

$$\frac{S^2 + 8}{((S + 2)^2 + 4)(S^2 + 1)} = \frac{AS + B}{(S + 2)^2 + 4} + \frac{CS + D}{S^2 + 1} \qquad \ldots (68)$$

y las constantes A, B, C y D son:

$$A = \frac{28}{65}$$

$$B = \frac{128}{65}$$

$$C = -\frac{28}{65}$$

$$D = \frac{49}{65}$$

sustituyendo los valores de A, B, C y D en la ecuación (68), se tiene que X(S) es:

$$X(S) = \frac{0.43S + 1.97}{(S + 2)^2 + 4} + \frac{-0.43S + 0.754}{S^2 + 1} \qquad \ldots (69)$$

o bien:

$$X(S) = \frac{0.43(S + 2)}{(S + 2)^2 + 4} + \frac{0.554(2)}{(S + 2)^2 + 4} - \frac{0.43S}{S^2 + 1} + \frac{0.754}{S^2 + 1} \qquad \ldots (70)$$

y la solución general se obtiene aplicando la transformada inversa de Laplace a la ecuación (70):

$$\boxed{x(t) = e^{-2t}(0.43 \cos 2t + 0.554 \text{ sen } 2t) - 0.43 \cos t + 0.754 \text{ sen } t} \qquad \ldots (VII)$$

comparando las ecuaciones (III) y (VII) se aprecia que los resultados son idénticos.

Gráficamente:

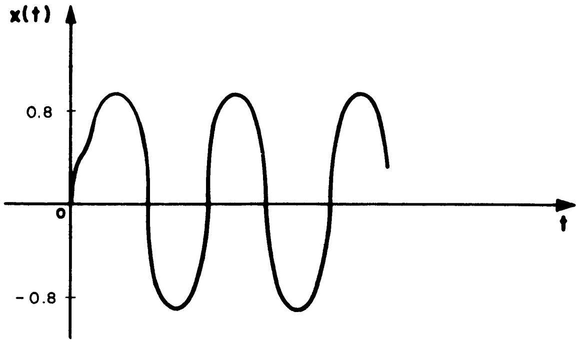


Figura IV.3

d) La ecuación diferencial a resolver en este caso es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 3 \text{ sen } t \qquad \ldots (71)$$

aplicando la transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación (71):

$$L\left\{\frac{d^2x}{dt^2} + 4x\right\} = L\left\{3 \text{ sen } t\right\} \qquad \ldots (72)$$

transformando y empleando las condiciones iniciales del sistema se tiene:

$$S^2X(S) - 1 + 4X(S) = \frac{3}{S^2 + 1} \qquad \ldots (73)$$

o bien:

$$X(S)(S^2 + 4) = \frac{S^2 + 4}{S^2 + 1} \qquad \text{... (74)}$$

despejando X(S) de la ecuación (74), se obtiene:

$$X(S) = \frac{1}{S^2 + 1} \qquad \text{... (75)}$$

y la solución general se obtiene aplicando la transformada inversa de Laplace a la ecuación (75):

$$\boxed{x(t) = \text{sen } t} \qquad \text{... (VIII)}$$

Comparando las ecuaciones (IV) y (VIII) se aprecia que los resultados son idénticos.

Gráficamente:

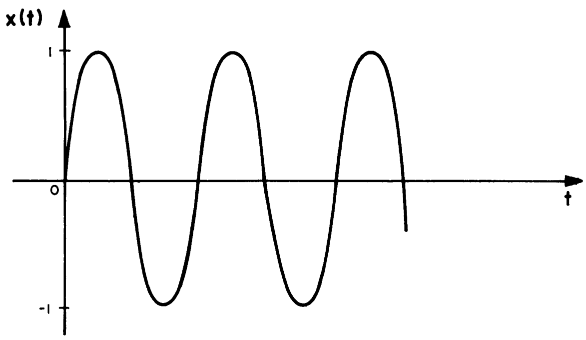
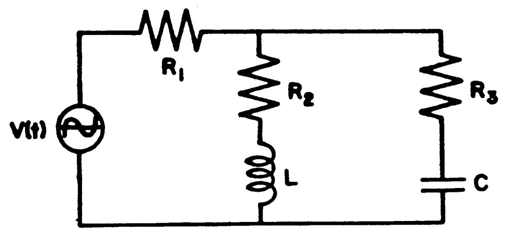
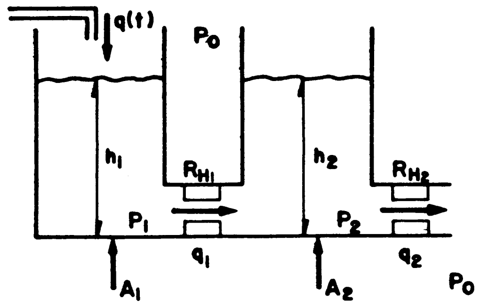
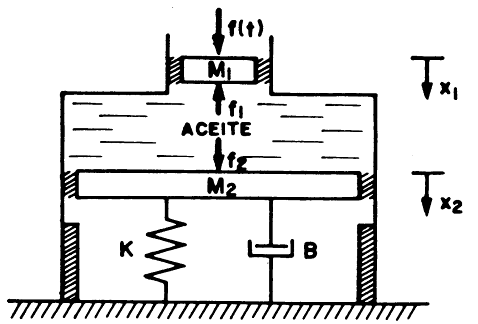


Figura IV.4

En la tabla IV.1 se presentan algunos ejemplos de sistema de segundo orden y los modelos matemáticos de los mismos.

S I S T E M A	M O D E L O
 $R_1 = R_2 = R_3 = R$	$\frac{d^2V_C}{dt^2} + \left[\frac{3R}{2L} + \frac{1}{2RC}\right]\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{LC} V_C = \frac{1}{2LC} V(t) + \frac{1}{2RC} \dot{V}(t)$ $\frac{d^2i_L}{dt^2} + \left[\frac{3R}{2L} + \frac{1}{2RC}\right]\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L = \frac{1}{2RL_C} V(t) + \frac{1}{2L} V(t)$
	$\frac{d^2h_1}{dt^2} + \gamma \left[\frac{A_1(R_{H_1} + R_{H_2}) + A_2R_{H_2}}{A_1A_2\ R_{H_1}\ R_{H_2}}\right]\frac{dh_1}{dt} + \frac{\gamma}{A_1A_2\ R_{H_1}\ R_{H_2}} h_1 =$ $\frac{1}{A_1}\dot{q}(t) + \frac{\gamma(R_{H_1} + R_{H_2})}{A_1A_2\ R_{H_1}\ R_{H_2}} q(t)$ $\frac{d^2h_2}{dt^2} + \left[\frac{A_1(R_{H_1} + R_{H_2}) + A_2R_{H_2}}{A_1A_2\ R_{H_1}\ R_{H_2}}\right]\frac{dh_2}{dt} + \frac{\gamma}{A_1A_2\ R_{H_1}\ R_{H_2}} h_2 =$ $= \frac{\gamma}{A_1A_2\ R_{H_1}} q(t)$



A_1 y A_2 : Area de las masas M_1 y M_2 respectivamente.

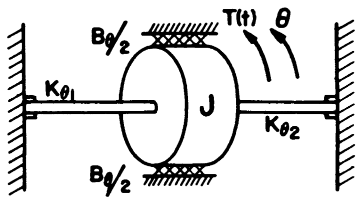
$A_1 x_1 = A_2 x_2$; $f_1/A_1 = p = f_2/A_2$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{A_1^2 B}{M_1A_2^2 + M_2A_1^2}\frac{dx_1}{dt} + \frac{A_1^2\,K}{M_1A_2^2 + M_2A_1^2}\,x_1 =$$

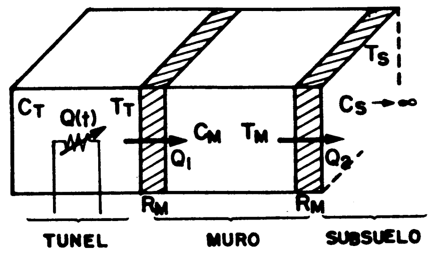
$$= \frac{A_2^2}{M_1A_2^2 + M_2A_1^2}\,f(t)$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{A_1^2\,B}{M_1A_2^2 + M_2A_1^2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{A_1^2\,K}{M_1A_2^2 + M_2A_1^2}\,x_2 =$$

$$= \frac{A_1\,A_2}{M_1A_2^2 + M_2A_1^2}\,f(t)$$



$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{B\theta}{J}\frac{d\theta}{dt} + \frac{K\theta 1 + K\theta 2}{J}\,\theta = \frac{1}{J}\,T(t)$$

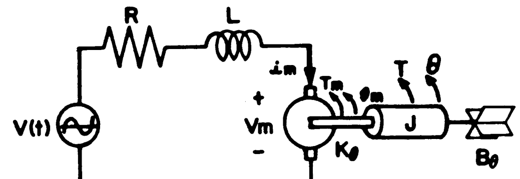


$$\frac{d^2T_T}{dt^2} + \frac{C_M + 2C_T}{R_M\, C_T C_M}\,\frac{dT_T}{dt} + \frac{1}{R_M^2\, C_M C_T}\,T_T =$$

$$= \frac{1}{C_T}\,\dot{Q}(t) + \frac{2}{R_M C_M C_T}\,Q(t) + \frac{1}{R_M^2 C_M C_T}\,T_S$$

$$\frac{d^2T_M}{dt^2} + \frac{C_M + 2C_T}{R_M C_T C_M}\cdot\frac{dT_M}{dt} + \frac{1}{R_M^2\, C_M C_T}\,T_M =$$

$$= \frac{1}{R_M C_M C_T}\,Q(t) + \frac{1}{R_M C_M C_T}\,T_S$$



$Vm = K\theta m$

$Tm = K\alpha i_L$

$$\frac{d^2i_L}{dt^2} + \left[\frac{B_\theta}{J} + \frac{K_\theta R}{LK_\theta + K_aK_f}\right]\frac{di_L}{dt} + \frac{K_\theta(K_aK_f + B_\theta R)}{J(LK_\theta + K_aK_f)}\,i_L =$$

$$= \frac{K_\theta}{LK_\theta + K_aK_f}\,\ddot{V}(t) + \frac{B_\theta K_\theta}{J(LK_\theta + K_aK_f)}\,V(t)$$

o bien:

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} + \left[\frac{B_\theta}{J} + \frac{K_\theta R}{LK_\theta + K_aK_f}\right]\frac{d\omega}{dt} + \frac{K_\theta(K_aK_f + B_\theta R)}{J(LK_\theta + K_aK_f)}\,\omega =$$

$$= \frac{K_f K_\theta}{J(K_aK_f + LK_\theta)}\,V(t)$$

Tabla IV. 1

IV.2 COMPORTAMIENTO DE SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN COMO FUNCIÓN DE LAS FRECUENCIAS NATURALES DEL SISTEMA

En general, un sistema de segundo orden puede tener cuatro tipos de comportamiento dependiendo del tipo de sus frecuencias naturales (raíces de la ecuación característica). En la sección anterior, se mencionó que las frecuencias naturales para un sistema de segundo orden pueden ser de alguno de los siguientes tipos:

a. Reales diferentes

b. Reales iguales

c. Complejas

d. Imaginarias

Antes de definir los tipos de comportamiento, es necesario definir los parámetros de un sistema de segundo orden; considérese el modelo matemático de un sistema de segundo orden, representado por la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x = 0 \qquad \ldots (1)$$

los coeficientes b_1 y b_0 están definidos por las expresiones:

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= 2\,\alpha \\ b_0 &= \omega_n{}^2 \\ \alpha &= \xi\,\omega_n \end{aligned}\right| \qquad \ldots (2)$$

los parámetros α, ω_n y ξ se definen:

α: es la constante de amortiguamiento del sistema

ω_n: es la velocidad angular no amortiguada del sistema

ξ: es el factor de amortiguamiento relativo del sistema

Por otra parte, el modelo matemático de un sistema de segundo orden en general, se obtiene al sustituir las expresiones (2) en la ecuación (1):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx}{dt} + \omega_n^2 \; x = 0 \qquad \ldots (3)$$

De la ecuación (3), es posible plantear la ecuación característica y a partir de ésta obtener las frecuencias naturales del sistema:

$$m^2 + 2\alpha\, m + \omega_n^2 = 0 \qquad \ldots (4)$$

las frecuencias naturales del sistema se obtienen al resolver la ecuación (4):

$$m_{1,2} = \frac{-2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 4\omega^2 n}}{2} \qquad \ldots (5)$$

simplificando la ecuación (5):

$$m_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_n^2} \qquad \ldots (6)$$

sustituyendo el valor de $\alpha = \xi\, \omega_n$ en la ecuación (6):

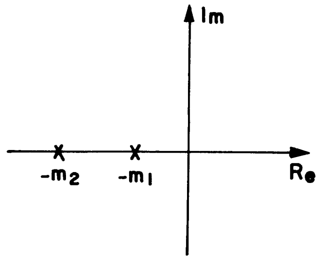
$$m_{1,2} = -\xi\, \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} \qquad \ldots (7)$$

Una vez que los parámetros α y ω_n han sido definidos, los cuatro tipos de comportamiento para un sistema de segundo orden, como función de sus frecuencias naturales, son:

COMPORTAMIENTO SOBREAMORTIGUADO

Cuando las frecuencias naturales del sistema son reales y diferentes, se dice que su comportamiento es sobreamortiguado. Con base en la ecuación (6) se tiene que α debe ser mayor que ω_n, y de la ecuación (7), ξ debe ser mayor que 1.

Las frecuencias naturales se representan en el plano complejo de la forma:



CONDICIONES:

$\alpha > W_n$

ó

$\xi > 1$

Figura IV.5

la respuesta del sistema, en este caso, está dada por la ecuación:

$$x(t) = K_1\, e^{-m_1 t} + K_2\, e^{-m_2 t}$$

y en forma gráfica:

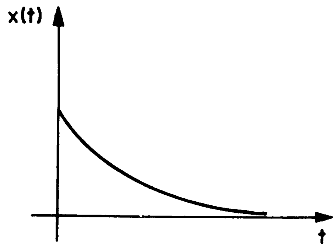


Figura IV.6

COMPORTAMIENTO CRITICAMENTE AMORTIGUADO

Cuando las frecuencias naturales del sistema son reales e iguales, se dice que el comportamiento es críticamente amortiguado. Con base en la ecuación (6) se tiene que α debe ser igual que ω_n, por otra parte de la ecuación (7), ξ debe ser igual a 1.

Las frecuencias naturales, en este caso, se representan en el plano complejo de la forma:

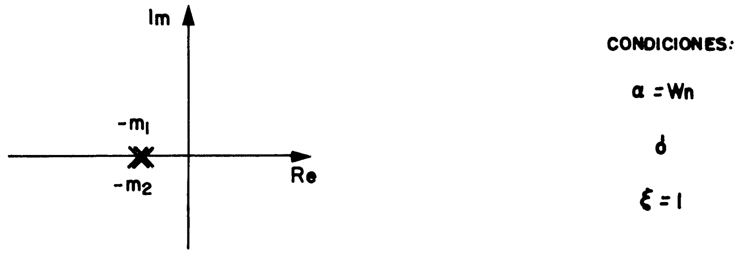


Figura IV.7

la respuesta del sistema está dada por la ecuación:

$$x(t) = (K_1 + K_2 t)e^{-mt}$$

y en forma gráfica:

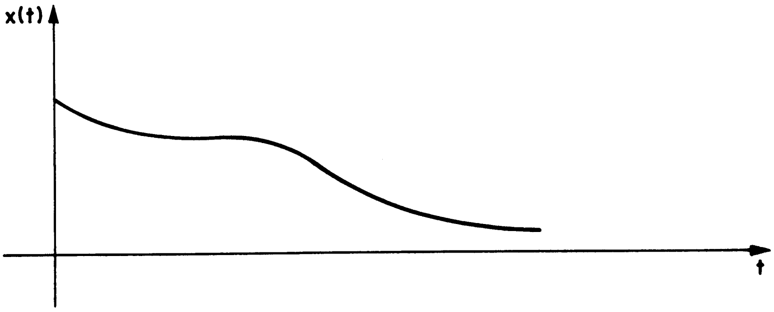


Figura IV.8

COMPORTAMIENTO SUBAMORTIGUADO

Cuando las frecuencias naturales del sistema son complejas, se dice que el comportamiento es subamortiguado. De la ecuación (6), se tiene que α debe ser menor que ω_n y de la ecuación (7), ξ debe ser mayor que cero y menor que 1.

Las frecuencias naturales se representan en el plano complejo de la forma:

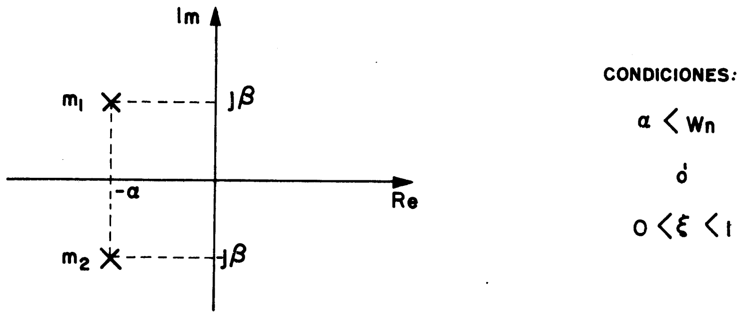


Figura IV.9

la respuesta del sistema está dada por la ecuación:

$$x(t) = e^{-\alpha t}(K_1 \cos \beta t + K_2 \operatorname{sen} \beta t)$$

y en forma gráfica:

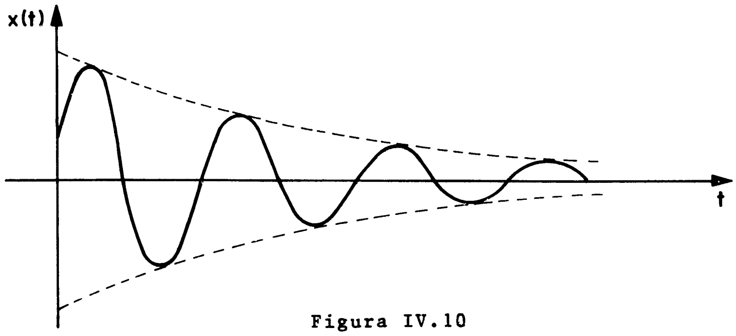


Figura IV.10

COMPORTAMIENTO NO AMORTIGUADO

Cuando las frecuencias naturales del sistema son imaginarias, se dice que el comportamiento es no amortiguado. Con base en la ecuación (6), se tiene que α debe ser igual a cero y de la ecuación (7), ξ debe ser cero también.

Las frecuencias naturales se representan en el plano complejo de la forma:

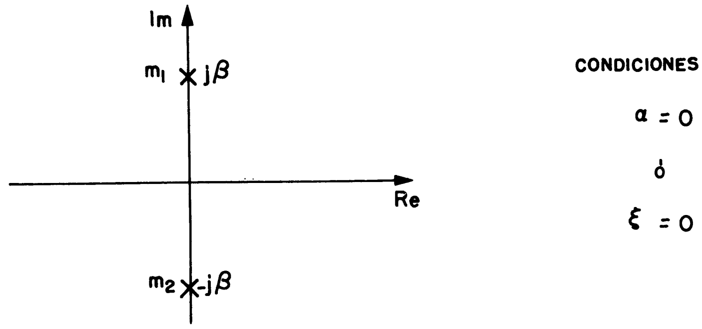


Figura IV.11

la respuesta del sistema, en este caso, está dada por la ecuación:

$$x(t) = K_1 \cos \beta t + K_2 \operatorname{sen} \beta t$$

y en forma gráfica:

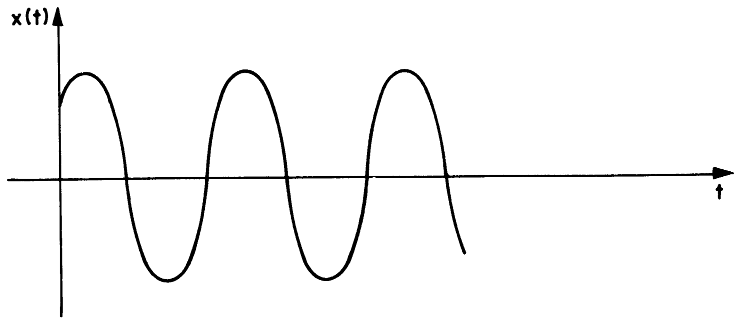


Figura IV.12

Con base en los ejemplos presentados en la tabla IV.1, se expresarán los parámetros α, ω_n y ξ en función de los elementos que forman cada uno de los sistemas. En la tabla IV.2 se resumen estos resultados.

MODELOS MATEMATICOS DEL SISTEMA CONSIDERANDO QUE LA EXCITACION EXTERNA ES CERO	PARAMETROS
SISTEMA ELECTRICO $\frac{d^2V_C}{dt^2} + \left[\frac{3R}{2L} + \frac{1}{2RC}\right]\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{LC}V_C = 0$	$\alpha = \frac{3R}{4L} + \frac{1}{4RC}$ $\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $\xi = \frac{3R}{4}\sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{1}{4R}\sqrt{\frac{L}{C}}$
SISTEMA MECANICO TRASLACIONAL $\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{A_1^2 B}{M_1A_2^2 + M_2A_1^2}\frac{dx_1}{dt} + \frac{A_1^2 K}{M_1A_2^2 + M_2A_1^2}x_1 = 0$	$\alpha = \frac{A_1^2 B}{2(M_1A_2^2 + M_2A_1^2)}$ $\omega_n = \frac{A_1\sqrt{K}}{\sqrt{M_1A_2^2 + M_2A_1^2}}$ $\xi = \frac{A_1 B}{2\sqrt{K(M_1A_2^2 + M_2A_1^2)}}$
SISTEMA MECANICO ROTACIONAL $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{B_\theta}{J}\frac{d\theta}{dt} + \frac{K_{\theta_1} + K_{\theta_2}}{J}\theta = 0$	$\alpha = \frac{B_\theta}{2J}$ $\omega_n = \sqrt{\frac{K_{\theta 1} + K_{\theta 2}}{J}}$ $\xi = \frac{B_\theta}{2\sqrt{J(K_{\theta 1} + K_{\theta 2})}}$

SISTEMA TERMICO $$\frac{d^2T_T}{dt^2} + \frac{C_M + 2C_T}{R_M C_M C_T}\frac{dT_T}{dt} + \frac{1}{R_M^2\ C_M C_T}\ T_T = 0$$	$$\alpha = \frac{1}{2R_M\ C_T} + \frac{1}{R_M\ C_M}$$ $$\omega_n = \frac{1}{R_M\ \sqrt{C_M C_T}}$$ $$\xi = \frac{1}{2}\ \frac{C_M + 2C_T}{\sqrt{C_M\ C_T}}$$
SISTEMA HIDRAULICO $$\frac{d^2h_1}{dt^2} + \gamma\left[\frac{2A_1 + A_2}{A_1A_2\ R_H}\right]\frac{dh_1}{dt} + \frac{\gamma^2}{A_1A_2\ R_H^2}\ h_1 = 0$$ si $R_{H1} = R_{H2} = R_H$	$$\alpha = \frac{\gamma}{2}\left[\frac{2A_1 + A_2}{A_1A_2\ R_H}\right]$$ $$\omega_n = \frac{1}{R_H}\sqrt{\frac{\gamma^2}{A_1A_2}}$$ $$\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\gamma^2}{A_1A_2}}\ \left[2A_1 + A_2\right]$$
SISTEMA HIBRIDO $$\frac{d^2i_L}{dt^2} + \left[\frac{B_\theta}{J} + \frac{K_\theta\ R}{LK_\theta + K_aK_f}\right]\frac{di_L}{dt} +$$ $$+ \frac{K_\theta(K_aK_f + B_\theta R)}{J(LK_\theta + K_aK_f)}\ i_L = 0$$	$$\alpha = \frac{1}{2}\left[\frac{B_\theta}{J} + \frac{K_\theta\ R}{LK_\theta + K_aK_f}\right]$$ $$\omega_n = \sqrt{\frac{K_\theta(K_aK_f + B_\theta R)}{J(LK_\theta + K_aK_f)}}$$ $$\xi = \frac{1}{2}\ \frac{B_\theta(LK_\theta + K_aK_f) + JK_\theta R}{\sqrt{K_\theta J(LK_\theta + K_aK_f)(K_aK_f + B_\theta R)}}$$

Tabla IV.2

IV.3 TIPOS DE RESPUESTAS DE SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

En general para sistemas dinámicos de segundo orden se pueden realizar diversos análisis para conocer su comportamiento y tipo de respuesta. En forma similar que para los sistemas de primer orden se pueden obtener sus tipos de respuestas como función de su estado inicial y la excitación externa aplicada a éstos.

A partir de estas condiciones se pueden obtener las respuestas:

- Libre
- Forzada
- Total
- Permanente
- Transitoria

A continuación se presenta una descripción de los diferentes tipos de respuesta, enunciando las condiciones a las que el sistema debe estar sometido. Por otra parte, debido a que existe una gran diversidad de sistemas de segundo orden, únicamente se analizará en forma detallada un solo tipo de sistema; asimismo se ilustrarán algunos ejemplos de los diferentes tipos de sistemas.

RESPUESTA LIBRE

Es aquélla que produce el sistema debido a su estado inicial y a los parámetros propios de éste. En este caso la entrada o excitación externa aplicada se considera nula. En forma esquemática esto es:

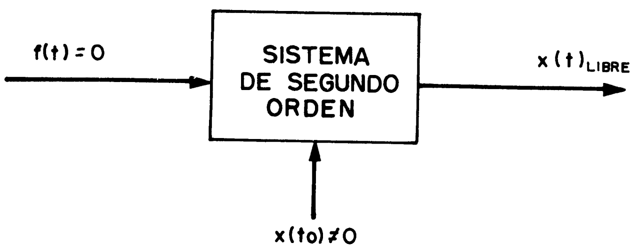
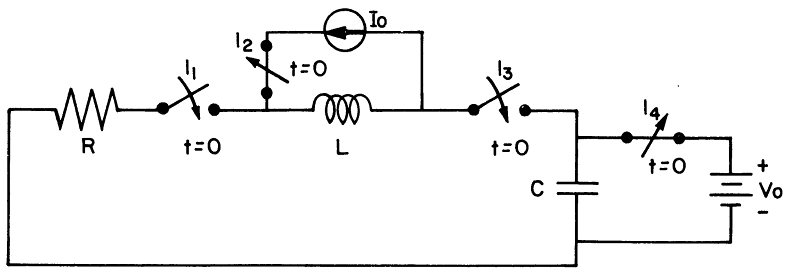


Figura IV.13

Ejemplo IV.2

Obtener la respuesta libre de un sistema eléctrico de segundo orden, formado por una resistencia, una inductancia y una capacitancia, conectados en serie como se muestra en la figura. Emplear como variable el voltaje en el capacitor.

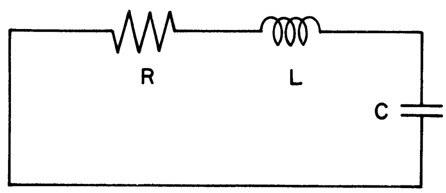


R=100Ω ; L=500mH ; C=200μF ; Vo=50Volts ; Io=100mA

Figura IV.14

Solución:

En el instante t = 0 los interruptores I_1 e I_3 se cierran y los interruptores I_2 e I_4 se abren, en este caso se tiene que el sistema eléctrico equivalente es:



$V_c(0) = V_o$; $i_L(0) = I_o$

Figura IV.15

Obtención del modelo matemático del sistema.

Leyes de elementos.

$$V_R = Ri_R \quad \dots (1)$$

$$V_L = L\frac{di_L}{dt} \quad \dots (2)$$

$$i_C = C\frac{dV_C}{dt} \quad \dots (3)$$

Leyes de conjunto.

$$V_R + V_L + V_C = 0 \qquad \ldots (4)$$

$$i_R = i_L = i_C \qquad \ldots (5)$$

de las ecuaciones (1), (3) y (5), se tiene:

$$V_R = RC \frac{dV_C}{dt} \qquad \ldots (6)$$

de las ecuaciones (2), (3) y (5), se tiene:

$$V_L = LC \frac{d^2V_C}{dt^2} \qquad \ldots (7)$$

sustituyendo las ecuaciones (6) y (7) en la (4), se obtiene el modelo matemático del sistema:

$$LC \frac{d^2V_C}{dt^2} + RC \frac{dV_C}{dt} + V_C = 0 \qquad \ldots (8)$$

normalizando la ecuación (8), se obtiene:

$$\frac{d^2V_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{LC} V_C = 0 \qquad \ldots (9)$$

Para obtener la respuesta libre del sistema, es necesario resolver la ecuación (9) empleando el dato de condiciones iniciales. En este caso las condiciones iniciales que se tienen son el voltaje en el capacitor y la corriente en la inductancia en el tiempo cero, sin embargo las condiciones iniciales que se requieren son el voltaje en el capacitor y su derivada con respecto al tiempo en el tiempo cero; por lo que es necesario obtener la derivada con respecto al tiempo en el tiempo cero. De la ecuación (5) se tiene que la corriente que fluye a través del capacitor es igual a la corriente que fluye por la inductancia, esto es:

$$i_C(0) = i_L(0) \qquad \ldots (10)$$

sin embargo de la ecuación (3), se tiene:

$$i_C = C\,\frac{dV_C}{dt} \qquad \ldots (11)$$

por lo tanto, de la ecuación (11), se obtiene:

$$\left.\frac{dV_C}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{i_C}{C}\right|_{t=0} \qquad \ldots (12)$$

sustituyendo la ecuación (10) en la (12):

$$\left.\frac{dV_C}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{i_L}{C}\right|_{t=0} \qquad \ldots (13)$$

o bien:

$$V'_C(0) = \left.\frac{i_L(0)}{C}\right|_{C=0} \qquad \ldots (14)$$

de esta manera, las condiciones iniciales son:

$$\begin{aligned} &V_C(0) = V_0 \\ \text{y} \qquad & \\ &V'_C(0) = \frac{I_0}{C} \end{aligned} \qquad \ldots (15)$$

sustituyendo los valores de R, L y C en la ecuación (9), se tiene:

$$\frac{d^2V_C}{dt^2} + 200\,\frac{dV_C}{dt} + 10\,000\;V_C = 0 \qquad \ldots (16)$$

Solución homogénea:

La ecuación característica en este caso está dada por:

$$m^2 + 200\,m + 10\,000 = 0 \qquad \ldots (17)$$

A partir de la ecuación (17) se tiene que las frecuencias naturales del sistema son:

$$m_1 = -100$$

y

$$m_2 = -100$$

por lo tanto, la solución homogénea es:

$$V_C(t)_h = K_1\, e^{-100t} + K_2\, te^{-100t} \qquad \ldots (18)$$

Solución particular:

Debido a que en este caso la excitación externa es cero, la solución particular es también cero, esto es:

$$V_C(t)_p = 0 \qquad \ldots (19)$$

por lo que, la respuesta libre está dada únicamente por la ecuación (18):

$$V_C(t)_{LIB} = K_1\, e^{-100t} + K_2\, te^{-100t}$$

$$\ldots (20)$$

derivando la ecuación (20) con respecto al tiempo se obtiene:

$$V_C'(t) = -100\, K_1\, e^{-100t} + K_2\, e^{-100t} - 100\, K_2\, te^{-100t}$$

$$\ldots (21)$$

para evaluar las constantes K_1 y K_2 es necesario generar un sistema de ecuaciones simultáneas; a partir de las ecuaciones (15), (20) y (21) se tiene:

$$\left.\begin{aligned} V_0 &= K_1 \\ \frac{I_0}{C} &= -100\, K_1 + K_2 \end{aligned}\right| \ldots (22)$$

resolviendo el sistema de ecuaciones (22) se obtiene que K_1 y K_2 son:

$$K_1 = V_0$$
y
$$K_2 = \frac{I_0}{C} + 100\ V_0 \qquad \ldots (23)$$

sustituyendo los valores de V_0, I_0 y C en las ecuaciones (23):

$$K_1 = 50$$
y
$$K_2 = 5\,500$$

por lo tanto, la respuesta libre del sistema es:

$$\boxed{V_C(t)_{LIB} = 50\ e^{-100t} + 5500\ te^{-100t}} \qquad \ldots (I)$$

Gráficamente:

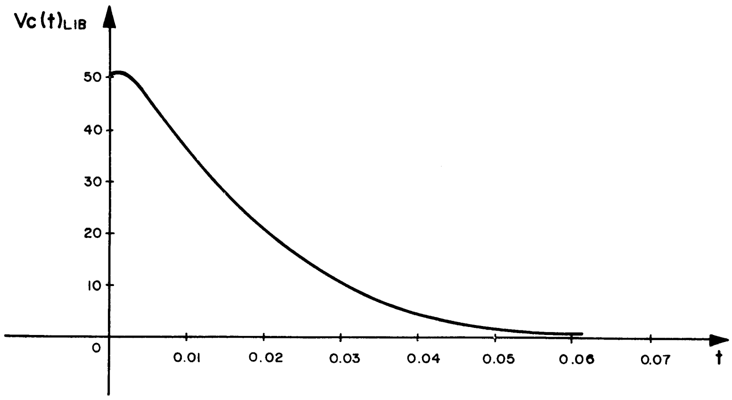


Figura IV.16

RESPUESTA FORZADA

Es aquélla que se debe únicamente a los parámetros o características propias del sistema y a la excitación externa o entrada aplicada a éste. En este caso se considera que el estado inicial del sistema es nulo, esto es:

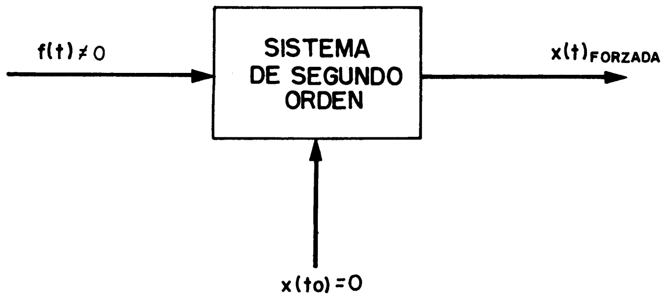
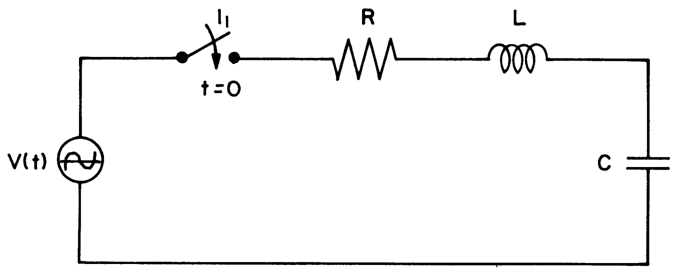


Figura IV. 17

Ejemplo IV.3

Obtener la respuesta forzada de un sistema eléctrico de segundo orden, formado por una resistencia, una inductancia y una capacitancia conectados en serie y alimentados por una fuente de voltaje V(t) como se muestra en la figura:



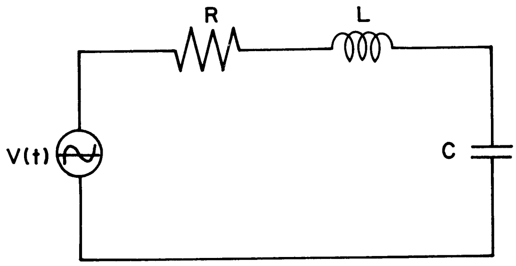
$V(t)=120 \text{ Cos } 337t$; $R=100\Omega$; $L=500 \text{ mH}$; $C=200 \mu F$

Figura IV. 18

Emplear como variable el voltaje en el capacitor.

Solución:

En el instante $t = 0$, el interruptor I_1 se cierra y se tiene que el sistema eléctrico es:



$V_C(0) = 0$; $i_L(0) = 0$

Figura IV.19

El modelo matemático del sistema está dado por:

$$LC\frac{d^2V_C}{dt^2} + RC\frac{dV_C}{dt} + V_C = V(t) \qquad \ldots (1)$$

y en forma normalizada es:

$$\frac{d^2V_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{LC}V_C = \frac{1}{LC}V(t) \qquad \ldots (2)$$

Para obtener la respuesta forzada del sistema, es necesario resolver la ecuación (2). Sustituyendo los valores de R, L, C y V(t) en la ecuación (2), se tiene:

$$\frac{d^2V_C}{dt^2} + 200\frac{dV_C}{dt} + 10\,000\ V_C = 1\,200\,000\cos 377t \qquad \ldots (3)$$

Solución homogénea:

$$\frac{d^2V_C}{dt^2} + 200\frac{dV_C}{dt} + 10\,000\ V_C = 0 \qquad \ldots (4)$$

la ecuación característica está dada por:

$$m^2 + 200\,m + 10\,000 = 0 \qquad \ldots (5)$$

y las frecuencias naturales del sistema son:

$$m_1 = -100$$
$$m_2 = -100$$

por lo tanto, la solución homogénea es:

$$V_C(t)_h = K_1 e^{-100t} + K_2 te^{-100t} \quad \ldots (6)$$

Solución particular:
Debido a que la excitación externa es una función senoidal, la solución que se propone está dada por:

$$V_C(t)_p = K_3 \cos 377\ t + K_4 \text{ sen } 377\ t \quad \ldots (7)$$

para evaluar las constantes K_3 y K_4, se requiere derivar dos veces la ecuación (7) con respecto al tiempo, esto es:

$$\frac{dV_{Cp}}{dt} = -377\ K_3 \text{ sen } 377t + 377\ K_4 \cos 377\ t$$

y $\ldots (8)$

$$\frac{d^2V_{Cp}}{dt^2} = -142\ 129\ K_3 \cos 377\ t - 142\ 129\ K_4 \text{ sen } 377\ t \quad \ldots (9)$$

sustituyendo las ecuaciones (7), (8) y (9) en la (3), se obtiene:

$$(-142\ 129\ K_3 + 75\ 400\ K_4 + 10\ 000\ K_3)\cos 377\ t +$$
$$+ (-142\ 129\ K_4 - 75\ 400\ K_3 - 10\ 000\ K_4) \text{ sen } 377\ t = 1\ 200\ 000 \cos 377\ t \quad \ldots (10)$$

por lo que el sistema de ecuaciones para evaluar K_3 y K_4 es:

$$\left.\begin{aligned} -132\ 129\ K_3 + 75\ 400\ K_4 &= 1\ 200\ 000 \\ -\ 75\ 400\ K_3 - 132\ 129\ K_4 &= 0 \end{aligned}\right| \quad \ldots (11)$$

resolviendo el sistema de ecuaciones (11), se tiene que K_3 y K_4 son:

$$K_3 = -6.85$$
$$K_4 = 3.9$$

sustituyendo los valores de K_3 y K_4 en la ecuación (7), se tiene que la solución particular es:

$$V_C(t)_p = -6.85 \cos 377\,t + 3.9 \operatorname{sen} 377\,t \quad \ldots (12)$$

la respuesta forzada de sistemas se obtiene sumando las ecuaciones (6) y (12):

$$V_C(t)_{FOR} = K_1\, e^{-100t} + K_2 t e^{-100t} - 6.85 \cos 377\,t + 3.9 \operatorname{sen} 377\,t \quad \ldots (13)$$

para evaluar las constantes K_1 y K_2, es necesario derivar con respecto al tiempo la ecuación (13) y emplear el dato de las condiciones iniciales que en este caso son cero:

$$\frac{dV_C}{dt} = (-100\,K_1 + K_2)\,e^{-100t} - 100\,K_2\,te^{-100t} + 2\,582.45 \operatorname{sen} 377\,t + 1\,470.3 \cos 377\,t \quad \ldots (14)$$

sustituyendo las condiciones iniciales en las ecuaciones (13) y (14), se obtiene el sistema de ecuaciones para evaluar K_1 y K_2:

$$\begin{aligned} K_1 - 6.85 &= 0 \\ -100\,K_1 + K_2 + 1\,470.3 &= 0 \end{aligned} \quad \ldots (15)$$

resolviendo el sistema de ecuaciones (15), se obtiene que K_1 y K_2 son:

$$K_1 = 6.85$$

$$K_2 = -758.3$$

sustituyendo K_1 y K_2 en la ecuación (13) se tiene que la respuesta forzada del sistema es:

$$V_C(t)_{FOR} = 6.85\, e^{-100t} - 758.3\, te^{-100t} - 6.85 \cos 377\,t + 3.9 \operatorname{sen} 377\,t \quad \ldots (II)$$

Gráficamente:

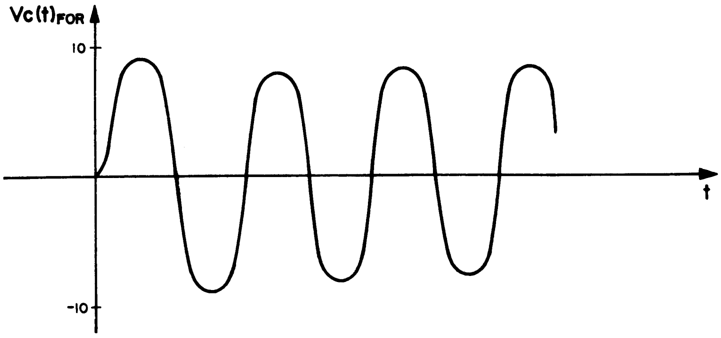


Figura IV.20

RESPUESTA TOTAL

Para obtener la respuesta total de un sistema de segundo orden en forma general, es necesario primeramente conocer el estado inicial del sistema y la excitación externa aplicada, ya que la respuesta total depende de estos datos y de las características propias del sistema, esto es:

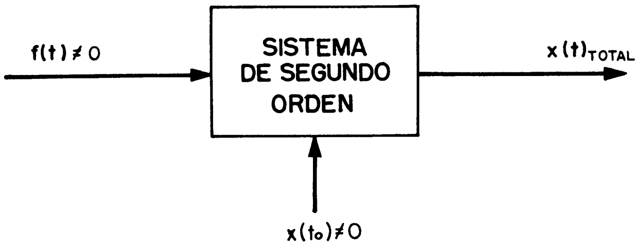


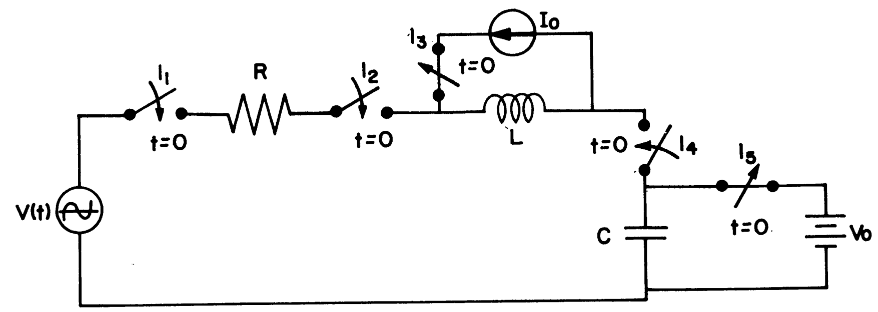
Figura IV.21

En forma general la respuesta total de un sistema puede ser obtenida a partir de la respuesta libre y forzada, mediante la siguiente expresión:

$$x(t)_{TOT} = x(t)_{LIB} + x(t)_{FOR}$$

Ejemplo IV.4

Obtener la respuesta total de un sistema eléctrico, formado por una resistencia, una inductancia y una capacitancia en serie como se muestra en la figura. El sistema es alimentado por una fuente de voltaje V(t).



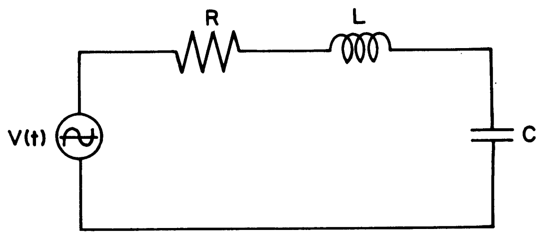
V(t)=120 Cos337t ; R=100Ω ; C=200μF ; L=500mH ; Io=100mA ; Vo=50V

Figura IV.22

Emplear como variable el voltaje del capacitor.

Solución:

En el tiempo t = 0 los interruptores I_1, I_2 e I_4 se cierran y los interruptores I_3 e I_5 se abren, el sistema eléctrico equivalente es:



$V_C(0) = V_0$; $i_L(0) = I_0$

Figura IV.23

El modelo matemático del sistema está dado por:

$$LC\frac{d^2V_C}{dt^2} + RC\frac{dV_C}{dt} + V_C = V(t) \qquad \ldots (1)$$

El modelo matemático en forma normalizada está dado por:

$$\frac{d^2V_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{LC}V_C = \frac{1}{LC}V(t) \qquad \ldots (2)$$

sustituyendo los valores de R, L, C y V(t) en la ecuación (2);

$$\frac{d^2V_C}{dt^2} + 200\frac{dV_C}{dt} + 10\,000\,V_C = 1\,200\,000 \cos 377\,t \qquad .. (3)$$

para obtener la respuesta total, se requiere resolver la ecuación (3).

Solución homogénea:

$$\frac{d^2V_C}{dt^2} + 200\frac{dV_C}{dt} + 10\,000\,V_C = 0 \qquad \ldots (4)$$

la ecuación característica es:

$$m^2 + 200\,m + 10\,000 = 0 \qquad \ldots (5)$$

y las frecuencias naturales del sistema son:

$$m_1 = -100$$

y

$$m_2 = -100$$

por lo tanto, la solución homogénea está dada por:

$$V_C(t)_h = K_1\,e^{-100t} + K_2\,te^{-100t} \qquad \ldots (6)$$

Solución particular:

Puesto que la excitación externa es una función senoidal, la solución particular que se propone es:

$$V_C(t)_p = K_3 \cos 377\,t + K_4 \operatorname{sen} 377\,t \qquad \ldots (7)$$

para evaluar las constantes K_3 y K_4, es necesario derivar dos veces con respecto al tiempo la solución particular y sustituir en la ecuación diferencial original:

$$\frac{dVc_p}{dt} = -377\ K_3\ \text{sen}\ 377\ t + 377\ K_4\ \cos 377\ t \qquad \ldots (8)$$

y

$$\frac{d^2Vc_p}{dt^2} = -\ 142\,129\,K_3\ \cos 377\,t - 142\,129\ K_4\ \text{sen}\ 377\,t \qquad \ldots (9)$$

sustituyendo las ecuaciones (7), (8) y (9) en la (3):

$$(-142\ 129\ K_3 + 75\ 400\ K_4 + 10\,000\ K_3)\cos 377\ t +$$

$$+\ (-142\,129\ \ K_4 - 75\,400\,K_3 + 10\,000\ \ K_4)\text{sen}\ 377\,t = 1\,200\,000\ \cos 377\,t$$

el sistema de ecuaciones para evaluar K_3 y K_4 es:

$$-\ 132\ 129\ K_3 + 75\ 400\ K_4 = 1\,200\,000$$

$$-\ \ 75\ 400\ K_3 - 132\ 129\ K_4 = 0$$

de donde:

$$K_3 = -\ 6.85$$

y

$$K_4 = 3.9$$

por lo tanto, la solución particular es:

$$V_C(t)_p = -\ 6.85\ \cos 377\ t + 3.9\ \text{sen}\ 377\ t \qquad \ldots (10)$$

la respuesta total se obtiene al sumar las ecuacio nes (6) y (10), esto es:

$$V_C(t)_{TOT} = K_1\ e^{-100t} + K_2\ te^{-100t} - 6.85\ \cos 377\,t + 3.9\ \text{sen}\,377\,t \qquad \ldots (11)$$

para conocer el valor de las constantes K_1 y K_2 es necesario emplear las condiciones iniciales del sis tema, éstas son:

$$V_C(0) = 50\ V$$

$$V'_C(0) = 500\ V$$

derivando con respecto al tiempo la ecuación (11), se tiene:

$$\frac{dV_C}{dt} = -100\ K_1\ e^{-100t} + K_2\ e^{-100t} - 100\ K_2\ te^{-100t} +$$

$$+ 2\,582.45 \text{ sen } 377\,t + 1\,470.3 \cos 377\,t \qquad \ldots (12)$$

sustituyendo las condiciones iniciales en las ecuaciones (11) y (12), se obtiene:

$$V_C(0) = 50 = K_1 - 6.85$$

$$V'_C(0) = 500 = -100\ K_1 + K_2 + 1\,470.3 \qquad \ldots (13)$$

de donde:

$$K_1 = 56.85$$

y

$$K_2 = 4\,741.7$$

sustituyendo K_1 y K_2 en la ecuación (11), la respuesta total del sistema es:

$$\boxed{V_C(t)_{TOT} = 56.85\ e^{-100t} + 4\,741.7\ te^{-100t} - 6.85 \cos 377\,t + 3.9 \text{ sen } 377\,t}$$

$$\ldots (III)$$

Otra forma de obtener la respuesta total del sistema es sumando las respuestas libre y forzada dadas por las ecuaciones (I) y (II), respectivamente. Esto es:

$$V_C(t)_{TOT} = V_C(t)_{LIB} + V_C(t)_{FOR}$$

por lo tanto:

$$\boxed{V_C(t)_{TOT} = 56.85\ e^{-100t} + 4\,741.7\ te^{-100t} - 6.85 \cos 377\,t + 3.9 \text{ sen } 377\,t}$$

$$\ldots (IV)$$

Comparando las ecuaciones (III) y (IV) se aprecia que son idénticas, con esto se comprueba que la respuesta total para un sistema dado es posible obtenerla mediante dos procedimientos distintos.

Gráficamente la respuesta total es:

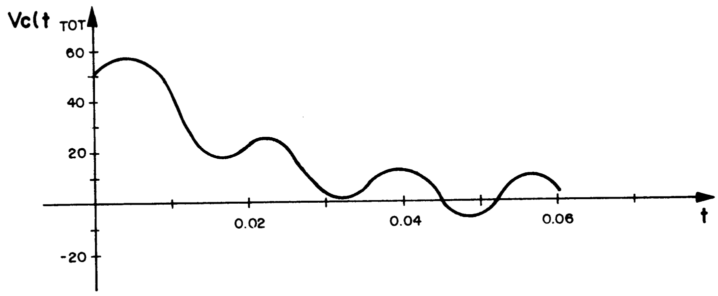


Figura IV.24

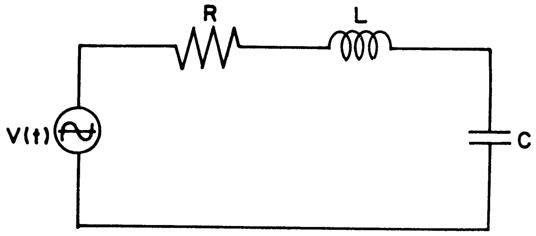
RESPUESTA PERMANENTE

La respuesta permanente o respuesta en estado estable es la que produce el sistema cuando se ha estabilizado, esto es, el sistema alcanza su estado estable después de que ha transcurrido un cierto tiempo (teóricamente el tiempo tiende a infinito). La manera de obtener la respuesta permanente del sistema es mediante la aplicación de la expresión siguiente:

$$x(t)_{PER} = \lim_{t \to \infty} x(t)_{TOT}$$

Ejemplo IV.5

Obtener la respuesta permanente del sistema eléctrico descrito en el ejemplo IV.4.



$V_C(0) = 50\,V$; $i_L(0) = 100\,mA$; $V(t) = 120 \cos 377t$; $R = 100\,\Omega$; $L = 500\,mH$; $C = 200\,\mu F$

Figura IV.25

Solución:

El modelo matemático del sistema es:

$$\frac{d^2V_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{LC}V_C = \frac{1}{LC}V(t) \qquad \ldots (1)$$

la respuesta total del sistema está dada por la ecuación siguiente:

$$V_C(t)_{TOT} = 56.85\,e^{-100t} + 4\,741.7\,te^{-100t} - 6.85\cos 377\,t + 3.9\,\text{sen}\,377\,t \qquad \ldots (2)$$

como:

$$V_C(t)_{PER} = \lim_{t\to\infty} V_C(t)_{TOT}$$

la respuesta permanente del sistema es:

$$\boxed{V_C(t)_{PER} = 3.9\,\text{sen}\,377\,t - 6.85\cos 377\,t}$$

Gráficamente:

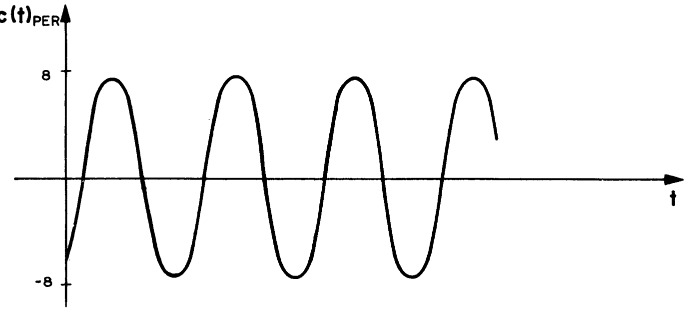


Figura IV.26

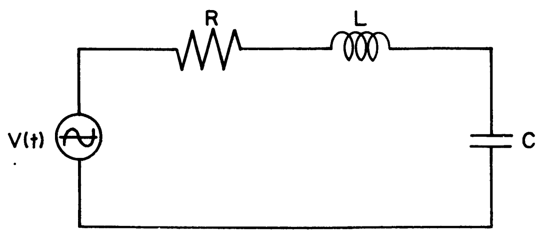
RESPUESTA TRANSITORIA

La forma en la que el sistema responde antes de estabilizarse o alcanzar el estado estable, es lo que se denomina en el estudio de sistemas dinámicos como la respuesta transitoria. La manera de obtenerla es por medio de la expresión:

$$x(t)_{TRAN} = x(t)_{TOT} - x(t)_{PER}$$

Ejemplo IV.6

Obtener la respuesta transitoria de un sistema eléctrico formado por una resistencia, una inductancia, una capacitancia y una fuente de voltaje como se muestra en la figura:



$V_C(0)=50V$; $i_L(0)=100mA$; $V(t)=120\cos 377t$; $R=100\Omega$; $L=500mH$; $C=200\mu F$

Figura IV.27

Solución:

El modelo matemático del sistema está dado por la ecuación siguiente:

$$\frac{d^2V_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{LC}V_C = \frac{1}{LC}V(t) \qquad \ldots (1)$$

la respuesta total del sistema es:

$$V_C(t)_{TOT} = 56.85\ e^{-100t} + 4\ 741.7\ te^{-100t} - 6.85\cos 377\,t + 3.9\ \mathrm{sen}\ 377\,t \qquad \ldots (2)$$

la respuesta permanente del sistema es:

$$V_C(t)_{PER} = 3.9\ \mathrm{sen}\ 377\,t - 6.85\cos 377\,t \qquad \ldots (3)$$

la respuesta transitoria del sistema se obtiene a partir de la expresión:

$$V_C(t)_{TRAN} = V_C(t)_{TOT} - V_C(t)_{PER} \qquad \ldots (4)$$

por lo tanto, la respuesta transitoria es:

$$\boxed{V_C(t)_{TRAN} = 56.85\ e^{-100t} + 4\ 741.7\ te^{-100t}}$$

Gráficamente:

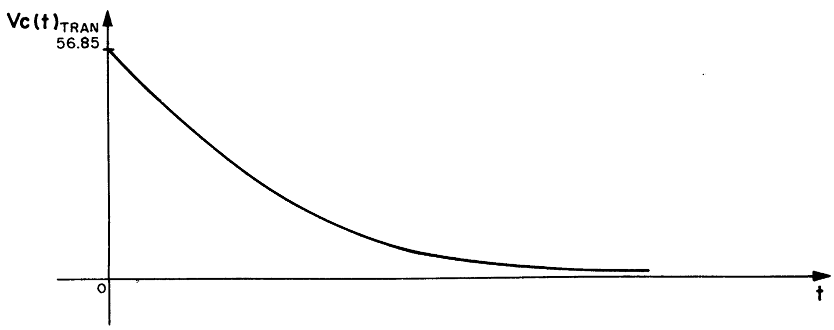
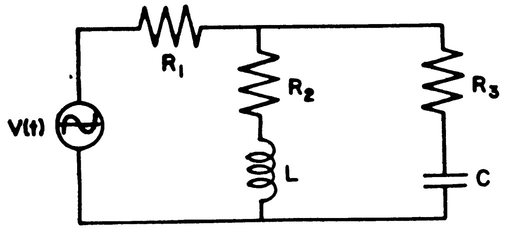


Figura IV.28

A continuación se presentan algunos ejemplos para los diferentes tipos de sistemas de segundo orden.

SISTEMA Y MODELO MATEMATICO



$R_1 = R_2 = R_3 = R$

$$\frac{d^2V_C}{dt^2} + \left[\frac{3R}{2L} + \frac{1}{2RC}\right]\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{LC}V_C = \frac{1}{2LC}v(t) + \frac{1}{2RC}\dot{V}(t)$$

Para el sistema considerado en este caso, no es posible obtener el comportamiento "no amortiguado" debido a la configuración del sistema.

COMPORTAMIENTO SOBREAMORTIGUADO

$R = 68\,\Omega$; $L = 500\text{ mH}$; $C = 200\,\mu F$

$V_C(0) = 0$; $\dot{V}_C(0) = 50\ \frac{V}{S}$; $V(t) = 120 \cos 377t\ V$

$$V_C(t)_{LIB} = 0.3535\ (e^{-48t} - e^{-189.43t})$$

$$V_C(t)_{FOR} = -29.1835\ e^{-48t} + 26.7435\ e^{-189.43t} + 2.44 \cos 377t + 9.72 \operatorname{sen} 377t$$

$$V_C(t)_{TOT} = -28.83\ e^{-48t} + 26.39\ e^{-189.43t} + 2.44 \cos 377t + 9.72 \operatorname{sen} 377t$$

$$V_C(t) = 2.44 \cos 377\,t + 9.72 \operatorname{sen} 377\,t$$

$$V_C(t)_{TRAN} = -28.83\ e^{-48t} + 26.39\ e^{-189.43t}$$

COMPORTAMIENTO CRITICAMENTE AMORTIGUADO

$$R = 15.89\ \Omega \quad ; \quad L = 500\ mH \quad ; \quad C = 220\ \mu F$$

$$V_C(0) = 0 \quad ; \quad \dot{V}_C(0) = 50\ \frac{V}{S} \quad ; \quad V(t) = 120 \cos 377\ t\ V$$

$$V_C(t)_{LIB} = 50\ t\ e^{-95.35t}$$

$$V_C(t)_{FOR} = -16\,475.488\ t e^{-95.35t} - 17.16\, e^{-95.35t} + 17.16 \cos 377\ t + 39.35 \operatorname{sen} 377\ t$$

$$V_C(t)_{TOT} = -16\,425.488\ t e^{-95.35t} - 17.16\, e^{-95.35t} + 17.16 \cos 377\ t + 39.35 \operatorname{sen} 377\ t$$

$$V_C(t)_{PER} = 17.16 \cos 377\ t + 39.35 \operatorname{sen} 377\ t$$

$$V_C(t)_{TRAN} = -\ 16\,425.488\ t\ e^{-95.35t} - 17.16\ e^{-95.35t}$$

COMPORTAMIENTO SUBAMORTIGUADO

$$R = 33\ \Omega \quad ; \quad L = 500\ mH \quad ; \quad C = 220\ \mu F$$

$$V_C(0) = 0 \quad ; \quad \dot{V}_C(0) = 50\ \frac{V}{S} \quad ; \quad V(t) = 120 \cos 377\ t \quad V$$

$$V_C(t)_{LIB} = 1.1\ e^{-83.95t} \operatorname{sen} 45.2\ t$$

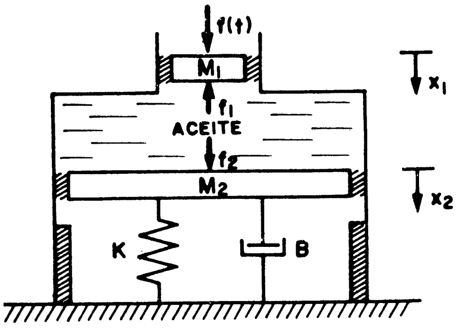
$$V_C(t)_{FOR} = -e^{-83.95t} (5.59 \cos 45.2\ t + 181.2 \operatorname{sen} 45.2\ t) + 5.59 \cos 377\ t + 20.66 \operatorname{sen} 377\ t$$

$$V_C(t)_{TOT} = -e^{-83.95t} (5.59 \cos 45.2\ t + 182.3 \operatorname{sen} 45.2\ t) + 5.59 \cos 377\ t + 20.66 \operatorname{sen} 377\ t$$

$$V_C(t)_{PER} = 5.59 \cos 377\ t + 20.66 \operatorname{sen} 377\ t$$

$$V_C(t)_{TRAN} = -e^{-83.95t} (5.59 \cos 45.2\ t + 182.3 \operatorname{sen} 45.2\ t)$$

SISTEMA Y MODELO MATEMATICO



No se considere fricción entre las masas y las paredes del recipiente que contiene el aceite.

A_1 y A_2 son las áreas de las masas M_1 y M_2 respectivamente.

Condiciones:

$$A_1 x_1 = A_2 x_2 \qquad y \qquad \frac{f_1}{A_1} = p = \frac{f_2}{A_2}$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{A_1^2\, B}{M_1A_2^2 + M_2A_1^2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{A_1^2\, K}{M_1A_2^2 + M_2A_1^2}x_2 = \frac{A_1\, A_2}{M_1A_2^2 + M_2A_1^2}\, f(t)$$

COMPORTAMIENTO SOBREAMORTIGUADO

$A_1 = 0.105\ m^2$; $A_2 = 1.05\ m^2$; $M_1 = 200$ kg ; $M_2 = 2\,000$ kg

$f(t) = 50$ N ; $x_2(0) = 0.1$ m ; $\dot{x}_2(0) = 0$; $K = 2\,000\ \frac{N}{m}$; $B = 18\,000\ \frac{N\cdot s}{m}$

$$x_2(t)_{LIB} = 0.125\ e^{-0.13t} - 0.0025\ e^{-0.68t}$$

$$x_2(t)_{FOR} = 0.257 - 0.318\ e^{-0.13t} + 0.061\ e^{-0.68t}$$

$$x_2(t)_{TOT} = 0.257 - 0.193\ e^{-0.13t} + 0.036\ e^{-0.68t}$$

$$x_2(t)_{PER} = 0.257$$

$$x_2(t)_{TRAN} = -0.193\ e^{-0.13t} + 0.036\ e^{-0.68t}$$

COMPORTAMIENTO CRITICAMENTE AMORTIGUADO

$A_1 = 0.105\ m^2$; $A_2 = 1.05\ m^2$; $M_1 = 200$ kg ; $M_2 = 2\,000$ kg

$f(t) = 50$ N ; $x_2(0) = 0.1$ m ; $\dot{x}_2(0) = 0$; $K = 2\,909.1\ \frac{N}{m}$; $B = 16\,000\ \frac{N \cdot s}{m}$

$$x_2(t)_{LIB} = 0.1\ e^{-0.363t} + 0.0364\ t\ e^{-0.363t}$$

$$x_2(t)_{FOR} = 172 - 0.172\ e^{-0.363t} - 0.062\ t\ e^{-0.363t}$$

$$x_2(t)_{TOT} = 0.172 - 0.072\ e^{-0.363t} - 0.0256\ t\ e^{-0.363t}$$

$$x_2(t)_{PER} = 0.172$$

$$x_2(t)_{TRAN} = -0.072\ e^{-0.363t} - 0.0256\ t\ e^{-0.363t}$$

COMPORTAMIENTO SUBAMORTIGUADO

$A_1 = 0.105\ m^2$; $A_2 = 1.05\ m^2$; $M_1 = 200$ kg ; $M_2 = 2\,000$ kg

$f(t) = 150$ N ; $x_2(0) = 0.1$ m ; $\dot{x}_2(0) = 0$; $K = 9\,142.6\ \frac{N}{m}$; $B = 19\,552\ \frac{N \cdot s}{m}$

$$x_2(t)_{LIB} = e^{-0.444t}\ (0.1 \cos 0.467\ t + 0.095 \operatorname{sen} 0.467\ t)$$

$$x_2(t)_{FOR} = 0.164 - e^{-0.444t}\ (0.164 \cos 0.467\ t + 0.156 \operatorname{sen} 0.467\ t)$$

$$x_2(t)_{TOT} = 0.164 - e^{-0.444t}\ (0.064 \cos 0.467\ t + 0.061 \operatorname{sen} 0.467\ t)$$

$$x_2(t)_{PER} = 0.164$$

$$x_2(t)_{TRAN} = -\ e^{-0.444t}\ (0.064 \cos 0.467\ t + 0.061 \operatorname{sen} 0.467\ t)$$

COMPORTAMIENTO NO AMORTIGUADO

$A_1 = 0.105\ m^2$; $A_2 = 1.05\ m^2$; $M_1 = 200\ kg$; $M_2 = 2\,000\ kg$

$f(t) = 300\ N$; $x_2(0) = 0.1\ m$; $\dot{x}_2(0) = 0$; $K = 12\,000\ \frac{N}{m}$; $B = 0$

$$x_2(t)_{LIB} = 0.1 \cos 0.738\,t$$

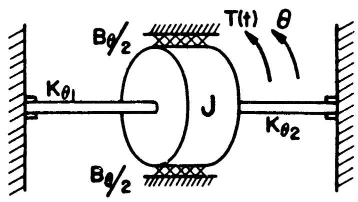
$$x_2(t)_{FOR} = 0.25 - 0.25 \cos 0.738\,t$$

$$x_2(t)_{TOT} = 0.25 - 0.15 \cos 0.738\,t$$

$$x_2(t)_{PER} = 0.25 - 0.15 \cos 0.738\,t$$

$$x_2(t)_{TRAN} = 0$$

SISTEMA Y MODELO MATEMATICO



$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{B_\theta}{J}\frac{d\theta}{dt} + \frac{K_{\theta 1} + K_{\theta 2}}{J}\,\theta = \frac{1}{J}\,T(t)$$

COMPORTAMIENTO SOBREAMORTIGUADO

$$J = 2\ kg \cdot m^2\ ;\ B_\theta = 20\ \frac{N \cdot m \cdot s}{rad}\ ;\ K_{\theta_1} = 20\ \frac{N \cdot m}{rad}\ ;\ K_{\theta_2} = 20\ \frac{N \cdot m}{rad}$$

$$T(t) = 100\ N \cdot m\ ;\ \theta(0) = 0.1\ rad\ ;\ \dot{\theta}(0) = 0$$

$$\theta(t)_{LIB} = -0.062\ e^{-7.23t} + 0.162\ e^{-2.77t}$$

$$\theta(t)_{FOR} = 2.5 + 1.55\ e^{-7.23t} - 4.05\ e^{-2.77t}$$

$$\theta(t)_{TOT} = 2.5 + 1.488\ e^{-7.23t} - 3.888\ e^{-2.77t}$$

$$\theta(t)_{PER} = 2.5$$

$$\theta(t)_{TRAN} = 1.488\ e^{-7.23t} - 3.888\ e^{-2.77t}$$

COMPORTAMIENTO CRITICAMENTE AMORTIGUADO

$$J = 2\ kg \cdot m^2 \quad ; \quad B_\theta = 20\ \frac{N \cdot m \cdot s}{rad} \quad ; \quad K_{\theta_1} = 20\ \frac{N \cdot m}{rad} \quad ; \quad K_{\theta_2} = 30\ \frac{N \cdot m}{rad}$$

$$T(t) = 100\ N \cdot m \quad ; \quad \theta(0) = 0.1\ rad \quad ; \quad \dot{\theta}(0) = 0$$

$$\theta(t)_{LIB} = 0.1\ e^{-5t} - 0.5\ t\,e^{-5t}$$

$$\theta(t)_{FOR} = 2 - 10\ t\,e^{-5t} - 2\ e^{-5t}$$

$$\theta(t)_{TOT} = 2 - 1.9\ e^{-5t} - 10.5\ t\,e^{-5t}$$

$$\theta(t)_{PER} = 2$$

$$\theta(t)_{TRAN} = -1.9\ e^{-5t} - 10.5\ t\,e^{-5t}$$

COMPORTAMIENTO SUBAMORTIGUADO

$$J = 2\ kg \cdot m^2 \quad ; \quad B_\theta = 20\ \frac{N \cdot m \cdot s}{rad} \quad ; \quad K_{\theta_1} = 400\ \frac{N \cdot m}{rad} \quad ; \quad K_{\theta_2} = 200\ \frac{N \cdot m}{rad}$$

$$T(t) = 100\ N \cdot m \quad ; \quad \theta(0) = 0.1\ rad \quad ; \quad \dot{\theta}(0) = 0$$

$$\theta(t)_{LIB} = e^{-5t}\ (0.1 \cos 16.58\,t + 0.03 \operatorname{sen} 16.58\,t)$$

$$\theta(t)_{FOR} = 0.166 - e^{-5t}\ (0.166 \cos 16.58\,t + 0.05 \operatorname{sen} 16.58\,t)$$

$$\theta(t)_{TOT} = 0.166 - e^{-5t}\ (0.066 \cos 16.58\,t + 0.02 \operatorname{sen} 16.58\,t)$$

$$\theta(t)_{PER} = 0.166$$

$$\theta(t)_{TRAN} = -\ e^{-5t}\ (0.066 \cos 16.58\,t + 0.02 \operatorname{sen} 16.58\,t)$$

COMPORTAMIENTO NO AMORTIGUADO

$$T(t) = 100\ N\cdot m \quad ; \quad \theta(0) = 0.1\ rad \quad ; \quad \dot{\theta}(0) = 0$$

$$J = 2\ kg\cdot m^2 \quad ; \quad B_\theta = 0 \quad ; \quad K_{\theta 1} = 50\ \frac{N\cdot m}{rad} \quad ; \quad K_{\theta 2} = 50\ \frac{N\cdot m}{rad}$$

$$\theta(t)_{LIB} = 0.1 \cos 7.07\, t$$

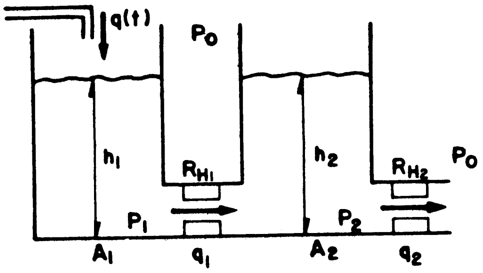
$$\theta(t)_{FOR} = 1 - 1 \cos 7.07\, t$$

$$\theta(t)_{TOT} = 1 - 0.9 \cos 7.07\, t$$

$$\theta(t)_{PER} = 1 - 0.9 \cos 7.07\, t$$

$$\theta(t)_{TRAN} = 0$$

SISTEMA Y MODELO MATEMATICO



$$\frac{d^2h_2}{dt^2}+\frac{\gamma(A_1(R_{H_1}+R_{H_2})+A_2R_{H_2})}{A_1A_2\ R_{H_1}\ R_{H_2}}\ \frac{dh_2}{dt}+\frac{\gamma^2}{A_1A_2\ R_{H_1}\ R_{H_2}}\ h_2=\frac{\gamma}{A_1A_2\ R_{H_1}}\ q(t)$$

Debido a que este sistema es resistivo - capacitivo, no puede presentar los comportamientos críticamente amortiguado, subamortiguado y no amortiguado.

COMPORTAMIENTO SOBREAMORTIGUADO

$A_1 = 1.54\ m^2$; $A_2 = 1.13\ m^2$; $R_{H1} = 5\times10^6\ \frac{Pa\cdot s}{m^3}$; $R_{H2} = 5\times10^6\ \frac{Pa\cdot s}{m^3}$

$q(t) = 3\times10^{-3} + 5\times10^{-5}\ \text{sen}\ t\ \ \frac{m^3}{s}$; $h_2(0) = 0.70\ m$; $h_2'(0) = 0.05\ \frac{m}{s}$

$$h_2(t)_{LIB} = 14.35\ e^{-5.25\times10^{-4}t} - 13.65\ e^{-4.215\times10^{-3}t}$$

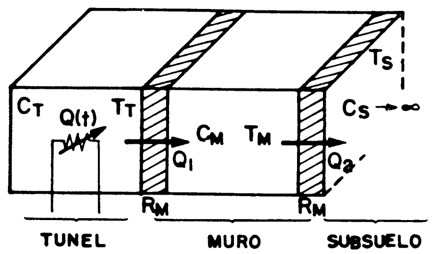
$$h_2(t)_{FOR} = 1.527 - 1.75\ e^{-5.25\times10^{-4}t} + 0.22\ e^{-4.215\times10^{-3}t} + 3.376\times10^{-6}\cos t - 1.603\times10^{-8}\ \text{sen}\ t$$

$$h_2(t)_{TOT} = 1.527 + 12.6\ e^{-5.25\times10^{-4}t} - 13.43\ e^{-4.215\times10^{-3}t} + 3.376\times10^{-6}\cos t - 1.603\times10^{-8}\ \text{sen}\ t$$

$$h_2(t)_{PER} = 1.527 + 3.376\times10^{-6}\cos t - 1.603\times10^{-8}\ \text{sen}\ t$$

$$h_2(t)_{TRAN} = 12.6\ e^{-5.25\times10^{-4}t} - 13.43\ e^{-4.215\times10^{-3}t}$$

S I S T E M A   Y   M O D E L O   M A T E M A T I C O



$$\frac{d^2T_T}{dt^2} + \frac{C_M + 2C_T}{R_M C_M C_T}\frac{dT_T}{dt} + \frac{1}{R_M^2 C_M C_T} T_T = \frac{1}{C_T}\dot{Q}_0(t) + \frac{2}{C_M C_T R_M} Q_0(t) + \frac{1}{R_M^2 C_M C_T} T_s$$

Debido a que este sistema es resistivo - capacitivo, no puede presentar los comportamientos críticamente amortiguado, subamortiguado y no amortiguado.

COMPORTAMIENTO SOBREAMORTIGUADO

$$R_M = 10^{-3}\,\frac{K}{W} \;;\; C_T = 345 \times 10^4\,\frac{W\cdot s}{K} \;;\; C_M = 370 \times 10^4\,\frac{W\cdot s}{K} \;;\; T_T(0) = 280\ K$$

$$\dot{T}_T(0) = 0.1\,\frac{K}{s} \;;\; Q_0(t) = 2\,700\ W \;;\; T_s = 296.3$$

$$T_T(t)_{LIB} = -213.09\, e^{-7.21\mathrm{x}10^{-4}t} + 493.09\, e^{-1.085\mathrm{x}10^{-4}t}$$

$$T_T(t)_{FOR} = 301.7 + 53.44\, e^{-7.21\mathrm{x}10^{-4}t} - 355.14\, e^{-1.085\mathrm{x}10^{-4}t}$$

$$T_T(t)_{TOT} = 301.7 - 159.65\, e^{-7.21\mathrm{x}10^{-4}t} + 137.95\, e^{-1.085\mathrm{x}10^{-4}t}$$

$$T_T(t)_{PER} = 301.7$$

$$T_T(t)_{TRAN} = -159.65\, e^{-7.21\mathrm{x}10^{-4}t} + 137.95\, e^{-1.085\mathrm{x}1}$$

Tabla IV.3

IV.4 Respuesta Escalón

La respuesta escalón para sistemas de segundo orden, es uno de los análisis que se realiza en sistemas de este tipo, ya que a partir de esta respuesta se pueden conocer las características más representativas del sistema.

Por otra parte, para obtener la respuesta escalón, es necesario que el estado inicial del sistema sea nulo y que la excitación externa aplicada sea la función escalón unitario.

En forma esquemática, esto es:

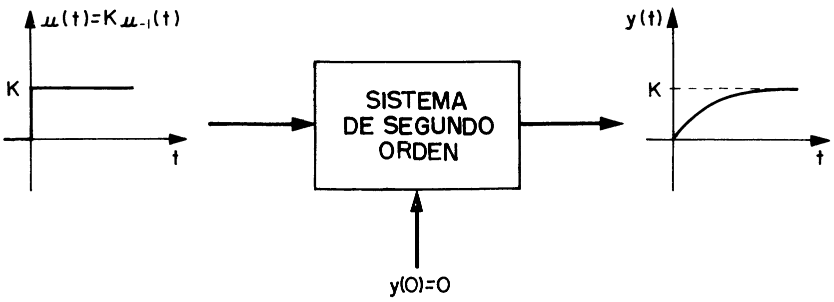


Figura IV.29

En general, la respuesta escalón de un sistema de segundo orden varía de acuerdo con el factor de amortiguamiento relativo, por lo tanto es posible hacer gráficas normalizadas para diferentes valores del factor de amortiguamiento relativo, como se muestra en la siguiente figura:

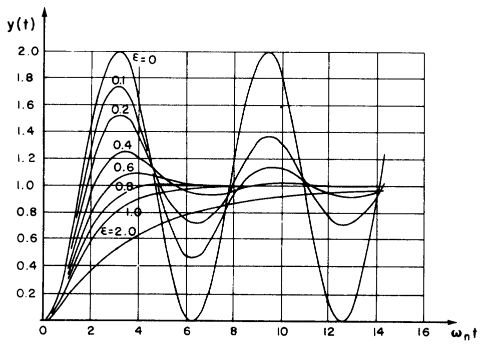


Figura IV.30

Existen dos métodos para obtener la respuesta escalón:

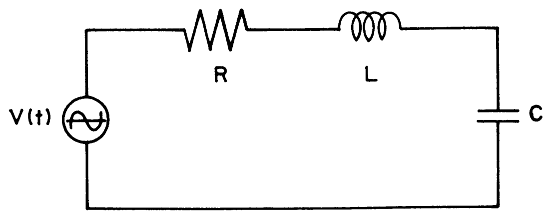
a) Dominio del tiempo
(Solución por el método de coeficientes indeterminados).

b) Dominio de la frecuencia
(Solución por el método directo de transformada de Laplace).

A fin de ilustrar la forma de obtener la respuesta escalón se presenta el siguiente ejemplo:

Ejemplo IV.7

Obtener la respuesta escalón para un sistema eléctrico de segundo orden formado por una resistencia, una inductancia y una capacitancia conectadas en serie y alimentadas por una fuente de voltaje V(t), que en este caso es una función escalón unitario.



$V(t) = u_{-1}(t)$; $R = 100\Omega$; $L = 500mH$; $C = 200\mu F$

Figura IV.31

Emplear como variable el voltaje en el capacitor.

Solución:

El modelo matemático del sistema es:

$$\frac{d^2V_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{LC}V_C = \frac{1}{LC}V(t) \qquad \ldots (1)$$

sustituyendo los valores de R, L, C y V(t) en la ecuación (1), se tiene:

$$\frac{d^2V_C}{dt^2} + 200\frac{dV_C}{dt} + 10\,000\ V_C = 10\,000\ u_{-1}(t) \qquad \ldots (2)$$

a) Obtención de la respuesta escalón en el dominio del tiempo.

Solución homogénea:

$$\frac{d^2V_C}{dt^2} + 200\,\frac{dV_C}{dt} + 10\,000\ V_C = 0 \qquad \ldots (3)$$

la ecuación característica es:

$$m^2 + 200\,m + 10\,000 = 0 \qquad \ldots (4)$$

y las frecuencias naturales son:

$$m_1 = -100$$

y

$$m_2 = -100$$

por lo tanto, la solución homogénea es:

$$V_C(t)_h = K_1\,e^{-100t} + K_2\,te^{-100t} \qquad \ldots (5)$$

Solución particular:
Debido a que en este caso la función escalón unitario puede ser considerada como una constante, la solución particular que se propone es:

$$V_C(t)_p = K_3 \qquad \ldots (6)$$

derivando la ecuación (6) dos veces con respecto al tiempo, se tiene:

$$\frac{dV_{Cp}}{dt} = 0 \qquad \ldots (7)$$

y

$$\frac{d^2V_{Cp}}{dt^2} = 0 \qquad \ldots (8)$$

sustituyendo las ecuaciones (6), (7) y (8) en la (2), se obtiene que el valor de la constante K_3 es:

$$K_3 = 1$$

por lo tanto, la solución particular es:

$$V_C(t)_p = 1 \qquad \ldots (9)$$

de las ecuaciones (5) y (9), se obtiene que la respuesta escalón está dada por:

$$V_C(t) = K_1\, e^{-100t} + K_2\, te^{-100t} + 1 \quad \ldots (10)$$

para evaluar las constantes K_1 y K_2, se requiere derivar la ecuación (10) con respecto al tiempo y aplicar las condiciones iniciales, que en este caso son nulas:

$$\frac{dV_C}{dt} = -100\, K_1\, e^{-100t} + K_2\, e^{-100t} - 100\, K_2\, te^{-100t} \quad \ldots (11)$$

de la ecuación (10), se obtiene:

$$V_C(0) = 0 = K_1 + 1 \quad \ldots (12)$$

y de la ecuación (11), se obtiene:

$$V'_C(0) = 0 = -100\, K_1 + K_2 \quad \ldots (13)$$

por lo tanto:

$$K_1 = -1$$

y

$$K_2 = -100$$

la respuesta escalón del sistema está dada por la ecuación (12):

$$\boxed{\begin{array}{l} V_C(t) = 1 - e^{-100t} - 100\, te^{-100t} \qquad t \geq 0 \\ \text{o bien} \\ V_C(t) = (1 - e^{-100t} - 100\, te^{-100t})\; u_{-1}(t) \end{array}} \quad \ldots (I)$$

b) Obtención de la respuesta escalón en el dominio de la frecuencia.
Aplicando la transformada de Laplace a ambos miembros de la ecuación (2), se tiene:

$$L\left\{\frac{d^2V_C}{dt^2} + 200\,\frac{dV_C}{dt} + 10\,000\,V_C\right\} = L\left\{10\,000\quad u_{-1}(t)\right\} \qquad \ldots (14)$$

desarrollando término a término:

$$L\left\{\frac{d^2V_C}{dt^2}\right\} = S^2V_C(S) - SV_C(0) - V'_C(0) \qquad \ldots (15)$$

$$L\left\{200\,\frac{dV_C}{dt}\right\} = 200\quad SV_C(S) - 200\,V_C(0) \qquad \ldots (16)$$

$$L\left\{10\,000\quad V_C\right\} = 10\,000\quad V_C(S) \qquad \ldots (17)$$

$$L\left\{10\,000\quad u_{-1}(t)\right\} = \frac{10\,000}{S} \qquad \ldots (18)$$

sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación (14), se obtiene:

$$V_C(S)\ (S^2 + 200S + 10\,000) - V_C(0)(S + 200) - V'_C(0) = \frac{10\,000}{S} \qquad \ldots (19)$$

pero las condiciones iniciales en este caso son nulas, esto es:

$$V_C(0) = V'_C(0) = 0$$

por lo tanto, despejando $V_C(S)$ se obtiene:

$$V_C(S) = \frac{10\,000}{S(S^2 + 200S + 10\,000)}$$

o bien:

$$V_C(S) = \frac{10\,000}{S(S + 100)^2} \qquad \ldots (20)$$

Para obtener la transformada inversa de Laplace de la ecuación (20), es necesario hacer una expansión en fracciones parciales de la forma siguiente:

$$V_C(S) = \frac{10\,000}{S(S + 100)^2} = \frac{A}{S} + \frac{B}{(S + 100)^2} + \frac{C}{S + 100} \qquad \ldots (21)$$

las constantes A, B y C se evalúan con base en el procedimiento descrito en el apéndice de transformada de Laplace y sus valores son:

$$A = 1 \; ; \quad B = -100 \; ; \quad C = -1$$

sustituyendo las constantes A, B y C en la ecuación (21), se tiene:

$$V_C(S) = \frac{1}{S} - \frac{100}{(S + 100)^2} - \frac{1}{S + 100} \qquad \ldots (22)$$

la respuesta escalón se obtiene aplicando la transformada inversa de Laplace de la ecuación (22), esto es:

$$V_C(t) = L^{-1}\left\{ V_C(S) \right\} = L^{-1}\left\{ \frac{1}{S} - \frac{100}{(S + 100)^2} - \frac{1}{S + 100} \right\} \qquad \ldots (23)$$

la respuesta escalón es:

$$\boxed{\begin{array}{l} V_C(t) = 1 - 100\, te^{-100t} - e^{-100t} \qquad t \geq 0 \\ \text{o bien:} \\ V_C(t) = (1 - 100\, te^{-100t} - e^{-100t}) \; u_{-1}(t) \end{array}} \qquad \ldots (II)$$

Comparando las ecuaciones (I) y (II), se observa que los resultados son idénticos. La respuesta escalón del sistema se muestra en forma gráfica en la figura IV.32.

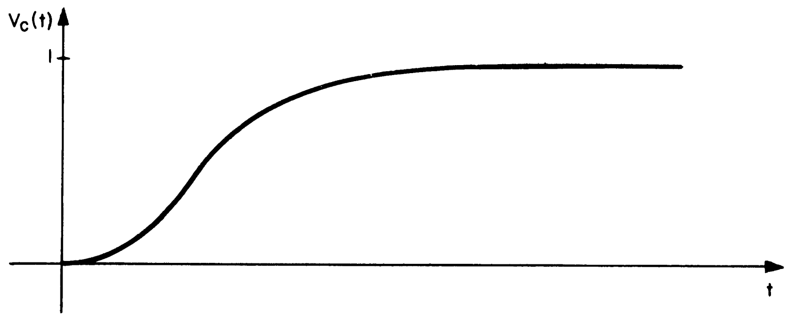


Figura IV.32

La respuesta escalón varía de acuerdo con el tipo de frecuencias naturales que tenga el sistema, esto es, la respuesta escalón de un sistema de segundo orden puede ser de cuatro maneras distintas.

1. FRECUENCIAS NATURALES REALES DIFERENTES

$$m_1 \neq m_2 \quad y \quad m_1 \ y \ m_2 \in \mathbb{R}$$

La respuesta escalón del sistema es de la siguiente forma:

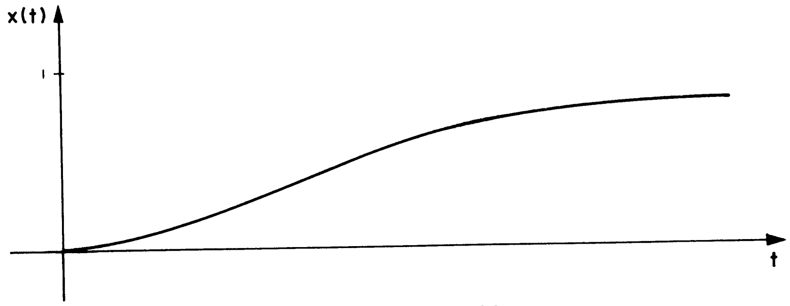


Figura IV.33

2. FRECUENCIAS NATURALES REALES IGUALES

$$m_1 = m_2 \quad y \quad m_1 \ y \ m_2 \in \mathbb{R}$$

La respuesta escalón del sistema es de la forma:

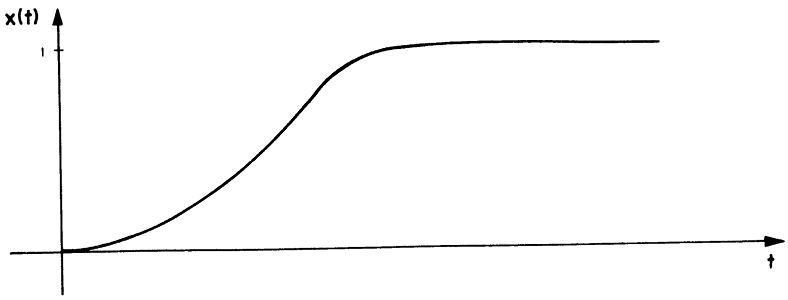


Figura IV.34

3. FRECUENCIAS NATURALES COMPLEJAS

$m_1 = a + jb$ y $m_2 = a - jb$ y m_1 y $m_2 \in C$

La respuesta escalón del sistema es de la forma:

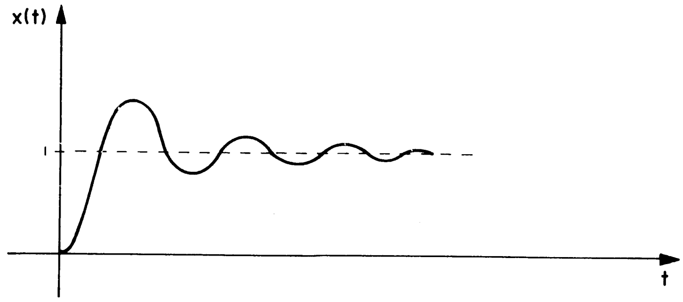


Figura IV.35

4. FRECUENCIAS NATURALES IMAGINARIAS PURAS

$m_1 = jb$ y $m_2 = -jb$ y m_1 y $m_2 \in C$

La respuesta escalón del sistema es de la forma:

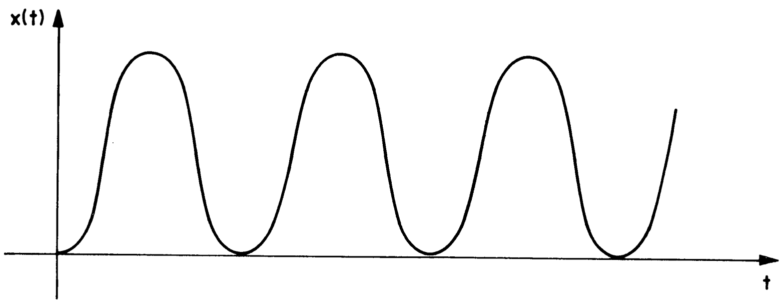


Figura IV.36

IV.4.1 PARAMETROS DE DISEÑO

A partir de la respuesta escalón de un sistema de segundo orden, se pueden determinar algunas características para este tipo de sistemas. Estas características han sido denominadas en el estudio y análisis de sistemas dinámicos, como parámetros de diseño, éstos son utilizados en el diseño de sistemas dinámicos de segundo orden, ya que reflejan directamente la rapidez con la que el sistema responde.

Los parámetros de diseño son:

a) Tiempo de retardo
b) Tiempo de levantamiento
c) Sobrepaso
d) Tiempo de sobrepaso
e) Tiempo de asentamiento

a) TIEMPO DE RETARDO

Es el tiempo necesario para que la respuesta escalón del sistema alcance el cincuenta por ciento de su valor final y se representa por t_r. En la mayoría de los casos es difícil expresar el tiempo de retardo en forma analítica, debido a que se requiere resolver una ecuación trascendente para obtenerlo; en estos casos lo que se hace es resolver la ecuación trascendente en forma numérica o determinarla en forma gráfica.

b) TIEMPO DE LEVANTAMIENTO

Se define como el tiempo que transcurre desde que la respuesta escalón del sistema adquiere el diez por ciento de su valor final hasta el tiempo en el que la respuesta escalón adquiere el noventa por ciento de su valor final y se representa por t_ℓ. Al igual que el tiempo de retardo, es necesario resolver dos ecuaciones trascendentes para obtenerlo, por esta razón, el tiempo de levantamiento se calcula en algunos casos como el tiempo que transcurre cuando la respuesta escalón adquiere los valores entre el cero y el cien por ciento de su valor final.

c) SOBREPASO

Es la máxima desviación que alcanza el valor de la respuesta escalón del sistema sobre su valor final o valor en estado estable y se presenta mediante M_p. En la mayoría de los casos el sobrepaso se expresa en porcentaje. Existe una expresión general para evaluar el sobrepaso o máxima desviación que adquiere la respuesta escalón del sistema.

d) TIEMPO DE SOBREPASO

Es el tiempo en el cual la respuesta escalón del sistema alcanza su valor máximo o sobrepaso y se representa por t_p. Es necesario conocer este tiempo para calcular en forma analítica el sobrepaso. En la mayoría de los casos es posible expresarlo en forma analítica.

e) TIEMPO DE ASENTAMIENTO

Es el tiempo mínimo en el que la respuesta escalón del sistema tiene variaciones entre el noventa y cinco y ciento cinco por ciento de su valor final y se representa mediante t_a. En este caso también es posible expresarlo en forma analítica.

A continuación se presentan las expresiones generales para evaluar los parámetros de diseño descritos anteriormente. En algunos casos no es posible obtener las expresiones generales para los parámetros de diseño; en esos casos se describirá únicamente la forma en que se obtienen los parámetros.

En forma general el modelo matemático que representa el comportamiento de un sistema de segundo orden es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\xi\,\omega_n \frac{dx}{dt} + \omega_n^2\, x = \omega_n^2\, g(t) \qquad \ldots (1)$$

la función $g(t)$ es la función escalón unitario ($u_{-1}(t)$) y el estado inicial del sistema es $x(0) = 0$ y $x'(0) = 0$. Por lo tanto, la ecuación (1) se puede escribir de la forma siguiente:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\xi\ \omega_n \frac{dx}{dt} + \omega_n^2\ \ x = \omega_n^2\ \ u_{-1}(t)}$$

PRIMER CASO

El sistema tiene un comportamiento sobreamortiguado, esto es, las frecuencias naturales son reales y diferentes. Por lo tanto, el factor de amortiguamiento relativo (ξ) debe ser mayor que la unidad. Así, la respuesta escalón del sistema está dada por la ecuación:

$$\boxed{x(t) = 1 + Ae^{S_1 t} + Be^{S_2 t} \qquad t \geq 0} \qquad \ldots \text{ (I)}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} A = \dfrac{1}{2(\xi^2 - 1 - \xi\sqrt{\xi^2 - 1})} \ ; & B = \dfrac{1}{2(\xi^2 - 1 + \xi\sqrt{\xi^2 - 1})} \\ \\ S_1 = -\xi\,\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \ ; & S_2 = -\xi\,\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \end{array}}$$

... (II)

Gráficamente:

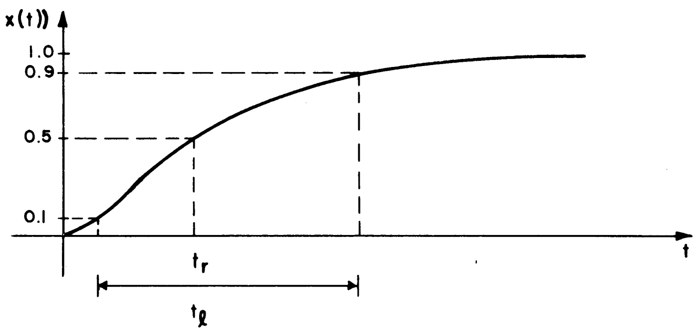


Figura IV.37

Obsérvese que los únicos parámetros que se pueden calcular son el tiempo de retardo y el tiempo de levantamiento. Esto es, cuando el sistema es sobreamortiguado, no existe el sobrepaso, ya que la respuesta no presenta desviaciones sobre su valor final, además en un sistema sobreamortiguado la respuesta *nunca* presenta variaciones entre el noventa y cinco y ciento cinco por ciento de su valor final, por lo que el tiempo de asentamiento se considera infinito.

Por otra parte, para determinar el tiempo de levantamiento y el de retardo, se pueden determinar en forma gráfica y en algunos casos éstos pueden determinarse en forma analítica, siempre y cuando las frecuencias naturales del sistema sean múltiplos o submúltiplos del mismo número.

Ejemplo IV.8

Determinar los tiempos de retardo y levantamiento de un sistema de segundo orden, en el que el factor de amortiguamiento relativo es:

$$\xi = \sqrt{\frac{9}{8}}$$

y la velocidad no amortiguada del sistema es:

$$\omega_n = \sqrt{8}$$

Solución:

A partir de ξ y ω_n, se tiene que la ecuación para obtener la respuesta escalón del sistema es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 6\,\frac{dx}{dt} + 8x = 8\ u_{-1}(t) \qquad \ldots (1)$$

por lo tanto, la respuesta escalón del sistema se obtiene a partir de la ecuación (I) y de las expresiones (II):

$$x(t) = 1 - 2e^{-2t} + e^{-4t} \qquad t \geq 0 \qquad \ldots (2)$$

el valor final que va a tener la respuesta escalón es 1. Para obtener el tiempo de retardo del sistema, se tiene que la ecuación es:

$$x(t_r) = 0.5 = 1 - 2e^{-2tr} + e^{-4tr} \qquad \ldots (3)$$

haciendo el cambio de variable:

$$Z = e^{-2tr} \qquad \ldots (4)$$

por lo tanto:

$$e^{-4tr} = Z^2 \qquad \ldots (5)$$

sustituyendo las ecuaciones (4) y (5) en la (3):

$$Z^2 - 2Z + 0.5 = 0 \qquad \ldots (6)$$

resolviendo la ecuación (6):

$$Z_1 = 1.7071$$

y

$$Z_2 = 0.2929$$

tomando el valor de Z_1 y sustituyéndolo en la ecuación (4):

$$1.7071 = e^{-2tr} \qquad \ldots (7)$$

para este caso, el tiempo de retardo tiene que ser un número negativo, lo cual no es posible, ya que no tendría interpretación física el hablar de un tiempo negativo. Tomando el valor de Z_2 y sustituyéndolo en la ecuación (4):

$$0.2929 = e^{-2tr} \qquad \ldots (8)$$

El tiempo de retardo para Z_2 tiene un valor positivo y se obtiene de la forma siguiente.

Aplicando logaritmos naturales en ambos miembros de la ecuación (8):

$$\ell_n(0.2929) = \ell_n(e^{-2t_r}) \qquad \ldots (9)$$

desarrollando:

$$-1.228 = -2t_r \qquad \ldots (10)$$

por lo tanto, el tiempo de retardo es:

$$\boxed{t_r = 0.614 \text{ s}}$$

Para comprobar si el tiempo de retardo calculado es el correcto, se puede sustituir el valor de t_r en la ecuación (2), esto es:

$$x(0.614) = 1 - 2\,e^{-2(0.614)} + e^{-4(0.614)} \qquad \ldots (11)$$

o bien:

$$x(0.614) = 0.5 \qquad \text{l.q.q.d}$$

Para obtener el tiempo de levantamiento las ecuaciones a resolver son:

$$0.1 = 1 - 2\,e^{-2t_1} + e^{-4t_2} \qquad \ldots (12)$$

y

$$0.9 = 1 - 2\,e^{-2t_2} + e^{-4t_2} \qquad \ldots (13)$$

realizando el mismo procedimiento para la obtención del tiempo de retardo se tiene que los tiempos t_1 y t_2 son:

$$t_1 = 0.19 \text{ s}$$

y

$$t_2 = 1.485 \text{ s}$$

por lo tanto, el tiempo de levantamiento se obtiene por la ecuación:

$$t_\ell = t_2 - t_1 \qquad \ldots (14)$$

así, el tiempo de levantamiento es:

$$t_\ell = 1.295 \text{ s}$$

Por otra parte, si las frecuencias naturales del sistema no son múltiplos o submúltiplos del mismo número, las ecuaciones para obtener los tiempos de retardo y levantamiento se deben resolver en forma numérica o simplemente éstos se determinan en forma gráfica.

SEGUNDO CASO

El sistema tiene un comportamiento críticamente amortiguado, esto es, las frecuencias naturales del sistema son reales e iguales. En este caso, el factor de amortiguamiento relativo (ξ) debe ser igual a la unidad. La respuesta escalón del sistema está dada por la ecuación:

$$\boxed{x(t) = 1 + (A + Bt)e^{St} \qquad t \geq 0} \qquad \dots \text{(III)}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} A = -1 \quad ; \quad B = -\omega_n \\ S = -\omega_n \end{array}} \qquad \dots \text{(IV)}$$

Gráficamente:

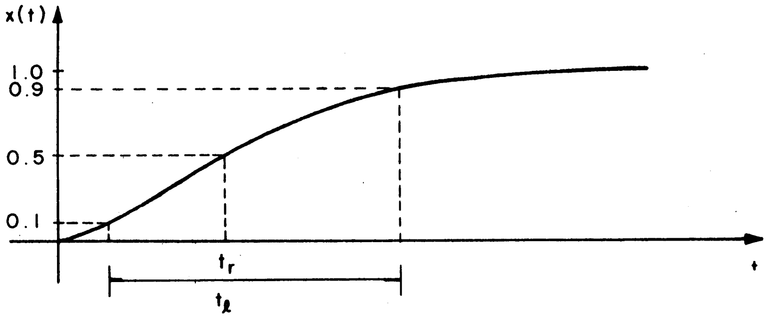


Figura IV.38

Obsérvese que los únicos parámetros que se pueden calcular son el tiempo de retardo y el tiempo de levantamiento. Cuando el sistema es críticamente amortiguado la respuesta no tiene sobrepaso, además los sistemas con este tipo de comportamiento no presentan variaciones en su respuesta entre el noventa y cinco y ciento cinco por ciento de su valor final. En este caso también al igual que los sistemas sobreamortiguados, el tiempo de asentamiento se considera infinito.

Para determinar los tiempos de retardo y de levantamiento se hace en forma gráfica o resolviendo las ecuaciones que involucran estos parámetros en forma numérica mediante el método de Newton - Raphson.

Ejemplo IV.9

Determinar los tiempos de retardo y de levantamiento del sistema de segundo orden, en el cual el factor de amortiguamiento relativo es:

$$\xi = 1$$

y la velocidad angular no amortiguada es:

$$\omega_n = 2$$

Solución:

La ecuación diferencial para obtener la respuesta escalón del sistema es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = 4u_{-1}(t) \qquad \ldots (1)$$

por lo tanto, de la ecuación (III) y las expresiones (IV) la respuesta escalón está dada por:

$$x(t) = 1 - e^{-2t}(1 + 2t) \qquad t \geq 0 \qquad \ldots (2)$$

el valor final que va a adquirir la respuesta escalón es 1. Para obtener el tiempo de retardo es necesario resolver la ecuación:

$$0.5 = 1 - 2e^{-2tr}(1 + 2t_r) \qquad \ldots (3)$$

debido a la forma que tiene la ecuación (3), no es posible hacer algún cambio de variable para resolverla, por lo que es necesario emplear el método de Newton - Raphson:

$$0.5 - e^{-2tr}(1 + 2t_r) = 0 \qquad \ldots (4)$$

la expresión general para aplicar el método de Newton - Raphson es:

$$t_{n+1} = t_n - \frac{F(t_n)}{F'(t_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad \ldots (5)$$

y la función F(t):

$$F(t) = 0.5 - e^{-2t} (1 + 2t) \qquad \ldots (6)$$

su derivada con respecto al tiempo es:

$$F'(t) = 4\,t\,e^{-2t} \qquad \ldots (7)$$

sustituyendo las ecuaciones (6) y (7) en la (5):

$$t_{n+1} = t_n - \frac{e^{2t_n}}{8t_n} + \frac{1 + 2t_n}{4t_n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\ldots (8)$$

suponiendo $t_0 = 0.2$:

$$n = 0$$

Para n = 0:

$$t_1 = 0.2 - \frac{e^{0.4}}{8(0.2)} + \frac{1 + 2(0.2)}{4(0.2)} = 1.0176$$

Para n = 1:

$$t_2 = 1.0176 - \frac{e^{2(1.0176)}}{8(1.0176)} + \frac{1 + 2(1.0176)}{4(1.0176)} = 0.823$$

Para n = 2:

$$t_3 = 0.823 - \frac{e^{2(0.823)}}{8(0.823)} + \frac{1 + 2(0.823)}{4(0.823)} = 0.839$$

Para n = 3:

$$t_4 = 0.839 - \frac{e^{2(0.839)}}{8(0.839)} + \frac{1 + 2(0.839)}{4(0.839)} = 0.839$$

Debido a que los valores de t_3 y t_4 son iguales, éstos satisfacen a la ecuación (3), por lo tanto el tiempo de retardo es:

$$\boxed{t_r = 0.839 \text{ s}}$$

Para obtener el tiempo de levantamiento, las ecuaciones a resolver son:

$$0.1 = 1 - e^{-2t_1}(1 + 2t_1) \qquad \ldots \quad (9)$$

y

$$0.9 = 1 - e^{-2t_2}(1 + 2t_2) \qquad \ldots \quad (10)$$

de la ecuación (9):

$$F(t) = 0.9 - e^{-2t}(1 + 2t) \qquad \ldots \quad (11)$$

y su derivada con respecto al tiempo es:

$$F'(t) = 4\ te^{-2t} \qquad \ldots \quad (12)$$

sustituyendo las ecuaciones (11) y (12) en la (5):

$$t_{n+1} = t_n - \frac{0.9\ e^{2t_n}}{4t_n} + \frac{1 + 2t_n}{4t_n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad \ldots \quad (13)$$

suponiendo $t_0 = 0.1$:

Para $n = 0$:

$$t_1 = 0.1 - \frac{0.9\ e^{2(0.1)}}{4(0.1)} + \frac{1 + 2(0.1)}{4(0.1)} = 0.35$$

Para $n = 1$:

$$t_2 = 0.35 - \frac{0.9\ e^{2(0.35)}}{4(0.35)} + \frac{1 + 2(0.35)}{4(0.35)} = 0.27$$

Para $n = 2$:

$$t_3 = 0.27 - \frac{0.9\ e^{2(0.27)}}{4(0.27)} + \frac{1 + 2(0.27)}{4(0.27)} = 0.266$$

Para $n = 3$:

$$t_4 = 0.266 - \frac{0.9\ e^{2(0.266)}}{4(0.266)} + \frac{1 + 2(0.266)}{4(0.266)} = 0.266$$

Debido a que t_3 y t_4 son iguales, éstos son los valores de tiempo que satisfacen a la ecuación (9), por lo tanto:

$$t_1 = 0.266 \text{ s}$$

de la ecuación (10):

$$F(t) = 0.1 - e^{-2t}(1 + 2t) \qquad \ldots (14)$$

y su derivada con respecto al tiempo es:

$$f'(t) = 4\,t\,e^{-2t} \qquad \ldots (15)$$

sustituyendo las ecuaciones (14) y (15) en la (5):

$$t_{n+1} = t_n - \frac{0.1\ e^{2t_n}}{4t_n} + \frac{1 + 2t_n}{4t_n}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad \ldots (16)$$

suponiendo $t_0 = 0.7$:

Para $n = 0$:

$$t_1 = 0.7 - \frac{0.1\ e^{2(0.7)}}{4(0.7)} + \frac{1 + 2(0.7)}{4(0.7)} = 1.41$$

Para $n = 1$:

$$t_2 = 1.41 - \frac{0.1\ e^{2(1.41)}}{4(1.41)} + \frac{1 + 2(1.41)}{4(1.41)} = 1.79$$

Para $n = 2$:

$$t_3 = 1.79 - \frac{0.1\ e^{2(1.79)}}{4(1.79)} + \frac{1 + 2(1.79)}{4(1.79)} = 1.93$$

Para $n = 3$:

$$t_4 = 1.93 - \frac{0.1\ e^{2(1.93)}}{4(1.93)} + \frac{1 + 2(1.93)}{4(1.93)} = 1.944$$

Para $n = 4$:

$$t_5 = 1.944 - \frac{0.1\ e^{2(1.944)}}{4(1.944)} + \frac{1 + 2(1.944)}{4(1.944)} = 1.944$$

por lo tanto, el valor de tiempo que satisface a la ecuación (10):

$$t_2 = 1.944\ s$$

el tiempo de levantamiento para el sistema considerado, se obtiene mediante la expresión:

$$t_\ell = t_2 - t_1 \qquad \ldots (17)$$

por lo tanto, el tiempo de levantamiento del sistema es:

$$\boxed{t_\ell = 1.678\ s}$$

TERCER CASO

El sistema tiene un comportamiento subamortiguado, esto es, las frecuencias naturales son complejas. En este caso el factor de amortiguamiento relativo (ξ) debe ser mayor que cero y menor que la unidad. La respuesta escalón del sistema, está dada por la ecuación:

$$\boxed{x(t) = 1 + e^{\alpha t}\ (A \cos \beta t + B \operatorname{sen} \beta t) \qquad t \geq 0} \qquad \ldots (V)$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} A = -1\ ; & B = -\dfrac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \\ \alpha = -\xi\,\omega_n & \beta = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \end{array}}$$

sustituyendo las expresiones (VI) en la (V), la expresión general para la respuesta escalón de un sistema subamortiguado es:

$$x(t) = 1 - e^{-\xi \omega_n t}\left[\cos \omega_n \sqrt{1-\xi^2}\, t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen} \omega_n \sqrt{1-\xi^2}\, t\right] \quad t \geq 0$$

... (1)

Gráficamente:

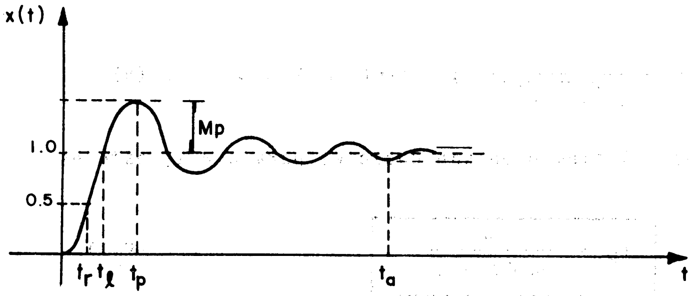


Figura IV.39

En este caso es posible deducir expresiones generales para determinar los parámetros de diseño. Primeramente, se procederá a calcular el tiempo de sobrepaso y con este resultado obtener la expresión general del sobrepaso. Para calcular el tiempo de sobrepaso es necesario derivar con respecto al tiempo la ecuación (1) e igualarla a cero; posteriormente se resuelve la ecuación a fin de obtener el o los valores que la satisfacen. La derivada con respecto al tiempo de la ecuación (1) es:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}\, e^{-\xi \omega_n t} \operatorname{sen} \omega_n \sqrt{1-\xi^2}\, t \qquad \text{... (2)}$$

igualando la ecuación (2) a cero, se tiene:

$$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}\, e^{-\xi \omega_n t} \operatorname{sen} \omega_n \sqrt{1-\xi^2}\, t = 0$$

... (3)

debido a que:

$$e^{-\xi\ \omega_n t} \neq 0 \qquad \dots (4)$$

entonces:

$$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}\ \text{sen}\ \omega_n \sqrt{1-\xi^2}\ t = 0 \qquad \dots (5)$$

los valores de tiempo que satisfacen a la ecuación (5) son:

$$t = \frac{N\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \quad ; \quad N = 0, 1, 2, \dots, \qquad \dots (6)$$

entonces, el tiempo de sobrepaso es para $N = 1$, esto es:

$$\boxed{t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}} \qquad \dots (VII)$$

sustituyendo el valor de tiempo de sobrepaso, en la ecuación (1), se tiene que el valor máximo que va a adquirir la respuesta escalón es:

$$x(t_p) = 1 + e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\pi} \qquad \dots (7)$$

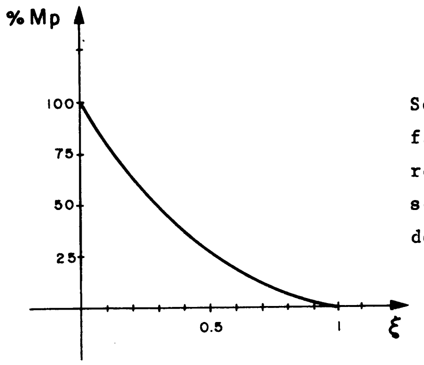
por lo tanto, de la ecuación (7), se obtiene que el sobrepaso es:

$$M_p = x(t_p) - 1 \qquad \dots (8)$$

o bien:

$$\boxed{M_p = e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\pi}} \qquad \dots (VIII)$$

de la ecuación (7), se observa que el sobrepaso está en función únicamente del factor de amortiguamiento relativo (ξ). En forma gráfica se representa el sobrepaso en porciento como función de ξ, de la forma:



Sobrepaso como función del factor de amortiguamiento relativo para sistemas de segundo orden subamortiguados.

Figura IV.40

Para obtener una expresión general del tiempo de levantamiento se hace una modificación o redefinición para este tiempo, esto es, para el caso de un sistema de segundo orden subamortiguado, el tiempo de levantamiento será el tiempo que transcurre para que la respuesta escalón del sistema adquiera por primera vez el cien por ciento de su valor final.

En este caso el valor final que tendrá la respuesta escalón es 1. Por lo tanto, igualando la ecuación (1) a 1, se tiene:

$$1 = 1 - e^{-\xi \omega_n t_\ell} \left[\cos \omega_n \sqrt{1-\xi^2}\; t_\ell + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen} \omega_n \sqrt{1-\xi^2}\; t_\ell \right] \qquad \ldots (9)$$

o bien:

$$0 = e^{-\xi \omega_n t_\ell} \left[\cos \omega_n \sqrt{1-\xi^2}\; t_\ell + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen} \omega_n \sqrt{1-\xi^2}\; t_\ell \right] \qquad \ldots (10)$$

puesto que:

$$e^{-\xi \omega_n t_\ell} \neq 0 \qquad \ldots (11)$$

se tiene entonces de la ecuación (10):

$$\cos \omega_n \sqrt{1-\xi^2}\ t_\ell + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen} \omega_n \sqrt{1-\xi^2}\ t_\ell = 0 \qquad \ldots (12)$$

la ecuación (12) puede entonces ser escrita de la forma:

$$\frac{\operatorname{sen} \omega_n \sqrt{1-\xi^2}\ t_\ell}{\cos \omega_n \sqrt{1-\xi^2}\ t_\ell} = -\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \qquad \ldots (13)$$

recordando que:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \tan x \qquad \ldots (14)$$

de las ecuaciones (13) y (14):

$$\tan \omega_n \sqrt{1-\xi^2}\ t_\ell = -\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \qquad \ldots (15)$$

finalmente, de la ecuación (15) se tiene que el tiempo de levantamiento para el sistema es:

$$t_\ell = t_{0-100\%} = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \tan^{-1}\left[-\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right] \qquad \ldots (16)$$

o bien:

$$\boxed{\begin{array}{l} t_\ell = \dfrac{\pi-\theta}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \\ \\ \theta = \cos^{-1} \xi \end{array}} \qquad \ldots (IX)$$

Para obtener una expresión general que pueda ser empleada para calcular el tiempo de asentamiento, considérese la gráfica de la respuesta escalón del sistema mostrada en la figura:

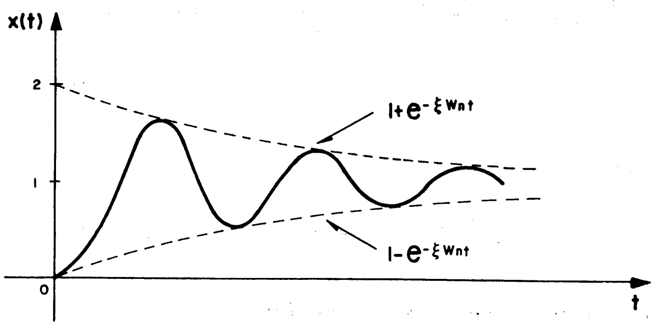


Figura IV.41

Con base en la definición del tiempo de asentamiento y las ecuaciones de las envolventes de la figura anterior se pueden establecer las expresiones siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} 1.05 = 1 + e^{-\xi \omega_n t_a} \\ \text{y} \quad 0.95 = 1 - e^{-\xi \omega_n t_a} \end{array}\right| \quad \ldots (17)$$

de las expresiones (17):

$$0.05 = e^{-\xi \omega_n t_a} \quad \ldots (18)$$

La respuesta escalón del sistema no tendrá variaciones mayores al ± 5 % de su valor final, si $t > t_a$, por lo tanto se puede hacer la siguiente aproximación:

$$t = t_a \quad \ldots (19)$$

por otra parte, aplicando logaritmos naturales en ambos miembros de la ecuación (18):

$$\ell n \left[e^{-\xi \omega_n t_a} \right] = \ell n(0.05) \quad \ldots (20)$$

y por lo tanto:

$$-\xi \omega_n t_a = -\ 2.9957 \quad \ldots (21)$$

entonces de la ecuación (21), se obtiene:

$$t_a = \frac{2.9957}{\xi \omega_n} \quad \ldots (22)$$

finalmente el tiempo de asentamiento se puede aproximar como:

$$\boxed{t_a = \frac{3}{\xi \omega_n}} \quad \ldots (X)$$

Por último, para poder determinar el tiempo de retardo (t_r), es difícil el obtener una expresión general, por lo tanto, este tiempo se determina al resolver la siguiente ecuación en forma numérica:

$$\boxed{0 = 0.5 - e^{-\xi \omega_n t_r} \left[\cos \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}\ t_r + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen} \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}\ t_r \right]}$$

... (XI)

Ejemplo IV.10

Considerar un sistema de segundo orden, en el que el factor de amortiguamiento relativo es:

$$\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

y la velocidad angular no amortiguada del sistema es:

$$\omega_n = 2$$

Determinar los siguientes parámetros:

a) tiempo de retardo,

b) tiempo de sobrepaso,

c) sobrepaso,

d) tiempo de levantamiento,

e) tiempo de asentamiento.

Solución:

La ecuación diferencial para obtener la respuesta escalón del sistema es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \sqrt{8}\ \frac{dx}{dt} + 4x = 4\ u_{-1}(t) \qquad \text{... (1)}$$

por lo tanto, de la ecuación (V) y de las expresiones (VI), la respuesta escalón del sistema está dada por:

$$x(t) = 1 - e^{-\sqrt{2}\ t} \left[\cos \frac{2}{\sqrt{2}}\ t + \operatorname{sen} \frac{2}{\sqrt{2}}\ t \right] \quad t \geq 0$$

... (2)

a) Cálculo del tiempo de retardo.

Sustituyendo los valores de ξ y ω_n en la ecuación (XI), se tiene que la ecuación a resolver para calcular t_r es:

$$0.5 - e^{-\sqrt{2}\,t_r}\left[\cos\frac{2}{\sqrt{2}}t_r + \operatorname{sen}\frac{2}{\sqrt{2}}t_r\right] = 0 \qquad \ldots (3)$$

en este caso:

$$F(t) = 0.5 - e^{-\sqrt{2}\,t}\left[\cos\frac{2}{\sqrt{2}}t + \operatorname{sen}\frac{2}{\sqrt{2}}t\right] \ldots (4)$$

y su derivada con respecto al tiempo es:

$$F'(t) = \frac{4}{\sqrt{2}}\, e^{-\sqrt{2}\,t}\operatorname{sen}\frac{2}{\sqrt{2}}t \qquad \ldots (5)$$

La expresión general para el método de Newton-Raphson es:

$$t_{n+1} = t_n - \frac{F(t_n)}{F'(t_n)} \quad ; \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots, \qquad \ldots (6)$$

sustituyendo las ecuaciones (4) y (5) en la (6):

$$t_{n+1} = t_n - \frac{\sqrt{2}\, e^{\sqrt{2}\,t_n}}{8\operatorname{sen}\frac{2}{\sqrt{2}}t_n} + \frac{\sqrt{2}}{4\tan\frac{2}{\sqrt{2}}t_n} + \frac{\sqrt{2}}{4} \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad \ldots (7)$$

suponiendo $t_0 = 0.6$:

Para $n = 0$:

$$t_1 = 0.6 - \frac{\sqrt{2}\, e^{(\sqrt{2})(0.6)}}{8\operatorname{sen}\left[\frac{2}{\sqrt{2}}\right](0.6)} + \frac{\sqrt{2}}{4\tan\left[\frac{2}{\sqrt{2}}\right](0.6)} + \frac{\sqrt{2}}{4} = 0.714$$

Para $n = 1$:

$$t_2 = 0.714 - \frac{\sqrt{2}\, e^{(\sqrt{2})(0.714)}}{8\operatorname{sen}\left[\frac{2}{\sqrt{2}}\right](0.714)} + \frac{\sqrt{2}}{4\tan\left[\frac{2}{\sqrt{2}}\right](0.714)} + \frac{\sqrt{2}}{4} = 0.716$$

Para $n = 2$:

$$t_3 = 0.716 - \frac{\sqrt{2}\ e^{(\sqrt{2})(0.716)}}{8\ \text{sen}\left[\frac{2}{\sqrt{2}}\right](0.716)} + \frac{\sqrt{2}}{4\ \tan\left[\frac{2}{\sqrt{2}}\right](0.714)} + \frac{\sqrt{2}}{4} = 0.716$$

debido a que los valores de t_2 y t_3 son iguales, éstos satisfacen a la ecuación (3), por lo tanto el tiempo de retardo es:

$$\boxed{t_r = 0.716\ \text{s}}$$

b) Cálculo del tiempo de sobrepaso.

Sustituyendo los valores de ξ y ω_n en la ecuación (VII), se tiene que el tiempo de sobrepaso es:

$$\boxed{t_p = \frac{\pi}{2\sqrt{1 - \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]^2}} = 2.22\ \text{s}}$$

c) Cálculo del sobrepaso.

Sustituyendo el valor de ξ en la ecuación (VIII) se tiene que el sobrepaso es:

$$\boxed{M_p = e^{-\frac{\sqrt{2}/2\ \cdot}{\sqrt{1-(\sqrt{2}/2)^2}}\pi} = 0.0432}$$

o simplemente el sobrepaso en porciento es:

$$\boxed{\%\ M_p = 4.32\ \%}$$

d) Cálculo del tiempo de levantamiento.

Sustituyendo los valores de ξ y ω_n en la ecuación (IX), se tiene que el tiempo de levantamiento es:

$$\theta = \cos^{-1} \xi = 0.7854 \text{ rad} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

$$\boxed{t_\ell = \frac{\pi - \frac{\pi}{4}}{2\sqrt{1 - \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]^2}} = 1.66 \text{ s}}$$

e) **Cálculo del tiempo de asentamiento.**

Sustituyendo los valores de ξ y ω_n en la ecuación (X), se tiene que el tiempo de asentamiento es:

$$\boxed{t_a = \frac{3}{\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right](2)} = 2.12 \text{ s}}$$

CUARTO CASO

El sistema tiene un comportamiento no amortiguado, esto es, las frecuencias naturales son imaginarias. En este caso, el factor de amortiguamiento relativo (ξ) debe ser igual a cero. Por lo tanto, la respuesta escalón del sistema está dada por:

$$\boxed{x(t) = 1 + A \cos \beta t + B \text{ sen } \beta t \qquad t \geq 0}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} A = -1 \quad ; & B = 0 \\ \beta = \omega_n & \end{array}}$$

Gráficamente:

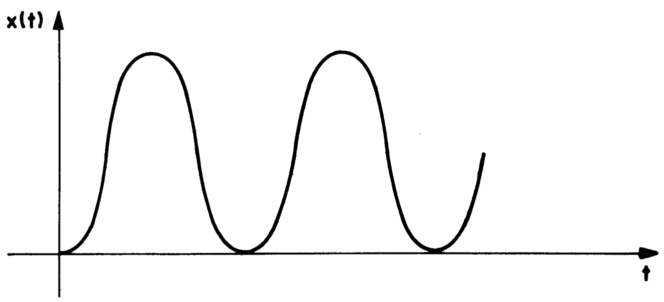
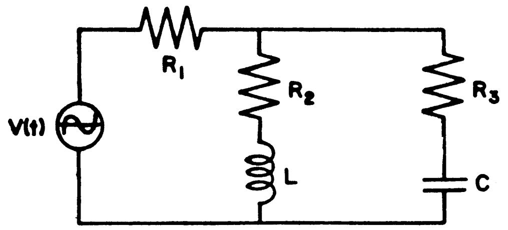


Figura IV.42

Obsérvese que no es posible determinar el valor final que adquirirá la respuesta escalón del sistema. Por lo que no se pueden evaluar los parámetros de diseño en este caso, además de que no tienen interpretación alguna.

Por otra parte, los parámetros de diseño son ampliamente utilizados, tanto en el análisis como en el diseño de sistemas dinámicos de segundo orden. A continuación se presentan algunos ejemplos para los diferentes tipos de sistemas de segundo orden, en los que se obtiene la respuesta escalón en cada uno de los casos.

SISTEMA Y MODELO MATEMATICO



$R_1 = R_2 = R_3 = R$

$$\frac{d^2V_C}{dt^2} + \left[\frac{3R}{2L} + \frac{1}{2RC}\right]\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{LC}V_C = \frac{1}{2LC}V(t) + \frac{1}{2RC}\dot{V}(t)$$

COMPORTAMIENTO SOBREAMORTIGUADO

$L = 500$ mH ; $c = 220$ µF ; $R = 68\ \Omega$; $V(t) = 120\ u_{-1}(t)$ V

RESPUESTA ESCALON

$$V_C(t) = (60 - 52\ e^{-48t} - 8e^{-189.43t})u_{-1}(t)$$

COMPORTAMIENTO CRITICAMENTE AMORTIGUADO

$L = 500$ mH ; $c = 220$ µF ; $R = 15.89\ \Omega$; $V(t) = 120u_{-1}(t)$ V

RESPUESTA ESCALON

$$V_C(t) = (60 + 11\,445.884\,t\,e^{-95.35t} - 60\ e^{-95.35t})u_{-1}(t)$$

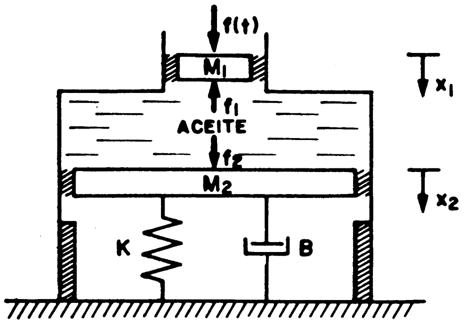
COMPORTAMIENTO SUBAMORTIGUADO

$L = 500$ mH ; $c = 220$ µF ; $R = 33\ \Omega$; $V(t) = 120u_{-1}(t)$ V

RESPUESTA ESCALON

$$V_C(t) = \left[60 - e^{-83.95t}(60\cos 45.2\,t - 71.4\ \text{sen}\ 45.2\,t)\right]u_{-1}(t)$$

S I S T E M A   Y   M O D E L O   M A T E M A T I C O



$$A_1 x_1 = A_2 x_2$$

$$\frac{f_1}{A_1} = p = \frac{f_2}{A_2}$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{A_1^2\, B}{M_1A_2^2 + M_2A_1^2}\,\frac{dx^2}{dt} + \frac{A_1^2\, K}{M_1A_2^2 + M_2A_1^2}\, x_2 = \frac{A_1\, A_2}{M_1A_2^2 + M_2A_1^2}\, f(t)$$

COMPORTAMIENTO SOBREAMORTIGUADO

$A_1 = 0.105\ m^2$; $A_2 = 1.05\ m^2$; $M_1 = 200$ kg ; $M_2 = 2\,000$ kg ;

$K = 2\,000 \frac{N}{m}$; $B = 18\,000\ \frac{N \cdot s}{m}$; $f(t) = 100\ u_{-1}(t)$ N

RESPUESTA ESCALON

$$x_2(t) = (0.5 - 0.636\ e^{-0.13t} + 0.136\ e^{-0.68t})\, u_{-1}(t)$$

COMPORTAMIENTO CRITICAMENTE AMORTIGUADO

$A_1 = 0.105\ m^2$; $A_2 = 1.05\ m^2$; $M_1 = 200$ kg ; $M_2 = 2\,000$ kg ;

$K = 2\,909.1\ \frac{N}{m}$; $B = 16\,000\ \frac{N \cdot s}{m}$; $f(t) = 100\ u_{-1}(t)$ N

RESPUESTA ESCALON

$$x_2(t) = (0.344 - 0.344\ e^{-0.363t} - 0.124\, t\, e^{-0.363t})\, u_{-1}(t)$$

COMPORTAMIENTO SUBAMORTIGUADO

$$A_1 = 0.105\ m^2 \ ;\ A_2 = 1.05\ m^2 \ ;\ M_1 = 200\ kg \ ;\ M_2 = 2\,000\ kg \ ;$$

$$K = 9\,142.6\ \frac{N}{m} \ ;\ B = 19\,552\ \frac{N \cdot s}{m} \ ;\ f(t) = 300\ u_{-1}(t)\ N$$

RESPUESTA ESCALON

$$x_2(t) = \left[0.328 - e^{-0.444t}\,(0.328 \cos 0.467\,t - 0.312 \operatorname{sen} 0.467\,t) \right] u_{-1}(t)$$

COMPORTAMIENTO NO AMORTIGUADO

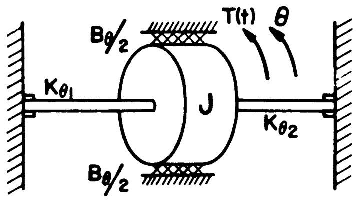
$$A_1 = 0.105\ m^2 \ ;\ A_2 = 1.05\ m^2 \ ;\ M_1 = 200\ kg \ ;\ M_2 = 2\,000\ kg \ ;$$

$$K = 12\,000\ \frac{N}{m} \ ;\ B = 0 \ ;\ f(t) = 300\ u_{-1}(t)\ N$$

RESPUESTA ESCALON

$$x_2(t) = (0.25 - 0.25 \cos 0.738\,t)\,u_{-1}(t)$$

SISTEMA Y MODELO MATEMATICO



$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{B_\theta}{J}\frac{d\theta}{dt} + \frac{K_{\theta 1} + K_{\theta 2}}{J}\theta = \frac{1}{J}T(t)$$

COMPORTAMIENTO SOBREAMORTIGUADO

$J = 2\ kg\cdot m^2$; $B_\theta = 20\ \frac{N\cdot m\cdot s}{rad}$; $K_{\theta_1} = 20\ \frac{N\cdot m}{rad}$;

$K_{\theta_2} = 20\ \frac{N\cdot m}{rad}$; $T(t) = 100\ u_{-1}(t)\ N\cdot m$

RESPUESTA ESCALON

$$\theta(t) = (2.5 - 4.045\ e^{-2.77t} + 1.545\ e^{-7.23t})\ u_{-1}(t)$$

COMPORTAMIENTO CRITICAMENTE AMORTIGUADO

$J = 2\ kg\cdot m^2$; $B_\theta = 20\ \frac{N\cdot m\cdot s}{rad}$; $K_{\theta_1} = 20\ \frac{N\cdot m}{rad}$;

$K_{\theta_2} = 30\ \frac{N\cdot m}{rad}$; $T(t) = 100\ u_{-1}(t)\ N\cdot m$

RESPUESTA ESCALON

$$\theta(t) = (2 - 10\,t\ e^{-5t} - 2\ e^{-5t})\ u_{-1}(t)$$

COMPORTAMIENTO SUBAMORTIGUADO

$$J = 2\ kg \cdot m^2 \quad ; \quad B_\theta = 20\ \frac{N \cdot m \cdot s}{rad} \quad ; \quad K_{\theta_1} = 400\ \frac{N \cdot m}{rad} \quad ;$$

$$K_{\theta_2} = 200\ \frac{N \cdot m}{rad} \quad ; \quad T(t) = 100\ u_{-1}(t)\ \ N \cdot m$$

RESPUESTA ESCALON

$$\theta(t) = \left[0.1667 - e^{-5t}\,(0.1667 \cos 16.58t - 0.0402 \operatorname{sen} 16.58t) \right] u_{-1}(t)$$

COMPORTAMIENTO NO AMORTIGUADO

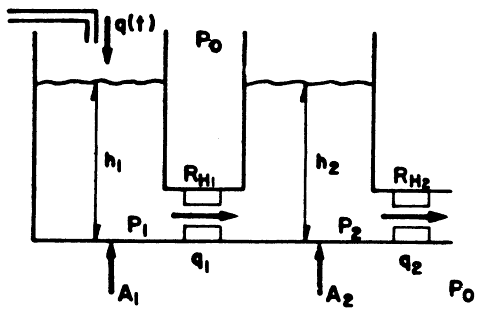
$$J = 2\ kg \cdot m^2 \quad ; \quad B_\theta = 0 \quad ; \quad K_{\theta_1} = 50\ \frac{N \cdot m}{rad} \quad ; \quad K_{\theta_2} = 50\ \frac{N \cdot m}{rad} \quad ;$$

$$T(t) = 100\ u_{-1}(t)\ \ N \cdot m$$

RESPUESTA ESCALON

$$\theta(t) = (1 - \cos 7.071t)\,u_{-1}(t)$$

S I S T E M A   Y   M O D E L O   M A T E M A T I C O



$$\frac{d^2h_2}{dt^2} + \frac{\gamma(A_1(R_{H_1} + R_{H_2}) + A_2R_{H_2})}{A_1A_2\ R_{H_1}\ R_{H_2}}\ \frac{dh_2}{dt} + \frac{\gamma^2}{A_1A_2\ R_{H_1}\ R_{H_2}}\ h_2 = \frac{\gamma}{A_1A_2\ R_{H_1}}\ q(t)$$

COMPORTAMIENTO SOBREAMORTIGUADO

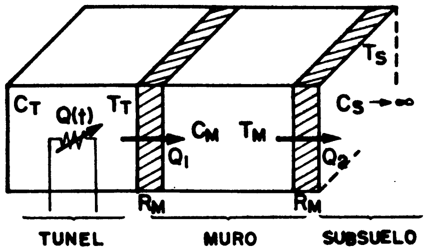
$$A_1 = 1.54\ m^2\ ;\ A_2 = 1.13\ m^2\ ;\ R_{H_1} = 5 \times 10^6\ \frac{Pa \cdot s}{m^3}\ ;$$

$$R_{H_2} = 5 \times 10^6\ \frac{Pa \cdot s}{m^3} \qquad q(t) = 3 \times 10^{-3}\ u_{-1}(t)\ \frac{m^3}{s}$$

RESPUESTA ESCALON

$$h_2(t) = (1.53 - 1.75\ e^{-5.25 \times 10^{-4}t} + 0.217\ e^{-4.215 \times 10^{-3}t})\ u_{-1}(t)$$

S I S T E M A   Y   M O D E L O   M A T E M A T I C O



$$\frac{d^2T_T}{dt^2} + \frac{C_M + 2C_T}{R_M C_M C_T}\frac{dT_T}{dt} + \frac{1}{R_M^2 C_M C_T} T_T = \frac{1}{C_T}\dot{Q}_0(t) + \frac{2}{C_M C_T R_M} Q_0(t) + \frac{1}{R_M^2 C_M C_T} T_S$$

COMPORTAMIENTO SOBREAMORTIGUADO

$$R_M = 10^{-3}\ \frac{K}{W} \quad ; \quad C_T = 345 \times 10^4\ \frac{W \cdot S}{K} \quad ; \quad C_M = 370 \times 10^4\ \frac{W \cdot S}{K} \quad ;$$

$$T_S = 296.3\ K \quad ; \quad Q_0(t) = 2\,700\ u_{-1}(t)\ W$$

RESPUESTA ESCALON

$$T_T(t) = (301.7 + 52.5\ e^{-7.21 \times 10^{-4}t} - 354.2\ e^{-1.085 \times 10^{-4}t})\ u_{-1}(t)$$

IV.5 RESPUESTA IMPULSO

Un análisis que se realiza en sistemas de segundo orden es la respuesta impulso $h(t)$ ya que a partir de ésta es posible obtener la respuesta del sistema para cualquier entrada. Asimismo se puede establecer una relación entre la salida y la entrada del sistema (función de transferencia).

Por otra parte, para obtener la respuesta impulso, es necesario que el estado inicial del sistema sea nulo y que la excitación externa aplicada sea la función impulso $\delta(t)$.

En forma esquemática esto es:

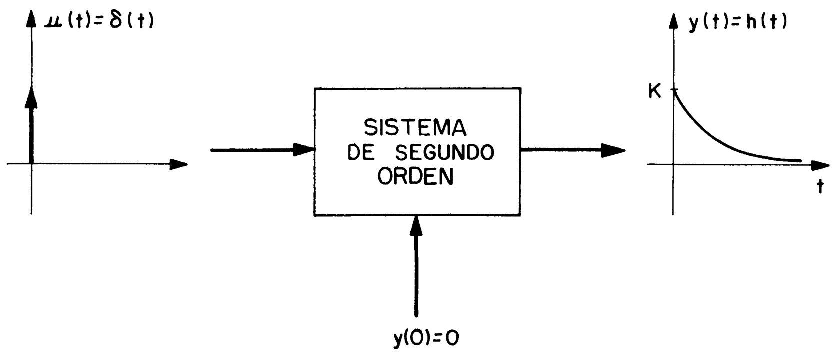


Figura IV.43

Existen tres procedimientos para obtener la respuesta impulso:

PRIMER PROCEDIMIENTO

Consiste en obtener los efectos producidos por la función impulso sobre el sistema y a partir de estos datos se debe calcular u obtener la respuesta libre del sistema. En forma esquemática esto es:

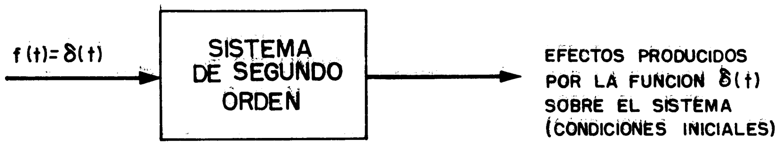


Figura IV.44

posteriormente:

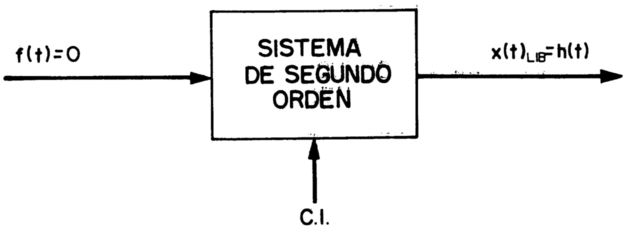


Figura IV.45

SEGUNDO PROCEDIMIENTO

Consiste en obtener primero la respuesta escalón del sistema y a partir de este resultado, derivarlo con respecto al tiempo, para obtener finalmente la respuesta impulso $h(t)$. En forma esquemática, esto es:

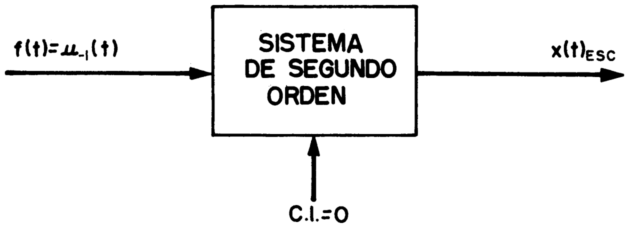


Figura IV.46

posteriormente:

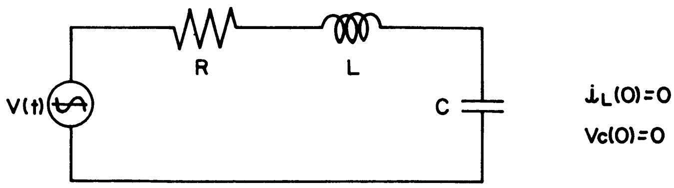
$$h(t) = \frac{d}{dt}\, x(t)_{ESC}$$

TERCER PROCEDIMIENTO

Consiste en obtener la respuesta impulso, resolviendo la ecuación diferencial que modela al sistema por el método directo de transformada de Laplace.

Ejemplo IV.11

Obtener la respuesta impulso de un sistema eléctrico de segundo orden formado por una resistencia, una inductancia y una capacitancia conectadas en serie, como se muestra en la figura. El sistema está alimentado por una fuente de voltaje V(t).



$V(t) = \delta(t)$; $R = 100\Omega$; $L = 500mH$; $C = 200\mu F$

Figura IV.47

Emplear como variable para la obtención del modelo matemático el voltaje en el capacitor.

Solución:

El modelo matemático del sistema, está dado por la ecuación (1):

$$LC\,\frac{d^2V_C}{dt^2} + RC\,\frac{dV_C}{dt} + V_C = V(t) \qquad \ldots (1)$$

PRIMER PROCEDIMIENTO

La ecuación (1), puede ser expresada en forma normalizada, de la siguiente manera:

$$\frac{d^2V_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\,\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{LC}\,V_C = \frac{1}{LC}\,\delta(t) \qquad \ldots (2)$$

multiplicando ambos miembros de la ecuación (2), por dt, se tiene:

$$\left[\frac{d^2V_C}{dt^2}\right] dt + \frac{R}{L}\,dV_C + \frac{1}{LC}\,V_C dt = \frac{1}{LC}\,\delta(t)dt \qquad . (3)$$

integrando la ecuación (3) en el intervalo de tiempo $[0_-, 0_+]$, que es el tiempo de duración del impulso, se tiene:

$$\int_{0_-}^{0_+}\left[\frac{d^2V_C}{dt^2}\right] dt + \frac{R}{L}\int_{0_-}^{0_+} dV_C + \frac{1}{LC}\int_{0_-}^{0_+} V_C dt = \frac{1}{LC}\int_{0_-}^{0_+}\delta(t)\,dt$$

$$\ldots (4)$$

desarrollando término a término:

$$\int_{0_-}^{0_+}\left[\frac{d^2V_C}{dt^2}\right]dt = \left.\frac{dV_C}{dt}\right|_{0_-}^{0_+} = \frac{dV_C}{dt}\,(0_+) - \frac{dV_C}{dt}\,(0_-) \qquad .. (5)$$

$$\frac{R}{L}\int_{0_-}^{0_+} dV_C = \left.V_C(t)\right|_{0_-}^{0_+} = V_C(0_+) - V_C(0_-) \qquad \ldots (6)$$

puesto que las condiciones iniciales del sistema son cero:

$$\frac{1}{LC}\int_{0_-}^{0_+} V_C(t)\,dt = 0 \qquad \ldots (7)$$

$$\frac{1}{LC}\int_{0_-}^{0_+} \delta(t)\,dt = \frac{1}{LC}(1) = \frac{1}{LC} \qquad \ldots (8)$$

Debido a que para sistemas físicos el intervalo de tiempo de interés es para tiempos mayores que cero, los términos:

$$\frac{dV_C}{dt}(0_-) = V_C(0_-) = \frac{R}{L}\int_{0_-}^{0_+} dV_C = 0 \qquad \ldots (9)$$

por lo que:

$$V_C(0_+) = V_C(0_-) = 0$$

finalmente se tiene que los efectos producidos por la función impulso sobre el sistema son:

$$V_C(0_+) = 0 \qquad \ldots (10)$$

y

$$\frac{dV_C}{dt}(0_+) = \frac{1}{LC} \qquad \ldots (11)$$

Con estos datos, se procede a obtener la respuesta libre del sistema:

$$\frac{d^2V_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{LC}V_C = 0 \qquad \ldots (12)$$

Solución homogénea:
La ecuación característica es:

$$m^2 + \frac{R}{L}m + \frac{1}{LC} = 0 \qquad \ldots (13)$$

sustituyendo los valores de R, L y C en la ecuación (13):

$$m^2 + 200\,m + 10\,000 = 0 \qquad \ldots (14)$$

y las frecuencias naturales son:

$$m_1 = -\,100$$

y

$$m_2 = -\,100$$

por lo tanto, la solución homogénea es:

$$V_C(t)_h = K_1\, e^{-100t} + K_2\, te^{-100t} \qquad \ldots (15)$$

Solución particular:
En este caso se está obteniendo la respuesta libre y por lo tanto, la excitación externa es cero y la solución particular también.

La respuesta libre del sistema es entonces:

$$V_C(t)_{LIB} = K_1\, e^{-100t} + K_2\, te^{-100t} \ldots (16)$$

Para evaluar las constantes K_1 y K_2 es necesario derivar la ecuación (16) con respecto al tiempo y emplear las condiciones iniciales del sistema producidas por la función impulso:

$$\frac{dV_C}{dt} = -\,100\,K_1\, e^{-100t} - 100\,K_2\, te^{-100t} + K_2\, e^{-100t}$$

$$\ldots (17)$$

sustituyendo $V_C(0_+)$ y $\frac{dV_C}{dt}(0_+)$ en las ecuaciones (16) y (17) respectivamente, se tiene:

$$V_C(0_+) = 0 = K_1 \qquad \ldots (18)$$

y

$$\frac{dV_C}{dt}(0_+) = 10\,000 = -\,100\,K_1 + K_2 \qquad \ldots (19)$$

de donde:

$$K_1 = 0$$

$$K_2 = 10\,000$$

por lo tanto, la respuesta libre del sistema es igual a la respuesta impulso, o sea:

$$h(t) = 10\,000 \ te^{-100t} \qquad t \geq 0 \qquad \ldots \text{(I)}$$

SEGUNDO PROCEDIMIENTO

La ecuación a resolver primeramente es:

$$\frac{d^2V_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{LC}V_C = \frac{1}{LC}u_{-1}(t) \ \ldots \ (20)$$

sustituyendo los valores de R, L y C en la ecuación (20):

$$\frac{d^2V_C}{dt^2} + 200\frac{dV_C}{dt} + 10\,000 \ V_C = 10\,000 \ u_{-1}(t) \qquad \ldots \ (21)$$

Solución homogénea:

$$\frac{d^2V_C}{dt^2} + 200\frac{dV_C}{dt} + 10\,000 \ V_C = 0 \qquad \ldots \ (22)$$

la ecuación característica es:

$$m^2 + 200\,m + 10\,000 = 0 \qquad \ldots \ (23)$$

y las frecuencias naturales del sistema son:

$$m_1 = -100$$

y

$$m_2 = -100$$

por lo tanto, la solución homogénea es:

$$V_C(t)_h = K_1 \ e^{-100t} + K_2 \ te^{-100t} \qquad \ldots \ (24)$$

Solución particular:

Debido a que la función escalón puede ser considerada como una constante, la solución particular que se propone es de la forma:

$$V_C(t)_p = K_3 \qquad \ldots (25)$$

para evaluar la constante K_3, es necesario derivar dos veces la ecuación (25) con respecto al tiempo y sustituirla en la ecuación (21):

$$\frac{dV_{Cp}}{dt} = 0 \qquad \ldots (26)$$

y

$$\frac{d^2V_{Cp}}{dt^2} = 0 \qquad \ldots (27)$$

sustituyendo las ecuaciones (25), (26) y (27) en la (21):

$$0 + 200(0) + 10\,000\ K_3 = 10\,000 \qquad \ldots (28)$$

por lo tanto, el valor de K_3 es:

$$K_3 = 1$$

y la solución particular:

$$V_C(t)_p = 1 \qquad \ldots (29)$$

de las ecuaciones (24) y (29), se tiene que la respuesta escalón es:

$$V_C(t)_{ESC} = K_1\ e^{-100t} + K_2\ te^{-100t} + 1 \qquad t \geq 0$$

$$\ldots (30)$$

para evaluar las constantes K_1 y K_2, se deben emplear las condiciones iniciales del sistema, la ecuación (18) y su derivada con respecto al tiempo:

$$\frac{dV_C}{dt} = -\ 100\ K_1\ e^{-100t} - 100\ K_2\ te^{-100t} + K_2\ e^{-100t}$$

$$\ldots (31)$$

sustituyendo las condiciones iniciales en las ecuaciones (30) y (31):

$$V_C(0) = 0 = K_1 + 1 \qquad \ldots (32)$$

y

$$V_C'(0) = 0 = -100\, K_1 + K_2 \qquad \ldots (33)$$

por lo tanto, los valores de K_1 y K_2 son:

$$K_1 = -1$$

y

$$K_2 = -100$$

la respuesta escalón del sistema es:

$$V_C(t)_{ESC} = -e^{-100t} - 100\, te^{-100t} + 1 \qquad t \geq 0$$

$$\ldots (34)$$

Una vez que se ha obtenido la respuesta escalón del sistema, la respuesta impulso es la derivada con respecto al tiempo de ésta, o sea:

$$h(t) = \frac{dV_{C_{ESC}}}{dt} = 100\, e^{-100t} + 10\,000\, te^{-100t} - 100\, e^{-100t}$$

$$\ldots (35)$$

así:

$$\boxed{h(t) = 10\,000\, te^{-100t} \qquad t \geq 0} \qquad \ldots (II)$$

TERCER PROCEDIMIENTO:

La ecuación a resolver es:

$$\frac{d^2V_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{LC}V_C = \frac{1}{LC}\,\delta(t) \qquad \ldots (36)$$

sustituyendo los valores de R, L y C se tiene que el modelo matemático es:

$$\frac{d^2V_C}{dt^2} + 200\,\frac{dV_C}{dt} + 10\,000\, V_C = 10\,000\,\delta(t) \ldots (37)$$

aplicando la transformada de Laplace a ambos miembros de la ecuación (23);

$$L\left\{\frac{d^2V_C}{dt^2} + 200\,\frac{dV_C}{dt} + 10\,000\;V_C\right\} = L\left\{10\,000\;\delta(t)\right\} \quad \dots (38)$$

desarrollando la ecuación (38), término a término:

$$L\left\{\frac{d^2V_C}{dt^2}\right\} = S^2V_C(S) - SV_C(0) - V_C'(0) \quad \dots (39)$$

$$L\left\{200\,\frac{dV_C}{dt}\right\} = 200\;SV_C(S) - 200\;V_C(0) \quad \dots (40)$$

$$L\left\{10\,000\;V_C\right\} = 10\,000\;\;V_C(S) \quad \dots (41)$$

$$L\left\{10\,000\;\delta(t)\right\} = 10\,000 \quad \dots (42)$$

sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación (38) y recordando que $V_C(0) = V_C'(0) = 0$, se tiene que:

$$S^2V_C(S) + 200\;SV_C(S) + 10\,000V_C(S) = 10\,000 \quad \dots (43)$$

y despejando $V_C(S)$:

$$V_C(S) = \frac{10\,000}{S^2 + 200S + 10\,000} \quad \dots (44)$$

o bien:

$$V_C(S) = \frac{10\,000}{(S + 100)^2} \quad \dots (45)$$

la respuesta impulso se obtiene al evaluar la transformada inversa de Laplace de la ecuación (45):

$$h(t) = L^{-1}\left\{V_C(S)\right\} \quad \dots (46)$$

o bien:

$$\boxed{h(t) = 10\,000\;te^{-100t} \qquad t \geq 0} \quad \dots (\mathrm{III})$$

Comparando las ecuaciones (I), (II) y (III) es evidente que éstas son idénticas, puesto que las tres ecuaciones representan la respuesta impulso del sistema eléctrico considerado.

Gráficamente:

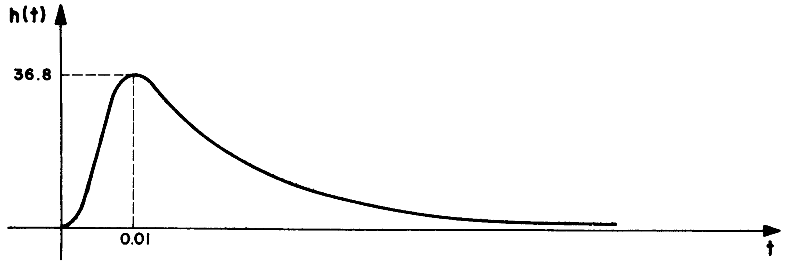
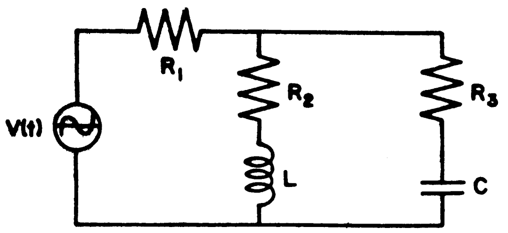


Figura IV.48

A través de este ejemplo se han ilustrado los tres procedimientos que se proponen para obtener la respuesta impulso, para sistemas de segundo orden. A continuación se presentan algunos ejemplos para los diferentes tipos de sistemas de segundo orden, en los que se obtiene la respuesta impulso en cada uno de los casos.

S I S T E M A   Y   M O D E L O   M A T E M A T I C O



$R_1 = R_2 = R_3 = R$

$$\frac{d^2V_C}{dt^2} + \left[\frac{3R}{2L} + \frac{1}{2RC}\right]\frac{dV}{dt} + \frac{1}{LC}V_C = \frac{1}{2LC}V(t) + \frac{1}{2RC}\dot{V}(t)$$

COMPORTAMIENTO SOBREAMORTIGUADO

$L = 500$ mH ; $C = 220$ µF ; $R = 68\ \Omega$; $V(t) = 120\ \delta(t)$ V

RESPUESTA IMPULSO

$$h(t) = 2\,495.52\ e^{-48t} + 1\,515.2\ e^{-189.43t} \qquad t \geq 0$$

COMPORTAMIENTO CRITICAMENTE AMORTIGUADO

$L = 500$ mH ; $C = 220$ µF ; $R = 15.89\ \Omega$; $V(t) = 120\ \delta(t)$ V

RESPUESTA IMPULSO

$$h(t) = 17\,166.435\ e^{-95.35t} - 1\,091\,365\,t\ e^{-95.35t} \qquad t \geq 0$$

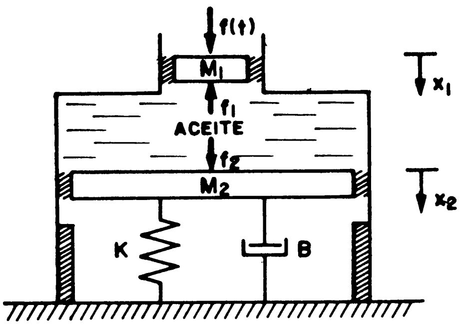
COMPORTAMIENTO SUBAMORTIGUADO

$L = 500$ mH ; $C = 220$ µF ; $R = 33\ \Omega$; $V(t) = 120\ \delta(t)$ V

RESPUESTA IMPULSO

$$h(t) = (8\,264.46\ \cos 45.2\,t - 3\,282.01\ \mathrm{sen}\ 45.2\,t)\ e^{-83.95t} \qquad t \geq 0$$

SISTEMA Y MODELO MATEMATICO



$$A_1 x_1 = A_2 x_2$$

$$\frac{f_1}{A_1} = p = \frac{f_2}{A_2}$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{A_1^2\,B}{M_1A_2^2 + M_2A_1^2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{A_1^2\,K}{M_1A_2^2 + M_2A_1^2}x_2 = \frac{A_1\,A_2}{M_1A_2^2 + M_2A_1^2}f(t)$$

COMPORTAMIENTO SOBREAMORTIGUADO

$A_1 = 0.105\ m^2$; $A_2 = 1.05\ m^2$; $M_1 = 200\ kg$; $M_2 = 2\,000\ kg$;

$K = 2\,000\ \frac{N}{m}$; $B = 18\,000\ \frac{N\cdot s}{m}$; $f(t) = 100\ \delta(t)\ N$

RESPUESTA IMPULSO

$$h(t) = 0.083(e^{-0.13t} - e^{-0.68t}) \qquad t \geq 0$$

COMPORTAMIENTO CRITICAMENTE AMORTIGUADO

$A_1 = 0.105\ m^2$; $A_2 = 1.05\ m^2$; $M_1 = 200\ kg$; $M_2 = 2\,000\ kg$;

$K = 2\,909.1\ \frac{N}{m}$; $B = 16\,000\ \frac{N\cdot s}{m}$; $f(t) = 100\ \delta(t)\ N$

RESPUESTA IMPULSO

$$h(t) = 0.0454\,t\,e^{-0.363t}$$

COMPORTAMIENTO SUBAMORTIGUADO

$A_1 = 0.105\ m^2$; $A_2 = 1.05\ m^2$; $M_1 = 200\ kg$; $M_2 = 2\,000\ kg$;

$K = 9\,142.6\ \frac{N}{m}$; $B = 19\,552\ \frac{N \cdot s}{m}$; $f(t) = 300\ \delta(t)\ N$

RESPUESTA IMPULSO

$$h(t) = 0.291\ e^{-0.444t}\ \text{sen}\ 0.467\ t \qquad t \geq 0$$

COMPORTAMIENTO NO AMORTIGUADO

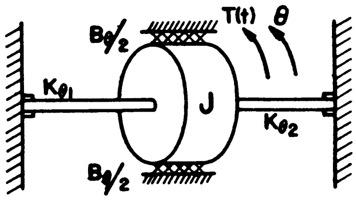
$A_1 = 0.105\ m^2$; $A_2 = 1.05\ m^2$; $M_1 = 200\ kg$; $M_2 = 2\,000\ kg$;

$K = 12\,000\ \frac{N}{m}$ $B = 0$; $f(t) = 300\ \delta(t)\ N$

RESPUESTA IMPULSO

$$h(t) = 0.184\ \text{sen}\ 0.738\ t \qquad t \geq 0$$

SISTEMA Y MODELO MATEMATICO



$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{B_\theta}{J}\frac{d\theta}{dt} + \frac{K_{\theta 1} + K_{\theta 2}}{J}\theta = \frac{1}{J}T(t)$$

COMPORTAMIENTO SOBREAMORTIGUADO

$J = 2\ kg \cdot m^2$; $B_\theta = 20\ \frac{N \cdot m \cdot s}{rad}$; $K_{\theta 1} = 20\ \frac{N \cdot m}{rad}$;

$K_{\theta 2} = 20\ \frac{N \cdot m}{rad}$; $T(t) = 100\ \delta(t)\ N$

RESPUESTA IMPULSO

$$h(t) = 11.18\ (e^{-2.77t} - e^{-7.23t}) \qquad t \geq 0$$

COMPORTAMIENTO CRITICAMENTE AMORTIGUADO

$J = 2\ kg \cdot m^2$; $B_\theta = 20\ \frac{N \cdot m \cdot s}{rad}$; $K_{\theta_1} = 20\ \frac{N \cdot m}{rad}$;

$K_{\theta_2} = 30\ \frac{N \cdot m}{rad}$; $T(t) = 100\ \delta(t)\ N \cdot m$

RESPUESTA IMPULSO

$$h(t) = 50\ t\ e^{-5t} \qquad t \geq 0$$

COMPORTAMIENTO SUBAMORTIGUADO

$$J = 2\ kg \cdot m^2\ ;\ B_\theta = 20\ \frac{N \cdot m \cdot s}{rad}\ ;\ K_{\theta_1} = 400\ \frac{N \cdot m}{rad}\ ;$$

$$K_{\theta_2} = 200\ \frac{N \cdot m}{rad}\ ;\ T(t) = 100\ \delta(t)\ N \cdot m$$

RESPUESTA IMPULSO

$$h(t) = 3.016\ e^{-5t}\ \text{sen}\ 16.58\,t \qquad t \geq 0$$

COMPORTAMIENTO NO AMORTIGUADO

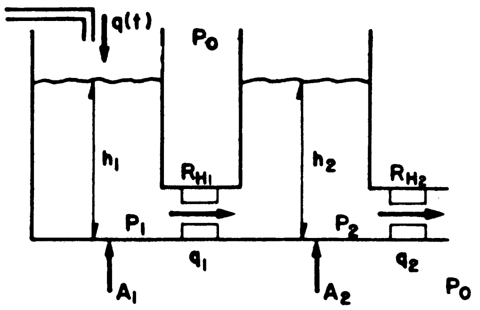
$$J = 2\,kg \cdot m^2\ ;\ B_\theta = 0\ ;\ K_{\theta_1} = 50\ \frac{N \cdot m}{rad}\ ;\ K_{\theta_2} = 50\ \frac{N \cdot m}{rad}\ ;$$

$$T(t) = 100\ \delta(t)\ N \cdot m$$

RESPUESTA IMPULSO

$$h(t) = 7.071\ \text{sen}\ 7.071\,t \qquad t \geq 0$$

SISTEMA Y MODELO MATEMATICO



$$\frac{d^2h_2}{dt^2} + \frac{\gamma(A_1(R_{H_1} + R_{H_2}) + A_2R_{H_2})}{A_1A_2\ R_{H_1}\ R_{H_2}}\ \frac{dh_2}{dt} + \frac{\gamma^2}{A_1A_2\ R_{H_1}\ R_{H_2}}\ h_2 = \frac{\gamma}{A_1A_2\ R_{H_1}}\ q(t)$$

COMPORTAMIENTO SOBREAMORTIGUADO

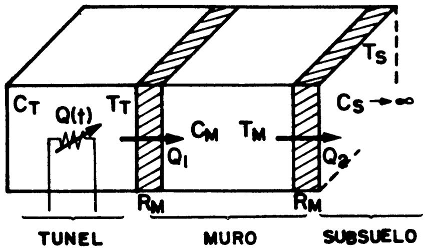
$$A_1 = 1.54\ m^2\ ;\ A_2 = 1.13\ m^2\ ;\ R_{H\,1} = 5 \times 10^6\ \frac{Pa \cdot s}{m^3}\ ;$$

$$R_{H\,2} = 5 \times 10^6\ \frac{Pa \cdot s}{m^3}\ ;\ q(t) = 3 \times 10^{-3}\delta(t)\ \frac{m^3}{s}$$

RESPUESTA IMPULSO

$$h(t) = 9.165 \times 10^{-4}\ (e^{-5.25 \times 10^{-4}t}\quad e^{-4.215 \times 10^{-3}t}) \qquad t \geq 0$$

S I S T E M A   Y   M O D E L O   M A T E M A T I C O



$$\frac{d^2T_T}{dt^2} + \frac{C_M + 2C_T}{R_M C_M C_T}\frac{dT_T}{dt} + \frac{1}{R_M^2\, C_M C_T} T_T = \frac{1}{C_T} Q_0(t) + \frac{2}{C_M C_T R_M} Q_0(t) + \frac{1}{R_M^2\, C_M C_T} T_S$$

COMPORTAMIENTO SOBREAMORTIGUADO

$$R_M = 10^{-3}\ \frac{K}{W}\ ;\ C_T = 345 \times 10^4\ \frac{W \cdot s}{K}\ ;\ C_M = 370 \times 10^4\ \frac{W \cdot s}{K}\ ;$$

$$T_S = 296.3\ K\ ;\ Q_0(t) = 2\,700\ \delta(t)\ W$$

RESPUESTA IMPULSO

$$h(t) = 296.6 + 52.5\ e^{-7.2 \times 10^{-4} t} - 349.1\ e^{-1.085 \times 10^{-4} t}) \qquad t \geq 0$$

CAPITULO V VARIABLES DE ESTADO

V.1 CONCEPTO DE ESTADO

Considérese un sistema, el cual puede ser representado en forma esquemática de la siguiente manera:

Figura V.1

En este caso si se desea determinar la salida producida por el sistema en un intervalo de tiempo desde t_0 (tiempo inicial) hasta un tiempo determinado t, es necesario conocer:

1. La entrada aplicada al sistema en el intervalo de tiempo (t_0, t).

2. Las condiciones del sistema en el tiempo t_0 (condiciones iniciales).

Estas condiciones iniciales son lo que se conoce como el *estado del sistema*. De esta manera se puede establecer que el estado del sistema es toda la información relevante acerca de la historia pasada del sistema. Por lo tanto, la salida producida por el sistema en el intervalo de tiempo (t_0, t) depende únicamente de la entrada aplicada a éste en el mismo intervalo de tiempo y del estado del sistema en el tiempo t_0. Asimismo, el conocimiento del estado del sistema en un tiempo determinado t_1 mayor a t_0 permite hacer una separación entre el comportamiento pasado y futuro del sistema.

Por otra parte, el estado del sistema para un tiempo determinado t puede ser descrito mediante un grupo de parámetros denominados *variables de estado*, las que se representan por un vector de dimensión n de la forma:

$$\underline{x}(t) = [x_1(t)\ x_2(t)\ x_3(t)\ \dots\ x_n(t)]^T \qquad \dots (1)$$

donde:

$\underline{x}(t)$: es el vector de estados

$x_i(t)$: son las variables de estado para $i = 1, 2, 3, \dots, n$

En general, las variables de estado de un sistema son el mínimo conjunto de parámetros que caracterizan completamente el comportamiento de éste. Asimismo, si se conoce el vector de estados para un tiempo inicial t_0 y el conjunto de entradas (vector de entradas) en el intervalo de tiempo (t_0, t_1), es posible determinar en forma única las salidas (vector de salidas) producidas por el sistema y el vector de estados para el tiempo t_1 Lo anterior se puede expresar matemáticamente por medio de dos funciones vectoriales $\underline{g}(\cdot)$ y $\underline{h}(\cdot)$, de la siguiente manera:

$$\underline{x}(t_1) = \underline{g}(t_0,\ t_1,\ \underline{x}(t_0),\ \underline{u}(t)_{[t_0,\ t_1]}) \qquad \dots (2)$$

$$\underline{y}(t_1) = \underline{h}(t_1,\ x(t_1),\ \underline{u}(t_1)) \qquad \dots (3)$$

A partir de la ecuación (2) se observa que el estado del sistema en el tiempo t_1 depende del tiempo inicial t_0, del tiempo t_1 y de las entradas $\underline{u}(t)$ aplicadas en el intervalo de tiempo (t_0, t_1).

De la ecuación (3) se tiene que las salidas producidas por el sistema en el tiempo t_1 dependen únicamente del tiempo t_1, del estado de éste en el tiempo t_1 y de las entradas aplicadas en t_1.

Por otra parte, si t_2 es mayor que t_1 y este último es mayor que t_0, esto es, $t_0 < t_1 < t_2$ entonces el es tado del sistema para el tiempo t_2 está dado por:

$$\underline{x}(t_2) = \underline{g}(t_0,\ t_2,\ \underline{x}(t_0),\ \underline{u}(t)_{[t_0,\ t_2]}) \qquad \ldots (4)$$

o bien:

$$\underline{x}(t_2) = \underline{g}(t_1,\ t_2,\ \underline{x}(t_1),\ u(t)_{[t_1,\ t_2]}) \qquad \ldots (5)$$

sin embargo, de las ecuaciones (2) y (5), se tiene:

$$\underline{x}(t_2) = \underline{g}(t_1,\ t_2,\ \underline{g}(t_0,\ t_1,\ \underline{x}(t_0),\ \underline{u}(t)_{[t_0,\ t_1]}),\ u(t)_{[t_1,\ t_2]}) \qquad \ldots (6)$$

y en forma general si:

$$t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n$$

la ecuación (6) se puede expresar de la siguiente manera:

$$\underline{x}(t_n) = \underline{g}(t_{n-1},\ t_n,\ \underline{g}(t_{n-2},\ t_{n-1},\ \underline{x}(t_{n-2}),\ \underline{u}(t)_{[t_{n-2},\ t_{n-1}]}),\ u(t)_{[t_{n-1},\ t_n]}) \qquad \ldots (7)$$

esta última ecuación será válida únicamente para valores de n mayores o iguales a 2.

Para sistemas dinámicos, continuos y de parámetros concentrados, la representación matemática del estado del sistema se puede expresar mediante una ecuación diferencial matricial de primer orden de la forma

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t),\ \underline{u}(t),\ t) \qquad \ldots (8)$$

y las salidas del sistema, como una ecuación algebraica matricial de la forma:

$$\underline{y}(t) = \tilde{\underline{g}}(\underline{x}(t),\ \underline{u}(t),\ t) \qquad \ldots (9)$$

De esta forma, la representación matemática en el espacio de estados para sistemas dinámicos, lineales, continuos y de parámetros concentrados en general es:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}(t)\underline{x}(t) + \underline{B}(t)\underline{u}(t) \qquad \ldots (10)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C}(t)\underline{x}(t) + \underline{D}(t)\underline{u}(t) \qquad \ldots (11)$$

donde:

$\underline{x}(t)$: es el vector de estado del sistema y es de dimensión n

$\underline{u}(t)$: es el vector de entradas aplicadas al sistema y es de dimensión r

$\underline{y}(t)$: es el vector de salidas producidas por el sistema y es de dimensión m

$\underline{A}(t), \underline{B}(t), \underline{C}(t), \underline{D}(t)$: son las matrices de coeficientes variables y son de orden n x n, n x r, m x n y m x r respectivamente.

Debido a que únicamente se estudiarán sistemas dinámicos lineales, continuos, de parámetros concentrados e invariantes con el tiempo, las ecuaciones (10) y (11) se escriben de la forma:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\,\underline{x}(t) + \underline{B}\,\underline{u}(t) \qquad \ldots (12)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C}\,\underline{x}(t) + \underline{D}\,\underline{u}(t) \qquad \ldots (13)$$

donde:

$\underline{x}(t)$: es el vector de estado del sistema y es de dimensión n

$\underline{u}(t)$: es el vector de entradas aplicadas al sistema y es de dimensión r

$\underline{y}(t)$: es el vector de salidas producidas por el sistema y es de dimensión m

$\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}$: son las matrices de coeficientes constantes y son de orden n x n, n x r, m x n y m x r, respectivamente

Las ecuaciones (12) y (13) son la representación matemática que define el comportamiento de los sistemas dinámicos lineales, continuos, de parámetros concentrados e invariantes con el tiempo en el espacio de estados.

V.2 Obtención de las Ecuaciones de Estado para Sistemas Dinámicos de Orden n

Existen varios procedimientos para la obtención de las ecuaciones de estado de sistemas dinámicos, éstos son:

a) A partir del modelo matemático del sistema expresado mediante una ecuación diferencial de orden n.

b) Directamente, a partir del sistema que se desea modelar.

OBTENCION DE LAS ECUACIONES DE ESTADO A PARTIR DE UNA ECUACION DIFERENCIAL DE ORDEN n

Considérese el modelo matemático de un sistema, representado por medio de una ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} x}{dt^{n-2}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x =$$

$$= b_0 \overset{(n)}{u} + b_1 \overset{(n-1)}{u} \dots + b_{n-1} u + b_n u \qquad \dots (1)$$

donde:

x: es la variable de interés que fue seleccionada para representar al sistema

u: es la entrada aplicada al sistema

a_i, b_j: son constantes, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ y $j = 0, 1, 2, \dots, n$

para este caso se requiere obtener una representación matemática a partir de la ecuación (1) de la forma:

$$\underline{x}(t) = \underline{A}\,\underline{x}(t) + \underline{B}\,\underline{u}(t) \qquad \dots (2)$$

Considérese primeramente el caso más sencillo, esto es cuando la ecuación (1) no incluye derivadas de orden superior de la entrada aplicada al sistema. De esta manera, $b_0 = b_1 = b_2 = \ldots b_{n-1} = 0 \quad b_n = b \neq 0$, de donde se obtiene la ecuación:

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = bu \qquad \ldots (3)$$

haciendo las siguientes asignaciones:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \frac{dx}{dt} \\ x_3 &= \frac{d^2x}{dt^2} \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= \frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}} \\ x_n &= \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots (4)$$

a partir del sistema de ecuaciones (4), se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= \frac{d^n x}{dt^n} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots (5)$$

por otro lado, de la ecuación (3):

$$\frac{d^n x}{dt^n} = - a_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} - a_2 \frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}} - a_3 \frac{d^{n-3}x}{dt^{n-3}} - \ldots - a_{n-1} \frac{dx}{dt} - a_n x + bu \qquad \ldots (6)$$

de las ecuaciones (4) y (6):

$$\frac{d^n x}{dt^n} = - a_1 x_n - a_2 x_{n-1} - a_3 x_{n-2} - \cdots - a_{n-1} x_2 - a_n x_1 + bu \qquad \ldots (7)$$

sustituyendo la ecuación (7) en el sistema de ecuaciones (5):

$$\left.\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
\dot{x}_3 &= x_4 \\
&\vdots \\
\dot{x}_{n-1} &= x_n \\
\dot{x}_n &= -a_1 x_n - a_2 x_{n-1} - a_3 x_{n-2} - \cdots - a_{n-1} x_2 - a_n x_1 + bu
\end{aligned}\right| \ldots (8)$$

así, la ecuación (8) se puede expresar en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \cdot \\ b \end{bmatrix} u \qquad \ldots (9)$$

por lo tanto, de la ecuación (9), se tiene:

$$\left.\begin{aligned}
\underline{x}(t) &= [\,x_1\ x_2\ x_3\ \ldots\ x_n\,]^T \\
\underline{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \\
\underline{B} &= [\,0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \ldots\ b\,]^T \\
\underline{u}(t) &= u
\end{aligned}\right| \ldots (10)$$

Considérese el caso general, esto es, el modelo matemático (ecuación diferencial) del sistema incluye derivadas de orden superior de la entrada; así el modelo matemáco del sistema es:

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt}\; a_n\, x =$$

$$= b_0 \overset{(n)}{u} + b_1 \overset{(n-1)}{u} + \dots + b_{n-1}\dot{u} + b_n u \qquad \dots (11)$$

En este caso, se desea obtener una representación matemática de la forma:

$$\underline{\dot{x}}(t) = \underline{A}\,\underline{x}(t) + \underline{B}\,\underline{u}(t) \qquad \dots (12)$$

o bien:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \cdot & \cdot & & & \cdot & \\ & \cdot & \cdot & & & \cdot & \\ & \cdot & \cdot & & & \cdot & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix} u(t) \qquad \dots (13)$$

por lo tanto, de la ecuación (13), se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + c_1 u \\ \dot{x}_2 &= x_3 + c_2 u \\ \dot{x}_3 &= x_4 + c_3 u \\ \dot{x}_4 &= x_5 + c_4 u \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n + c_{n-1} u \\ \dot{x}_n &= -a_n x_1 - a_{n-1}x_2 - a_{n-2}x_3 - a_{n-3}x_4 - \dots - a_2 x_{n-1} - a_1 x_n + c_n u \end{aligned}\right| \dots (14)$$

de la ecuación (14) se conocen los coeficientes a_i para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ y los coeficientes c_i para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ se desconocen, por lo tanto, es necesario determinarlos. Para esto se requiere generar un sistema de n ecuaciones y resolverlo. En este caso se resolverá para n igual a 4 y a partir de este resultado se obtendrá la solución general.

Considérese el modelo matemático de un sistema dinámico descrito por la ecuación:

$$\frac{d^4x}{dt^4} + a_1 \frac{d^3x}{dt^3} + a_2 \frac{d^2x}{dt^2} + a_3 \frac{dx}{dt} + a_4 x = b_0 \overset{(4)}{u} + b_1 \overset{(3)}{u} + b_2 \ddot{u} + b_3 \dot{u} + b_4 u \qquad \ldots (15)$$

de la ecuación (15) se obtiene que el modelo matemático en variables de estado es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_4 & -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} u \qquad \ldots (16)$$

de esta última ecuación se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + c_1 u \\ \dot{x}_2 &= x_3 + c_2 u \\ \dot{x}_3 &= x_4 + c_3 u \\ \dot{x}_4 &= -a_4 x_1 - a_3 x_2 - a_2 x_3 - a_1 x_4 + c_4 u \end{aligned}\right| \qquad \ldots (17)$$

aplicando la ecuación:

$$x = x_1 + c_0 u \qquad \ldots (18)$$

derivando la ecuación (18) con respecto al tiempo, se obtiene:

$$\dot{x} = \dot{x}_1 + c_0 \dot{u} \qquad \ldots (19)$$

y sustituyendo la primera de las ecuaciones (17) en la (19), se tiene:

$$\dot{x} = x_2 + c_0\dot{u} + c_1u \qquad \ldots (20)$$

en forma similar se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\ddot{x} = x_3 + c_0\ddot{u} + c_1\dot{u} + c_2u \qquad \ldots (21)$$

$$\overset{(3)}{x} = x_4 + c_0\overset{(3)}{u} + c_1\ddot{u} + c_2\dot{u} + c_3u \qquad \ldots (22)$$

$$\overset{(4)}{x} = - a_4x_1 - a_3x_2 - a_2x_3 - a_1x_4 + c_0\overset{(4)}{u} + c_1\overset{(3)}{u} + c_2\ddot{u} + c_3\dot{u} + c_4u$$

$$\ldots (23)$$

multiplicando las ecuaciones (18), (20), (21), (22) y (23) por a_4, a_3, a_2, a_1 y 1 respectivamente y sumándolas, se obtiene:

$$\begin{aligned}\overset{(4)}{x} + a_1\overset{(3)}{x} + a_2\ddot{x} + a_3\dot{x} + a_4x = & -a_4x_1 - a_3x_2 - a_2x_3 - a_1x_4 + \\ & + c_0\overset{(4)}{u} + c_1\overset{(3)}{u} + c_2\ddot{u} + c_3\dot{u} + c_4u + \\ & + a_1x_4 + a_1c_0\overset{(3)}{u} + a_1c_1\ddot{u} + a_1c_2\dot{u} + \\ & + a_1c_3u + a_2x_3 + a_2c_0\ddot{u} + a_2c_1\dot{u} + \\ & + a_2c_2u + a_3x_2 + a_3c_0\dot{u} + a_3c_1u + \\ & + a_4x_1 + a_4c_0u = \\ = \; & c_0\overset{(4)}{u} + (c_1 + a_1c_0)\overset{(3)}{u} + (c_2 + a_1c_1 + a_2c_0)\ddot{u} + \\ & + (c_3 + a_1c_2 + a_2c_1 + a_3c_0)\dot{u} + \\ & + (c_4 + a_1c_3 + a_2c_2 + a_3c_1 + a_4c_0)u\end{aligned}$$

$$\ldots (24)$$

comparando las ecuaciones (15) y (24) se tiene que ambas son idénticas en su primer miembro, por lo tanto, se puede establecer la siguiente igualdad:

$$c_0\overset{(4)}{u} + (c_1 + a_1c_0)\overset{(3)}{u} + (c_2 + a_1c_1 + a_2c_0)\ddot{u} + (c_3 + a_1c_2 + a_2c_1 + a_3c_0)\dot{u} +$$

$$+ (c_4 + a_1c_3 + a_2c_2 + a_3c_1 + a_4c_0)u = b_0\overset{(4)}{u} + b_1\overset{(3)}{u} + b_2\ddot{u} + b_3\dot{u} + b_4u \quad \ldots (25)$$

de donde se determinan los valores de c_0, c_1, c_2, c_3 y c_4 de la forma:

$$\left.\begin{aligned} c_0 &= b_0 \\ c_1 &= b_1 - a_1c_0 \\ c_2 &= b_2 - a_1c_1 - a_2c_0 \\ c_3 &= b_3 - a_1c_2 - a_2c_1 - a_3c_0 \\ c_4 &= b_4 - a_1c_3 - a_2c_2 - a_3c_1 - a_4c_0 \end{aligned}\right| \quad \ldots (26)$$

de esta manera, se tiene que los coeficientes c_i para el caso general, están dados por:

$$\left.\begin{aligned} &c_0 = b_0 \\ \text{y} \quad &c_k = b_k - \sum_{i=1}^{k} a_i c_{k-i} \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots n \end{aligned}\right| \quad \ldots (27)$$

por lo tanto, si se desea representar un sistema en variables de estado a partir de una ecuación diferencial de orden n, del tipo de la ecuación (11), se pueden emplear las ecuaciones (13) y (27).

OBTENCION DE LAS ECUACIONES DE ESTADO DIRECTAMENTE A PARTIR DEL SISTEMA

En este caso, la obtención de las ecuaciones de estado consiste en aplicar directamente los principios y leyes físicas que definen el comportamiento de los elementos que integran al sistema, y posteriormente se pueden plantear las ecuaciones de estado, siguiendo la metodología que se propone a continuación:

1. **Seleccionar las variables de estado del sistema.**

TIPO DE SISTEMA	VARIABLES DE ESTADO
Eléctrico	V_c, i_L
Mecánico traslacional	x, v, a, f_k
Mecánico rotacional	θ, ω, α, T_{K_θ}
Térmico	T, Q
Hidráulico	h, P
Híbrido	Alguna combinación de las variables anteriores

Tabla V.1

2. Aplicar las leyes de los elementos y las de conjunto al sistema considerado.

3. Expresar todas las ecuaciones planteadas en el inciso anterior como función de las variables de estado y la o las entradas aplicadas al sistema, esto es:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t), \underline{u}(t))$$

4. Representar las ecuaciones obtenidas en el inciso anterior en forma matricial, para obtener un modelo matemático de la forma:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\,\underline{x}(t) + \underline{B}\,\underline{u}(t)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C}\,\underline{x}(t) + \underline{D}\,\underline{u}(t)$$

En la mayoría de los sistemas físicos, es posible obtener las ecuaciones de estado por ambos procedimientos.

Ejemplo V.1

Considérese un sistema eléctrico formado por una capacitancia, una inductancia, tres resistencias y una fuente de voltaje de alimentación como se muestra en la figura:

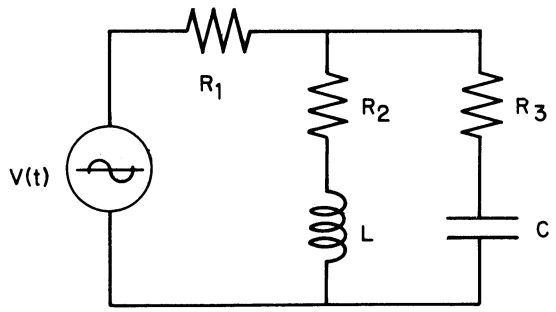


Figura V.2

Obtener un modelo matemático en variables de estado:

a) A partir de su modelo matemático dado por la ecuación:

$$\frac{d^2V_C}{dt^2} + \frac{C(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3) + L}{LC(R_1 + R_3)}\frac{dV_C}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{LC(R_1 + R_3)}V_C =$$

$$= \frac{1}{C(R_1 + R_3)}\dot{V}(t) + \frac{R_2}{LC(R_1 + R_3)}V(t) \qquad \text{... (I)}$$

b) Planteando las ecuaciones a partir del sistema, considerando:

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} i_L(t) \\ V_C(t) \end{bmatrix} \quad ; \quad \underline{u}(t) = \left[V(t) \right]$$

y

$$\underline{y}(t) = \left[V_C(t) \right]$$

Solución:

a) De la ecuación (I) se pueden hacer las siguientes asignaciones:

$$x_1(t) = V_C(t)$$
$$x_2(t) = \dot{x}_1(t) = \frac{dV_C}{dt}$$

de esta manera, se tiene que el vector de variables de estado es:

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

y los vectores de entradas aplicadas al sistema y el de salidas producidas por éste son:

$$\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} V(t) \end{bmatrix}$$

y

$$\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \end{bmatrix}$$

así, las ecuaciones de estado están dadas por:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} V(t)$$

y

$$\underline{y}(t) = x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

donde:

$$a_1 = \frac{C(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3) + L}{LC(R_1 + R_3)}$$

$$a_2 = \frac{R_1 + R_2}{LC(R_1 + R_3)}$$

$$b_0 = 0$$

$$b_1 = \frac{1}{C(R_1 + R_3)}$$

$$b_2 = \frac{R_2}{LC(R_1 + R_3)}$$

y los coeficientes c_i, para i = 0, 1, 2, se calculan como:

$$c_0 = b_0$$

$$c_1 = b_1 - a_1c_0$$

$$c_2 = b_2 - a_1c_1 - a_2c_0$$

por lo tanto:

$$c_0 = 0$$

$$c_1 = \frac{1}{C(R_1 + R_3)}$$

$$c_2 = -\frac{CR_1R_3 + L}{LC^2(R_1 + R_3)^2}$$

y el modelo matemático en variables de estado es:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{R_1 + R_2}{LC(R_1 + R_3)} & -\frac{C(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3) + L}{LC(R_1 + R_3)} \end{bmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right] +$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{1}{C(R_1 + R_3)} \\ -\frac{CR_1R_3 + L}{LC^2(R_1 + R_3)^2} \end{bmatrix} V(t)$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

b) En este caso se procede a plantear las leyes de los elementos y las leyes de conjunto, esto es:

Leyes de Elementos:

$$V_{R1} = R_1\, i_{R1} \qquad \ldots (1)$$

$$V_{R2} = R_2\, i_{R2} \qquad \ldots (2)$$

$$V_{R3} = R_3\, i_{R3} \qquad \ldots (3)$$

$$V_L = L\,\frac{di_L}{dt} \qquad \ldots (4)$$

$$i_C = C\,\frac{dV_C}{dt} \qquad \ldots (5)$$

Leyes de Conjunto:

$$V(t) = V_{R1} + V \qquad \ldots (6)$$

$$V = V_{R2} + V_L \qquad \ldots (7)$$

$$V = V_{R3} + V_C \qquad \ldots (8)$$

$$i_{R1} = i_1 + i_2 \qquad \ldots (9)$$

$$i_1 = i_{R2} = i_L \qquad \ldots (10)$$

$$i_2 = i_{R3} = i_C \qquad \ldots (11)$$

Obtención de las ecuaciones de estado.

De las ecuaciones (3), (5) y (11):

$$V_{R3} = CR_3\,\frac{dV_C}{dt} \qquad \ldots (12)$$

por lo tanto, sustituyendo la ecuación (12) en la (8), se tiene:

$$V = CR_3\,\frac{dV_C}{dt} + V_C \qquad \ldots (13)$$

por otro lado, de las ecuaciones (1), (5), (9), (10) y (11), se obtiene:

$$V_{R1} = R_1\, i_L + CR_1 \frac{dV_C}{dt} \qquad \ldots (14)$$

sustituyendo las ecuaciones (13) y (14) en la (6) se tiene que una de las ecuaciones de estado es:

$$\frac{dV_C}{dt} = - \frac{R_1}{C(R_1 + R_3)}\, i_L - \frac{1}{C(R_1 + R_3)}\, V_C + \frac{1}{C(R_1 + R_3)}\, V(t) \qquad \ldots (15)$$

de las ecuaciones (2) y (10):

$$V_{R2} = R_2\, i_L \qquad \ldots (16)$$

y sustituyendo las ecuaciones (4) y (16) en la (7) se tiene:

$$V = R_2\, i_L + L \frac{di_L}{dt} \qquad \ldots (17)$$

igualando las ecuaciones (13) y (17) se obtiene:

$$CR_3 \frac{dV_C}{dt} + V_C = R_2\, i_L + L \frac{di_L}{dt} \qquad \ldots (18)$$

A partir de la última ecuación, se aprecia que está en función de las derivadas con respecto al tiempo de V_C e i_L, puesto que ya se obtuvo la ecuación de estado para V_C, es necesario plantear la ecuación de estado para i_L. Sustituyendo la ecuación (15) en la (18):

$$\frac{di_L}{dt} = - \frac{1}{L} \left[\frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_1 + R_3} \right] i_L + \frac{1}{L} \left[\frac{R_1}{R_1 + R_3} \right] V_C +$$

$$+ \frac{1}{L} \left[\frac{R_3}{R_1 + R_3} \right] V(t) \qquad \ldots (19)$$

a partir de las ecuaciones (15) y (19) se tiene que el modelo en variables de estado es:

$$
\begin{bmatrix} \dfrac{di_L}{dt} \\[2ex] \dfrac{dV_C}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{L}\left[\dfrac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_1 + R_3}\right] & \dfrac{1}{L}\left[\dfrac{R_1}{R_1 + R_3}\right] \\[2ex] -\dfrac{R_1}{C(R_1 + R_3)} & -\dfrac{1}{C(R_1 + R_3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\[2ex] V_C \end{bmatrix} +
$$

$$
+ \begin{bmatrix} \dfrac{R_3}{L(R_1 + R_3)} \\[2ex] \dfrac{1}{C(R_1 + R_3)} \end{bmatrix} V(t)
$$

$$
V_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ V_C \end{bmatrix}
$$

Ejemplo V.2

Un problema de importancia en Ingeniería Sísmica consiste en modelar el movimiento de las capas terrestres bajo la acción de un sismo. Supóngase que se requiere hacer un modelo que describa una región del subsuelo que está constituido de la siguiente forma:

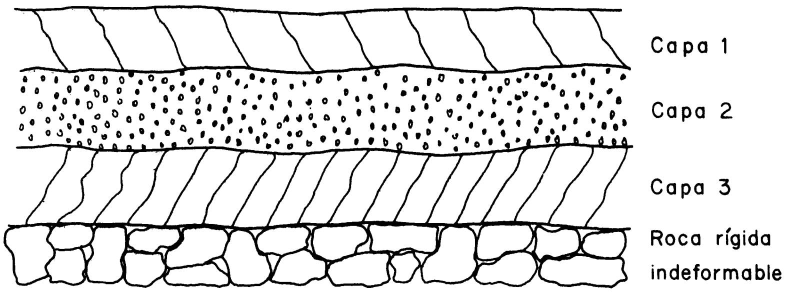


Figura V.3

Una forma de hacerlo es modelando cada una de las tres capas mediante un sistema dinámico de segundo orden formado por una masa, un resorte y un amortiguador como se muestra en la siguiente figura:

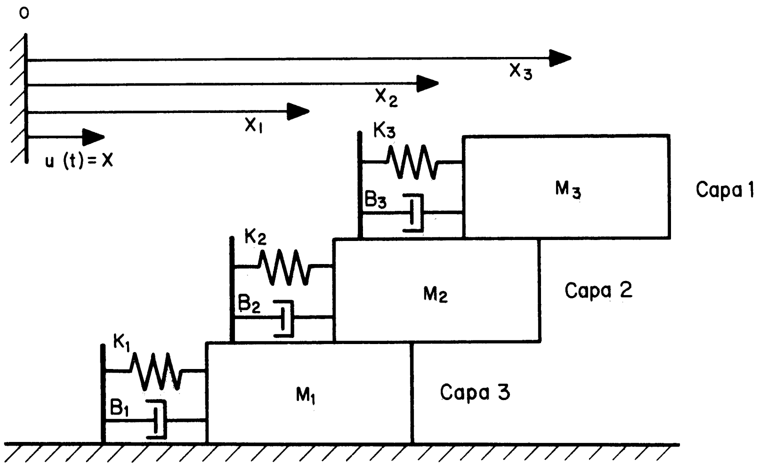


Figura V.4

NOTA: No se considera fricción entre las masas.

Este modelo describe únicamente el movimiento oscilatorio (existe también movimiento trepidatorio).

La entrada u(t) describe el movimiento de la capa de roca rígida con respecto a un punto fijo 0 de refencia; la salida y(t) es la diferencia de desplazamientos de la capa 1 y la capa de roca rígida.

Obtener un modelo matemático en variables de estado, que represente el movimiento de las capas terrestres.

Solución:
Debido a que el sistema contiene seis elementos capaces de almacenar energía, seis son las variables de estado, éstas pueden ser:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & f_{K1} & f_{K2} & f_{K3} \end{bmatrix}^T$$

El sistema se puede representar de la siguiente forma:

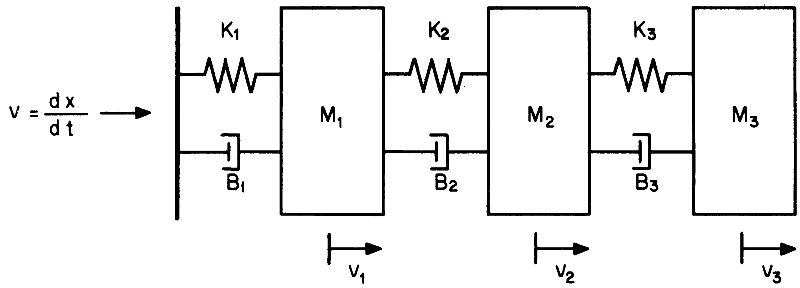


Figura V.5

v_i: son las velocidades absolutas de las masas M_i.

Leyes de Elementos:

$$f_{K_1} = K_1 (x - x_1) \qquad \ldots (1)$$

$$f_{K_2} = K_2 (x_1 - x_2) \qquad \ldots (2)$$

$$f_{K_3} = K_3 (x_2 - x_3) \qquad \ldots (3)$$

$$f_{B_1} = B_1 \left[\frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt} \right] \qquad \ldots (4)$$

$$f_{B_2} = B_2 \left[\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right] \qquad \ldots (5)$$

$$f_{B_3} = B_3 \left[\frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_3}{dt} \right] \qquad \ldots (6)$$

$$f_{M_1} = M_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} \qquad \ldots (7)$$

$$f_{M_2} = M_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} \qquad \ldots (8)$$

$$f_{M_3} = M_3 \frac{d^2x_3}{dt^2} \qquad \ldots (9)$$

Leyes de Conjunto:

El diagrama de cuerpo libre para la masa 1 es:

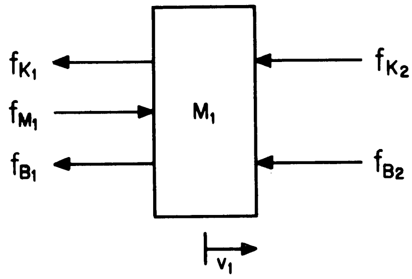


Figura V.6

por lo que la ecuación de equilibrio para la masa 1 es:

$$f_{M_1} = f_{K_1} + f_{B_1} + f_{K_2} + f_{B_2} \qquad \ldots (10)$$

para la masa 2 el diagrama de cuerpo libre es:

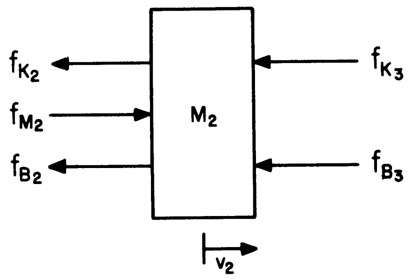


Figura V.7

por lo tanto, la ecuación de equilibrio para la masa 2 es:

$$f_{M2} = f_{K2} + f_{B2} + f_{K3} + f_{B3} \qquad \ldots (11)$$

finalmente el diagrama de cuerpo libre para la masa 3 es:

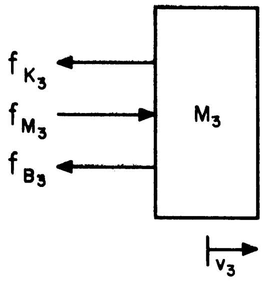


Figura V.8

y la ecuación de equilibrio es:

$$f_{M3} = f_{K3} + f_{B3} \qquad \ldots (12)$$

Obtención de las ecuaciones de estado.

Se tiene que las velocidades absolutas son:

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} \qquad \ldots (13)$$

$$v_2 = \frac{dx_2}{dt} \qquad \ldots (14)$$

$$v_3 = \frac{dx_3}{dt} \qquad \ldots (15)$$

sustituyendo la ecuación (13) en la (4), se tiene que:

$$f_{B1} = B_1(v - v_1) \qquad \ldots (16)$$

sustituyendo las ecuaciones (13) y (14) en la (5):

$$f_{B2} = B_2(v_1 - v_2) \qquad \ldots (17)$$

sustituyendo las ecuaciones (14) y (15) en la (6):

$$f_{B3} = B_2(v_2 - v_3) \qquad \ldots (18)$$

sustituyendo la ecuación (13) en la (7):

$$f_{M1} = M_1 \frac{dv_1}{dt} \qquad \ldots (19)$$

sustituyendo la ecuación (14) en la (8):

$$f_{M2} = M_2 \frac{dv_2}{dt} \qquad \ldots (20)$$

sustituyendo la ecuación (15) en la (9):

$$f_{M3} = M_3 \frac{dv_3}{dt} \qquad \ldots (21)$$

derivando las ecuaciones (1), (2) y (3), con respecto al tiempo y sustituyendo las (13), (14) y (15), se tiene:

$$\frac{df_{K1}}{dt} = K_1(v - v_1) \qquad \ldots (22)$$

$$\frac{df_{K2}}{dt} = K_2(v_1 - v_2) \qquad \ldots (23)$$

$$\frac{df_{K3}}{dt} = K_3(v_2 - v_3) \qquad \ldots (24)$$

finalmente, es posible expresar todas las ecuaciones en función de las variables de estado, sustituyendo las ecuaciones (16), (17) y (19) en la (10), se tiene que:

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{1}{M_1} f_{K1} + \frac{1}{M_1} f_{K2} + \frac{B_1}{M_1} (v - v_1) - \frac{B_2}{M_1} (v_1 - v_2) \qquad \ldots (25)$$

sustituyendo las ecuaciones (17), (18) y (20) en la (11), se tiene:

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{1}{M_2} f_{K2} + \frac{1}{M_2} f_{K3} + \frac{B_2}{M_2} (v_1 - v_2) - \frac{B_3}{M_2} (v_2 - v_3) \qquad \ldots (26)$$

sustituyendo las ecuaciones (18) y (21) en la (12), se tiene:

$$\frac{dv_3}{dt} = \frac{1}{M_3} f_{K3} + \frac{B_3}{M_3}(v_2 - v_3) \qquad \ldots (27)$$

la salida y(t) es en este caso:

$$y(t) = x_3 - x \qquad \ldots (28)$$

ésta se puede obtener de las ecuaciones (1), (2) y (3):

$$x_3 - x = -\frac{f_{K1}}{K_1} - \frac{f_{K2}}{K_2} - \frac{f_{K3}}{K_3} \qquad \ldots (29)$$

A partir de las ecuaciones (22), (23), (24), (25), (26) y (27) se tiene:

$$\begin{bmatrix} \frac{dv_1}{dt} \\ \frac{dv_2}{dt} \\ \frac{dv_3}{dt} \\ \frac{df_{K1}}{dt} \\ \frac{df_{K2}}{dt} \\ \frac{df_{K3}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{B_1 + B_2}{M_1} & \frac{B_2}{M_1} & 0 & \frac{1}{M_1} & \frac{1}{M_1} & 0 \\ \frac{B_2}{M_2} & -\frac{B_2 + B_3}{M_2} & \frac{B_3}{M_2} & 0 & \frac{1}{M_2} & \frac{1}{M_2} \\ 0 & \frac{B_3}{M_3} & -\frac{B_3}{M_3} & 0 & 0 & \frac{1}{M_3} \\ -K_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_2 & -K_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_3 & -K_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ f_{K1} \\ f_{K2} \\ f_{K3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{B_1}{M_1} \\ 0 \\ 0 \\ K_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v$$

y de la ecuación (29):

$$\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{K_1} & -\frac{1}{K_2} & -\frac{1}{K_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ f_{K1} \\ f_{K2} \\ f_{K3} \end{bmatrix}$$

Ejemplo V.3

Considérese un sistema mecánico rotacional formado por tres resortes, dos amortiguadores, dos inercias y un par externo T(t) como se muestra en la figura:

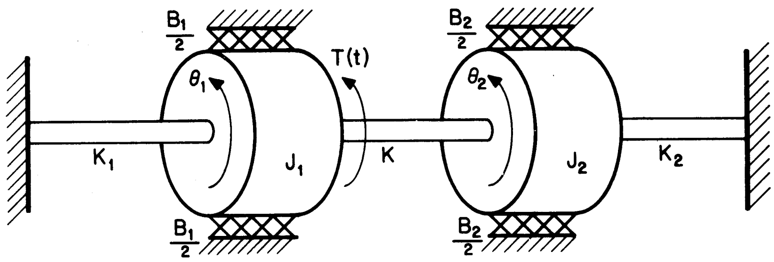


Figura V.9

Obtener un modelo matemático en variables de estado:

a) A partir de su modelo matemático dado por la ecuación:

$$\frac{d^4\theta_2}{dt^4} + \left[\frac{B_1}{J_1} + \frac{B_2}{J_2}\right]\frac{d^3\theta_2}{dt^3} + \left[\frac{K_1 + K}{J_1} + \frac{K_2 + K}{J_2} + \frac{B_1B_2}{J_1J_2}\right]\frac{d^2\theta_2}{dt^2} +$$

$$+ \left[\frac{B_1(K_2 + K) + B_2(K_1 + K)}{J_1J_2}\right]\frac{d\theta_2}{dt} + \left[\frac{K(K_2 + K) + K_1K_2}{J_1J_2}\right]\theta_2 =$$

$$= \frac{K}{J_1J_2}\,T(t) \qquad \ldots \text{(I)}$$

b) Planteando las ecuaciones a partir del sistema, y considerando

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \\ T_{K1}(t) \\ T_{K2}(t) \end{bmatrix} ; \quad \underline{u}(t) = \left[T(t)\right] \quad y \quad \underline{y}(t) = \left[\omega_2(t)\right]$$

Solución:

a) De la ecuación (I) se pueden hacer las siguientes asignaciones:

$$x_1(t) = \theta_2(t)$$

$$x_2(t) = \dot{x}_1(t) = \frac{d\theta_2}{dt}$$

$$x_3(t) = \dot{x}_2(t) = \frac{d^2\theta_2}{dt^2}$$

$$x_4(t) = \dot{x}_3(t) = \frac{d^3\theta_2}{dt^3}$$

Con base en las expresiones anteriores, se tiene que el vector de variables de estado es:

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}$$

y los vectores de entradas aplicadas al sistema y el de salidas producidas por éste son:

$$\underline{u}(t) = \left[T(t)\right] \quad y \quad \underline{y}(t) = \left[x_2(t)\right]$$

debido a que el modelo matemático del sistema descrito por la ecuación (I) no involucra derivadas con respecto al tiempo de la entrada, el modelo en variables de estado es de la forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \\ \frac{dx_4}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_4 & -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix} T(t)$$

y

$$\underline{y}(t) = x_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

donde:

$$a_1 = \frac{B_1}{J_1} + \frac{B_2}{J_2}$$

$$a_2 = \frac{K_1 + K}{J_1} + \frac{K_2 + K}{J_2} + \frac{B_1 B_2}{J_1 J_2}$$

$$a_3 = \frac{B_1(K_2 + K) + B_2(K_1 + K)}{J_1 J_2}$$

$$a_4 = \frac{K(K_2 + K) + K_1 K_2}{J_1 J_2}$$

$$b = \frac{K}{J_1 J_2}$$

de esta manera, el modelo matemático en variables de estado está dado por:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \\ \frac{dx_4}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\left[\frac{K(K_2+K)+K_1K_2}{J_1J_2}\right] & -\left[\frac{B_1(K_2+K)+B_2(K_1+K)}{J_1J_2}\right] & -\left[\frac{K_1+K}{J_1}+\frac{K_2+K}{J_2}+\frac{B_1B_2}{J_1J_2}\right] & -\left[\frac{B_1}{J_1}+\frac{B_2}{J_2}\right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K}{J_1J_2} \end{bmatrix} T(t)$$

$$x_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

b) En este caso se procede a plantear las leyes de los elementos y las leyes de conjunto, esto es:

Leyes de Elementos:

$$T_{J_1} = J_1 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} \qquad \dots (1)$$

$$T_{B_1} = B_1 \frac{d\theta_1}{dt} \qquad \dots (2)$$

$$T_{K_1} = K_1\ \theta_1 \qquad \dots (3)$$

$$T_K = K(\theta_1 - \theta_2) \qquad \dots (4)$$

$$T_{K_2} = K_2\ \theta_2 \qquad \dots (5)$$

$$T_{J_2} = J_2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} \qquad \dots (6)$$

$$T_{B_2} = B_2 \frac{d\theta_2}{dt} \qquad \dots (7)$$

Leyes de Conjunto:

$$T(t) = T_{J_1} + T_{B_1} + T_{K_1} + T_K \qquad \dots (8)$$

$$T_K = T_{J_2} + T_{B_2} + T_{K_2} \qquad \dots (9)$$

Obtención de las ecuaciones de estado.

De la ecuación (3), se tiene:

$$\theta_1 = \frac{1}{K_1}\ T_{K_1} \qquad \dots (10)$$

de la ecuación (5), se tiene:

$$\theta_2 = \frac{1}{K_2}\ T_{K_2} \qquad \dots (11)$$

sustituyendo las ecuaciones (10) y (11) en la (4) se obtiene:

$$T_K = \frac{K}{K_1}\ T_{K_1} - \frac{K}{K_2}\ T_{K_2} \qquad \dots (12)$$

sustituyendo las ecuaciones (1), (2), y (12), en la (8), esto es:

$$J_1 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + B_1 \frac{d\theta_1}{dt} + \frac{K}{K_1} T_{K_1} - \frac{K}{K_2} T_{K_2} + T_{K_1} = T(t) \qquad \ldots (13)$$

de la ecuación anterior se tiene que θ_1 no es variable de estado, sin embargo:

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \omega_1 \qquad \ldots (14)$$

a partir de las ecuaciones (13) y (14) se obtiene la primera ecuación de estado, esto es:

$$\frac{d\omega_1}{dt} = -\frac{B_1}{J_1}\omega_1 - \frac{K_1 + K}{J_1 K_1} T_{K_1} + \frac{K}{J_1 K_2} T_{K_2} + \frac{1}{J_1} T(t) \qquad \ldots (15)$$

sustituyendo las ecuaciones (6), (7) y (12) en la (9) se obtiene:

$$J_2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} + B_2 \frac{d\theta_2}{dt} + T_{K_2} = \frac{K}{K_1} T_{K_1} - \frac{K}{K_2} T_{K_2} \qquad \ldots (16)$$

de esta última ecuación se tiene que θ_2 no es variable de estado, sin embargo:

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \omega_2 \qquad \ldots (17)$$

a partir de las ecuaciones (16) y (17) se obtiene la segunda ecuación de estado:

$$\frac{d\omega_2}{dt} = -\frac{B_2}{J_2}\omega_2 + \frac{K}{J_2 K_1} T_{K_1} - \frac{K_2 + K}{J_2 K_2} T_{K_2} \qquad \ldots (18)$$

por otra parte, las dos ecuaciones de estado restantes se obtienen al derivar con respecto al tiempo las ecuaciones (3) y (5), esto es:

$$\frac{dT_{K_1}}{dt} = K_1 \; \omega_1 \qquad \ldots (19)$$

y

$$\frac{dT_{K_2}}{dt} = K_2 \; \omega_2 \qquad \ldots (20)$$

de las ecuaciones (15), (18), (19) y (20) se tie ne que el modelo en variables de estado es:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\omega_1}{dt} \\[2ex] \frac{d\omega_2}{dt} \\[2ex] \frac{dT_K}{dt} \\[2ex] \frac{dT_{K_2}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{B_1}{J_1} & 0 & -\frac{K_1 + K}{J_1 K_1} & \frac{K}{J_1 K_2} \\[2ex] 0 & -\frac{B_2}{J_2} & \frac{K}{J_2 K_1} & -\frac{K_2 + K}{J_2 K_2} \\[2ex] K_1 & 0 & 0 & 0 \\[2ex] 0 & K_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\[2ex] \omega_2 \\[2ex] T_{K_1} \\[2ex] T_{K_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{J_1} \\[2ex] 0 \\[2ex] 0 \\[2ex] 0 \end{bmatrix} T(t)$$

$$\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ T_{K_1} \\ T_{K_2} \end{bmatrix}$$

Ejemplo V.4

Obtener un modelo matemático en variables de estado para el sistema hidráulico mostrado en la figura:

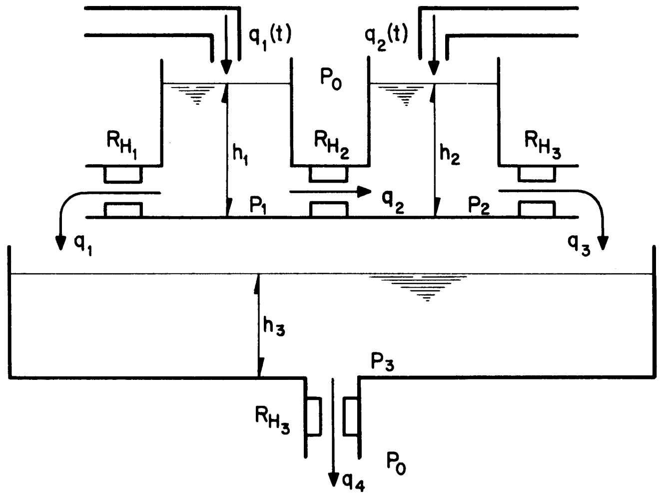


Figura V.10

Considerando:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} \quad ; \quad u(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ \\ q_2(t) \end{bmatrix} \quad y \quad \underline{y}(t) = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$$

A_1, A_2 y A_3 son las áreas de las secciones transversales de los tanques 1, 2 y 3 respectivamente.

Solución:

Leyes de Elementos:

$$P_1 - P_0 = R_{H1}\, q_1 \qquad \ldots (1)$$

$$P_1 - P_2 = R_{H2}\, q_2 \qquad \ldots (2)$$

$$P_2 - P_0 = R_{H3}\, q_3 \qquad \ldots (3)$$

$$P_3 - P_0 = R_{H4}\, q_4 \qquad \ldots (4)$$

Leyes de Conjunto:

$$A_1 \frac{dh_1}{dt} = q_1(t) - q_1 - q_2 \qquad \dots (5)$$

$$A_2 \frac{dh_2}{dt} = q_2(t) + q_2 - q_3 \qquad \dots (6)$$

$$A_3 \frac{dh_3}{dt} = q_1 + q_3 - q_4 \qquad \dots (7)$$

$$P_1 = P_0 + \rho g\ h_1 \qquad \dots (8)$$

$$P_2 = P_0 + \rho g\ h_2 \qquad \dots (9)$$

$$P_3 = P_0 + \rho g\ h_3 \qquad \dots (10)$$

de las ecuaciones (1) y (8):

$$q_1 = \frac{\rho g}{R_{H1}} h_1 \qquad \dots (11)$$

de las ecuaciones (2), (8) y (9):

$$q_2 = \frac{\rho g}{R_{H2}} \left[h_1 - h_2 \right] \qquad \dots (12)$$

de las ecuaciones (3) y (9):

$$q_3 = \frac{\rho g}{R_{H3}} h_2 \qquad \dots (13)$$

de las ecuaciones (4) y (10):

$$q_4 = \frac{\rho g}{R_{H4}} h_3 \qquad \dots (14)$$

sustituyendo las ecuaciones (11) y (12) en la (5), se tiene:

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{1}{A_1} q_1(t) - \frac{\rho g}{A_1} \left[\frac{1}{R_{H1}} + \frac{1}{R_{H2}} \right] h_1 + \frac{\rho g}{A_1 R_{H2}} h_2 \qquad \dots (15)$$

sustituyendo las ecuaciones (12) y (13) en la (6) se tiene:

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{1}{A_2} q_2(t) + \frac{\rho g}{A_2 R_{H2}} h_1 - \frac{\rho g}{A_2} \left[\frac{1}{R_{H2}} + \frac{1}{R_{H3}} \right] h_2 \quad \ldots (16)$$

sustituyendo las ecuaciones (11), (13) y (14) en la (7):

$$\frac{dh_3}{dt} = \frac{\rho g}{A_3 R_{H1}} h_1 + \frac{\rho g}{A_3 R_{H3}} h_2 - \frac{\rho g}{A_3 R_{H4}} h_3 \quad \ldots (17)$$

de las ecuaciones (11), (13), (14), (15), (16), y (17) se tiene que el modelo en variables de estado es:

$$\begin{bmatrix} \frac{dh_1}{dt} \\ \frac{dh_2}{dt} \\ \frac{dh_3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\gamma}{A_1}\left[\frac{1}{R_{H1}} + \frac{1}{R_{H2}}\right] & \frac{\gamma}{A_1 R_{H2}} & 0 \\ \frac{\gamma}{A_2 R_{H2}} & -\frac{\gamma}{A_2}\left[\frac{1}{R_{H2}} + \frac{1}{R_{H3}}\right] & 0 \\ \frac{\gamma}{A_3 R_{H1}} & \frac{\gamma}{A_3 R_{H3}} & -\frac{\gamma}{A_3 R_{H4}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{R_{H1}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma}{R_{H3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\gamma}{R_{H4}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

Ejemplo V.5

Considérese el sistema térmico mostrado en la figura:

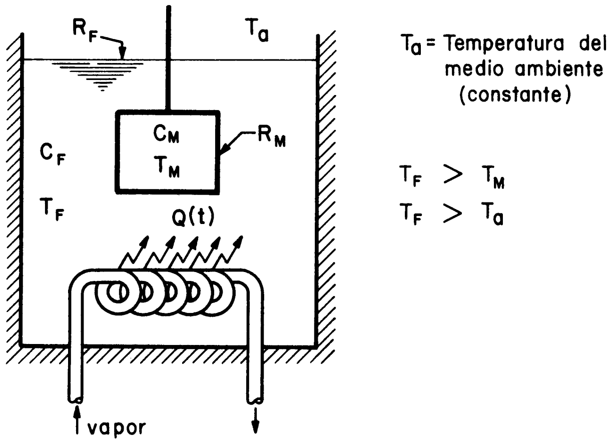


Figura V.11

Obtener un modelo matemático en variables de estado:

a) **A partir de su modelo matemático dado por la ecuación:**

$$\frac{d^2T_F}{dt^2} + \left[\frac{R_F(C_F + C_M) + R_MC_M}{C_FC_MR_FR_M}\right]\frac{dT_F}{dt} + \frac{1}{C_FC_MR_FR_M}T_F = \frac{1}{C_F}\dot{Q}(t) +$$

$$+ \frac{1}{C_FC_MR_M}Q(t) + \frac{1}{C_FC_MR_FR_M}Ta \qquad \ldots . \text{ (I)}$$

b) Planteando las ecuaciones a partir del sistema, y considerando:

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} T_M(t) \\ T_F(t) \end{bmatrix} ; \quad \underline{u}(t) = \begin{bmatrix} Q(t) \\ Ta \end{bmatrix} \quad y \quad \underline{y}(t) = \left[T_F(t)\right]$$

Solución:

a) Las siguientes asignaciones se hacen con base en la ecuación (I):

$$x_1(t) = T_F(t)$$

$$x_2(t) = \dot{x}_1(t) = \frac{dT_F}{dt}$$

de las expresiones anteriores se tiene que el vector de variables de estado es:

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

y los vectores de entradas y salidas del sistema son:

$$\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} Q(t) \\ T_a(t) \end{bmatrix} \qquad y \qquad \underline{y}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \end{bmatrix}$$

las ecuaciones de estado en este caso están dadas por:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{01} & C_{11} \\ C_{02} & C_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q(t) \\ T_a(t) \end{bmatrix}$$

y

$$\underline{y}(t) = x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

donde:

$$a_1 = \frac{R_F(C_F + C_M) + R_M C_M}{C_F C_M \; R_F R_M}$$

$$a_2 = \frac{1}{C_F C_M \; R_F R_M}$$

$$b_{00} = 0$$

$$b_{01} = \frac{1}{C_F}$$

$$b_{02} = \frac{1}{C_F C_M R_M}$$

$$b_{10} = 0$$

$$b_{11} = 0$$

$$b_{12} = \frac{1}{C_F C_M R_F R_M}$$

y los coeficientes c_{ij} para $i = 0, 1$ y $j = 0,1,2$ se calculan como:

$$c_{00} = b_{00}$$

$$c_{01} = b_{01} - a_1 c_{00}$$

$$c_{02} = b_{02} - a_1 c_{01} - a_2 c_{00}$$

$$c_{10} = b_{10}$$

$$c_{11} = b_{11} - a_1 c_{10}$$

$$c_{12} = b_{12} - a_1 c_{11} - a_2 c_{10}$$

por lo tanto:

$$c_{00} = 0$$

$$c_{01} = \frac{1}{C_F}$$

$$c_{02} = \frac{1}{C_F C_M R_M} - \frac{R_F(C_F + C_M) + R_M C_M}{C_F^2 C_M R_F R_M}$$

$$c_{10} = 0$$

$$c_{11} = 0$$

$$c_{12} = \frac{1}{C_F C_M R_F R_M}$$

y el modelo matemático en variables de estado es:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{C_F C_M R_F R_M} & -\frac{R_F(C_F + C_M) + R_M C_M}{C_F C_M R_F R_M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{1}{C_F} & 0 \\ -\frac{R_F + R_M}{C_F^2 \; (R_F R_M)} & \frac{1}{C_F C_M R_F R_M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q(t) \\ T_a(t) \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

b) En este caso se procede a plantear las leyes de los elementos y las de conjunto, esto es:

Leyes de Elementos:

$$R_M \; Q_{FM} = T_F - T_M \qquad \ldots (1)$$

$$R_F \; Q_{FA} = T_F - T_a \qquad \ldots (2)$$

Leyes de Conjunto:

$$C_M \frac{dT_M}{dt} = Q_{FM} \qquad \ldots (3)$$

$$C_F \frac{dT_F}{dt} = Q(t) - Q_{FM} - Q_{FA} \qquad \ldots (4)$$

Obtención de las ecuaciones de estado.
De las ecuaciones (1) y (2) se tiene:

$$Q_{FM} = \frac{T_F - T_M}{R_M} \qquad \ldots (5)$$

y

$$Q_{FA} = \frac{T_F - T_a}{R_F} \qquad \ldots (6)$$

la primera ecuación de estado se obtiene sustituyendo la ecuación (5) en la (3), esto es:

$$\frac{dT_M}{dt} = -\frac{1}{C_M R_M} T_M + \frac{1}{C_M R_M} T_F \qquad \ldots (7)$$

la segunda ecuación de estado se obtiene sustituyendo las ecuaciones (5) y (6) en la (4):

$$\frac{dT_F}{dt} = \frac{1}{C_F R_M} T_M - \frac{1}{C_F}\left[\frac{1}{R_M} + \frac{1}{R_F}\right] T_F + \frac{1}{C_F} Q(t) + \frac{1}{C_F R_F} T_a \qquad \ldots (8)$$

de las ecuaciones (7) y (8) se tiene que el modelo en variables de estado es:

$$\begin{bmatrix} \frac{dT_M}{dt} \\ \frac{dT_F}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_M R_M} & \frac{1}{C_M R_M} \\ \frac{1}{C_F R_M} & -\frac{1}{C_F}\left[\frac{1}{R_F} + \frac{1}{R_M}\right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_M \\ T_F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{C_F} & \frac{1}{C_F R_F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q(t) \\ T_a \end{bmatrix}$$

$$T_F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_M \\ T_F \end{bmatrix}$$

Ejemplo V.6

Considérese el sistema híbrido formado por una parte eléctrica, una mecánica traslacional y otra rotacional, como se muestra en la figura:

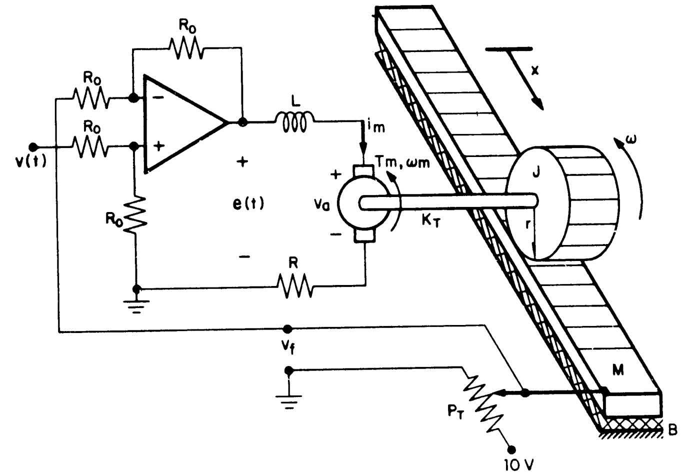


Figura V.12

Obtener un modelo matemático en variables de estado, empleando como vector de variables de estado:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} i_m \\ x \\ \omega \end{bmatrix}$$

Solución:

Leyes de Elementos:

Parte eléctrica:

$$V_R = Ri_R \qquad \ldots (1)$$

$$V_L = L\,\frac{di_L}{dt} \qquad \ldots (2)$$

$$V_f = 10\,x \qquad \ldots (3)$$

$$V_a = K_a\,\omega_m \qquad \ldots (4)$$

$$e(t) = V(t) - V_f \qquad \ldots (5)$$

Parte mecánica rotacional:

$$T_m = K_f\ i_m \qquad \ldots (6)$$

$$T_{K_T} = K_T\ (\theta_m - \theta) \qquad \ldots (7)$$

$$T_J = J\ \frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad \ldots (8)$$

Parte mecánica traslacional:

$$f_M = M\ \frac{d^2x}{dt^2} \qquad \ldots (9)$$

$$f_B = B\ \frac{dx}{dt} \qquad \ldots (10)$$

Relaciones auxiliares:

$$x = r\ \theta \qquad \ldots (11)$$

Leyes de Conjunto.

Parte eléctrica:

L V K :

$$e(t) = V_R + V_L + V_a \qquad \ldots (12)$$

L C K :

$$i_R = i_L = i_m \qquad \ldots (13)$$

Parte mecánica rotacional:

$$T_m = T_{K_T} \qquad \ldots (14)$$

$$T_{K_T} = T_J + rf_e \qquad \ldots (15)$$

Parte mecánica traslacional:

$$f_e = f_M + f_B \qquad \ldots (16)$$

Obtención del modelo matemático.

De las ecuaciones (1) y (13):

$$V_R = R\ i_m \qquad \ldots (17)$$

de las ecuaciones (2) y (13):

$$V_L = L \frac{di_m}{dt} \qquad \ldots (18)$$

sustituyendo la ecuación (3) en la (5):

$$e(t) = V(t) - 10\,x \qquad \ldots (19)$$

sustituyendo las ecuaciones (4), (17), (18) y (19) en la (12):

$$V(t) = R\,i_m + L \frac{di_m}{dt} + 10\,x + K_a\,\omega_m \qquad \ldots (20)$$

de las ecuaciones (6), (7) y (14) se tiene:

$$\theta_m = \frac{K_f}{K_T}\,i_m + \theta \qquad \ldots (21)$$

sustituyendo la ecuación (21) en la (20):

$$V(t) = \left[L + \frac{K_a K_f}{K_T} \right] \frac{di_m}{dt} + R\,i_m + 10\,x + K_a \frac{d\theta}{dt}$$

$$\ldots (22)$$

la ecuación (22) está en función de las variables de estado (i_m, x, ω), por lo que:

$$\frac{di_m}{dt} = - \frac{RK_T}{LK_T + K_aK_f}\,i_m - \frac{10\,K_T}{LK_T + K_aK_f}\,x - \frac{K_aK_T}{LK_T + K_aK_f}\,\omega + \frac{K_T}{LK_T + K_aK_f}\,V(t)$$

de las ecuaciones (6) y (14) se tiene:

$$T_{K_T} = K_f\,i_m \qquad \ldots (24)$$

sustituyendo las ecuaciones (8) y (24) en la (15):

$$K_f\,i_m = J \frac{d^2\theta}{dt^2} + rf_e \qquad \ldots (25)$$

de las ecuaciones (9), (10) y (16) se obtiene:

$$f_e = M \frac{d^2x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} \qquad \text{... (26)}$$

sustituyendo la ecuación (11) en la (26):

$$f_e = Mr \frac{d^2\theta}{dt^2} + Br \frac{d\theta}{dt} \qquad \text{... (27)}$$

sustituyendo la ecuación (27) en la (25):

$$K_f\ i_m = (J + Mr^2) \frac{d^2\theta}{dt^2} + Br^2 \frac{d\theta}{dt} \qquad \text{... (28)}$$

o bien:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{K_f}{J + Mr^2}\ i_m - \frac{Br^2}{J + Mr^2}\ \omega \qquad \text{... (29)}$$

derivando la ecuación (11) con respecto al tiempo, se obtiene:

$$\frac{dx}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} \qquad \text{... (30)}$$

o bien:

$$\frac{dx}{dt} = r\ \omega \qquad \text{... (31)}$$

a partir de las ecuaciones (23), (29) y (31) se tiene que el modelo matemático en variables de estado es:

$$\begin{bmatrix} \frac{di_m}{dt} \\ \frac{dx}{dt} \\ \frac{d\omega}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{RK_T}{LK_T + K_aK_f} & -\frac{10\ K_T}{LK_T + K_aK_f} & -\frac{K_a\ K_T}{LK_T + K_aK_f} \\ 0 & 0 & r \\ \frac{K_f}{J + Mr^2} & 0 & -\frac{Br^2}{J + Mr^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_m \\ x \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{K_T}{LK_T + K_aK_f} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} V(t)$$

para el sistema considerado, se tiene que la variable que se desea controlar es el desplazamiento de la mesa (representada por M), ésta puede ser considerada como la salida del sistema por lo que se obtiene la siguiente ecuación:

$$\underline{y} = x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_m \\ x \\ \omega \end{bmatrix}$$

Ejemplo V.7

Considérese el sistema híbrido formado por una parte hidráulica, una mecánica rotacional y una eléctrica, como se muestra en la figura:

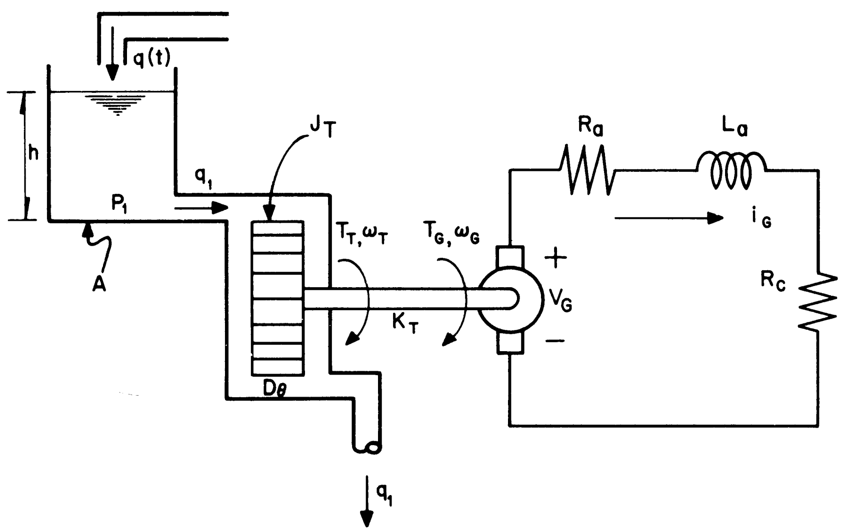


Figura V.13

Obtener un modelo matemático en variables de estado:

a) A partir de su modelo matemático dado por la ecuación:

$$\frac{d^3 i_G}{dt^3} + \left[\frac{J_T K_T (R_a + R_c) + D\theta(L_a K_T + K_b K_f)}{J_T(L_a K_T + K_b K_f)}\right]\frac{d^2 i_G}{dt^2} +$$

$$+\left[\frac{AD_\theta K_p K_q K_T (R_a + R_c) + \gamma(L_a K_T + K_b K_f)}{AJ_T K_q K_p (L_a K_T + K_b K_f)}\right]\frac{di_G}{dt} +$$

$$+\left[\frac{\gamma K_T (R_a + R_c)}{AJ_T K_p K_q (L_a K_T + K_b K_f)}\right] i_G = \left[\frac{\gamma K_b K_T}{AJ_T K_p (L_a K_T + K_b K_f)}\right] q(t)$$

$$\ldots \quad (I)$$

b) Planteando las ecuaciones del sistema y considerando:

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} P_1(t) \\ \omega(t) \\ i_G(t) \end{bmatrix} \; ; \quad \underline{u}(t) = \left[q(t)\right] \; ; \quad \underline{y}(t) = \left[i_G(t)\right]$$

Solución:

a) Con base en la ecuación (I) se hacen las siguientes asignaciones:

$$x_1(t) = i_G(t)$$

$$x_2(t) = \dot{x}_1(t) = \frac{di_G}{dt}$$

$$x_3(t) = \dot{x}_2(t) = \frac{d^2 i_G}{dt^2}$$

de las expresiones anteriores se tiene que el vector de variables de estado es:

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

y los vectores de entradas y salidas del sistema son:

$$\underline{u}(t) = [q(t)] \quad ; \quad \underline{y}(t) = [x_1(t)]$$

debido a que el modelo matemático del sistema descrito por la ecuación (I) no involucra derivadas con respecto al tiempo de la entrada, el modelo en variables de estado es de la forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix} q(t)$$

y

$$\underline{y}(t) = x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

donde:

$$a_1 = \frac{J_T K_T (R_a + R_c) + D_\theta (L_a K_T + K_b K_f)}{J_T (L_a K_T + K_b K_f)}$$

$$a_2 = \frac{A D_\theta K_p K_q K_T (R_a + R_c) + \gamma (L_a K_T + K_b K_f)}{A J_T K_p K_q (L_a K_T + K_b K_f)}$$

$$a_3 = \frac{\gamma K_T (R_a + R_c)}{A J_T K_p K_q (L_a K_T + K_b K_f)}$$

$$b = \frac{\gamma K_b K_T}{A J_T K_p (L_a K_T + K_b K_f)}$$

de esta manera, el modelo matemático en variables de estado está dado por:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\gamma K_T(R_a + R_c)}{AJ_TK_p(L_aK_T + K_bK_f)} & -\frac{AD\theta K_pK_qK_T(R_a + R_c) + \gamma(L_aK_T + K_bK_f)}{AJ_TK_pK_q(L_aK_T + K_bK_f)} & -\frac{J_TK_T(R_a + R_c) + D\theta(L_aK_T + K_bK_f)}{J_T(L_aK_T + K_bK_f)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\gamma K_bK_T}{AJ_TK_p(L_aK_T + K_bK_f)} \end{bmatrix} q(t)$$

b) En este caso se procede a plantear las leyes de los elementos y las leyes de conjunto, esto es:

Leyes de Elementos:

$$P_1 = P_0 + \gamma h \qquad \ldots (1)$$

$$T_{J_T} = J_T \frac{d^2\theta_T}{dt^2} \qquad \ldots (2)$$

$$T_{D_\theta} = D_\theta \frac{d\theta_T}{dt} \qquad \ldots (3)$$

$$T_{K_T} = K_T(\theta_T - \theta_G) \qquad \ldots (4)$$

$$V_{R_a} = R_a \, i_{R_a} \qquad \ldots (5)$$

$$V_{L_a} = L_a \frac{di_{L_a}}{dt} \qquad \ldots (6)$$

$$V_{R_c} = R_c \, i_{R_c} \qquad \ldots (7)$$

$$\omega_T = K_q \, q_1 \qquad \ldots (8)$$

$$P_1 = K_p \, T_T \qquad \ldots (9)$$

$$T_G = K_f \, i_G \qquad \ldots (10)$$

$$V_G = K_b \, \omega_G \qquad \ldots (11)$$

$$v = A\,h \qquad \ldots (12)$$

Leyes de Conjunto:

$$\frac{dv}{dt} = q(t) - q_1 \qquad \ldots (13)$$

$$T_T = T_{J_T} + T_{D_\theta} \qquad \ldots (14)$$

$$T_T = T_{K_T} \qquad \ldots (15)$$

$$T_{K_T} = T_G \qquad \ldots (16)$$

$$V_G = V_{R_a} + V_{L_a} + V_{R_c} \qquad \ldots (17)$$

$$i_G = i_{R_a} = i_{L_a} = i_{R_c} \qquad \ldots (18)$$

Obtención de las ecuaciones de estado.

De la ecuación (1):

$$h = \frac{P_1 - P_0}{\gamma} \qquad \ldots (19)$$

y de las ecuaciones (12) y (19) se obtiene:

$$v = \frac{A}{\gamma}(P_1 - P_0) \qquad \ldots (20)$$

por otra parte, de la ecuación (8):

$$q_1 = \frac{1}{K_q}\,\omega_T \qquad \ldots (21)$$

a partir de las ecuaciones (13), (20) y (21) se obtiene la primera ecuación de estado, esto es:

$$\frac{dP_1}{dt} = -\frac{\gamma}{AK_q}\,\omega_T + \frac{\gamma}{A}\,q(t) \qquad \ldots (22)$$

de las ecuaciones (2), (3), (9) y (14) se tiene:

$$J_T\,\frac{d^2\theta_T}{dt^2} + D_\theta\,\frac{d\theta_T}{dt} = \frac{1}{K_p}\,P_1 \qquad \ldots (23)$$

se observa de la ecuación (23) que θ_T no es variable de estado, sin embargo:

$$\frac{d\theta_T}{dt} = \omega_T \qquad \dots (24)$$

a partir de las ecuaciones (23) y (24) se obtiene la segunda ecuación de estado, esto es:

$$\frac{d\omega_T}{dt} = \frac{1}{J_T K_p} P_1 - \frac{D_\theta}{J_T} \omega_T \qquad \dots (25)$$

de las ecuaciones (5), (6), (7), (11), (17) y (18) se obtiene:

$$L_a \frac{di_G}{dt} + (R_a + R_c) i_G = K_b \omega_G \qquad \dots (26)$$

de la ecuación anterior se tiene que ω_G no es variable de estado, no obstante de las ecuaciones (4), (10) y (16):

$$\theta_G = \theta_T - \frac{K_f}{K_T} i_G \qquad \dots (27)$$

a partir de las ecuaciones (26) y (27) se obtiene la tercera ecuación de estado, esto es:

$$\frac{di_G}{dt} = \frac{K_b K_T}{L_a K_T + K_b K_f} \omega_T - \frac{(R_a + R_c) K_T}{L_a K_T + K_b K_f} i_G \qquad \dots (28)$$

de las ecuaciones (22), (25) y (28) se tiene que el modelo en variables de estado es:

$$\begin{bmatrix} \frac{dP_1}{dt} \\ \frac{d\omega_T}{dt} \\ \frac{di_G}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\gamma}{AK_q} & 0 \\ \frac{1}{J_T K_p} & -\frac{D_\theta}{J_T} & 0 \\ 0 & \frac{K_b K_T}{L_a K_T + K_b K_f} & \frac{(R_a + R_c) K_T}{L_a K_T + K_b K_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ \omega_T \\ i_G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{A} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} q(t)$$

$$i_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ \omega_T \\ i_G \end{bmatrix}$$

V.3 FORMAS CANÓNICAS DE LAS ECUACIONES DE ESTADO

La representación matemática de un sistema dinámico lineal, invariante con el tiempo y de parámetros concentrados en variables de estado, es en general de la forma:

$$\underline{\dot{x}}(t) = \underline{A}\,\underline{x}(t) + \underline{B}\,\underline{u}(t) \qquad \ldots (1)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C}\,\underline{x}(t) + \underline{D}\,\underline{u}(t) \qquad \ldots (2)$$

Sin embargo, esta representación del sistema no es única, por lo tanto, es posible obtener representaciones distintas para el mismo sistema. Esto se logra mediante cambios de base o por medio de transformaciones de similitud, esto es:

$$\underline{Z}(t) = \underline{T}\,\underline{x}(t) \qquad \ldots (3)$$

o bien:

$$\underline{x}(t) = \underline{T}^{-1}\,\underline{Z}(t) \qquad \ldots (4)$$

sustituyendo la ecuación (4) en las ecuaciones (1) y (2), se obtiene:

$$\underline{T}^{-1}\,\underline{\dot{Z}}(t) = \underline{A}\,\underline{T}^{-1}\,\underline{Z}(t) + \underline{B}\,\underline{u}(t) \qquad \ldots (5)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C}\,\underline{T}^{-1}\,\underline{Z}(t) + \underline{D}\,\underline{u}(t) \qquad \ldots (6)$$

premultiplicando la ecuación (5) por $\underline{T}$ se tiene:

$$\underline{\dot{Z}}(t) = \underline{T}\,\underline{A}\,\underline{T}^{-1}\,\underline{Z}(t) + \underline{T}\,\underline{B}\,\underline{u}(t) \qquad \ldots (7)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C}\,\underline{T}^{-1}\,\underline{Z}(t) + \underline{D}\,\underline{u}(t) \qquad \ldots (8)$$

o bien:

$$\underline{\dot{Z}}(t) = \underline{A}_1\,\underline{Z}(t) + \underline{B}_1\,\underline{u}(t) \qquad \ldots (9)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C}_1\,\underline{Z}(t) + \underline{D}_1\,\underline{u}(t) \qquad \ldots (10)$$

donde:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{A}_1 &= \underline{T}\,\underline{A}\,\underline{T}^{-1} \\ \underline{B}_1 &= \underline{T}\,\underline{B} \\ \underline{C}_1 &= \underline{C}\,\underline{T}^{-1} \\ \underline{D}_1 &= \underline{D} \end{aligned}}$$

en este caso las ecuaciones (1) y (2) contienen la misma información referente al sistema que las ecuaciones (9) y (10), y la única diferencia es el vector de variables de estado que se está empleando.

Por otra parte, en el estudio de los sistemas dinámicos existen representaciones estándar de las ecuaciones de estado a las que se denominan las formas canónicas. Estas facilitan el estudio de los sistemas dinámicos, sobre todo cuando se requiere realizar la simulación analógica de éstos. Las representaciones estándar o formas canónicas de interés para estudiar a los sistemas dinámicos son: la forma canónica de Jordan, la controlable y la observable.

OBTENCION DE LA FORMA CANONICA DE JORDAN

En términos generales la forma canónica de Jordan de las ecuaciones de estado está dada por:

$$\dot{\underline{z}}(t) = \underline{\Lambda}\, \underline{z}(t) + \underline{\Gamma}\, \underline{u}(t) \qquad \ldots (11)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C}_m\, \underline{z}(t) + \underline{D}_m\, \underline{u}(t) \qquad \ldots (12)$$

donde:

Λ: es una matriz diagonal y los elementos de la diagonal principal son los valores característicos de la matriz $\underline{A}$.

Γ: es un vector de dimensión n para el caso escalar, esto es, $\underline{u}(t)$ es un vector de 1 x 1 (una sola entrada), en este caso los elementos que forman al vector son unos y ceros.

$\underline{C}_m$ y $\underline{D}_m$: son matrices de coeficientes cuya estructura es idéntica a la forma que tengan las ecuaciones de estado originales.

Por otra parte, cuando la matriz $\underline{A}$ posee valores característicos de multiplicidad algebraica mayor a uno (valores característicos repetidos), la forma canónica de Jordan tiene la siguiente estructura:

$$\dot{\underline{Z}}(t) = \underline{J}\,\underline{Z}(t) + \underline{\Gamma}\;\underline{u}(t) \qquad \ldots (13)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C_m}\;\underline{Z}(t) + \underline{D_m}\;\underline{u}(t) \qquad \ldots (14)$$

donde:

$\underline{J}$: es una matriz de Jordan de n x n.

$\underline{\Gamma}$, $\underline{C_m}$, $\underline{D_m}$: se definen igual que en el caso anterior.

La obtención de las matrices para la nueva representación (forma canónica de Jordan), se obtiene a través de la siguiente transformación:

$$\underline{Z}'(t) = \underline{M}^{-1}\;\underline{x}(t) \qquad \ldots (15)$$

o bien:

$$\underline{x}(t) = \underline{M}\;\underline{Z}'(t) \qquad \ldots (16)$$

donde:

$\underline{M}$: es la matriz modal o matriz de vectores característicos.

La matriz modal tiene la forma:

$$\underline{M} = \left[\;\underline{W}_1\;\underline{W}_2\;\underline{W}_3\;.\;.\;.\;\underline{W}_n\right] \qquad \ldots (17)$$

donde:

$\underline{W}_i$: son los vectores característicos asociados a la matriz $\underline{A}$.

Los vectores característicos ($\underline{W}$i) se obtienen a partir de la matriz:

$$\text{Adj}\left[\lambda\underline{I} - \underline{A}\right] = \left[\underline{\omega}_1\;\underline{\omega}_2\;\underline{\omega}_3\;\cdots\;\underline{\omega}_n\right] \qquad \ldots (18)$$

de la ecuación anterior se tiene que el i-ésimo vector característico es:

$$\underline{W}i = \underline{\omega}i \Big|_{\lambda = \lambda i} \qquad \dots (19)$$

sustituyendo la ecuación (16) en la (1), se tiene:

$$\underline{M}\ \dot{\underline{Z}}'(t) = \underline{A}\,\underline{M}\,\underline{Z}'(t) + \underline{B}\,\underline{u}(t) \qquad \dots (20)$$

premultiplicando la ecuación (20) por $\underline{M}^{-1}$ se obtiene:

$$\dot{\underline{Z}}'(t) = \underline{M}^{-1}\,\underline{A}\,\underline{M}\ \underline{Z}'(t) + \underline{M}^{-1}\,\underline{B}\,\underline{u}(t) \qquad \dots (21)$$

considerando que $\underline{u}(t)$ es un vector unidimensional, se tiene que el producto $\underline{M}^{-1}\underline{B}$ es de la forma:

$$\underline{M}^{-1}\underline{B} = [v_1\ v_2\ v_3\ \dots\ v_n]^T \qquad \dots (22)$$

y el vector $\underline{\Gamma}$ tiene la forma:

$$\underline{\Gamma} = [\ \beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \dots\ \beta_n]^T \qquad \dots (23)$$

donde:

βi: puede ser uno o cero.

de esta manera se tiene:

$$\underline{M}^{-1}\underline{B} = \underline{V}\,\underline{\Gamma} \qquad \dots (24)$$

aplicando una segunda transformación:

$$\underline{Z}'(t) = \underline{V}\,\underline{Z}(t) \qquad \dots (25)$$

sustituyendo la ecuación (25) en la (21), se obtiene:

$$\underline{V}\ \dot{\underline{Z}}(t) = \underline{M}^{-1}\ \underline{A}\,\underline{M}\ \underline{V}\,\underline{Z}(t) + \underline{M}^{-1}\,\underline{B}\,\underline{u}(t) \qquad \dots (26)$$

premultiplicando la ecuación (26) por $\underline{V}^{-1}$ se tiene:

$$\dot{\underline{Z}}(t) = V^{-1}\,\underline{M}^{-1}\,\underline{A}\,\underline{M}\,\underline{V}\,\underline{Z}(t) + \underline{V}^{-1}\underline{M}^{-1}\underline{B}\,\underline{u}(t) \qquad \ldots (27)$$

donde:

$\underline{V}$: es una matriz diagonal.

o bien:

$$\underline{V} = \text{diag}\left[v_1\ v_2\ v_3\ \ldots\ v_n\right]$$

y sustituyendo la ecuación (16) en la (2), se obtiene:

$$\underline{y}(t) = \underline{C}\,\underline{M}\,\underline{Z}'(t) + \underline{D}\,\underline{u}(t) \qquad \ldots (28)$$

y sustituyendo la ecuación (25) en la (28):

$$\underline{y}(t) = \underline{C}\,\underline{M}\,\underline{V}\,\underline{Z}(t) + \underline{D}\underline{u}(t) \qquad \ldots (29)$$

por lo tanto, de las ecuaciones (27) y (29), se obtiene:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\Lambda} &= \underline{V}^{-1}\,\underline{M}^{-1}\,\underline{A}\,\underline{M}\,\underline{V} \\ \underline{\Gamma} &= \underline{V}^{-1}\,\underline{M}^{-1}\,\underline{B} \\ \underline{C_m} &= \underline{C}\,\underline{M}\,\underline{V} \\ \underline{D_m} &= \underline{D} \end{aligned}}$$

FORMA CANONICA CONTROLABLE

En general la forma canónica controlable de las ecuaciones de estado es:

$$\dot{\underline{\omega}}(t) = \underline{\tilde{A}}\,\underline{\omega}(t) + \underline{\tilde{B}}\,\underline{u}(t) \qquad \ldots (30)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{\tilde{C}}\,\underline{\omega}(t) + \underline{\tilde{D}}\,\underline{u}(t) \qquad \ldots (31)$$

donde:

$\underset{\sim}{\underline{A}}$: es una matriz de coeficientes, en la cual los elementos de los primeros $n-1$ renglones son unos y ceros y los elementos del último renglón serán los negativos de los coeficientes del polinomio característico:

$$f(\lambda) = |\lambda \underline{I} - \underline{A}| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + $$
$$+ a_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + a_1 \lambda + a_0$$

$\underset{\sim}{\underline{B}}$: es un vector de dimensión n para el caso escalar, esto es, $\underline{u}(t)$ es un vector de 1×1 (una sola entrada), en este caso los elementos de las $n-1$ primeros renglones son ceros y el elemento del n-ésimo renglón será uno.

$\underset{\sim}{\underline{C}}$ y $\underset{\sim}{\underline{D}}$: son matrices de coeficientes, cuya estructura depende de la forma que tengan las ecuaciones de estado originales.

Las matrices para la nueva representación (forma canónica controlable) se obtienen al aplicar el algoritmo propuesto por Silverman.* Esto es:

1. Obtener la secuencia de vectores $\underline{q}_i$:

$$\underline{q}_{k+1} = \underline{A}\,\underline{q}_k \qquad \ldots (32)$$

para:

$$k = 0, 1, 2, \ldots n-1$$

donde:

$$\underline{q}_0 = \underline{B} \qquad \ldots (33)$$

2. Formar la matriz $\underline{Q}$:

$$\underline{Q} = [\underline{q}_0 \; \underline{q}_1 \; \underline{q}_2 \; \cdots \; \underline{q}_{n-1}] \qquad \ldots (34)$$

* Silverman, L.M. "Transformation of time-variable system to canonical (Phase-variable) form". IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-11, pp. 300-303, april 1966.

3. Calcular el vector $\underline{a}$:

$$\underline{a} = \underline{Q}^{-1} \underline{q}_n \qquad \ldots (35)$$

y el vector $\underline{a}$, se obtiene como:

$$\underline{a} = [a_0 \; a_1 \; a_2 \; \ldots \; a_{n-1}]^T \qquad \ldots (36)$$

4. Formar posteriormente la matriz $\hat{\underline{Q}}^{-1}$ como:

$$\hat{\underline{Q}}^{-1} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & \ldots & -a_{n-1} & 1 \\ -a_2 & -a_3 & -a_4 & \ldots & 1 & 0 \\ -a_3 & -a_4 & -a_5 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_{n-1} & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \ldots (37)$$

5. Con base en las matrices $\underline{Q}$ y $\hat{\underline{Q}}^{-1}$, obtener ahora la matriz de transformación inversa, que estará dada por:

$$\underline{T}^{-1} = \underline{Q}\, \hat{\underline{Q}}^{-1} \qquad \ldots (38)$$

6. Finalmente, aplicar la siguiente transformación:

$$\omega(t) = \underline{T}x(t) \qquad \ldots (39)$$

o bien:

$$\underline{x}(t) = \underline{T}^{-1} \underline{\omega}(t) \qquad \ldots (40)$$

sustituyendo la ecuación (40) en la (1), se obtiene:

$$\underline{T}^{-1} \dot{\underline{\omega}}(t) = \underline{A}\, \underline{T}^{-1} \omega(t) + \underline{B}\, \underline{u}(t) \qquad \ldots (41)$$

premultiplicando la ecuación (41) por $\underline{T}$, se tiene:

$$\dot{\underline{\omega}}(t) = \underline{T}\, \underline{A}\, \underline{T}^{-1} \underline{\omega}(t) + \underline{T}\, \underline{B}\, \underline{u}(t) \qquad \ldots (42)$$

y sustituyendo la ecuación (40) en la (2):

$$\underline{y}(t) = \underline{C}\ \underline{T}^{-1}\ \omega(t) + \underline{D}\ u(t) \qquad \dots (43)$$

por lo tanto, de las ecuaciones (42) y (43), se obtiene:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\tilde{A}} &= \underline{T}\ \underline{A}\ \underline{T}^{-1} \\ \underline{\tilde{B}} &= \underline{T}\ \underline{B} \\ \underline{\tilde{C}} &= \underline{C}\ \underline{T}^{-1} \\ \underline{\tilde{D}} &= \underline{D} \end{aligned}}$$

En este caso, el algoritmo descrito se puede aplicar indistintamente si la matriz $\underline{A}$ posee valores característicos diferentes o múltiples.

FORMA CANONICA OBSERVABLE

En general la forma canónica observable de las ecuaciones de estado está dada por:

$$\dot{\underline{m}}(t) = \underline{\hat{A}}\ \underline{m}(t) + \underline{\hat{B}}\ u(t) \qquad \dots (44)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{\hat{C}}\ \underline{m}(t) + \underline{\hat{D}}\ \underline{u}(t) \qquad \dots (45)$$

donde:

$\underline{\hat{A}}$: es una matriz de coeficientes, en la cual los elementos de las n - 1 primeras columnas son unos y ceros y los elementos de la última columna serán los negativos de los coeficientes del polinomio característico:

$$f(\lambda) = |\lambda\,\underline{I} - \underline{A}| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

$\hat{\underline{B}}$: es un vector de dimensión n para el caso escalar, esto es, $\underline{u}(t)$ es un vector de 1 x 1 (una sola entrada), en este caso el elemento del primer renglón será un uno y los elementos del resto de los renglones son ceros.

$\hat{\underline{C}}$ y $\hat{\underline{D}}$: son matrices de coeficientes, cuya estructura depende de la forma que tengan las ecuaciones de estado originales.

Para obtener la forma canónica de las ecuaciones de estado se aplica la siguiente transformación:

$$\underline{m}(t) = \underline{H}\ \underline{x}(t) \qquad \ldots (46)$$

o bien:

$$\underline{x}(t) = \underline{H}^{-1}\ \underline{m}(t) \qquad \ldots (47)$$

donde la matriz inversa de transformación es:

$$\underline{H}^{-1} = \left[\underline{B}\ \underline{A}\,\underline{B}\ \ \underline{A}^2\underline{B}\ \ldots\ \underline{A}^{n-1}\underline{B}\right] \qquad \ldots (48)$$

sustituyendo la ecuación (47) en la (1), se obtiene:

$$\underline{H}^{-1}\ \dot{\underline{m}}(t) = \underline{A}\ \underline{H}^{-1}\ \underline{m}(t) + \underline{B}\ \underline{u}(t) \qquad \ldots (49)$$

premultiplicando la ecuación (49) por $\underline{H}$ se tiene:

$$\dot{\underline{m}}(t) = \underline{H}\ \underline{A}\ \underline{H}^{-1}\ \underline{m}(t) + \underline{H}\ \underline{B}\ \underline{u}(t) \qquad \ldots (50)$$

y sustituyendo la ecuación (49) en la (2), se obtiene:

$$\underline{y}(t) = \underline{C}\ \underline{H}^{-1}\underline{m}(t) + \underline{D}\ u(t) \qquad \ldots (51)$$

por lo tanto, de las ecuaciones (50) y (51):

$$\boxed{\begin{array}{l} \hat{\underline{A}} = \underline{H}\ \underline{A}\ \underline{H}^{-1} \\ \hat{\underline{B}} = \underline{H}\ \underline{B} \\ \hat{\underline{C}} = \underline{C}\ \underline{H}^{-1} \\ \hat{\underline{D}} = \underline{D} \end{array}}$$

En este caso, de igual manera que la forma canónica controlable, se aplica la misma transformación cuando la matriz $\underline{A}$ posee valores característicos diferentes y múltiples.

Ejemplo V.8

Obtener las formas canónicas de Jordan, controlable y observable para el sistema cuya representación en variables de estado es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -3 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Solución:

a) Obtención de la forma canónica de Jordan:

Primeramente, se procede a obtener la matriz modal de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \lambda \underline{I} - \underline{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2 & -1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \lambda + 3 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & \lambda + 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda \underline{I} - \underline{A} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \lambda + 2 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & \lambda + 3 & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & \lambda + 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Adj}\ [\lambda \underline{I} - \underline{A}] = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 7\lambda + \frac{23}{2} & \lambda + 5 & \lambda + \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2}\lambda + \frac{3}{2} & \lambda^2 + 6\lambda^2 + 9 & \frac{1}{2}\lambda + \frac{3}{2} \\ -\lambda - \frac{5}{2} & \lambda + 1 & \lambda^2 + 5\lambda + \frac{11}{2} \end{bmatrix}$$

$$|\ \lambda \underline{I} - A\ | = (\lambda + 2)(\lambda + 3)(\lambda + 4) = 0$$

por lo tanto:

$$\lambda_1 = -2$$

$$\lambda_2 = -3$$

$$\lambda_3 = -4$$

los vectores característicos son en este caso:

$$\underline{W}_1 = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 7\lambda + \frac{23}{2} \\ \frac{1}{2}\lambda + \frac{3}{2} \\ -\lambda - \frac{5}{2} \end{bmatrix}_{\lambda = -2} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \underline{W}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{W}_2 = \begin{bmatrix} \lambda + 5 \\ \lambda^2 + 6\lambda + 9 \\ \lambda + 1 \end{bmatrix}_{\lambda = -3} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \underline{W}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{W}_3 = \begin{bmatrix} \lambda + \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2}\lambda + \frac{3}{2} \\ \lambda^2 + 5\lambda + \frac{11}{2} \end{bmatrix}_{\lambda = -4} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} \qquad \underline{W}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

así, la matriz modal es:

$$\underline{M} = [\underline{W}_1\ \underline{W}_2\ \ \underline{W}_3]$$

o bien:

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

y la matriz modal inversa es:

$$\underline{M}^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & 8 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

por lo tanto, los productos $\underline{M}^{-1}\ \underline{A}\ \underline{M}$ y $\underline{M}^{-1}\underline{B}$ son entonces:

$$\underline{M}^{-1}\ \underline{A}\ \underline{M} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & 8 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -3 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

o bien:

$$\underline{M}^{-1}\ \underline{A}\ \underline{M} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

y:

$$\underline{M}^{-1}\ \underline{B} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & 8 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

o bien:

$$\underline{M}^{-1}\ \underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -4 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

y la matriz de transformación $\underline{V}$ es por lo tanto:

$$\underline{V} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

y la matriz de transformación inversa es:

$$\underline{V}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

finalmente las matrices de la forma canónica de Jordan para el sistema considerado son:

$$\underline{\Lambda} = \underline{V}^{-1}\,\underline{M}^{-1}\underline{A}\,\underline{M}\,\underline{V} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\Lambda} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\Gamma} = \underline{V}^{-1}\;\underline{M}^{-1}\,\underline{B} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -4 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}_m = \underline{C}\,\underline{M}\,\underline{V} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}_m = \begin{bmatrix} -3 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

por lo tanto, la forma canónica de Jordan es:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

b) **Obtención de la forma canónica controlable.**
Primeramente se procede a aplicar el algoritmo propuesto por Silverman.

1. Obtención de vectores q_i, $i = 0, 1, 2, 3$:

$$\underline{q}_0 = \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{q}_1 = \underline{A}\,\underline{q}_0 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -3 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{q}_2 = \underline{A}\,\underline{q}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -3 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 14 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\underline{q}_3 = \underline{A}\,\underline{q}_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -3 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 \\ 14 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ -44 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. La matriz $\underline{Q}$ se forma de la siguiente manera:

$$\underline{Q} = \left[\, \underline{q}_0\ \underline{q}_1\ \underline{q}_2 \,\right]$$

esto es:

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -10 \\ 2 & -5 & 14 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

por lo tanto, la matriz $\underline{Q}^{-1}$ es:

$$\underline{Q}^{-1} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 12 & 24 & -36 \\ 2 & 16 & -34 \\ -1 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$

3. Cálculo del vector a:

$$\underline{a} = \underline{Q}^{-1}\,\underline{q}_3$$

$$\underline{a} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 12 & 24 & -36 \\ 2 & 16 & -34 \\ -1 & 4 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ -44 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ -26 \\ -9 \end{bmatrix}$$

4. La matriz $\underline{Q}^{-1}$ se obtiene de la siguiente manera:

$$\hat{\underline{Q}}^{-1} = \begin{bmatrix} 26 & 9 & 1 \\ 9 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. La matriz inversa de transformación ($\underline{T}^{-1}$) es:

$$\underline{T}^{-1} = \underline{Q}\,\hat{\underline{Q}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -10 \\ 2 & -5 & 14 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 26 & 9 & 1 \\ 9 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 25 & 10 & 1 \\ 21 & 13 & 2 \\ 5 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

por lo tanto, la matriz de transformación ($\underline{T}$) es:

$$\underline{T} = -\frac{1}{24} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 \\ -11 & 20 & -29 \\ 61 & -100 & 115 \end{bmatrix}$$

a partir de las matrices $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{T}$ y $\underline{T}^{-1}$, se tiene que las matrices del sistema transformado son:

$$\tilde{\underline{A}} = \underline{T}\,\underline{A}\,\underline{T}^{-1} = -\frac{1}{24} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 \\ -11 & 20 & -29 \\ 61 & -100 & 115 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -3 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 10 & 1 \\ 21 & 13 & 2 \\ 5 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\tilde{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\tilde{B}} = \underline{T}\,\underline{B} = -\frac{1}{24}\begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 \\ -11 & 20 & -29 \\ 61 & -100 & 115 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\tilde{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\tilde{C}} = \underline{C}\,\underline{T}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 25 & 10 & 1 \\ 21 & 13 & 2 \\ 5 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\tilde{C}} = \begin{bmatrix} 22 & 22 & 4 \end{bmatrix}$$

de esta manera, la forma canónica controlable para el sistema considerado es:

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} 22 & 22 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}$$

c) **Obtención de la forma canónica observable.**

Se procede a obtener la matriz de transformación $\underline{H}$, que en este caso es:

$$\underline{H} = \left[\underline{B} \quad \underline{A}\,\underline{B} \quad \underline{A}^2\underline{B}\right]$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}\,\underline{B} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -3 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^2\underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -4 & -\frac{11}{2} \\ -3 & 10 & -3 \\ \frac{13}{2} & -8 & \frac{31}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 14 \\ 6 \end{bmatrix}$$

por lo tanto, la matriz de transformación ($\underline{H}$) es:

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -10 \\ 2 & -5 & 14 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

y la matriz inversa de transformación $\underline{H}^{-1}$ es:

$$\underline{H}^{-1} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 12 & 24 & -36 \\ 2 & 16 & -34 \\ -1 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$

las matrices del sistema transformado son:

$$\hat{\underline{A}} = \underline{H}^{-1}\,\underline{A}\,\underline{H} = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 12 & 24 & -36 \\ 2 & 16 & -34 \\ -1 & 4 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -3 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -10 \\ 2 & -5 & 14 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -24 \\ 1 & 0 & -26 \\ 0 & 1 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\underline{B}} = \underline{H}^{-1}\,\underline{B} = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 12 & 24 & -36 \\ 2 & 16 & -34 \\ -1 & 4 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\underline{C}} = \underline{C}\,\underline{H} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -10 \\ 2 & -5 & 14 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\underline{C}} = \begin{bmatrix} 4 & -14 & 44 \end{bmatrix}$$

de esta manera la forma canónica observable para el sistema considerado es:

$$\begin{bmatrix} \dot{m}_1 \\ \dot{m}_2 \\ \dot{m}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -24 \\ 1 & 0 & -26 \\ 0 & 1 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} 4 & -14 & 44 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

V.4 Solución de las Ecuaciones de Estado

En general, un sistema dinámico lineal, continuo, invariante con el tiempo y de parámetros concentrados se puede representar matemáticamente de la forma:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\ \underline{x}(t) + \underline{B}\ \underline{u}(t) \qquad \ldots (1)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C}\ \underline{x}(t) + \underline{D}\ \underline{u}(t) \qquad \ldots (2)$$

El problema inicial consiste en derivar una expresión general que permita obtener, a partir de la ecuación (1), el estado del sistema $\underline{x}(t)$. Como se mencionó al principio del presente capítulo; el estado del sistema $\underline{x}(t)$ depende del estado inicial de éste $\underline{x}(0)$ y de la o las entradas aplicadas al sistema, por lo tanto, es posible establecer la siguiente relación algebraica:

$$\underline{x}(t)_{TOT} = \underline{x}(t)_{LIB} + \underline{x}(t)_{FOR} \qquad \ldots (3)$$

Primeramente se procede a obtener el estado del sistema, debido únicamente al estado inicial de éste, es decir, se considerará $\underline{u}(t)$ igual a cero, así la ecuación (1) se escribe como:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\ \underline{x}(t) \qquad \ldots (4)$$

con base en las soluciones fundamentales de ecuaciones diferenciales, se puede establecer el estado del sistema que únicamente depende del estado inicial de éste como:

$$\underline{x}(t)_{LIB} = \underline{S}(t)\ \underline{x}(0) \qquad \ldots (5)$$

donde $\underline{S}(t)$, la matriz solución se puede expresar como una serie infinita de la siguiente forma:

$$\underline{S}(t) = \underline{I} + \underline{C}_1 t + \underline{C}_2 t^2 + \underline{C}_3 t^3 + \ldots + \underline{C}_n t^n + \ldots \qquad \ldots (6)$$

y $\underline{x}(0)$ representa el estado inicial del sistema en el tiempo cero.

De las ecuaciones (5) y (6) se obtiene:

$$\underline{x}(t)_{LIB} = (\underline{I} + \underline{C}_1 t + \underline{C}_2 t^2 + \underline{C}_3 t^3 + \ldots + \underline{C}_n t^n + \ldots\ )\ \underline{x}(0) \qquad \ldots (7)$$

si $\underline{x}(t)_{LIB}$ es la solución de la ecuación (4), entonces $\underline{x}(t)_{LIB}$ satisface a esta última; derivando a la ecuación (7) con respecto al tiempo:

$$\dot{\underline{x}}(t)_{LIB} = (\underline{C}_1 + 2\underline{C}_2 t + 3\underline{C}_3 t^2 + \ldots + n\underline{C}_n t^{n-1} + \ldots\ )\ \underline{x}(0) \qquad \ldots (8)$$

por otra parte, se tiene:

$$\dot{\underline{x}}(t)_{LIB} = \underline{A}\ \underline{x}(t)_{LIB} \qquad \ldots (9)$$

y sustituyendo la ecuación (7) en la (9):

$$\dot{\underline{x}}(t)_{LIB} = \underline{A}(\underline{I} + \underline{C}_1 t + \underline{C}_2 t^2 + \underline{C}_3 t^3 + \ldots + \underline{C}_n t^n + \ldots\ )\ \underline{x}(0) \qquad \ldots (10)$$

o bien:

$$\dot{\underline{x}}(t)_{LIB} = (\underline{A} + \underline{A}\underline{C}_1 t + \underline{A}\underline{C}_2 t^2 + \underline{A}\underline{C}_3 t^3 + \ldots + \underline{A}\underline{C}_n t^n + \ldots\ )\ \underline{x}(0) \qquad \ldots (11)$$

comparando las ecuaciones (8) y (11) se observa que éstas son idénticas en su primer miembro, por lo tanto, se tiene:

$$(\underline{C}_1 + 2C_2 t + 3C_3 t^2 + \ldots + n\underline{C}_n t^{n-1} + \ldots\ )\ \underline{x}(0) =$$
$$= (\underline{A} + \underline{A}C_1 t + AC_2 t^2 + AC_3 t^3 + \ldots + AC_n t^n + \ldots\ )\ \underline{x}(0) \qquad \ldots (12)$$

de esta ecuación, es entonces posible por la igualación de los términos de igual potencia de t obtener las matrices $\underline{C}i$, esto es:

$$\left.\begin{aligned} \underline{C}_1 &= \underline{A} \\ \underline{C}_2 &= \frac{1}{2}\underline{A}\,\underline{C}_1 = \frac{1}{2}\underline{A}^2 \\ \underline{C}_3 &= \frac{1}{3}\underline{A}\,\underline{C}_2 = \frac{1}{2\cdot 3}\underline{A}^3 \\ \underline{C}_4 &= \frac{1}{4}\underline{A}\,\underline{C}_3 = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\underline{A}^4 \\ &\vdots \\ \underline{C}_n &= \frac{1}{n}\underline{A}\,\underline{C}_{n-1} = \frac{1}{n!}\underline{A}^n \end{aligned}\right| \qquad \ldots (13)$$

por lo tanto, la matriz solución $\underline{S}(t)$ es:

$$\underline{S}(t) = \underline{I} + \underline{A}t + \frac{1}{2!}\underline{A}^2 t^2 + \frac{1}{3!}\underline{A}^3 t^3 + \ldots + \frac{1}{n!}\underline{A}^n t^n + \ldots \qquad \ldots (14)$$

la ecuación (14) es un caso especial de la serie de Peano - Baker, y cuando se toma un número infinito de términos, ésta converge a una función matricial que se conoce como la matriz exponencial o matriz de transición, esto es:

$$\underline{S}(t) = e^{\underline{A}t} \qquad \ldots (15)$$

de esta manera, la solución de la ecuación matricial (4) es:

$$x(t)_{LIB} = e^{\underline{A}t}\ \underline{x}(0) \qquad \ldots (16)$$

Esta última ecuación se obtuvo considerando que el estado inicial del sistema fue evaluado en el tiempo cero, sin embargo, es posible obtener la solución cuando el estado inicial del sistema se evalúa en el tiempo τ, esto es:

$$\underline{x}(t + \tau) = \underline{S}(t)\ \underline{x}(\tau) \qquad \ldots (17)$$

con base en la ecuación (5), $\underline{x}(\tau)$ se puede expresar como:

$$\underline{x}(\tau) = \underline{S}(\tau)\ \underline{x}(0) \qquad \ldots (18)$$

por lo tanto, de las ecuaciones (17) y (18) se obtiene:

$$\underline{x}(t + \tau) = \underline{S}(t)\ \underline{S}(\tau)\ \underline{x}(0) \qquad \ldots (19)$$

por otra parte, de la ecuación (5) es posible obtener $\underline{x}(t + \tau)$ como:

$$\underline{x}(t + \tau) = \underline{S}(t + \tau)\ \underline{x}(0) \qquad \ldots (20)$$

puesto que las ecuaciones (19) y (20) son iguales, se puede establecer:

$$\underline{S}(t + \tau) = \underline{S}(t)\ \underline{S}(\tau) \qquad \ldots (21)$$

nótese que haciendo $\tau = -t$ en la ecuación (21) se obtiene:

$$\underline{S}(t - t) = \underline{I} = \underline{S}(t)\ \underline{S}(-t) \qquad \ldots (22)$$

o bien:

$$\underline{S}^{-1}(t) = S(-t) \qquad \ldots (23)$$

por lo que:

$$\underline{S}(t + \tau) = \underline{S}(\tau + t) \qquad \ldots (24)$$

Considérese ahora la ecuación diferencial matricial cuando $\underline{u}(t)$ es diferente de cero, esto es:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\ \underline{x}(t) + \underline{B}\ \underline{u}(t) \qquad \ldots (25)$$

Ahora se procede a determinar el estado del sistema debido únicamente a la o las entradas aplicadas al sistema, es decir, $\underline{x}(t)_{FOR}$. Debido a que no se conoce la forma que tiene el vector de entradas $\underline{u}(t)$, se puede proponer una solución de la forma:

$$\underline{x}(t)_{FOR} = \underline{S}(t)\ \underline{P}(t) \qquad \ldots (26)$$

con la restricción de que $\underline{P}(t)$ tiene la siguiente propiedad:

$$\underline{P}(t) = \underline{0} \quad \text{para} \quad t = 0 \qquad \ldots (27)$$

si $\underline{x}(t)_{FOR}$ es la solución de la ecuación (25), entonces $\underline{x}(t)_{FOR}$ debe satisfacer a esta última; derivando la ecuación (26) con respecto al tiempo, se obtiene:

$$\dot{\underline{x}}(t)_{FOR} = \frac{d}{dt}\,\underline{S}(t)\cdot\underline{P}(t) + \underline{S}(t)\,\frac{d}{dt}\,\underline{P}(t) \qquad \ldots (28)$$

sin embargo, de la ecuación (4) se tiene:

$$\frac{d}{dt}\,\underline{S}(t) = \underline{A}\ \underline{S}(t) \qquad \ldots (29)$$

de esta manera, sustituyendo la ecuación (29) en la (28):

$$\dot{\underline{x}}(t)_{FOR} = \underline{A}\ \underline{S}(t)\ \underline{P}(t) + \underline{S}(t)\,\frac{d}{dt}\,\underline{P}(t) \qquad \ldots (30)$$

puesto que $\underline{x}(t)_{FOR}$ se propone como solución a la ecuación (25), ésta debe satisfacer a la ecuación (30), esto es:

$$\dot{\underline{x}}(t)_{FOR} = \underline{A}\ \underline{x}(t)_{FOR} + \underline{B}\ u(t) \qquad \ldots (31)$$

y sustituyendo $x(t)_{FOR}$ (ecuación (26)) en la ecuación (31) se tiene:

$$\dot{\underline{x}}(t)_{FOR} = \underline{A}\ \underline{S}(t)\ \underline{P}(t) + \underline{B}\ \underline{u}(t) \qquad \ldots (32)$$

a partir de las ecuaciones (30) y (32) se obtiene la siguiente igualdad:

$$S(t)\ \frac{d}{dt}\ \underline{P}(t) = \underline{B}\ \underline{u}(t) \qquad \ldots (33)$$

o bien:

$$\frac{d}{dt}\ \underline{P}(t) = \underline{S}^{-1}(t)\ \underline{B}\ u(t) \qquad \ldots (34)$$

integrando la ecuación (34) en el intervalo (0, t) se tiene:

$$\underline{P}(t) = \int_0^t \underline{S}^{-1}(\tau)\ \underline{B}\ \underline{u}(\tau)\ d\tau \qquad \ldots (35)$$

recordando, de la ecuación (23):

$$\underline{S}^{-1}(t) = \underline{S}(-t) \qquad \ldots (36)$$

entonces $\underline{P}(t)$ se puede escribir como:

$$\underline{P}(t) = \int_0^t \underline{S}(-\tau)\ \underline{B}\ u(\tau)\ d\tau \qquad \ldots (37)$$

por lo tanto, $\underline{x}(t)_{FOR}$ es:

$$\underline{x}(t)_{FOR} = \underline{S}(t) \int_0^t S(-\tau)\ \underline{B}\ u(\tau)\ d\tau \qquad \ldots (38)$$

o bien:

$$\underline{x}(t)_{FOR} = \int_0^t \underline{S}(t - \tau)\underline{B}\ \underline{u}(\tau)\ d\tau \qquad \ldots (39)$$

por lo que de las ecuaciones (15) y (39):

$$\boxed{\underline{x}(t)_{FOR} = \int_0^t e^{\underline{A}(t-\tau)}\underline{B}\ \underline{u}(\tau)\ d\tau} \qquad \ldots (40)$$

finalmente, de las ecuaciones (16) y (40) se obtiene que el estado del sistema, debido a la entrada aplicada a éste y su estado inicial es:

$$\boxed{\underline{x}(t)_{TOT} = e^{\underline{A}\,t}\,\underline{x}(0) + \int_0^t e^{\underline{A}(t-\tau)}\ \underline{B}\ \underline{u}(\tau)\ d\tau} \qquad \ldots (41)$$

La ecuación (41) se conoce con el nombre de Ley de Variación de Parámetros.

Una vez que se ha derivado una expresión general para determinar el estado del sistema, es posible obtener la salida que producirá el sistema, esto es, la salida del sistema está dada por la ecuación (2) y ésta depende del estado del sistema $\underline{x}(t)$, por lo tanto, de las ecuaciones (2) y (41) se obtiene:

$$\underline{y}(t) = \underline{C}e^{\underline{A}t}\ \underline{x}(0) + \underline{C}\int_0^t e^{\underline{A}(t-\tau)}\ \underline{B}\ u(\tau)\ d\tau + \underline{D}\ u(t) \qquad \ldots (42)$$

o bien:

$$\boxed{\underline{y}(t) = \underline{C}\ e^{\underline{A}t}\,\underline{x}(0) + \int_0^t \underline{C}\ e^{\underline{A}(t-\tau)}\ \underline{B}\ u(\tau)\ d\tau + \underline{D}\ \underline{u}(t)} \qquad \ldots (43)$$

Otra técnica para obtener la solución de las ecuaciones de estado, es mediante la transformada de Laplace, es decir, en el dominio de la frecuencia. Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación (1), se obtiene:

$$L\left\{\dot{\underline{x}}(t)\right\} = L\left\{\underline{A}\ \underline{x}(t)\right\} + L\left\{\underline{B}\ \underline{u}(t)\right\} \qquad \ldots (44)$$

desarrollando término a término de la ecuación (43):

$$L\left\{\dot{\underline{x}}(t)\right\} = S\underline{X}(S) - \underline{X}(0) \qquad \dots (45)$$

$$L\left\{\underline{A}\ \underline{x}(t)\right\} = \underline{A}\ \underline{X}(S) \qquad \dots (46)$$

$$L\left\{\underline{B}\ \underline{u}(t)\right\} = \underline{B}\ \underline{U}(S) \qquad \dots (47)$$

sustituyendo las expresiones (45), (46) y (47) en la ecuación (44) se obtiene:

$$S\underline{X}(S) - \underline{X}(0) = \underline{AX}(S) + \underline{B}\ \underline{U}(S) \qquad \dots (48)$$

reordenando la ecuación (48):

$$S\underline{X}(S) - \underline{AX}(S) = \underline{X}(0) + \underline{B}\ \underline{U}(S) \qquad \dots (49)$$

o bien:

$$\left[S\underline{I} - \underline{A}\right]\underline{X}(S) = \underline{X}(0) + \underline{B}\ \underline{U}(S) \qquad \dots (50)$$

premultiplicando a la ecuación (50) por $\left[S\underline{I} - \underline{A}\right]^{-1}$ se tiene:

$$\underline{X}(S) = \left[S\underline{I} - \underline{A}\right]^{-1}\underline{X}(0) + \left[S\underline{I} - \underline{A}\right]^{-1}\underline{B}\ \underline{U}(S)$$

$$\dots (51)$$

aplicando la transformada de Laplace a la ecuación (2):

$$L\left\{\underline{y}(t)\right\} = L\left\{\underline{Cx}(t)\right\} + L\left\{\underline{D}\ \underline{u}(t)\right\} \dots (52)$$

'desarrollando término a término de la ecuación (52):

$$L\left\{\underline{y}(t)\right\} = \underline{Y}(S) \qquad \dots (53)$$

$$L\left\{\underline{C}\ \underline{x}(t)\right\} = \underline{C}\ \underline{X}(S) \qquad \dots (54)$$

$$L\left\{\underline{Du}(t)\right\} = \underline{D}\ \underline{U}(S) \qquad \dots (55)$$

sustituyendo las expresiones (53), (54) y (55) en la ecuación (52) se obtiene:

$$\underline{Y}(S) = \underline{C}\underline{X}(S) + \underline{D}\ \underline{U}(S) \qquad \ldots (56)$$

y sustituyendo la ecuación (51) en la (56) se tiene:

$$\underline{Y}(S) = \underline{C}[S\underline{I} - \underline{A}]^{-1}\ \underline{X}(0) + \underline{C}[S\underline{I} - \underline{A}]^{-1}\ \underline{B}\ \underline{U}(S) + \underline{D}\ \underline{U}(S)$$

$$\ldots (57)$$

de esta manera, la salida producida por el sistema, se obtiene al aplicar la transformada inversa de Laplace a la ecuación (57), esto es:

$$\underline{y}(t) = L^{-1}\left\{\underline{C}[S\underline{I} - \underline{A}]^{-1}\ \underline{X}(0)\right\} + L^{-1}\left\{\underline{C}[S\underline{I} - \underline{A}]^{-1}\ \underline{B}\underline{U}(S)\right\} + L^{-1}\left\{\underline{D}\underline{U}(S)\right\}$$

$$\ldots (58)$$

V.4.1 MATRIZ DE TRANSICION

Existen varios métodos para obtener la matriz de transición, algunos presentan ventajas con respecto a otros y esto se debe principalmente al orden que tenga la matriz $\underline{A}$ y a la naturaleza de los valores característicos que ésta posea.

Los métodos que se proponen para obtener la matriz de transición son:

a) Caso particular de la serie de Peano- Baker

b) Valores característicos por el teorema de Cayley - Hamilton.

c) Forma canónica de Jordan a través de la matriz modal.

d) Por transformada de Laplace.

e) Mediante el teorema de Sylvester.

f) Por la fórmula de interpolación de Sylvester.

a) CASO PARTICULAR DE LA SERIE DE PEANO - BAKER

Considérese la siguiente ecuación diferencial matricial:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}(t)\ x(t) \qquad \ldots (1)$$

que es una ecuación variante con el tiempo, su solución está dada por la serie* de Peano - Baker, esto es:

$$\underline{\Phi}(t) = \underline{I} + \int_0^t \underline{A}(\tau_1)d\tau_1 + \int_0^t\int_0^{\sigma_1} \underline{A}(\tau_1)\ \underline{A}(\tau_2)\ d\tau_2\ d\tau_1 +$$

$$+ \int_0^t \int_0^{\sigma_1} \int_0^{\sigma_2} \underline{A}(\tau_1)\ \underline{A}(\tau_2)\ \underline{A}(\tau_3)\ d\tau_3\ d\tau_2\ d\tau_1 + \ldots +$$

$$+ \int_0^t \int_0^{\sigma_1} \int_0^{\sigma_2} \cdots \int_0^{\sigma_n} \underline{A}(\tau_1)\ \underline{A}(\tau_2)\ \underline{A}(\tau_3)\ \ldots\ \underline{A}(\tau_n)d\tau_n \ldots d\tau_3\ d\tau_2\ d\tau_1 +$$

$$+ \ldots \qquad \ldots (2)$$

debido a que se están considerando únicamente sistemas in variantes con el tiempo, es decir, $\underline{A}(t)$ es una matriz de coeficientes constantes y se representa simplemente como $\underline{A}$, la ecuación (2) se transforma en:

$$e^{\underline{A}t} = \underline{I} + \underline{A} \int_0^t d\tau_1 + \underline{A}^2 \int_0^t \int_0^{\sigma_1} d\tau_2\ d\tau_1 +$$

$$+ \underline{A}^3 \int_0^t \int_0^{\sigma_1} \int_0^{\sigma_2} d\tau_3\ d\tau_2\ d\tau_1 + \ldots +$$

$$+ \underline{A}^n \int_0^t \int_0^{\sigma_1} \int_0^{\sigma_2} \cdots \int_0^{\sigma_n} d\tau_n\ \ldots\ d\tau_3\ d\tau_2\ d\tau_1 + \ldots$$

$$\ldots (3)$$

*Esta serie se obtiene al resolver la ecuación (5) por el método de Pickard.

resolviendo la ecuación (3) se obtiene:

$$e^{\underline{A}t} = \underline{I} + \frac{\underline{A}}{1!}t + \frac{\underline{A}^2}{2!}t^2 + \frac{\underline{A}^3}{3!}t^3 + \ldots + \frac{\underline{A}^n}{n!}t^n + \ldots \qquad \ldots (4)$$

así, con base en la ecuación (4) se obtiene la matriz de transición o matriz exponencial. Este método es útil únicamente cuando se hace uso de una computadora para el cálculo de la matriz de transición.

b) VALORES CARACTERISTICOS POR EL TEOREMA DE CAYLEY - HAMILTON

Si $N(\lambda)$ es un polinomio en λ de la forma:

$$N(\lambda) = \lambda^n + C_1\lambda^{n-1} + C_2\lambda^{n-2} + \ldots + C_{n-1}\lambda + C_n \qquad \ldots (1)$$

se puede generalizar el polinomio empleando la matriz $\underline{A}$ en lugar de λ, esto es:

$$N(\underline{A}) = \underline{A}^n + C_1\underline{A}^{n-1} + C_2\underline{A}^{n-2} + \ldots + C_{n-1}\underline{A} + C_n\underline{I} \qquad \ldots (2)$$

por otra parte, si el polinomio seleccionado es el polinomio característico de la matriz $\underline{A}$, es decir, $N(\lambda) = P(\lambda)$ y $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ son los valores característicos de $P(\lambda)$, se tiene entonces que:

$$N(\lambda_1) = N(\lambda_2) = N(\lambda_3) = \ldots N(\lambda_n) = 0$$

por lo tanto:

$$P(\underline{A}) = [\,0\,] \qquad \ldots (3)$$

y

$$P(\lambda) = |\,\lambda\underline{I} - \underline{A}\,| \qquad \ldots (4)$$

de esta manera, el teorema de Cayley - Hamilton establece que la matriz $\underline{A}$ satisface su propia ecuación característica, con este teorema se pueden obtener funciones matriciales.

Considérese el caso de un polinomio matricial $N(\underline{A})$ de grado mayor al polinomio característico de la matriz $\underline{A}$. Si $N(\lambda)$ se divide entre el polinomio característico de $\underline{A}(P(\lambda))$, se tiene:

$$\frac{N(\lambda)}{P(\lambda)} = Q(\lambda) + \frac{R(\lambda)}{P(\lambda)} \qquad \ldots (5)$$

donde, $R(\lambda)$ es el residuo de la división y $Q(\lambda)$ es el resultado de la división.

Por otra parte, multiplicando ambos miembros de la ecuación (5) por $P(\lambda)$, se obtiene:

$$N(\lambda) = Q(\lambda)\, P(\lambda) + R(\lambda) \qquad \ldots (6)$$

debido a que $P(\lambda)$ es igual a cero, la ecuación (6) se puede escribir como:

$$N(\lambda) = R(\lambda) \qquad \ldots (7)$$

por lo tanto:

$$N(\underline{A}) = R(\underline{A}) \qquad \ldots (8)$$

la ecuación anterior es válida si $N(\underline{A})$ es una función polinomial de $\underline{A}$.

Cuando se desea obtener $F(\underline{A})$, donde $F(\lambda)$ es una función analítica de λ en una región alrededor del origen, es posible emplear el mismo método. De esta manera la función $F(\underline{A})$ puede ser expresada como un polinomio en $\underline{A}$ de grado $n-1$, consecuentemente $R(\lambda)$ debe ser un polinomio de grado $n-1$; además si $Q(\lambda)$ es una función analítica en la misma región, se tiene:

$$F(\lambda) = Q(\lambda)\, P(\lambda) + R(\lambda) \qquad \ldots (9)$$

donde el polinomio $R(\lambda)$ es de la siguiente forma:

$$R(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} \quad \ldots (10)$$

los coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ se obtienen sustituyendo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ en la ecuación (9), esto es:

$$\left.\begin{array}{l} F(\lambda_1) = R(\lambda_1) \\ F(\lambda_2) = R(\lambda_2) \\ F(\lambda_3) = R(\lambda_3) \\ \vdots \qquad \vdots \\ F(\lambda_n) = R(\lambda_n) \end{array}\right| \quad \ldots (11)$$

o bien:

$$F(\lambda_i) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \lambda_i^k \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n \quad \ldots (12)$$

donde:

$$(\lambda_i)^0 = 1 \qquad \forall\lambda_i \quad \ldots (13)$$

y:

$$F(\lambda_i) = e^{\lambda_i t} \quad \ldots (14)$$

sustituyendo $\underline{A}$ por λ en la ecuación (9), se tiene:

$$F(\underline{A}) = Q(\underline{A})P(\underline{A}) + R(\underline{A}) \quad \ldots (15)$$

recordando que:

$$P(\underline{A}) = [\,\underline{0}\,]$$

la ecuación (15) se puede escribir como:

$$F(\underline{A}) = R(\underline{A}) \quad \ldots (16)$$

o bien:

$$F(\underline{A}) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \underline{A}^k \quad \ldots (17)$$

donde:

$$F(\underline{A}) = e^{\underline{A}t} \qquad \dots (18)$$

Si la matriz $\underline{A}$ posee un valor característico λi de orden "S", se puede obtener únicamente una ecuación linealmente independiente al sustituir λi en la ecuación (9) y las $S - 1$ ecuaciones linealmente independientes para obtener los valores de αi se obtienen derivando la ecuación (9) con respecto a λ, esto es:

$$\left.\frac{d^m F(\lambda)}{d\lambda^m}\right|_{\lambda = \lambda_i} = \left.\frac{d^m R(\lambda)}{d\lambda^m}\right|_{\lambda = \lambda_i}, \quad m = 1, 2, \dots, S - 1 \qquad \dots (19)$$

c) FORMA CANONICA DE JORDAN

Este método consiste en expresar a la matriz $\underline{A}$ en su forma canónica de Jordan, (véase inciso V.3), esto es:

$$\underline{J} = \underline{M}^{-1} \underline{A} \, \underline{M} \qquad \dots (1)$$

donde:

$\underline{J}$: es la forma canónica de la matriz $\underline{A}$ y tiene la forma:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \beta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \beta_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \beta_3 & \dots & 0 & 0 \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & \beta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son los valores característicos de la matriz $\underline{A}$

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$ son coeficientes que adquieren valores de cero o uno.

$\underline{M}$: es la matriz modal y se forma con los vectores característicos de $\underline{A}$:

$$\underline{M} = [\underline{w}_1 \ \underline{w}_2 \ \underline{w}_3 \ \cdots \ \underline{w}_n]$$

y

$$\underline{w}i = \underline{\omega}i \Big|_{\lambda = \lambda_i}$$

los vectores $\underline{\omega}i$ se obtienen de la matriz adjunta $[\lambda\underline{I} - \underline{A}]$, esto es:

$$\text{Adj}[\lambda\underline{I} - \underline{A}] = [\underline{\omega}_1 \ \underline{\omega}_2 \ \underline{\omega}_3 \ \cdots \ \omega_n]$$

Por otra parte, si la matriz $\underline{A}$ posee n valores característicos distintos, entonces los coeficientes βi, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ son *cero*. De esta manera la matriz $\underline{J}$ es una matriz diagonal de la forma:

$$\underline{J} = \text{diag}[\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3 \ \cdots \ \lambda_n] \qquad \ldots (2)$$

En caso de que la matriz $\underline{A}$ posea uno o más valores característicos repetidos, pueden o no existir n vectores característicos linealmente independientes.

El número de vectores característicos linealmente independientes asociados a un valor característico de multiplicidad algebraica m_i es igual a la degeneración q_i de la matriz $\underline{A}$, esto es:

$$qi = n - \text{rango}[\underline{A} - \underline{I}\lambda i] \qquad \ldots (3)$$

donde la degeneración qi varía entre 1 y la multiplicidad algebraica mi del valor característico λi, esto es:

$$1 < q_i \leq m_i \qquad \ldots (4)$$

Básicamente se pueden establecer tres tipos de degeneración:

DEGENERACION COMPLETA

En este caso se tiene que la degeneración (q_i) es igual a la multiplicidad algebraica (m_i) del valor característico λ_i y los vectores característicos asociados a λ_i pueden evaluarse de las columnas que no sean cero de:

$$\frac{1}{(m_i - 1)!}\left[\frac{d^{m_i - 1}}{d\lambda^{m_i - 1}}\left(\mathrm{Adj}\left[\underline{A} - \underline{I}\lambda\right]\right)\right]_{\lambda = \lambda_i} \qquad \ldots (5)$$

DEGENERACION SIMPLE

En este caso se tiene que la degeneración (q_i) es igual a uno y existen $m_i - 1$ vectores característicos denominados vectores característicos generalizados, los cuales se obtienen de la siguiente manera:

$$\left.\begin{aligned} \left[\underline{A} - \underline{I}\lambda_i\right]\underline{w}_1 &= \underline{0} \\ \left[\underline{A} - \underline{I}\lambda_i\right]\underline{w}_2 &= \underline{w}_1 \\ \left[\underline{A} - \underline{I}\lambda_i\right]\underline{w}_3 &= \underline{w}_2 \\ &\;\;\vdots \\ \left[\underline{A} - \underline{I}\lambda_i\right]\underline{w}_{m_i} &= w_{m_i - 1} \end{aligned}\right| \qquad \ldots (6)$$

donde:

λ_i : es el valor característico de multiplicidad algebraica m_i.

CASO GENERAL

Para un valor característico con multiplicidad algebraica m_i y degeneración q_i se cumple la desigualdad dada por la ecuación (4), habrá un bloque de Jordan asociado para cada valor característico λ_i. En este caso los vectores característicos se pueden evaluar mediante métodos de prueba y error o simplemente por métodos sistemáticos para evitar las ambigüedades que se obtienen al establecer los bloques de Jordan.

Para obtener la matriz de transición mediante la forma canónica de Jordan, será necesario aplicar la siguiente ecuación:

$$e^{\underline{A}t} = \underline{M}\, e^{\underline{J}t}\, \underline{M}^{-1} \qquad \ldots (7)$$

Antes de proceder a la obtención de la matriz exponencial de Jordan ($e^{\underline{J}t}$) se requiere definir primeramente las funciones y potencias de los bloques de Jordan.

FUNCIONES Y POTENCIAS DE UN BLOQUE DE JORDAN

Si se tiene un bloque de Jordan de $m \times m$ asociado a un valor característico λ_i, esto es:

$$\underline{J}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \qquad \ldots (8)$$

Es posible derivar una expresión general para obtener una función analítica del bloque de Jorden $\underline{J}_i$ (en este caso la matriz $e^{\underline{J}_i t}$), por medio del teorema de Cayley - Hamilton de la siguiente manera:

$$e^{\underline{J}_i t} = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k \underline{J}_i^k \qquad \ldots (9)$$

Por otro lado para evaluar los parámetros α_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, m-1$, es necesario generar un sistema de ecuaciones de la forma:

$$\left.\begin{aligned}
e^{\lambda t}\Big|_{\lambda=\lambda_i} &= \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k \lambda^k\Big|_{\lambda=\lambda_i} \\
\frac{d}{d\lambda} e^{\lambda t}\Big|_{\lambda=\lambda_i} &= \frac{d}{d\lambda} \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k \lambda^k\Big|_{\lambda=\lambda_i} \\
\frac{d^2}{d\lambda^2} e^{\lambda t}\Big|_{\lambda=\lambda_i} &= \frac{d^2}{d\lambda^2} \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k \lambda^k\Big|_{\lambda=\lambda_i} \\
&\vdots \\
\frac{d^{m-2}}{d\lambda^{m-2}} e^{\lambda t}\Big|_{\lambda=\lambda_i} &= \frac{d^{m-2}}{d\lambda^{m-2}} \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k \lambda^k\Big|_{\lambda=\lambda_i} \\
\frac{d^{m-1}}{d\lambda^{m-1}} e^{\lambda t}\Big|_{\lambda=\lambda_i} &= \frac{d^{m-1}}{d\lambda^{m-1}} \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k \lambda^k\Big|_{\lambda=\lambda_i}
\end{aligned}\right| \qquad \ldots (10)$$

o bien:

$$
\begin{aligned}
e^{\lambda_i t} &= \alpha_0 + \alpha_1\lambda_i + \alpha_2\lambda_i^2 + \alpha_3\lambda_i^3 + \alpha_4\lambda_i^4 + \dots + \alpha_{m-2}\lambda_i^{m-2} + \alpha_{m-1}\lambda_i^{m-1} \\
t e^{\lambda_i t} &= \alpha_1 + 2\alpha_2\lambda_i + 3\alpha_3\lambda_i^2 + 4\alpha_4\lambda_i^3 + \dots + (m-2)\alpha_{m-2}\lambda_i^{m-3} + (m-1)\alpha_{m-1}\lambda_i^{m-2} \\
\frac{1}{2} t^2 e^{\lambda_i t} &= \alpha_2 + 3\alpha_3\lambda_i + 6\alpha_4\lambda_i^2 + \dots + \frac{1}{2}(m-2)(m-3)\alpha_{m-2}\lambda_i^{m-4} + \frac{1}{2}(m-1)(m-2)\alpha_{m-1}\lambda_i^{m-3} \\
\frac{1}{3!} t^3 e^{\lambda_i t} &= \alpha_3 + 4\alpha_4\lambda_i + \dots + \frac{1}{3!}(m-2)(m-3)(m-4)\alpha_{m-2}\lambda_i^{m-5} + \frac{1}{3!}(m-1)(m-2)(m-3)\alpha_{m-1}\lambda_i^{m-4} \\
\frac{1}{4!} t^4 e^{\lambda_i t} &= \alpha_4 + \dots + \frac{1}{4!}(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)\alpha_{m-2}\lambda_i^{m-6} + \frac{1}{4!}(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)\alpha_{m-1}\lambda_i^{m-5} \\
&\vdots \\
\frac{1}{(m-2)!} t^{m-2} e^{\lambda_i t} &= \alpha_{m-2} + \frac{1}{(m-2)!}(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)\ \dots\ (m-(m-2))\alpha_{m-1}\lambda_i \\
\frac{1}{(m-1)!} t^{m-1} e^{\lambda_i t} &= \alpha_{m-1}
\end{aligned}
\qquad \dots (11)
$$

y en forma matricial, esto es:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \frac{1}{2}t^2 \\ \frac{1}{3!}t^3 \\ \frac{1}{4!}t^4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{1}{(m-2)!}t^{m-2} \\ \frac{1}{(m-1)!}t^{m-1} \end{bmatrix} e^{\lambda_i t} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_i & \lambda_i^2 & \lambda_i^3 & \lambda_i^4 & \cdots & \lambda_i^{m-2} & \lambda_i^{m-1} \\ 0 & 1 & 2\lambda_i & 3\lambda_i^2 & 4\lambda_i^3 & \cdots & (m-2)\lambda_i^{m-3} & (m-1)\lambda_i^{m-2} \\ 0 & 0 & 1 & 3\lambda_i & 6\lambda_i^2 & \cdots & \frac{1}{2}(m-2)(m-3)\lambda_i^{m-4} & \frac{1}{2}(m-1)(m-2)\lambda_i^{m-3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4\lambda_i & \cdots & \frac{1}{3!}(m-2)(m-3)(m-4)\lambda_i^{m-5} & \frac{1}{3!}(m-1)(m-2)(m-3)\lambda_i^{m-4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{1}{4!}(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)\lambda_i^{m-6} & \frac{1}{4!}(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)\lambda_i^{m-5} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{1}{(m-2)!}(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-(m-2))\lambda_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{m-2} \\ \alpha_{m-1} \end{bmatrix} \quad \ldots (12)$$

de la ecuación (12) se obtiene que la representación en forma simbólica es:

$$\underline{G}(t)\ e^{\lambda_i t} = \underline{F}\ \underline{\alpha} \qquad \ldots\ (13)$$

el vector que contiene a las incógnitas α_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ se obtiene premultiplicando la ecuación (13) por la matriz $\underline{F}^{-1}$, esto es:

$$\underline{\alpha} = \underline{F}^{-1}\ \underline{G}(t)\ e^{\lambda_i t} \qquad \ldots\ (14)$$

Para obtener la matriz inversa $\underline{F}^{-1}$ se aplica la técnica de eliminación de Gauss, de esta manera se tiene que la matriz $\underline{F}^{-1}$ está dada por la expresión:

$$
\underline{F}^{-1} = \begin{bmatrix}
1 & -\lambda_i & \lambda_i^2 & -\lambda_i^3 & \lambda_i^4 & \cdots & (-\lambda_i)^{m-2} & (-\lambda_i)^{m-1} \\
0 & 1 & -2\lambda_i & 3\lambda_i^2 & -4\lambda_i^3 & \cdots & (m-2)(-\lambda_i)^{m-3} & (m-1)(-\lambda_i)^{m-2} \\
0 & 0 & 1 & -3\lambda_i & 6\lambda_i^2 & \cdots & \frac{1}{2}(m-2)(m-3)(-\lambda_i)^{m-4} & \frac{1}{2}(m-1)(m-2)(-\lambda_i)^{m-3} \\
0 & 0 & 0 & 1 & -4\lambda_i & \cdots & \frac{1}{3!}(m-2)(m-3)(m-4)(-\lambda_i)^{m-5} & \frac{1}{3!}(m-1)(m-2)(m-3)(-\lambda_i)^{m-4} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{1}{4!}(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(-\lambda_i)^{m-6} & \frac{1}{4!}(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(-\lambda_i)^{m-5} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{1}{(m-2)!}(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-(m-2)(-\lambda_i)) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{bmatrix}
\quad \ldots (15)
$$

por lo tanto, de la ecuación (14) y la expresión (15) se obtiene que los parámetros α_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, m-1$, son:

$$
\begin{aligned}
\alpha_0 &= e^{\lambda_i t}\left[1 - \lambda_i t + \frac{\lambda_i^2 t^2}{2!} - \frac{\lambda_i^3 t^3}{3!} + \ldots + \frac{(-\lambda_i)^{m-2}}{(m-2)!} t^{m-2} + \frac{(-\lambda_i)^{m-1}}{(m-1)!} t^{m-1} \right] \\
\alpha_1 &= e^{\lambda_i t}\left[t - \lambda_i t^2 + \frac{\lambda_i^2 t^3}{2!} - \frac{\lambda_i^3 t^4}{3!} + \ldots + \frac{(-\lambda_i)^{m-3}}{(m-3)!} t^{m-2} + \frac{(-\lambda_i)^{m-2}}{(m-2)!} t^{m-1} \right] \\
\alpha_2 &= e^{\lambda_i t}\left[\frac{1}{2} t^2 - \frac{\lambda_i t^3}{2} + \frac{\lambda_i t^4}{4} + \ldots + \frac{(-\lambda_i)^{m-4}}{2(m-4)!} t^{m-2} + \frac{(\lambda_i)^{m-3}}{2(m-3)!} t^{m-1} \right] \qquad \ldots (16) \\
&\;\;\vdots \\
\alpha_{m-2} &= e^{\lambda_i t}\left[\frac{1}{(m-2)!} t^{m-2} - \frac{1}{(m-2)!} t^{m-1} \right] \\
\alpha_{m-1} &= e^{\lambda_i t} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}
\end{aligned}
$$

En forma general para un bloque de Jordan $\underline{J}_i$ de orden $m \times m$ se obtiene que la k-ésima potencia del bloque es:

$$
\underline{J}_i^k = \begin{bmatrix}
\lambda_i^k & k\lambda_i^{k-1} & \frac{1}{2!}k(k-1)\lambda_i^{k-2} & \frac{1}{3!}k(k-1)(k-2)\lambda_i^{k-3} & \cdots & \frac{k!\,\lambda_i^{k-m+1}}{(k-m+1)!(m-1)!} \\
0 & \lambda_i^k & k\lambda_i^{k-1} & \frac{1}{2!}k(k-1)\lambda_i^{k-2} & \cdots & \cdot \\
0 & 0 & \lambda_i^k & k\lambda_i^{k-1} & \cdots & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \lambda_i^k & \cdots & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdot \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & k\lambda_i^{k-1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i^k
\end{bmatrix}
$$

$$\ldots (17)$$

Finalmente la matriz $e^{\underline{A}t}$ se obtiene a partir de las ecuaciones (7), (16) y (17).

d) TRANSFORMADA DE LAPLACE

Este método consiste en resolver la ecuación:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\ \underline{x}(t) \qquad \ldots (I)$$

por la transformada de Laplace, esto es:

$$L\left\{\dot{\underline{x}}(t)\right\} = L\left\{\underline{A}\ \underline{x}(t)\right\} \qquad \ldots (1)$$

transformando término a término de la ecuación (1):

$$\left.\begin{aligned} L\left\{\dot{\underline{x}}(t)\right\} &= S\underline{X}(S) - \underline{X}(0) \\ L\left\{\underline{A}\underline{x}(t)\right\} &= \underline{A}\ \underline{X}(S) \end{aligned}\right| \qquad \ldots (2)$$

sustituyendo las expresiones (2) en la ecuación (1), se obtiene:

$$S\underline{X}(S) - \underline{X}(0) = \underline{A}\ \underline{X}(S) \qquad \ldots (3)$$

reordenando la ecuación (3):

$$\left[S\underline{I} - \underline{A}\right]\underline{X}(S) = \underline{X}(0) \qquad \ldots (4)$$

premultiplicando ambos miembros de la ecuación (4) por la matriz inversa de $\left[S\underline{I} - A\right]$:

$$\underline{X}(S) = \left[S\underline{I} - \underline{A}\right]^{-1} X(0) \qquad \ldots (5)$$

aplicando la transformada inversa de Laplace a la ecuación (5), se obtiene:

$$\underline{x}(t) = L^{-1}\left\{\left[S\underline{I} - \underline{A}\right]^{-1}\right\}\underline{X}(0) \qquad \ldots (6)$$

sin embargo, se tiene que la solución de la ecuación (I) debe ser:

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{A}t}\ \underline{X}(0) \qquad \ldots (7)$$

por lo tanto, la matriz de transición es:

$$e^{\underline{A}t} = L^{-1}\left\{ \left[S\underline{I} - \underline{A} \right]^{-1} \right\}$$

e) TEOREMA DE SYLVESTER

Si $N(A)$ es un polinomio matricial en $\underline{A}$ y ésta última posee n valores característicos distintos, entonces el polinomio $N(\underline{A})$ se puede expresar mediante el teorema de Sylvester de la manera siguiente:

$$N(\underline{A}) = \sum_{i=1}^{n} N(\lambda_i)\ Z_0(\lambda_i) \qquad \ldots (1)$$

donde:

$$Z_0(\lambda_i) = \frac{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \left[\underline{A} - \lambda_j \underline{I} \right]}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (\lambda_i - \lambda_j)} \qquad \ldots (2)$$

y:

> λ_i para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ son los valores característicos de la matriz $\underline{A}$ y se obtienen a partir de la ecuación $|\lambda\underline{I} - \underline{A}| = 0$.

sin embargo, se tiene:

$$\frac{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \left[\underline{A} - \lambda_j \underline{I} \right]}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (\lambda_i - \lambda_j)} = \left. \frac{\mathrm{Adj}\left[\lambda\underline{I} - \underline{A} \right]}{\frac{dP(\lambda)}{d\lambda}} \right|_{\lambda = \lambda_i} \qquad \ldots (3)$$

donde, $P(\lambda)$ es el polinomio característico de la matriz $\underline{A}$, esto es:

$$P(\lambda) = |\lambda \underline{I} - \underline{A}| \qquad \ldots (4)$$

sustituyendo la ecuación (3) en la (1), se tiene:

$$N(\underline{A}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{N(\lambda_i) \operatorname{Adj}\left[\lambda_i \underline{I} - \underline{A}\right]}{\left.\frac{dP(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda = \lambda_i}} \qquad \ldots (5)$$

donde:

$$N(\underline{A}) = e^{\underline{A}t} \qquad \ldots (6)$$

y

$$N(\lambda_i) = e^{\lambda_i t} \qquad \ldots (7)$$

En caso de que la matriz $\underline{A}$ posea valores característicos repetidos (múltiples), la ecuación (5) debe ser modificada. Asumiendo que la matriz $\underline{A}$ tiene n valores característicos y uno de éstos es de orden s (multiplicidad algebraica s), entonces la contribución del i-ésimo valor característico múltiple λ_i es:

$$\frac{1}{(s-1)!} \left| \frac{d^{s-1}}{d\lambda^{s-1}} \left[\frac{N(\lambda) \operatorname{Adj}\left[\lambda \underline{I} - \underline{A}\right]}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (\lambda - \lambda_i)} \right] \right|_{\lambda = \lambda_i} \qquad \ldots (8)$$

por lo tanto, la suma de las contribuciones del valor característico múltiple λ_i está dado por:

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{(s-1)!} \left| \frac{d^{s-1}}{d\lambda^{s-1}} \left[\frac{N(\lambda) \operatorname{Adj}\left[\lambda \underline{I} - \underline{A}\right]}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (\lambda - \lambda_j)} \right] \right|_{\lambda = \lambda_i} \qquad \ldots (9)$$

en este caso, la sumatoria se evalúa sobre todos los valores característicos repetidos sólo una vez, de esta manera la ecuación (9) se puede escribir como:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{N^{k-1}(\lambda_i)\, Z_{s-k}(\lambda_i)}{(k-1)!} \qquad \ldots (10)$$

donde:

$$N^k(\lambda_i) = \frac{d^k}{d\lambda^k} N(\lambda) \bigg|_{\lambda = \lambda_i} \qquad \ldots (11)$$

y:

$$Z_k(\lambda_i) = \frac{1}{k!} \left| \frac{d^k}{d\lambda^k} \left[\frac{\text{Adj}\left[\lambda \underline{I} - \underline{A}\right]}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (\lambda - \lambda_j)} \right] \right|_{\lambda = \lambda_i}$$

$$\ldots (12)$$

por lo tanto, la función $N(\underline{A})$, cuando $\underline{A}$ posee valores característicos repetidos, se evalúa de la forma:

$$N(\underline{A}) = N(\underline{A})_D + N(\underline{A})_R \qquad \ldots (13)$$

donde:

$N(\underline{A})_D$: es la suma de las contribuciones de los valores característicos diferentes a la función $N(\underline{A})$ y está dado por:

$$N(\underline{A})_D = \sum_{i=1}^{n-s} \frac{N(\lambda_i)\, \text{Adj}\left[\lambda_i \underline{I} - \underline{A}\right]}{\left.\frac{dP(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda = \lambda_i}} \qquad \ldots (14)$$

y:

$N(\underline{A})_R$: es la suma de las contribuciones de los valores característicos repetidos (múltiples) a la función $N(\underline{A})$ y está dado por:

$$N(\underline{A})_R = \sum_{k=1}^{s} \frac{N^{k-1}(\lambda_i)}{(k-1)!} \left\{ \frac{d^{k-1}}{d\lambda^{k-1}} \left[\frac{Adj\left[\lambda \underline{I} - \underline{A}\right]}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (\lambda - \lambda_j)} \right] \right\}_{\lambda = \lambda_i} \qquad \ldots (15)$$

de esta manera, sustituyendo las ecuaciones (14) y (15) en la (13), se tiene:

$$N(\underline{A}) = \sum_{i=1}^{n-s} \frac{N(\lambda_i)\ Adj\left[\lambda_i - \underline{A}\right]}{\left.\frac{dP(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda = \lambda_i}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{s} \frac{N^{k-1}(\lambda_i)}{(k-1)!} \left\{ \frac{d^{k-1}}{d\lambda^{k-1}} \left[\frac{Adj\left[\lambda \underline{I} - \underline{A}\right]}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (\lambda - \lambda_j)} \right] \right\}_{\lambda = \lambda_i} \qquad \ldots (16)$$

donde:

$$N(\underline{A}) = e^{\underline{A}t} \qquad \ldots (17)$$

y

$$N(\lambda_i) = e^{\lambda_i t} \qquad \ldots (18)$$

Considérese el polinomio en λ de grado n, donde se asume que las raíces son distintas siendo éstas $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda n$:

$$P_k(\lambda) = \frac{(\lambda - \lambda_1) \ldots (\lambda - \lambda_{k-1})(\lambda - \lambda_{k+1}) \ldots (\lambda - \lambda_n)}{(\lambda_k - \lambda_1) \ldots (\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \ldots (\lambda_k - \lambda_n)}$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots, n \qquad \ldots (1)$$

además:

$$\begin{array}{llll} & \text{si} & i = k & P_k(\lambda i) = 1 \\ y & & & \\ & \text{si} & i \neq k & P_k(\lambda i) = 0 \end{array}$$

por otro lado, considérese ahora el polinomio $f(\lambda)$ de grado $n - 1$, esto es:

$$f(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k) P_k(\lambda) \qquad \ldots (2)$$

o bien:

$$f(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k) \frac{(\lambda - \lambda_1) \ldots (\lambda - \lambda_{k-1})(\lambda - \lambda_{k+1}) \ldots (\lambda - \lambda_n)}{(\lambda_k - \lambda_1) \ldots (\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \ldots (\lambda_k - \lambda_n)} \qquad \ldots (3)$$

esta ecuación se conoce como la fórmula de interpolación de Lagrange.

Por otra parte, el polinomio $f(\lambda)$ de grado $n-1$ se puede determinar en forma única a partir de $f(\lambda_1), f(\lambda_2), f(\lambda_3), \ldots, f(\lambda_n)$ y por lo tanto, cualquier otra representación de un polinomio de grado $n-1$ puede ser reducido al polinomio de Lagrange $f(\lambda)$. Este resultado puede extenderse también a polinomios matriciales.

Considérese el polinomio $f(\underline{A})$, donde $\underline{A}$ es una matriz de orden $n \times n$. Sea $f_N(\underline{A})$ un polinomio en $\underline{A}$ de grado N, el cual puede ser dividido entre un polinomio mínimo $\phi(\underline{A})$, obteniendo:

$$f_N(\underline{A}) = g(\underline{A})\ \phi(\underline{A}) + \alpha_N(\underline{A}) \qquad \ldots (4)$$

donde:

$\alpha_N(\underline{A})$: es el residuo del cociente

Puesto que $\phi(\underline{A})$ es un polinomio mínimo, se tiene:

$$\phi(\underline{A}) = [\ 0\ ] \qquad \ldots (5)$$

por lo que la ecuación (4) se puede escribir como:

$$f_N(\underline{A}) = \alpha_N(\underline{A}) \qquad \ldots (6)$$

asimismo, si $f_N(\underline{A})$ es una serie infinita convergente, entonces:

$$\lim_{N \to \infty} f_N(\underline{A}) = f(\underline{A}) \qquad \ldots (7)$$

y:

$$\lim_{N \to \infty} \alpha_N(\underline{A}) = \alpha(\underline{A}) \qquad \ldots (8)$$

por lo tanto, la ecuación (6) se convierte en:

$$f(\underline{A}) = \alpha(\underline{A}) \qquad \ldots (9)$$

Para derivar la fórmula de interpolación de Sylvester, considérese primeramente que el polinomio mínimo en $\underline{A}$ no involucra raíces repetidas. De esta manera $P_k(\underline{A})$ es:

$$P_k(\underline{A}) = \frac{(\underline{A} - \lambda_1\underline{I}) \ldots (\underline{A} - \lambda_{k-1}\underline{I})(\underline{A} - \lambda_{k+1}\underline{I}) \quad \ldots (\underline{A} - \lambda_n\underline{I})}{(\lambda_k - \lambda_1) \ldots (\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \quad \ldots (\lambda_k - \lambda_n)}$$

donde:

$$P_k(\underline{A}) = \underline{I} \quad \text{si} \quad i = k \qquad \ldots (10)$$

y

$$P_k(\underline{A}) = [\ 0\ ] \quad \text{si} \quad i \neq k$$

por lo tanto, $f(\underline{A})$ es:

$$f(\underline{A}) = \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k) P_k(\underline{A}) \qquad \ldots (11)$$

o bien:

$$f(\underline{A}) = \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k) \frac{(\underline{A} - \lambda_1\underline{I}) \ldots (\underline{A} - \lambda_{k-1}\underline{I})(\underline{A} - \lambda_{k+1}\underline{I}) \ldots (\underline{A} - \lambda_n\underline{I})}{(\lambda_k - \lambda_1) \ldots (\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \ldots (\lambda_k - \lambda_n)}$$

$$\ldots (12)$$

la ecuación (12) se conoce como la fórmula de interpolación de Sylvester y es equivalente a la siguiente ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & \underline{I} \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \ldots & \lambda_n & \underline{A} \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & & \lambda_n^2 & \underline{A}^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & & \lambda_n^3 & \underline{A}^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} & \underline{A}^{n-1} \\ f(\lambda_1) & f(\lambda_2) & f(\lambda_3) & \ldots & f(\lambda_n) & f(\underline{A}) \end{vmatrix} = 0 \qquad \ldots (13)$$

o bien:

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & \ldots & \lambda_1^{n-1} & f(\lambda_1) \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 & \ldots & \lambda_2^{n-1} & f(\lambda_2) \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \lambda_3^3 & \ldots & \lambda_3^{n-1} & f(\lambda_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \lambda_n^3 & \ldots & \lambda_n^{n-1} & f(\lambda_n) \\ \underline{I} & \underline{A} & \underline{A}^2 & \underline{A}^3 & \ldots & \underline{A}^{n-1} & f(\underline{A}) \end{vmatrix} = 0 \qquad \ldots (14)$$

Nótese que resolviendo la ecuación (14) para $f(\underline{A})$ es lo mismo que resolver el siguiente sistema de n ecuaciones lineales para αi, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$:

$$\begin{array}{l} \alpha_0 + \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_1^2 + \alpha_3\lambda_1^3 + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda_1^{n-1} = f(\lambda_1) \\ \alpha_0 + \alpha_1\lambda_2 + \alpha_2\lambda_2^2 + \alpha_3\lambda_2^3 + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda_2^{n-1} = f(\lambda_2) \\ \alpha_0 + \alpha_1\lambda_3 + \alpha_2\lambda_3^2 + \alpha_3\lambda_3^3 + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda_3^{n-1} = f(\lambda_3) \\ \vdots \\ \alpha_0 + \alpha_1\lambda_n + \alpha_2\lambda_n^2 + \alpha_3\lambda_n^3 + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda_n^{n-1} = f(\lambda_n) \end{array} \quad \ldots (15)$$

y obtener $f(\underline{A})$ de la forma:

$$f(\underline{A}) = \alpha_0 I + \alpha_1\underline{A} + \alpha_2\underline{A}^2 + \alpha_3\underline{A}^3 + \ldots + \alpha_{n-}\underline{A}^{n-1} \quad \ldots (16)$$

por otra parte, cuando el polinomio mínimo tiene raíces repetidas, es necesario establecer una forma general de la fórmula de interpolación de Sylvester. Considérese que el polinomio mínimo tiene m raíces repetidas, esto es, las raíces del polinomio mínimo son:
$\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}, \ldots, \lambda_n$, por lo tanto el polinomio mínimo se puede escribir como:

$$\phi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^m(\lambda - \lambda_{m+1})(\lambda - \lambda_{m+2}) \ldots (\lambda - \lambda_n) \quad \ldots (17)$$

En forma similar que para el caso donde las raíces del polinomio mínimo son distintos, se obtiene:

$$f(\lambda) = g(\lambda)\phi(\lambda) + \alpha(\lambda) \quad \ldots (18)$$

sustituyendo la ecuación (17) en la (18), se tiene:

$$f(\lambda) = g(\lambda)\left[(\lambda - \lambda_1)^m(\lambda - \lambda_{m+1})(\lambda - \lambda_{m+2}) \ldots (\lambda - \lambda_n)\right] + \alpha(\lambda) \quad \ldots (19)$$

evaluando la ecuación (19) para $\lambda_1, \lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}, \ldots, \lambda_n$ se obtiene un sistema de $n-(m-1)$ ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} f(\lambda_1) = \alpha(\lambda_1) \\ f(\lambda_{m+1}) = \alpha(\lambda_{m+1}) \\ f(\lambda_{m+2}) = \alpha(\lambda_{m+2}) \\ \vdots \\ f(\lambda_n) = \alpha(\lambda_n) \end{array}\right| \quad \ldots (20)$$

para obtener las $m-1$ ecuaciones necesarias para poder encontrar los parámetros αi, se requiere derivar $m-1$ veces la ecuación (19) con respecto a λ esto es:

$$\frac{d}{d\lambda} f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m-1} h(\lambda) + \frac{d}{d\lambda} \alpha(\lambda) \qquad \dots (21)$$

donde:

$$(\lambda - \lambda_1)^{m-1} h(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \left[g(\lambda)(\lambda - \lambda_1)^m (\lambda - \lambda_{m+1}) \dots (\lambda - \lambda_n) \right] \qquad \dots (22)$$

evaluando la ecuación (21) para $\lambda = \lambda_1$ se obtiene:

$$\left. \frac{d}{d\lambda} f(\lambda) \right|_{\lambda = \lambda_1} = f'(\lambda_1) = \left. \frac{d}{d\lambda} \alpha(\lambda) \right|_{\lambda = \lambda_1} \qquad \dots (23)$$

en forma similar, se obtienen las $m-1$ ecuaciones de la siguiente manera:

$$\left.\begin{array}{l}
\left. \dfrac{d^2}{d\lambda^2} f(\lambda) \right|_{\lambda = \lambda_1} = f''(\lambda_1) = \left. \dfrac{d^2}{d\lambda^2} \alpha(\lambda) \right|_{\lambda = \lambda_1} \\
\left. \dfrac{d^3}{d\lambda^3} f(\lambda) \right|_{\lambda = \lambda_1} = f'''(\lambda_1) = \left. \dfrac{d^3}{d\lambda^3} \alpha(\lambda) \right|_{\lambda = \lambda_1} \\
\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\left. \dfrac{d^{m-1}}{d\lambda^{m-1}} f(\lambda) \right|_{\lambda = \lambda_1} = f^{m-1}(\lambda_1) = \left. \dfrac{d^{m-1}}{d\lambda^{m-1}} \alpha(\lambda) \right|_{\lambda = \lambda_1}
\end{array}\right\} \dots (24)$$

a partir de las ecuaciones (20), (23) y (24) se tiene:

$$\frac{f^{m-1}(\lambda_1)}{(m-1)!} = \alpha_{m-1} + \frac{m(m-1)(m-2)\ \ldots\ (m-(m-2))}{(m-1)!}\alpha_{m}\lambda_1 + \ldots + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)\ \ldots\ (n-(m-1))}{(m-1)!}\alpha_{n-1}\lambda_1^{n-m}$$

$$\vdots$$

$$\frac{f'''(\lambda_1)}{3!} = \alpha_3 + 4\alpha_4\lambda_1 + \ldots + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{3!}\alpha_{m-1}\lambda_1^{m-4} + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\alpha_m\lambda_1^{m-3} + \ldots + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!}\alpha_{n+1}\lambda_1^{n-4}$$

$$\frac{f''(\lambda_1)}{2} = \alpha_2 + 3\alpha_3\lambda_1 + 6\alpha_4\lambda_1^2 + \ldots + \frac{(m-1)(m-2)}{2}\alpha_{m-1}\lambda_1^{m-3} + \frac{m(m-1)}{2}\alpha_m\lambda_1^{m-2} + \ldots + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\alpha_{n-1}\lambda_1^{n-3}$$

$$f'(\lambda_1) = \alpha_1 + 2\alpha_2\lambda_1 + 3\alpha_3\lambda_1^2 + 4\alpha_4\lambda_1^3 + \ldots + (m-1)\alpha_{m-1}\lambda_1^{m-2} + m\alpha_m\lambda_1^{m-1} + \ldots + (n-1)\alpha_{n-1}\lambda_1^{n-2}$$

$$f(\lambda_1) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_1^2 + \alpha_3\lambda_1^3 + \alpha_4\lambda_1^4 + \ldots + \alpha_{m-1}\lambda_1^{m-1} + \alpha_m\lambda_1^m + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda_1^{n-1}$$

$$f(\lambda_{m+1}) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_{m+1} + \alpha_2\lambda_{m+1}^2 + \alpha_3\lambda_{m+1}^3 + \alpha_4\lambda_{m+1}^4 + \ldots + \alpha_{m-1}\lambda_{m+1}^{m-1} + \alpha_m\lambda_{m+1} + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda_{m+1}^{n-1}$$

$$\vdots$$

$$f(\lambda_{n-1}) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_{n-1} + \alpha_2\lambda_{n-1}^2 + \alpha_3\lambda_{n-1}^3 + \alpha_4\lambda_{n-1}^4 + \ldots + \alpha_{m-1}\lambda_{n-1}^{m-1} + \alpha_m\lambda_{n-1}^m + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda_{n-1}^{n-1}$$

$$f(\lambda_n) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda_n + \alpha_2\lambda_n^2 + \alpha_3\lambda_n^3 + \alpha_4\lambda_n^4 + \ldots + \alpha_{m-1}\lambda_n^{m-1} + \alpha_m\lambda_n^m + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda_n^{n-1}$$

$$\ldots \quad (25)$$

resolviendo la ecuación (25) se obtienen los valores de αi, $i = 1, 2, 3, \ldots, m-1, m, \ldots, n-1$ en función de $f(\lambda_1)$, $f'(\lambda_1)$, $f''(\lambda_1)$, ..., $f(\lambda_{m+1})$, $f(\lambda_m)$, ... $f(\lambda_n)$ y $f(\underline{A})$, se obtienen mediante:

$$f(\underline{A}) = \alpha_0\underline{I} + \alpha_1\underline{A} + \alpha_2\underline{A}^2 + \alpha_3\underline{A}^3 + \alpha_4\underline{A}^4 + \dots + \alpha_{m+1}\underline{A}^{m+1} + \dots + \alpha_{n-1}\underline{A}^{n-1} \qquad \dots (26)$$

de las ecuación (25) y (26) se obtiene:

$$\begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m(m-2))}{(m-1)!}\lambda_1 & \cdots & \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-(m-2))}{(m-1)!}\lambda_1^{n-m} & \frac{f^{m-1}(\lambda_1)}{(m-1)!} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot & \\
0 & 0 & 1 & 3\lambda_1 & \cdots & \frac{(m-1)(m-2)}{2}\lambda_1^{m-3} & \frac{m(m-1)}{2}\lambda_1^{m-2} & \cdots & \frac{(n-1)(n-2)}{2}\lambda_1^{n-3} & \frac{f''(\lambda_1)}{2} \\
0 & 1 & 2\lambda_1 & 3\lambda_1 & \cdots & (m-1)\lambda_1^{m-2} & m\lambda_1^{m-1} & \cdots & (n-1)\lambda_1^{n-2} & f'(\lambda_1) \\
1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & \cdots & \lambda_1^{m-1} & \lambda_1^m & \cdots & \lambda_1^{n-1} & f(\lambda_1) \\
1 & \lambda_{m+1} & \lambda_{m+1}^2 & \lambda_{m+1}^3 & & \lambda_{m+1}^{m-1} & \lambda_{m+1}^m & \cdots & \lambda_{m+1}^{n-1} & f(\lambda_{m+1}) \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot & \\
1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \lambda_n^3 & \cdots & \lambda_n^{m-1} & \lambda_n^m & \cdots & \lambda_n^{n-1} & f(\lambda_n) \\
\underline{I} & \underline{A} & \underline{A}^2 & \underline{A}^3 & \cdots & \underline{A}^{m-1} & \underline{A}^m & \cdots & \underline{A}^{n-1} & f(\underline{A})
\end{vmatrix} = 0$$

$$\dots (27)$$

donde:

$$f(\lambda i) = e^{\lambda it}$$

$$f^n(\lambda i) = \frac{d^n}{dt^n} e^{\lambda it} \qquad \dots (28)$$

y

$$f(\underline{A}) = e^{\underline{A}t}$$

Ejemplo V.9

Obtener la matriz de transición $e^{\underline{A}t}$ para el sistema cuya representación en variables de estado es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Para obtener $e^{\underline{A}t}$ emplear los procedimientos descritos en la presente sección.

Solución:

a) En este caso no se presenta la obtención de la matriz de transición mediante el caso particular de la serie de Peano - Baker, puesto que se mencionó que este procedimiento es útil cuando se evalúa por computadora.

b) Valores característicos por el teorema de Cayley - Hamilton.

Primeramente se procede a obtener el polinomio característico de la matriz $\underline{A}$, mediante la siguiente expresión:

$$|\lambda\underline{I} - \underline{A}| = 0$$

esto es:

$$|\lambda\underline{I} - \underline{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 24 & 26 & \lambda + 9 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 9\lambda^2 + 26\lambda + 24 = 0$$

por lo tanto los valores característicos son:

$$\lambda_1 = -2$$

$$\lambda_2 = -3$$

$$\lambda_3 = -4$$

una vez que se han obtenido los valores característicos de la matriz $\underline{A}$, es necesario generar el sistema de ecuaciones para evaluar los parámetros α_i, $i = 0, 1, 2$, esto es:

$$e^{-2t} = \alpha_0 - 2\alpha_1 + 4\alpha_2$$

$$e^{-3t} = \alpha_0 - 3\alpha_1 + 9\alpha_2$$

$$e^{-4t} = \alpha_0 - 4\alpha_1 + 16\alpha_2$$

o bien:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 9 \\ 1 & -4 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ e^{-3t} \\ e^{-4t} \end{bmatrix}$$

resolviendo la ecuación anterior se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -8 & 3 \\ 3.5 & -6 & 2.5 \\ 0.5 & -1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ e^{-3t} \\ e^{-4t} \end{bmatrix}$$

o bien:

$$\alpha_0 = 6e^{-2t} - 8e^{-3t} + 3e^{-4t}$$

$$\alpha_1 = 3.5e^{-2t} - 6e^{-3t} + 2.5e^{-4t}$$

$$\alpha_2 = 0.5e^{-2t} - e^{-3t} + 0.5e^{-4t}$$

y la matriz de transición se obtiene mediante la expresión:

$$e^{\underline{A}t} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \underline{A}^k$$

y para este caso:

$$e^{\underline{A}t} = \alpha_0 \underline{I} + \alpha_1 \underline{A} + \alpha_2 \underline{A}^2$$

esto es:

$$e^{\underline{A}t} = (6e^{-2t} - 8e^{-3t} + 3e^{-4t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$+ (3.5e^{-2t} - 6e^{-3t} + 2.5e^{-4t}) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix} +$$

$$+ (0.5e^{-2t} - e^{-3t} + 0.5e^{-4t}) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \\ 216 & 210 & 55 \end{bmatrix}$$

por lo tanto:

$$e^{\underline{A}t} = \begin{bmatrix} 6e^{-2t} - 8e^{-3t} + 3e^{-4t} & 3.5e^{-2t} - 6e^{-3t} + 2.5e^{-4t} & 0.5e^{-2t} - e^{-3t} + 0.5e^{-4t} \\ -12e^{-2t} + 24e^{-3t} - 12e^{-4t} & -7e^{-2t} + 18e^{-3t} - 10e^{-4t} & -e^{-2t} + 3e^{-3t} - 2e^{-4t} \\ 24e^{-2t} - 72e^{-3t} + 48e^{-4t} & 14e^{-2t} - 54e^{-3t} + 40e^{-4t} & 2e^{-2t} - 9e^{-3t} + 8e^{-4t} \end{bmatrix}$$

... (I)

c) Forma canónica de Jordán.

Obtención de la matriz modal:

$$[\lambda\underline{I} - \underline{A}] = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 24 & 26 & \lambda + 9 \end{bmatrix}$$

la matriz adjunta de $[\lambda\underline{I} - \underline{A}]$ es:

$$\text{Adj}[\lambda\underline{I} - \underline{A}] = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 9\lambda + 26 & \lambda + 9 & 1 \\ -24 & \lambda^2 + 9\lambda & \lambda \\ -24\lambda & -26\lambda - 24 & \lambda^2 \end{bmatrix}$$

por lo tanto, los vectores característicos son:

$$\underline{W}_1 = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 9\lambda + 26 \\ -24 \\ -24\lambda \end{bmatrix}_{\lambda = -2} = \begin{bmatrix} 12 \\ -24 \\ 48 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{W}_2 = \begin{bmatrix} \lambda + 9 \\ \lambda^2 + 9\lambda \\ -26\lambda - 24 \end{bmatrix}_{\lambda = -3} = \begin{bmatrix} 6 \\ -18 \\ 54 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\underline{W}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{bmatrix}_{\lambda = -4} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 16 \end{bmatrix}$$

la matriz modal es:

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} \underline{W}_1 & \underline{W}_2 & \underline{W}_3 \end{bmatrix}$$

o bien:

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \\ 4 & 9 & 16 \end{bmatrix}$$

Cabe mencionar que si la matriz $\underline{A}$ está expresada en su forma canónica controlable (matriz compañía) y ésta posee valores característicos distintos, la matriz modal se obtiene mediante la matriz de Vandermonde, esto es:

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{n-1} & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_{n-1}^2 & \lambda_n^2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & & \lambda_{n-1}^{n-1} & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

para este caso se tiene:

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \\ 4 & 9 & 16 \end{bmatrix}$$

la matriz modal inversa es:

$$\underline{M}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 12 & 7 & 1 \\ -16 & -12 & -2 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

la forma canónica de Jordan para la matriz $\underline{A}$ es:

$$\underline{J} = \underline{M}^{-1}\,\underline{A}\,\underline{M}$$

o bien:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

y en este caso la matriz de transición se obtiene mediante la expresión:

$$e^{\underline{A}t} = \underline{M}\,e^{\underline{J}t}\,\underline{M}^{-1}$$

esto es:

$$e^{\underline{A}t} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \\ 4 & 9 & 16 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-4t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 12 & 7 & 1 \\ -16 & -12 & -2 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

y la matriz de transición es:

$$e^{\underline{A}t} = \begin{bmatrix} 6e^{-2t} - 8e^{-3t} + 3e^{-4t} & 3.5e^{-2t} - 6e^{-3t} + 2.5e^{-4t} & 0.5e^{-2t} - e^{-3t} + 0.5e^{-4t} \\ -12e^{-2t} + 24e^{-3t} - 12e^{-4t} & -7e^{-2t} + 18e^{-3t} - 10e^{-4t} & -e^{-2t} + 3e^{-3t} - 2e^{-4t} \\ 24e^{-2t} - 72e^{-3t} + 48e^{-4t} & 14e^{-2t} - 54e^{-3t} + 40e^{-4t} & 2e^{-2t} - 9e^{-3t} + 8e^{-4t} \end{bmatrix} \quad \ldots \text{(II)}$$

d) Transformada de Laplace

La obtención de la matriz de transición mediante este procedimiento es:

$$e^{\underline{A}t} = L^{-1}\left\{ \left[s\underline{I} - \underline{A} \right]^{-1} \right\}$$

primero se procede a obtener la matriz inversa de $\left[s\underline{I} - \underline{A} \right]$.

La matriz $\left[s\underline{I} - \underline{A} \right]$ es:

$$\left[s\underline{I} - \underline{A} \right] = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 24 & 26 & s + 9 \end{bmatrix}$$

y la matriz transpuesta de $\left[s\underline{I} - \underline{A} \right]$ es:

$$\left[s\underline{I} - \underline{A} \right]^{T} = \begin{bmatrix} s & 0 & 24 \\ -1 & s & 26 \\ 0 & -1 & s + 9 \end{bmatrix}$$

por lo tanto, la matriz adjunta de $[S\underline{I} - \underline{A}]$ en este caso es:

$$\text{Adj}[S\underline{I} - \underline{A}] = \begin{bmatrix} S^2 + 9S + 26 & S + 9 & 1 \\ -24 & S^2 + 9S & S \\ -24S & -26S - 24 & S^2 \end{bmatrix}$$

el determinante de la matriz $[S\underline{I} - \underline{A}]$ es:

$$|S\underline{I} - \underline{A}| = \begin{bmatrix} S & -1 & 0 \\ 0 & S & -1 \\ 24 & 26 & S+9 \end{bmatrix} = S^3 + 9S^2 + 26S + 24 = 0$$

o bien:

$$|S\underline{I} - \underline{A}| = (S + 2)(S + 3)(S + 4)$$

la matriz inversa de $[S\underline{I} - \underline{A}]$ se obtiene mediante la expresión:

$$[S\underline{I} - \underline{A}]^{-1} = \frac{\text{Adj}[S\underline{I} - \underline{A}]}{|S\underline{I} - \underline{A}|}$$

esto es:

$$[S\underline{I} - \underline{A}]^{-1} = \frac{1}{(S+2)(S+3)(S+4)} \begin{bmatrix} S^2 + 9S + 26 & S + 9 & 1 \\ -24 & S^2 + 9S & S \\ -24S & -26S - 24 & S^2 \end{bmatrix}$$

por lo tanto, la matriz de transición es:

$$e^{\underline{A}t} = L^{-1} \left\{ [S\underline{I} - \underline{A}]^{-1} \right\}$$

puesto que en este caso no es posible obtener la transformada inversa de Laplace de la matriz inversa de $[S\underline{I} - \underline{A}]^{-1}$, es necesario hacer una expansión en fracciones parciales para cada elemento de la matriz $[S\underline{I} - \underline{A}]^{-1}$, esto es:

$$\frac{S^2 + 9S + 26}{(S+2)(S+3)(S+4)} = \frac{6}{S+2} - \frac{8}{S+3} + \frac{3}{S+4}$$

$$\frac{S+9}{(S+2)(S+3)(S+4)} = \frac{3.5}{S+2} - \frac{6}{S+3} + \frac{2.5}{S+4}$$

$$\frac{1}{(S+2)(S+3)(S+4)} = \frac{0.5}{S+2} - \frac{1}{S+3} + \frac{0.5}{S+4}$$

$$\frac{-24}{(S+2)(S+3)(S+4)} = \frac{-12}{S+2} + \frac{24}{S+3} - \frac{12}{S+4}$$

$$\frac{S^2 + 9S}{(S+2)(S+3)(S+4)} = \frac{-7}{S+2} + \frac{18}{S+3} - \frac{10}{S+4}$$

$$\frac{S}{(S+2)(S+3)(S+4)} = \frac{-1}{S+2} + \frac{3}{S+3} - \frac{2}{S+4}$$

$$\frac{-24S}{(S+2)(S+3)(S+4)} = \frac{24}{S+2} - \frac{72}{S+3} + \frac{48}{S+4}$$

$$\frac{-26S - 24}{(S+2)(S+3)(S+4)} = \frac{14}{S+2} - \frac{54}{S+3} + \frac{40}{S+4}$$

$$\frac{S^2}{(S+2)(S+3)(S+4)} = \frac{2}{S+2} - \frac{9}{S+3} + \frac{8}{S+4}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace a cada uno de los elementos de $[S\underline{I} - \underline{A}]^{-1}$, se tiene que la matriz de transición es:

$$e^{\underline{A}t} = \begin{bmatrix} 6e^{-2t} - 8e^{-3t} + 3e^{-4t} & 3.5e^{-2t} - 6e^{-3t} + 2.5e^{-4t} & 0.5e^{-2t} - e^{-3t} + 0.5e^{-4t} \\ -12e^{-2t} + 24e^{-3t} - 12e^{-4t} & -7e^{-2t} + 18e^{-3t} - 10e^{-4t} & -e^{-2t} + 3e^{-3t} - 2e^{-4t} \\ 24e^{-2t} - 72e^{-3t} + 48e^{-4t} & 14e^{-2t} - 54e^{-3t} + 40e^{-4t} & 2e^{-2t} - 9e^{-3t} + 8e^{-4t} \end{bmatrix} \quad \ldots \text{(III)}$$

e) Teorema de Sylvester

Para este caso es necesario obtener la matriz adjunta de $[\lambda \underline{I} - \underline{A}]$ y el polinomio característico de $[\lambda \underline{I} - \underline{A}]$, esto fue calculado en el inciso (c), por lo tanto:

$$\mathrm{Adj}[\lambda \underline{I} - \underline{A}] = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 9\lambda + 26 & \lambda + 9 & 1 \\ -24 & \lambda^2 + 9\lambda & \lambda \\ -24\lambda & -26\lambda - 24 & \lambda^2 \end{bmatrix}$$

y

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 9\lambda^2 + 26\lambda + 24$$

por lo tanto:

$$\lambda_1 = -2$$
$$\lambda_2 = -3$$
$$\lambda_3 = -4$$

la derivada con respecto a λ del polinomio característico es:

$$\frac{dP(\lambda)}{d\lambda} = 3\lambda^2 + 18\lambda + 26$$

ahora, se procede a evaluar los coeficientes $Z_0(\lambda i)$ de la forma:

$$Z_0(\lambda i) = \left. \frac{\mathrm{Adj}[\lambda \underline{I} - \underline{A}]}{\frac{dP(\lambda)}{d\lambda}} \right|_{\lambda = \lambda i}$$

por lo que:

$$Z_0(-2) = \begin{bmatrix} 6 & 3.5 & 0.5 \\ -12 & -7 & -1 \\ 24 & 14 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Z_0(-3) = \begin{bmatrix} -8 & -6 & -1 \\ 24 & 18 & 3 \\ -72 & -54 & -9 \end{bmatrix}$$

$$Z_0(-4) = \begin{bmatrix} 3 & 2.5 & 0.5 \\ -12 & -10 & -2 \\ 48 & 40 & 8 \end{bmatrix}$$

si:

$$N(\underline{A}) = e^{\underline{A}t}$$

entonces:

$$N(\lambda i) = e^{\lambda it}$$

y:

$$N(-2) = e^{-2t}$$

$$N(-3) = e^{-3t}$$

$$N(-4) = e^{-4t}$$

por lo tanto, la matriz de transición se obtiene aplicando la siguiente expresión:

$$N(\underline{A}) = \sum_{i=1}^{n} N(\lambda i)\ Z_0(\lambda i)$$

y para este caso:

$$e^{\underline{A}t} = e^{-2t}\ Z_0(-2) + e^{-3t}\ Z_0(-3) + e^{-4t}\ Z_0(-4)$$

o bien:

$$e^{\underline{A}t} = e^{-2t}\begin{bmatrix} 6 & 3.5 & 0.5 \\ -12 & -7 & -1 \\ 24 & 14 & 2 \end{bmatrix} + e^{-3t}\begin{bmatrix} -8 & -6 & -1 \\ 24 & 18 & 3 \\ -72 & -54 & -9 \end{bmatrix} +$$

$$+ e^{-4t}\begin{bmatrix} 3 & 2.5 & 0.5 \\ -12 & -10 & -2 \\ 48 & 40 & 8 \end{bmatrix}$$

así la matriz de transición está dada por:

$$e^{\underline{A}t} = \begin{bmatrix} 6e^{-2t} - 8e^{-3t} + 3e^{-4t} & 3.5e^{-2t} - 6e^{-3t} + 2.5e^{-4t} & 0.5e^{-2t} - e^{-3t} + 0.5e^{-4t} \\ -12e^{-2t} + 24e^{-3t} - 12e^{-4t} & -7e^{-2t} + 18e^{-3t} - 10e^{-4t} & -e^{-2t} + 3e^{-3t} - 2e^{-4t} \\ 24e^{-2t} - 72e^{-3t} + 48e^{-4t} & 14e^{-2t} - 54e^{-3t} + 40e^{-4t} & 2e^{-2t} - 9e^{-3t} + 8e^{-4t} \end{bmatrix} \quad \text{... (IV)}$$

f) Fórmula de interpolación de Sylvester.

Con base en la fórmula de interpolación de Sylvester, se tiene que el determinante a resolver es:

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & e^{\lambda_1 t} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & e^{\lambda_2 t} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & e^{\lambda_3 t} \\ \underline{I} & \underline{A} & \underline{A}^2 & e^{\underline{A}t} \end{vmatrix} = 0$$

sin embargo:

$$\lambda_1 = -2 \quad ; \quad \lambda_2 = -3 \quad ; \quad \lambda_3 = -4$$

por lo que:

$$e^{\lambda_1 t} = e^{-2t}$$

$$e^{\lambda_2 t} = e^{-3t}$$

$$e^{\lambda_3 t} = e^{-4t}$$

esto es:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & e^{-2t} \\ 1 & -3 & 9 & e^{-3t} \\ 1 & -4 & 16 & e^{-4t} \\ \underline{I} & \underline{A} & \underline{A}^2 & e^{\underline{A}t} \end{vmatrix} = 0$$

resolviendo se obtiene:

$$e^{\underline{A}t}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 9 \\ 1 & -4 & 16 \end{vmatrix} - e^{-4t}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 9 \\ \underline{I} & \underline{A} & \underline{A}^2 \end{vmatrix} + e^{-3t}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -4 & 16 \\ \underline{I} & \underline{A} & \underline{A}^2 \end{vmatrix} - e^{-2t}\begin{vmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 1 & -4 & 16 \\ \underline{I} & \underline{A} & \underline{A}^2 \end{vmatrix} = 0$$

o bien:

$$-2e^{\underline{A}t} - e^{-4t}(-\underline{A}^2 - 5\underline{A} - 6\underline{I}) + e^{-3t}(-2\underline{A}^2 - 12\underline{A} - 16\underline{I}) - e^{-2t}(-\underline{A}^2 - 7\underline{A} - 12\underline{I}) = 0$$

despejando $e^{\underline{A}t}$ se tiene:

$$e^{\underline{A}t} = \frac{1}{2}\, e^{-2t}(\underline{A}^2 + 7\underline{A} + 12\underline{I}) - \frac{1}{2}\, e^{-3t}(2\underline{A}^2 + 12\underline{A} + 16\underline{I}) + \frac{1}{2}\, e^{-4t}(\underline{A}^2 + 5\underline{A} + 6\underline{I})$$

ahora bien:

$$\frac{1}{2}\ (\underline{A}^2 + 7\underline{A} + 12\underline{I}) = \begin{bmatrix} 6 & 3.5 & 0.5 \\ -12 & -7 & -1 \\ 24 & 14 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\ (2\underline{A}^2 + 12\underline{A} + 16\underline{I}) = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 1 \\ -24 & -18 & -3 \\ 72 & 54 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\ (\underline{A}^2 + 5\underline{A} + 6I) = \begin{bmatrix} 3 & 2.5 & 0.5 \\ -12 & -10 & -2 \\ 48 & 40 & 8 \end{bmatrix}$$

por lo tanto, la matriz de transición es:

$$e^{\underline{A}t} = \begin{bmatrix} 6e^{-2t} - 8e^{-3t} + 3e^{-4t} & 3.5e^{-2t} - 6e^{-3t} + 2.5e^{-4t} & 0.5e^{-2t} - e^{-3t} + 0.5e^{-4t} \\ -12e^{-2t} + 24e^{-3t} - 12e^{-4t} & -7e^{-2t} + 18e^{-3t} - 10e^{-4t} & -e^{-2t} + 3e^{-3t} - 2e^{-4t} \\ 24e^{-2t} - 72e^{-3t} + 48e^{-4t} & 14e^{-2t} - 54e^{-3t} + 40e^{-4t} & 2e^{-2t} - 9e^{-3t} + 8e^{-4t} \end{bmatrix} \qquad \ldots (V)$$

Comparando las ecuaciones (I) a (V), se observa que se obtiene el mismo resultado.

Ejemplo V.10

Obtener la matriz de transición $e^{\underline{A}t}$ para el sistema cuya representación en variables de estado es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Para la obtención de $e^{\underline{A}t}$ emplear los procedimientos descritos en la presente sección.

Solución:

a) En este caso no se presenta la obtención de la matriz de transición por medio del caso particular de la serie de Peano - Baker, debido a que este procedimiento es útil cuando se emplea una computadora para evaluar $e^{\underline{A}t}$.

b) Valores característicos por el teorema de Cayley - Hamilton.

Primeramente es necesario obtener el polinomio característico de la matriz $\underline{A}$, esto es:

$$|\lambda\underline{I} - \underline{A}| = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 2 & 5 & \lambda + 4 \end{bmatrix} = \lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2 = 0$$

por lo tanto, los valores característicos son:

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = -1$$

$$\lambda_3 = -2$$

una vez obtenidos los valores característicos de la matriz $\underline{A}$, es necesario generar el sistema de ecuaciones para evaluar los parámetros α_i. Esto se logra por medio de:

$$e^{\lambda t}\Big|_{\lambda = \lambda i} = \sum_{k=0}^{2} \alpha_k \lambda^k \Big|_{\lambda = \lambda i} \qquad i = 1, 2, 3$$

puesto que en este caso se tienen dos valores característicos iguales, una de las ecuaciones asociadas a estos valores característicos se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$\frac{d}{d\lambda} e^{\lambda t}\Big|_{\lambda = -1} = \frac{d}{d\lambda}\left[\sum_{k=0}^{2} \alpha_k \lambda^k\right]\Big|_{\lambda = -1}$$

de esta manera el sistema de ecuaciones es:

$$te^{-t} = \alpha_1 - 2\alpha_2$$

$$e^{-t} = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$$

$$e^{-2t} = \alpha_0 - 2\alpha_1 + 4\alpha_2$$

o bien:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} te^{-t} \\ e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$$

resolviendo la ecuación anterior, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} te^{-t} \\ e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$$

o bien:

$$\alpha_0 = 2te^{-t} + e^{-2t}$$

$$\alpha_1 = 3te^{-t} - 2e^{-t} + 2e^{-2t}$$

$$\alpha_2 = te^{-t} - e^{-t} + e^{-2t}$$

y la matriz de transición se obtiene mediante la expresión:

$$e^{\underline{A}t} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \underline{A}^k \quad , \quad n = 3$$

de esta manera:

$$e^{\underline{A}t} = \alpha_0 \underline{I} + \alpha_1 \underline{A} + \alpha_2 \underline{A}^2$$

esto es:

$$e^{\underline{A}t} = (2te^{-t} + e^{-2t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} +$$

$$+ (3te^{-t} - 2e^{-t} + 2e^{-2t}) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{bmatrix} +$$

$$+ (te^{-t} - e^{-t} + e^{-2t}) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \\ 8 & 18 & 11 \end{bmatrix}$$

por lo tanto:

$$\underline{A}t = \begin{bmatrix} 2te^{-t} + e^{-2t} & 3te^{-t} - 2e^{-t} + 2e^{-2t} & te^{-t} - e^{-t} + e^{-2t} \\ -2te^{-t} + 2e^{-t} - 2e^{-2t} & -3te^{-t} + 5e^{-t} - 4e^{-2t} & -te^{-t} + 2e^{-t} - 2e^{-2t} \\ 2te^{-t} - 4e^{-t} + 4e^{-2t} & 3te^{-t} - 8e^{-t} + 8e^{-2t} & te^{-t} - 3e^{-t} + 4e^{-2t} \end{bmatrix}$$

c) Forma canónica de Jordan.

Obtención de la matriz modal:

$$[\lambda\underline{I} - \underline{A}] = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 2 & 5 & \lambda + 4 \end{bmatrix}$$

la matriz adjunta de $[\lambda\underline{I} - \underline{A}]$ es:

$$\mathrm{Adj}[\lambda\underline{I} - \underline{A}] \quad \begin{bmatrix} \lambda^2 + 4\lambda + 5 & \lambda + 4 & 1 \\ -2 & \lambda^2 + 4\lambda & \lambda \\ -2 & -5\lambda - 2 & \lambda^2 \end{bmatrix}$$

la degeneración de la matriz es:

$$q_i = n - \text{Rango } [\underline{A} - \underline{I}\lambda_i]$$

y la multiplicidad algebraica del valor característico repetido es:

$$m_i = 2$$

para $\lambda_i = \lambda_1 = -1$

$$q_1 = 3 - \text{Rango} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -5 & -3 \end{bmatrix} = 1$$

por lo tanto, la degeneración es simple y los vectores característicos se obtienen de la siguiente manera:

$$\left[A + I\right] \underline{W}_1 = \underline{0}$$

esto es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -5 & -3 \end{bmatrix} \underline{W}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de donde se obtiene:

$$\underline{W}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

el segundo vector característico se obtiene como:

$$\left[\underline{A} + \underline{I}\right] \underline{W}_2 = \underline{W}_1$$

esto es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -5 & -3 \end{bmatrix} \underline{W}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

resolviendo la ecuación anterior se obtiene:

$$\underline{W}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

el tercer vector característico se calcula de la forma:

$$\left[\underline{A} + 2\underline{I}\right] \underline{W}_3 = \underline{0}$$

esto es:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & -2 \end{bmatrix} \underline{W}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de donde se obtiene:

$$\underline{W}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

por lo tanto, la matriz modal es:

$$\underline{M} = \left[\underline{W}_1 \quad \underline{W}_2 \quad \underline{W}_3\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

y la matriz modal inversa es entonces:

$$\underline{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

la forma canónica de Jordan de la matriz $\underline{A}$ está dada por:

$$\underline{J} = \underline{M}^{-1}\,\underline{A}\,\underline{M}$$

o bien:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

la matriz exponencial de Jordan es en este caso:

$$e^{\underline{J}t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

y la matriz de transición se obtiene empleando la expresión:

$$e^{\underline{A}t} = \underline{M}\,e^{\underline{J}t}\,\underline{M}^{-1}$$

esto es:

$$e^{\underline{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

finalmente la matriz de transición es:

$$e^{\underline{A}t} = \begin{bmatrix} 2te^{-t} + e^{-2t} & 3te^{-t} - 2e^{-t} + 2e^{-2t} & te^{-t} - e^{-t} + e^{-2t} \\ -2te^{-t} + 2e^{-t} - 2e^{-2t} & -3te^{-t} + 5e^{-t} - 4e^{-2t} & -te^{-t} + 2e^{-t} - 2e^{-2t} \\ 2te^{-t} - 4e^{-t} + 4e^{-2t} & 3te^{-t} - 8e^{-t} + 8e^{-2t} & te^{-t} - 3e^{-t} + 4e^{-2t} \end{bmatrix}$$

d) Transformada de Laplace.

La obtención de la matriz de transición por medio de este procedimiento es:

$$e^{\underline{A}t} = L^{-1}\left\{ [S\underline{I} - \underline{A}]^{-1} \right\}$$

obtención de la matriz inversa $[S\underline{I} - \underline{A}]$:

$$[S\underline{I} - \underline{A}] = \begin{bmatrix} S & -1 & 0 \\ 0 & S & -1 \\ 2 & 5 & S+4 \end{bmatrix}$$

la matriz adjunta $[S\underline{I} - \underline{A}]$ es:

$$\mathrm{Adj}[S\underline{I} - \underline{A}] \begin{bmatrix} S^2 + 4S + 5 & S + 4 & 1 \\ -2 & S^2 + 4S & S \\ -2S & -5S - 2 & S^2 \end{bmatrix}$$

el determinante de la matriz $[S\underline{I} - \underline{A}]$ será:

$$|S\underline{I} - \underline{A}| = S^3 + 4S^2 + 5S + 2 = (S+1)^2 (S+2)$$

por lo tanto, la matriz inversa $[S\underline{I} - \underline{A}]$ es:

$$[S\underline{I} - \underline{A}]^{-1} = \frac{\mathrm{Adj}\,[S\underline{I} - \underline{A}]}{|S\underline{I} - \underline{A}|}$$

o bien:

$$[S\underline{I} - \underline{A}]^{-1} = \frac{1}{(S+1)^2(S+2)}\begin{bmatrix} S^2+4S+5 & S+4 & 1 \\ -2 & S^2+4S & S \\ -2S & -5S-2 & S^2 \end{bmatrix}$$

y las fracciones parciales de los elementos de la matriz $[S\underline{I} - \underline{A}]^{-1}$ son:

$$\frac{S^2+4S+5}{(S+1)^2(S+2)} = \frac{2}{(S+1)^2} + \frac{1}{S+2}$$

$$\frac{S+4}{(S+1)^2(S+2)} = \frac{3}{(S+1)^2} - \frac{2}{S+1} + \frac{2}{S+2}$$

$$\frac{1}{(S+1)^2(S+2)} = \frac{1}{(S+1)^2} - \frac{1}{S+1} + \frac{1}{S+2}$$

$$\frac{-2}{(S+1)^2(S+2)} = \frac{-2}{(S+1)^2} + \frac{2}{S+1} - \frac{2}{S+2}$$

$$\frac{S^2+4S}{(S+1)^2(S+2)} = \frac{-3}{(S+1)^2} + \frac{5}{S+1} - \frac{4}{S+2}$$

$$\frac{S}{(S+1)^2(S+2)} = \frac{-1}{(S+1)^2} + \frac{2}{S+1} - \frac{2}{S+2}$$

$$\frac{-2S}{(S+1)^2(S+2)} = \frac{2}{(S+1)^2} - \frac{4}{S+1} + \frac{4}{S+2}$$

$$\frac{-5S-2}{(S+1)^2(S+2)} = \frac{3}{(S+1)^2} - \frac{8}{S+1} + \frac{8}{S+2}$$

$$\frac{S^2}{(S+1)^2(S+2)} = \frac{1}{(S+1)^2} - \frac{3}{S+1} + \frac{4}{S+2}$$

por lo tanto, la matriz de transición es en este caso:

$$e^{\underline{A}t} = \begin{bmatrix} 2te^{-t} + e^{-2t} & 3te^{-t} - 2e^{-t} + 2e^{-2t} & te^{-t} - e^{-2t} + e^{-2t} \\ -2te^{-t} + 2e^{-t} - 2e^{-2t} & -3te^{-t} + 5e^{-t} - 4e^{-2t} & -te^{-t} + 2e^{-t} - 2e^{-2t} \\ 2te^{-t} - 4e^{-t} + 4e^{-2t} & 3te^{-t} - 8e^{-t} + 8e^{-2t} & te^{-t} - 3e^{-t} + 4e^{-2t} \end{bmatrix}$$

e) Teorema de Sylvester

En este caso se requiere emplear la matriz adjunta de $[\lambda\underline{I} - \underline{A}]$ y el polinomio característico $P(\lambda) = |\lambda\underline{I} - \underline{A}|$; éstos fueron calculados en el inciso (c) y son:

$$\mathrm{Adj}[\lambda\underline{I} - \underline{A}] = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 4\lambda + 5 & \lambda + 4 & 1 \\ -2 & \lambda^2 + 4\lambda & \lambda \\ -2\lambda & -5\lambda - 2 & \lambda^2 \end{bmatrix}$$

y

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2$$

de donde, los valores característicos son:

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = -1$$

$$\lambda_3 = -2$$

la derivada con respecto a λ del polinomio característico es:

$$\frac{dP(\lambda)}{d\lambda} = 3\lambda^2 + 8\lambda + 5$$

ahora se procede a evaluar los coeficientes $Z_0(-1)$, $Z_1(-1)$ y $Z_0(-2)$:

$$Z_0(\lambda)\Big|_{\lambda=-2} = \left.\frac{\text{Adj}\left[\lambda \underline{I} - \underline{A}\right]}{\frac{dP(\lambda)}{d\lambda}}\right|_{\lambda=-2}$$

$$\text{Adj}\left[\lambda \underline{I} - \underline{A}\right]\Big|_{\lambda=-2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \\ 4 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

por lo que:

$$Z_0(-2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \\ 4 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

por otra parte:

$$Z_0(\lambda)\Big|_{\lambda=-1} = \left.\frac{\text{Adj}\left[\lambda \underline{I} - \underline{A}\right]}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} (\lambda_i - \lambda_j)}\right|_{\lambda=-1}$$

$$\text{Adj}\left[\lambda \underline{I} - \underline{A}\right]\Big|_{\lambda=-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces:

$$Z_0(-1) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Z_1(\lambda)\Big|_{\lambda=-1} = \frac{d}{d\lambda}\left.\frac{\text{Adj}\left[\lambda \underline{I} - \underline{A}\right]}{\lambda + 2}\right|_{\lambda=-1}$$

de esta manera:

$$\frac{d}{d\lambda}\ \frac{\mathrm{Adj}\left[\lambda \underline{I} - \underline{A}\right]}{\lambda + 2} = \frac{(\lambda + 2)\frac{d}{d\lambda}\mathrm{Adj}\left[\lambda \underline{I} - \underline{A}\right] - \mathrm{Adj}\left[\lambda \underline{I} - \underline{A}\right]}{(\lambda + 2)^2}$$

y;

$$\frac{d}{d\lambda}\ \mathrm{Adj}\left[\lambda \underline{I} - \underline{A}\right] = \begin{bmatrix} 2\lambda + 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2\lambda + 4 & 1 \\ -2 & -5 & 2\lambda \end{bmatrix}$$

por lo tanto:

$$Z_1(-1) = \left[\frac{d}{d\lambda}\mathrm{Adj}\left[\lambda \underline{I} - \underline{A}\right] - \mathrm{Adj}\left[\lambda \underline{I} - \underline{A}\right]\right]\Bigg|_{\lambda = -1}$$

o bien:

$$Z_1(-1) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ -4 & -8 & -3 \end{bmatrix}$$

por lo tanto:

$$N(\underline{A}) = N(-1)\ Z_1(-1) + \frac{d}{d\lambda}N(\lambda)\Bigg|_{\lambda = -1} Z_0(-1) + N(-2)\ Z_0(-2)$$

si:

$$N(\underline{A}) = e^{\underline{A}t}$$

entonces:

$$N(\lambda) = e^{\lambda t}$$

de esta manera:

$$\frac{d}{d\lambda}\ N(\lambda) = te^{\lambda t}$$

finalmente la matriz de transición es:

$$e^{\underline{A}t} = Z_1(-1)e^{-t} + Z_0(-1)te^{-t} + Z_0(-2)e^{-2t}$$

o bien:

$$e^{\underline{A}t} = \begin{bmatrix} 2te^{-t} + e^{-2t} & 3te^{-t} - 2e^{-t} + 2e^{-2t} & te^{-t} - e^{-t} + e^{-2t} \\ -2te^{-t} + 2e^{-t} - 2e^{-t} & -3te^{-t} + 5e^{-t} - 4e^{-2t} & -te^{-t} + 2e^{-t} - 2e^{-2t} \\ 2te^{-t} - 4e^{-t} + 4e^{-2t} & 3te^{-t} - 8e^{-t} + 8e^{-2t} & te^{-t} - 3e^{-t} + 4e^{-2t} \end{bmatrix}$$

f) Fórmula de interpolación de Sylvester.

Con base en la fórmula de interpolación de Sylvester, se tiene que el determinante a resolver es en este caso:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2\lambda_1 & f'(\lambda_1) \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & f(\lambda_1) \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & f(\lambda_3) \\ \underline{I} & \underline{A} & \underline{A}^2 & f(\underline{A}) \end{vmatrix} = 0$$

donde:

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = -1$$

$$\lambda_3 = -2$$

$$f'(\lambda_1) = te^{-t}$$

$$f(\lambda_1) = e^{-t}$$

$$f(\lambda_3) = e^{-2t}$$

$$f(\underline{A}) = e^{\underline{A}t}$$

sustituyendo valores:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & te^{-t} \\ 1 & -1 & 1 & e^{-t} \\ 1 & -2 & 4 & e^{-2t} \\ \underline{I} & \underline{A} & \underline{A}^2 & e^{\underline{A}t} \end{vmatrix} = 0$$

resolviendo:

$$0 = e^{\underline{A}t} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} - e^{-2t} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ \underline{I} & \underline{A} & \underline{A}^2 \end{vmatrix} +$$

$$+ e^{-t} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \\ \underline{I} & \underline{A} & \underline{A}^2 \end{vmatrix} - te^{-t} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ \underline{I} & \underline{A} & \underline{A}^2 \end{vmatrix}$$

o bien:

$$e^{\underline{A}t} = e^{-2t}(\underline{A}^2 + 2\underline{A} + \underline{I}) + e^{-t}(-\underline{A}^2 - 2\underline{A}) + te^{-t}(\underline{A}^2 + 3\underline{A} + 2\underline{I})$$

entonces:

$$e^{\underline{A}t} = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \\ 4 & 8 & 4 \end{bmatrix} + e^{-t} \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ -4 & -8 & -3 \end{bmatrix} +$$

$$+ te^{-t} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

finalmente la matriz de transición es:

$$\underline{e}^{\underline{A}t} = \begin{bmatrix} 2te^{-t} + e^{-2t} & 3te^{-t} - 2e^{-t} + 2e^{-2t} & te^{-t} - e^{-t} + e^{-2t} \\ -2te^{-t} + 2e^{-t} - 2e^{-t} & -3te^{-t} + 5e^{-t} - 4e^{-2t} & -te^{-t} + 2e^{-t} - 2e^{-2t} \\ 2te^{-t} - 4e^{-t} + 4e^{-2t} & 3te^{-t} - 8e^{-t} + 8e^{-2t} & te^{-t} - 3e^{-t} + 4e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Ejemplo V.11

Obtener la matriz de transición $\underline{e}^{\underline{A}t}$ para el sistema cuya representación en variables de estado es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_{-1}(t)$$

$$\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Para la obtención de $\underline{e}^{\underline{A}t}$ emplear los procedimientos descritos en la presente sección.

Solución:

a) En este caso no se presenta la obtención de la matriz de transición por medio del caso particular de la serie de Peano - Baker debido a que este método es útil cuando se emplea una computadora digital.

b) Valores característicos por el teorema de Cayley - Hamilton.

Primeramente es necesario obtener el polinomio característico de la matriz $\underline{A}$, esto es:

$$|\lambda \underline{I} - \underline{A}| = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 3 & \lambda + 3 \end{bmatrix} = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$$

por lo tanto, los valores característicos son:

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = -1$$

$$\lambda_3 = -1$$

una vez obtenidos los valores característicos, es necesario generar el sistema de ecuaciones para evaluar los parámetros α_i, esto se logra por medio de:

$$e^{\lambda t}\Big|_{\lambda = \lambda i} = \sum_{k=0}^{2} \alpha_k \lambda^k \Big|_{\lambda = \lambda i} \qquad i = 1, 2, 3$$

puesto que en este caso se tienen tres valores característicos iguales, el sistema de ecuaciones se obtiene a partir de las siguientes expresiones:

$$e^{\lambda t}\Big|_{\lambda = -1} = \sum_{k=0}^{2} \alpha_k \lambda^k \Big|_{\lambda = -1}$$

$$\frac{d}{d\lambda} e^{\lambda t}\Big|_{\lambda = -1} = \frac{d}{d\lambda} \left[\sum_{k=0}^{2} \alpha_k \lambda^k \right] \Big|_{\lambda = -1}$$

$$\frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\lambda^2} e^{\lambda t}\Big|_{\lambda = -1} = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\lambda^2} \left[\sum_{k=0}^{2} \alpha_k \lambda^k \right] \Big|_{\lambda = -1}$$

de esta manera, el sistema de ecuaciones es:

$$e^{-t} = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$$

$$te^{-t} = \alpha_1 - 2\alpha_2$$

$$\frac{1}{2} t^2 e^{-t} = \alpha_2$$

o bien:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ te^{-t} \\ \frac{1}{2}t^2e^{-t} \end{bmatrix}$$

resolviendo la ecuación anterior, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} \\ te^{-t} \\ \frac{1}{2}\, t^2e^{-t} \end{bmatrix}$$

o bien:

$$\alpha_0 = e^{-t} + te^{-t} + \frac{1}{2}\, t^2e^{-t}$$

$$\alpha_1 = te^{-t} + t^2e^{-t}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}\, t^2e^{-t}$$

y la matriz de transición se obtiene mediante la si guiente expresión:

$$e^{\underline{A}t} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k\, \underline{A}^k \quad ; \quad n = 3$$

de esta manera:

$$e^{\underline{A}t} = \alpha_0\underline{I} + \alpha_1\underline{A} + \alpha_2\underline{A}^2$$

esto es:

$$\underline{e}^{\underline{A}t} = (e^{-t} + te^{-t} + \frac{1}{2}t^2e^{-t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} +$$

$$+ \quad (te^{-t} + t^2e^{-t}) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix} +$$

$$+ \quad \frac{1}{2}t^2e^{-t} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \\ 3 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

por lo tanto:

$$\underline{e}^{\underline{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-t} + te^{-t} + \frac{1}{2}t^2e^{-t} & te^{-t} + t^2e^{-t} & \frac{1}{2}t^2e^{-t} \\ -\frac{1}{2}t^2e^{-t} & e^{-t} + te^{-t} - t^2e^{-t} & te^{-t} - \frac{1}{2}t^2e^{-t} \\ -te^{-t} + \frac{1}{2}t^2e^{-t} & -3te^{-t} + t^2e^{-t} & e^{-t} - 2te^{-t} + \frac{1}{2}t^2e^{-t} \end{bmatrix}$$

c) Forma canónica de Jordan

Obtención de la matriz modal:

$$[\lambda I - \underline{A}] = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 3 & \lambda + 3 \end{bmatrix}$$

la matriz adjunta de $[\lambda \underline{I} - \underline{A}]$ es:

$$\text{Adj}[\lambda \underline{I} - \underline{A}] = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 3\lambda + 3 & \lambda + 3 & 1 \\ -1 & \lambda^2 + 3\lambda & \lambda \\ -\lambda & -3\lambda - 1 & \lambda^2 \end{bmatrix}$$

la degeneración de la matriz es:

$$q_i = n - \text{Rango}\,[\underline{A} - \underline{I}\lambda i]$$

y la multiplicidad algebraica del valor característico repetido es:

$$mi = 3$$

para $\lambda i = \lambda_1 = -1$:

$$q_1 = 3 - \text{Rango}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix} = 1$$

por lo tanto, la degeneración es simple y los vectores característicos se obtienen de la siguiente manera:

$$[\underline{A} + \underline{I}]\, \underline{W}_1 = \underline{0}$$

esto es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \underline{W}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de donde se obtiene:

$$\underline{W}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

el segundo vector característico se obtiene como:

$$[\underline{A} + \underline{I}]\underline{W}_2 = \underline{W}_1$$

esto es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \underline{W}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

por lo que:

$$\underline{W}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

y el tercer vector característico se calcula de siguiente forma:

$$[\underline{A} + \underline{I}]\underline{W}_3 = \underline{W}_2$$

esto es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \underline{W}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

de donde se obtiene:

$$\underline{W}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

por lo tanto, la matriz modal es:

$$\underline{M} = \left[\underline{W}_1 \quad \underline{W}_2 \quad \underline{W}_3\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

y la matriz modal inversa es entonces:

$$\underline{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

la forma canónica de Jordan de la matriz $\underline{A}$ es:

$$\underline{J} = \underline{M}^{-1}\,\underline{A}\,\underline{M}$$

o bien:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

la matriz exponencial de Jordan es en este caso:

$$e^{\underline{J}t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & \frac{1}{2}\,t^2e^{-t} \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

y la matriz de transición se obtiene por medio de la siguiente expresión:

$$e^{\underline{A}t} = \underline{M}\, e^{\underline{J}t}\, \underline{M}^{-1}$$

esto es:

$$e^{\underline{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & \frac{1}{2}t^2e^{-t} \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

finalmente la matriz de transición es:

$$e^{\underline{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-t} + te^{-t} + \frac{1}{2}t^2e^{-t} & te^{-t} + t^2e^{-t} & \frac{1}{2}t^2e^{-t} \\ -\frac{1}{2}t^2e^{-t} & e^{-t} + te^{-t} - t^2e^{-t} & te^{-t} - \frac{1}{2}t^2e^{-t} \\ -te^{-t} + \frac{1}{2}t^2e^{-t} & -3te^{-t} + t^2e^{-t} & e^{-t} - 2te^{-t} + \frac{1}{2}t^2e^{-t} \end{bmatrix}$$

d) Transformada de Laplace.

La obtención de la matriz de transición mediante este procedimiento es:

$$e^{\underline{A}t} = L^{-1}\left\{ [s\underline{I} - \underline{A}]^{-1} \right\}$$

Obtención de la matriz inversa $[s\underline{I} - \underline{A}]$:

$$[s\underline{I} - \underline{A}] = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1 & 3 & s+3 \end{bmatrix}$$

la matriz adjunta $[S\underline{I} - \underline{A}]$ es:

$$\text{Adj}[S\underline{I} - \underline{A}] = \begin{bmatrix} S^2 + 3S + 3 & S + 3 & 1 \\ -1 & S^2 + 3S & S \\ -S & -3S - 1 & S^2 \end{bmatrix}$$

el determinante de la matriz $[S\underline{I} - \underline{A}]$ será entonces:

$$|S\underline{I} - \underline{A}| = S^3 + 3S^2 + 3S + 1 = (S + 1)^3$$

por lo tanto, la matriz inversa $[S\underline{I} - \underline{A}]$ es:

$$[S\underline{I} - \underline{A}]^{-1} = \frac{\text{Adj}[S\underline{I} - \underline{A}]}{|S\underline{I} - \underline{A}|}$$

o bien:

$$[S\underline{I} - \underline{A}]^{-1} = \frac{1}{(S + 1)^3} \begin{bmatrix} S^2 + 3S + 3 & S + 3 & 1 \\ -1 & S^2 + 3S & S \\ -S & -3S - 1 & S^2 \end{bmatrix}$$

y las fracciones parciales de la matriz $[S\underline{I} - \underline{A}]^{-1}$ son:

$$\frac{S^2 + 3S + 3}{(S + 1)^3} = \frac{1}{(S + 1)^3} + \frac{1}{(S + 1)^2} + \frac{1}{S + 1}$$

$$\frac{S + 3}{(S + 1)^3} = \frac{2}{(S + 1)^3} + \frac{1}{(S + 1)^2}$$

$$\frac{1}{(S + 1)^3} = \frac{1}{(S + 1)^3}$$

$$\frac{-1}{(S + 1)^3} = -\frac{1}{(S + 1)^3}$$

$$\frac{s^2 + 3s}{(s + 1)^3} = \frac{-2}{(s + 1)^3} + \frac{1}{(s + 1)^2} + \frac{1}{s + 1}$$

$$\frac{s}{(s + 1)^3} = \frac{-1}{(s + 1)^3} + \frac{1}{(s + 1)^2}$$

$$\frac{-s}{(s + 1)^3} = \frac{1}{(s + 1)^3} - \frac{1}{(s + 1)^2}$$

$$\frac{-3s - 1}{(s + 1)^3} = \frac{2}{(s + 1)^3} - \frac{3}{(s + 1)^2}$$

$$\frac{s^2}{(s + 1)^3} = \frac{1}{(s + 1)^3} - \frac{2}{(s + 1)^2} + \frac{1}{s + 1}$$

por lo tanto, la matriz de transición es en este caso:

$$e^{\underline{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-t} + te^{-t} + \frac{1}{2}t^2e^{-t} & te^{-t} + t^2e^{-t} & \frac{1}{2}t^2e^{-t} \\ -\frac{1}{2}t^2e^{-t} & e^{-t} + te^{-t} - t^2e^{-t} & te^{-t} - \frac{1}{2}t^2e^{-t} \\ -te^{-t} + \frac{1}{2}t^2e^{-t} & -3te^{-t} + t^2e^{-t} & e^{-t} - 2te^{-t} + \frac{1}{2}t^2e^{-t} \end{bmatrix}$$

e) Teorema de Sylvester.

En este caso se requiere emplear la matriz adjunta de $[\lambda\underline{I} - \underline{A}]$ y el polinomio característico $P(\lambda) = |\lambda\underline{I} - \underline{A}|$; éstos fueron calculados en el inciso (c) y son:

$$\mathrm{Adj}[\lambda\underline{I} - \underline{A}] = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 3\lambda + 3 & \lambda + 3 & 1 \\ -1 & \lambda^2 + 3\lambda & \lambda \\ -\lambda & -3\lambda - 1 & \lambda^2 \end{bmatrix}$$

y

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$$

de donde, los valores característicos son:

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = -1$$

$$\lambda_3 = -1$$

ahora, se procede a evaluar los coeficientes $Z_0(-1)$, $Z_1(-1)$ y $Z_2(-1)$ de la siguiente manera:

para calcular $Z_0(-1)$:

$$Z_0(\lambda)\Big|_{\lambda=-1} = \text{Adj}\left[\lambda \underline{I} - \underline{A}\right]\Big|_{\lambda=-1}$$

$$\text{Adj}\left[\lambda \underline{I} - \underline{A}\right]\Big|_{\lambda=-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

por lo que:

$$Z_0(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

para calcular $Z_1(-1)$:

$$Z_1(\lambda)\Big|_{\lambda=-1} = \frac{d}{d\lambda}\left[\text{Adj}\left[\lambda \underline{I} - \underline{A}\right]\right]$$

$$\frac{d}{d\lambda}\text{Adj}\left[\lambda \underline{I} - \underline{A}\right]\Big|_{\lambda=-1} = \begin{bmatrix} 2\lambda + 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2\lambda + 3 & 1 \\ -1 & -3 & 2\lambda \end{bmatrix}\Bigg|_{\lambda=-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

por lo tanto:

$$Z_1(1-) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

y para calcular $Z_2(-1)$:

$$Z_2(\lambda)\Big|_{\lambda = -1} = \frac{1}{2!}\,\frac{d^2}{d\lambda^2}\left[\,\mathrm{Adj}\left[\lambda\underline{I} - \underline{A}\right]\right]\Big|_{\lambda = -1}$$

entonces:

$$\frac{d^2}{d\lambda^2}\left[\mathrm{Adj}\left[\lambda\underline{I} - \underline{A}\right]\right] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

por lo que:

$$Z_2(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de esta manera se tiene:

$$N(\underline{A}) = N(-1)Z_2(-1) + \frac{d}{d\lambda}N(\lambda)\Big|_{\lambda=-1} Z_1(-1) + \frac{1}{2!}\,\frac{d^2}{d\lambda^2}N(\lambda)\Big|_{\lambda=-1} Z_0(-1)$$

si:

$$N(\underline{A}) = e^{\underline{A}t}$$

entonces:

$$N(\lambda) = e^{\lambda t}$$

por lo tanto:

$$\frac{d}{d\lambda} N(\lambda) = te^{\lambda t}$$

y:

$$\frac{d^2}{d\lambda^2} N(\lambda) = t^2 e^{\lambda t}$$

finalmente la matriz de transición es:

$$e^{\underline{A}t} = Z_2(-1)e^{-t} + Z_1(-1)te^{-t} + Z_0(-1)\frac{1}{2}t^2e^{-t}$$

o bien:

$$e^{\underline{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-t} + te^{-t} + \frac{1}{2}t^2e^{-t} & te^{-t} + t^2e^{-t} & \frac{1}{2}t^2e^{-t} \\ -\frac{1}{2}t^2e^{-t} & e^{-t} + te^{-t} - t^2e^{-t} & te^{-t} - \frac{1}{2}t^2e^{-t} \\ -te^{-t} + \frac{1}{2}t^2e^{-t} & -3te^{-t} + t^2e^{-t} & e^{-t} - 2te^{-t} + \frac{1}{2}t^2e^{-t} \end{bmatrix}$$

f) Fórmula de interpolación de Sylvester.

Con base en la fórmula de interpolación de Sylvester, se tiene que el determinante a resolver es en este caso:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & f''(\lambda) \\ 0 & 1 & 2\lambda & f'(\lambda) \\ 1 & \lambda & \lambda^2 & f(\lambda) \\ \underline{I} & \underline{A} & \underline{A}^2 & f(\underline{A}) \end{vmatrix} = 0$$

donde:

$$\lambda = -1$$

$$f''(\lambda) = t^2e^{-t}$$

$$f'(\lambda) = te^{-t}$$

$$f(\lambda) = e^{-t}$$

$$f(\underline{A}) = e^{\underline{A}t}$$

sustituyendo, se tiene:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & t^2e^{-t} \\ 0 & 1 & -2 & te^{-t} \\ 1 & -1 & 1 & e^{-t} \\ \underline{I} & \underline{A} & \underline{A}^2 & e^{\underline{A}t} \end{vmatrix} = 0$$

resolviendo:

$$0 = e^{\underline{A}t}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} - e^{-t}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ \underline{I} & \underline{A} & \underline{A}^2 \end{vmatrix} +$$

$$+ te^{-t}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ \underline{I} & \underline{A} & \underline{A}^2 \end{vmatrix} - t^2e^{-t}\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ \underline{I} & \underline{A} & A^2 \end{vmatrix}$$

o bien:

$$e^{\underline{A}t} = e^{-t}\underline{I} + te^{-t}(\underline{A} + \underline{I}) + \frac{1}{2}t^2e^{-t}(\underline{A}^2 + 2\underline{A} + \underline{I})$$

entonces:

$$e^{\underline{A}t} = e^{-t}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + te^{-t}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{2}t^2e^{-t}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

finalmente, la matriz de transición es:

$$e^{\underline{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-t} + te^{-t} + \frac{1}{2}t^2e^{-t} & te^{-t} + t^2e^{-t} & \frac{1}{2}t^2e^{-t} \\ -\frac{1}{2}t^2e^{-t} & e^{-t} + te^{-t} - t^2e^{-t} & te^{-t} - \frac{1}{2}t^2e^{-t} \\ -te^{-t} + \frac{1}{2}t^2e^{-t} & -3te^{-t} + t^2e^{-t} & e^{-t} - 2te^{-t} + \frac{1}{2}t^2e^{-t} \end{bmatrix}$$

Ejemplo V.12

Considérese la representación matemática de un sistema en variables de estado:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Obtener las respuestas libre, forzada y total, si:

$$u(t) = \cos t \quad y \quad \underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solución:

La respuesta total de un sistema en variables de estado se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{A}t}\,\underline{x}(0) + \int_0^t e^{\underline{A}(t-\tau)}\,\underline{B}\,\underline{u}(\tau)\,d\tau$$

donde los términos del segundo miembro son la respuesta libre, y la respuesta forzada respectivamente.

Cálculo de la respuesta libre.

Para el sistema considerado, se tiene que la matriz de transición (ver ejemplo V.9) está dado por:

$$e^{\underline{A}t} = \begin{bmatrix} 6e^{-2t} - 8e^{-3t} + 3e^{-4t} & 3.5e^{-2t} - 6e^{-3t} + 2.5e^{-4t} & 0.5e^{-2t} - e^{-3t} + 0.5e^{-4t} \\ -12e^{-2t} + 24e^{-3t} - 12e^{-4t} & -7e^{-2t} + 18e^{-3t} - 10e^{-4t} & -e^{-2t} + 3e^{-3t} - 2e^{-4t} \\ 24e^{-2t} - 72e^{-3t} + 48e^{-4t} & 14e^{-2t} - 54e^{-3t} + 40e^{-4t} & 2e^{-2t} - 9e^{-3t} + 8e^{-4t} \end{bmatrix}$$

y la respuesta libre se calcula como:

$$\underline{x}(t)_{LIB} = e^{\underline{A}t}\,\underline{x}(0)$$

de esta manera:

$$\begin{bmatrix} x_1(t)_{LIB} \\ x_2(t)_{LIB} \\ x_3(t)_{LIB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6e^{-2t} - 8e^{-3t} + 3e^{-4t} & 3.5e^{-2t} - 6e^{-3t} + 2.5e^{-4t} & 0.5e^{-2t} - e^{-3t} + 0.5e^{-4t} \\ -12e^{-2t} + 24e^{-3t} - 12e^{-4t} & -7e^{-2t} + 18e^{-3t} - 10e^{-4t} & -e^{-2t} + 3e^{-3t} - 2e^{-4t} \\ 24e^{-2t} - 72e^{-3t} + 48e^{-4t} & 14e^{-2t} - 54e^{-3t} + 40e^{-4t} & 2e^{-2t} - 9e^{-3t} + 8e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

por lo tanto, la respuesta libre es:

$$\begin{bmatrix} x_1(t)_{LIB} \\ x_2(t)_{LIB} \\ x_3(t)_{LIB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16.5e^{-2t} - 24e^{-3t} + 9.5e^{-4t} \\ -33e^{-2t} + 72e^{-3t} - 38e^{-4t} \\ 66e^{-2t} - 216e^{-3t} + 152e^{-4t} \end{bmatrix}$$

La respuesta forzada se calcula como:

$$x(t)_{FOR} = \int_0^t e^{\underline{A}(t-\tau)}\,\underline{B}\,\underline{u}(\tau)\,d\tau$$

realizando el producto $e^{\underline{A}(t-\tau)}\underline{B}\,\underline{u}(\tau)$, se obtiene:

$$e^{\underline{A}(t-\tau)}\underline{B}\,u(\tau) = \begin{bmatrix} 0.5e^{-2(t-\tau)} - e^{-3(t-\tau)} + 0.5e^{-4(t-\tau)} \\ -e^{-2(t-\tau)} + 3e^{-3(t-\tau)} - 2e^{-4(t-\tau)} \\ 2e^{-2(t-\tau)} - 9e^{-3(t-\tau)} + 8e^{-4(t-\tau)} \end{bmatrix} \cos \tau$$

o bien:

$$e^{\underline{A}(t-\tau)}\underline{B}\,u(\tau) = \begin{bmatrix} 0.5 & -1 & 0.5 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & -9 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2(t-\tau)} \cos \tau \\ e^{-3(t-\tau)} \cos \tau \\ e^{-4(t-\tau)} \cos \tau \end{bmatrix}$$

por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} x_1(t)_{FOR} \\ x_2(t)_{FOR} \\ x_3(t)_{FOR} \end{bmatrix} = \int_0^t \begin{bmatrix} 0.5 & -1 & 0.5 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & -9 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2(t-\tau)} \cos \tau \\ e^{-3(t-\tau)} \cos \tau \\ e^{-4(t-\tau)} \cos \tau \end{bmatrix} d\tau$$

en este caso, el problema se reduce a resolver tres integrales de la forma:

$$A = \int_0^t e^{-a(t-\tau)} \cos b\tau \, d\tau = e^{-a(t-\tau)} \left[\frac{a \cos b\tau + b \operatorname{sen} b\tau}{a^2 + b^2} \right] \Bigg|_0^t$$

de esta manera, se tiene:

$$\int_0^t e^{-2(t-\tau)} \cos \tau \, d\tau = e^{-2(t-\tau)} \left[\frac{2 \cos \tau + \operatorname{sen} \tau}{(2)^2 + (1)^2} \right] \Bigg|_0^t =$$

$$= \frac{1}{5} \left[2 \cos t + \operatorname{sen} t - 2e^{-2t} \right]$$

$$\int_0^t e^{-3(t-\tau)} \cos \tau \, d\tau = e^{-3(t-\tau)} \left[\frac{3 \cos \tau + \operatorname{sen} \tau}{(3)^2 + (1)^2} \right] \Bigg|_0^t$$

$$= \frac{1}{10} \left[3 \cos t + \operatorname{sen} t - 3e^{-3t} \right]$$

$$\int_0^t e^{-4(t-\tau)} \cos \tau \, d\tau = e^{-4(t-\tau)} \left[\frac{4 \cos \tau + \operatorname{sen} \tau}{(4)^2 + (1)^2} \right] \Bigg|_0^t$$

$$= \frac{1}{17} \left[4 \cos t + \operatorname{sen} t - 4e^{-4t} \right]$$

por lo tanto, la respuesta forzada es:

$$\begin{bmatrix} x_1(t)_{FOR} \\ x_2(t)_{FOR} \\ x_3(t)_{FOR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10}\left[2\cos t + \operatorname{sen} t - 2e^{-2t}\right] - \frac{1}{10}\left[3\cos t + \operatorname{sen} t - 3e^{-3t}\right] + \frac{1}{34}\left[4\cos t + \operatorname{sen} t - 4e^{-4t}\right] \\ -\frac{1}{5}\left[2\cos t + \operatorname{sen} t - 2e^{-2t}\right] + \frac{3}{10}\left[3\cos t + \operatorname{sen} t - 3e^{-3t}\right] - \frac{2}{17}\left[4\cos t + \operatorname{sen} t - 4e^{-4t}\right] \\ \frac{2}{5}\left[2\cos t + \operatorname{sen} t - 2e^{-2t}\right] - \frac{9}{10}\left[3\cos t + \operatorname{sen} t - 3e^{-3t}\right] + \frac{8}{17}\left[4\cos t + \operatorname{sen} t - 4e^{-4t}\right] \end{bmatrix}$$

o bien:

$$\begin{bmatrix} x_1(t)_{FOR} \\ x_2(t)_{FOR} \\ x_3(t)_{FOR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{170}\cos t + \frac{1}{34}\,\text{sen}\,t - \frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{3}{10}e^{-3t} - \frac{2}{17}e^{-4t} \\ \frac{1}{34}\cos t - \frac{3}{170}\,\text{sen}\,t + \frac{2}{5}e^{-2t} - \frac{9}{10}e^{-3t} + \frac{8}{17}e^{-4t} \\ -\frac{3}{170}\cos t - \frac{1}{34}\,\text{sen}\,t - \frac{4}{5}e^{-2t} + \frac{27}{10}e^{-3t} - \frac{32}{17}e^{-4t} \end{bmatrix}$$

y la respuesta total se calcula como:

$$\underline{x}(t)_{TOT} = \underline{x}(t)_{LIB} + \underline{x}(t)_{FOR}$$

esto es:

$$\begin{bmatrix} x_1(t)_{TOT} \\ x_2(t)_{TOT} \\ x_3(t)_{TOT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{170}\cos t + \frac{1}{34}\,\text{sen}\,t + \frac{163}{10}e^{-2t} - \frac{237}{10}e^{-3t} + \frac{319}{34}e^{-4t} \\ \frac{1}{34}\cos t - \frac{3}{170}\,\text{sen}\,t - \frac{163}{5}e^{-2t} + \frac{711}{10}e^{-3t} - \frac{638}{17}e^{-4t} \\ -\frac{3}{170}\cos t - \frac{1}{34}\,\text{sen}\,t + \frac{326}{5}e^{-2t} - \frac{2133}{10}e^{-3t} + \frac{2552}{17}e^{-4t} \end{bmatrix}$$

la salida producida por el sistema se obtiene por medio de la expresión:

$$\underline{y}(t) = \underline{C}\ \underline{x}(t)_{TOT}$$

por lo tanto:

$$\boxed{y(t) = 81.5e^{-2t} - 237e^{-3t} + 159.5e^{-4t} \qquad t \geq 0}$$

Un procedimiento alternativo es resolver las ecuaciones mediante la transformada de Laplace.

Para calcular la respuesta libre:

$$\underline{x}(t)_{LIB} = L^{-1}\left\{ \left[s\underline{I} - \underline{A} \right]^{-1} \underline{x}(0) \right\}$$

Para calcular la respuesta forzada:

$$\underline{x}(t)_{FOR} = L^{-1}\left\{\left[S\underline{I} - \underline{A}\right]^{-1} \underline{B}\,\underline{U}(S)\right\}$$

Para calcular la salida producida por el sistema:

$$y(t) = L^{-1}\left\{\underline{C}\left[S\underline{I} - \underline{A}\right]^{-1}\underline{x}(0) + \underline{C}\left[S\underline{I} - \underline{A}\right]^{-1}\underline{B}\,\underline{U}(S) + \underline{D}\,\underline{U}(S)\right\}$$

Para el sistema considerado, se tiene que la matriz $\left[S\underline{I} - \underline{A}\right]^{-1}$ (Ver ejemplo V.9) es:

$$\left[S\underline{I} - \underline{A}\right]^{-1} = \frac{1}{(S+2)(S+3)(S+4)}\begin{bmatrix} S^2 + 9S + 26 & S + 9 & 1 \\ -24 & S^2 + 9S & S \\ -24S & -26S - 24 & S^2 \end{bmatrix}$$

por lo que la respuesta libre es:

$$\begin{bmatrix} x_1(t)_{LIB} \\ x_2(t)_{LIB} \\ x_3(t)_{LIB} \end{bmatrix} = L^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \dfrac{2S^2 + 19S + 63}{(S+2)(S+3)(S+4)} \\ \dfrac{S^2 + 11S - 48}{(S+2)(S+3)(S+4)} \\ \dfrac{2S^2 - 74S - 24}{(S+2)(S+3)(S+4)} \end{bmatrix}\right\}$$

y las fracciones parciales de cada término son:

$$\frac{2S^2 + 19S + 63}{(S+2)(S+3)(S+4)} = \frac{16.5}{S+2} - \frac{24}{S+3} + \frac{9.5}{S+4}$$

$$\frac{S^2 + 11S - 48}{(S+2)(S+3)(S+4)} = -\frac{33}{S+2} + \frac{72}{S+3} - \frac{38}{S+4}$$

$$\frac{2S^2 - 74S - 24}{(S+2)(S+3)(S+4)} = \frac{66}{S+2} - \frac{216}{S+3} + \frac{152}{S+4}$$

de esta manera, la respuesta libre es:

$$\begin{bmatrix} x_1(t)_{LIB} \\ x_2(t)_{LIB} \\ x_3(t)_{LIB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16.5e^{-2t} - 24e^{-3t} + 9.5e^{-4t} \\ -33e^{-2t} + 72e^{-3t} - 38e^{-4t} \\ 66e^{-2t} - 216e^{-3t} + 152e^{-4t} \end{bmatrix}$$

Cálculo de la respuesta forzada:

$$U(S) = \frac{S}{S^2 + 1}$$

y

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

por lo tanto:

$$\left[S\underline{I} - \underline{A}\right]^{-1} \underline{B}\, U(S) = \begin{bmatrix} \dfrac{S}{(S+2)(S+3)(S+4)(S^2+1)} \\ \dfrac{S^2}{(S+2)(S+3)(S+4)(S^2+1)} \\ \dfrac{S^3}{(S+2)(S+3)(S+4)(S^2+1)} \end{bmatrix}$$

y las fracciones parciales de cada término son:

$$\frac{S}{(S+2)(S+3)(S+4)(S^2+1)} = \frac{-\frac{1}{5}}{S+2} + \frac{\frac{3}{10}}{S+3} - \frac{\frac{2}{17}}{S+4} + \frac{\frac{3}{170}S + \frac{1}{34}}{S^2+1}$$

$$\frac{S^2}{(S+2)(S+3)(S+4)(S^2+1)} = \frac{\frac{2}{5}}{S+2} - \frac{\frac{9}{10}}{S+3} + \frac{\frac{8}{17}}{S+4} - \frac{\frac{1}{34}S - \frac{3}{170}}{S^2+1}$$

$$\frac{S^3}{(S+2)(S+3)(S+4)(S^2+1)} = \frac{-\frac{4}{5}}{S+2} + \frac{\frac{27}{10}}{S+3} - \frac{\frac{32}{17}}{S+4} + \frac{\frac{3}{170}S + \frac{1}{34}}{S^2+1}$$

de esta manera, la respuesta forzada es:

$$\begin{bmatrix} x_1(t)_{FOR} \\ x_2(t)_{FOR} \\ x_3(t)_{FOR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{170}\cos t + \frac{1}{34}\operatorname{sen} t - \frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{3}{10}e^{-3t} - \frac{2}{17}e^{-4t} \\ \frac{1}{34}\cos t - \frac{3}{170}\operatorname{sen} t + \frac{2}{5}e^{-2t} - \frac{9}{10}e^{-3t} + \frac{8}{17}e^{-4t} \\ -\frac{3}{170}\cos t - \frac{1}{34}\operatorname{sen} t - \frac{4}{5}e^{-2t} + \frac{27}{10}e^{-3t} - \frac{32}{17}e^{-4t} \end{bmatrix}$$

por lo tanto, la respuesta total, se obtiene sumando las respuestas libre y forzada, esto es:

$$\begin{bmatrix} x_1(t)_{TOT} \\ x_2(t)_{TOT} \\ x_3(t)_{TOT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{170}\cos t + \frac{1}{34}\operatorname{sen} t + \frac{163}{10}e^{-2t} - \frac{237}{10}e^{-3t} + \frac{319}{34}e^{-4t} \\ \frac{1}{34}\cos t - \frac{3}{170}\operatorname{sen} t - \frac{163}{5}e^{-2t} + \frac{711}{10}e^{-3t} - \frac{638}{17}e^{-4t} \\ -\frac{3}{170}\cos t - \frac{1}{34}\operatorname{sen} t + \frac{326}{5}e^{-2t} - \frac{2133}{10}e^{-3t} + \frac{2552}{17}e^{-4t} \end{bmatrix}$$

finalmente para calcular la salida producida por el sistema se aplica la expresión:

$$y(t) = L^{-1}\left\{ \underline{C}\left[S\underline{I} - \underline{A}\right]^{-1}\underline{x}(0) + \underline{C}\left[S\underline{I} - \underline{A}\right]^{-1}\underline{B}\,\underline{U}(S) + \underline{D}\,\underline{U}(S) \right\}$$

el producto $\underline{C}[S\underline{I} - \underline{A}]^{-1}\underline{x}(0)$ está dado por:

$$\underline{C}\left[S\underline{I} - \underline{A}\right]^{-1}\underline{x}(0) = \frac{4S^2 + 55S + 39}{(S+2)(S+3)(S+4)}$$

y el producto $\underline{C}[S\underline{I} - \underline{A}]^{-1}\underline{B}\,\underline{U}(S)$ es:

$$\underline{C}\left[S\underline{I} - \underline{A}\right]^{-1}\underline{B}\,U(S) = \frac{S^3 + S}{(S+2)(S+3)(S+4)(S^2+1)} = \frac{S}{(S+2)(S+3)(S+4)}$$

por lo tanto:

$$\underline{C}\left[S\underline{I} - \underline{A}\right]^{-1}\underline{x}(0) + \underline{C}\left[S\underline{I} - \underline{A}\right]^{-1}\underline{B}\,U(S) = \frac{4S^2 - 54S + 39}{(S+2)(S+3)(S+4)}$$

y las fracciones parciales de la expresión anterior son:

$$\frac{4S^2 - 54S + 39}{(S+2)(S+3)(S+4)} = \frac{81.5}{S+2} - \frac{237}{S+3} + \frac{159.5}{S+4}$$

por lo que la salida producida por el sistema es:

$$\boxed{y(t) = 81.5e^{-2t} - 237e^{-3t} + 159.5e^{-4t} \qquad t \geq 0}$$

Ejemplo V.13

Considérese un sistema dinámico cuya representación en variables de estado está dado por:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Calcular la respuesta libre y la salida producida por el sistema, si:

$$u(t) = 10\, u_{-1}(t) \qquad y \qquad \underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

Solución:

La matriz de transición es en este caso

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 2te^{-t} + e^{-2t} & 3te^{-t} - 2e^{-t} + 2e^{-2t} & te^{-t} - e^{-t} + e^{-2t} \\ -2te^{-t} + 2e^{-t} - 2e^{-2t} & -3te^{-t} + 5e^{-t} - 4e^{-2t} & -te^{-t} + 2e^{-t} - 2e^{-2t} \\ 2te^{-t} - 4e^{-t} + 4e^{-2t} & 3te^{-t} - 8e^{-t} + 8e^{-2t} & te^{-t} - 3e^{-t} + 4e^{-2t} \end{bmatrix}$$

La respuesta libre está dada por:

$$\begin{bmatrix} x_1(t)_{LIB} \\ x_2(t)_{LIB} \\ x_3(t)_{LIB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4te^{-t} - 3e^{-t} + 3e^{-2t} \\ -4te^{-t} + 7e^{-t} - 6e^{-2t} \\ 4te^{-t} - 11e^{-t} + 12e^{-2t} \end{bmatrix}$$

y la salida producida por el sistema es:

$$\boxed{y(t) = 5 - 18te^{-t} + 15e^{-t} - 18e^{-2t} \qquad t \geq 0}$$

V.5 MATRIZ DE RESPUESTA IMPULSO

Un concepto importante en el estudio de los sistemas dinámicos, como se mencionó en los dos capítulos precedentes, es la respuesta impulso. En forma similar que para sistemas de primer y segundo orden, es también posible obtener la respuesta que producirá el sistema cuando la entrada o excitación externa aplicada a éste es una función impulso.

Considérese un sistema, el cual puede ser representado por medio de las siguientes expresiones:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\,\underline{x}(t) + \underline{B}\,\underline{u}(t) \qquad \ldots (1)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C}\,\underline{x}(t) + \underline{B}\,\underline{u}(t) \qquad \ldots (2)$$

donde:

$\underline{x}(t)$: es el vector de variables de estado y es de dimensión n

$\underline{u}(t)$: es el vector de entradas o excitaciones externas aplicadas al sistema y es de dimensión r

$\underline{y}(t)$: es el vector de salidas producidas por el sistema y es de dimensión m

$\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$: son matrices de coeficientes constantes y son de orden $n \times n$, $n \times r$, $m \times n$ y $m \times r$, respectivamente.

Por otra parte, la solución de la ecuación (1) está dada por:

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{A}t}\,\underline{x}(0) + \int_0^t e^{\underline{A}(t-\tau)}\,\underline{B}\,\underline{u}(\tau)\,d\tau \qquad \ldots (3)$$

donde:

$e^{\underline{A}t}\,\underline{x}(0)$: es la respuesta libre del sistema, esto es, la debida únicamente al estado inicial del sistema.

$\int_0^t e^{\underline{A}(t-\tau)}\,\underline{B}\,\underline{u}(\tau)\,d\tau$: es la respuesta forzada del sistema, esto es, la debida únicamente a la excitación externa o entrada aplicada.

De esta manera, se tiene que la salida producida por el sistema $(\underline{y}(t))$ está dada por la expresión:

$$\underline{y}(t) = \underline{C}\,e^{\underline{A}t}\,\underline{x}(0) + \underline{C}\,e^{\underline{A}t}\int_0^t e^{-\underline{A}\tau}\,\underline{B}\,\underline{u}(\tau)\,d\tau + \underline{D}\,\underline{u}(t) \qquad \ldots (4)$$

Sin embargo, para obtener la respuesta impulso de un siste ma en general se deben satisfacer dos condiciones:

a) El estado inicial del sistema debe de ser nulo, es decir:

$$\underline{x}(0) = [0]$$

b) La excitación externa o entrada aplicada al sis tema debe ser una función impulso, esto es:

$$\underline{u}(t) = [K_1 \quad K_2 \quad K_3 \quad \ldots \quad K_r]^T \delta(t) \qquad \ldots (5)$$

o bien:

$$\underline{u}(t) = \underline{K}\,\delta(t) \qquad \ldots (6)$$

Considerando las dos condiciones anteriores, se tiene que la ecuación (3) puede ser escrita de la forma:

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{A}t} \int_0^t e^{-\underline{A}\tau}\, \underline{B}\,\underline{K}\delta(\tau)\, d\tau \quad \ldots (7)$$

por otro lado, una de las propiedades de la función impul so, es que:

$$\int_0^t f(t')\ \delta(t')dt' = f(0) \qquad \ldots (8)$$

a partir de las ecuaciones (7) y (8) se obtiene:

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{A}t}\ \underline{B}' \qquad \ldots (9)$$

donde:

$$\underline{B}' = \underline{B}\,\underline{K} \qquad \ldots (10)$$

sustituyendo las ecuaciones (6) y (9) en la (2) se tiene que la respuesta impulso del sistema es:

$$\underline{H}(t) = \underline{C}\ e^{\underline{A}t}\ \underline{B}' + \underline{D}\,\underline{K}\,\delta(t) \qquad \ldots (11)$$

o bien:

$$\boxed{\underline{H}(t) = \underline{C}\, e^{\underline{A}t}\, \underline{B}' + \underline{D}'\, \delta(t)}$$

donde:

$$\underline{D}' = \underline{D}\ \underline{K}$$

$\underline{H}(t)$: es la matriz de respuesta impulso y tiene la siguiente estructura:

$$\underline{H}(t) = \begin{bmatrix} h_{11}(t) & h_{12}(t) & h_{13}(t) & \cdots & h_{1r}(t) \\ h_{21}(t) & h_{22}(t) & h_{23}(t) & \cdots & h_{2r}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{m-11}(t) & h_{m-12}(t) & h_{m-13}(t) & \cdots & h_{m-1r}(t) \\ h_{m1}(t) & h_{m2}(t) & h_{m3}(t) & \cdots & h_{mr}(t) \end{bmatrix}$$

o bien:

$$\underline{H}(t) = [h_{ij}(t)] \quad \text{para} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, 3, \ldots, m \\ j = 1, 2, 3, \ldots, r \end{array}$$

En el caso de que $\underline{K}$ y $\underline{y}(t)$ sean vectores unidimensionales, la matriz de respuesta impulso será también unidimensional, y la respuesta impulso está dada por:

$$\boxed{h(t) = \underline{C}\, e^{\underline{A}t}\, \underline{B}\,\underline{K} + \underline{D}\,\underline{K}\, \delta(t)}$$

CAPITULO VI INTRODUCCION A LA TEORIA DE CONTROL

VI.1 IMPEDANCIA Y ADMITANCIA

Los conceptos de impedancia y admitancia aplicados al estudio de los sistemas dinámicos son de gran utilidad, ya que a través de éstos es posible analizar la respuesta de un sistema empleando técnicas en el dominio de la frecuencia.

Algunos autores han generalizado los conceptos de impedancia y admitancia a los distintos tipos de sistemas descritos en el capítulo II; sin embargo, su aplicación principal es en sistemas eléctricos.

A continuación se enuncias algunas definiciones a fin de establecer los conceptos de impedancia y admitancia:

Definición 1:

La impedancia se define como la transformada de Laplace de una transvariable entre la transformada de Laplace de una pervariable considerando las condiciones iniciales nulas, esto es:

$$\text{IMPEDANCIA} = \frac{L\ \{\text{TRANSVARIABLE}\}}{L\ \{\text{PERVARIABLE}\}}$$

Definición 2:

La admitancia se define como la transformada de Laplace de una pervariable entre la transformada de Laplace de una transvariable considerando las condiciones iniciales nulas, esto es:

$$\text{ADMITANCIA} = \frac{L\ \{\text{PERVARIABLE}\}}{L\ \{\text{TRANSVARIABLE}\}}$$

Transvariables y Pervariables:

Una transvariable es aquella variable que se mide entre dos puntos, o sea, es necesario tener una referencia para poderla medir.

Una pervariable es aquella variable que se mide en un solo punto, es decir, no se requiere de alguna referencia para poderla medir.

Con base en las definiciones anteriores, se pueden establecer expresiones matemáticas para representar los conceptos de impedancia y admitancia. Debido a que únicamente se presentan estos conceptos aplicados a sistemas eléctricos, se empleará la siguiente notación:

$Z(S)$: representa la impedancia

$Y(S)$: representa la admitancia

en este caso, la transvariable se representa mediante el voltaje (V) y la pervariable mediante la corriente (i), por lo tanto:

$V(S)$: es la transformada de Laplace de la transvariable (V)

$I(S)$: es la transformada de Laplace de la pervariable (i)

VI.1.1 IMPEDANCIA

La impedancia en sistemas eléctricos está dada por:

$$Z(S) = \frac{V(S)}{I(S)}$$

Básicamente se pueden definir tres tipos de impedancia pa ra los sistemas eléctricos, éstos son:

a) Impedancia resistiva.

b) Impedancia capacitiva.

c) Impedancia inductiva.

IMPEDANCIA RESISTIVA

Considérese el siguiente circuito eléctrico:

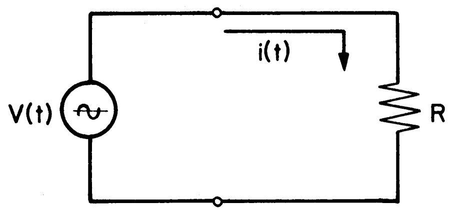


Figura VI.1

La ecuación que relaciona el voltaje y la corriente en un elemento resistivo es: (ver capítulo II)

$$V(t) = R\,i(t) \qquad \ldots (1)$$

aplicando la transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación (1), se tiene:

$$V(S) = R\,I(S) \qquad \ldots (2)$$

a partir de la ecuación (2) se obtiene que la relación de V(S) entre I(S) es:

$$\frac{V(S)}{I(S)} = R \qquad \ldots (3)$$

por lo tanto, la impedancia resistiva está dada por:

$$Z_R(S) = R \; [\Omega]$$

IMPEDANCIA CAPACITIVA

Considérese el siguiente circuito eléctrico:

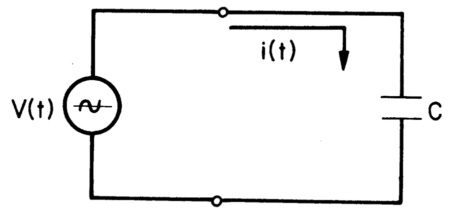


Figura VI.2

La ecuación que relaciona el voltaje y la corriente en un elemento capacitivo es: (ver capítulo II)

$$i(t) = C \, \frac{dV(t)}{dt} \qquad \ldots (4)$$

aplicando la transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación (4), se tiene:

$$I(S) = CS\,V(S) \qquad \ldots (5)$$

a partir de la ecuación (5) se obtiene que la relación de V(S) entre I(S) es:

$$\frac{V(S)}{I(S)} = \frac{1}{CS} \qquad \ldots (6)$$

por lo tanto, la impedancia capacitiva está dada por:

$$Z_C(S) = \frac{1}{CS} \left[\Omega \right]$$

IMPEDANCIA INDUCTIVA

Considérese el siguiente circuito eléctrico:

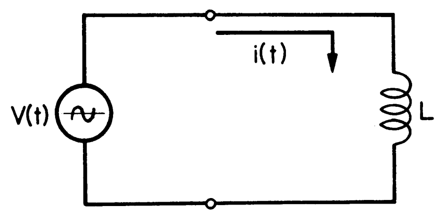


Figura VI.3

La ecuación que relaciona el voltaje y la corriente en un elemento inductivo es: (ver capítulo II)

$$V(t) = L \frac{di(t)}{dt} \qquad \ldots (7)$$

aplicando la transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación (7), se tiene:

$$V(S) = LS\, I(S) \qquad \ldots (8)$$

a partir de la ecuación (8) se obtiene que la relación de V(S) entre I(S) es:

$$\frac{V(S)}{I(S)} = LS \qquad \ldots (9)$$

por lo tanto, la impedancia inductiva está dada por:

$$Z_L(S) = LS \left[\Omega \right]$$

ARREGLOS DE IMPEDANCIAS

Una vez que se han determinado los tres tipos de impedancias en sistemas eléctricos es necesario indicar de qué manera se pueden interconectar entre sí para formar un sistema.

Los distintos arreglos entre impedancias son:

1) Impedancias en serie

2) Impedancias en paralelo

IMPEDANCIAS EN SERIE

Considérese un sistema eléctrico formado por n impedancias conectadas en serie y alimentadas por una fuente de voltaje como se muestra en la siguiente figura:

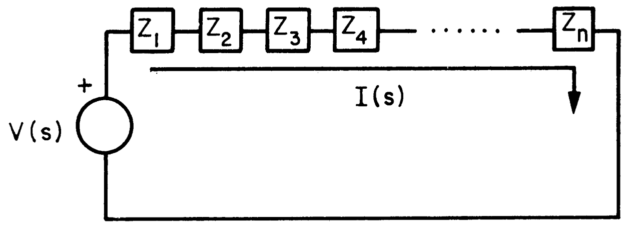


Figura VI.4

Aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff se obtiene:

$$V(S) = V_{Z_1}(S) + V_{Z_2}(S) + V_{Z_3}(S) + V_{Z_4}(S) + \dots + V_{Z_n}(S) \qquad \dots (1)$$

los voltajes $V_{Z_i}(S)$ para $i = 1, 2, 3, 4, \dots, n$ están dados por:

$$\left.\begin{aligned} V_{Z_1}(S) &= Z_1 I(S) \\ V_{Z_2}(S) &= Z_2 I(S) \\ V_{Z_3}(S) &= Z_3 I(S) \\ V_{Z_4}(S) &= Z_4 I(S) \\ &\vdots \\ V_{Z_n}(S) &= Z_n I(S) \end{aligned}\right| \qquad \dots (2)$$

sustituyendo las expresiones (2) en la ecuación (1), se tiene:

$$V(S) = Z_1I(S) + Z_2I(S) + Z_3I(S) + Z_4I(S) + \dots + Z_nI(S) \qquad \dots (3)$$

factorizando el término $I(S)$ en la ecuación (3):

$$V(S) = (Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 + \dots + Z_n)I(S) \qquad \dots (4)$$

o bien:

$$V(S) = Z_{eq}I(S) \qquad \dots (5)$$

por lo tanto, de las ecuaciones (4) y (5) se obtiene:

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 + \dots + Z_n \qquad \dots (6)$$

o bien:

$$\boxed{Z_{eq}(S) = \sum_{i=1}^{n} Z_i(S)}$$

IMPEDANCIAS EN PARALELO

Considérese un sistema eléctrico formado por n impedancias conectadas en paralelo y una fuente de corriente co como se muestra en la siguiente figura:

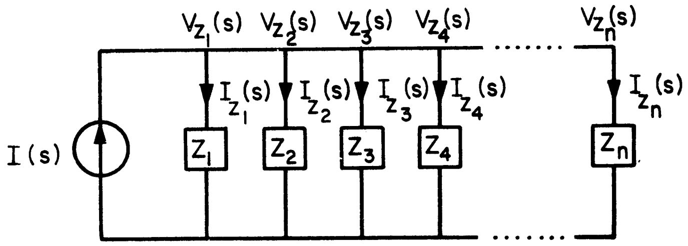


Figura VI.5

Aplicando la ley de corrientes de Kirchhoff se obtiene:

$$I(S) = I_{Z_1}(S) + I_{Z_2}(S) + I_{Z_3}(S) + I_{Z_4}(S) + \ldots + I_{Z_n}(S) \qquad \ldots (1)$$

las corrientes $I_{Z_i}(S)$ para $i = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$ están dadas por:

$$\left.\begin{aligned} I_{Z_1}(S) &= \frac{1}{Z_1} V_{Z_1}(S) \\ I_{Z_2}(S) &= \frac{1}{Z_2} V_{Z_2}(S) \\ I_{Z_3}(S) &= \frac{1}{Z_3} V_{Z_3}(S) \\ I_{Z_4}(S) &= \frac{1}{Z_4} V_{Z_4}(S) \\ &\vdots \\ I_{Z_n}(S) &= \frac{1}{Z_n} V_{Z_n}(S) \end{aligned}\right| \qquad \ldots (2)$$

sustituyendo las expresiones (2) en la ecuación (1) se tiene:

$$I(S) = \frac{1}{Z_1}V_{Z_1}(S) + \frac{1}{Z_2}V_{Z_2}(S) + \frac{1}{Z_3} V_{Z_3}(S) + \frac{1}{Z_4} V_{Z_4}(S) + \ldots + \frac{1}{Z_n} V_{Z_n}(S) \qquad \ldots (3)$$

sin embargo, se tiene del circuito:

$$V_{Z_1}(S) = V_{Z_2}(S) = V_{Z_3}(S) = V_{Z_4}(S) = \ldots = V_{Z_n}(S) = V(S) \qquad \ldots (4)$$

de las ecuaciones (3) y (4) se obtiene:

$$I(S) = \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4} + \ldots + \frac{1}{Z_n} \right) V(S) \qquad \ldots (5)$$

o bien:

$$I(S) = \frac{1}{Z_{eq}} V(S) \qquad \ldots (6)$$

por lo tanto, de las ecuaciones (5) y (6) se tiene:

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4} + \dots \frac{1}{Z_n} \qquad \dots (7)$$

o bien:

$$\boxed{\frac{1}{Z_{eq}(S)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{Z_i(S)}}$$

VI.1.2 ADMITANCIA

De la misma manera que para el concepto de impedancia, se tiene que la admitancia para circuitos eléctricos está da_ da por:

$$Y(S) = \frac{I(S)}{V(S)}$$

En este caso se definen tres tipos de admitancia para los sistemas eléctricos, éstos son:

a) Admitancia resistiva

b) Admitancia capacitiva

c) Admitancia inductiva

ADMITANCIA RESISTIVA

Considérese el siguiente circuito eléctrico:

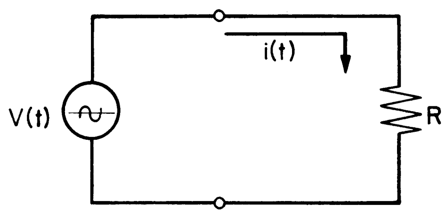


Figura VI.6

La ecuación que relaciona el voltaje y la corriente en un elemento resistivo es: (ver capítulo II)

$$V(t) = R\,i(t) \qquad \ldots (1)$$

aplicando transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación (1), se tiene:

$$V(S) = R\,I(S) \qquad \ldots (2)$$

a partir de la ecuación (2) se obtiene que la relación de I(S) entre V(S) es:

$$\frac{I(S)}{V(S)} = \frac{1}{R} \qquad \ldots (3)$$

por lo tanto, la admitancia resistiva está dada por:

$$Y_R(S) = \frac{1}{R} \quad [\mho]$$

ADMITANCIA CAPACITIVA

Considérese el siguiente circuito eléctrico:

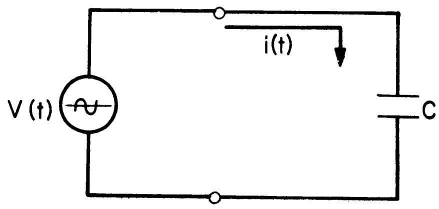


Figura VI.7

La ecuación que relaciona el voltaje y la corriente en un elemento capacitivo es: (ver capítulo II)

$$i(t) = C\,\frac{dV(t)}{dt} \qquad \ldots (4)$$

aplicando transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación (4), se tiene:

$$I(S) = CS\ V(S) \qquad \ldots (5)$$

a partir de la ecuación (5) se obtiene que la relación de I(S) entre V(S) es:

$$\frac{I(S)}{V(S)} = CS \qquad \ldots (6)$$

por lo tanto, la admitancia capacitiva está dada por:

$$Y_C(S) = CS\ [\mho]$$

ADMITANCIA INDUCTIVA

Considérese el siguiente circuito eléctrico:

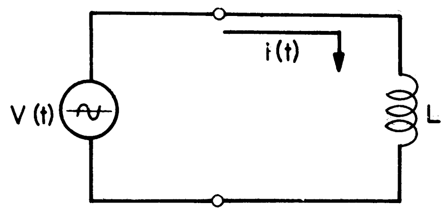


Figura VI.8

La ecuación que relaciona el voltaje y la corriente en un elemento inductivo es: (ver capítulo II)

$$V(t) = L\frac{di(t)}{dt} \qquad \ldots (7)$$

aplicando la transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación (7), se tiene:

$$V(S) = LS\ I(S) \qquad \ldots (8)$$

a partir de la ecuación (8) se obtiene que la relación de I(S) entre V(S) es:

$$\frac{I(S)}{V(S)} = \frac{1}{LS} \qquad \ldots (9)$$

por lo tanto, la admitancia inductiva está dada por:

$$Y_L(S) = \frac{1}{LS} \;[\mho]$$

ARREGLOS DE ADMITANCIAS

En forma similar que para el caso de las impedancias, los distintos arreglos de admitancias son:

1) Admitancias en serie

2) Admitancias en paralelo

ADMITANCIAS EN SERIE

Considérese un sistema eléctrico formado por n admitancias conectadas en serie y alimentadas por una fuente de voltaje como se muestra en la siguiente figura:

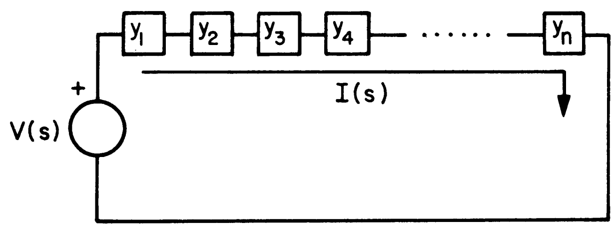


Figura VI.9

Aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff se obtiene:

$$V(S) = V_{Y_1}(S) + V_{Y_2}(S) + V_{Y_3}(S) + V_{Y_4}(S) + \ldots + V_{Y_n}(S) \qquad \ldots (1)$$

los voltajes $V_{Y_i}(S)$ para $i = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$ están dados por:

$$\left.\begin{aligned}
V_{Y_1}(S) &= \frac{1}{Y_1} I(S) \\
V_{Y_2}(S) &= \frac{1}{Y_2} I(S) \\
V_{Y_3}(S) &= \frac{1}{Y_3} I(S) \\
V_{Y_4}(S) &= \frac{1}{Y_4} I(S) \\
&\vdots \\
V_{Y_n}(S) &= \frac{1}{Y_n} I(S)
\end{aligned}\right| \quad \ldots (2)$$

sustituyendo las expresiones (2) en la ecuación (1), se tiene:

$$V(S) = \frac{1}{Y_1} I(S) + \frac{1}{Y_2} I(S) + \frac{1}{Y_3} I(S) + \frac{1}{Y_4} I(S) + \ldots + \frac{1}{Y_n} I(S) \quad \ldots (3)$$

factorizando el término $I(S)$ en la ecuación (3):

$$V(S) = \left(\frac{1}{Y_1} + \frac{1}{Y_2} + \frac{1}{Y_3} + \frac{1}{Y_4} + \ldots + \frac{1}{Y_n} \right) I(S) \quad \ldots (4)$$

o bien:

$$V(S) = \frac{1}{Y_{eq}} I(S) \quad \ldots (5)$$

por lo tanto, de las ecuaciones (4) y (5) se obtiene:

$$\frac{1}{Y_{eq}} = \frac{1}{Y_1} + \frac{1}{Y_2} + \frac{1}{Y_3} + \frac{1}{Y_4} + \ldots + \frac{1}{Y_n} \quad \ldots (6)$$

o bien:

$$\boxed{\frac{1}{Y_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{Y_i(S)}}$$

ADMITANCIAS EN PARALELO

Considérese un sistema eléctrico formado por n admitancias conectadas en paralelo y alimentadas por una fuente de corriente como se muestra en la siguiente figura:

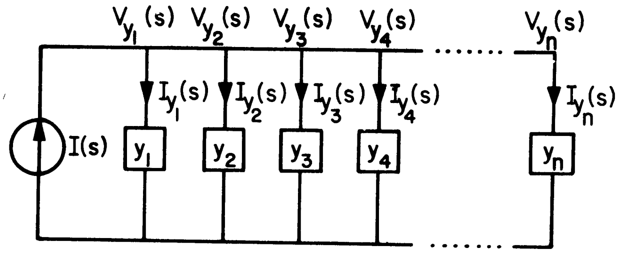


Figura VI.10

Aplicando la ley de corrientes de Kirchhoff se obtiene:

$$I(S) = I_{Y_1}(S) + I_{Y_2}(S) + I_{Y_3}(S) + I_{Y_4}(S) + \ldots + I_{Y_n}(S) \quad \ldots (1)$$

las corrientes $I_{Y_i}(S)$ para $i = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$ están dadas por:

$$\left.\begin{aligned} I_{Y_1}(S) &= Y_1 V_{Y_1}(S) \\ I_{Y_2}(S) &= Y_2 V_{Y_2}(S) \\ I_{Y_3}(S) &= Y_3 V_{Y_3}(S) \\ I_{Y_4}(S) &= Y_4 V_{Y_4}(S) \\ &\vdots \\ I_{Y_n}(S) &= Y_n V_{Y_n}(S) \end{aligned}\right| \quad \ldots (2)$$

sustituyendo las expresiones (2) en la ecuación (1) se tiene:

$$I(S) = Y_1 V_{Y_1}(S) + Y_2 V_{Y_2}(S) + Y_3 V_{Y_3}(S) + Y_4 V_{Y_4}(S) + \ldots + Y_n V_{Y_n}(S) \quad \ldots (3)$$

obsérvese que los voltajes V_{Y_i} son iguales, esto es:

$$V_{Y_1}(S) = V_{Y_2}(S) = V_{Y_3}(S) = V_{Y_4}(S) = \ldots = V_{Y_n}(S) = V(S) \qquad \ldots (4)$$

de las ecuaciones (3) y (4) se obtiene:

$$I(S) = (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + \ldots + Y_n)V(S) \qquad \ldots (5)$$

o bien:

$$I(S) = Y_{eq}\, V(S) \qquad \ldots (6)$$

por lo tanto, de las ecuaciones (5) y (6) se tiene:

$$Y_{eq} = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + \ldots Y_n \qquad \ldots (7)$$

o bien:

$$\boxed{Y_{eq}(S) = \sum_{i=1}^{n} Y_i(S)}$$

Ejemplo VI.1

Obtener la impedancia de entrada para el sistema eléctrico mostrado en la siguiente figura:

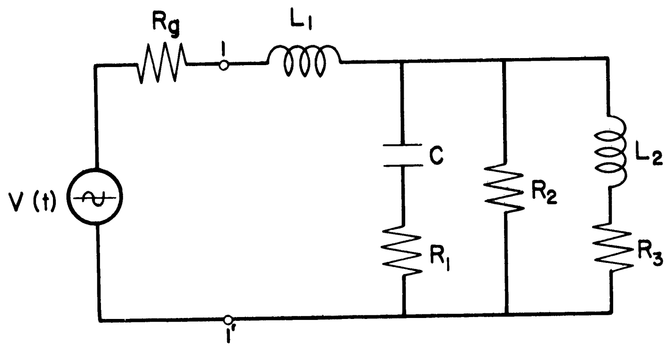


Figura VI.11

Solución:

La impedancia de entrada del sistema considerado es la impedancia que se tiene entre los puntos 1 - 1', esto es:

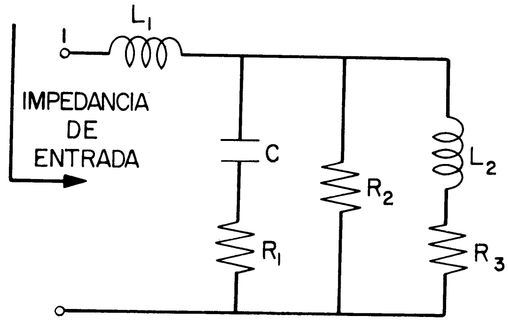


Figura VI.12

transformando los elementos del circuito anterior a sus correspondientes en impedancias, se obtiene:

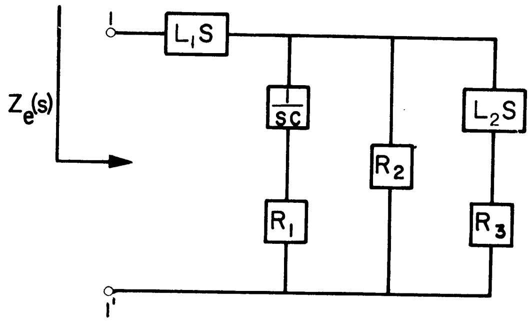


Figura VI.13

la primera simplificación que se realiza al circuito, es reducir las impedancias $^{1}/_{SC}$ y R_1 en serie y las impedancias L_2S y R_3 en serie, además se hacen las siguientes asignaciones para facilitar el análisis:

$$Z_1(S) = L_1S$$

$$Z_2(S) = \frac{1}{SC} + R_1 = \frac{SCR_1 + 1}{SC}$$

$$Z_3(S) = R_2$$

$$Z_4(S) + L_2S + R_3$$

de esta manera el circuito se puede redibujar como:

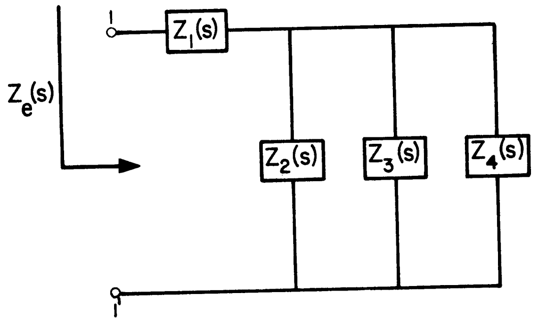


Figura VI.14

de la figura anterior se tiene que la impedancia de entrada se obtiene reduciendo las impedancias $Z_2(S)$, $Z_3(S)$ y $Z_4(S)$ en paralelo, esto es:

$$\frac{1}{Z_{eq}(S)} = \frac{1}{Z_2(S)} + \frac{1}{Z_3(S)} + \frac{1}{Z_4(S)}$$

o bien:

$$Z_{eq}(S) = \frac{S^2CL_2R_1R_2 + S(CR_1R_2R_3 + R_2L_2) + R_2R_3}{S^2CL_2(R_1 + R_2) + S(C(R_1R_2 + R_1R_2 + R_2R_3) + L_2) + R_2 + R_3}$$

finalmente:

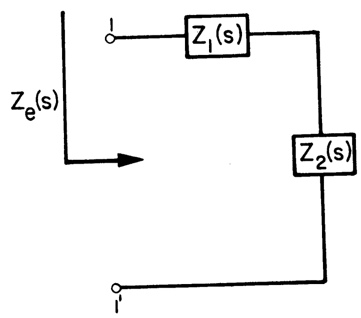


Figura VI.15

por lo tanto, la impedancia de entrada del sistema eléctrico considerado está dada por:

$$Z_e(S) = Z_1(S) + Z_{eq}(S)$$

$$Z_e(S) = \frac{S^3CL_1L_2(R_1 + R_2) + S^2(C(R_1R_2(L_1 + L_2) + L_1R_3(R_1 + R_2)) + L_1L_2}{S^2CL_2(R_1 + R_2) + S(C(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3) + L_2) + R_2 + R_3} +$$

$$+ \frac{S(L_1(R_2 + R_3) + CR_1R_2R_3 + L_2R_2) + R_2R_3}{S^2CL_2(R_1 + R_2) + S(C(R_1R_2 + R_1R_2 + R_2R_3) + L_2) + R_2 + R_3}$$

VI.2 Función de Transferencia

La función de transferencia de un sistema dinámico lineal e invariante con el tiempo se define como el cociente de la transformada de Laplace de la salida producida por el sistema entre la transformada de Laplace de la entrada o excitación externa aplicada a éste, considerando el estado inicial del sistema nulo.

Considérese un sistema dinámico que puede ser representado en forma esquemática mediante la siguiente figura:

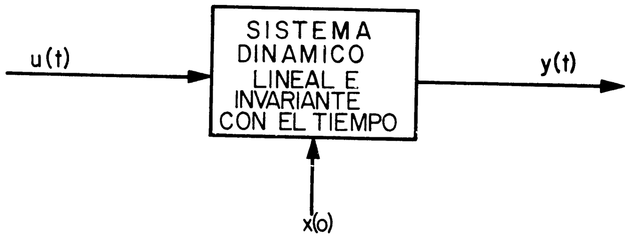


Figura VI.16

donde:

$u(t)$: es la entrada aplicada al sistema

$y(t)$: es la salida producida por el sistema

$x(0)$: es el estado inicial del sistema, que en este caso se considera nulo, es decir, $x(0) = 0$

Para este caso, se tiene que la función de transferencia del sistema está dada por:

$$F.T. = \frac{L\{SALIDA\}}{L\{ENTRADA\}} \qquad \ldots (1)$$

o bien:

$$H(S) = \frac{L\{y(t)\}}{L\{u(t)\}} = \frac{Y(S)}{U(S)} \qquad \ldots (2)$$

La función de transferencia es importante debido a que ésta contiene toda la información referente al sistema, además, a partir de la función de transferencia es posible calcular la respuesta producida por el sistema ante cualquier entrada, o sea:

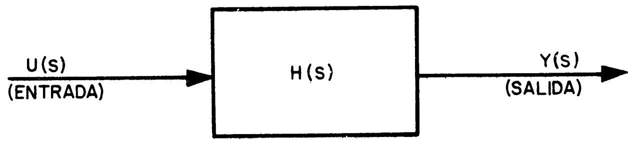


Figura VI.17

de la figura anterior se tiene que la salida producida por el sistema está dada por:

$$Y(S) = H(S)\,U(S) \qquad \ldots (3)$$

esta expresión también pudo haberse obtenido de la ecuación (2), es decir, multiplicando ambos miembros de la ecuación (2) por U(S) se obtiene:

$$Y(S) = H(S)\,U(S) \qquad \ldots (4)$$

Por otra parte, la función de transferencia dada por la ecuación (2) se obtiene básicamente por medio de dos métodos:

a) A partir del modelo matemático empleado para describir el comportamiento del sistema dinámico.

b) A partir de la respuesta impulso del sistema.

OBTENCION DE LA FUNCION DE TRANSFERENCIA A PARTIR DE MODELOS MATEMATICOS

Considérese el modelo matemático de un sistema, el cual está dado mediante la siguiente ecuación:

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + a_2\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}} + \ldots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x =$$

$$b_0\frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_1\frac{d^{m-1}u(t)}{dt^{m-1}} + b_2\frac{d^{m-2}u(t)}{dt^{m-2}} + \ldots + b_{m-1}\frac{du(t)}{dt} + b_m u(t)$$

$$\ldots (5)$$

aplicando la transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación (5), esto es:

$$S^nX(S) + a_1S^{n-1}X(S) + a_2S^{n-2}X(S) + \ldots + a_{n-1}SX(S) + a_nX(S) =$$

$$b_0S^mU(S) + b_1S^{m-1}U(S) + b_2S^{m-2}U(S) + \ldots + b_{m-1}SU(S) + b_mU(S)$$

$$\ldots (6)$$

factorizando X(S) en el primer miembro de la ecuación (6) y U(S) en el segundo miembro, se obtiene:

$$X(S)(S^n + a_1S^{n-1} + a_2S^{n-2} + \ldots + a_{n-1}S + a_n) =$$

$$= U(S)(b_0S^m + b_1S^{m-1} + b_2S^{m-2} + \ldots + b_{m-1}S + b_m) \qquad \ldots (7)$$

si se considera como salida del sistema Y(S) a la variable X(S), entonces la ecuación (7) se puede escribir de la forma:

$$Y(S)(S^n + a_1S^{n-1} + a_2S^{n-2} + \ldots + a_{n-1}S + a_n) =$$

$$= (b_0S^m + b_1S^{m-1} + b_2S^{m-2} + \ldots + b_{m-1}S + b_m)U(S) \qquad \ldots (8)$$

a partir de la ecuación (8) es posible obtener el cociente Y(S)/U(S), esto es:

$$\frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{b_0S^m + b_1S^{m-1} + b_2S^{m-2} + \ldots + b_{m-1}S + b_m}{S^n + a_1S^{n-1} + a_2S^{n-2} + \ldots + a_{n-1}S + a_n} \qquad \ldots (9)$$

por lo tanto, de las ecuaciones (2) y (9) se tiene que la función de transferencia del sistema descrito mediante la ecuación (5) está dada por:

$$H(S) = \frac{b_0S^m + b_1S^{m-1} + b_2S^{m-2} + \ldots + b_{m-1}S + b_m}{S^n + a_1S^{n-1} + a_2S^{n-2} + \ldots + a_{n-1}S + a_n} \qquad \ldots (10)$$

la ecuación (10) se expresa comúnmente de la forma:

$$H(S) = \frac{Q(S)}{P(S)} \qquad \ldots (11)$$

donde:

H(S): es la función de transferencia del sistema.

Q(S): es un polinomio de orden m y las raíces de éste representan los ceros del sistema.

P(S): es un polinomio de orden n y las raíces de éste representan los polos del sistema.

Cabe mencionar que el orden del polinomio Q(S) (m) debe ser menor que el orden del polinomio P(S) (n) para un sistema físico. Además, el tipo de respuesta producida por el sistema depende directamente de la naturaleza de las raíces de P(S) (polos del sistema), es decir, los modos naturales de la respuesta del sistema están asociados a los polos de éste.

De esta manera la función de transferencia del sistema se puede expresar como:

$$H(S) = \frac{Q(S)}{\prod_{i=1}^{n} (S + p_i)} \qquad \ldots (12)$$

la ecuación (12) se puede expandir en fracciones parciales * de la forma:

$$H(S) = \frac{K_1}{S + p_1} + \frac{K_2}{S + p_2} + \frac{K_3}{S + p_3} + \ldots + \frac{K_n}{S + p_n} \qquad \ldots (13)$$

los modos naturales de la respuesta del sistema se obtienen al aplicar la transformada inversa de Laplace a cada una de las fracciones parciales de la ecuación (13), esto es:

$$\text{MODO NATURAL DE LA RESPUESTA} = L^{-1}\left\{\frac{K_i}{S + p_i}\right\} \qquad \ldots (14)$$

*Veáse el apéndice de Transformada de Laplace.

por lo tanto, la respuesta del sistema está dada por:

$$\begin{array}{c}\text{RESPUESTA}\\ \text{DEL}\\ \text{SISTEMA}\end{array} = \sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix}\text{MODO}\\ \text{NATURAL}\end{pmatrix}_i \qquad \ldots (15)$$

OBTENCION DE LA FUNCION DE TRANSFERENCIA A PARTIR DE LA RESPUESTA IMPULSO DEL SISTEMA

Considérese un sistema dinámico lineal e invariante con el tiempo, el cual se representa esquemáticamente por medio de la siguiente figura:

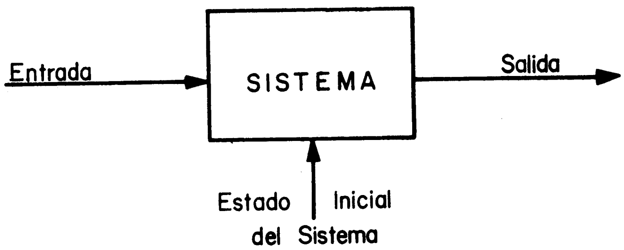


Figura VI.18

si la entrada aplicada al sistema es una función impulso $\delta(t)$ y el estado inicial del sistema es nulo, o sea, $x(0) = 0$ la salida producida por el sistema es la respuesta impulso $h(t)$, esquemáticamente esto es:

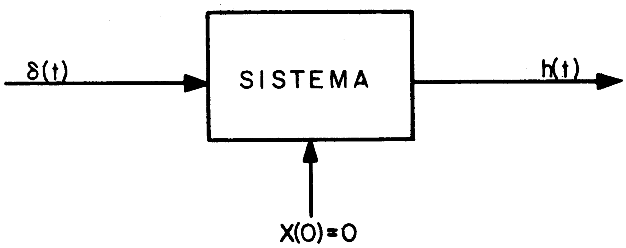


Figura VI.19

por lo tanto si se conoce la respuesta impulso del sistema $h(t)$, la función de transferencia de éste se obtiene simplemente aplicando la transformada de Laplace a $h(t)$, esto es:

$$H(S) = L\left\{h(t)\right\} \qquad \ldots (16)$$

esta última expresión se puede también obtener a partir de la definición de la función de transferencia:

$$H(S) = \frac{L\left\{y(t)\right\}}{L\left\{u(t)\right\}} = \frac{Y(S)}{U(S)} \qquad \ldots (17)$$

si la entrada aplicada al sistema es una función impulso, entonces la respuesta producida por el sistema será la respuesta impulso, la entrada aplicada al sistema es:

$$u(t) = \delta(t) \qquad \ldots (18)$$

aplicando la transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación (18), se obtiene:

$$L\left\{u(t)\right\} = L\left\{\delta(t)\right\} \qquad \ldots (19)$$

y

$$U(S) = 1 \qquad \ldots (20)$$

sustituyendo la ecuación (20) en la (17) se tiene:

$$H(S) = Y(S) \qquad \ldots (21)$$

así, $Y(S)$ es la transformada de Laplace de la respuesta impulso y puesto que $Y(S)$ es igual a $H(S)$, entonces la función de transferencia es la transformada de Laplace de la respuesta impulso.

Ejemplo VI.2

Obtener para el sistema eléctrico mostrado en la figura, la relación entre el voltaje de salida y el de entrada:

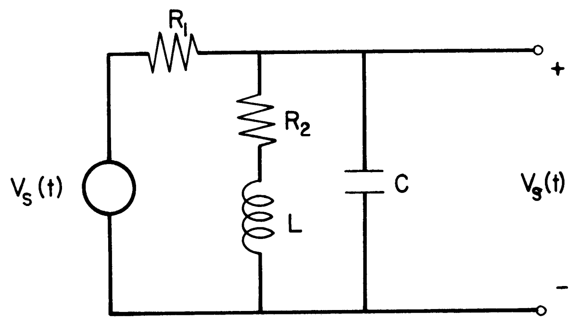


Figura VI.20

Solución:

Transformando el sistema eléctrico a su equivalente empleando impedancias, se obtiene:

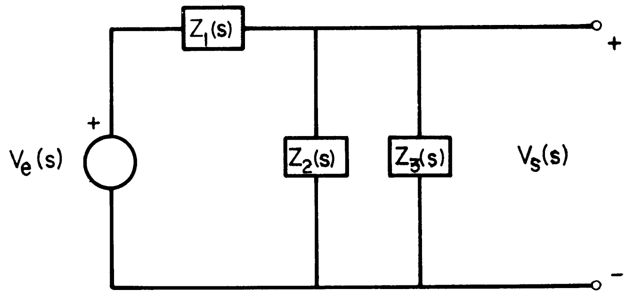


Figura VI.21

donde:

$$Z_1(S) = R_1$$

$$Z_2(S) = LS + R_2$$

$$Z_3(S) = \frac{1}{SC}$$

de la figura, se tiene que el voltaje de salida es el voltaje en la impedancia $Z_3(S)$ y éste es el mismo que el voltaje en la impedancia $Z_2(S)$, por lo tanto el cir cuito se puede redibujar como:

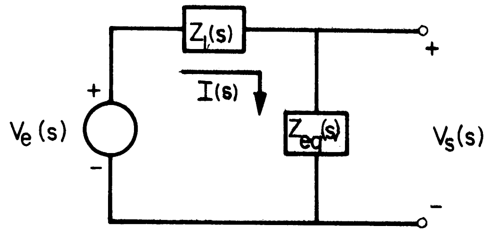


Figura VI.22

donde la impedancia $Z_{eq}(S)$ es el paralelo de las impedancias $Z_2(S)$ y $Z_3(S)$ y está dada por:

$$Z_{eq}(S) = \frac{LS + R_2}{S^2CL + SCR_2 + 1}$$

y el voltaje de salida está dado por:

$$V_s(S) = Z_{eq}(S)\ I(S)$$

donde:

$$I(S) = \frac{V_e(S)}{Z_1(S) + Z_{eq}(S)}$$

por lo tanto:

$$V_s(S) = \frac{Z_{eq}(S)}{Z_1(S) + Z_{eq}(S)}\ V_e(S)$$

y la relación de voltaje de salida entre el voltaje de entrada es:

$$\frac{V_s(S)}{V_e(S)} = \frac{Z_{eq}(S)}{Z_1(S) + Z_{eq}(S)}$$

o bien:

$$\frac{V_s(S)}{V_e(S)} = \frac{LS + R}{S^2CLR_1 + S(L + CR_1R_2) + R_1 + R_2}$$

normalizando el denominador, se obtiene:

$$\frac{V_s(S)}{V_e(S)} = \frac{\frac{1}{CR_1}\ S + \frac{R_2}{CLR_1}}{S^2 + \left(\frac{1}{CR_1} + \frac{R_2}{L}\right) S + \left[\frac{R_1 + R_2}{R_1}\right] \frac{1}{CL}}$$

En general un sistema dinámico lineal e invariante con el tiempo de orden n, se puede representar mediante su función de transferencia, es decir, mediante la relación entre su salida y su entrada, esto es:

$$H(S) = \frac{Y(S)}{U(S)} \qquad \ldots (1)$$

la función de transferencia descrita por la ecuación (1) puede también ser expresada como un cociente de polinomios, de la forma:

$$H(S) = \frac{Q(S)}{P(S)} = \frac{a_m S^m + a_{m-1} S^{m-1} + a_{m-2} S^{m-2} + \ldots + a_1 S + a_0}{S^n + b_{n-1} S^{n-1} + b_{n-2} S^{n-2} + \ldots + b_1 S + b_0} \qquad \ldots (2)$$

para un sistema dinámico real, se tiene que el orden del polinomio del numerador $Q(S)$ no es mayor que el orden del polinomio de denominador $P(S)$, es decir $n \geq m$.

Por otra parte, los factores de los polinomios $Q(S)$ y $P(S)$ representan los ceros y los polos del sistema respectivamente, por lo tanto, la función de transferencia se puede expresar de la forma:

$$H(S) = \frac{a_m \prod_{k=1}^{m} (S + q_k)}{\prod_{j=1}^{n} (S + p_j)} \qquad \ldots (3)$$

donde:

q_k para $k = 1, 2, 3, \ldots, m$:	representan la ubicación de los ceros del sistema
p_j para $j = 1, 2, 3, \ldots, n$:	representan la ubicación de los polos del sistema

Si se considera que los polinomios $Q(S)$ y $P(S)$ son polinomios primos, es decir, éstos no poseen factores comunes entre sí, entonces se puede obtener una representación gráfica de los polos y los ceros del sistema en un plano coordenado. Además se tiene que en general q_k y p_j para $k = 1, 2, 3, \ldots, m$ y $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ son números complejos; la representación gráfica de éstos se hace en un plano complejo que tiene la forma:

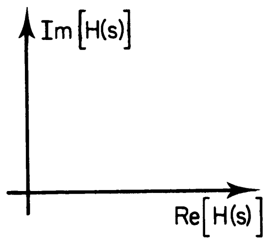


Figura VI.23

o bien:

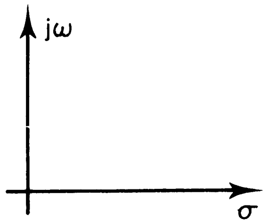


Figura VI.24

La representación gráfica de los polos y ceros de un sistema dinámico lineal e invariante con el tiempo, es lo que se conoce como *patrón de polos y ceros del sistema*, en este caso los ceros se representan mediante círculos (O) y los polos mediante cruces (x).

Ejemplo VI.3

Considérese un sistema lineal e invariante con el tiempo, el cual se puede representar matemáticamente por medio de la siguiente función de transferencia:

$$H(S) = \frac{S^4 + 6.5S^3 + 39.5S^2 + 126S + 117}{S^7 + 9S^6 + 41S^5 + 133S^4 + 270S^3 + 398S^2 + 468S + 240}$$

Obtener el patrón de polos y ceros del sistema.

Solución:

Primeramente, se procede a obtener los factores del polinomio Q(S) (ceros del sistema), esto es:

$$Q(S) = S^4 + 6.5S^3 + 39.5S^2 + 126S + 117$$

y los factores de este último son:

$$Q(S) = (S + 1.5)(S + 3)(S^2 + 2S + 26)$$

o bien:

$$Q(S) = (S + 1.5)(S + 3)\left[(S + 1)^2 + (5)^2\right]$$

por lo tanto, los ceros del sistema están ubicados en:

$$q_1 = -1.5$$

$$q_2 = -3$$

$$q_3 = -1 + j5$$

$$q_4 = -1 - j5$$

Los factores de P(S) (polos del sistema) son:

$$P(S) = S^7 + 9S^6 + 41S^5 + 133S^4 + 270S^3 + 398S^2 + 468S + 240$$

y los factores de este último son:

$$P(S) = (S + 1)(S + 2)(S + 4)(S^2 + 3)(S^2 + 2S + 10)$$

o bien:

$$P(S) = (S + 1)(S + 2)(S + 4) \quad (S^2 + (\sqrt{3})^2)\left[(S + 1)^2 + (3)^2\right]$$

por lo tanto, los polos del sistema están ubicados en:

$$p_1 = -1$$

$$p_2 = -2$$

$$p_3 = -4$$

$$p_4 = j\sqrt{3}$$

$$p_5 = -j\sqrt{3}$$

$$p_6 = -1 + j3$$

$$p_7 = -1 - j3$$

Finalmente el patrón de polos y ceros del sistema es:

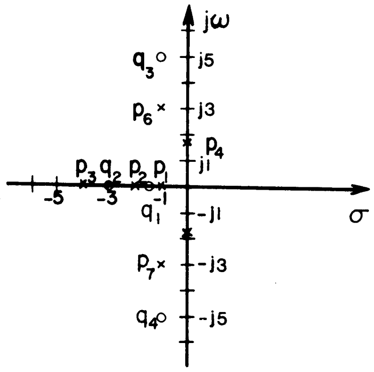


Figura VI.25

VI.4 Integral de Convolución

Un problema que se presenta con frecuencia en el estudio de los sistemas dinámicos es obtener la respuesta producida por un sistema dado ante diferentes condiciones de entrada. Esto se puede lograr empleando algunas técnicas clásicas de análisis, las que involucran la resolución de ecuaciones diferenciales.

En esta sección se describe la integral de convolución como una técnica general para obtener la respuesta producida por un sistema ante diferentes condiciones de entrada, así como sus principales aplicaciones en sistemas dinámicos.

Primero, se analizará la representación de una función continua en el tiempo mediante funciones impulso (véase el capítulo I).

Considérese una función continua en el tiempo $x(t)$ como se muestra en la siguiente figura:

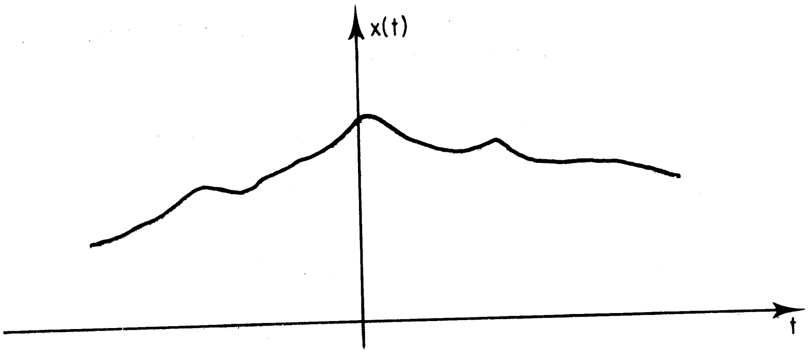


Figura VI.26

la función x(t) puede ser expresada como una suma lineal de funciones $\rho_i(t)$ de la siguiente manera:

$$x(t) = \ldots + \rho_{-i}(t)a_{-i} + \ldots + \rho_{-3}(t)a_{-3} + \rho_{-2}(t)a_{-2} + \rho_{-1}(t)a_{-1} +$$

$$+ \rho_0(t)a_0 + \rho_1(t)a_1 + \rho_2(t)a_2 + \rho_3(t)a_3 + \ldots + \rho_i(t)a_i + \ldots$$

$$\ldots \quad (1)$$

La función $\rho_i(t)$ se debe seleccionar de tal forma que el número de funciones continuas (x(t)) sea el máximo posible, una forma de lograr esto es considerar que la función $\rho_k(t)$ es un pulso (rectángulo) de duración pequeña como se muestra en la siguiente figura:

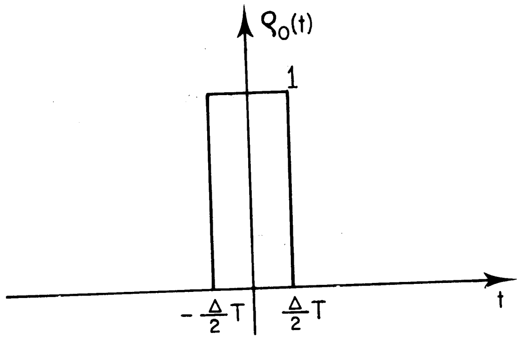


Figura VI.27

la función $\rho_0(t)$ se expresa matemáticamente de la siguiente forma:

$$\rho_0(t) = \left[u(t + \frac{\Delta T}{2}) - u(t - \frac{\Delta T}{2}) \right] \quad \ldots (2)$$

por lo tanto, $\rho_i(t)$ para $i \neq 0$ es una versión atrasada o adelantada de la función $\rho_0(t)$, esto es:

$$\rho_{-i}(t) = \left[u(t + i\,\Delta T + \frac{\Delta T}{2}) - u(t + i\,\Delta T - \frac{\Delta T}{2}) \right]$$

$$\vdots$$

$$\rho_{-2}(t) = \left[u(t + \frac{5\Delta T}{2}) - u(t + \frac{3\Delta T}{2}) \right]$$

$$\rho_{-1}(t) = \left[u(t + \frac{3\Delta T}{2}) - u(t + \frac{\Delta T}{2}) \right]$$

$$\rho_{0}(t) = \left[u(t + \frac{\Delta T}{2}) - u(t - \frac{\Delta T}{2}) \right] \qquad \ldots (3)$$

$$\rho_{1}(t) = \left[u(t - \frac{\Delta T}{2}) - u(t - \frac{3\Delta T}{2}) \right]$$

$$\rho_{2}(t) = \left[u(t - \frac{3\Delta T}{2}) - u(t - \frac{5\Delta T}{2}) \right]$$

$$\vdots$$

$$\rho_{i}(t) = \left[u(t - i\,\Delta T + \frac{\Delta T}{2}) - u(t - i\,\Delta T - \frac{\Delta T}{2}) \right]$$

de esta manera la función $x(t)$ se puede representar gráficamente como:

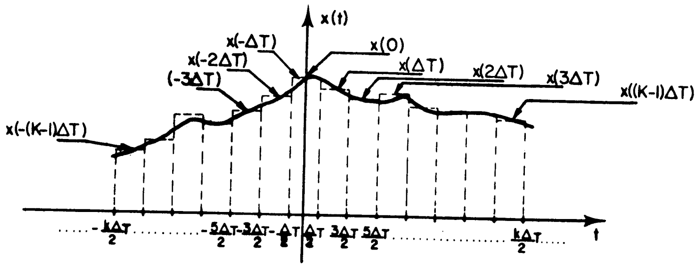


Figura VI.28

así, la función $x(t)$ se expresa como la suma lineal de todos los pulsos empleados para representarla, de esta manera un pulso cuyo centro está localizado en $t = k\,\Delta T$ se puede escribir como:

$$x(k\Delta T)\left[u(t - k\Delta T + \frac{\Delta T}{2}) - u(t - k\Delta T - \frac{\Delta T}{2})\right] \quad \ldots (4)$$

por lo tanto, la aproximación de la función continua x(t) se expresa de la siguiente forma:

$$x(t) \doteq \sum_{k=-n}^{n} x(k\Delta T)\left[u(t - k\Delta T + \frac{\Delta T}{2}) - u(t - k\Delta T - \frac{\Delta T}{2})\right] \quad \ldots (5)$$

donde el número total de pulsos empleados para aproximar a la función x(t) es:

$$2N + 1 = \frac{2T}{\Delta T} \quad \ldots (6)$$

por otra parte, de las ecuaciones (1), (3) y (5) se tiene que los coeficientes a_i son:

$$\begin{aligned} a_{-N} &= f(-N\Delta T) \\ &\vdots \\ a_{-i} &= f(-i\Delta T) \\ &\vdots \\ a_{-2} &= f(-2\Delta T) \\ a_{-1} &= f(-\Delta T) \\ a_0 &= f(0) \\ a_1 &= f(\Delta T) \\ a_2 &= f(2\Delta T) \\ &\vdots \\ a_i &= f(i\Delta T) \\ &\vdots \\ a_N &= f(N\Delta T) \end{aligned} \quad \ldots (7)$$

la ecuacion (5) puede ser escrita como:

$$x(t) \doteq \sum_{k=-N}^{N} x(k\Delta T) \frac{\left[u(t - k\Delta T + \frac{\Delta T}{2}) - u(t - k\Delta T - \frac{\Delta T}{2})\right]\Delta T}{\Delta T} \quad \ldots (8)$$

a medida que ΔT se hace más pequeño la aproximación de $x(t)$ es mejor y el número de pulsos que se requieren para representarla aumenta. Esto se puede ver más claramente escribiendo la ecuación (6) de la siguiente forma:

$$N = \frac{T}{\Delta T} - \frac{1}{2} \quad \ldots (9)$$

cuando ΔT se aproxima a cero, equivale a tomar el límite de la ecuación (8) haciendo que ΔT tienda a cero, esto es:

$$x(t) = \lim_{\Delta T \to 0} \sum_{k=-N}^{N} x(k\Delta T) \frac{\left[u(t - k\Delta T + \frac{\Delta T}{2}) - u(t) - k\Delta T - \frac{\Delta T}{2})\right]}{\Delta T} \Delta T \quad \ldots (10)$$

en este caso, se tiene que si $\Delta T \to 0$ entonces:

$$N \to \infty$$

$$\Sigma \to \int$$

$$x(k\Delta t) \to x(\tau)$$

$$\frac{u(t - k\Delta T + \frac{\Delta T}{2}) - u(t - k\Delta T - \frac{\Delta T}{2})}{\Delta T} \to \delta(t - \tau)$$

$$\Delta T \to d\tau$$

por lo tanto, la ecuación (9) se puede escribir como:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\ \delta(t - \tau) d \quad \ldots (11)$$

de esta manera se tiene que la función continua $x(t)$ se representa como la suma (integral) de funciones impulso que se presentan en cualquier tiempo t dado por $x(t)dt$.

Considérese ahora un sistema dinámico, el cual se representa en forma esquemática mediante la siguiente figura:

Figura VI.29

donde:

$u(t)$: es la entrada aplicada al sistema

$y(t)$: es la salida producida por el sistema

si $h(t)$ representa la respuesta impulso del sistema, la salida producida por éste $y(t)$ es una función de la respuesta impulso y de la entrada $u(t)$, esto es:

$$y(t) = f(u(t), h(t), t) \qquad \ldots (12)$$

por otra parte, $y(t)$ se puede obtener siguiendo un procedimiento similar al presentado en esta sección, de esta manera se tiene que la salida producida por el sistema es:

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau} \qquad \ldots (13)$$

esta última ecuación se conoce como la *integral de convolución* para sistemas dinámicos lineales e invariantes con el tiempo y puede también ser representada de la forma:

$$\boxed{y(t) = u(t) * h(t)} \qquad \ldots (14)$$

En este caso los límites de la integral de convolución son en el intervalo de tiempo $(-\infty, +\infty)$. Para el caso de sistemas dinámicos físicos (reales) al aplicar la ecuación (13) se obtiene una respuesta $y(t)$ en el intervalo de tiempo $(-\infty, +\infty)$, y debido a que la respuesta para el intervalo de tiempo $(-\infty, 0)$ no tendría interpretación alguna, la ecuación (12) se escribe como:

$$y(t) = \int_0^t u(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \qquad \ldots (15)$$

Las propiedades de la integral de convolución son:

a) **La integral de convolución es conmutativa:**

$$u(t) * h(t) = h(t) * u(t)$$

o bien:

$$\int_0^t u(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t h(\tau)\; u(t-\tau)\, d\tau$$

b) **La integral de convolución es asociativa:**

$$(u_1(t) + u_2(t)) * h(t) = u_1(t) * h(t) + u_2(t) * h(t)$$

c) **Derivación con respecto al tiempo de la integral** de convolución:

$$\frac{d}{dt}\left[u(t) * h(t)\right] = \frac{d}{dt}u(t) * h(t) = u(t) * \frac{d}{dt}h(t)$$

d) **Integración de la integral de convolución:**

$$\int \left[u(t) * h(t)\right] dt = \int u(t)dt * h(t) = u(t) * \int h(t)dt$$

e) **Derivada enésima de la integral de convolución:**

$$\frac{d^n}{dt^n}\left[u(t) * h(t)\right] = \frac{d^m}{dt^m}u(t) * \frac{d^{n-m}}{dt^{n-m}}h(t)$$

f) La integral de convolución de una función y de la función impulso:

$$u(t) * \delta(t) = u(t)$$

g) La integral de convolución de una función y la derivada enésima de la función impulso:

$$u(t) * \delta^{(n)}(t) = u^{(n)}(t)$$

h) La integral de convolución de una función y la función impulso desfasada en el tiempo:

$$u(t) * \delta(t \pm t_0) = u(t \pm t_0)$$

i) La integral de convolución involucrando integrales y derivadas de las funciones u(t) y h(t):

$$\int u(t)dt * \frac{d}{dt} h(t) = u(t) * h(t)$$

$$\frac{d}{dt} u(t) * \int h(t)dt = u(t) * h(t)$$

j) La transformada de Laplace de la integral de convolución:

$$L\left\{u(t) * h(t)\right\} = U(S)H(S)$$

k) La integral de convolución de dos funciones en el dominio de la frecuencia:

$$U(S) * H(S) = u(t)\, h(t)$$

Ejemplo VI.4

Obtener la respuesta (y(t)) producida por el sistema lineal e invariante con el tiempo mostrado en la figura, tanto en el dominio de tiempo como en el de la frecuencia:

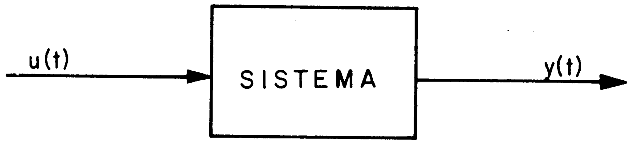


Figura VI.30

su respuesta impulso está dada por la expresión:

$$h(t) = \left[3e^{-0.5t} - e^{-t}(2 \cos \sqrt{2}\, t + \sqrt{2} \ \operatorname{sen} \sqrt{2}\, t) \right] u_{-1}(t)$$

Considerando que se aplica como entrada:

a) $u(t) = u_{-1}(t)$

b) $u(t) = [2 + \operatorname{sen} 2t]\ u_{-1}(t)$

Solución:

1. En el dominio del tiempo.

La respuesta producida por el sistema se puede obtener empleando la integral de convolución, esto es:

$$y(t) = \int_0^t h(t - \tau) u(\tau) d\tau$$

a) En este caso se tiene que la entrada aplicada al sistema es una función escalón, por lo tanto, la respuesta se obtiene al resolver la siguiente ecuación:

$$y(t) = \int_0^t \left[3e^{-0.5(t-\tau)} - e^{-(t-\tau)}(2 \cos \sqrt{2}(t-\tau) + \sqrt{2} \operatorname{sen} \sqrt{2}(t-\tau)) \right] u_{-1}(\tau) d\tau$$

o bien:

$$y(t) = 3\int_0^t e^{-0.5(t-\tau)}d\tau - 2\int_0^t e^{-(t-\tau)}\cos\sqrt{2}(t-\tau)d\tau -$$

$$-\sqrt{2}\int_0^t e^{-(t-\tau)}\operatorname{sen}\sqrt{2}(t-\tau)d\tau$$

la primera integral se obtiene directamente como:

$$I_1 = \int_0^t e^{-0.5(t-\tau)}d\tau = 2e^{-0.5(t-\tau)}\Big|_0^t = 2 - 2e^{-0.5t}$$

la segunda integral se obtiene integrando por partes, esto es:

$$I_2 = \int_0^t e^{-(t-\tau)}\cos\sqrt{2}(t-\tau)d\tau \qquad \ldots (1)$$

haciendo:

$$u = \cos\sqrt{2}(t-\tau)$$

y

$$dv = e^{-(t-\tau)}d\tau$$

se tiene:

$$du = \sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}(t-\tau)$$

y

$$v = e^{-(t-\tau)}$$

por lo tanto:

$$I_2 = e^{-(t-\tau)}\cos\sqrt{2}(t-\tau)\Big|_0^t - \sqrt{2}\int_0^t e^{-(t-\tau)}\operatorname{sen}\sqrt{2}(t-\tau)d\tau$$

integrando por partes nuevamente:

si:

$$u = \operatorname{sen} \sqrt{2}\,(t - \tau)$$
$$dv = e^{-(t-\tau)}\,d\tau$$

se tiene:

$$du = -\sqrt{2}\cos\sqrt{2}\,(t - \tau)$$
$$v = e^{-(t-\tau)}$$

por lo tanto:

$$I_2 = e^{-(t-\tau)}\cos\sqrt{2}\,(t-\tau)\Big|_0^t - \sqrt{2}\,e^{-(t-\tau)}\operatorname{sen}\sqrt{2}\,(t-\tau)\Big|_0^t -$$

$$-2\int_0^t e^{-(t-\tau)}\cos\sqrt{2}\,(t-\tau)\,d\tau \qquad \ldots (2)$$

igualando las ecuaciones (1) y (2) se tiene que la in tegral I_2 está dada por:

$$I_2 = \int_0^t e^{-(t-\tau)}\cos\sqrt{2}\,(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{3}\,e^{-(t-\tau)}\left(\cos\sqrt{2}\,(t-\tau) - \sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}\,(t-\tau)\right)\Big|_0^t$$

o bien:

$$I_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\,e^{-t}(\cos\sqrt{2}\,t + \sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}\,t)$$

la tercera y última integral se obtiene siguiendo un procedimiento como el presentado para determinar I_2, esto es:

$$I_3 = \int_0^t e^{-(t-\tau)}\operatorname{sen}\sqrt{2}\,(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{3}\,e^{-(t-\tau)}\left(\sqrt{2}\cos\sqrt{2}\,(t-\tau) + \operatorname{sen}\sqrt{2}\,(t-\tau)\right)\Big|_0^t$$

o bien:

$$I_3 = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3} e^{-t}(\sqrt{2} \cos \sqrt{2}(t) + \text{sen} \sqrt{2}\ t)$$

por lo tanto, la salida producida por el sistema cuando se aplica una entrada escalón unitario se obtiene como:

$$y(t) = 3I_1 - 2I_2 - \sqrt{2}\ I_3$$

sustituyendo I_1, I_2 e I_3 en la expresión anterior:

$$y(t) = 4.66 - 6e^{-0.5t} + 1.34e^{-t} \cos \sqrt{2}\,t - 0.47e^{-t} \text{sen} \sqrt{2}\,t$$

para $t \geq 0$

la respuesta también se expresa como:

$$\boxed{y(t) = \left[4.66 - 6e^{-0.5t} + e^{-t}(1.34 \cos \sqrt{2}\,t - 0.47 \text{ sen} \sqrt{2}\,t)\right] u_{-1}(t)}$$

b) En este caso, se tiene que la entrada aplicada al sistema es:

$$u(t) = \left[2 + \text{sen}\, 2t\right] u_{-1}(t)$$

por lo tanto, la respuesta del sistema está dada por:

$$y(t) = \int_0^t \left[3e^{-0.5(t-\tau)} - e^{-(t-\tau)}(2 \cos \sqrt{2}(t-\tau) + \sqrt{2} \text{ sen} \sqrt{2}(t-\tau))\right]\left[2 + \text{sen}\, 2\tau\right] d\tau$$

o bien:

$$y(t) = 6 \int_0^t e^{-0.5(t-\tau)}\, d\tau - 4 \int_0^t e^{-(t-\tau)} \cos \sqrt{2}\,(t-\tau)\, d\tau -$$

$$- 2\sqrt{2} \int_0^t e^{-(t-\tau)} \operatorname{sen} \sqrt{2}\,(t-\tau)\, d\tau + 3 \int_0^t e^{-0.5(t-\tau)} \operatorname{sen} 2\tau\, d\tau -$$

$$- 2 \int_0^t e^{-(t-\tau)} \cos \sqrt{2}\,(t-\tau) \operatorname{sen} 2\tau\, d\tau$$

$$- \sqrt{2} \int_0^t e^{-(t-\tau)} \operatorname{sen} \sqrt{2}\,(t-\tau) \operatorname{sen} 2\tau\, d\tau$$

resolviendo por separado cada uno de los términos de la expresión anterior se tiene:

$$I_1 = \int_0^t e^{-0.5(t-\tau)}\, d\tau = 2e^{-0.5(t-\tau)} \Big|_0^t$$

$$I_2 = \int_0^t e^{-(t-\tau)} \cos \sqrt{2}\,(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \frac{1}{3} e^{-(t-\tau)} \left(\cos \sqrt{2}\,(t-\tau) - \sqrt{2} \operatorname{sen} \sqrt{2}\,(t-\tau)\right) \Big|_0^t$$

$$I_3 = \int_0^t e^{-(t-\tau)} \operatorname{sen} \sqrt{2}\,(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \frac{1}{3} e^{-(t-\tau)} \left(\sqrt{2} \cos \sqrt{2}\,(t-\tau) + \operatorname{sen} \sqrt{2}\,(t-\tau)\right) \Big|_0^t$$

$$I_4 = \int_0^t e^{-0.5(t-\tau)} \text{sen } 2\tau \, d\tau$$

$$= \frac{1}{17} e^{-0.5(t-\tau)} (-8 \cos 2\tau + 2 \text{ sen } 2\tau) \Big|_0^t$$

$$I_5 = \int_0^t e^{-(t-\tau)} \cos \sqrt{2}\,(t-\tau) \text{ sen } 2\tau \, d\tau$$

$$= \frac{1}{17} e^{-(t-\tau)} \Big[\cos \sqrt{2}\,(t-\tau)(-6 \cos 2\tau + 7 \text{ sen } 2\tau) +$$

$$+ \text{ sen } \sqrt{2}\,(t-\tau)(4\sqrt{2} \cos 2\tau + \sqrt{2} \text{ sen } 2\tau) \Big] \Big|_0^t$$

$$I_6 = \int_0^t e^{-(t-\tau)} \text{sen } \sqrt{2}\,(t-\tau) \text{ sen } 2\tau \, d\tau$$

$$= \frac{1}{17} e^{-(t-\tau)} \Big[(-\cos \sqrt{2}\,(t-\tau)(4\sqrt{2} \cos 2\tau + \sqrt{2} \text{ sen } 2\tau) +$$

$$+ \text{ sen } \sqrt{2}\,(t-\tau)(-6 \cos 2\tau + 7 \text{ sen } 2\tau)) \Big] \Big|_0^t$$

o bien:

$$I_1 = 2 - 2e^{-0.5t}$$

$$I_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} e^{-t}(\cos \sqrt{2}\, t - \sqrt{2} \text{ sen } \sqrt{2}\, t)$$

$$I_3 = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3} e^{-t} (\sqrt{2} \cos \sqrt{2}\, t + \text{sen } \sqrt{2}\, t)$$

$$I_4 = -\frac{8}{17} \cos 2t + \frac{2}{17} \text{ sen } 2t + \frac{8}{17} e^{-0.5t}$$

$$I_5 = -\frac{6}{17} \cos 2t + \frac{7}{17} \text{ sen } 2t - \frac{1}{17} e^{-t} (-6 \cos \sqrt{2}\, t + 4\sqrt{2} \text{ sen } \sqrt{2}\, t)$$

$$I_6 = -\frac{4\sqrt{2}}{17} \cos 2t - \frac{\sqrt{2}}{17} \text{ sen } 2t + \frac{1}{17} e^{-t}(4\sqrt{2} \cos \sqrt{2}\, t + 6 \text{ sen } \sqrt{2}\, t)$$

por lo tanto, la salida producida por el sistema cuando a éste se le aplica una entrada $u(t) = [2+\text{sen}\,2t]u_{-1}(t)$ se obtiene como:

$$y(t) = 6I_1 - 4I_2 - 2\sqrt{2}\,I_3 + 3I_4 - 2I_5 - \sqrt{2}\,I_6$$

sustituyendo I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 e I_6 en la expresión anterior se tiene:

$$y(t) = 9.33 - 10.58\,e^{-0.5t} - 0.2353\cos 2t - 0.3529\,\text{sen}\,2t +$$

$$+\,e^{-t}(\,1.4853\cos\sqrt{2}\,t + 2.33\,\text{sen}\,\sqrt{2}t) \qquad t \geq 0$$

la respuesta también se expresa como:

$$\boxed{y(t) = \Big[9.33 - 10.58\,e^{-0.5t} - 0.2353\cos 2t - 0.3529\,\text{sen}\,2t + e^{-t}(1.4853\cos\sqrt{2}\,t + 2.33\,\text{sen}\,\sqrt{2}t)\Big]u_{-1}(t)}$$

2. En el dominio de la frecuencia.

En este caso la respuesta del sistema está dada por la expresión:

$$y(t) = L^{-1}\left\{Y(S)\right\}$$

donde:

$$Y(S) = H(S)\,U(S) \qquad \ldots (1)$$

H(S): es la función de transferencia del sistema (transformada de Laplace de la respuesta impulso)

U(S): es la transformada de Laplace de la entrada

a) La entrada aplicada al sistema, es una función escalón, esto es:

$$u(t) = u_{-1}(t)$$

por lo tanto, su transformada de Laplace es:

$$U(S) = \frac{1}{S} \qquad \ldots (2)$$

la respuesta impulso del sistema está dada por la siguiente expresión:

$$h(t) = \left[3e^{-0.5t} - e^{-t}(2\cos\sqrt{2}\,t + \sqrt{2}\,\operatorname{sen}\sqrt{2}\,t)\right]u_{-1}(t)$$

la función de transferencia del sistema, se obtiene como:

$$H(S) = L\left\{h(t)\right\}$$

esto es:

$$H(S) = \frac{3}{S + 0.5} - \frac{2(S + 1) + 2}{(S + 1)^2 + 2}$$

o bien:

$$H(S) = \frac{S^2 + S + 7}{(S + 0.5)((S + 1)^2 + 2)} \qquad \ldots (3)$$

sustituyendo las ecuaciones (2) y (3) en la (1), se tiene:

$$Y(S) = \frac{S^2 + S + 7}{S(S + 0.5)((S + 1)^2 + 2)} \qquad \ldots (4)$$

a fin de obtener la transformada inversa de Laplace de la ecuación (4), es necesario hacer una expansión en fracciones parciales*, esto es:

*Véase el apéndice de Transformada de Laplace.

$$Y(S) = \frac{A}{S} + \frac{B}{S + 0.5} + \frac{CS + D}{(S + 1)^2 + 2}$$

resolviendo, se obtiene que las constantes son:

$$A = 4.66$$
$$B = -6$$
$$C = 1.34$$
$$D = 2$$

por lo tanto, Y(S) es:

$$Y(S) = \frac{4.66}{S} - \frac{6}{S + 0.5} + \frac{1.34\ S + 2}{(S+1)^2 + 2}$$

ó bien:

$$Y(S) = \frac{4.66}{S} - \frac{6}{S + 0.5} + \frac{1.34(S+1)}{(S+1)^2 + 2} + \frac{0.47\sqrt{2}}{(S + 1)^2 + 2}$$

por lo tanto, la respuesta producida por el sistema cuando se aplica como entrada una función escalón es:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4.66}{S} - \frac{6}{S + 0.5} + \frac{1.34(S + 1)}{(S + 1)^2 + 2} + \frac{0.47\sqrt{2}}{(S + 1)^2 + 2}\right\}$$

ó bien:

$$\boxed{y(t) = \left[4.66 - 6e^{-0.5t} + e^{-t}\ (1.34 \cos \sqrt{2}\,t + 0.47 \text{ sen } \sqrt{2}\,t)\right]u_{-1}(t)}$$

b). La entrada aplicada al sistema es en este caso:

$$u(t) = \left[2 + \text{sen } 2t\right]u_{-1}(t)$$

y su transformada de Laplace está dada por:

$$U(S) = \frac{2}{S} + \frac{2}{S^2 + 4}$$

o bien:

$$U(S) = \frac{2S^2 + 2S + 8}{S(S^2 + 4)}$$

y la función de transferencia del sistema (obtenida en el inciso anterior) es:

$$H(S) = \frac{S^2 + S + 7}{(S + 0.5)((S + 1)^2 + 2)}$$

por lo que la salida del sistema se obtiene como:

$$Y(S) = H(S)U(S) = \frac{2S^4 + 4S^3 + 24S^2 + 22S + 56}{(S+0.5)(S^2+4)((S+1)^2+2)}$$

para obtener la transformada inversa de Laplace de la ecuación anterior, se requiere hacer una expansión en fracciones parciales* de la forma:

$$Y(S) = \frac{A}{S} + \frac{B}{S + 0.5} + \frac{CS + D}{S^2 + 4} + \frac{ES + F}{(S + 1)^2 + 2}$$

resolviendo, se tiene que las constantes son:

$A = 9.33$

$B = -10.58$

$C = -0.2353$

$D = -0.7058$

$E = 1.4853$

$F = 0.3921$

por lo tanto Y(S) es:

$$Y(S) = \frac{9.33}{S} - \frac{10.58}{S + 0.5} - \frac{0.2353S + 0.7058}{S^2 + 4} + \frac{1.4853S + 0.3921}{(S + 1)^2 + 2}$$

*Véase el apéndice de Transformada de Laplace.

o bien:

$$Y(S) = \frac{9.33}{S} - \frac{10.58}{S+0.5} - \frac{0.2353S}{S^2+4} - \frac{0.3529(2)}{S^2+4} +$$

$$+ \frac{1.4853\,(S+1)}{(S+1)^2+2} - \frac{2.33\sqrt{2}}{(S+1)^2+2}$$

por lo tanto, la respuesta producida por el sistema cuando se aplica como entrada la función:

$$u(t) = \left[2 + \text{sen } 2t \right] u_{-1}(t)$$

está dada por:

$$y(t) = L^{-1} \left\{ \frac{9.33}{S} - \frac{10.58}{S+0.5} - \frac{0.2353S}{S^2+4} - \frac{0.3529(2)}{S^2+4} + \right.$$

$$\left. + \frac{1.4853(S+1)}{(S+1)^2+2} + \frac{2.33\sqrt{2}}{(S+1)^2+2} \right\}$$

o bien:

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) = \Big[& 9.33 - 10.58\, e^{-0.5t} - 0.2353 \cos 2t - 0.3529 \text{ sen } 2t + \\ & + e^{-t} \left(1.4853 \cos \sqrt{2}\, t + 2.33 \text{ sen } \sqrt{2}\, t \right) \Big] u_{-1}(t) \end{aligned}}$$

VI.5 Estabilidad

El concepto de estabilidad juega un papel importante en el análisis y diseño de los sistemas dinámicos, esto principalmente se debe a que la respuesta producida por el sistema está íntimamente ligado con la estabilidad del mismo.

Considérese un sistema dinámico, el cual puede ser representado desde el punto de vista matemático mediante la función de transferencia:

$$H(S) = \frac{Q(S)}{P(S)} \qquad \ldots (1)$$

donde:

Q(S): es un polinomio de orden m y representa a los ceros del sistema

P(S): es un polinomio de orden n y representa a los polos del sistema

Para un sistema realizable (sistema físico) se tiene que n debe ser mayor que m.

La función de transferencia del sistema se puede expresar de la siguiente forma:

$$H(S) = \frac{S^m + q_1 S^{m-1} + q_2 S^{m-2} + \ldots + q_{m-1} S + q_m}{S^n + P_1 S^{n-1} + P_2 S^{n-2} + \ldots + P_{n-1} S + P_n} \qquad \ldots (2)$$

En general la estabilidad de un sistema depende directamente de la naturaleza que tengan las raíces que satisfacen al polinomio:

$$P(S) = 0 \qquad \ldots (3)$$

las raíces que satisfacen a la ecuación (3) (polos del sistema), pueden en general ser reales y/o complejas, por lo tanto, es necesario establecer las restricciones que deben tener estas raíces para saber si el sistema es o no estable. Una condición necesaria y suficiente * para que el sistema sea estable es que la parte real de las raíces que satisfacen al polinomio P(S) deben ser negativas, de esta manera es posible distinguir o delimitar las zonas de estabilidad e inestabilidad en el plano complejo, esto es:

*Esta condición fue establecida por J.C. Maxwell, "On Governors", Proc. Roy, Soc. London, Vol. 10 (1868) y A Vyshnegradskii, "On Governors with Direct action", (1876).

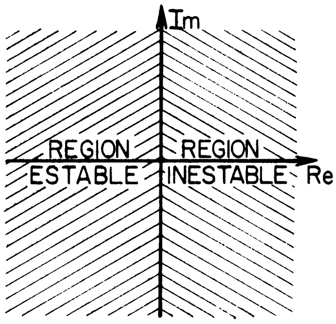
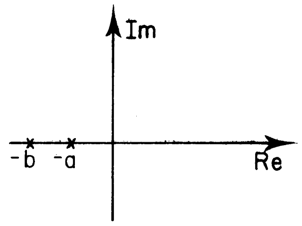
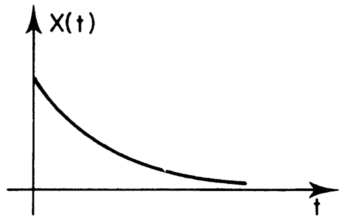
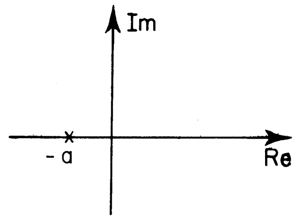
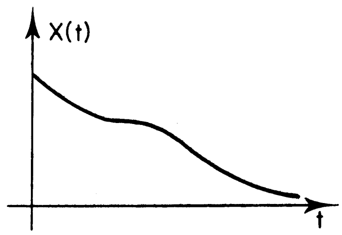
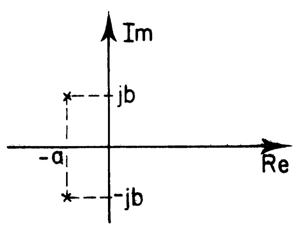
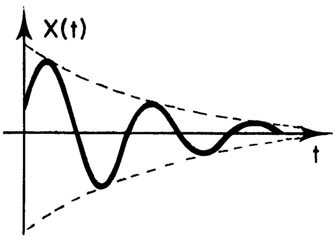


Figura VI.31

En la tabla VI.1, se presentan las respuestas producidas por algunos sistemas dinámicos dependiendo de la ubicación de los polos de los mismos (raíces $P(S) = 0$) en el plano complejo:

	Polos del sistema	Respuesta del sistema
a		
b		
c		

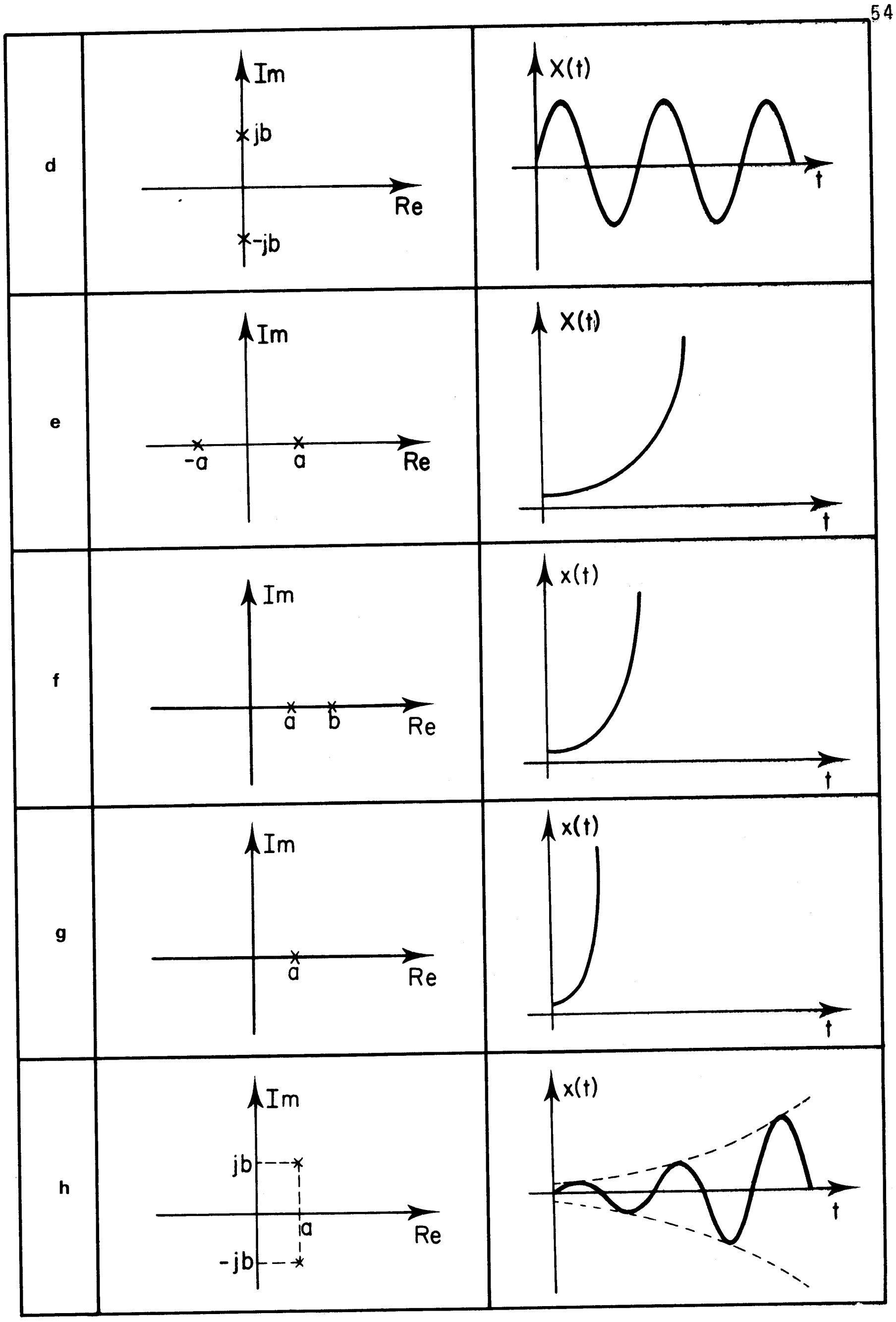

d
Im
jb
-jb
Re
X(t)
t
e
Im
-a
a
Re
X(t)
t
f
Im
a
b
Re
x(t)
t
g
Im
a
Re
x(t)
t
h
Im
jb
a
-jb
Re
x(t)
t

Figura VI.32

Con base en las respuestas de los sistemas descritos mediante las figuras anteriores, se puede inferir lo siguiente:

1. Los sistemas con polos ubicados en el semiplano izquierdo (raíces con parte real negativa) del plano complejo, son *estables*. (Véanse figuras (a), (b) y (c)).

2. El sistema con polos ubicados sobre el eje imaginario (raíces con parte real igual a cero) del plano complejo es *críticamente estable*. (Véase figura (d)).

3. Los sistemas con polos ubicados en los semiplanos izquierdo y derecho (raíces con parte real negativa y positiva respectivamente) y con polos ubicados en el semiplano derecho (raíces con parte real positiva) del plano complejo son *inestables*. (Véanse figuras (e), (f), (g) y (h)).

De esta forma ya se tiene una manera cualitativa para analizar la estabilidad de sistemas dinámicos, a partir de sus patrones de polos y ceros. Sin embargo, no siempre es posible tener el patrón de polos y ceros del sistema, por lo que es necesario contar con alguna técnica mediante la cual se pueda analizar en forma rápida y sencilla la estabilidad de un sistema. Por otro lado, si se conocen las raíces que satisfacen al polinomio $P(S)$, se puede determinar si el sistema es o no estable. Este método puede ser un poco tedioso si el orden del polinomio es grande (mayor de 5 por ejemplo), debido a que es necesario emplear alguna técnica muy compleja para el cálculo de las raíces.

Existen algunos criterios y procedimientos sistemáticos para analizar la estabilidad de sistemas dinámicos, entre los que se pueden citar:

a) Las trazas polares de Nyquist

b) Las trazas logarítmicas de Bode

c) La carta de Nichols

d) La fórmula de Orlando

e) Los métodos de Lyapunov

f) El criterio de Routh - Hurwitz

Uno de los procedimientos comúnmente empleados para el análisis de estabilidad de los sistemas dinámicos lineales e invariantes con el tiempo, es el criterio de Routh; a continuación se presenta el algoritmo empleado por este criterio para el análisis de estabilidad.

CRITERIO DE ESTABILIDAD DE ROUTH

El problema de E. J. Routh consiste en determinar el número de raíces de un polinomio con parte real positiva. Para obtener el algoritmo es necesario hacer uso de los índices de Cauchy y del teorema de Sturm.

INDICES DE CAUCHY

El índice de Cauchy de una función racional real $R(x)$ entre los límites a y b* $(I_a^b\, R(x))$ es la diferencia entre el número de veces que el valor de la función $R(x)$ va de $-\infty$ a $+\infty$ y de $+\infty$ a $-\infty$ cuando el argumento de la función cambia de a hasta b.

Con base en la definición anterior, si $R(x)$ se expresa de la siguiente manera:

$$R(x) = \sum_{i=1}^{p} \frac{A_i}{x - \alpha_i} + R_1(x) \qquad \ldots (1)$$

donde:

A_i, α_i: son números reales

$R_1(x)$: es una función racional, la cual no posee raíces reales

*Los límites a y b pueden ser $-\infty$ y $+\infty$.

entonces el índice de Cauchy de la función $R(x)$ es:

$$I_{-\infty}^{+\infty} R(x) = \sum_{i=1}^{p} \operatorname{sgn} A_i \qquad \ldots (2)$$

donde:

sgn x: es la función signo y se define como:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ +1, & x > 0 \end{cases}$$

y en general el índice de Cauchy es:

$$I_a^b R(x) = \sum_{a<\alpha_i<b} \operatorname{sgn} A_i \qquad \ldots (3)$$

en particular si $f(x) = a_0(x - \alpha_1)^{n_1} \ldots (x - \alpha_m)^{n_m}$ es un polinomio real (donde $a_i \neq a_k$ para $i, k = 1, 2, 3, \ldots, m$) y entre sus raíces $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m$, sólo las primeras p son reales, entonces:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{j=1}^{m} \frac{n_j}{x - \alpha_j} = \sum_{i=1}^{p} \frac{n_i}{x - \alpha_i} + R_1(x) \qquad \ldots (4)$$

donde la función $R_1(x)$ no posee raíces reales.

Por lo tanto, de la ecuación (3), el índice:

$$I_a^b \frac{f'(x)}{f(x)} \qquad (a < b) \qquad \ldots (5)$$

es igual al número de raíces reales diferentes del polinomio $f(x)$ en el intervalo (a, b).

Por otra parte, una función racional real $R(x)$ siempre puede ser expresada de la forma:

$$R(x) = \sum_{i=1}^{p} \left\{ \frac{A_1^{(i)}}{x - \alpha_i} + \ldots + \frac{A_{ni}^{(i)}}{(x + \alpha_i)^{ni}} \right\} + R_1(x) \qquad \ldots (6)$$

donde todas las α's y A's son números reales ($A^{(i)} \neq 0$ para $i = 1, 2, 3, \ldots, p$) y $R_1(x)$ no posee raíces reales.

Entonces:

$$I_{-\infty}^{+\infty} R(x) = \sum_{\substack{n_i \\ \text{impar}}} \operatorname{sgn} A_{n_i}^{(i)} \qquad \ldots (7)$$

y en forma general:

$$I_a^b R(x) = \sum_{\substack{n_i \\ \text{impar} \\ a<\alpha_i<b}} \operatorname{sgn} A_{n_i}^{(i)} \qquad \ldots (8)$$

Uno de los métodos para calcular el índice de Cauchy de una función racional real $R(x)$ ($I_a^b R(x)$), está basado en el teorema de Sturm.

TEOREMA DE STURM

Sean $f_1(x)$ y $f_2(x)$ dos polinomios reales donde el orden de $f_1(x)$ no es menor que el orden de $f_2(x)$ y además estos polinomios no tienen factores comunes. Mediante el algoritmo de Euclides se puede formar la secuencia de polinomios:

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ f_4(x),\ \ldots,\ f_{m-1}(x),\ f_m(x) \qquad \ldots (9)$$

empleando la siguiente expresión:

$$f_{k-1}(x) = q_k(x) f_k(x) - f_{k+1}(x) \qquad \ldots (10)$$

La secuencia de polinomios descrita por la ecuación (9) tiene las siguientes propiedades:

1) Dos polinomios adyacentes $f_k(x)$ y $f_{k+1}(x)$ no se hacen cero simultáneamente para cualquier valor de x en el intervalo (a, b).

2) Si $f_k(x) = 0$ para algún valor de $x = x_0$, entonces los polinomios $f_{k-1}(x_0)$ y $f_{k+1}(x_0)$ tienen signos opuestos.

3) El último polinomio de la secuencia $f_m(x)$ es siempre una constante diferente de cero.

La ecuación (9) se conoce como una cadena de Sturm.

Considérese la secuencia de valores que se obtiene al sustituir $x = x_i$ en la ecuación (9); a partir de esta secuencia se puede determinar el número de cambios de signo que tiene la cadena de Sturm, leyendo simplemente de izquierda a derecha el signo de cada término de la secuencia de valores que se obtiene al hacer $x = x_i$.

Si $f_k(x_i) = 0$ para alguna k, entonces por la segunda propiedad de la cadena de Sturm, se tiene que los polinomios adyacentes $f_{k-1}(x_i)$ y $f_{k+1}(x_i)$ poseen signos opuestos y en este caso se omite el signo de $f_k(x)$ puesto que el valor de éste es cero.

Por otra parte sea $V(x_i)$ una función que se define como el número de cambios de signo en la cadena de Sturm; considérese ahora un número $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, si $x = x_i \pm \varepsilon$ de esta manera $f_{k-1}(x_i \pm \varepsilon)$ y $f_{k+1}(x \pm \varepsilon)$ tienen también signos opuestos en este caso, debido a la continuidad de los polinomios habrá únicamente un solo cambio de signo en $f_{k-1}(x_i \pm \varepsilon)$, $f_k(x_i \pm \varepsilon)$ y $f_{k+1}(x_i \pm \varepsilon)$ sin considerar el signo de $f_k(x_i \pm \varepsilon)$ de acuerdo con la siguiente tabla:

x	$f_{k-1}(x)$	$f_k(x)$	$f_{k+1}(x)$
$x_i - \varepsilon$	$\mp$	$\pm$	$\pm$
x_i	$\mp$	0	$\pm$
$x_i + \varepsilon$	$\mp$	$\mp$	$\pm$

Tabla VI.2

De esta manera, el número de cambios en el signo de estos tres términos se mantiene igual cuando x pasa a través de x_i.

Si se define $V(x)$ como una función para determinar el número de cambios de signo cuando x se hace variar en todo el intervalo (a, b), entonces un incremento o decremento en la función $V(x)$ cuando x pasa por x_i, deberá ser causado únicamente por el cambio de signo ya sea del primer o último polinomio de la cadena de Sturm. Sin embargo, según la tercera propiedad de la cadena de Sturm el último polinomio $f_m(x)$ es una constante, por lo que un incremento o decremento en $V(x)$ es causado únicamente por el cambio de signo del primer polinomio de la cadena de Sturm $f_1(x)$, es decir, cuando $f_1(x)$ pasa por cero, entonces se tiene un cambio de signo en la ecuación (9), por lo tanto la relación $f_2(x) / f_1(x)$ va de $-\infty$ a $+\infty$ y viceversa, de donde se tiene que el teorema de Sturm es:

Si $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ..., $f_m(x)$ es una cadena de Sturm en el intervalo (a, b) y $V(x)$ es una función para determinar el número de cambios de signo en la cadena, entonces:

$$I_a^b \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = V(a) - V(b) \qquad \ldots (11)$$

De esta forma se ha mostrado que el índice de Cauchy de toda función racional real $R(x)$ se puede determinar o calcular con base en el teorema de Sturm, lo único que se requiere es que la función $R(x)$ pueda ser expresada como $Q(x) + g(x) / f(x)$ y además el orden del polinomio $g(x)$ no debe ser mayor que el orden de $f(x)$. Si se construye una cadena de Sturm a partir de $g(x)$ y $f(x)$, se tiene entonces:

$$I_a^b R(x) = I_a^b \frac{g(x)}{f(x)} = V(a) - V(b) \qquad \ldots (12)$$

Finalmente mediante el teorema de Sturm se puede determinar el número de raíces reales distintas de un polinomio $f(x)$ en un intervalo (a, b) como:

$$I_a^b \frac{f'(x)}{f(x)} \qquad \ldots (13)$$

Considérese un polinomio real $f(x)$ el cual no tiene raíces sobre el eje imaginario. Con el fin de establecer una región en la que se puedan incluir todas las raíces de $f(x)$ con parte real positiva, se construye un semicírculo de radio R con centro en el origen del plano complejo, como se muestra en la siguiente figura:

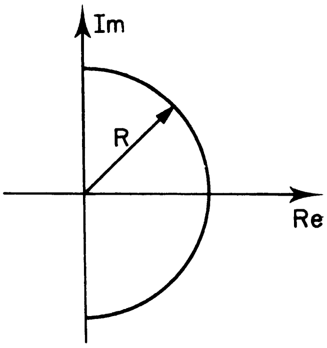


Figura VI.32

Si R es suficientemente grande, todas las raíces de $f(x)$ con parte real positiva estarán localizadas en el interior de la región descrita por el semicírculo.

Por lo tanto, el argumento de $f(x)$ ($\arg f(x)$) se incrementa 2π veces por cada raíz del polinomio que esté contenida en la región delimitada por el semicírculo, esto con base en el principio del argumento, es decir:

si:

$$f(x) = a_0 \prod_{i=1}^{n} (x - x_i) \qquad \ldots (1)$$

entonces:

$$\Delta \arg f(x) = \sum_{i=1}^{n} \arg(x - x_i) \qquad \ldots (2)$$

si el punto x_i se localiza en el interior de la región descrita por el semicírculo, entonces:

$$\Delta \arg (x - x_i) = 2\pi \qquad \ldots (3)$$

y si el punto x_i se localiza en el exterior de la región descrita por el semicírculo, entonces:

$$\Delta \arg (x - x_i) = 0 \qquad \ldots (4)$$

Por otra parte, el incremento en el argumento de $f(x)$ a lo largo del semicírculo de radio R cuando $R \to \infty$ se determina por el incremento en el argumento del término de mayor orden $a_0 x^n$ y es por lo tanto $n\pi$, de esta manera el incremento en el argumento de $f(x)$ a lo largo del eje imaginario cuando $R \to \infty$ está dado por:

$$\Delta_{-\infty}^{+\infty} \arg f(j\omega) = (n - 2k)\pi \qquad \ldots (5)$$

Considérese que el polinomio $f(x)$ puede ser expresado de la siguiente forma:

$$f(x) = a_0x^n + b_0x^{n-1} + a_1x^{n-2} + b_1x^{n-3} + \ldots + a_nx + b_n \qquad \ldots (6)$$

evaluando el polinomio $f(x)$ en $x = j\omega$ se obtiene:

$$f(x)\Big|_{x=j\omega} = f(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) \qquad \ldots (7)$$

así, se tiene que los términos $U(\omega)$ y $V(\omega)$ son:

a) **Para n par:**

$$\left.\begin{aligned} U(\omega) &= (-1)^{\frac{n}{2}} (a_0\omega^n - a_1\omega^{n-2} + a_2\omega^{n-4} - a_3\omega^{n-6} + \ldots) \\ \text{y} \quad V(\omega) &= (-1)^{\frac{n}{2}-1} (b_0\omega^{n-1} - b_1\omega^{n-3} + b_2\omega^{n-5} - b_3\omega^{n-7} + \ldots) \end{aligned}\right\} \ldots (8)$$

b) **Para n impar:**

$$\left.\begin{aligned} U(\omega) &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} (b_0\omega^{n-1} - b_1\omega^{n-3} + b_2\omega^{n-5} - b_3\omega^{n-7} + \ldots) \\ \text{y} \quad V(\omega) &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} (a_0\omega^n - a_1\omega^{n-2} + a_2\omega^{n-4} - a_3\omega^{n-6} + \ldots) \end{aligned}\right\} \ldots (9)$$

Haciendo uso de los índices de Cauchy y las dos ecuaciones anteriores se obtiene entonces:

$$\frac{1}{\pi}\,\Delta_{-\infty}^{+\infty}\,\arg f(j\omega) = \begin{cases} I_{-\infty}^{+\infty}\,\dfrac{U(\omega)}{V(\omega)} & \text{para} \quad \lim\limits_{\omega\to\infty} \dfrac{U(\omega)}{V(\omega)} = 0 \\[2ex] -\,I_{-\infty}^{+\infty}\,\dfrac{V(\omega)}{U(\omega)} & \text{para} \quad \lim\limits_{\omega\to\infty} \dfrac{V(\omega)}{U(\omega)} = 0 \end{cases} \qquad \ldots (10)$$

a partir de las ecuaciones (8), (9) y (10) se observa que para n par se aplica la fórmula inferior de esta última y para n impar la fórmula superior, puesto que:

$$\arg f(j\omega) = \operatorname{arc\,cot} \frac{U(\omega)}{V(\omega)} = \operatorname{arc\,tan} \frac{V(\omega)}{U(\omega)} \qquad \ldots (11)$$

de las ecuaciones (5), (8), (9) y (10) se obtiene para cualquier n (ya sea par o impar):

$$I_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_0\omega^{n-1} - b_1\omega^{n-3} + b_2\omega^{n-5} - b_3\omega^{n-7} + \ldots}{a_0\omega^{n} - a_1\omega^{n-2} + a_2\omega^{n-4} - a_3\omega^{n-6} + \ldots} = n - 2k \qquad \ldots (12)$$

Para determinar el índice de Cauchy en el primer miembro de la ecuación (12) se emplea el teorema de Sturm, haciendo:

$$f_1(\omega) = a_0\omega^{n} - a_1\omega^{n-2} + a_2\omega^{n-4} - a_3\omega^{n-6} + \ldots \qquad \ldots (13)$$

y

$$f_2(\omega) = b_0\omega^{n-1} - b_1\omega^{n-3} + b_2\omega^{n-5} - b_3\omega^{n-7} + \ldots \qquad \ldots (14)$$

a partir de estas dos últimas ecuaciones mediante el algoritmo de Euclides se forma la siguiente cadena de Sturm:

$$f_1(\omega),\ f_2(\omega),\ f_3(\omega),\ f_4(\omega),\ \ldots,\ f_m(\omega) \qquad \ldots (15)$$

Considérese primeramente el caso regular, donde $m = n + 1$; aquí el orden de cada polinomio en la secuencia descrita mediante la ecuación (15) es uno menos que el del polinomio precedente y el último polinomio de la secuencia (cadena) es de orden cero, es decir, es una constante diferente de cero con base en las propiedades de una cadena de Sturm.

Mediante el algoritmo de Euclides, se obtiene entonces:

$$f_3(\omega) = \frac{a_0}{b_0}\,\omega\, f_2(\omega) - f_1(\omega) = c_0\omega^{n-2} - c_1\omega^{n-4} + c_2\omega^{n-6} - c_3\omega^{n-8} + \ldots \qquad \ldots (16)$$

donde:

$$\begin{aligned}
c_0 &= a_1 - \frac{a_0}{b_0}\, b_1 = \frac{b_0a_1 - a_0b_1}{b_0}\\
c_1 &= a_2 - \frac{a_0}{b_0}\, b_2 = \frac{b_0a_2 - a_0b_2}{b_0}\\
c_2 &= a_3 - \frac{a_0}{b_0}\, b_3 = \frac{b_0a_3 - a_0b_3}{b_0}\\
c_3 &= a_4 - \frac{a_0}{b_0}\, b_4 = \frac{b_0a_4 - a_0b_4}{b_0}\\
&\vdots
\end{aligned} \qquad \ldots (17)$$

y en forma similar:

$$f_4(\omega) = \frac{b_0}{C_0}\,\omega\, f_3(\omega) - f_2(\omega) = d_0\omega^{n-3} - d_1\omega^{n-5} + d_2\omega^{n-7} - d_3\omega^{n-9} + \ldots \qquad \ldots (18)$$

donde:

$$\begin{aligned}
d_0 &= b_1 - \frac{b_0}{c_0}\, c_1 = \frac{c_0b_1 - b_0c_1}{c_0}\\
d_1 &= b_2 - \frac{b_0}{c_0}\, c_2 = \frac{c_0b_2 - b_0c_2}{c_0}\\
d_2 &= b_3 - \frac{b_0}{c_0}\, c_3 = \frac{c_0b_3 - b_0c_3}{c_0}\\
d_3 &= b_4 - \frac{b_0}{c_0}\, c_4 = \frac{c_0b_4 - b_0c_4}{c_0}\\
&\vdots
\end{aligned} \qquad \ldots (19)$$

en forma similar se determinan los coeficientes de los polinomios $f_5(\omega)$, $f_6(\omega)$, $f_7(\omega)$, ... $f_{n+1}(\omega)$.

Por otra parte, cada polinomio de la cadena de Sturm (ecuación (15)) es una función par o impar de los polinomios adyacentes a ésta y siempre tienen paridad opuesta. A partir de los coeficientes de los polinomios que forman a la cadena de Sturm se forma el arreglo de Routh de la siguiente manera:

$$\left.\begin{array}{l} a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots \\ b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ \ldots \\ c_0,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ \ldots \\ d_0,\ d_1,\ d_2,\ d_3,\ d_4,\ \ldots \\ e_0,\ e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4,\ \ldots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{array}\right| \qquad \ldots (20)$$

A partir de las ecuaciones (17) y (19) se observa que cada renglón en el arreglo de Routh (ecuación (20)), se obtiene a partir de los dos renglones precedentes, de acuerdo con la siguiente regla:

> De los números del renglón superior se restan los números correspondientes del renglón inferior multiplicados por el número que hace la primera diferencia igual a cero, omitiendo la primera diferencia (igual a cero), se obtiene el renglón siguiente.

Ejemplo VI.

Considérense dos polinomios $f_1(\omega)$ y $f_2(\omega)$ de la forma:

$$f_1(\omega) = a_0\omega^{11} + a_1\omega^9 + a_2\omega^7 + a_3\omega^5 + a_4\omega^3 + a_5\omega$$

y

$$f_2(\omega) = b_0\omega^{10} + b_1\omega^8 + b_2\omega^6 + b_3\omega^4 + b_4\omega^2 + b_5\omega^0$$

Obtener el arreglo de Routh.

Solución:

$$\begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{array}$$

Primera diferencia:

$$a_0 - b_0$$

el número que hace la primera diferencia igual a cero es:

$$\frac{a_0}{b_0}$$

y el siguiente renglón será:

$$c_0 \quad c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4$$

donde:

$$c_0 = a_1 - b_1 \frac{a_0}{b_0} = \frac{b_0 a_1 - b_1 a_0}{b_0}$$

$$c_1 = a_2 - b_2 \frac{a_0}{b_0} = \frac{b_0 a_2 - b_2 a_0}{b_0}$$

$$c_2 = a_3 - b_3 \frac{a_0}{b_0} = \frac{b_0 a_3 - b_3 a_0}{b_0}$$

$$c_3 = a_4 - b_4 \frac{a_0}{b_0} = \frac{b_0 a_4 - b_4 a_0}{b_0}$$

$$c_4 = a_5 - b_5 \frac{a_0}{b_0} = \frac{b_0 a_5 - b_5 a_0}{b_0}$$

en el caso regular nunca se obtiene un coeficiente igual a cero en la primera columna del arreglo de Routh:

$$a_0 \neq 0, \ b_0 \neq 0, \ c_0 \neq 0, \ d_0 \neq 0, \ \ldots$$

y el máximo común divisor de $f_1(\omega)$ y $f_2(\omega)$ es $f_{n+1}(\omega)$ que es una constante diferente de cero.

Por lo tanto, el arreglo de Routh es en este caso:

$$\begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & & \\ e_0 & e_1 & e_2 & & & \\ f_0 & f_1 & & & & \\ g_0 & & & & & \end{array}$$

Cuando se aplica el teorema de Sturm en el intervalo $(-\infty, +\infty)$ al primer miembro de la siguiente ecuación:

$$f(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) \qquad \ldots (21)$$

además, haciendo uso de la ecuación (15) y los resultados de la ecuación (12), se obtiene:

$$V(-\infty) - V(+\infty) = n - 2k \qquad \ldots (22)$$

y para este caso:

$$V(+\infty) = V(a_0, b_0, c_0, d_0, \ldots,) \qquad \ldots (23)$$

y:

$$V(-\infty) = V(a_0, -b_0, +c_0, -d_0, \ldots,) \qquad \ldots (24)$$

por lo que:

$$V(-\infty) = n - V(+\infty) \qquad \ldots (25)$$

a partir de las ecuaciones (22) y (25) se obtiene:

$$k = V(a_0, b_0, c_0, d_0, \ldots,) \qquad \ldots (26)$$

de esta forma se ha probado el teorema de Routh, el cual establece:

> El número de raíces de un polinomio real $f(x)$ localizadas en el semiplano derecho del plano complejo, es decir, con parte real positiva es igual al número de cambios de signo en la primera columna del arreglo de Routh.

Considerando el caso especial, en el que todas las raíces del polinomio $f(x)$ tienen parte real negativa (caso *estable*); si se obtienen los polinomios que forman a la cadena de Sturm (ecuación (15)) a partir de las ecuaciones (13) y (14), entonces, puesto que $k = 0$, la ecuación (22) se puede escribir como:

$$V(-\infty) - V(+\infty) = n \qquad \ldots (27)$$

Sin embargo, se tiene:

$$\begin{aligned} 0 \le V(-\infty) \le m-1 \le n \\ 0 \le V(+\infty) \le m-1 \le n \end{aligned} \qquad \ldots (28)$$

por lo que, la ecuación (27) se cumple sólo cuando se tiene que $m = n + 1$ (caso regular), de esta manera:

$$\begin{aligned} V(+\infty) &= 0 \\ V(-\infty) &= m - 1 = n \end{aligned} \qquad \ldots (29)$$

A partir de la ecuación (26) se puede establecer el criterio de estabilidad de Routh de la siguiente forma:

> Todas las raíces de un polinomio real $f(x)$ tienen parte real negativa *si y sólo si* llevando a cabo el algoritmo de Routh, todos los elementos de la primera columna en el arreglo de Routh son distintos de cero y además tienen el mismo signo.

Finalmente, al deducir el teorema de Routh se hizo uso de la ecuación (12), esta ecuación se obtuvo bajo la suposición de que $f(x)$ no tenía raíces sobre el eje imaginario. En el caso general se hace la suposición de que $f(x)$ tiene k raíces en el semiplano derecho y s raíces sobre el eje imaginario del plano complejo, por lo que la ecuación (12) en este caso, será de la siguiente forma:

$$I_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_0\omega^{n-1} - b_1\omega^{n-3} + b_2\omega^{n-5} - b_3\omega^{n-7} + \ldots}{a_0\omega^{n} - a_1\omega^{n-2} + a_2\omega^{n-4} - a_3\omega^{n-6} + \ldots} = n - 2k - S \qquad \ldots (30)$$

y el polinomio $f(x)$ se puede expresar como el siguiente producto:

$$f(x) = d(x)\ f^*(x) \qquad \ldots (31)$$

donde:

$d(x)$: es un polinomio real y tiene S raíces imaginarias

$f^*(x)$: es un polinomio real de orden $n^* = n - S$ y además no tiene raíces sobre el eje imaginario

por lo tanto, el polinomio real $f(x)$ evaluado en $x = j\omega$ se puede escribir como:

$$f(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = d(j\omega)\left[\,U^*(\omega) + jV^*(\omega)\,\right] \qquad \ldots (32)$$

puesto que $d(j\omega)$ es un polinomio real en ω se tiene:

$$\frac{U(\omega)}{V(\omega)} = \frac{U^*(\omega)}{V^*(\omega)} \qquad \ldots (33)$$

Debido a que n y n^* tienen la misma paridad para S par a partir de las ecuaciones (8) y (9) y empleando la notación de las ecuaciones (13) y (14), se obtiene:

$$\frac{f_2(\omega)}{f_1(\omega)} = \frac{f_2^*(\omega)}{f_1^*(\omega)} \qquad \ldots (34)$$

y aplicando la ecuación (12) a $f^*(x)$ se obtiene:

$$I_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_2(\omega)}{f_1(\omega)} = I_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_2^*(\omega)}{f_1^*(\omega)} = n^* - 2k = n - 2k - S \qquad \ldots (35)$$

Anteriormente se presentó un análisis formal para la obtención del arreglo empleado en el criterio de estabilidad de Routh, el cual permite determinar el número de raíces de un polinomio real que tienen parte real positiva. A continuación se enuncia un procedimiento simple y sistemático para la obtención del arreglo de Routh.

Considérese primeramente la función de transferencia de un sistema dinámico, lineal e invariante con el tiempo, dada por:

$$H(S) = \frac{Q(S)}{P(S)}$$

donde:

$Q(S)$: es un polinomio real en S y es de orden m

$P(S)$: es un polinomio real en S y es de orden n

en este caso, haciendo uso del criterio de estabilidad de Routh, se investiga el número de raíces del polinomio $P(S)$ que tienen parte real positiva. Por otra parte $P(S)$ es de la forma:

$$P(S) = S^n + \alpha_1 S^{n-1} + \alpha_2 S^{n-2} + \alpha_3 S^{n-3} + \ldots + \alpha_{n-1} S + \alpha_n$$

este polinomio puede también ser expresado como:

$$P(S) = a_0 S^n + b_0 S^{n-1} + a_1 S^{n-2} + b_1 S^{n-3} + \ldots + b_{\frac{n-2}{2}} S + a_{\frac{n}{2}}$$

si n es par, y:

$$P(S) = a_0 S^n + b_0 S^{n-1} + a_1 S^{n-2} + b_1 S^{n-3} + \ldots + a_{\frac{n-1}{2}} S + b_{\frac{n-1}{2}}$$

si n es impar.

Los elementos que forman los dos primeros renglones del arreglo de Routh son entonces los coeficientes del polinomio P(S); los elementos que forman los renglones subsecuentes del arreglo se obtiene con base en el algoritmo de Routh descrito anteriormente. Cabe hacer la aclaración de que únicamente se analiza la naturaleza de las raíces del polinomio del denominador de la función de transferencia, debido a que éstas representan los polos del sistema* y por lo tanto el comportamiento del sistema.

Ejemplo VI.6

Considérese un sistema lineal e invariante con el tiempo, el cual se puede representar desde el punto de vista matemático mediante la siguiente función de transferencia:

$$H(S) = \frac{S^3 + 12S^2 + 14S + 11}{S^6 + 10.3S^5 + 38.02S^4 + 60.7S^3 + 39.7S^2 + 8.2S + 0.48}$$

Determinar si el sistema es o no estable, empleando el criterio de estabilidad de Routh.

Solución:

Primeramente se procede a obtener el arreglo de Routh, siendo en este caso de la forma:

$$\begin{array}{c|cccc}
S^6 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\
S^5 & b_0 & b_1 & b_2 & \\
S^4 & c_0 & c_1 & c_2 & \\
S^3 & d_0 & d_1 & & \\
S^2 & e_0 & e_1 & & \\
S^1 & f_0 & & & \\
S^0 & g_0 & & &
\end{array}$$

*Ver la sección de Patrón de polos y ceros.

donde los elementos que forman los dos primeros renglones del arreglo están dados por los coeficientes del polinomio del denominador$(P(S))$de la función de transferencia del sistema$(H(S))$, esto es:

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 38.02$$

$$a_2 = 39.7$$

$$a_3 = 0.48$$

$$b_0 = 10.3$$

$$b_1 = 60.7$$

$$b_2 = 8.2$$

los elementos que no aparecen en el arreglo de Routh se consideran cero.

A partir de los dos primeros renglones del arreglo se obtienen los renglones subsecuentes de éste mediante el algoritmo de Routh, esto es:

$$c_0 = \frac{b_0a_1 - b_1a_0}{b_0} = \frac{(10.3)(38.02) - (60.7)(1)}{10.3} = 32.127$$

$$c_1 = \frac{b_0a_2 - b_2a_0}{b_0} = \frac{(10.3)(39.7) - (8.2)(1)}{10.3} = 38.904$$

$$c_2 = \frac{b_0a_3 - (0)a_0}{b_0} = \frac{(10.3)(0.48) - (0)(1)}{10.3} = 0.48$$

por lo tanto, los tres primeros renglones del arreglo de Routh son:

$$\begin{array}{c|llll} S^6 & 1 & 38.02 & 39.7 & 0.48 \\ S^5 & 10.3 & 60.7 & 8.2 & \\ S^4 & 32.127 & 38.904 & 0.48 & \end{array}$$

los elementos del cuarto renglón del arreglo son:

$$d_0 = \frac{c_0b_1 - c_1b_0}{c_0} = \frac{(32.127)(60.7) - (38.904)(10.3)}{32.127} = 48.22$$

$$d_1 = \frac{c_0b_2 - c_2b_0}{c_0} = \frac{(32.127)(8.2) - (0.48)(10.3)}{32.127} = 8.05$$

hasta este momento el arreglo de Routh es:

s^6	1	38.02	39.7	0.48
s^5	10.3	60.7	8.2	
s^4	32.127	38.904	0.48	
s^3	48.22	8.05		

los elementos del quinto renglón del arreglo son:

$$e_0 = \frac{d_0c_1 - d_1c_0}{d_0} = \frac{(48.22)(38.904) - (8.05)(32.127)}{48.22} = 33.54$$

$$e_1 = \frac{d_0c_2 - (0)c_0}{d_0} = \frac{(48.22)(0.48) - (0)(32.127)}{48.22} = 0.48$$

y los primeros cinco renglones del arreglo de Routh son:

s^6	1	38.02	39.7	0.48
s^5	10.3	60.7	8.2	
s^4	32.127	38.904	0.48	
s^3	48.22	8.05		
s^2	33.54	0.48		

los elementos de los dos últimos renglones del arreglo son:

$$f_0 = \frac{e_0d_1 - e_1d_0}{e_0} = \frac{(33.54)(8.05) - (0.48)(48.22)}{33.54} = 7.39$$

$$g_0 = \frac{f_0e_1 - (0)e_0}{f_0} = \frac{(7.36)(0.48) - (0)(33.51)}{7.36} = 0.48$$

por lo tanto, el arreglo de Routh es en este caso:

S^6	1	38.02	39.7	0.48
S^5	10.3	60.7	8.2	
S^4	32.127	38.904	0.48	
S^3	48.22	8.05		
S^2	33.54	0.48		
S^1	7.39			
S^0	0.48			

Para determinar el número de raíces de P(S), con parte real positiva se aplica el criterio de estabilidad de Routh, haciendo un análisis de los signos de los elementos que forman la primera columna del arreglo. En este caso se tiene que los signos de estos elementos son positivos, de donde puede inferirse que las raíces de P(S) tienen parte real negativa y por lo tanto, el sistema es absolutamente estable.

Ejemplo VI.7

Considérese un sistema lineal e invariante con el tiempo, cuya función de transferencia está dada por:

$$H(S) = \frac{S^4 + 13S^3 + 8S + 8}{S^6 + 9.5S^5 + 30.6S^4 + 38.5S^3 + 20S^2 + 18S + 14}$$

Determinar si el sistema es estable.

Solución:

En este caso se procede a formar el arreglo de Routh, siendo éste de la forma:

s^6	a_0	a_1	a_2	a_3
s^5	b_0	b_1	b_2	
s^4	c_0	c_1	c_2	
s^3	d_0	d_1		
s^2	e_0	e_1		
s^1	f_0			
s^0	g_0			

donde, los elementos que forman los dos primeros renglones del arreglo son:

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 30.6$$

$$a_2 = 20$$

$$a_3 = 14$$

$$b_0 = 9.5$$

$$b_1 = 38.5$$

$$b_2 = 18$$

los elementos que forman los renglones subsecuentes del arreglo, se obtienen por medio del algoritmo de Routh, esto es:

$$c_0 = \frac{b_0 a_1 - b_1 a_0}{b_0} = \frac{(9.5)(30.6) - (38.5)(1)}{9.5} = 26.547$$

$$c_1 = \frac{b_0 a_2 - b_2 a_0}{b_0} = \frac{(9.5)(20) - (18)(1)}{9.5} = 18.105$$

$$c_2 = \frac{b_2 a_3 - (0) a_0}{b_0} = \frac{(9.5)(14) - (0)(1)}{9.5} = 14$$

$$d_0 = \frac{c_0 b_1 - c_1 b_0}{c_0} = \frac{(26.547)(38.5) - (18.105)(9.5)}{26.547} = 32.021$$

$$d_1 = \frac{c_0 b_2 - c_2 b_0}{c_0} = \frac{(26.547)(18) - (14)(9.5)}{26.547} = 12.99$$

$$e_0 = \frac{d_0c_1 - d_1c_0}{d_0} = \frac{(32.021)(18.105) - (12.99)(26.547)}{32.021} = 7.336$$

$$e_1 = \frac{d_0c_2 - (0)c_0}{d_0} = \frac{(32.021)(14) - (0)(26.547)}{32.021} = 14$$

$$f_0 = \frac{e_0d_1 - e_1d_0}{e_0} = \frac{(7.336)(12.99) - (14)(32.021)}{7.336} = -48.119$$

$$g_0 = \frac{f_0e_1 - (0)e_0}{f_0} = \frac{(-48.119)(14) - (0)(7.336)}{-48.119} = 14$$

por lo tanto, el arreglo de Routh es en este caso:

$$\begin{array}{c|cccc}
s^6 & 1 & 30.6 & 20 & 14 \\
s^5 & 9.5 & 38.5 & 18 & \\
s^4 & 26.547 & 18.105 & 14 & \\
s^3 & 32.021 & 12.99 & & \\
s^2 & 7.336 & 14 & & \\
s^1 & -48.119 & & & \\
s^0 & 14 & & &
\end{array}$$

Para determinar el número de raíces de P(S) que tienen parte real positiva se aplica el criterio de estabilidad de Routh, analizando el signo de los elementos que forman la primera columna del arreglo:

RENGLON	ELEMENTO	SIGNO
s^6	a_0	+
s^5	b_0	+
s^4	c_0	+
s^3	d_0	+
s^2	e_0	+
s^1	f_0	-
s^0	g_0	+

Tabla VI.3

De la tabla anterior se tiene que no hay cambios de signo en los primeros cinco renglones, sin embargo, se observa que entre los elementos e_0 y f_0 hay un cambio de signo (de positivo a negativo) y entre los elementos f_0 y g_0 hay otro cambio de signo (de negativo a positivo), por lo que el sistema es inestable de acuerdo con el criterio de estabilidad de Routh, ya que el polinomio del denominador de la función de transferencia posee dos raíces con parte real positiva.

CASOS PARTICULARES EN LA APLICACION DEL ALGORITMO DE ROUTH

En la sección precedente se analizó el caso regular de la aplicación del algoritmo de Routh, en el que ninguno de los elementos que forman la primera columna del arreglo de Routh (a_0, b_0, c_0, d_0, e_0, f_0, ...) es igual a cero.

En esta sección se analizarán dos casos en los que no es posible formar el arreglo de Routh en la forma regular como se describió anteriormente, éstos son:

CASO 1

Unicamente el primer elemento de un renglón es igual a cero y el resto son distintos de cero.

CASO 2

Todos los elementos de un renglón son simultáneamente iguales a cero.

Ejemplo VI.8

Para el caso 1, considérese un sistema lineal e invariante con el tiempo, cuya función de transferencia está dada por:

$$H(S) = \frac{S^3 + 2}{S^6 + S^5 + 3S^4 + 3S^3 + 3S^2 + 2S + 1}$$

Determinar si el sistema es estable.

Solución:

Obtención del arreglo de Routh, siendo en este caso de la forma:

s^6	a_0	a_1	a_2	a_3
s^5	b_0	b_1	b_2	
s^4	c_0	c_1	c_2	
s^3	d_0	d_1		
s^2	e_0	e_1		
s^1	f_0			
s^0	g_0			

donde los elementos que forman los dos primeros renglones del arreglo son:

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = 3$$

$$a_3 = 1$$

$$b_0 = 1$$

$$b_1 = 3$$

$$b_2 = 2$$

los elementos que forman los renglones subsecuentes del arreglo, se obtienen por medio del algoritmo de Routh, esto es:

Elementos del tercer renglón:

$$c_0 = \frac{b_0 a_1 - b_1 a_0}{b_0} = \frac{(1)(3) - (3)(1)}{1} = 0$$

$$c_1 = \frac{b_0 a_2 - b_2 a_0}{b_0} = \frac{(1)(3) - (2)(1)}{1} = 1$$

$$c_2 = \frac{b_0 a_3 - (0) a_0}{b_0} = \frac{(1)(1) - (0)(1)}{1} = 1$$

Para obtener el siguiente renglón del arreglo de Routh es necesario dividir entre c_0, sin embargo, en este caso c_0 es igual a cero, por lo que no se puede obtener. Para resolver este problema se le asigna a c_0 un valor δ muy cercano a cero y se obtienen los renglones subsecuentes del arreglo, de esta manera el tercer renglón está dado por:

$$c_0 = \delta$$

$$c_1 = 1$$

$$c_2 = 1$$

y los siguientes renglones son:

$$d_0 = \frac{c_0 b_1 - c_1 b_0}{c_0} = \frac{(\delta)(3) - (1)(1)}{\delta} = \delta - \frac{1}{\delta}$$

$$d_1 = \frac{c_0 b_2 - c_2 b_0}{c_0} = \frac{(\delta)(2) - (1)(1)}{\delta} = 2 - \frac{1}{\delta}$$

$$e_0 = \frac{d_0 c_1 - d_1 c_0}{d_0} = \frac{\left(\delta - \frac{1}{\delta}\right)(1) - \left(2 - \frac{1}{\delta}\right)(\delta)}{\delta - \frac{1}{\delta}} = 1 - \frac{\delta(2\delta - 1)}{\delta^2 - 1}$$

$$e_1 = \frac{d_0 c_2 - (0) c_0}{d_0} = \frac{\left(\delta - \frac{1}{\delta}\right)(1) - (0)(\delta)}{\delta - \frac{1}{\delta}} = 1$$

$$f_0 = \frac{e_0 d_1 - e_1 d_0}{e_0} = \frac{\left(1 - \frac{\delta(2\delta - 1)}{\delta^2 - 1}\right)\left(2 - \frac{1}{\delta}\right) - (1)\left(\delta - \frac{1}{\delta}\right)}{1 - \frac{\delta(2\delta - 1)}{\delta^2 - 1}}$$

$$= 2 - \frac{1}{\delta} + \frac{(\delta^2 - 1)^2}{\delta(\delta^2 + \delta + 1)}$$

$$g_0 = \frac{f_0 e_1 - (0) e_0}{f_0} = e_1 = 1$$

por lo tanto, el arreglo de Routh está dado por:

$$
\begin{array}{c|cccc}
s^6 & 1 & 3 & 3 & 1 \\
s^5 & 1 & 3 & 2 & \\
s^4 & \delta & 1 & 1 & \\
s^3 & \delta - \frac{1}{\delta} & 2 - \frac{1}{\delta} & & \\
s^2 & 1 - \frac{\delta(2\delta - 1)}{\delta^2 - 1} & 1 & & \\
s^1 & 2 - \frac{1}{\delta} + \frac{(\delta^2 - 1)^2}{\delta(\delta^2 + \delta + 1)} & & & \\
s^0 & 1 & & &
\end{array}
$$

Una vez que el arreglo de Routh ha sido obtenido se analiza el signo de los elementos que forman la primera columna dando valores positivos y negativos a δ, esto es:

		SIGNO	
RENGLON	ELEMENTO	$\delta > 0$	$\delta < 0$
s^6	a_0	+	+
s^5	b_0	+	+
s^4	c_0	+	-
s^3	d_0	-	+
s^2	e_0	-	-
s^1	f_0	-	-
s^0	g_0	+	+

Tabla VI.4

De la tabla anterior se observa, que en ambos casos existen cambios de signo, es decir, si $\delta > 0$ hay dos cambios de signo y el sistema tiene dos raíces con parte real positiva; si $\delta < 0$ hay cuatro cambios de signo y el sistema tiene cuatro raíces con parte real positiva. De esta manera el sistema es inestable.

Ejemplo VI.9

Para el caso 2, considérese un sistema lineal e invariante con el tiempo, representado por la siguiente función de transferencia:

$$H(S) = \frac{S^2 + S + 1}{S^5 + S^4 + 4S^3 + 24S^2 + 3S + 63}$$

Determinar si el sistema es estable.

Solución:

El arreglo de Routh es en este caso:

$$\begin{array}{c|ccc}
S^5 & a_0 & a_1 & a_2 \\
S^4 & b_0 & b_1 & b_2 \\
S^3 & c_0 & c_1 & \\
S^2 & d_0 & d_1 & \\
S^1 & e_0 & & \\
S^0 & f_0 & &
\end{array}$$

donde los elementos de los dos primeros renglones del arreglo son:

$$a_0 = 1$$
$$a_1 = 4$$
$$a_2 = 3$$
$$b_0 = 1$$
$$b_1 = 24$$
$$b_2 = 63$$

los elementos que integran los renglones subsecuentes del arreglo, se obtienen aplicando el algoritmo de Routh, esto es:

Elementos del tercer renglón:

$$c_0 = \frac{b_0 a_1 - b_1 a_0}{b_0} = \frac{(1)(4) - (24)(1)}{1} = -20$$

$$c_1 = \frac{b_0 a_2 - b_2 a_0}{b_0} = \frac{(1)(3) - (63)(1)}{1} = -60$$

Elementos del cuarto renglón:

$$d_0 = \frac{c_0 b_1 - c_1 b_0}{c_0} = \frac{(-20)(24) - (-60)(1)}{-20} = +21$$

$$d_1 = \frac{c_0 b_2 - (0)(b_0)}{c_0} = \frac{(-20)(63) - (0)(1)}{-20} = 63$$

Los elementos de los renglones subsecuentes son:

$$e_0 = \frac{d_0 c_1 - d_1 c_0}{d_0} = \frac{(21)(-60) - (63)(-20)}{21} = 0$$

Para obtener los elementos del siguiente renglón del arreglo, es necesario hacer una división entre e_0. En este caso se tiene que e_0 es igual a cero, y no es posible obtener estos elementos. El quinto renglón del arreglo se considera que está formado por ceros, debido a que e_0 es el único elemento que forma este renglón.

Para resolver este problema y poder seguir formando el arreglo, se toman los elementos del renglón anterior, esto es:

$$s^2 \,\Big|\, 21 \quad 63$$

y se obtiene el siguiente polinomio:

$$g(S) = 21\,S^2 + 63$$

este último se deriva con respecto a S, esto es:

$$\frac{dg(S)}{dS} = 42S$$

el resultado de esta derivada se sitúa en el renglón donde todos los elementos son cero. Así, el arreglo original es:

$$\begin{array}{c|ccc} S^5 & 1 & 4 & 3 \\ S^4 & 1 & 24 & 63 \\ S^3 & -20 & -60 & \\ S^2 & 21 & 63 & \\ S^1 & 0 & & \\ S^0 & & & \end{array}$$

y el arreglo nuevo es:

$$\begin{array}{c|ccc} S^5 & 1 & 4 & 3 \\ S^4 & 1 & 24 & 63 \\ S^3 & -20 & -60 & \\ S^2 & 21 & 63 & \\ S^1 & 42 & & \\ S^0 & & & \end{array}$$

de esta manera se pueden obtener los elementos que forman el último renglón del arreglo:

$$f = \frac{e_0\ d_1}{e_0} = \frac{(42)(63)}{42} = 63$$

finalmente el arreglo de Routh es:

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^5 & 1 & 4 & 3 \\
s^4 & 1 & 24 & 63 \\
s^3 & -20 & -60 & \\
s^2 & 21 & 63 & \\
s^1 & 42 & & \\
s^0 & 63 & &
\end{array}
$$

al analizar los elementos que forman la primera columna del arreglo, se tiene:

RENGLON	ELEMENTO	SIGNO
s^5	a_0	+
s^4	b_0	+
s^3	c_0	-
s^2	d_0	+
s^1	e_0	+
s^0	f_0	+

Tabla VI.5

De la tabla anterior, se tiene que no hay cambios de signo en los primeros renglones. Sin embargo, se observa que entre los elementos b_0 y c_0 hay un cambio de signo y entre los elementos c_0 y d_0 hay otro cambio de signo, por lo que el sistema es inestable de acuerdo con el criterio de estabilidad de Routh ya que el polinomio del denominador de la función de transferencia posee dos raíces con parte real positiva.

VI.6 Controlabilidad y Observabilidad

A partir de la década de los sesentas ha habido un gran avance en la teoría de control y en el estudio de los sistemas dinámicos. Como consecuencia de este avance se establecieron algunos conceptos que facilitan en cierta medida el estudio de los sistemas dinámicos. Entre estos conceptos hay dos que se consideran fundamentales:

- Controlabilidad
- Observabilidad

Considérese un sistema dinámico lineal, el que puede ser representado en forma esquemática como:

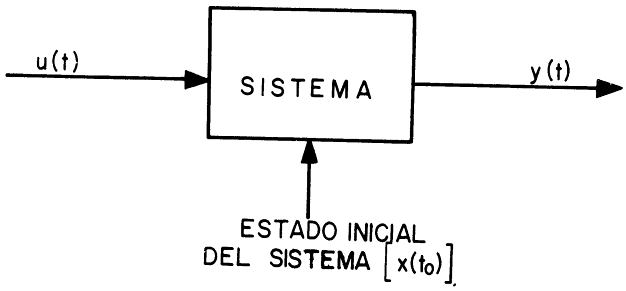


Figura VI.33

donde:

$u(t)$: es la entrada aplicada al sistema

$y(t)$: es la salida producida por el sistema y es función del estado del sistema y la entrada aplicada, es decir:

$$y(t) = f(x(t_0),\ x(t),\ u(t),\ t)$$

Los conceptos de controlabilidad y observabilidad se establecen al dar solución a las siguientes preguntas:

¿Es posible llevar a un sistema dinámico de su estado inicial $x(t_0)$ a un estado final $x(t_f)$ en un intervalo de tiempo, aplicando únicamente una entrada apropiada $u(t)$?

¿Es posible identificar o determinar el estado inicial del sistema $x(t_0)$ en un intervalo de tiempo finito, observando únicamente la salida producida por éste $y(t)$?

Estas preguntas fueron contestadas por R. E. Kalman en 1963, quien introdujo los conceptos de controlabilidad y observabilidad a la teoría de control moderna.

Considérese un sistema dinámico el cual se puede representar desde el punto de vista matemático por medio de las ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \underline{A}\,\underline{x}(t) + \underline{B}\,\underline{u}(t) \\ y(t) &= \underline{C}\,\underline{x}(t) + \underline{D}\,\underline{u}(t) \end{aligned}\right| \qquad \ldots (1)$$

donde:

$\dot{x}(t)$: es el vector de variables de estado del sistema y es de dimensión n

$u(t)$: es el vector de entradas aplicadas al sistema y es de dimensión r

$y(t)$: es el vector de salidas producidas por el sistema y es de dimensión m

$\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$: son matrices de coeficientes constantes y son de orden $n \times n$, $n \times r$, $m \times n$ y $m \times r$ respectivamente

Definición 1. Controlabilidad del estado.

El estado del sistema descrito mediante las ecuaciones (1) es completamente controlable, si para cualquier tiempo inicial t_0 es posible obtener un vector de entradas $\underline{u}(t)$ que sea capaz de llevar al sistema de un estado inicial $\underline{x}(t_0)$ a un estado deseado $\underline{x}(t_f)$ en un intervalo de tiempo finito $t_0 \leq t \leq t_f$.

Definición 2. Controlabilidad de la salida.

La salida del sistema descrito mediante las ecuaciones (1) es completamente controlable, si para un intervalo de tiempo finito $t_0 \leq t \leq t_f$ es posible mantener la salida del sistema $\underline{y}(t_f)$ en el tiempo t_f, partiendo de un estado inicial arbitrario $\underline{x}(t_0)$ en el tiempo t_0.

Definición 3. Observabilidad.

El sistema descrito mediante las ecuaciones (1) es completamente observable sobre el intervalo de tiempo $t_0 \leq t \leq t_f$, si para todo tiempo inicial t_0 se puede determinar el estado inicial del sistema $\underline{x}(t_0)$ a partir de la salida producida por el sistema $\underline{y}(t)$ en el intervalo de tiempo $t_0 \leq t \leq t_f$.

El sistema descrito por las ecuaciones (1) se puede representar esquemáticamente por medio de la siguiente figura:

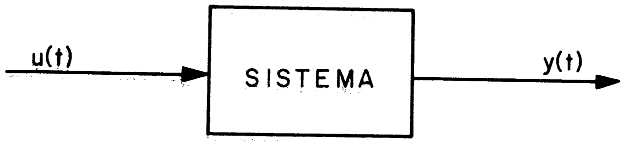


Figura VI.34

Con base en las definiciones anteriores, es posible descomponer este sistema en cuatro subsistemas.

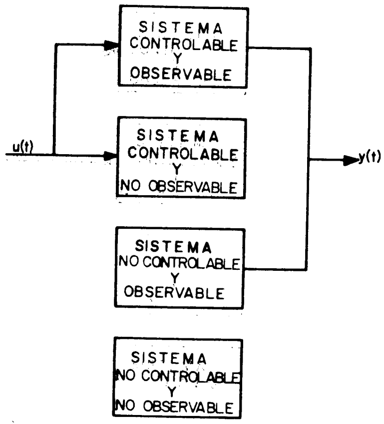


Figura VI.35

Una vez que se conocen los conceptos de controlabilidad y observabilidad, es necesario establecer criterios para determinar si un sistema posee estas propiedades.

CONTROLABILIDAD DEL ESTADO

TEOREMA 1.

Un sistema dinámico representado mediante la ecuación:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\,\underline{x}(t) + \underline{B}\,\underline{u}(t) \qquad \ldots (2)$$

es de estado completamente controlable, si y sólo si la matriz compuesta $\underline{P}$:

$$\underline{P} = \left[\underline{B} \quad \underline{AB} \quad \underline{A}^2\underline{B} \quad \underline{A}^3\underline{B} \quad \ldots \quad \underline{A}^{n-1}\underline{B}\right]$$

es de rango n.

PRUEBA:

La solución de la ecuación matricial (2)* está dada por:

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{A}t}\,\underline{x}(0) + \int_0^t e^{\underline{A}(t-\tau)}\,\underline{B}\,\underline{u}(\tau)\,d\tau \qquad \ldots (3)$$

en este caso se considera el tiempo inicial $t_0 = 0$.

Supóngase que el estado del sistema va a ser transferido de un estado inicial en el espacio de estados $\underline{x}(0)$ al origen de éste, es decir, $\underline{x}(t_f) = \underline{0}$, de esta manera sustituyendo $t = t_f$ en la ecuación (3), se obtiene:

$$\underline{x}(t_f) = \underline{0} = e^{\underline{A}t_f}\,\underline{x}(0) + \int_0^{t_f} e^{\underline{A}(t_f-\tau)}\,\underline{B}\,\underline{u}(\tau)\,d\tau \qquad \ldots (4)$$

*Véase el capítulo V.

o bien:

$$e^{\underline{A}t_f}\ \underline{x}(0) = -\int_0^{t_f} e^{\underline{A}(t_f-\tau)}\ \underline{B}\,\underline{u}(\tau)\,d\tau \qquad \ldots (5)$$

premultiplicando a la ecuación (5) por $e^{-\underline{A}t_f}$, se tiene:

$$\underline{x}(0) = -\int_0^{t_f} e^{-A\tau}\ \underline{B}\,u(\tau)\,d\tau \qquad \ldots (6)$$

por otra parte, mediante el teorema de Cayley - Hamilton (ver capítulo V), $e^{-\underline{A}\tau}$ se puede expresar como:

$$e^{-\underline{A}\tau} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(\tau)\underline{A}^i \qquad \ldots (7)$$

sustituyendo la ecuación (7) en la (6):

$$\underline{x}(0) = -\int_0^{t_f} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(\tau)\underline{A}^i\,\underline{B}\,u(\tau)\,d\tau \qquad \ldots (8)$$

o bien:

$$\underline{x}(0) = -\sum_{i=0}^{n-1} \underline{A}^i\,B \int_0^{t_f} \alpha_i(\tau)\ \underline{u}(\tau)\,d\tau \qquad \ldots (9)$$

haciendo la siguiente asignación:

$$\underline{v}_i(t) = -\int_0^{t_f} \alpha_i(\tau)\ \underline{u}(\tau)\,d\tau \qquad \ldots (10)$$

entonces la ecuación (9) puede escribirse de la siguiente forma:

$$\underline{x}(0) = \sum_{i=0}^{n-1} \underline{A}^i\,\underline{B}\,\underline{v}_i(t) \qquad \ldots (11)$$

desarrollando la sumatoria se obtiene:

$$\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} \underline{B} & \underline{AB} & \underline{A}^2\underline{B} & \underline{A}^3\underline{B} & \cdots & \underline{A}^{n-1}\,\underline{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_0(t) \\ \underline{v}_1(t) \\ \underline{v}_2(t) \\ \underline{v}_3(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{v}_{n-1}(t) \end{bmatrix} \quad \ldots (12)$$

La ecuación (12) representa un sistema de n ecuaciones con nr incógnitas, si se desea resolver el sistema para $\underline{v}_i(t)$ $(i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1)$ deberán existir n vectores linealmente independientes, es decir, el rango de la matriz:

$$\begin{bmatrix} \underline{B} & \underline{AB} & \underline{A}^2\underline{B} & \underline{A}^3\underline{B} & \cdots & \underline{A}^{n-1}\,\underline{B} \end{bmatrix} \quad \ldots (13)$$

deberá ser n.

CONTROLABILIDAD DE LA SALIDA

TEOREMA 2.

Un sistema dinámico representado mediante las ecuaciones:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\,\underline{x}(t) + \underline{B}\,\underline{u}(t) \quad \ldots (14)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C}\,x(t) \quad \ldots (15)$$

es de salida completamente controlable, si y sólo si la matriz compuesta $\underline{R}$:

$$\underline{R} = \left[\, \underline{C}\,\underline{B} \quad \underline{C}\,\underline{A}\,\underline{B} \quad \underline{C}\,\underline{A}^2\underline{B} \quad \underline{C}\,\underline{A}^3\underline{B} \;\ldots\; \underline{C}\,\underline{A}^{n-1}\underline{B} \,\right]$$

es de rango m.

PRUEBA:

La solución de la ecuación (14) está dada por:

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{A}t}\,\underline{x}(0) + \int_0^t e^{\underline{A}(t-\tau)}\,\underline{B}\,\underline{u}(\tau)\,d\tau \qquad \ldots (16)$$

por lo tanto, la salida del sistema se obtiene sustituyendo la ecuación (16) en la (15), esto es:

$$y(t) = \underline{C}\,e^{\underline{A}t}\,\underline{x}(0) + \int_0^t \underline{C}\,e^{\underline{A}(t-\tau)}\,\underline{B}\,\underline{u}(\tau)\,d\tau \qquad \ldots (17)$$

Supóngase que la salida del sistema en el tiempo inicial $t_0 = 0$ en el espacio de estados es $\underline{y}(0)$ y se desea mover o alcanzar en un tiempo t_f al origen de éste, es decir $\underline{y}(t_f) = \underline{0}$, de esta forma sustituyendo $t = t_f$ en la ecuación (17), se obtiene:

$$\underline{y}(t_f) = \underline{0} = \underline{C}\,e^{\underline{A}t_f}\,\underline{x}(0) + \int_0^{t_f} \underline{C}\,e^{\underline{A}(t_f-\tau)}\,\underline{B}\,\underline{u}(\tau)\,d\tau \qquad \ldots (18)$$

o bien:

$$\underline{C}\,e^{\underline{A}t_f}\,\underline{x}(0) = -\int_0^{t_f} \underline{C}\,e^{\underline{A}(t_f-\tau)}\,\underline{B}\,\underline{u}(\tau)\,d\tau \qquad \ldots (19)$$

por el teorema de Cayley - Hamilton (ver capítulo V) $e^{\underline{A}t}$ se puede expresar como:

$$e^{\underline{A}t} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t)\, \underline{A}^i \qquad \ldots (20)$$

por lo tanto:

$$e^{\underline{A}(t_f-\tau)} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t_f - \tau)\, \underline{A}^i \qquad \ldots (21)$$

sustituyendo la ecuación (21) en la (19):

$$\underline{C}\, e^{\underline{A}t_f}\, \underline{x}(0) = - \int_0^{t_f} \underline{C} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t_f - \tau)\, \underline{A}^i\, \underline{B}\, \underline{u}(\tau)\, d\tau \qquad \ldots (22)$$

o bien:

$$\underline{C}\, e^{\underline{A}t_f}\, \underline{x}(0) = - \sum_{i=0}^{n-1} \underline{C}\, \underline{A}^i \underline{B} \int_0^{t_f} \alpha_i(t_f \tau)\, \underline{u}(\tau)\, d\tau \qquad \ldots (23)$$

haciendo la siguiente asignación:

$$\underline{W}_i(t) = - \int_0^{t_f} \alpha_i(t_f - \tau)\, \underline{u}(\tau)\, d\tau \qquad \ldots (24)$$

la ecuación (22) se puede escribir como:

$$\underline{C}\, e^{\underline{A}t_f}\, \underline{x}(0) = \sum_{i=0}^{n-1} \underline{C}\, \underline{A}^i \underline{B}\, \underline{W}_i(t) \qquad \ldots (25)$$

desarrollando la sumatoria de la ecuación (25) se obtiene:

$$\underline{C}\, e^{\underline{A}t_f}\underline{x}(0) = \left[\underline{C}\,\underline{B} \quad \underline{C}\,\underline{A}\,\underline{B} \quad \underline{C}\,\underline{A}^2\underline{B} \quad \underline{C}\,\underline{A}^3\underline{B} \quad \cdots \quad \underline{C}\,\underline{A}^{n-1}\underline{B}\right] \begin{bmatrix} \underline{W}_0(t) \\ \underline{W}_1(t) \\ \underline{W}_2(t) \\ \underline{W}_3(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{W}_{n-1}(t) \end{bmatrix} \qquad \ldots (26)$$

Analizando el primer miembro de la ecuación, el producto $\underline{C}\, e^{\underline{A}t_f}\,\underline{x}(0)$ es un vector de dimensión m, sin embargo, el vector de incógnitas es de dimensión nr, si se desea resolver para $\underline{W}_i(t)$ $(i = 0, 1, 2, 3, \ldots, m-1)$ deberán existir m vectores linealmente independientes, es decir el rango de la matriz:

$$\left[\underline{C}\,\underline{B} \quad \underline{C}\,\underline{A}\,\underline{B} \quad \underline{C}\,\underline{A}^2\underline{B} \quad \underline{C}\,\underline{A}^3\underline{B} \quad \cdots \quad \underline{C}\,\underline{A}^{n-1}\underline{B}\right] \qquad \ldots (27)$$

deberá ser m.

OBSERVABILIDAD

TEOREMA 3.

Un sistema dinámico representado por medio de las siguientes ecuaciones:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\,\underline{x}(t) + \underline{B}\,\underline{u}(t) \qquad \ldots (28)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C}\,\underline{x}(t) \qquad \ldots (29)$$

es completamente observable, si y sólo si la matriz compuesta $\underline{S}$:

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C}\,\underline{A} \\ \underline{C}\,\underline{A}^2 \\ \underline{C}\,\underline{A}^3 \\ \vdots \\ \underline{C}\,\underline{A}^{n-1} \end{bmatrix}$$

es de rango n.

PRUEBA:

La solución de la ecuación (28) está dada por:

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{A}t}\,\underline{x}(0) + \int_0^t e^{\underline{A}(t-\tau)}\,\underline{B}\,\underline{u}(\tau)\,d\tau \qquad \ldots (30)$$

sustituyendo la ecuación (30) en la (29) se tiene que la salida producida por el sistema es:

$$\underline{y}(t) = \underline{C}\,e^{\underline{A}t}\,\underline{x}(0) + \int_0^t \underline{C}\,e^{\underline{A}(t-\tau)}\,\underline{B}\,\underline{u}(\tau)\,d\tau \qquad \ldots (31)$$

La propiedad de observabilidad conforme a la definición 3 se refiere básicamente a la relación entre el estado de sistema y la salida de éste, por lo tanto, las condiciones de observabilidad pueden encontrarse independientemente de la entrada aplicada al sistema, por simplicidad se considerará nula, esto es, $\underline{u}(t) = \underline{0}$. De esta manera la ecuación (31) puede ser escrita de la forma:

$$\underline{y}(t) = \underline{C}\,e^{\underline{A}t}\,\underline{x}(0) \qquad \ldots (32)$$

por el teorema de Cayley - Hamilton se tiene que la matriz de transición puede ser expresada como:

$$e^{\underline{A}t} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t)\ \underline{A}^i \qquad \ldots (33)$$

sustituyendo la ecuación (33) en la (32) se obtiene:

$$\underline{y}(t) = \underline{C} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t)\ \underline{A}^i\ \underline{x}(0) \qquad \ldots (34)$$

o bien:

$$\underline{y}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t)\ \underline{C}\,\underline{A}^i\ \underline{x}(0) \qquad \ldots (35)$$

expandiendo la sumatoria:

$$\underline{y}(t) = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \ldots \alpha_n] \left[[\underline{C}\ \ \underline{C}\,\underline{A}\ \ \underline{C}\,\underline{A}^2\ \ \underline{C}\,\underline{A}^3 \ldots \underline{C}\,\underline{A}^{n-1}]^T\ \underline{x}(0) \right]$$

$$\ldots (36)$$

En consecuencia si se conoce la salida $\underline{y}(t)$ y las matrices $\underline{A}$ y $\underline{C}$, el estado del sistema puede deducirse en forma única si la matriz:

$$[\underline{C} \quad \underline{C}\,\underline{A} \quad \underline{C}\,\underline{A}^2 \quad \underline{C}\,A^3 \quad \ldots \quad \underline{C}\,\underline{A}^{n-1}]^T$$

$$\ldots (37)$$

tiene n renglones linealmente independientes, es decir, rango n.

Ejemplo VI.10

Considérese un sistema dinámico lineal, invariante con el tiempo y de parámetros concentrados, el cual está caracterizado por las ecuaciones de estado:

$$\underline{\dot{x}}(t) = \underline{A}\,\underline{x}(t) + \underline{B}\,\underline{u}(t)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C}\,\underline{x}(t)$$

Determinar si el sistema es controlable y observable, considerando:

a)

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{bmatrix} ; \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} ; \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} ; \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} ; \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c)

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} ; \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

d)

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} ; \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución:

Para poder determinar si el sistema posee las características de *controlabilidad* y *observabilidad*, es necesario obtener las matrices $\underline{P}$ y $\underline{S}$ en cada uno de los incisos.

a) La matriz de controlabilidad está dada por:

$$\underline{P} = [\underline{A}^2\,\underline{B} \quad \underline{A}\,\underline{B} \quad \underline{B}]$$

donde:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

por lo tanto:

$$\underline{A}\,\underline{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^2\,\underline{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -12 & -2 \\ -18 & -12 \end{bmatrix}$$

la matriz de controlabilidad es:

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ -12 & -2 & 6 & 2 & 0 & 1 \\ -18 & -12 & -2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

todas las columnas de la matriz $\underline{P}$ son linealmente independientes, por lo que la matriz es de rango completo, es decir:

$$R(\underline{P}) = 3 = n$$

y el sistema es *absolutamente controlable*.

La matriz de observabilidad se genera mediante la siguiente expresión:

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C}\,\underline{A} \\ \underline{C}\,\underline{A}^2 \end{bmatrix}$$

donde:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de esta manera:

$$\underline{C}\,\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}\,\underline{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 8 & -9 \\ -6 & 12 & -6 \end{bmatrix}$$

así, la matriz de observabilidad es:

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 2 & -4 & -2 \\ -3 & 8 & -9 \\ -6 & 12 & -6 \end{bmatrix}$$

tomando los tres primeros renglones, se tiene que la matriz $\underline{S}$ es de rango completo, esto es:

$$R(\underline{S}) = 3 = n$$

por lo tanto, el sistema es *absolutamente observable*.

b) La matriz de controlabilidad es en este caso de la forma:

$$\underline{P} = [\underline{A}^2\underline{B} \quad \underline{A}\,\underline{B} \quad \underline{B}]$$

donde:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

haciendo los productos:

$$\underline{A}\,\underline{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^2\,\underline{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

y la matriz de controlabilidad es:

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

analizando el rango de la matriz $\underline{P}$ se obtiene:

$$R(\underline{P}) = 3 = n$$

por lo tanto, el sistema es *absolutamente controlable*.

La matriz de observabilidad se obtiene por medio de la expresión:

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C}\,\underline{A} \\ \underline{C}\,\underline{A}^2 \end{bmatrix}$$

donde:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

los productos son:

$$\underline{C}\,\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}\,\underline{A}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

la matriz de observabilidad es:

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

al analizar el rango de la matriz $\underline{S}$, se obtiene:

$$R(\underline{S}) = 2 \neq n$$

por lo tanto, el sistema es *no observable*.

c) La matriz de controlabilidad se obtiene a partir de:

$$\underline{P} = \left[\underline{A}^2\,\underline{B} \quad \underline{A}\,\underline{B} \quad \underline{B}\right]$$

donde:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

haciendo los productos:

$$\underline{A}\,\underline{B} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^2\,\underline{B} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 16 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

así, la matriz de controlabilidad es:

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de la matriz $\underline{P}$ se aprecia que hay todo un renglón de ceros, por lo que ésta no es de rango completo, esto es:

$$R(\underline{P}) = 2 \neq n$$

y el sistema *no es controlable.*

La matriz de observabilidad se obtiene con la expresión:

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C}\,\underline{A} \\ \underline{C}\,\underline{A}^2 \end{bmatrix}$$

donde:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

calculando los productos:

$$\underline{C}\,\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -2 \\ -3 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}\,\underline{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -2 \\ -3 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 16 & 4 \\ 9 & 16 & 4 \end{bmatrix}$$

y la matriz de observabilidad es:

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ -3 & -4 & -2 \\ 0 & 16 & 4 \\ 9 & 16 & 4 \end{bmatrix}$$

tomando las columnas 2, 3 y 4 de la matriz $\underline{S}$, se tiene que ésta es de rango completo, es decir:

$$R(\underline{S}) = 3 = n$$

por lo tanto el sistema *es absolutamente observable*.

d) La matriz de controlabilidad está dada por la siguiente expresión:

$$\underline{P} = \left[\underline{A}^2 \underline{B} \quad \underline{A}\,\underline{B} \quad \underline{B} \right]$$

donde:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

llevando a cabo los productos:

$$\underline{A}\,\underline{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^2 \underline{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 25 \end{bmatrix}$$

y la matriz de controlabilidad es:

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 25 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

puesto que en la matriz $\underline{P}$ existe un renglón de ceros, el rango de ésta no es completo, esto es:

$$R(\underline{P})\ 2 \neq n$$

por lo tanto, el sistema *es no controlable*.

La matriz de observabilidad está dada por:

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C}\,\underline{A} \\ \underline{C}\,\underline{A}^2 \end{bmatrix}$$

donde:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \qquad y \qquad \underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

haciendo los productos, se obtiene:

$$\underline{C}\,\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}\,\underline{A}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 25 \end{bmatrix}$$

y la matriz de observabilidad es en este caso:

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 25 \end{bmatrix}$$

debido a que existen dos columnas linealmente dependientes, el rango de la matriz es:

$$R(\underline{S}) = 2 \neq n$$

y el sistema es *no observable*.

APENDICE A. FUENTES DE VOLTAJE Y CORRIENTE

Un componente indispensable en todo sistema eléctrico, sin lugar a dudas es la fuente de alimentación. En este caso se pueden tener principalmente dos tipos, a saber:

a) Fuentes de voltaje

b) Fuentes de corriente

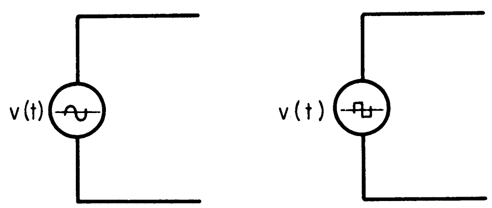
Este apéndice no pretende de ninguna manera ser un tratado acerca de las fuentes, sino por el contrario se presentarán únicamente los principales tipos de fuentes que existen así como la simbología empleada para representarlas.

FUENTES DE VOLTAJE

La primera categorización que se puede hacer en este tipo de fuentes es:

- Fuentes de voltaje de corriente alterna
- Fuentes de voltaje de corriente directa

Las fuentes de voltaje de corriente alterna se representan en forma simbólica como:



El voltaje producido por fuentes de este tipo puede tener formas de onda muy diversas, sin embargo, lo más frecuente es que la forma de onda sea del tipo senoidal, esto es:

$$v(t) = A \text{ sen } \omega t \qquad [V]$$

donde:

A: es la amplitud del voltaje expresado en [V]

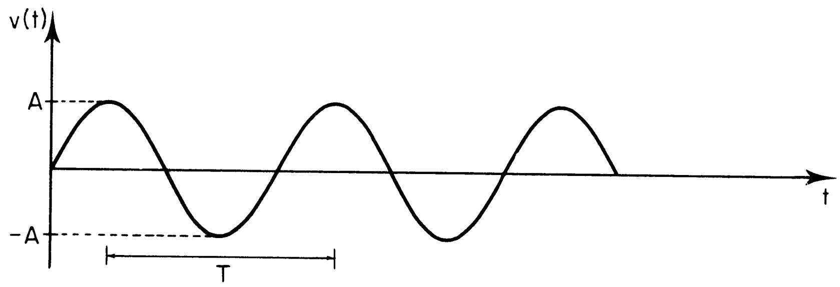
ω: es la velocidad angular del voltaje alterno, definida como:

$$\omega = 2\pi f$$

siendo f la frecuencia de la señal v(t).

t: es la variable tiempo

Es evidente que en el voltaje alterno v(t), su amplitud instantánea depende de la variable tiempo, la cual está definida en el intervalo $[0, \infty)$, en forma gráfica esto es:



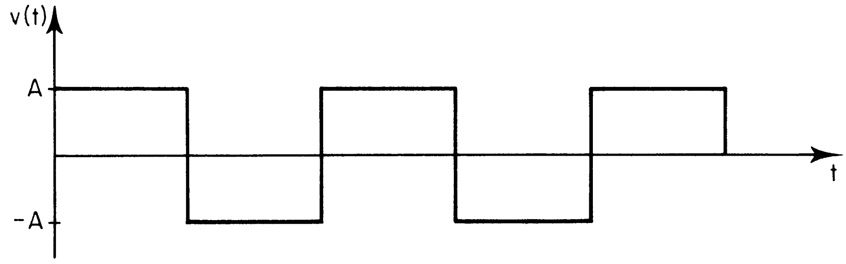
donde el recíproco del período T es la frecuencia de la señal de voltaje, esto es:

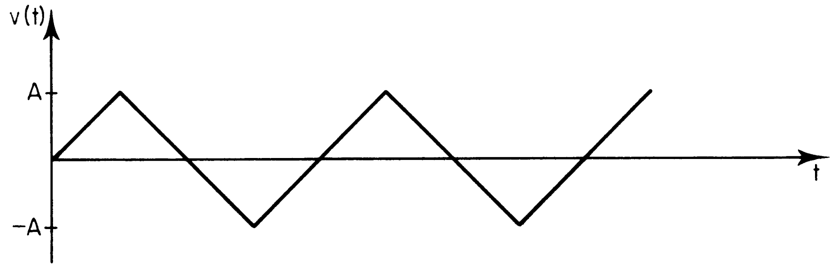
$$f = \frac{1}{T}$$

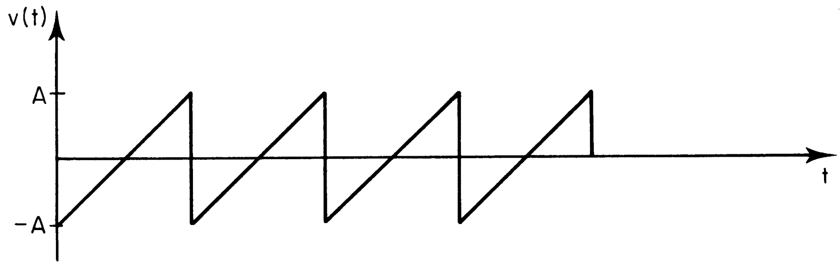
por lo tanto:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

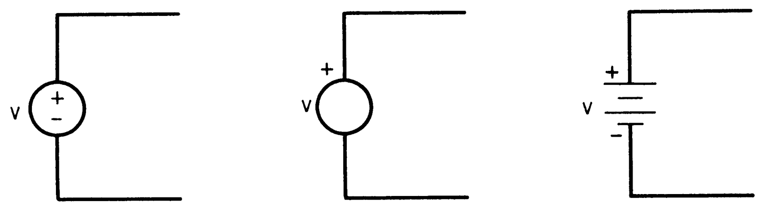
Como se mencionó las formas de onda del voltaje alterno v(t) pueden ser de alguno de los tipos siguientes, entre otros:



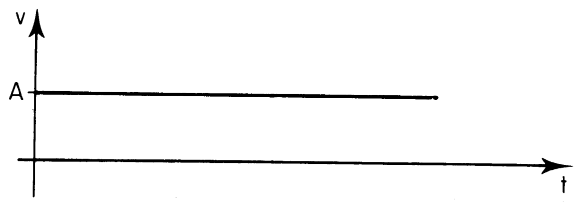




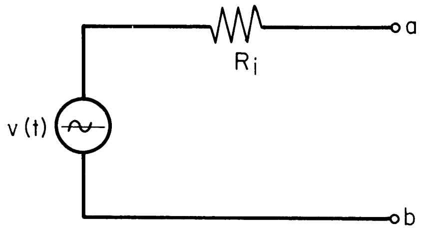
Por otra parte, las fuentes de voltaje de corriente directa se representan simbólicamente de la forma:



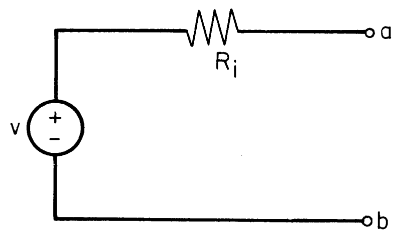
La forma de onda del voltaje producido por este tipo de fuentes es normalmente una línea recta de valor constante, es decir, el valor que adquiere la señal de voltaje es independiente del tiempo, esto es:



Las fuentes de voltaje descritas hasta el momento son lo que se conoce como *fuentes de voltaje ideales*, y se les denomina de esta manera debido a que si se conecta entre las terminales de la fuente una resistencia de valor cero, la corriente que fluye a través de esta resistencia es *infinita*, lo cual físicamente no es posible. Por lo anterior toda fuente de voltaje ya sea de corriente alterna o directa siempre tendrá una resistencia conectada en serie, que se denomina la resistencia interna de la fuente, esto es:



o bien:



en este caso se tiene una fuente de voltaje real, ya que si se conecta entre las terminales de la fuente a y b una resistencia de valor cero la corriente que fluye a través de ésta es:

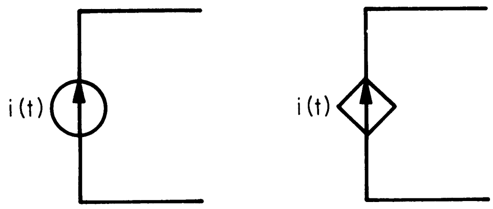
$$\boxed{i = \frac{v}{R_i}}$$

FUENTES DE CORRIENTE

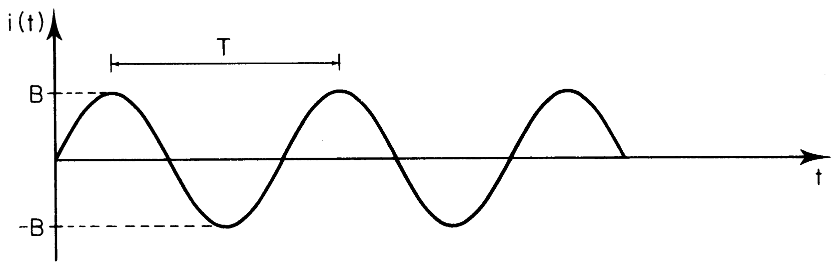
En forma similar que para las fuentes de voltaje, las de corriente también pueden ser:

- Fuentes de corriente de corriente alterna
- Fuentes de corriente de corriente directa

Las fuentes de corriente en el caso de corriente alterna se representan en forma simbólica como:



La forma de onda de la corriente producida por fuentes de este tipo puede ser muy diversa, teniendo en este caso:



$$i(t) = B \text{ sen } \omega t \quad [A]$$

donde:

B: es la amplitud de la corriente expresada en $[A]$

ω: es la velocidad angular de la corriente alterna, definida como:

$$\omega = 2\pi f$$

y

$$f = \frac{1}{T}$$

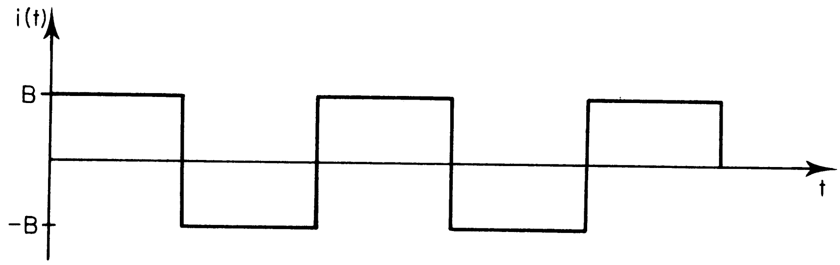
por lo tanto:

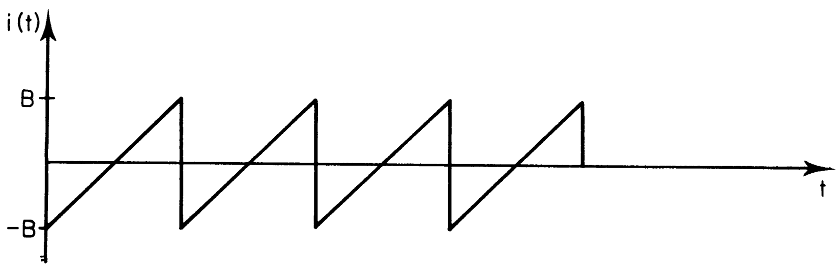
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

expresada en $[\text{rad/s}]$

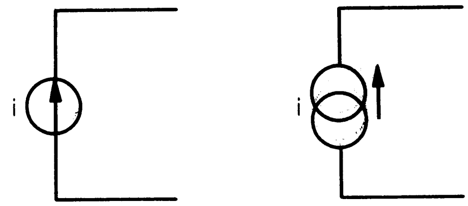
t: es la variable tiempo

en este caso también se pueden tener las siguientes formas de onda, entre otras.

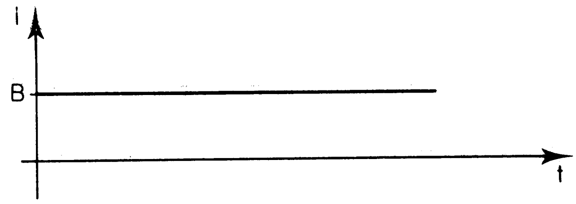




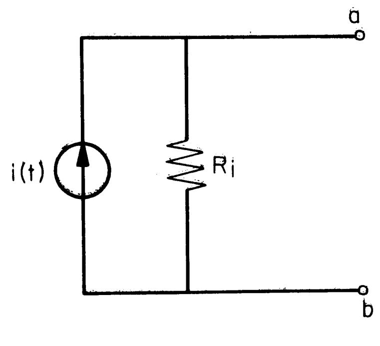
Las fuentes de corriente en el caso de corriente directa se pueden representar de la siguiente manera:



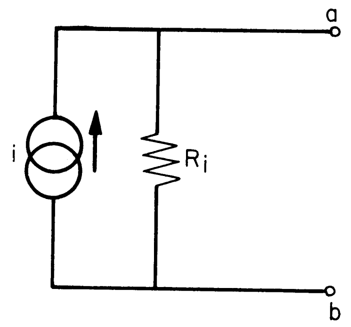
La corriente producida por este tipo de fuentes es constante e independiente de la variable tiempo, esto es:



Las fuentes de corriente descritas son fuentes de corriente ideales, debido a que si se conecta entre sus terminales una resistencia de un valor muy grande el voltaje a través de ésta será muy grande, lo cual es imposible desde el punto de vista práctico; para solucionar este problema se conecta una resistencia de valor finito en paralelo con la fuente, teniendo así una fuente de corriente real, esto es:



o bien:



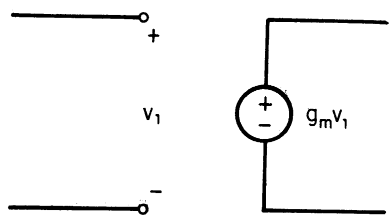
en este caso el voltaje entre las terminales a y b de la fuente en el mejor de los casos, es decir, cuando se conecta una resistencia de valor infinito entre las terminales a y b será:

$$\boxed{v = i\,R_i}$$

FUENTES CONTROLADAS

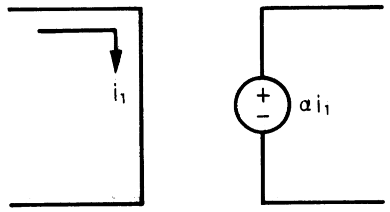
En sistemas eléctricos también se pueden presentar otras clases de fuentes ya sea de voltaje o corriente, éstas son las fuentes controladas* teniendo en este caso los siguientes tipos:

1. Fuente de voltaje controlada por voltaje (FVCV):

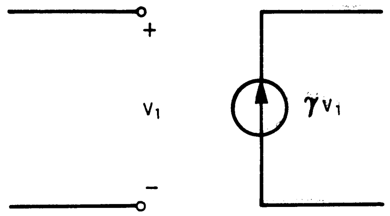


*Modelos puramente ideales, ya que no existen físicamente.

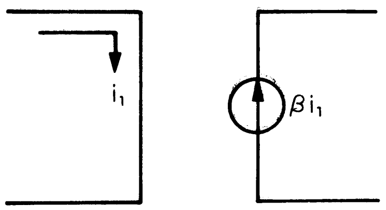
2. Fuente de voltaje controlada por corriente (FVCC)



3. Fuente de corriente controlada por voltaje (FCCV)



4. Fuente de corriente controlada por corriente (FCCC)



Este tipo de fuentes frecuentemente se usan para modelar y/o representar elementos eléctricos más complejos (diodos, transistores, amplificadores, rectificadores controlados de silicio, varactores, etc.).

Existen muchos procedimientos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias, estos procedimientos pueden ser analíticos, gráficos y numéricos en general. Dentro de las ecuaciones diferenciales ordinarias hay un tipo, que es de especial interés, éstas son las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes de orden n, cuya topología general es:

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}} + \dots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x =$$

$$= b_0 \frac{d^m f(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1}f(t)}{dt^{m-1}} + b_2 \frac{d^{m-2}f(t)}{dt^{m-2}} + \dots +$$

$$+ b_{m-1}\frac{df(t)}{dt} + b_m f(t) \qquad \dots (1)$$

Para resolver dichas ecuaciones se presentará en este apéndice únicamente el método de coeficientes indeterminados.

METODOS DE COEFICIENTES INDETERMINADOS

Considérese la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes descrita por la ecuación (1), la solución general de esta ecuación se puede expresar de la forma:

$$x(t)_{GEN} = x(t)_{HOM} + x(t)_{PAR} \qquad \dots (2)$$

donde:

$x(t)_{GEN}$: es la solución general de la ecuación (1)

$x(t)_{HOM}$: es la solución homogénea de la ecuación (1)

$x(t)_{PAR}$: es la solución particular de la ecuación (1)

Para obtener la solución homogénea se procede de la siguiente manera:

1. Obtener la ecuación diferencial homogénea, es decir, hacer $f(t)$ (excitación externa) igual a cero, esto es:

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}} + \ldots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = 0 \qquad \ldots (3)$$

2. Obtener a partir de la ecuación (3) el polinomio característico, esto es:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \qquad \ldots (4)$$

3. Calcular las raíces que satisfacen al polinomio característico, en este caso es posible obtener los siguientes tipos de raíces:

   a) Raíces reales diferentes

   b) Raíces reales múltiples

   c) Raíces complejas

   d) Raíces complejas múltiples

a) RAICES REALES DIFERENTES

Si las raíces que satisfacen al polinomio característico son reales diferentes, entonces la ecuación (4) se puede escribir como:

$$(\lambda + m_1)(\lambda + m_2)(\lambda + m_3) \ldots (\lambda + m_n) = 0 \qquad \ldots (5)$$

b) RAICES REALES MULTIPLES

Supóngase que solamente hay una raíz m de multiplicidad algebraica n que satisface al polinomio característico, entonces la ecuación (4) se puede escribir de la forma:

$$(\lambda + m)^n = 0 \qquad \ldots (6)$$

c) RAICES COMPLEJAS

Si las raíces que satisfacen al polinomio característico son complejas, entonces la ecuación (4) se puede expresar de la siguiente manera:

$$[(S + \alpha_1)^2 + \beta_1^2][(S + \alpha_2)^2 + \beta_2^2][(S + \alpha_3)^2 + \beta_3^2] \ldots$$

$$[(S + \alpha_{n/2})^2 + \beta_{n/2}^2] = 0 \qquad \ldots (7)$$

d) RAICES COMPLEJAS MULTIPLES

Supóngase que sólo existe un par de raíces complejas conjugadas $\alpha \pm j\beta$ de multiplicidad algebraica $n/2$ que satisfacen al polinomio característico (únicamente para el caso de que n sea par), entonces la ecuación (4) se puede escribir como:

$$\left[(S + \alpha)^2 + \beta^2\right]^{n/2} = 0 \qquad \ldots (8)$$

4. Una vez que se han calculado las raíces que satisfacen al polinomio característico, la solución homogénea se obtiene de la siguiente manera:

a) RAICES REALES DIFERENTES

$$x(t)_{HOM} = K_1e^{-m_1t} + K_2e^{-m_2t} + K_3e^{-m_3t} + \ldots + K_ne^{-m_nt} \qquad \ldots (9)$$

b) RAICES REALES MULTIPLES

$$x(t)_{HOM} = K_1e^{-mt} + K_2te^{-mt} + K_3t^2e^{-mt} + \ldots + K_nt^{n-1}e^{mt} \qquad \ldots (10)$$

c) RAICES COMPLEJAS

$$x(t)_{HOM} = K_1e^{(-\alpha_1+j\beta_1)t} + K_2e^{(-\alpha_1-j\beta_1)t} + K_3e^{(-\alpha_2+j\beta_2)t} +$$

$$+ K_4e^{(-\alpha_2-j\beta_2)t} + \ldots + K_{n-1}e^{(-\alpha_{n/2}+j\beta_{n/2})t} +$$

$$+ K_ne^{(-\alpha_{n/2}-j\beta_{n/2})t} \qquad \ldots (11)$$

o bien:

$$x(t)_{HOM} = e^{-\alpha_1 t}(K_1\cos\beta_1 t + K_2\operatorname{sen}\beta_1 t) + e^{-\alpha_2 t}(K_3\cos\beta_2 t + K_4\operatorname{sen}\beta_2 t) +$$

$$+ \ldots + e^{-\alpha_{n/2} t}(K_{n-1}\cos\beta_{n/2} t + K_n\operatorname{sen}\beta_{n/2} t)$$

$$\ldots (12)$$

d) RAICES COMPLEJAS MULTIPLES

$$x(t)_{HOM} = K_1e^{(-\alpha+j\beta)t} + K_2e^{(-\alpha-j\beta)t} + K_3te^{(-\alpha+j\beta)t} +$$

$$+ K_4te^{(-\alpha-j\beta)t} + \ldots + K_{n-1}t^{n/2}e^{(-\alpha+j\beta)t} +$$

$$+ K_nt^{n/2}e^{(-\alpha-j\beta)t} \qquad \ldots (13)$$

o bien:

$$x(t)_{HOM} = e^{-\alpha t}(K_1\cos\beta t + K_2\operatorname{sen}\beta t) + te^{-\alpha t}(K_3\cos\beta t + K_4\operatorname{sen}\beta t) +$$

$$+ \ldots + t^{n/2}e^{-\alpha t}(K_{n-1}\cos\beta t + K_n\operatorname{sen}\beta t)$$

$$\ldots (14)$$

Para obtener la solución particular se procede de la siguiente forma:

1. La solución particular de la ecuación diferencial (1) se debe proponer, es decir, la solución particular depende directamente de la forma que tenga la entrada o excitación externa $f(t)$.

   Considérese que la ecuación (1) no incluye derivadas de orden superior de $f(t)$, esto es:

$$\frac{d^nx}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + a_2\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}} + \ldots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_nx = b\,f(t)$$

$$\ldots (15)$$

en este caso la solución particular de la ecuación (15) se propone con base en la siguiente tabla:

$f(t)$	$x(t)_{PAR}$
K	K_{n+1}
Kt	$K_{n+1} + K_{n+2}t$
Kt^r	$K_{n+1} + K_{n+2}t + \ldots + K_{n+r+1}t^r$
$K\cos\gamma t$	$K_{n+1}\cos\gamma t + K_{n+2}\mathrm{sen}\,\gamma t$
$K\,\mathrm{sen}\,\gamma t$	$K_{n+1}\cos\gamma t + K_{n+2}\mathrm{sen}\,\gamma t$
$K_1\cos\gamma t + K_2\mathrm{sen}\,\eta t$	$K_{n+1}\cos\gamma t + K_{n+2}\mathrm{sen}\,\gamma t +$ $K_{n+3}\cos\eta t + K_{n+4}\mathrm{sen}\,\eta t$
$Ke^{-\gamma t}$	$K_{n+1}e^{-\gamma t}$
Alguna combinación de las anteriores	Combinación de las anteriores

Una vez que ha sido propuesta la solución particular es necesario evaluar las constantes de ésta. Las constantes se evalúan sustituyendo la solución particular en la ecuación diferencial original, de la ecuación que se obtiene, se genera un sistema de ecuaciones igualando los términos del primer miembro con los correspondientes del segundo miembro, al resolver este sistema de ecuaciones se obtienen los valores de las constantes de la solución particular.

En este momento es posible obtener la solución general de la ecuación diferencial, realizando la suma algebraica de las soluciones homogénea y particular, esto es:

$$x(t)_{GEN} = x(t)_{HOM} + x(t)_{PAR} \qquad \ldots (16)$$

Sin embargo, en la ecuación (16) (solución general) es necesario evaluar las n constantes de la solución homogénea, para lograrlo se requiere hacer uso de las condiciones iniciales a las que está sujeta la ecuación diferencial original.

El procedimiento para evaluar estas constantes es:

1. Derivar $n-1$ veces la solución general.

2. Evaluar las n ecuaciones que se obtuvieron en el paso anterior en $t = t_0$, donde t_0 es el tiempo inicial, esto es con el fin de generar un sistema de n ecuaciones con n incógnitas (K_i, para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$), esto es:

$$\left.\begin{aligned} x(t_0) &= x(t_0)_{GEN} \\ \dot{x}(t_0) &= \dot{x}(t_0)_{GEN} \\ \ddot{x}(t_0) &= \ddot{x}(t_0)_{GEN} \\ &\vdots \\ \overset{(n-1)}{x}(t) &= \overset{(n-1)}{x}(t_0)_{GEN} \end{aligned}\right| \quad \ldots (17)$$

Al resolver el sistema de ecuaciones anterior se obtienen los valores de K_i, para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, de esta forma al obtener las constantes de la solución homogénea, con base en el procedimiento descrito, simplemente se sustituyen en la ecuación (16) y así se tiene que la solución general es:

$$\boxed{x(t)_{GEN} = x(t)_{HOM} + x(t)_{PAR}}$$

La transformación integral de una función del tiempo se define como:

$$T \left\{ f(t) \right\} = \int_{-\infty}^{-\infty} K(S, t) f(t) dt = F(S) \qquad \ldots (1)$$

donde:

K(S, t): es el núcleo de la transformación

En la transformada de Laplace se tiene que el núcleo de la transformación está dado por:

$$K(S, t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-St}, & t \geq 0 \end{cases} \qquad \ldots (2)$$

por lo tanto, la transformada de Laplace de una función del tiempo es:

$$L \left\{ f(t) \right\} = \int_{0}^{+\infty} e^{-St} f(t) dt \qquad \ldots (3)$$

donde:

S: es una variable compleja y está definida en el intervalo $[0, \infty)$

La transformada de Laplace se define en forma general para funciones objeto (f(t)) continuas, sin embargo, la transformada de Laplace existe aun si la función objeto f(t) es discontinua, siempre que la integral (ecuación (3)) exista.

PROPIEDADES

1. Linealidad.

$$L\left\{K_1 f_1(t) + K_2 f_2(t)\right\} = K_1\, L\left\{f_1(t)\right\} + K_2\, L\left\{f_2(t)\right\}$$

2. Primera propiedad de translación.

$$L\left\{e^{mt}\, f(t)\right\} = F(S - m)$$

3. Segunda propiedad de translación.

Si:

$$r(t) = \begin{cases} f(t-m), & t > m \\ 0\ , & t < m \end{cases}$$

entonces:

$$L\left\{r(t)\right\} = e^{mS}\, L\left\{f(t)\right\} = e^{-mS}\, F(S)$$

4. Cambio de escala.

$$L\left\{f(mt)\right\} = \frac{1}{m}\ F - \left[\frac{S}{m}\right]$$

5. Transformada de Laplace de la derivada enésima de una función.

$$L\left\{f^n(t)\right\} = S^n L\left\{f(t)\right\} - S^{n-1}f(0) - S^{n-2}f'(0) - \ldots - Sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

o bien:

$$L\left\{f^n(t)\right\} = S^n\, L\left\{f(t)\right\} - \sum_{k=0}^{n-1} S^{n-1-k}\, f^k(0)$$

A continuación se presenta una tabla de las transformadas de Laplace de algunas funciones frecuentemente empleadas en el estudio de los sistemas dinámicos.

$f(t)$	$L\left\{f(t)\right\}$
$\delta(t)$	1
$u_{-1}(t)$	$\frac{1}{S}$
$u_{-2}(t)$	$\frac{1}{S^2}$
t^n	$\frac{n!}{S^{n+1}}$
e^{mt}	$\frac{1}{S-m}$
te^{mt}	$\frac{1}{(S-m)^2}$
$t^n e^{mt}$	$\frac{n!}{(S-m)^{n+1}}$
sen at	$\frac{a}{S^2+a^2}$
cos at	$\frac{S}{S^2+a^2}$
e^{at} sen bt	$\frac{b}{(S-a)^2+b^2}$
e^{at} cos bt	$\frac{S-a}{(S-a)^2+b^2}$

TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

Si:

$$F(S) = L\left\{f(t)\right\}$$

se dice que $f(t)$ es la transformada inversa de Laplace de $F(S)$ y se suele representar como:

$$f(t) = L^{-1}\left\{F(S)\right\}$$

PROPIEDADES

1. Linealidad.

$$L^{-1}\left\{aF_1(S) + bF_2(S)\right\} = aL^{-1}\left\{F_1(S)\right\} + bL^{-1}\left\{F_2(S)\right\}$$

2. Translación.

a)

$$L^{-1}\left\{F(S - m)\right\} = e^{mt}\, L^{-1}\left\{F(S)\right\}$$

b)

$$L^{-1}\left\{F(S)\right\} = e^{-mt}\, L^{-1}\left\{F(S - m)\right\}$$

3. Cambio de escala.

$$L^{-1}\left\{F(ms)\right\} = \frac{1}{m}\, f\left(\frac{t}{m}\right)$$

$$L^{-}\left\{F\left(\frac{S}{m}\right)\right\} = m\, f(mt)$$

La transformada de Laplace puede ser empleada para resol ver ecuaciones diferenciales, el procedimiento es:

1. Aplicar la transformada de Laplace a la ecuación diferencial considerada:

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}} + \dots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = b\, f(t) \qquad \dots (1)$$

aplicando la transformada de Laplace a la ecuación (1):

$$L\left\{\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}} + \dots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x\right\} = L\left\{b\, f(t)\right\} \qquad \dots (2)$$

o bien:

$$L\left\{\frac{d^n x}{dt^n}\right\} = S^n X(X) - \sum_{k=0}^{n-1} S^{n-1-k}\, X^k(0)$$

$$L\left\{a_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right\} = a_1 S^{n-1} X(S) - a_1 \sum_{k=0}^{n-2} S^{n-2-k}\, X^k(0)$$

$$L\left\{a_2 \frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}}\right\} = a_2 S^{n-2} X(S) - a_2 \sum_{k=0}^{n-3} S^{n-3-k}\, X^k(0) \qquad \ldots (3)$$

$$\vdots$$

$$L\left\{a_{n-1} \frac{dx}{dt}\right\} = a_{n-1} S X(S) - a_{n-1} X(0)$$

$$L\left\{a_n x\right\} = a_n X(S)$$

$$L\left\{b\, f(t)\right\} = b\, F(S)$$

Sustituyendo las expresiones (3) en la ecuación (2), se obtiene una ecuación de la forma:

$$X(S)(S^n + a_1 S^{n-1} + a_2 S^{n-2} + \ldots + a_{n-1} S + a_n) =$$

$$= b\, F(S) + R(S) = Q(S) \qquad \ldots (4)$$

2. A partir de la ecuación (4) se puede despejar la función X(S), esto es:

$$X(S) = \frac{Q(S)}{S^n + a_1 S^{n-1} + a_2 S^{n-2} + \ldots + a_{n-1} S + a_n} \qquad \ldots (5)$$

3. Para obtener la solución general de la ecuación diferencial, es necesario obtener la transformada de inversa de Laplace de la función X(S):

$$x(t) = L^{-1}\left\{X(S)\right\} = L^{-1}\left\{\frac{Q(S)}{S^n + a_1 S^{n-1} + a_2 S^{n-2} + \ldots + a_{n-1} S + a_n}\right\} \qquad \ldots (6)$$

$X(S)$ es una función racional y se puede expresar como:

$$X(S) = \frac{Q(S)}{P(S)} \qquad \ldots (7)$$

en donde el numerador y el denominador son polinomios en S y el orden de $P(S)$ es mayor que el orden de $Q(S)$. Debido a que $X(S)$ es una fracción propia, ésta se puede descomponer como la suma algebraica de sus fracciones parciales. Por otra parte, la expansión en fracciones parciales de la función $X(S)$ depende de la naturaleza de las raíces que satisfacen a la siguiente ecuación:

$$P(S) = 0 \qquad \ldots (8)$$

De esta manera se tiene que $X(S)$ se puede expresar como:

$$X(S) = \frac{Q(S)}{(S + P_1)(S + P_2) \ldots (S + P_{n-1})(S + P_n)} \qquad \ldots (9)$$

o bien:

$$X(S) = \frac{Q(S)}{\prod_{i=1}^{n} (S + P_i)} \qquad \ldots (10)$$

Así, una fracción propia puede ser expresada como la suma de fracciones parciales del siguiente tipo:

a) Raíces reales diferentes.

Si $P(S)$ es un polinomio de grado n y posee n raíces reales distintas, éste puede ser escrito de la forma:

$$P(S) = (S + P_1)(S + P_2)(S + P_3) \ldots (S + P_{n-1})(S + P_n) \qquad \ldots (11)$$

por lo tanto, X(S) está dada por:

$$X(S) = \frac{Q(S)}{(S + P_1)(S + P_2)(S + P_3)\ \dots\ (S + P_{n-1})(S + P_n)} \qquad \dots (12)$$

la expansión en fracciones parciales de la ecuación (12) es:

$$X(S) = \frac{A_1}{S + P_1} + \frac{A_2}{S + P_2} + \frac{A_3}{S + P_3} + \dots + \frac{A_{n-1}}{S + P_{n-1}} + \frac{A_n}{S + P_n}$$

donde:

$A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n$: son constantes y se calculan como:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= X(S)(S + P_1)\Big|_{S=-P_1} \\ A_2 &= X(S)(S + P_2)\Big|_{S=-P_2} \\ &\vdots \\ A_{n-1} &= X(S)(S + P_{n-1})\Big|_{S=-P_{n-1}} \\ A_n &= X(S)(S + P_n)\Big|_{S=-P_n} \end{aligned}\right| \qquad \dots (13)$$

a partir de estas últimas expresiones, se deduce:

$$\boxed{A_i = X(S)(S + P_i)\Big|_{S=-P_i}}$$

b) Raíces reales múltiples

Si $P(S)$ es un polinomio de grado n y posee n raíces reales iguales, entonces éste puede ser escrito de la forma:

$$P(S) = (S + P)^n \qquad \ldots (14)$$

por lo tanto, $X(S)$ está dada por:

$$X(S) = \frac{Q(S)}{(S + P)^n} \qquad \ldots (15)$$

la expansión en fracciones parciales de la ecuación (15) es:

$$X(S) = \frac{A_1}{(S + P)^n} + \frac{A_2}{(S + P)^{n-1}} + \frac{A_3}{(S + P)^{n-2}} + \ldots + \frac{A_n}{S + P} \qquad \ldots (16)$$

donde:

$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}, A_n$: son constantes y se calculan como:

$$\left.\begin{aligned}
A_1 &= X(S)(S + P)^n \Big|_{S=-P} \\
A_2 &= \frac{d}{dS} X(S)(S + P)^n \Big|_{S=-P} \\
A_3 &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{dS^2} X(S)(S + P)^n \Big|_{S=-P} \\
A_4 &= \frac{1}{6} \frac{d^3}{dS^3} X(S)(S + P)^n \Big|_{S=-P} \\
&\vdots \\
A_n &= \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dS^{n-1}} X(S)(S + P)^n \Big|_{S=-P}
\end{aligned}\right\} \qquad \ldots (17)$$

A partir de las expresiones anteriores se puede deducir:

$$\boxed{A_i = \frac{1}{(i-1)!}\frac{d^{i-1}}{dS^{i-1}} X(S)(S+P)^n \Big|_{S=-P} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n}$$

c) Raíces complejas

Si $P(S)$ es un polinomio de grado n * y posee $\frac{n}{2}$ factores cuadráticos distintos irreducibles en el campo de los números reales, éste puede ser escrito de la forma:

$$P(S) = (S^2 + a_1 S + b_1)(S^2 + a_2 S + b_2) \ldots (S^n + a_{n/2} S + b_{n/2}) \qquad \ldots (18)$$

donde, cada factor cuadrático $S^2 + a_i S + b_i$ se puede expresar como $(S + \alpha_i)^2 + \beta_i^2$, así $P(S)$ se escribe de la siguiente manera:

$$P(S) = \left[(S+\alpha_1)^2 + \beta_1^2\right]\left[(S+\alpha_2)^2 + \beta_2^2\right] \ldots \left[(S+\alpha_{n/2})^2 + \beta_{n/2}\right] \qquad \ldots (19)$$

por lo tanto, $X(S)$ está dada por:

$$X(S) = \frac{Q(S)}{\left[(S+\alpha_1)^2 + \beta_1^2\right]\left[(S+\alpha_2)^2 + \beta_2^2\right] \ldots \left[(S+\alpha_{n/2}) + \beta_{n/2}^2\right]} \qquad \ldots (20)$$

la expansión en fracciones parciales de la ecuación (20), es:

$$X(S) = \frac{A_1 S + B_1}{(S+\alpha_1)^2 + \beta_1^2} + \frac{A_2 S + B_2}{(S+\alpha_2)^2 + \beta_2^2} + \ldots + \frac{A_{n/2} S + B_{n/2}}{(S+\alpha_{n/2})^2 + \beta_{n/2}^2} \qquad \ldots (21)$$

* para n par

donde:

$A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_{n/2}, B_{n/2}$: son constantes y se calculan como:

$$\left.\begin{aligned}
A_1S + B_1 \Big|_{S = -\alpha_1 + j\beta_1} &= X(S)\left[(S+\alpha_1)^2 + \beta_1^2)\right]\Big|_{S = -\alpha_1 + j\beta_1} \\
A_2S + B_2 \Big|_{S = -\alpha_2 + j\beta_2} &= X(S)\left[(S+\alpha_2)^2 + \beta^2)\right]\Big|_{S = -\alpha_1 + j\beta_1} \\
&\vdots \\
A_{n/2}S + B_{n/2} \Big|_{S = -\alpha_{n/2} + j\beta_{n/2}} &= X(S)\left[(S+\alpha_{n/2})^2 + \beta_{n/2}^2)\right]\Big|_{S = -\alpha_{n/2} + j\beta_{n/2}}
\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

a partir de estas últimas expresiones se deduce:

$$\boxed{\begin{gathered} A_iS + B_i \Big|_{S = -\alpha_i + j\beta_i} = X(S)\left[(S+\alpha_i)^2 + \beta_i^2)\right]\Big|_{S = -\alpha_i + j\beta_i} \\ i = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2} \end{gathered}}$$

d) Raíces complejas múltiples

Si $P(S)$ es un polinomio de grado n* y posee $\frac{n}{2}$ factores iguales irreducibles en el campo de los números reales, éste puede ser escrito de la forma:

$$P(S) = (S^2 + aS + b)^{n/2} \qquad \ldots (23)$$

* n par

o bien:

$$P(S) = \left[(S + \alpha)^2 + \beta^2\right]^{n/2} \qquad \ldots (24)$$

por lo tanto X(S) está dada por:

$$X(S) = \frac{Q(S)}{\left[(S + \alpha)^2 + \beta^2\right]^{n/2}} \qquad \ldots (25)$$

la expansión en fracciones parciales de la ecuación (25) es:

$$X(S) = \frac{A_1 S + B_1}{\left[(S + \alpha)^2 + \beta^2\right]^{n/2}} + \frac{A_2 S + B_2}{\left[(S + \alpha)^2 + \beta^2\right]^{n/2-1}} + \ldots + \frac{A_{n/2} S + B_{n/2}}{(S + \alpha)^2 + \beta^2}$$

$$\ldots (26)$$

donde:

$A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_{n/2}, B_{n/2}$: son constantes y se calculan como:

$$\left. A_1 S + B_1 \right|_{S = -\alpha + j\beta} = (S) \left[(S + \alpha)^2 + \beta^2\right]^{n/2} \Bigg|_{S = -\alpha + j\beta}$$

$$\left. A_2 S + B_2 \right|_{S = -\alpha + j\beta} = \frac{d}{dS} X(S) \left[(S + \alpha)^2 + \beta^2\right]^{n/2} \Bigg|_{S = -\alpha + j\beta}$$

$$\left. A_3 S + B_3 \right|_{S = -\alpha + j\beta} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dS^2} X(S) \left[(S + \alpha)^2 + \beta^2\right]^{n/2} \Bigg|_{S = -\alpha + j\beta} \qquad (27)$$

$$\vdots$$

$$\left. A_{n/2} S + B_{n/2} \right|_{S = -\alpha + j\beta} = \frac{1}{\left(\frac{n}{2} - 1\right)!} \frac{d^{n/2 - 1}}{dS^{n/2 - 1}} X(S) \left[(S + \alpha)^2 + \beta^2\right]^{n/2} \Bigg|_{S = -\alpha + j\beta}$$

a partir de estas últimas expresiones se deduce:

$$\boxed{\left. A_iS + B_i \right|_{S=-\alpha+j\beta} = \frac{1}{(i-1)!} \frac{d^{i-1}}{dS^{i-1}} X(S) \left[(S+\alpha)^2 + \beta^2 \right]^{\frac{n}{2}} \Big|_{S=-\alpha+j\beta} \qquad i = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}}$$

Un conjunto de nm elementos arreglados en n renglones y m columnas, es lo que se denomina una matriz rectangular de orden $n \times m$ y se representa de la siguiente forma:

$$\underline{A} = [a_{ij}] \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, 3, \ldots, n \\ j = 1, 2, 3, \ldots, m \end{array}$$

donde a_{ij} representa el elemento ubicado en el i-ésimo renglón y la j-ésima columna dentro del arrelo, también se puede representar como:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

IGUALDAD DE MATRICES

Dos matrices cualesquiera $\underline{A}$ y $\underline{B}$ son iguales si y sólo si se cumple que:

Todos los elementos correspondientes a las matrices $\underline{A}$ y $\underline{B}$ son iguales, esto es:

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \forall \quad i, j$$

SUMA DE MATRICES

Dos matrices cualesquiera $\underline{A}$ y $\underline{B}$ se pueden sumar dando como resultado una matriz $\underline{C}$ si y sólo si las matrices $\underline{A}$ y $\underline{B}$

tienen el mismo número de renglones y columnas, es decir, son del mismo orden, esto es:

$$\underline{C} = \underline{A} + \underline{B}$$

$$[c_{ij}] = [a_{ij}] + [b_{ij}] \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, 3, \ldots, n \\ j = 1, 2, 3, \ldots, m \end{array}$$

Se puede definir una matriz $-\underline{A}$ como la matriz cuyos elementos son $-a_{ij}$, por tanto se puede realizar la siguiente adición:

$$\underline{A} + (-\underline{A}) = [a_{ij}] + [-a_{ij}] = \underline{0}$$

donde $\underline{0}$ es la matriz nula.

Habiendo definido $-\underline{A}$ es posible ahora definir la resta de matrices como:

$$\underline{A} - \underline{B} = \underline{A} + (-\underline{B}) = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} - b_{ij}]$$

$$\begin{array}{l} i = 1, 2, 3, \ldots, n \\ j = 1, 2, 3, \ldots, m \end{array}$$

TEOREMA

La suma de matrices es asociativa y conmutativa.

a) Ley asociativa:

$$(\underline{A} + \underline{B}) + \underline{C} = \underline{A} + (\underline{B} + \underline{C})$$

b) Ley conmutativa:

$$\underline{A} + \underline{B} = \underline{B} + \underline{A}$$

MULTIPLICACION POR UN ESCALAR

Sea $\underline{A}$ una matriz cualquiera formada por los elementos a_{ij} ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$ y $j = 1, 2, 3, \ldots, m$) y k un escalar, entonces:

$$k\underline{A} = [ka_{ij}] \quad \forall\ i, j$$

Dos matrices $\underline{A}$ y $\underline{B}$ se pueden multiplicar en el orden $\underline{AB}$ si y sólo si el número de columnas de la matriz $\underline{A}$ es igual al número de renglones de la matriz $\underline{B}$, se dice entonces que las matrices $\underline{A}$ y $\underline{B}$ son conformables para el producto $\underline{A}\,\underline{B}$, esto es:

$$\underline{C} = \underline{A}\,\underline{B}$$

donde:

$$C_{ij} = \sum_{j=i}^{m} a_{ij} b_{ij} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

TEOREMA

Los siguientes postulados se mantienen para la multiplicación de matrices:

a) El producto de matrices no cumple con la ley de conmutatividad, es decir, el producto no es conmutativo en general, esto es:

$$\underline{A}\,\underline{B} \neq \underline{B}\,\underline{A}$$

b) El producto de matrices cumple con la ley de asociatividad, esto es:

$$\underline{A}(\underline{B}\,\underline{C}) = (\underline{A}\,\underline{B})\,\underline{C}$$

c) El producto de matrices cumple con la ley de distributividad, esto es:

$$\underline{A}(\underline{B} + \underline{C}) = \underline{A}\,\underline{B} + \underline{A}\,\underline{C}$$

$$(\underline{A} + \underline{B})\underline{C} = \underline{A}\,\underline{C} + \underline{B}\,\underline{C}$$

d) La ley de cancelación no se cumple en general, es decir, si:

$$\underline{A}\,\underline{B} = \underline{0}$$

esto no implica necesariamente que $\underline{A} = \underline{0}$ ó $\underline{B} = \underline{0}$
por lo tanto si:

$$\underline{A}\,\underline{B} = \underline{A}\,\underline{C}$$

no necesariamente implica que $\underline{B} = \underline{C}$

TRANSPUESTA DE UNA MATRIZ

La transpuesta de una matriz $\underline{A}$ de orden $n \times m$ es una matriz $\underline{A}$ de orden $m \times n$ y se simboliza mediante el superíndice T, esto es:

$$\text{Transpuesta } \underline{A} = \underline{A}^T$$

y se obtiene cambiando las columnas por los renglones.

PROPIEDADES DE LA MATRIZ TRANSPUESTA

a) La transpuesta de la suma de dos matrices $\underline{A}$ y $\underline{B}$ es la suma de las matrices $\underline{A}^T$ y $\underline{B}^T$, esto es:

$$(\underline{A} + \underline{B})^T = \underline{A}^T + \underline{B}^T$$

b) La transpuesta de una matriz transpuesta es la misma matriz, esto es:

$$(\underline{A}^T)^T = \underline{A}$$

c) La transpuesta del producto de dos matrices $\underline{A}$ y $\underline{B}$ es el producto de las matrices $\underline{A}^T$ y $\underline{B}^T$ en orden contrario, es decir:

$$(\underline{A}\,\underline{B})^T = \underline{B}^T\ \underline{A}^T$$

MATRIZ CUADRADA

Es aquélla que tiene igual número de columnas y renglones. Si hay n columnas y renglones en la matriz su orden será n x m o simplemente orden n y se representa como:

$$\underline{A} = [a_{ij}] \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, 3, \ldots, n \\ j = 1, 2, 3, \ldots, m \end{matrix}$$

o bien:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

MATRIZ SIMETRICA

Es aquella matriz cuadrada en que se cumple:

$$\underline{A}^T = \underline{A}$$

El producto de dos matrices simétricas en general no da como resultado una matriz simétrica, esto es:

$$\text{Si} \quad \underline{A} = \underline{A}^T \quad \text{y} \quad \underline{B} = \underline{B}^T$$

entonces:

$$(\underline{A}\,\underline{B})^T = \underline{B}^T \underline{A}^T = \underline{B}\,\underline{A} \neq \underline{A}\,\underline{B} \quad \text{(en general)}$$

Por otra parte si $\underline{A}$ es una matriz simétrica de orden n y $\underline{B}$ es una matriz cualquiera de orden n x m, entonces el producto:

$$\underline{B}^T \underline{A}\,\underline{B}$$

da como resultado una matriz simétrica de orden m, esto es:

$$(\underline{B}^T \, \underline{A} \, \underline{B})^T = \underline{B}^T \, \underline{A}^T \, (\underline{B}^T)^T = \underline{B}^T \, \underline{A} \, \underline{B}$$

MATRIZ ANTISIMETRICA

Es aquella matriz cuadrada en la que se cumple:

$$\underline{A}^T = -\underline{A}$$

esto es:

$$a_{ji} = -a_{ij}$$

MATRIZ REAL

Una matriz real es aquélla en la que todos sus elementos son reales, es decir:

$$a_{ij} \in \mathbb{R} \qquad \forall \quad i, j$$

MATRIZ COMPLEJA

En este caso es aquella matriz en la que sus elementos pueden ser complejos, esto es, algunos de ellos pueden ser reales y otros complejos.

MATRIZ CONJUGADA

Es una matriz compleja en la que sus elementos a_{ij} han sido reemplazados por su complejo conjugado y se denota por el símbolo:

$$\underline{\tilde{A}} \text{ es la matriz conjugada de } \underline{A}$$

donde $\underline{A}$ es una matriz compleja.

Cuando se trabaja con matrices complejas es útil emplear la matriz asociada o transpuesta hermitiana:

$$\underline{A}^H = \tilde{\underline{A}}^T$$

MATRIZ DIAGONAL

Una matriz diagonal es aquella matriz cuadrada en la que todos los elementos que están fuera de la diagonal principal son cero, esto es, $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

MATRIZ IDENTIDAD

La matriz unidad o matriz identidad $\underline{I}$ es una matriz diagonal en la que los elementos de su diagonal principal son unos:

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\underline{I}_m$ es una matriz identidad de orden $m \times m$

La propiedad más importante que posee es:

$$\underline{I}\,\underline{A} = \underline{A}$$

$$\underline{A}\,\underline{I} = A$$

para cualquier matriz $\underline{A}$ donde pueda llevar a cabo el producto.

Si la matriz $\underline{A}$ es de orden $n \times m$ entonces:

$$\underline{I}_n\,\underline{A} = \underline{A}\,\underline{I}_m = \underline{A}$$

Sin embargo, la igualdad anterior se expresa como:

$$\underline{I}\,\underline{A} = \underline{A}\,\underline{I} = A$$

donde el orden de ambas matrices identidad es el adecuado.

MATRIZ INVERSA

Sea una matriz $\underline{G}$ tal que:

$$\underline{G}\,\underline{A} = \underline{I}$$

si ésta existe, entonces $\underline{G}$ se conoce como la inversa por la izquierda de la matriz $\underline{A}$.

Sea una matriz $\underline{H}$ tal que:

$$\underline{A}\,\underline{H} = \underline{I}$$

si ésta existe, $\underline{H}$ es la inversa por la derecha de la matriz $\underline{A}$.

Si se desea encontrar la inversa por la derecha de una matriz $\underline{A}$ de orden $n \times m$ $\underline{H}$ debe ser de orden $m \times n$ tal que:

$$\underline{A}\,\underline{H} = \underline{I}_n$$

Similarmente para encontrar la inversa por la izquierda de la misma matriz $\underline{A}$, $\underline{G}$ debe ser de orden $m \times n$, tal que:

$$\underline{G}\,\underline{A} = \underline{I}_m$$

TEOREMA

Si existen tanto la matriz inversa por la izquierda como la inversa por la derecha para una matriz $\underline{A}$ cualquiera, entonces ambas inversas son idénticas y ésta inversa común es única.

PRUEBA

Supóngase que $\underline{G}$ es la matriz inversa por la izquierda de $\underline{A}$, y $\underline{H}$ la matriz inversa por la derecha de la misma matriz $\underline{A}$, entonces:

$$\underline{G} = \underline{G}\,\underline{I} = \underline{G}(\underline{A}\,\underline{H}) = \underline{G}\,\underline{A}\,(\underline{H}) = \underline{I}\,\underline{H} = \underline{H}$$

Si existen las matrices $\underline{G}$ y $\underline{H}$ para una matriz $\underline{A}$ dada, entonces éstas serán iguales y se conoce como la matriz inversa común de $\underline{A}$ y se simboliza como $\underline{A}^{-1}$.

Si una matriz cuadrada $\underline{A}$ posee inversa, se dice que $\underline{A}$ es *no singular* o es de rango *completo*, en caso contrario se tiene entonces que $\underline{A}$ es *singular*.

TEOREMA

Si $\underline{A}$ y $\underline{B}$ son matrices no singulares, entonces:

a) $(\underline{A}^{-1})^{-1} = \underline{A}$

b) $(\underline{A}\,\underline{B})^{-1} = \underline{B}^{-1}\,\underline{A}^{-1}$

Considérese que $\underline{B}^{-1}\,\underline{A}^{-1}$ es la inversa por la izquierda de la matriz $\underline{A}\,\underline{B}$, entonces:

$$(\underline{B}^{-1}\underline{A}^{-1})(\underline{A}\,\underline{B}) = \underline{B}^{-1}\,(\underline{A}^{-1}\,\underline{A})\underline{B} = \underline{B}^{-1}\,\underline{I}\,\underline{B} = \underline{B}^{-1}\,\underline{B} = \underline{I}$$

$\therefore$ $\underline{B}^{-1}\underline{A}^{-1}$ es la inversa por la izquierda de $\underline{A}\,\underline{B}$

Considérese ahora que $\underline{B}^{-1}\,\underline{A}^{-1}$ es la inversa por la derecha de la matriz $\underline{A}\,\underline{B}$; de esta manera se tiene:

$$(\underline{A}\,\underline{B})\,(\underline{B}^{-1}\underline{A}^{-1}) = \underline{A}(\underline{B}\underline{B}^{-1})\,\underline{A}^{-1} = \underline{A}\,\underline{I}\,\underline{A}^{-1} = \underline{A}\,\underline{A}^{-1} = \underline{I}$$

$\therefore$ $\underline{B}^{-1}\,\underline{A}^{-1}$ es la inversa por la derecha de $\underline{A}\,\underline{B}$

Así, $\underline{B}^{-1}\ \underline{A}^{-1}$ es tanto la inversa por la izquierda como por la derecha de $\underline{A}\,\underline{B}$ y es la inversa única, por lo tanto se tiene:

$$(\underline{A}\,\underline{B})^{-1} = \underline{B}^{-1}\ \underline{A}^{-1}$$

CALCULO DE LA MATRIZ INVERSA

Sea $\underline{A}$ una matriz cuadrada de orden n no singular, es decir, el determinante de $\underline{A}$ es diferente de cero. La matriz inversa ($\underline{A}^{-1}$) se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$\underline{A}^{-1} = \frac{\text{Adj } \underline{A}}{|\underline{A}|}$$

donde la matriz Adj $\underline{A}$ se obtiene al sustituir cada elemento de la matriz transpuesta de $\underline{A}$ por su cofactor.

Considérese el siguiente caso:

Sea una matriz $\underline{A}$ de orden 3:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

entonces, la matriz transpuesta de $\underline{A}$ es:

$$\underline{A}^{T} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{12} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

así, la matriz adjunta de $\underline{A}$ es:

$$\text{Adj } \underline{A} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{22} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} \\ a_{12} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

En el estudio de los sistemas dinámicos existe una rama que está dedicada al análisis formal de los sistemas eléctricos, esta rama es de gran importancia debido a que la mayoría de los sistemas físicos reales cuentan con una parte eléctrica. Para el análisis de los sistemas eléctricos se tienen algunos teoremas de carácter general, entre los que se pueden citar:

a) Teorema de Superposición

b) Teorema de Sustitución

c) Teorema de Reciprocidad

d) Teorema de Tellegen

e) Teorema de Thévenin

f) Teorema de Norton

g) Teorema de Rosen

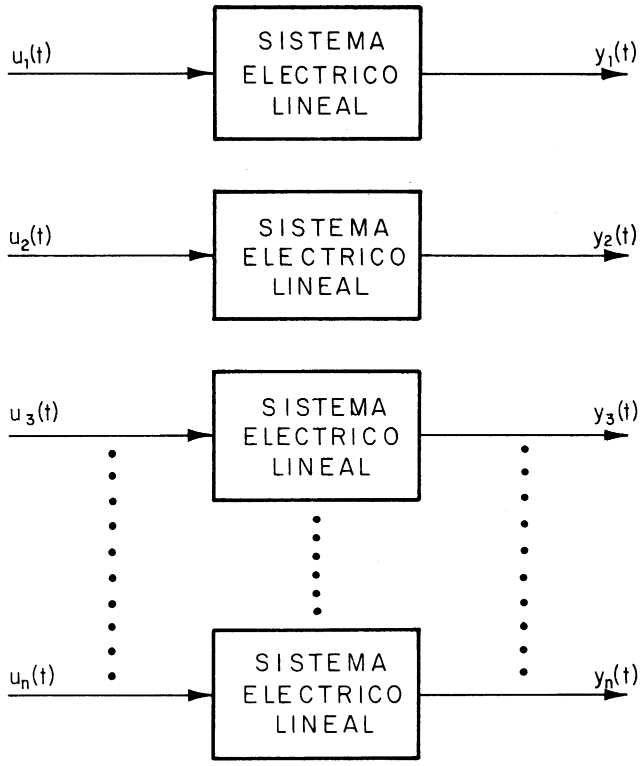
h) Teorema de Millman

i) Teorema de Máxima Transferencia de Potencia

A continuación se presentan los enunciados de los teoremas citados anteriormente, la prueba de cada uno de los teoremas resulta ser reltativamente simple, sin embargo, en este caso no se presenta ya que puede ser encontrada en la mayor parte de los libros de teoría de circuitos.

a) TEOREMA DE SUPERPOSICION

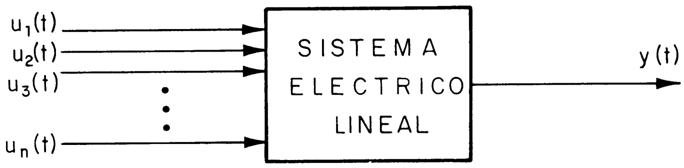
El teorema de superposición establece que un sistema eléctrico lineal excitado por n fuentes externas o entradas $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$, ..., $u_n(t)$ aplicadas individualmente producirán n salidas $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$, ..., $y_n(t)$, esto es:



si las n excitaciones externas son aplicadas simultánea-mente, la salida producida por el sistema es:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} y_i(t)$$

o bien:

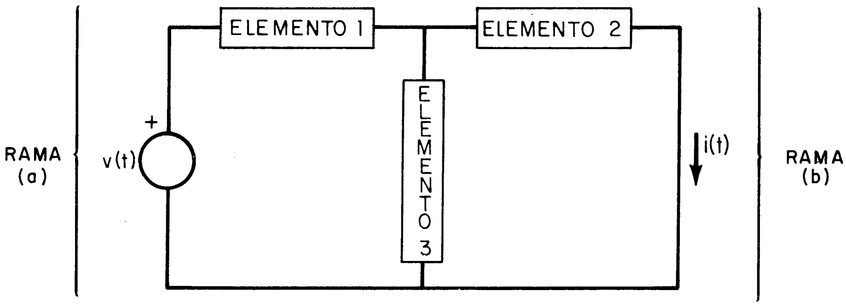


b) TEOREMA DE SUSTITUCION

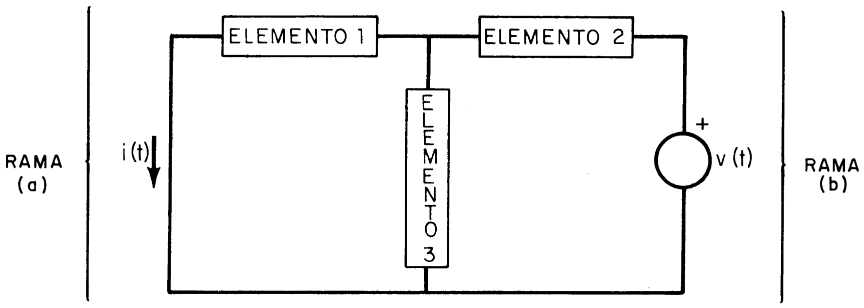
Este teorema establece que en un sistema eléctrico de configuración arbitraria cualquier elemento puede ser reemplazado, ya sea por una fuente independiente de voltaje o corriente con el mismo valor de voltaje o corriente del elemento considerado sin afectar el voltaje o corriente del resto de los elementos del sistema eléctrico.

c) TEOREMA DE RECIPROCIDAD

Considérese un sistema eléctrico lineal como el mostrado en la siguiente figura:



El teorema de reciprocidad establece que al aplicar un voltaje externo V(t) a cualquier rama del sistema eléctrico bilateral, éste producirá una cierta corriente i(t) en cualquier otra rama del sistema (véase la figura anterior), si el voltaje externo V(t) se aplica a la rama (b) del sistema, éste producirá la misma corriente i(t) en la rama (a) (véase la figura siguiente):



d) TEOREMA DE TELLEGAN

Este teorema se aplica a cualquier sistema eléctrico lineal de parámetros concentrados y se refiere básicamente al principio de la conservación de la energía en el sistema.

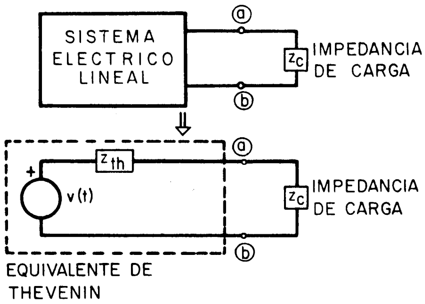
Considérese un sistema eléctrico con n elementos a través de los cuales fluyen las corrientes $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$, ..., $i_n(t)$ y los voltajes de los elementos son: $v_1(t)$, $v_2(t)$, $v_3(t)$, ..., $v_n(t)$, el teorema de Tellegan establece que la suma de los productos corriente que fluye a través del elemento k por el voltaje en el elemento k es igual a cero, esto es:

$$\sum_{k=1}^{n} v_k(t)\, i_k(t) = 0$$

e) TEOREMA DE THEVENIN

El teorema de Thévenin establece que un sistema eléctrico lineal cargado con una impedancia arbitraria puede ser reemplazado por su equivalente de Thévenin sin afectar el voltaje y corriente en las terminales donde está conectada la impedancia de carga.

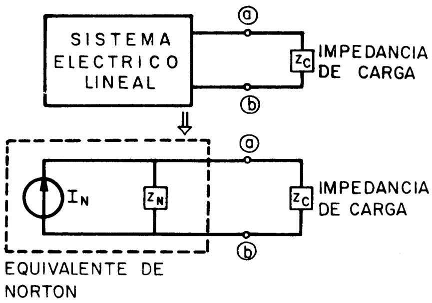
El equivalente de Thévenin consiste en una fuente de voltaje equivalente V_{th} y una impedancia equivalente Z_{th} conectadas en serie. La impedancia Z_{th} es la impedancia equivalente entre los puntos (a) y (b) del sistema original cuando las fuentes de voltaje y corriente que contenga éste han sido anuladas. El voltaje V_{th} es igual al voltaje medido entre las terminales (a) y (b) cuando la impedancia de carga se ha desconectado, esquemáticamente esto es:



f) TEOREMA DE NORTON

El teorema de Norton establece que un sistema eléctrico lineal cargado con una impedancia arbitraria puede ser reemplazado por su equivalente de Norton sin afectar el voltaje y corriente en las terminales donde está conectada la impedancia de carga.

El equivalente de Norton consiste en una fuente de corriente equivalente I_N y una impedancia equivalente Z_N conectada en paralelo. La impedancia Z_N es la equivalente entre los puntos (a) y (b) del sistema eléctrico original cuando las fuentes de voltaje y corriente que contenga éste han sido anuladas. La corriente I_N es igual a la que fluye a través de los puntos (a) y (b) cuando la impedancia de carga ha sido reemplazada por un cortocircuito, esquemáticamente esto es:



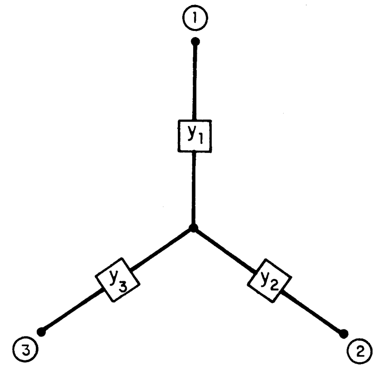
g) TEOREMA DE ROSEN

Este teorema establece que un sistema eléctrico con n admitancias $Y_1(S)$, $Y_2(S)$, $Y_3(S)$, ..., $Y_n(S)$ conectadas en estrella es equivalente a un sistema eléctrico con $n(n-1)/2$ admitancias comunes a una misma malla, las cuales están dadas por:

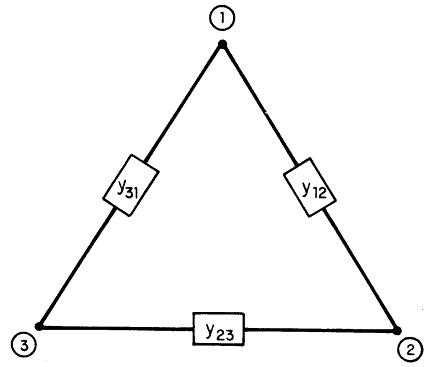
$$Y_{ij}(S) = \frac{Y_i(S)Y_j(S)}{\sum_{k=1}^{n} Y_k(S)} \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, 3, \ldots, n \\ j = i+1, i+2, i+3, \ldots, n \end{array}$$

Un caso particular de este teorema es para n igual a tres, de donde se obtienen las transformaciones de estrella a delta empleada comúnmente en circuitos trifásicos, como se muestra a continuación:

El circuito trifásico en estrella es:

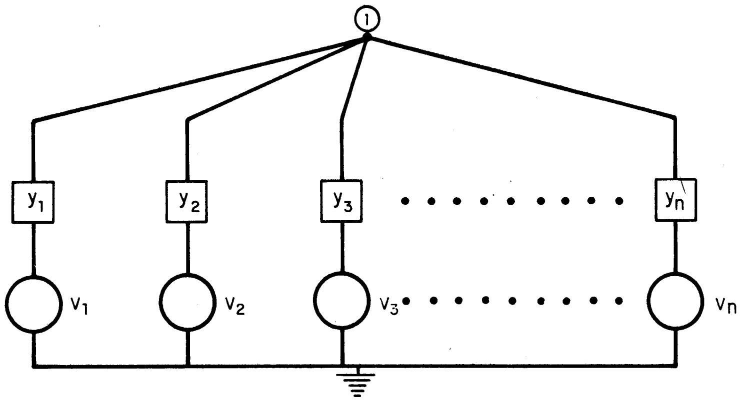


y el circuito trifásico equivalente en delta es:

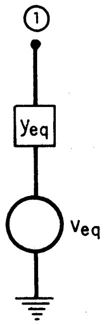


h) TEOREMA DE MILLMAN

El teorema establece que si se tiene un sistema eléctrico con n fuentes de voltaje V_1, V_2, V_3, ..., V_n con admitancias internas Y_1, Y_2, Y_3, ..., Y_n respectivamente y están conectados en paralelo como se muestra en la figura:



es posible obtener una fuente de voltaje equivalente y una admitancia equivalente de la forma:



donde:

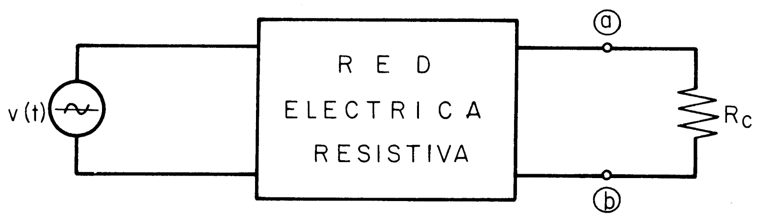
$$V_{eq} = \frac{\sum_{i=1}^{n} V_i \, Y_i}{\sum_{i=1}^{n} Y_i}$$

y:

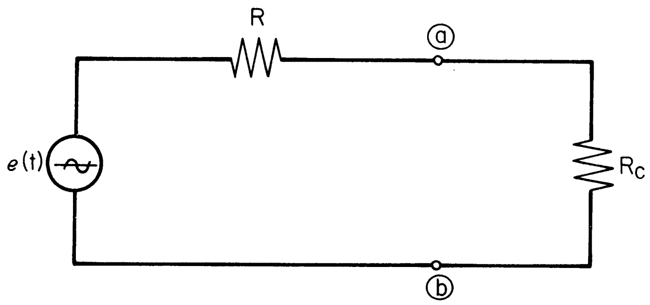
$$Y_{eq} = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

i) TEOREMA DE MAXIMA TRANSFERENCIA DE POTENCIA

Considérese un sistema eléctrico resistivo puro de configuración arbitraria como el mostrado en la siguiente figura:



mediante el teorema de Thévenin el sistema puede ser representado de la forma:



donde:

e(t): es la fuente de voltaje del equivalente de Thévenin

R: es la resistencia equivalente entre los puntos (a) y (b)

R_c: es la resistencia de carga

El teorema de máxima transferencia de potencia establece que la resistencia equivalente del circuito (R) debe ser igual a la resistencia de carga (R_c), para que en esta última se disipe la máxima potencia.

PRUEBA

Del circuito anterior, se tiene que la corriente que fluye a través de la resistencia de carga está dada por:

$$i = i_{Rc} = \frac{e(t)}{R + R_c} \qquad \ldots (1)$$

y la potencia disipada en la resistencia de carga es:

$$P_{Rc} = R_c \, i_{Rc}^2 \qquad \ldots (2)$$

sustituyendo la ecuación (1) en la (2) se obtiene:

$$P_{R_c} = \frac{R_c}{(R + R_c)^2} \, e(t)^2 \qquad \ldots (3)$$

para determinar la máxima transferencia de potencia en la resistencia de carga, es necesario derivar la ecuación (3) con respecto a R_c, esto es:

$$\frac{\partial P_{R_c}}{\partial R_c} = \frac{e(t)^2 \, (R - R_c)}{(R + R_c)^3} \qquad \ldots (4)$$

Para obtener cuál debe ser el valor de R_c, para que en ésta se disipe la máxima potencia se iguala la ecuación (4) a cero:

$$\frac{e(t)^2 \, (R - R_c)}{(R - R_c)^3} = 0 \qquad \ldots (5)$$

de la ecuación (5) se obtiene:

$$R_c = R$$

finalmente, se tiene que en un sistema de este tipo la máxima eficiencia es del 50 %, esto es:

$$\eta = \frac{P_{SALIDA}}{P_{ENTRADA}} \qquad \ldots (6)$$

en este caso:

$$P_{SALIDA} = P_{R_c} \qquad \ldots (7)$$

y:

$$P_{ENTRADA} = e(t)\, i \qquad \ldots (8)$$

sustituyendo la ecuación (3) en la (7) y la ecuación (1) en la (8), se obtiene:

$$P_{SALIDA} = \frac{R_c}{(R + R_c)^2}\, e(t)^2 \qquad \ldots (9)$$

y:

$$P_{ENTRADA} = \frac{1}{R + R_c}\, e(t)^2 \qquad \ldots (10)$$

por lo tanto, la máxima eficiencia expresada en porcentaje es:

$$\%\, \eta_{máx} = \frac{P_{SALIDA}}{P_{ENTRADA}} \times 100 \qquad \ldots (11)$$

sustituyendo las ecuaciones (9) y (10) en la (11), se tiene:

$$\%\, \eta_{máx} = \frac{R_c}{R + R_c} \times 100 \qquad \ldots (12)$$

sin embargo, $R_c = R$ y por lo tanto, la máxima eficiencia es:

$$\boxed{\%\, \eta_{máx} = 50\ \%}$$

APENDICE F. SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES

El SI (Sistema Internacional) integrado por siete unidades de base o fundamentales que son dimensionalmente independientes y se muestran en la siguiente tabla:

MAGNITUD	NOMBRE	SIMBOLO
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Intensidad de corriente eléctrica	Ampere	A
Temperatura termodinámica	Kelvin	K
Intensidad luminosa	candela	cd
Cantidad de sustancia	mol	mol

UNIDADES SUPLEMENTARIAS

Se les denomina así, ya que aún no se toma la decisión de si pertenecen a las unidades de base o a las derivadas. Las unidades suplementarias son:

MAGNITUD	NOMBRE	SIMBOLO
Angulo plano	radián	rad
Angulo sólido	esterradián	sr

UNIDADES DERIVADAS

Estas se obtienen como una consecuencia de combinar algebraicamente las unidades de base o estas últimas y las unidades suplementarias para definir un comportamiento físico.

Algunas de estas unidades pueden ser reemplazadas por nombre y símbolo especiales y a su vez pueden servir para formar otras unidades derivadas.

Las principales unidades derivadas empleadas en la Dinámica de Sistemas Físicos son:

MAGNITUD	NOMBRE ESPECIAL	EXPRESION EN UNIDADES SI DE BASE	EXPRESION EN OTRAS UNIDADES SI
Tensión Potencial eléctrico Voltaje	Volt	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$	V
Fuerza	Newton	$m \cdot kg \cdot s^{-2}$	N
Velocidad		$m \cdot s^{-1}$	
Aceleración		$m \cdot s^{-2}$	
Par torsional Momento torsional		$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$	$N \cdot m$
Velocidad angular		$rad \cdot s^{-1}$	
Aceleración angular		$rad \cdot s^{-2}$	
Presión	Pascal	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$	Pa
Gasto volumétrico		$m^3 \cdot s^{-1}$	
Flujo de calor Flujo térmico	Watt	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$	W
Densidad		$m^{-3} \cdot kg$	
Peso volumétrico		$m^{-2} \cdot kg \cdot s^{-2}$	$\frac{N}{m^3}$

Area		m^2	
Volumen		m^3	
Frecuencia	Hertz	s^{-1}	Hz
Resistencia eléctrica Impedancia	Ohm	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$	Ω
Conductancia eléctrica Admitancia	Mho	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^3 \cdot A^2$	℧
Constante de un amortiguador		$kg \cdot s^{-1}$	$\frac{N \cdot s}{m}$
Constante de un amortiguador rotacional		$m^2 \cdot kg \cdot s^{-1} \cdot rad^{-1}$	$\frac{N \cdot m \cdot s}{rad}$
Resistencia térmica		$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^3 \cdot k$	$\frac{K}{W}$
Capacitancia eléctrica	Farad	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$	F
Inercia Capacitancia mecánica		$kg \cdot m^2 \cdot rad^{-1}$	
Capacitancia hidráulica		$m^4 \cdot kg^{-1} \cdot s^2$	$\frac{m^3}{Pa}$
Capacitancia térmica		$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}\ K^{-1}$	$\frac{N \cdot m}{K}$
Inductancia eléctrica	Henry	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$	H
Constante de un resorte		$kg \cdot s^{-2}$	$\frac{N}{m}$
Constante de un resorte torsional		$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot rad^{-1}$	$\frac{N \cdot m}{rad}$
Inductancia hidráulica Inercia fluídica		$m^{-4} \cdot kg$	$\frac{Pa \cdot s^2}{m^3}$
Resistencia hidráulica		$m^{-4} \cdot kg \cdot s^{-1}$	$\frac{Pa \cdot s}{m^3}$

Para evitar manejar o representar cantidades con muchos ceros, esto es, cantidades muy pequeñas o muy grandes, se suelen emplear prefijos con los cuales se forman múltiplos y submúltiplos decimales de las unidades del SI. Los prefijos que se emplean son:

PREFIJO	SIMBOLO	FACTOR
exa	E	10^{18}
peta	P	10^{15}
tera	T	10^{12}
giga	G	10^{9}
mega	M	10^{6}
kilo	k	10^{3}
hecto	h	10^{2}
deca	da	10^{1}
deci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
mili	m	10^{-3}
micro	µ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}
atto	a	10^{-18}

REGLAS GENERALES PARA LA ESCRITURA DE LOS SIMBOLOS DE LAS UNIDADES DEL SI*

1. Los símbolos de las unidades deben ser expresados con minúsculas, con excepción de los que se derivan de nombres propios. Por ejemplo:

   kg ; s ; A ; N

2. Después del símbolo de la unidad, no se debe colocar punto. Por ejemplo:

   A ; Pa ; rad

3. Los símbolos de las unidades no se pluralizan. Por ejemplo:

   1s ; 25s ; 1V ; 5V

4. El símbolo de multiplicación para indicar el producto de dos o más unidades debe ser de preferencia un punto. Este punto puede suprimirse cuando la falta de separación de los símbolos de las unidades que intervengan en el producto, no se preste a confusión. Por ejemplo:

   N · m ; N m también m · N pero no: m N
   que se confunde con milinewton

5. Cuando una unidad derivada se forma por el cociente de dos unidades, se puede utilizar una línea inclinada, una línea horizontal o bien potencias negativas. Por ejemplo:

   m/s ; $\frac{m}{s}$ ó ms^{-1}

*Norma Oficial Mexicana NOM-Z-1-1981. "Sistema General de Unidades de Medida. Sistema Internacional de Unidades (SI)". Dirección General de Normas, Secretaría de Patrimonio y Fomento Industrial. México, D.F., 1981.

6. No deberá utilizarse más de una línea inclinada a menos que se agreguen paréntesis. En los casos complicados deben utilizarse potencias negativas o paréntesis. Por ejemplo:

$$N/m^3, \quad N \cdot m^{-3} \text{ ó } \frac{N}{m^3}$$

7. Los múltiplos y submúltiplos de las unidades se forman anteponiendo al nombre de éstos, los prefijos correspondientes con excepción de los nombres de los múltiplos y submúltiplos de la unidad de masa en los cuales los prefijos se antepondrán a la palabra "gramo", Por ejemplo:

$$mg \; ; \quad Mg \; ; \quad kN$$

8. Los símbolos de los prefijos deben ser impresos sin espacio entre el símbolo del prefijo y el símbolo de la unidad. Por ejemplo:

$$mH \; ; \quad \mu F \; ; \quad kV$$

9. Si un símbolo que contiene a un prefijo está afectado de un exponente, indica que el múltiplo o el submúltiplo de la unidad está elevado a la potencia expresada por el exponente. Por ejemplo:

$$1cm^3 = (10^{-2}\ m)^3 = 10^{-6}\ m^3$$

10. Los prefijos compuestos, deben evitarse. Por ejemplo:

$$1nF \quad \text{pero no:} \quad 1\ m\mu F$$

BIBLIOGRAFIA

AUSLANDER, D.M., TAKAHASHI, Y., RABINS, M.J. *Introducción a Sistemas y Control*, McGraw - Hill, México, 1976.

BARNETT, S., *Introduction to Mathematical Control Theory*, Clarendon Press, Oxford, 1975.

BOYLESTAD, R.L., *Análisis Introductorio de Circuitos*, Trillas, México, 1980.

BROGAN, W.L., *Modern Control Theory*, Quantum Publishers Series, New York, 1974.

CANALES, R.R., BARRERA, R.R., *Análisis de Sistemas Dinámicos y Control Automático*, Limusa, México, 1980.

CANNON, R.H., *Dynamics of Physical Systems*, McGraw - Hill, New York, 1967.

CLOSE, C.M., FREDERICK, D.K., *Modeling and Analysis of Dynamic Systems*, Houghton Mifflin, Boston, 1978.

D'AZZO, J.J., HOUPIS, C.H., *Linear Control Systems Analysis and Desing: Conventional and Modern*, McGraw - Hill, New York, 1975.

DAVIS, S.A., *Feedback and Control Systems*, Simon and Schuster, New York, 1974.

DeRUSSO, P.M., ROY, R.J., CLOSE, C.M., *State Variables for Engineers*, John Willey & Sons, New York, 1965.

DESOER, C.A., *Notes for a Second Course on Linear Systems*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1970.

DESOER, C.A., KUH, E.S., *Basic Circuit Theory*, McGraw - Hill, New York, 1969.

DiSTEFANO, III, J.J., STUBBERUD, A.R., WILLIAMS, I.J., *Retroalimentación y Sistemas de Control*, McGraw - Hill, Serie Schaum, México, 1972.

DOEBELIN, E.O., *Measurement Systems Analysis and Design*, McGraw - Hill, New York, 1975.

DORF, R.C., *Modern Control Systems*, Addison-Wesley, Massachusets, 1974.

ELGERD, O.I., *Control Systems Theory*, McGraw-Hill, Tokyo, 1967.

EMANUEL, P., LEFF, E., *Introduction to Feedback Control Systems*, McGraw-Hill, New York, 1979.

ESPINOSA, E.I., *Sistemas Lineales Multivariables*, DEPFI UNAM, México, 1978.

GABEL, R.A., ROBERTS, R.A., *Señales y Sistemas Lineales*, Limusa, México, 1975.

GANTMACHER, F.R., *The Theory of Matrices*, Vol. I and II, Chelsea, Publishing Company, New York, 1960.

GIECK, K., *Manual de Fórmulas Técnicas*, Representaciones y Servicios de Ingeniería, México, 1977.

GORDON, G., *System Simulation*, Prentice - Hall, New Jersey, 1969.

GREENSITE, A.L., *Control Theory: Volume I, Elements of Modern Control Theory*, Spartan Books, New York, 1970.

HARRISON, H.L., BOLLINGER, J.G., *Controles Automáticos*, Trillas, México, 1969.

KALMAN, R.E., "Mathematical Description of Linear Dynamical Systems", Research Institute for Advanced Studies (RIAS), Technical Report 62-18, Baltimore, November, 1962.

KUO, B.C., *Automatic Control Systems*, Prentice-Hall, New Jersey, 1975.

LAGO, G., BENNINGFIELD, L.M., *Teoría de los Sistemas y Circuitos*, Limusa, México, 1984.

LIU, C.L., LIU, J.W.S., *Linear Systems Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1975.

McGILLEM, C.D., COOPER, G.R., *Continuous and Discrete Signal and System Analysis*, Holt Rinehart and Winston, New York, 1974.

MEISEL, J., *Principios de Conversión de Energía Electromecánica*, McGraw - Hill, México, 1966.

OGATA, K., *Ingeniería de Control Moderna*, Prentice - Hall, México, 1983.

OGATA, K., *System Dynamics*, Prentice - Hall, New Jersey, 1978.

POLAK, E., WONG, E., *Notes for a First Course on Linear Systems*, Van Nostrand, Reinhold, New York, 1970.

RAVEN, F.H., *Automatic Control Engineering*, McGraw - Hill, Tokyo, 1968.

RICHARDS, R.J., *An Introduction to Dynamics & Control*, Longman Group, London, 1979.

ROMANOWITZ, H.A., *Introducción a los Circuitos Eléc tricos*, C.E.C.S.A., México, 1979.

RUBINSTEIN, M.F., *Patterns of Problem Solving*, Prentice - Hall, New Jersey, 1975.

SHUMAN, J.N., *Mathematical Model Building and Public Policy: The Games some Bureaucrats Play*, Tech. Forecasting and Social Change, Vol. 9 pp. 304 - 334, 1976.

SMALL WOOD, R.D., *A Decision Analysis of Model Selection*, IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, Vol. SMC - 4 No. 3, pp. 333 - 342, Sept. 1968.

SPIEGEL, M.R., *Manual de Fórmulas y Tablas Matemáticas*, McGraw - Hill, Serie Schaum, México, 1970.

TAKAHASHI, T., *Mathematics of Automatic Control*, Wolt Rinehart and Winston, New York, 1966.

TAKAHASHI, Y., RABINS, M.J., AUSLANDER, D.M., *Control and Dynamic Systems*, Addison - Wesley, Massachusets, 1972.

INDICE ANALITICO